

Г. АГРИНБЕРГ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И МАГНИТНЫХ
ЯВЛЕНИЙ



А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

Г. А. ГРИНБЕРГ

член-корреспондент

АН СССР

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И МАГНИТНЫХ
ЯВЛЕНИЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА · 1948 · ЛЕНИНГРАД

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
АКАДЕМИК А. Ф. И О Ф Ф Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга имеет целью систематическое изложение ряда методов эффективного решения некоторых классов проблем, относящихся к расчету электрических, магнитных и волновых полей, создаваемых заданным распределением источников поля—зарядов и токов, а также родственных им проблем теории теплопроводности, акустики и т. д., к задаче о нахождении полей, способных вызывать заданное движение зарядов и обусловить желаемый характер формирования пучков заряженных частиц, и к вопросам, возникающим при рассмотрении таких процессов, при которых нахождение поля не может быть отделено от решения задачи о движении зарядов в этом поле (проблемы электроники при учете влияния объемных зарядов).

Как показывает самое заглавие книги, она ни в какой мере не претендует на полноту изложения различных существующих методов. Методы, достаточно хорошо освещенные в литературе, например, метод конформного преобразования, методы, основанные на введении функции Грина, и некоторые другие, в книге даже не затрагиваются. Некоторые методы рассматриваются только попутно, частью с несколько необычной точки зрения. Каждый вопрос разбирается при этом лишь в той мере и в таком плане, как это представлялось автору целесообразным для выяснения характерных особенностей подхода к рассматриваемой проблеме и методов ее решения, вне зависимости от наличия по тому же вопросу еще каких-либо материалов и работ.

Значительное место уделено вопросу об интегрировании уравнений математической физики в тех случаях, когда возможно разделение переменных, т. е. когда соответствующие однородные уравнения допускают частные решения в виде произведения функций от отдельных переменных,¹ а граничные условия линейны относительно искомой функции и ее производных и принадлежат к некоторым определенным типам.

При решении подобных задач обычно применяется хорошо известный метод частных решений (метод Фурье—Ламе). Непосредственное применение этого метода приводит, однако, сплошь и рядом, даже в простейших случаях, к трудностям, которые могут быть преодолены только с помощью искусственных приемов,² чуждых существу задачи и сильно осложняющих ее решение. Подобные трудности возникают, например, уже в столь элементарной задаче, как задача Неймана для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для прямоугольной области. Непосредственное применение метода частных решений к этой задаче, как правило, невозможно, поскольку обычно невозможно разложить искомую функцию на две другие, из которых каждая удовлетворяла бы по крайней мере, частично однородным граничным условиям.³

В подобных случаях обычно рекомендуется, чтобы выйти из затруднения, сперва преобразовать данную задачу в другую, соответствующую уже нулевым граничным

¹ А также в некоторых других, более общих.

² Чаще всего, это приведение к однородным (нулевым) граничным условиям.

³ Ср. п. 10. 3.

условиям.¹ Для этого нужно найти какую-нибудь такую дважды дифференцируемую внутри рассматриваемого прямоугольника функцию $F(x, y)$, которая на двух противоположащих сторонах его удовлетворяла бы тем же граничным условиям, как u , положить $u = \varphi + F(x, y)$, где φ — новая функция, и затем решать неоднородное уравнение $\Delta\varphi = -\Delta F$ при уже однородных, на указанных сторонах, граничных условиях.

Такой метод решения задачи, теоретически приемлемый, практически сплошь и рядом приводит к весьма сложным выкладкам из-за сложности как правой части уравнения $\Delta\varphi = -\Delta F$, так и получающихся для φ новых граничных условий². К тому же и с чисто принципиальной стороны представляется мало удовлетворительной необходимость нахождения и введения в решение некоторой вспомогательной функции F , в заметной степени произвольной и, во всяком случае, совершенно чуждой существу задачи, поскольку она, будучи „протаскана“ через все вычисления, должна, в конце концов, исключиться из окончательного решения. Так как аналогичная трудность возникает всякий раз при попытке решения по методу частных решений задачи Неймана для уравнений Лапласа, Пуассона, а также в ряде более общих задач, то возникает естественный вопрос, в какой мере это обстоятельство связано с существом дела, и не обязано ли оно своим происхождением просто недостаточной общности метода частных решений. Сомнение в адекватности метода частных решений еще усугубляется тем, что даже в применении к еще более простой, в известном смысле, задаче Дирихле для прямоугольника, метод этот, хотя и ведет к решению задачи, но дает его сплошь и рядом в такой сложной, можно сказать, извращенной форме, что распознавание истинной природы этого решения становится весьма нелегким делом.³

¹ См., например: Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики т. I, стр. 262, ГТГИ, М.—Л., 1933.

Можно также свести решение задачи с неоднородными граничными условиями к задаче о нахождении функции Грина для данной области при граничных условиях соответствующего типа. Но, во-первых, самое нахождение функции Грина может быть, как правило, осуществлено только с помощью какого-то определенного метода, каковым, естественнее всего, должен был бы явиться, в случае уравнений с разделяющимися переменными, метод частных решений. Однако метод этот не всегда приводит к цели, например, он не пригоден для нахождения функции Неймана в случае уравнения Лапласа и задания на границах области значений нормальной производной искомой функции (см. ниже). Во-вторых, построение функции Грина во многих случаях является значительно более сложным процессом, чем нахождение решения однородного уравнения с неоднородными граничными условиями с помощью излагаемого в § 15 метода.

² Подробнее об этом см. в статье автора в Изв. АН СССР, сер. физ., X, № 2, 141, 1946, § 2, пп. 2—3.

³ Это очень отчетливо видно хотя бы на примере задачи, разобранный в п. 6.4, где для функции $u = xy$, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и граничными условиями $(u)_{x=0} = (u)_{y=0} = 0$, $(u)_{x=a} = ay$, $(u)_{y=b} = bx$, получается, при пользовании обычным методом частных решений, выражение (6, 40):

$$u = \frac{2ab}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}} \sin \frac{\pi ky}{b} + \frac{2ba}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi ky}{a}}{k \operatorname{sh} \frac{\pi kb}{a}} \sin \frac{\pi kx}{a}, \quad (A)$$

в котором нелегко распознать функцию $u = xy$. Можно даже сказать, что самая идея о том, что правая часть формулы (A) равна просто xy , вряд ли могла бы прийти в голову, если бы не иметь оснований подозревать это заранее.

Все эти обстоятельства, вместе взятые, отчетливо свидетельствуют о недостаточной адекватности метода частных решений и ставят вопрос о таком его обобщении, которое было бы свободно от указанных недостатков.

Такой метод был недавно предложен автором этой книги.¹ В общем виде он излагается в § 15. Частные случаи его разбираются ранее в §§ 8—14. Этот метод дает возможность решать совершенно типовым, единообразным и, как нам представляется, наиболее естественным образом все задачи указанного выше типа, в силу чего мы позволили себе положить его в основу всего изложения.² При этом избегается необходимость сведения решения рассматриваемой задачи к одной или нескольким задачам с хотя бы частично однородными граничными условиями, как это обычно требуется в случае, если решение ищется по методу Фурье—Ламе. Выше уже указывалось, насколько это существенно при решении, например, задач типа проблемы Неймана для уравнения Лапласа. Однако, и в случае задач, легко разложимых на ряд задач с частично однородными граничными условиями, все же, при случае, может быть выгоднее пользоваться предлагаемым нами методом, как это можно видеть хотя бы на примерах, рассмотренных в п. 6. 4 и в п. п. 16.18—16.19. При этом решение задачи может быть получено в различных формах, каждая из которых имеет свою область наивыгоднейшего применения и которые обычно отличаются от той, в которой получается решение той же задачи по методу Фурье—Ламе. Тем самым, для одного и того же решения получается целый ряд различных представлений.

Существенно отметить, что находимые таким образом решения, вообще говоря, радикально отличаются от получаемых с помощью обычного метода Фурье—Ламе, поскольку они даже в случае однородных уравнений, но при хотя бы отчасти неоднородных граничных условиях, не являются суммой частных решений исходного уравнения, а дают разложение решения в ряд по некоторым собственным функциям уравнения, соответствующим разделенным переменным. Только в том, весьма частном случае, когда граничные условия однородны по всем координатам, кроме, может быть, одной, они переходят в обычное решение, получаемое по методу Фурье—Ламе, который, таким образом, оказывается лишь частным случаем значительно более общего метода.

Что касается тех рядов, которыми представляются решения, получающиеся по методу § 15, то они обладают, вообще говоря, медленной сходимостью из-за того, что разлагаемая функция удовлетворяет неоднородным граничным условиям, а собственные функции, по которым производится разложение, — однородным. Можно, однако, указать весьма простой и эффективный типовой способ улучшения сходимости этих рядов, основанный на использовании функции Грина и представляющего ее билинейного ряда для той штурм—лиувилевской задачи, по собственным функциям которой производится разложение в ряд искомого решения. Этот способ улучшения сходимости излагается в общем виде в главе XII. Частные случаи его разбираются раньше, в §§ 9, 10 и 15.

Заметим, что как главы, в которых излагаются общие основы предлагаемого метода и общий метод улучшения сходимости соответствующих рядов, так и те параграфы, в которых рассматривается применение общего метода к решению предельных задач для уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца и т. д., носят общематематический характер, и данные в них результаты могут быть непосредственно применены к решению любых других математически родственных задач теории теплопроводности, диффузии, распространения акустических волн и т. д. Специфичным является только подбор примеров, иллюстрирующих общую теорию, которые

¹ Изв. АН СССР, сер. физич., X, № 2, 141, 1946.

² Отдельные задачи могут, конечно, решаться значительно короче и проще с помощью каких-либо искусственных приемов.

почти все взяты из области электромагнитных явлений. В этом смысле содержание книги шире, чем это следует из ее заглавия.

Перечисленные вопросы составляют содержание части II книги. В дальнейших частях, — III и IV, излагается ряд более специальных методов решения статических и волновых задач. При изложении этого материала в значительной степени использованы, собственные работы автора в соответствующих областях.¹ Последние две части книги, — V и VI, посвящены изложению общей теории фокусирующего действия электрических и магнитных полей и некоторым вопросам теории электронных приборов.

В книге рассматриваются только „разрешимые“ задачи определенных классов, допускающие нахождение принципиально точного решения. Приближенные методы в книге вообще не затрагиваются. В силу этого ряд интересных и важных вопросов не нашел в книге никакого отражения. Так, например, не затронут вопрос о приближенных граничных условиях М. А. Леонтовича,² не рассмотрен предложенный им же метод параболического уравнения для решения некоторых классов волновых задач и др.

О содержании книги и о порядке изложения материала в ней в достаточной степени информирует подробное оглавление, почему мы на этом останавливаться не будем. Заметим лишь, что изложение общих методов всюду сопровождается большим количеством доведенных до конца показательных примеров, имеющих целью осветить как различные стороны и возможности излагаемых методов, так и техническую сторону соответствующих вычислений. При этом, чтобы сделать книгу доступной не только для специалистов, но и для более широких кругов читателей, все вычисления, как правило, проводятся достаточно подробно. С этой же целью добавлена вводная часть, в которой вкратце изложена постановка основных задач теории электромагнитного поля и приводится перечень родственных им задач из других областей математической физики. Добавлены также два математических дополнения в конце книги³ и даны многочисленные ссылки на справочную и учебную литературу. Остальная литература цитируется лишь постольку, поскольку она в какой-либо мере использовалась при написании книги.

Изложение ведется с той степенью строгости, которая обычна при изложении вопросов разбираемого типа в литературе, рассчитанной на физиков, а не на математиков. В частности, с чисто математической точки зрения можно рассматривать общий метод § 15, в той форме, как он здесь излагается, скорее не как строгую методику, а как эвристическое средство, дающее возможность быстрого получения решений некоторого довольно широкого класса задач математической физики, причем решения эти могут потребовать последующей проверки для установления того, в какой мере они удовлетворяют всем условиям задачи. В этом отношении положение здесь близко к тому, какое имеет место в операционном исчислении, которое в идейном отношении тесно связано с общим методом § 15 и основы которого кратко излагаются, с учетом этой связи, в главе XI.

В заключение приношу искреннюю благодарность сотруднику ЛФТИ АН СССР Я. С. Уфлянду за помощь при оформлении книги к печати и при чтении корректур.

Казань (1944) — Ленинград (1947).

Г. А. Гринберг.

¹ Особенно, статьи в ЖЭТФ, 8, 221 (1938); 9, 725 (1939); 10, 1087 (1940); 11, 536, (1941), положенные в основу изложения части III, и статьи в ДАН XXXVIII, 225 (1943); XXVI, 532 (1940).

² На поверхности раздела двух сред, из которых одна — хорошо проводящая.

³ Номера формул дополнений снабжены спереди буквой Д с индексом, указывающим номер дополнения. Так, например, (Д₂ 14) обозначает четырнадцатую формулу второго дополнения.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

Глава I

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ О НАХОЖДЕНИИ ПОЛЯ ПО ЕГО ИСТОЧНИКАМ

§ 1. Основные уравнения электромагнитного поля

1.1. Основные законы электромагнитного поля в непрерывных средах даются системой уравнений Максвелла, которые в общем случае могут быть записаны в следующей форме:¹

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1,2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1,3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1,4)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы электрического и магнитного поля, \mathbf{D} и \mathbf{B} — векторы диэлектрического смещения и магнитной индукции, а \mathbf{j} — вектор плотности токов, обусловленных перемещением электрических зарядов в рассматриваемой точке среды.

Если ввести в рассмотрение вектор \mathbf{C} плотности полного тока, представляющий собой сумму плотности тока смещения и плотности \mathbf{j} токов, обусловленных перемещением зарядов в рассматриваемой точке, т. е.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1,5)$$

то уравнение (1,1) может быть переписано в такой форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{C}. \quad (1,6)$$

¹ Мы на всем протяжении книги пользуемся гауссовой системой единиц, так что электрические величины выражены в абсолютной электростатической системе, а магнитные — в абсолютной электромагнитной системе.

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0, \quad (1,7)$$

т. е. что полный ток не имеет источников.

Согласно (1,4), \mathbf{B} также не имеет источников, т. е. является вихревым (соленоидальным) вектором, так что всегда можно положить

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (1,8)$$

где \mathbf{A} — некоторый новый вектор, называемый вектор-потенциалом поля.

Вводя значение \mathbf{B} из (1,8) в (1,2), найдем, что

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

откуда следует, что всегда можно положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1,9)$$

где φ — некоторая скалярная функция координат и времени, — так называемый скалярный потенциал поля.

В случае изотропных сред, свойства которых могут быть описаны посредством независящих от времени и от разыгрывающихся в среде электромагнитных процессов величин ϵ , μ и σ , т. е. посредством диэлектрической постоянной, магнитной проницаемости и проводимости, причем

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1,10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1,11)$$

уравнения (1,1) — (1,4) могут быть переписаны в таком виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (1,12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1,13)$$

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (1,14)$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \quad (1,15)$$

где под $\mathbf{j}^{(e)}$ подразумевается плотность тех „первичных“ („сторонних“) токов, которые происходят от каких-либо действующих в рассматриваемой точке сторонних электродвижущих сил и которые не связаны с токами проводимости, текущими в рассматриваемой среде.¹

1.2. Уравнения (1,1) — (1,4) и (1,12) — (1,15) выражают дифференциальную форму законов электромагнитного поля. В интегральной форме эти же законы выглядят следующим образом:

$$\int_{\mathcal{O}} (\mathbf{H} ds) = \int_{\mathcal{O}} H_s ds = \frac{4\pi}{c} \int_{(f)} C_n df, \quad (1,16)$$

$$\int_{\mathcal{O}} (\mathbf{E} ds) = \int_{\mathcal{O}} E_s ds = -\frac{1}{c} \int_{(f)} B_n df = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1,17)$$

¹ Иными словами, это токи, обусловленные заданными движениями внесенных извне в среду зарядов, причем движения эти вызываются внешними по отношению к самому электромагнитному полю причинами и от этого поля совершенно не зависят.

$$\int_{(f)} D_n df = 4\pi \int_{(v)} \rho d\tau = 4\pi e, \quad (1,18)$$

$$\int_{(f)} B_n df = 0. \quad (1,19)$$

Здесь в первых двух уравнениях интегрирование в левой части производится по любому замкнутому контуру s ($d\mathbf{s}$ — векторный элемент длины контура), а в правой — по любой поверхности, опирающейся своими краями на этот контур (рис. 1), причем направление нормали \mathbf{n} к поверхности сопоставляется направлению обхода контура по правилу правого винта. В уравнениях (1,18) и (1,19) (f) — замкнутая поверхность, v — ограниченный ею объем, а \mathbf{n} — внешняя нормаль к f . $\Phi = \int_{(f)} B_n df$ — поток индукции,

пронизывающий площадь контура, e — полный заряд внутри объема v .

Уравнения (1,17) и (1,16) выражают соответственно интегральные формы закона индукции (линейный интеграл электрического вектора по замкнутому контуру равен уменьшению в единицу времени потока магнитной индукции через этот контур) и закона, связывающего работу магнитных сил при обходе по контуру с охватываемым контуром током (работа магнитных сил равна умноженному на $\frac{4\pi}{c}$ полному току),¹ тогда как уравнения (1,18) и (1,19) относятся к потокам вектора смещения и потока индукции через замкнутую поверхность.

К уравнениям (1,16) — (1,19) можно еще добавить интегральную форму закона, выражаемого уравнением (1,7). Именно, вычисляя полный ток, вытекающий из какой-либо замкнутой поверхности f , ограничивающей объем v , найдем:

$$\int_{(f)} C_n df = \int_{(v)} \operatorname{div} \mathbf{C} d\tau = 0, \quad (1,20)$$

т. е. полный ток этот равен нулю. Это, как известно, одно из основных положений теории Максвелла.

1.3. Из интегральных законов могут быть легко получены также граничные условия для векторов поля на поверхности раздела двух разнородных сред. Именно, применяя уравнения (1,16) и (1,17) к бес-

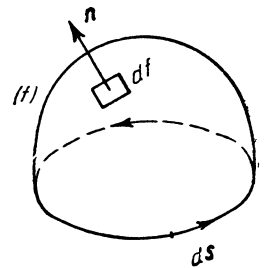


Рис. 1.

¹ При этом ток считается измеренным, как уже указывалось, в электростатических единицах. Если ток измерять в электромагнитных единицах, то работа сил равна просто $4\pi \times$ (полный ток).

конечно-малой¹ петельке $ABCD$ (рис. 2), стороны BC и AD которой стремятся к нулю в то время, как AB остается неизменной, получим условия:

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)}, \quad (1,21)$$

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)}, \quad (1,22)$$

выражающие непрерывность тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} при проходе через поверхность раздела (индексы⁽¹⁾ и⁽²⁾ у \mathbf{E} и \mathbf{H} показывают, что рассматриваются значения этих величин у самой поверхности раздела соответственно в первой и во второй средах).

При выводе первого из этих условий предполагается, что пространственная плотность токов \mathbf{j} не бесконечна, что в реальных средах всегда выполняется. Но при теоретических исследованиях иногда бывает выгодно с целью упрощения решения рассматривать идеализированный случай так называемого идеального проводника, обладающего бесконечно большой проводимостью. Для такого проводника

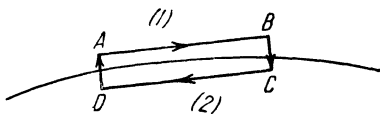


Рис. 2.

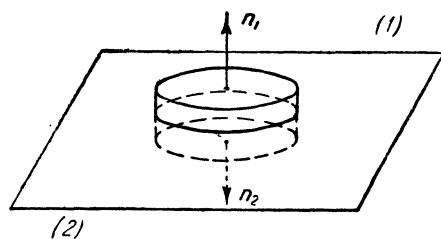


Рис. 3.

условие (1,21) перестает быть верным, ибо по поверхности его может течь конечный поверхностный ток.² Ниже мы увидим, каким условием нужно в этом случае заменить соотношение (1,21).

Применяя далее уравнения (1,19) и (1,20) к бесконечно-малой плоской коробке (рис. 3), торцы которой параллельны элементу поверхности раздела в рассматриваемой точке, а высота стремится к нулю, получим условия для нормальных составляющих \mathbf{B} и \mathbf{C} , именно:

$$\mathbf{B}_n^{(1)} = \mathbf{B}_n^{(2)}, \quad (1,23)$$

$$\mathbf{C}_n^{(1)} = \mathbf{C}_n^{(2)}, \quad (1,24)$$

т. е. составляющие эти непрерывны при проходе через поверхность раздела.

Тот же прием дает при использовании уравнения (1,18) соотношение

$$D_{n_1}^{(1)} + D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\eta, \quad (1,25)$$

где \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — нормали к рассматриваемому элементу поверхности раздела, направленные соответственно внутрь первой и второй сред,

¹ Физически бесконечно-малой.

² Т. е. конечный ток в слое, толщина которого при такой идеализированной постановке задачи равна нулю.

а η — это поверхностная плотность электрических зарядов (истинных, т. е. внесенных извне) на этом элементе поверхности. Следует заметить, что уравнение (1,25) является собственно граничным условием только в случае электростатических процессов, когда задана поверхностная плотность η зарядов на поверхности раздела. При наличии же в среде токов, плотность η будет, вообще говоря, меняться со временем, так что соотношение (1,25) не является граничным условием для вектора \mathbf{D} , а только позволяет найти поверхностную плотность η во всякий момент времени, когда уже найдено распределение электрического поля, а стало быть и вектора \mathbf{D} , вблизи от поверхности раздела, в функции времени.

1. 4. Уравнения Максвелла, вместе с граничными условиями (1,21)—(1,25), позволяют однозначно найти электромагнитное поле в пространстве в любой момент при задании начального состояния поля¹ и некоторых дополнительных условий на бесконечности.² При наличии в среде хотя бы минимальной проводимости, — а в реальных случаях ее всегда можно считать имеющейся, — и связанного с ней поглощения волн, должно потребовать обращения на бесконечности в нуль поля от любой системы излучателей, лежащих целиком внутри некоторой конечной области. В случае, если проводимость среды равна нулю, это условие должно быть заменено так называемым условием излучения Зоммерфельда,³ которое выводится из требования, что на бесконечности должны существовать лишь уходящие на бесконечность волны, но не идущие оттуда. Мы в дальнейшем всегда будем при исследовании волновых процессов предполагать наличие в средах хотя бы крайне малого поглощения, в связи с чем мы здесь на принципе излучения подробнее останавливаться не будем.

§ 2. Постановка основных задач о нахождении статических электрических и магнитных полей по заданным источникам их

2.1. Рассмотрим в первую очередь статические процессы, для которых основные уравнения (1,12)—(1,15) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & (2,1) \\ \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & (2,2) \end{aligned}$$

¹ См. Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики [в дальнейшем: Франк — Мизес], ч. II, гл. XIX, стр. 810 — 811, ОНТИ, Л.—М., 1937.

² Обычно это условия, обеспечивающие отсутствие идущих из бесконечности волн. В некоторых случаях, например, когда рассматривается диффракция электромагнитных волн, исходящих от бесконечно-удаленного источника, эти условия приходится заменять соответственно видоизмененными.

³ Франк — Мизес, ч. II, гл. XIX, § 5.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (2,3)$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2,4)$$

причем, согласно (1,8) и (1,9):

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (2,5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2,6)$$

Остановимся в отдельности на случаях проводящих и непроводящих сред.

А. Непроводящие среды

1. Электростатическая задача

2.2. Рассмотрим в первую очередь случай, когда среда не обладает проводимостью, так что для нее $\sigma = 0$.

Тогда получаем две независимые друг от друга группы уравнений для электрических и для магнитных величин, именно:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2,7)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \\ \mu \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

(2,7) дает:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho, \quad (2,9)$$

тогда как из (2,8) получается:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}. \quad (2,10)$$

В случае, если среда, кроме того, еще и однородна, так что ε и μ — постоянные, не зависящие от координат, эти уравнения обращаются в такие:

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad (2,11)$$

и

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}. \quad (2,12)$$

Первое из них — это уравнение Пуассона для потенциала φ покоящихся зарядов ρ , распределение которых считаем заданным. Частным решением этого уравнения является функция

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{(v)} \frac{\rho dv}{r}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad (2,13)$$

где интегрирование производится по всему объему v , занятому зарядами,¹ а r — расстояние от элемента объема dv , окружающего

¹ Предполагаем при этом, конечно, что интеграл (2,13) сходится, т. е. что все заряды либо находятся в конечном количестве внутри ограниченного объема v , либо же, что плотность их убывает достаточно быстро при удалении на бесконечность.

точку (ξ, η, ζ) , в которой находится заряд $de = \rho dv$, до той точки (x, y, z) , в которой ищется значение потенциала φ .

Даваемая уравнением (2,13) функция φ удовлетворяет тому условию, что она обращается в нуль на бесконечности для любой системы зарядов, лежащих целиком внутри некоторой области конечных размеров, расположенной на конечном расстоянии от начала координат. В частности, для точечного заряда e , т.е. для заряда, сосредоточенного внутри исчезающе-малого объема, поперечными размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается поле от него, (2,13) дает обычное выражение потенциала кулоновского поля точечного заряда, находящегося в среде с диэлектрической постоянной ϵ , именно

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon r}. \quad (2,14)$$

Если заряды сосредоточены внутри чрезвычайно тонкого слоя, но зато с весьма большой объемной плотностью ρ , так что заряд η , приходящийся на единицу поверхности слоя (поверхностная плотность), имеет конечное значение, то полагая $\rho dv = \eta df$, где df — элемент поверхности слоя, получим для потенциала такого „поверхностного“ распределения заряда с плотностью η выражение:

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int_{(j)} \frac{\eta df}{r}, \quad (2,15)$$

причем интегрирование распространяется по всей поверхности, покрытой зарядами.

Если система зарядов не может быть охвачена описанной вокруг начала координат сферой конечного радиуса, т.е. если она содержит и заряды, лежащие на бесконечности (например, бесконечно длинная заряженная линия, линейная цепочка из равноотстоящих точечных зарядов и т. д.), то формула (2,13) может стать непригодной, так как интеграл в ней может оказаться расходящимся. Это, например, имеет место всегда тогда, когда речь идет о решении так называемой плоской задачи электростатики, т.е. когда распределение заряда и поля не зависит от одной из декартовых координат, скажем, от z , так что распределение зарядов состоит из бесконечно тонких, равномерно заряженных по длине нитей, параллельных оси z . При этом вместо частного решения (2,13) уравнения (2,11), принимающего в данном случае такой вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \frac{4\pi}{\epsilon} \rho(x, y), \quad (2,16)$$

будем брать следующее:

$$\varphi = - \frac{2}{\epsilon} \int_{(j)} \rho \lg r df, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (2,17)$$

причем интегрирование производится по площади f пересечения всей данной системы зарядов с плоскостью, перпендикулярной к оси z . Это так называемый логарифмический потенциал рассматриваемой системы зарядов.

В случае, если поперечные размеры сечения f исчезающе-малы по сравнению с r , т. е. если имеем дело с тонкой заряженной нитью, то (2,17) дает:

$$\varphi = -\frac{2}{\varepsilon} \lg r \left(\int_{(f)} \rho df \right) = -\frac{2e}{\varepsilon} \lg r, \quad (2,18)$$

где $e = \int_{(f)} \rho df$ — полный заряд нити на единицу длины ее. Заметим еще, что так как при $r \rightarrow \infty$ будут малы по сравнению с r поперечные размеры не только такой нити, но и любой системы зарядов, сечение которой имеет конечные поперечные размеры, то при уходе на бесконечность потенциал любой такой системы тоже будет асимптотически выражаться формулой (2,18), если под e понимать теперь полный заряд системы на единицу длины оси. Из этого, в частности, видно, что логарифмический потенциал не может, вообще говоря, быть нормирован на нуль на бесконечности не только в направлении оси z , но и в перпендикулярных к ней плоскостях. Исключение составляет только случай, когда полный заряд e системы равен нулю. Однако поле, отвечающее потенциалу (2,17), стремится при $r \rightarrow \infty$ к нулю, причем на очень больших, по сравнению с размерами области f , расстояниях r , приближенно верна формула

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \cong \frac{2e}{\varepsilon r^2} \mathbf{r}. \quad (2,19)$$

Она дает характер убывания поля, соответствующий полю равномерно заряженной линии с зарядом e на единицу длины.¹ Радиус-вектор \mathbf{r} направлен при этом к той точке, в которой ищется \mathbf{E} .

Формулами (2,13) и (2,17) полностью решается вопрос о нахождении электростатического поля, создаваемого произвольным распределением зарядов в случае, когда все безграничное пространство заполнено однородной изотропной средой, в частности, если заряды находятся в пустоте.

2.3. Так обстоит дело, если все пространство заполнено одной однородной средой. Если имеется не одна, а несколько сред, каждая из которых изотропна и однородна и характеризуется своим значе-

¹ Это поле сразу получается из формулы $\int_{(f)} D_n df = \varepsilon \int_{(f)} E_n df = 4\pi e$, если ее применить к описанному вокруг нити цилиндру радиуса r и единицы длины и учесть радиальность поля \mathbf{E} , так что $E_r = E$. Именно, находим

$$2\pi r \varepsilon E = 4\pi e, \quad \text{т. е.} \quad E = \frac{2e}{\varepsilon r},$$

что из-за радиальности \mathbf{E} и дает формулу (2,19).

нием диэлектрической постоянной ϵ , то, согласно сказанному, в области, занятой средой с постоянной $\epsilon = \epsilon_k$, имеет место уравнение

$$\Delta\varphi^{(k)} = -\frac{4\pi}{\epsilon_k} \rho, \quad (2,20)$$

где $\varphi^{(k)}$ — потенциальная функция в k -ой среде. Вдоль поверхности раздела некоторых k -ой и i -ой сред должны выполняться условия (1,22) и (1,25), которые в данном случае могут быть записаны так:

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial s} = \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial s}; \quad \epsilon_k E_{n_k}^{(k)} + \epsilon_i E_{n_i}^{(i)} = -\left[\epsilon_k \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n_k} + \epsilon_i \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial n_i} \right] = 4\pi\eta, \quad (2,21)$$

причем $\frac{\partial}{\partial s}$ обозначает дифференцирование по любому направлению, лежащему в касательной плоскости к поверхности раздела сред, а $\frac{\partial}{\partial n_k}$ и $\frac{\partial}{\partial n_i}$ — производные по нормалям, направленным соответственно в k -ую и i -ую среды.

Первое из этих уравнений может быть проинтегрировано по s и дает тогда:

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(i)} + C, \quad (2,22)$$

где C — некоторая постоянная на всей поверхности раздела k -ой и i -ой сред величина, которая в случае отсутствия на поверхности двойных слоев должна быть положена равной нулю. Заметим еще, что если в пространстве имеются какие-нибудь проводники, то внутри них и на их поверхности потенциал принимает постоянное значение, которое может быть либо непосредственно задано, либо же может подлежать определению, если задан не потенциал, а суммарный заряд проводника.

Уравнения (2,20) вместе с граничными условиями (2,21) и условием, что поле на бесконечности должно соответствующим образом стремиться к нулю,¹ однозначно определяют решение задачи о нахождении электростатического поля по заданному распределению зарядов ρ и η в случае наличия в пространстве ряда различных однородных изотропных сред. При этом, как только что указывалось, должны быть заданы потенциалы или заряды проводников, с которыми граничат диэлектрические среды.²

¹ Последнее, конечно, только в том случае, когда изучаемое поле, вообще, простирается до бесконечности, т. е. когда не имеется в виду нахождение поля внутри замкнутой проводящей полости. При этом, если заряды ρ и η сосредоточены внутри некоторой ограниченной области, то на бесконечности φ должно убывать, по крайней мере, как $\frac{1}{r}$, а E — как $\frac{1}{r^2}$. В случае плоской задачи, когда ρ и η отличны от нуля только внутри некоторой конечной области на плоскости (x, y) , φ может возрастать на бесконечности, как $\lg r$, поле же должно убывать, по крайней мере, как $\frac{1}{r}$.

² См. например: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, т. I, ч. I, стр. 78—79. ГТТИ, 1932.

2.4. **Примечание.** С формальной стороны можно проводники при решении электростатических задач рассматривать как диэлектрики с бесконечно-большой диэлектрической постоянной, поскольку электрическое поле, создаваемое в каком-либо диэлектрике некоторой данной системой зарядов, при прочих равных условиях ослаблено тем больше, чем больше его диэлектрическая постоянная ϵ и при $\epsilon = \infty$, вообще, исчезает.

С физической точки зрения это выражает просто то обстоятельство, что бесконечно-большой диэлектрической постоянной должна бы соответствовать бесконечно-большая поляризуемость частиц вещества диэлектрика, т. е., по существу, полная удобоподвижность находящихся внутри этих частиц зарядов, которые могли бы при этом смещаться из своего начального положения на конечное расстояние под действием сколь угодно малого электрического поля, — свойство, которое как раз характеризует проводники.

Математическая эквивалентность обеих задач следует из уравнений (2,20) и (2,21), из которых первое при $\epsilon_k = \infty$ обращается в

$$\Delta\varphi^{(k)} = 0, \quad (\text{A})$$

тогда как из второго видно, что при этом на всей „внутренней“ стороне поверхности проводника¹ должно быть

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n_k} = 0, \quad (\text{B})$$

т. е. что производная от потенциала $\varphi^{(k)}$ по внутренней нормали k -ой области, занятой средой с $\epsilon_k = \infty$, на всей поверхности этой области равна нулю. Условия (A) и (B) дают возможность показать, что при этом $\varphi^{(k)} = \text{const}$ внутри всей этой области, т. е. что такой диэлектрик формально вполне аналогичен проводнику.

Действительно, применяя к объему v_k , занятому диэлектриком с постоянной $\epsilon_k = \infty$, известное тождество Гаусса — Остроградского:

$$\begin{aligned} \int_{(v_k)} \text{div} \{ \varphi^{(k)} \text{grad} \varphi^{(k)} \} dv_k &= \int_{(v_k)} \varphi^{(k)} \Delta\varphi^{(k)} dv_k + \int_{(v_k)} (\text{grad} \varphi^{(k)})^2 dv_k = \\ &= \int_{(f_k)} \varphi^{(k)} \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n_k} df_k, \end{aligned}$$

в котором последний интеграл распространен по поверхности f_k , ограничивающей объем v_k , и пользуясь соотношениями (A) и (B), получаем, что

$$\int_{(v_k)} (\text{grad} \varphi^{(k)})^2 dv_k = 0.$$

Отсюда следует, что внутри v_k повсеместно $\text{grad} \varphi^{(k)} = 0$, т. е. что там $\varphi^{(k)} = \text{const}$.

¹ Т. е. при приближении к поверхности проводника изнутри его.

Из сказанного видно, что если получено решение какой-либо электростатической задачи в предположении, что некоторая область v_k заполнена диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ_k , то переходя в полученном решении к пределу $\epsilon_k = \infty$, получим решение для случая, когда та же область занята проводником. При этом полный заряд q на этом проводнике будет равен тому суммарному заряду e_k , который при решении первоначальной задачи предполагался находящимся внутри области v_k , занятой диэлектриком ϵ_k . Этим замечанием мы в дальнейшем будем неоднократно пользоваться.

2. Магнитостатическая задача

2.5. Переходим теперь к решению уравнения (2,12), к которому свелось нахождение магнитного поля, и заметим, прежде всего, что вектор \mathbf{A} , введенный с помощью соотношения (1,8), определен только с точностью до градиента некоторой произвольной скалярной функции ψ . Действительно, если некоторый вектор \mathbf{A}_1 удовлетворяет условию $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_1$, то тому же условию удовлетворяет и $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \text{grad } \psi$, ибо $\text{rot } \mathbf{A}_2 = \text{rot } \mathbf{A}_1$.

Это дает право задать по произволу значение $\text{div } \mathbf{A}$. Действительно, если, например, $\text{div } \mathbf{A}_1 = f(x, y, z) \equiv f$, то $\text{div } \mathbf{A}_2 = \text{div } \mathbf{A}_1 + \Delta\psi = f + \Delta\psi$, и если потребовать, чтобы было, скажем, $\text{div } \mathbf{A}_2 = F(x, y, z) \equiv F$, где F — какая-нибудь функция от x, y, z , то достаточно выбрать ψ так, чтобы выполнялось условие

$$\Delta\psi = F - f, \quad (2,23)$$

что, как известно, всегда возможно.

Пользуясь этим, положим $\text{div } \mathbf{A} = 0$, причем уравнение (2,12) обращается в такое:

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (2,24)$$

которое эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_x &= -\frac{4\pi\mu}{c} j_x^{(e)}, \\ \Delta A_y &= -\frac{4\pi\mu}{c} j_y^{(e)}, \\ \Delta A_z &= -\frac{4\pi\mu}{c} j_z^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (2,25)$$

Эти уравнения, в которых справа стоят заданные функции координат, имеют в точности тот же характер, как уравнение (2,11), а потому все, что было сказано выше о решении этого последнего уравнения, распространяется и на уравнения (2,25). В частности, если вся система токов $\mathbf{j}^{(e)}$ лежит в конечной области, так что функции $j_x^{(e)}$, $j_y^{(e)}$, $j_z^{(e)}$ отличны от нуля только внутри ограниченной области, то

обращающиеся в нуль на бесконечности частные решения уравнений (2,25) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{\mu}{c} \int_{(v)} \frac{j_x^{(e)} dv}{r}, \\ A_y &= \frac{\mu}{c} \int_{(v)} \frac{j_y^{(e)} dv}{r}, \\ A_z &= \frac{\mu}{c} \int_{(v)} \frac{j_z^{(e)} dv}{r}, \end{aligned} \right\} r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad (2,26)$$

причем сохранены обозначения формулы (2,13).

Эти уравнения могут быть объединены в одно векторное, причем получается:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int_{(v)} \frac{\mathbf{j}^{(e)} dv}{r}. \quad (2,27)$$

Составляя $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, найдем отсюда:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int_{(v)} \frac{[\mathbf{j}^{(e)}, \mathbf{r}]}{r^2} dv, \quad (2,28)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из местоположения элемента объема dv в ту точку, в которой рассматривается поле \mathbf{H} . Эта формула выражает не что иное, как закон Био-Савара в применении к пространственно-распределенным токам, причем полное поле от всей системы токов представляется в виде наложения элементарных полей от отдельных „элементарных токов“ $\mathbf{j}^{(e)} dv$.

Выбирая, в частности, за элемент dv элемент длиной ds токовой трубки, ось которой направлена по току, а сечение равно df , и обозначая через $I = j^{(e)} df$ полный ток, текущий по ней, будем иметь $j^{(e)} dv = I ds$, так что поле токового элемента ds , по которому течет ток I , получается равным

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[\mathbf{j}^{(e)}, \mathbf{r}] dv}{r^2} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{s}, \mathbf{r}]}{r^2}. \quad (2,29)$$

Это и есть обычная форма закона Био-Савара для линейных проводников.

В случае, если токи уходят на бесконечность, это решение может стать непригодным. В частности, если все токи текут по одному направлению, скажем, параллельно оси z , образуя систему бесконечно длинных параллельных токовых нитей (аналог плоской задачи электростатики), то для A_x , A_y , A_z получаются уравнения:¹

¹ Ибо по условию $j_x^{(e)} = j_y^{(e)} = 0$, причем должно быть $j_z^{(e)} = j^{(e)} = f(x, y)$, так как уравнение $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}$ показывает, что $\text{div } \mathbf{j}^{(e)} = \frac{\partial j_z^{(e)}}{\partial z} = 0$, т. е. что плотность токов $\mathbf{j}^{(e)}$, а стало быть и все создаваемое ими магнитное поле, не зависит от z .

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = 0, \\ \Delta A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} = 0, \\ \Delta A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} j_z^{(e)} = -\frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)}(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (2,30)$$

что дает при сравнении с (2,16) и (2,17):

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A_y = 0, \\ A_z &= -\frac{2\mu}{c} \int_{(0)} j^{(e)} \lg r df, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2,31)$$

т. е.

$$\mathbf{A} = -\frac{2\mu}{c} \int_{(0)} \mathbf{j}^{(e)} \lg r df. \quad (2,32)$$

Для одиночного бесконечно-длинного линейного тока I (токовой линии) получается отсюда:

$$\mathbf{A} = -\frac{2\mu I}{c} \lg r. \quad (2,33)$$

2.6. Формулами (2,26) — (2,27) и (2,31) — (2,32) полностью решается вопрос о магнитном поле системы токов в однородной среде, заполняющей все неограниченное пространство. Если же в пространстве имеется ряд различных однородных изотропных сред с магнитными проницаемостями μ_k , заполняющих отдельные области пространства, то сохраняя попрежнему во всех средах условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, сведем решение задачи к нахождению того решения системы уравнений

$$\Delta \mathbf{A}^{(k)} = -\frac{4\pi\mu_k}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (2,34)$$

где $\mathbf{A}^{(k)}$ — вектор-потенциал в k -ой среде, которое на поверхностях раздела отдельных сред удовлетворяет условиям (1,21) и (1,23) непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{H} и нормальных составляющих \mathbf{B} и ведет себя соответствующим образом на бесконечности.

При такой постановке задачи возникает, однако, то неудобство, что указанные только что граничные условия связывают друг с другом, вообще говоря, не отдельные компоненты векторов $\mathbf{A}^{(k)}$ по разные стороны поверхности раздела, а содержат сразу несколько из них. Так, например, уже в том простейшем случае, когда имеются только две различные среды μ_1 и μ_2 с плоской поверхностью раздела, которую примем за плоскость $z=0$, и когда, стало быть, удобно проводить решение в декартовых координатах, мы для отдельных компонент

$A_x^{(k)}, A_y^{(k)}, A_z^{(k)}$ ($k=1,2$) векторов $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ получаем отдельные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_x^{(k)} &= -\frac{4\pi\mu_k}{c} j_x^{(e)}, \\ \Delta A_y^{(k)} &= -\frac{4\pi\mu_k}{c} j_y^{(e)}, \\ \Delta A_z^{(k)} &= -\frac{4\pi\mu_k}{c} j_z^{(e)}, \end{aligned} \right\} (k=1,2) \quad (2,35)$$

тогда как граничные условия для тангенциальных составляющих \mathbf{H} будут, согласно (1,21):

$$(H_x^{(1)})_{z=0} = (H_x^{(2)})_{z=0}; \quad (H_y^{(1)})_{z=0} = (H_y^{(2)})_{z=0}, \quad (2,36)$$

т. е., если воспользоваться вторым уравнением (2,8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} &= \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial A_y^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0}, \\ \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x} \right)_{z=0} &= \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_x^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x} \right)_{z=0}. \end{aligned} \right\} (2,37)$$

Сверх того, уравнение (1,23) для нормальной к поверхности раздела составляющей магнитной индукции дает еще:

$$\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial A_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(2)}}{\partial y} \right)_{z=0}. \quad (2,38)$$

То обстоятельство, что уравнения (2,37) — (2,38) содержат каждое более чем по одной из функций A_i ($i=x, y, z$), в известной мере осложняет связывание решений, находимых для отдельных областей. Еще более осложняется проведение решения в случае неплоских поверхностей раздела, когда выгоднее пользоваться не декартовыми, а подходящим образом выбранными криволинейными координатами, ибо в таких координатах векторное уравнение (2,34) распадается на три скалярных уравнения, из которых каждое содержит, вообще говоря, больше чем одну из компонент вектора $\mathbf{A}^{(k)}$ в криволинейных координатах. В этом случае, следовательно, как основные уравнения, так и граничные условия, содержат больше чем одну из искоемых функций каждое.

В силу этого, часто представляется более удобным несколько иной подход к решению задачи, именно следующий: будем рассматривать полное магнитное поле \mathbf{H} , создаваемое некоторой системой токов $\mathbf{j}^{(e)}$ при наличии в пространстве намагничивающихся сред (магнетиков), как сумму „первичного“ поля \mathbf{H}^0 , которое создавалось бы той же системой токов в пустоте при отсутствии магнетиков, и „вторичного“ поля \mathbf{H}' , обязанного своим происхождением наличию намагничивающихся сред. Тогда в самом общем случае любых магнетиков с как

удовно, но непрерывно изменяющимися от точки к точке свойствами,¹ будем иметь для статических процессов, согласно (1,1) и (1,4):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} (\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}') = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2,39)$$

тогда как для первичного поля \mathbf{H}^0 будет:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^0 &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,40)$$

Вычитая первое уравнение (2,40) из соответствующего уравнения (2,39), получим поэтому:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = 0, \quad (2,41)$$

т. е. вторичное поле при всех обстоятельствах имеет потенциальный характер, и это верно для каких угодно сред, включая ферромагнитные. Поэтому, всегда можно положить:

$$\mathbf{H}' = -\operatorname{grad} \varphi_m, \quad (2,42)$$

где φ_m — это магнитный потенциал вторичного поля. Это справедливо, согласно сказанному, и при наличии в пространстве постоянных магнитов, поле которых, таким образом, тоже имеет потенциальный характер.

Применяя это к случаю сред, в которых $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, и μ , вообще говоря, может меняться от точки к точке, найдем:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = \operatorname{div} \mu (\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}') = \operatorname{div} \mu \mathbf{H}^0 - \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} \varphi_m) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} \varphi_m) = \operatorname{div} \mu \mathbf{H}^0 = \mu \operatorname{div} \mathbf{H}^0 + (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{H}^0) = (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{H}^0), \quad (2,43)$$

последнее из-за второго уравнения (2,40).

Уравнение (2,43), в котором правая часть — это известная функция координат,² в точности совпадает по форме с уравнением (2,9), к которому сводится решение электростатической задачи в случае неоднородных сред, причем в уравнении (2,43) величина

$$\rho_m = -\frac{1}{4\pi} (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{H}^0) \quad (2,44)$$

играет роль плотности заряда ρ в электростатической задаче. Называя ρ_m плотностью фиктивных магнитных масс, можем поэтому сказать, что задача о нахождении вторичного магнитного поля \mathbf{H}' в среде с произвольно³ меняющейся от точки к точке магнитной проницаемостью μ

¹ Случай, когда свойства среды изменяются скачкообразно на некоторой поверхности, будем пока, для простоты, рассматривать как предельный случай непрерывного изменения с очень быстро меняющимися в крайне тонком слое свойствами.

² Поле \mathbf{H}^0 в пустоте от заданной системы токов известно, так как оно находится просто из закона Био-Савара с помощью формул (2,27) — (2,28) или (2,32).

³ Но непрерывно.

при наличии произвольного первичного поля, свелась к решению электростатической задачи для среды, в которой закон изменения ϵ совпадает с законом изменения μ для нашей магнитной задачи, а истинные электрические заряды заменились фиктивными магнитными массами ρ_m .

Если в пространстве имеется ряд однородных сред с различными μ_k , то внутри каждой такой среды $\text{grad } \mu_k = 0$, так что там и $\rho_m = 0$, и уравнение (2,43) для потенциала $\varphi_m^{(k)}$ внутри соответствующей области переходит в обычное уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi_m^{(k)} = 0, \quad (2,45)$$

тогда как на поверхности раздела двух различных сред, скажем, i -ой и k -ой, выделяются фиктивные магнитные массы с поверхностной плотностью η_m , определяемой, по аналогии с электростатической формулой (2,21), соотношением:¹

$$\mu_i H_{n_i}^{(i)} + \mu_k H_{n_k}^{(k)} = 4\pi \eta_m. \quad (2,46)$$

Значение η_m легко получить из формулы (1,23), которая в данном случае дает:

$$B_{n_i}^{(i)} + B_{n_k}^{(k)} = \mu_i (H^{(i)} + H^0)_{n_i} + \mu_k (H^{(k)} + H^0)_{n_k} = 0,$$

т. е. если учесть, что $H^{(i)} = -\text{grad } \varphi_m^{(i)}$, $H^{(k)} = -\text{grad } \varphi_m^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \mu_i H_{n_i}^{(i)} + \mu_k H_{n_k}^{(k)} &= - \left(\mu_i \frac{\partial \varphi_m^{(i)}}{\partial n_i} + \mu_k \frac{\partial \varphi_m^{(k)}}{\partial n_k} \right) = (\mu_k - \mu_i) H_{n_i}^0 = \\ &= (\mu_i - \mu_k) H_{n_k}^0 = 4\pi \eta_m. \end{aligned} \quad (2,47)$$

(1,21) дает второе граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi_m^{(i)}}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_m^{(k)}}{\partial s}, \quad (2,48)$$

аналогичное первой формуле (2,21).

Сравнивая формулы (2,20) — (2,21) для электростатической задачи и формулы (2,45), (2,47) — (2,48) для нашей теперешней магнитной, видим, что эти задачи математически вполне эквивалентны, причем только в магнитной задаче отсутствуют объемные магнитные массы, а поверхностные должны находиться по формулам (2,47) из известных значений первичного магнитного поля. Тем самым показано, что те осложнения, которые возникают, как указывалось выше, при нахождении вектор-потенциала поля в случае ряда различных сред, устраняются, и нахождение вторичного поля оказывается математически вполне тождественным нахождению электростатического поля в аналогичной системе диэлектрических сред и требует определения не

¹ Обозначения те же, как в формулах (1,25) и (2,21).

трех функций, — трех компонент вектор-потенциала, а только одной, — магнитного потенциала φ_m . Найдя его, будем знать и вторичное магнитное поле, а добавляя к этому последнему уже известное первичное, найдем и полное поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}'$.¹

Б. Проводящие среды

Основная токовая задача

2.7. Мы рассмотрели вопрос о нахождении статических электрических и магнитных полей в том случае, когда проводимость среды равна нулю. Если $\sigma \neq 0$, то предполагая сперва, для простоты, что $\mathbf{j}^{(e)}$ непрерывна в отдельных областях пространства, будем при решении задачи исходить из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{(e)}) &= 0, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2,49)$$

из которых первое получается, если взять дивергенцию от соотношения (2,3), тогда как второе вытекает при $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ из всегда верного уравнения (1,9). Уравнения (2,49) показывают, что

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (2,50)$$

а это при заданных $\mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{j}^{(e)}(x, y, z)$ и $\sigma = \sigma(x, y, z)$ совпадает по типу с уравнениями (2,9) или (2,43), к которым сводились электростатическая и магнитостатическая задачи. На поверхностях, на которых σ или $\mathbf{j}^{(e)}$ изменяются скачкообразно, должны при этом выполняться граничные условия, вытекающие из уравнения (1,24), т. е., так как в нашем случае $\mathbf{C} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{(e)}$:

$$\sigma_i E_n^{(i)} + (\mathbf{j}_n^{(e)})^{(i)} = \sigma_n E_n^{(k)} + (\mathbf{j}_n^{(e)})^{(k)}, \quad (2,51)$$

¹ При выводе уравнений (2,43) и последующих было предположено, что в пространстве имеются только парамагнитные среды, в которых $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, и что внешнее поле целиком обусловлено токами $\mathbf{j}^{(e)}$.

Если бы первичное поле частично или целиком создавалось постоянными магнитами, внешнее поле \mathbf{H}_m^0 которых мы могли бы в этом случае считать известным и заданным (\mathbf{H}_m^0 — стало быть, то поле, которое эти магниты создают, находясь в пустоте), то поскольку это поле вне магнитов удовлетворяет уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_m^0 &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_m^0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и обладает таким потенциалом φ_m^0 , что $\mathbf{H}_m^0 = -\operatorname{grad} \varphi_m^0$, мы могли бы его также выделить из полного поля \mathbf{H} , или, что то же, из введенного выше поля \mathbf{H}' . При этом для разностного поля $\mathbf{H}'' = \mathbf{H}' - \mathbf{H}_m^0$ и для его потенциала $\varphi_m'' = \varphi_m - \varphi_m^0$, очевидно, получились бы в точности такие же уравнения (2,43) — (2,48), как выше для \mathbf{H}' и φ_m , с той только разницей, что в этих формулах нужно было бы повсеместно понимать под \mathbf{H}^0 не первичное поле, обусловленное одними только токами $\mathbf{j}^{(e)}$, а полное первичное поле $\mathbf{H}_{\text{полн.}}^0 = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}_m^0$, равное сумме токового поля \mathbf{H}^0 и первичного поля \mathbf{H}_m^0 постоянных магнитов.

причем значки (i) и (k) у входящих сюда величин обозначают, что они берутся в соответствующей среде около самой поверхности разрыва.

Пользуясь вторым уравнением (2,49) и теми же обозначениями, как в формуле (2,21), получаем:

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n_i} + \sigma_k \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n_k} = (\mathbf{j}^{(e)})_{n_i}^{(i)} + (\mathbf{j}^{(e)})_{n_k}^{(k)}. \quad (2,52)$$

Уравнение (2,50) вместе с граничным условием (2,52) и условием

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial s} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial s}, \quad (2,53)$$

выражающим непрерывность тангенциальной составляющей вектора \mathbf{E} при прохождении через поверхность разрыва, а также в случае, если рассматриваемая область пространства простирается до бесконечности, с соответствующими условиями на бесконечности, и должны служить для нахождения электрического поля. Если при этом в пространстве имеются идеальные проводники, для которых $\sigma_k = \infty$, то на поверхности каждого такого проводника потенциал φ должен иметь постоянное значение, и (2,53) приводится просто к условию

$$\varphi_i = \text{const}, \quad (2,54)$$

которое должно выполняться на поверхности этого проводника.

Мы видим, таким образом, что задача о нахождении электрического поля, а стало быть и пространственного распределения токов в проводящих средах с переменной, вообще говоря, от точки к точке проводимостью, приводится к интегрированию одного или нескольких уравнений вида (2,50) с граничными условиями типа (2,52) — (2,54) и при соответственно выбранных условиях на бесконечности. Эта задача, подобно рассмотренной в предыдущем разделе магнитостатической, вполне аналогична основной задаче электростатики, формулируемой уравнениями вида (2,9) при граничных условиях (2,21) — (2,22) и относящейся к нахождению электростатического поля, вызываемого заданной системой объемных и поверхностных зарядов в случае наличия в пространстве сред с переменной от точки к точке диэлектрической постоянной ϵ . В частности, если токи в среде обусловлены только наличием идеально проводящих подводов (напр., заземлителей), так что „сторонние“ токи $\mathbf{j}^{(e)}$ повсеместно равны нулю,¹ и если в пространстве имеются только однородные изотропные среды, в каждой из которых $\epsilon_k = \text{const}$, то уравнения (2,50) и (2,52) — (2,54) принимают вид:

$$\Delta \varphi^{(k)} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2,55)$$

¹ Заметим, что если положить $\mathbf{j}^{(e)} = \sigma \mathbf{E}^{(e)}$, где $\mathbf{E}^{(e)}$ — некоторый новый вектор, который назовем вектором плотности сторонних электродвижущих сил в данной точке, то выражение для полного тока проводимости \mathbf{j} , принимает вид $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)})$, и в такой форме оно, обычно, и пишется. С этой точки зрения нужно сказать, что полагая $\mathbf{j}^{(e)} = 0$ во всем пространстве между идеальными проводниками, мы тем самым считаем отсутствующими объемно распределенные электродвижущие силы.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n_i} + \sigma_k \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n_k} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial s} &= \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial s}, \\ \varphi_m &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2,56)$$

$$(2,57)$$

Первое из них должно удовлетворяться внутри каждой из n сред, уравнения (2,56) должны выполняться на поверхности раздела i -ой и k -ой сред, а условие (2,57) — на поверхности m -ого идеального проводника. При этом должен быть задан либо потенциал V_m этого проводника, либо исходящий из него полный ток, равный

$$I_m = \int_{(f_m)} j_n df_m = - \int_{(f_m)} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} df_m, \quad (2,58)$$

где n обозначает внешнюю нормаль к поверхности проводника, а интегрирование распространяется на всю его поверхность f_m .

Заметим еще, что если одна из двух граничащих сред (i) и (k), скажем, k -ая, это изолятор, то для нее $\sigma_k = 0$, и первое условие (2,56) обращается в такое:

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n_i} = 0. \quad (2,59)$$

К только что перечисленным уравнениям и граничным условиям должно быть в случае бесконечной области добавлено еще требование, что если поля и токи создаются системой электродов, лежащих целиком в конечной области, то они на бесконечности должны обращаться в нуль. При этом φ на бесконечности должно убывать, по крайней мере как $\frac{1}{r}$, а поле — как $\frac{1}{r^2}$. В случае плоской токовой задачи потенциал может, как и в электростатическом случае, возрасти на бесконечности логарифмически, поле же должно, во всяком случае, убывать не медленнее, чем $\frac{1}{r}$.

Формулируемая уравнениями (2,55) — (2,57) токовая задача совершенно эквивалентна электростатической задаче, выражаемой уравнениями (2,20) — (2,22), если считать формы областей, занятых диэлектриками с диэлектрическими постоянными ϵ_k , совпадающими с формами областей, заполненных соответственно средами с проводимостями σ_k , положить $\epsilon_k = \sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и считать объемные заряды ρ и поверхностные заряды η на поверхностях раздела различных диэлектриков отсутствующими, а все поле — обусловленным только наличием проводников той же формы и находящихся при тех же потенциалах, как в токовой задаче. Если при этом в токовой задаче задан не потенциал некоторого m -ого проводника, а исходящий из него ток I_m , то в соответствующей электростатической задаче надо считать известным полный заряд e_m этого проводника, находимый из условия

$$4\pi e_m = \int_{(f_m)} D_n df_m = - \int_{(f_m)} \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} df_m, \quad (2,60)$$

причем сравнение с (2,58) показывает, что для полного совпадения обеих задач надо положить

$$4\pi e_m = I_m, \quad (2,61)$$

ибо величина ε в формуле (2,60) может быть заменена величиной σ , поскольку мы выбрали в нашей эквивалентной электростатической задаче значение ε в каждой точке пространства равным значению σ в соответствующей точке пространства для исходной токовой задачи. Из математической тождественности электростатической и токовой задач следует и однозначность решения этой последней при задании потенциалов отдельных проводников или вытекающих из них полных токов.¹

2.8. После того, как решением предыдущей задачи найдено поле \mathbf{E} в каждой точке пространства, для нахождения создаваемого токами магнитного поля остается подставить это значение \mathbf{E} в правую часть первого уравнения (2,3), после чего приходим к уже рассмотренной в п. п. 2.5 и 2.6 задаче о нахождении магнитного поля, определяемого системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2,62)$$

где \mathbf{j} — уже известная функция координат.

§ 3. Основные задачи в случае переменных полей

3.1. Переходим теперь к рассмотрению меняющихся во времени полей, причем ограничимся здесь случаем однородных изотропных сред с постоянными по объему их значениями ε , μ и σ . При этом основные уравнения сводятся, как указывалось в п. 1.1, к таким:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (3,1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (3,2)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3,3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3,4)$$

Подставляя значения \mathbf{E} и \mathbf{H} из (3,3) и (3,4) в (3,1) и (3,2), получаем уравнения:

$$-\operatorname{grad} \left\{ \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \varphi \right\} + \Delta \mathbf{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}^{(e)},$$

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

¹ Ср. п. 2.3.

а пользуясь указанной выше возможностью выбирать по произволу значение $\text{div } \mathbf{A}$,¹ найдем, подчиняя его условию

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \varphi = 0, \quad (3,5)$$

следующие уравнения для \mathbf{A} и φ :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (3,6)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (3,7)$$

Эти уравнения являются обобщением на случай нестационарных процессов уравнений (2,24) и (2,11) статической задачи. Следует заметить, однако, что в то время, как в статическом случае потенциалы φ и \mathbf{A} друг от друга независимы (по крайней мере при $\sigma=0$), здесь они уже не независимы, а связаны соотношением (3,5), переходящим при $\frac{\partial}{\partial t}=0$ и $\sigma=0$ в условие $\text{div } \mathbf{A}=0$, которому мы раньше подчиняли вектор-потенциал статического магнитного поля.²

В случае, если все пространство заполнено одной средой, т. е. если ε , μ и σ имеют постоянные значения во всем безграничном пространстве, система (3,5)—(3,7) может быть проинтегрирована в общем виде для любого начального состояния электромагнитного поля при задании вектора $\mathbf{j}^{(e)}$ во всем пространстве в функции от времени. Заданием этого вектора определяется и значение ρ в каждый момент времени в любой точке пространства, что легко видеть, если взять дивергенцию от уравнения (3,1) и воспользоваться уравнением (3,2). Это дает:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{E}) + 4\pi\sigma \text{div } \mathbf{E} + 4\pi \text{div } \mathbf{j}^{(e)} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho = -\text{div } \mathbf{j}^{(e)}. \quad (3,8)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка для ρ . Интегрирование его при условии, что в начальный момент $t=t_0$ $(\rho)_{t=t_0} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \text{div } (\mathbf{E})_{t_0}$ — это известная функция координат (поскольку на-

¹ См. п. 2. 5.

² Заметим, что если бы мы в рассмотренном выше статическом случае приравняли $\text{div } \mathbf{A}$ при $\sigma \neq 0$ не нулю, а подчинили бы его условию $\text{div } \mathbf{A} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \varphi = 0$, получающемуся из (3,5) при $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, т. е. когда φ — потенциал электростатического поля, то для \mathbf{A} получилось бы уравнение $\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}^{(e)}$, соответствующее уравнению (3,6) и получающееся из этого последнего при $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$.

начальное поле $(\mathbf{E})_{t=t_0} = \mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^0(x, y, z)$ задается во всем пространстве, так что известна и его дивергенция), однозначно дает ρ повсеместно в любой последующий момент, как утверждалось выше.

Ниже мы еще вернемся к вопросу о нахождении поля по его начальному значению и вектору $\mathbf{j}^{(e)}$. Пока же отметим еще, что в случае установившихся, чисто синусоидальных процессов с круговой частотой ω все векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\mathbf{j}^{(e)}$ и т. д. можно рассматривать как вещественные части некоторых комплексных векторов, именно

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}); \quad \mathbf{H} = \text{Re}(\mathbf{H}_0 e^{i\omega t}); \quad \mathbf{j}^{(e)} = \text{Re}(\mathbf{j}_0^{(e)} e^{i\omega t}); \dots, \quad (3,9)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и $\mathbf{j}_0^{(e)}$ уже от времени не зависят. Уравнения (3,3)—(3,7) можно при этом переписать в таком виде:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}, \quad (3,10)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3,11)$$

$$\varphi = -\frac{c}{\mu(\omega\epsilon + 4\pi\sigma)} \text{div } \mathbf{A} = \frac{i\omega}{ck^2} \text{div } \mathbf{A}, \quad (3,12)$$

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (3,13)$$

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \quad (3,14)$$

где

$$k^2 = -\frac{(i\omega\epsilon + 4\pi\sigma)\omega\mu i}{c^2} = \frac{(\epsilon\omega - 4\pi\sigma i)\mu\omega}{c^2}, \quad (3,15)$$

и

$$\rho = -\frac{\epsilon}{(i\omega\epsilon + 4\pi\sigma)} \text{div } \mathbf{j}^{(e)},^1 \quad (3,16)$$

причем после решения этих уравнений следует взять только вещественные части найденных величин.

Уравнение (3,12) дает возможность определить φ , если найден \mathbf{A} . (3,16) показывает при этом, что уравнение (3,14) является просто следствием уравнения (3,13), ибо оно получается из этого последнего, если взять дивергенцию от (3,13) и воспользоваться соотношениями (3,12) и (3,16). Таким образом, для полного определения электромагнитного поля требуется проинтегрировать только уравнение (3,13) для \mathbf{A} , из найденного значения которого получатся затем значения \mathbf{E} и \mathbf{H} с помощью уравнений (3,10)—(3,12).

Частным решением уравнения (3,13), удовлетворяющим условию обращения решения в нуль на бесконечности, при наличии хотя бы очень малого за тухания, является функция²

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int_{(V)} \frac{\mathbf{j}^{(e)} e^{-ikr} dv}{r}, \quad \text{Im}(k) < 0, \quad (3,17)$$

¹ Это следует из (3,8).

² При условии, что все токи $\mathbf{j}^{(e)}$ лежат внутри некоторой конечной области, или что плотность их настолько сильно убывает по мере удаления на бесконечность, что интеграл (3,17) имеет смысл. Заметим, что фигурирующее в формуле (3,17) условие $\text{Im}(k) < 0$ эквивалентно условию $\text{Re}(k) > 0$, что нетрудно установить, если исходить

причем интегрирование распространяется на все пространство v , внутри которого имеются токи $\mathbf{j}^{(e)}$, а r — это расстояние от элемента объема dV до той точки, в которой вычисляется \mathbf{A} . При $\omega = 0$, т. е. для статических процессов, когда и $k = 0$, формула (3,17) переходит в прежнюю формулу (2,27) для вектор-потенциала статического магнитного поля.

3. 2. Если в пространстве имеется ряд областей, каждая из которых заполнена однородной изотропной средой с постоянными ϵ_m , μ_m , σ_m , то в каждой из них вектор-потенциал $\mathbf{A}^{(m)}$ удовлетворяет уравнению вида (3,13), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A}^{(m)} + k_m^2 \mathbf{A}^{(m)} &= -\frac{4\pi\mu_m}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \\ k_m^2 &= \frac{(\epsilon_m \omega - 4\pi\sigma_m i) \mu_m \omega}{c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3,18)$$

причем на поверхности раздела сред должны удовлетворяться условия (1,21)—(1,22) непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} . Условия (1,23) и (1,24) для нормальных составляющих \mathbf{B} и \mathbf{C} удовлетворяются при этом автоматически, поскольку они следуют, как нетрудно показать, из (1,21) и (1,22) при учете исходных уравнений Максвелла.

3. 3. В заключение заметим еще, что не только φ и составляющие A_x , A_y , A_z вектора \mathbf{A} удовлетворяют уравнениям вида

$$\Delta u - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z, t), \quad (3,19)$$

или, для синусоидальных во времени процессов, вида

$$\Delta \psi + k^2 \psi = F(x, y, z), \quad (3,20)$$

где $f(x, y, z, t)$ и $F(x, y, z)$ — некоторые заданные функции указанных аргументов, но что таким же уравнениям удовлетворяют и все прямоугольные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Действительно, если, например, взять ротор от уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3,21)$$

и воспользоваться уравнениями (3,1) и (3,2), то получится

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \left\{ \frac{\text{grad } \rho}{\epsilon} + \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}^{(e)}}{\partial t} \right\}, \quad (3,22)$$

тогда как беря ротор от уравнения (3,1) и используя (3,4) и (3,21), находим:

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}^{(e)}. \quad (3,23)$$

При этом, конечно, предполагаем, что функции ρ и $\mathbf{j}^{(e)}$ в соответствующих областях непрерывны и имеют все входящие в (3,22) и (3,23) производные.

из формулы (3,15) для k^2 . При этом последнем условии формула (3,17) дает правильное решение, удовлетворяющее принципу излучения и при отсутствии поглощения в среде.

Итак, мы видим, что все величины $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, A_x, A_y, A_z, \varphi$ удовлетворяют одноподобным уравнениям вида (3,19) для любым образом зависящих от времени процессов, переходящим для чисто синусоидальных процессов в уравнение (3,20). Наша основная задача сводится поэтому к интегрированию уравнений этого типа в случае, когда в пространстве имеется ряд областей, заполненных различными по своим свойствам, однородными изотропными средами. Впоследствии мы остановимся также на некоторых классах проблем, относящихся к случаям, когда в пространстве имеются и среды с непрерывно изменяющимися от точки к точке свойствами.

§ 4. Некоторые проблемы математической физики, решение которых эквивалентно решению одной из основных задач теории электромагнитного поля

4.1. С задачей об интегрировании уравнений такого же вида, как (3,19) или (3,20), или уравнений, являющихся частными случаями их, мы встречаемся не только в электродинамике, но и в весьма разнообразных других областях математической физики. Перечислим некоторые из таких областей и из относящихся к ним уравнений.

а) Акустика. Основное уравнение акустики имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (4,1)$$

что для чисто синусоидальных колебаний с частотой ω переходит в так называемое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + \frac{\omega^2}{a^2} \varphi = 0. \quad (4,1')$$

Здесь a — некоторая постоянная, определяемая свойствами среды, в которой происходит распространение колебаний.

б) Теория теплопроводности. Основное уравнение теории теплопроводности в твердых телах (уравнение Фурье) может быть, в случае однородной изотропной среды, записано в такой форме:

$$\Delta T = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{Q}{k}, \quad (4,2)'$$

где T — температура в некоторой точке среды, c — теплоемкость среды, ρ — ее плотность, k — коэффициент теплопроводности, а $Q = Q(x, y, z, t)$ — удельное тепловыделение¹ в единицу времени в рассматриваемой точке.

¹ Т. е. количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени.

в) Диффузия. Основное уравнение диффузии имеет вид, аналогичный (4,2), именно

$$D \Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}, \quad (4,3)$$

где n обозначает концентрацию диффундирующего вещества, а D — диффузионный коэффициент.

г) Колебания мембран. Основное уравнение колебания мембран (плоских) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, y, t), \quad (4,4)$$

где u — смещение некоторой точки мембраны из положения равновесия, a^2 — постоянная, зависящая от массы, приходящейся на единицу поверхности мембраны, и от степени натяжения этой последней, а функция $f(x, y, t)$ пропорциональна силе, приложенной к единице поверхности мембраны в точке (x, y) .

Это уравнение, очевидно, является частным случаем уравнения (3,19), если считать в этом последнем функции u и f независимыми от z и положить $\sigma = 0$, чтобы избавиться от члена, пропорционального $\frac{\partial u}{\partial t}$.

д) Колебания струны. К тому же типу относится и уравнение колебания струны, которое, в общем случае наличия распределенной вдоль нее нагрузки, может быть записано в таком виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t), \quad v = \text{const}, \quad (4,5)$$

где u — смещение некоторой точки струны, а $f(x, t)$ — пропорциональна приложенной силе. Это уравнение является еще более частным случаем уравнения (3,19), в котором надо в этом случае считать u и f независимыми от y и от z и положить $\sigma = 0$.

е) Уравнение безвихревого движения несжимаемой жидкости. Оно имеет вид:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (4,6)$$

Здесь φ — так называемый потенциал скоростей.

ж) Телеграфное уравнение, которым определяется распространение квазистационарных электромагнитных волн вдоль однородных¹ длинных линий. В случае отсутствия утечек в линии оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + CR \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4,7)$$

¹ Т. е. таких, что их емкость, самоиндукция, сопротивление и утечка на единицу длины одинаковы на всем протяжении линии.

где C , L и R — соответственно емкость, самоиндукция и сопротивление линии на единицу длины. В случае наличия утечек, уравнение (4,7) заменяется уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\varphi, \quad (4,8)$$

где a , b , и c тоже постоянные (для однородной линии). Оно отличается от всех предыдущих наличием члена, содержащего φ , что, впрочем, не осложняет его решения по сравнению с решением уравнения (4,7), как будет видно ниже.

Отметим еще, что в том случае, когда индуктивность линии настолько мала, что ее влиянием можно с достаточным приближением пренебречь и положить $L=0$ (случай безиндукционного кабеля), уравнение (4,7) упрощается и получает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = CR \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4,9)$$

Это частный случай уравнений (4,2) или (4,3).

4.2. Резюмируя все вышеизложенное, можем сказать, что все перечисленные задачи могут рассматриваться как частные случаи общей задачи об интегрировании уравнения вида

$$\Delta \varphi = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\varphi + f(x, y, z, t) \quad (4,10)$$

или системы таких уравнений для нескольких соприкасающихся областей, при тех или иных граничных условиях.

В том случае, когда изучаемые процессы синусоидальны во времени, уравнение (4,10) заменяется более простым, именно:

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = F(x, y, z), \quad k^2 = \text{const}, \quad (4,11)$$

для которого и нужно решать соответствующую граничную задачу. В следующей главе мы займемся изложением некоторых методов решения задач подобного рода для различных типов граничных условий.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава II

МЕТОД ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 5. Общие принципы метода

5.1. Для решения линейных однородных уравнений в частных производных рассмотренного выше типа¹ часто применяется так называемый метод частных решений, восходящий в основе своей еще к Даниилу Бернулли и называемый иногда методом Фурье—Ламе по имени систематически разработавших его ученых.

Если такие решения могут быть найдены, то, как показывает более детальное исследование и как будет видно ниже на примерах, их всегда найдется бесконечное множество, причем они оказываются зависящими от одного или нескольких постоянных параметров, могущих принимать любые вещественные или комплексные значения.

Сущность этого метода, применяемого обычно тогда, когда поверхности, на которых заданы граничные условия, являются координатными поверхностями в декартовых координатах или в какой-либо системе криволинейных координат² (цилиндрических, сферических и т. д.), состоит в том, что подлежащее интегрированию дифференциальное уравнение записывают в соответствующих криволинейных координатах и пытаются искать частные решения этого уравнения в форме произведения функций, зависящих каждая только от одной из переменных.³

Так как исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, то сумма произвольного числа найденных таким способом частных решений его есть опять

¹ А также некоторых более общих.

² Координатными поверхностями в криволинейных координатах называем такие поверхности, на которых одна из криволинейных координат имеет постоянное значение.

³ В том числе от времени, если искомая функция зависит от t .

решение. Мы получаем, таким образом, возможность составить некое весьма общее решение предложенного уравнения.

Если соответствующим выбором значений входящих в суммируемые решения параметров и постоянных можно добиться того, чтобы все решение в целом удовлетворяло всем граничным и начальным условиям и представлялось бы при этом сходящимся рядом, и если сверх того установлено, что при этих условиях предложенное уравнение имеет одно единственное решение,¹ то найденное нами решение и будет правильным решением задачи.

§ 6. Приложение метода частных решений к решению первой предельной задачи (задачи Дирихле) для уравнения Лапласа для прямоугольной области

6.1. Поясним на простом примере изложенные только что общие идеи, именно, приложим метод частных решений к задаче об интегрировании уравнения Лапласа для двухмерного случая (плоская задача), т. е. уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (6.1)$$

причем поставим себе целью нахождение того решения его, которое принимало бы заданные значения на сторонах прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ (рис. 4) [это так называемая предельная задача первого рода или задача Дирихле (внутренняя) для прямоугольника].

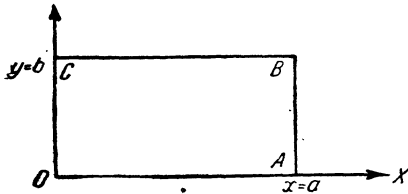


Рис. 4.

Решение задачи начнем с разыскания частных решений уравнения (6,1), которые будем искать в виде произведения функций, зависящих только от x и от y в отдельности, т. е. в виде

$$u = f(x)\varphi(y). \quad (6.2)$$

Подстановка в (6,1) дает:

$$\varphi \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = 0. \quad (6.3)$$

Разделяя это уравнение на произведение $f\varphi$, получим:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = 0. \quad (6.4)$$

Так как здесь каждый член является функцией только от одной из переменных x , y и так как это соотношение должно удовлетворяться при *любых* значениях x , y , то это возможно тогда и только тогда.

¹ Для основных интересующих нас здесь задач единственность решения, как указывалось выше, имеет место.

когда каждое из слагаемых — это постоянная. Обозначая поэтому через α и β две такие постоянные (вещественные или комплексные), что

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\alpha^2, \text{ так что } \frac{d^2 f}{dx^2} = -\alpha^2 f, \quad (6,5)$$

и

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\beta^2, \text{ так что } \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\beta^2 \varphi, \quad (6,6)$$

видим, что (6,4) удовлетворяется тогда, когда выполнено условие

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0, \quad (6,7)$$

т. е. когда

$$\alpha = \pm i\beta. \quad (6,8)$$

Общие решения уравнений (6,5) и (6,6) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f &\equiv f_\alpha = A_\alpha \sin \alpha x + A'_\alpha \cos \alpha x = P_\alpha e^{i\alpha x} + P'_\alpha e^{-i\alpha x}, \\ \varphi &\equiv \varphi_\beta = B_\beta \sin \beta y + B'_\beta \cos \beta y = Q_\beta e^{i\beta y} + Q'_\beta e^{-i\beta y}, \end{aligned} \right\} \quad (6,9)$$

где $A_\alpha, A'_\alpha, P_\alpha, P'_\alpha$ и т. д. — произвольные постоянные.

Частное решение уравнения (6,1) может быть поэтому написано так:

$$u = f_\alpha(x) \varphi_{i\alpha}(y) = \varphi_\beta(y) f_{i\beta}(x), \quad (6,10)$$

а суммируя такие решения по α или по β , можем составить из них некоторое более общее решение, именно

$$u = \sum_{(\alpha)} f_\alpha(x) \varphi_{i\alpha}(y) = \sum_{(\beta)} \varphi_\beta(y) f_{i\beta}(x). \quad (6,11)$$

Здесь суммирование может пока распространяться на любые значения индексов α или β .

6.2. Пусть теперь искомая функция $u \equiv u(x, y)$ должна удовлетворять на границах прямоугольника следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= F_1(y); & (u)_{x=a} &= F_2(y); \\ (u)_{y=0} &= \psi_1(x); & (u)_{y=b} &= \psi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (6,12)$$

где F_1, F_2, ψ_1 и ψ_2 — какие-либо функции указанных аргументов, определенные соответственно в интервалах от $y=0$ до $y=b$ и от $x=0$ до $x=a$.

Мы можем тогда разбить решение задачи на две части, именно:

1) На нахождение функции $u^{(1)} \equiv u^{(1)}(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (6,1) и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} (u^{(1)})_{x=0} &= F_1(y); & (u^{(1)})_{x=a} &= F_2(y); \\ (u^{(1)})_{y=0} &= (u^{(1)})_{y=b} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (6,13)$$

2) На нахождение функции $u^{(2)} \equiv u^{(2)}(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (6,1) и граничным условиям

$$(u^{(2)})_{x=0} = (u^{(2)})_{x=a} = 0; \quad (u^{(2)})_{y=0} = \psi_1(x); \quad (u^{(2)})_{y=b} = \psi_2(x). \quad (6,14)$$

Тогда функция

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} \quad (6,15)$$

удовлетворяет как уравнению (6,1), так и граничным условиям (6,12), а потому она и будет, по теореме о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, как раз искомым решением.

6.3. Для того, чтобы найти функцию $u^{(1)}$, которая должна, согласно (6,13), обращаться в нуль при $y=0$ и при $y=b$, т. е. на сторонах OA и CB прямоугольника (рис. 4), составим сумму (6,11) из тех только частных решений вида (6,2), каждое из которых в отдельности удовлетворяет тем же граничным условиям, т. е. обращается в нуль при $y=0$ и при $y=b$.

Выражение вида $f(x)\varphi(y)$ может тождественно обращаться в нуль при $y=0$ и $y=b$ вне зависимости от того, какие значения принимает при этом координата x , тогда и только тогда, когда $\varphi(0)=\varphi(b)=0$. Так как, согласно (6,9), общее выражение функции $\varphi(y)$ имеет вид

$$\varphi(y) = \varphi_\beta(y) = B_\beta \sin \beta y + B'_\beta \cos \beta y,$$

то, полагая здесь $y=0$ и замечая, что должно быть $\varphi_\beta(0) = B'_\beta = 0$ находим сперва, что

$$\varphi(y) = \varphi_\beta(y) = B_\beta \sin \beta y. \quad (6,16)$$

Так как сверх того, должно еще быть $\varphi_\beta(b) = B_\beta \sin \beta b = 0$, и так как нас интересуют лишь отличные от тождественного нуля решения, так что заведомо $B_\beta \neq 0$, то приходим к условию

$$\sin \beta b = 0, \quad (6,17)$$

т. е. требуемые функции получатся только при значениях β , определяемых формулой

$$\beta = \frac{k\pi}{b} \equiv \beta_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots \infty). \quad (6,18)$$

Функции $\varphi_\beta(y)$ имеют, стало быть, вид:

$$\varphi_\beta(y) = \varphi_{\frac{k\pi}{b}}(y) = B_{\frac{k\pi}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6,19)$$

Соответствующие функции $f(x) = f_{i\beta}(x)$ будут, согласно (6,9):

$$f_{i\beta}(x) = P_{\frac{ik\pi}{b}} e^{-\frac{k\pi x}{b}} + P'_{\frac{ik\pi}{b}} e^{\frac{k\pi x}{b}} = M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b}, \quad (6,20)$$

где M_k и N_k — новые произвольные постоянные, а потому искомые частные решения $u = \varphi_\beta(y) f_{i\beta}(x)$, которые будем обозначать через $\bar{u}_k^{(1)}$, суть:¹

$$\bar{u}_k^{(1)} = \left(M_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6,21)$$

¹ При переходе от (6,19) и (6,20) к (6,21) положено $B_{\frac{k\pi}{b}} = 1$, что, очевидно, не уменьшает общности решения.

Так как все $\bar{u}_k^{(1)}$ удовлетворяют при $y=0$ и $y=b$ тем же граничным условиям, как и сама функция $u^{(1)}$, то удовлетворяет этим условиям, а также, конечно, уравнению (6,1), и их сумма

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (6,22)$$

и это при произвольных значениях M_k и N_k , ограниченных только условием сходимости ряда (6,22) и рядов, получаемых двукратным дифференцированием его по x и по y .

Попытаемся теперь выбрать эти постоянные так, чтобы представляемая рядом (6,22) функция удовлетворяла при $x=0$ и $x=a$ обоим оставшимся условиям (6,13), т. е. чтобы она при этих значениях x обращалась соответственно в $F_1(y)$ и $F_2(y)$. Это приводит к условиям:

$$F_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (6,23)$$

и

$$F_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{b} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (6,24)$$

которые должны выполняться при изменении y от нуля до b , т. е. к задаче о разложении произвольных функций $F_1(y)$ и $F_2(y)$ в тригонометрические ряды вида (6,23), т. е. по синусам кратных дуг, в интервале от нуля до b .

Эта задача является частным случаем более общей задачи о разложении произвольной функции $F(y)$ в интервале от $-b$ до $+b$ в полный ряд Фурье, имеющий вид

$$F(y) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{k\pi y}{b} + B_k \sin \frac{k\pi y}{b} \right], \quad (6,25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{b} \int_{-b}^{+b} F(y) \cos \frac{k\pi y}{b} dy, \\ B_k &= \frac{1}{b} \int_{-b}^{+b} F(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \end{aligned} \right\} (k=0, 1, 2, \dots \infty) \quad (6,26)$$

причем ряд этот содержит уже не только синусы, но и косинусы кратных дуг. Чтобы получить из (6,25) — (6,26) разложения вида (6,23) — (6,24), замечаем, что в этих последних разлагаемые функции заданы не во всем интервале от $-b$ до $+b$, а лишь от нуля до b . Так как при этом стоящие в правых частях формул (6,23) и (6,24) ряды являются нечетными функциями от y , то они представляют собой разло-

жения в ряды Фурье нечетных же функций, а так как для нечетных функций формулы (6,26) очевидно, дают

$$A_k = 0, \quad B_k = \frac{2}{b} \int_0^b F(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \quad (6,27)$$

то (6,25) приобретает для них вид:

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6,28)$$

Эта формула дает разложение в интервале от $-b$ до $+b$ произвольной функции, удовлетворяющей условию $F(-y) = -F(y)$ или, что то же, разложение произвольно заданной в интервале $(0, b)$ функции $F(y)$ в ряд вида (6,28), если $F(y)$ считается продолженной нечетным образом в область от $-b$ до нуля. Это и есть, стало быть, искомое разложение вида (6,23) — (6,24), причем коэффициенты его B_k определяются формулой (6,27).¹ Из этого следует, что для того, чтобы удовлетворить уравнениям (6,23) и (6,24), достаточно в них положить, в соответствии с (6,27),

$$M_k = \frac{2}{b} \int_0^b F_1(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \quad (6,29)$$

$$M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{b} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b F_2(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \quad (6,30)$$

причем предполагается, что функции $F_1(y)$ и $F_2(y)$ удовлетворяют условиям, потребным для разложимости их в ряды Фурье, что в реальных физических проблемах всегда выполняется.

Из (6,29) и (6,30) однозначно определяются все M_k и N_k при $k \geq 1$. Подставляя найденные значения M_k и N_k в (6,22), получим после элементарных преобразований ряд

¹ Условия справедливости разложения (6,28) — (6,27) совпадают с таковыми для ряда (6,25), из которого оно получено. В частности, оно верно для всякой кусочно-гладкой в интервале $(0, b)$ функции $F(y)$, причем под значением функции в точках разрыва следует понимать полусумму значений ее по обе стороны от точки разрыва. (Примечание: функция называется кусочно-непрерывной, если она в рассматриваемом интервале допускает лишь конечное число разрывов непрерывности, притом такого рода, что при приближении к точке разрыва с обеих сторон функция стремится к определенным конечным пределам. Кусочно-гладкой называется кусочно-непрерывная функция с кусочно-непрерывной первой производной).

Заметим, что разложение (6,28) является частным случаем весьма общего класса разложений в ряды по так называемым фундаментальным решениям (собственным функциям) дифференциальных уравнений штурм-лиувиллевого типа. Ср. п. 15.2.

$$u^{(1)} = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b} \int_0^b F_1(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy + \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \int_0^b F_2(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (6,31)$$

который и дает решение поставленной задачи.

Совершенно аналогичным образом найдем и $u^{(2)}$, выбирая в качестве частных решений функции

$$\bar{u}_k^{(2)} = \left(C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (6,32)$$

обращающиеся в нуль при $x=0$ и $x=a$, причем функция $u^{(2)}$ получается в виде

$$u^{(2)} = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(b-y)}{a} \int_0^a \phi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx + \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \int_0^a \phi_2(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (6,33)$$

Складывая оба полученных решения, найдем сумму $u = u^{(1)} + u^{(2)}$, т. е. полное решение поставленной задачи.

6.4. Изложенный только что способ решения первой предельной задачи для уравнения (6,1) в случае прямоугольной области дает возможность найти искомое решение при практически произвольном задании граничных значений (6,12) искомой функции на контуре прямоугольника. Следует, однако, заметить, что тот прием, с помощью которого это решение было получено, именно разложение искомой функции u на две функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, из которых каждая удовлетворяет на одной паре сторон тем же граничным условиям, как сама функция u , а на второй — однородным, по существу чужд природе задачи и может приводить, даже в простейших случаях, к весьма сложной форме представления простого в основе своей решения.

Так, например, рассмотрим вопрос о нахождении решения уравнения (6,1) при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= 0; & (u)_{x=a} &= ay; \\ (u)_{y=0} &= 0; & (u)_{y=b} &= bx. \end{aligned} \right\} \quad (6,34)$$

Нетрудно непосредственно проверить, что искомым решением является функция

$$u = xy, \quad (6,35)$$

причем никакого другого решения задачи, согласно теореме единственности, не существует.

Найдем теперь решение той же задачи с помощью данного выше общего метода.

Начинаем с нахождения функции $u^{(1)}$, которая в данном случае должна удовлетворять таким граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} (u^{(1)})_{x=0} = 0 &\equiv F_1(y); & (u^{(1)})_{x=a} = ay &\equiv F_2(y); \\ (u^{(1)})_{y=0} = 0; & & (u^{(1)})_{y=b} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6,36)$$

(6,31) дает теперь:

$$u^{(1)} = \frac{2ab}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6,37)$$

Для $u^{(2)}$ будем иметь граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} (u^{(2)})_{y=0} = 0 &\equiv \psi_1(x); & (u^{(2)})_{y=b} = bx &\equiv \psi_2(x); \\ (u^{(2)})_{x=0} = 0; & & (u^{(2)})_{x=a} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6,38)$$

так что (6,33) дает:

$$u^{(2)} = \frac{2ba}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (6,39)$$

Для полного решения $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ находим теперь:

$$u = \frac{2ab}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a} \right\}. \quad (6,40)$$

Это выражение должно, согласно теореме о единственности решения, представлять собой не что иное как функцию $u = xu$. Проверить это утверждение непосредственно было бы не так легко, поскольку это потребовало бы специального преобразования правой части формулы (6,40). К тому же и самая идея о том, что функция, представляемая формулой (6,40), просто равна xu , вряд ли могла бы притти в голову, если бы не иметь оснований подозревать это заранее. Относительная же сложность структуры формулы (6,40) связана с тем обстоятельством, что нахождение функции u производилось, так сказать, не непосредственно, с одновременным учетом всех ее свойств, выражаемых граничными условиями (6,34), а что она была предварительно „разорвана“ на две части $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, каждая из которых по своей природе гораздо сложнее самой первичной функции u , и которые приходилось находить, при пользовании этим методом, в отдельности. В этом искусственном „разрывании“ искомой функции на отдельные части,

разрывании, которое никак не связано с природой этой функции и обусловлено только стремлением свести решение данной задачи к решению таких задач, каждая из которых соответствует частично нулевым граничным условиям и решение которой может быть поэтому составлено из обращающихся в нуль на соответствующих границах прямоугольника частных решений предложенного дифференциального уравнения (6,1), — в этом как раз и коренится причина того, что получаемое таким способом решение задачи может иметь гораздо более сложную форму, чем то соответствует истинной природе искомой функции. Это показывает, что метод частных решений хотя и дает возможность решать проблемы рассматриваемого здесь типа, но включает в себе явный элемент неадекватности природе этих задач. Этот элемент неадекватности выступает еще несравненно сильнее, если рассматривать краевую задачу для уравнения (6,1) не с граничными условиями (6,12), а с так называемыми граничными условиями второго рода (задача Неймана, см. § 10). Мы дадим впоследствии¹ другой метод подхода к решению этих задач, свободный от этого недостатка. Пока же вернемся еще раз к данному выше решению (6,15), (6,31), (6,33) первой предельной задачи и покажем, прежде всего, как оно может быть получено несколько иным способом, чем данный выше.

§ 7. Другой способ получения того же решения первой предельной задачи для прямоугольника

7.1. В предыдущем параграфе решение первой предельной задачи находилось таким образом, что искались выражения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в виде рядов вида (6,22) и (6,33), которые можем короче записать следующим образом:

$$u^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad u_k^{(1)} = u_k^{(1)}(x), \quad (7,1)$$

$$u^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2)} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad u_k^{(2)} = u_k^{(2)}(y). \quad (7,2)$$

В этих рядах каждый член в отдельности является частным решением уравнения (6,1).² Из этого требования определялся вид функций $u_k^{(1)}(x)$ и $u_k^{(2)}(y)$, именно получалось:

$$u_k^{(1)} = M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b}, \quad (7,3)$$

$$u_k^{(2)} = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}, \quad (7,4)$$

¹ См. §§ 9, 10 и 15.

² Притом таким, что оно обращается в нуль на тех же сторонах прямоугольника, на которых обращается в нуль соответствующая функция $u^{(1)}$ или $u^{(2)}$.

и решение задачи сводилось, таким образом, к определению коэффициентов M_k, N_k, C_k, D_k , которые уже затем могли быть найдены с помощью использования формул (6,28)—(6,27) для разложения нечетных функций в ряд Фурье и соотношений (6,23)—(6,24). Заметим, что при таком методе получения решения, по существу предполагается, что ряды (7,1) и (7,2) допускают двукратное почленное дифференцирование, так что сходятся также ряды

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 u_k^{(1)}}{dx^2} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (7,5)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 u_k^{(1)} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (7,6)$$

подстановка которых в (6,1) приводит к соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 u_k^{(1)}}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 u_k^{(1)} \right] \sin \frac{k\pi y}{b} = 0. \quad (7,7)$$

Приравнивая здесь нулю в отдельности коэффициенты при всех синусах, придем к уравнениям

$$\frac{d^2 u_k^{(1)}}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 u_k^{(1)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (7,8)$$

из которых и получаются выражения (7,3) для всех $u_k^{(1)}$. Аналогично получим и (7,4).

Покажем теперь, что можно подойти к вопросу о нахождении функций $u_k^{(1)}(x)$ и $u_k^{(2)}(y)$ и иным способом. Именно, допуская, как и раньше, возможность разложения функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ соответственно в ряды вида (7,1) и (7,2) с коэффициентами типа (6,27), т. е.

$$u_k^{(1)} = \frac{2}{b} \int_0^b u^{(1)}(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \quad (7,9)$$

$$u_k^{(2)} = \frac{2}{a} \int_0^a u^{(2)}(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \quad (7,10)$$

но не делая никаких специальных предположений о виде функций $u_k^{(1)}(x)$ и $u_k^{(2)}(y)$ и о характере сходимости рядов (7,1) и (7,2), можно непосредственно определить эти коэффициенты прямо из тех дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} = 0, \quad (7,11)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} = 0, \quad (7,12)$$

которым удовлетворяют $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. При этом тот способ, которым это может быть сделано, допускает непосредственное распространение

как на соответствующее неоднородное уравнение (т. е. на уравнение Пуассона вместо уравнения Лапласа) и на предельные задачи, соответствующие иным граничным условиям (как однородным, так и неоднородным), так и на целый широкий класс других задач математической физики, приводящихся к уравнениям более общего типа, нежели рассматриваемое здесь.

Покажем, прежде всего, как найти $u_k^{(1)}$. Помножим для этого уравнение

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k^{(1)}}{\partial y^2} = 0 \quad (7,11)$$

на $\frac{2}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy$ и проинтегрируем его по y от нуля до b . Получается, если использовать обозначение (7,9):

$$\frac{d^2 u_k^{(1)}}{dx^2} + \frac{2}{b} \int_0^b \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} dy = 0. \quad (7,13)$$

Так как интегрирование по частям дает:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} dy &= \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \Big|_0^b - \frac{k\pi}{b} \int_0^b \cos \frac{k\pi y}{b} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} dy = \\ &= -\frac{k\pi}{b} \left\{ u^{(1)} \cos \frac{k\pi y}{b} \Big|_0^b + \frac{k\pi}{b} \int_0^b u^{(1)} \sin \frac{k\pi y}{b} dy \right\} = -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (7,14)$$

то

$$\frac{d^2 u_k^{(1)}}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k^{(1)} = 0, \quad (7,15)$$

т. е. вновь получаем уравнение (7,8) для $u_k^{(1)}$. Заметим, что интеграл в формуле (7,13) оказывается равным $-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k^{(1)}$ и независимым от неизвестных нам величин $\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=0}$ и $\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=b}$ только благодаря тому, что избранные нами „собственные функции“ задачи — $\varphi_{k\pi/b}(y)$ —, по которым мы разлагаем решение $u^{(1)}$ [см. (6,19)] и на которые умножалось уравнение (7,11), обращаются в нуль на границах интервала ($0 \leq y \leq b$), так что входящий при интегрировании по частям в (7,13) член $\sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \Big|_0^b = \varphi_{\frac{k\pi}{b}}(y) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \Big|_0^b$ выпадает из результата.

Общий интеграл уравнения (7,15) имеет вид

$$u_k^{(1)} = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b}, \quad (7,16)$$

где A_k и B_k — постоянные. Чтобы их определить, сравниваем получаемые из (7,16) значения $u_k^{(1)}$ при $x=0$ и $x=a$ с вытекающими непосредственно из (7,9) и (6,12). Таким образом находим:

$$\left. \begin{aligned} (u_k^{(1)})_{x=0} &= \frac{2}{b} \int_0^b F_1(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = B_k, \\ (u_k^{(1)})_{x=a} &= \frac{2}{b} \int_0^b F_2(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{b}, \end{aligned} \right\} (7,17)$$

откуда для A_k получается значение:

$$A_k = \frac{2}{b \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \left\{ \int_0^b F_2(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy - \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{b} \int_0^b F_1(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy \right\}. \quad (7,18)$$

Подставляя найденные значения A_k и B_k в (7,15), а затем вводя значения $u_k^{(1)}$ в (7,1), получим $u^{(1)}$, т. е. найдем искомое решение задачи, которое, естественно, совпадает с ранее найденным, — (6,31).

Совершенно аналогично находим $u^{(2)}$, причем полагаем

$$u^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2)} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (7,19)$$

и получаем, что

$$u_k^{(2)} = M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} \quad (7,20)$$

со значениями

$$\left. \begin{aligned} M_k &= \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \left\{ \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx - \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx \right\}, \\ N_k &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx. \end{aligned} \right\} (7,21)$$

Складывая $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ находим полное u , —

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad (7,22)$$

удовлетворяющее всем условиям задачи.

Примеры к §§ 6—7

7.2. Пусть дано, что на OC (т. е. при $x=0$, рис. 4) $u=V=\text{const}$, тогда как на всех прочих сторонах $u=0$.

Так как при этом $F_1(y)=V$, $F_2(y)=0$, $\psi_1(x)=\psi_2(x)=0$, то (7,17) и (7,18) дают:

$$A_k = \begin{cases} -\frac{4V \operatorname{cth} \frac{(2s+1)\pi a}{b}}{(2s+1)\pi} & \text{при } k=2s+1, \\ 0 & \text{при } k=2s, \end{cases} \quad (s=0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (7,23)$$

$$B_k = \begin{cases} \frac{4V}{(2s+1)\pi} & \text{при } k=2s+1, \\ 0 & \text{при } k=2s, \end{cases} \quad (s=0, 1, 2, \dots, \infty), \quad (7,24)$$

тогда как $M_k = N_k = 0$. Это дает при подстановке в (7,16) и (7,20):

$$\left. \begin{aligned} u_{2s+1}^{(1)} &= \frac{4V}{(2s+1)\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi a}{b}}, \\ u_{2s}^{(1)} &= u_{s+1}^{(2)} = 0, \end{aligned} \right\} (s=0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (7,25)$$

так что, согласно (7,22), (7,1) и (7,2), получим:

$$u = \frac{4V}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)(a-x)\pi}{b} \cdot \sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{(2s+1) \operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi a}{b}}. \quad (7,26)$$

Это выражение удовлетворяет всем условиям задачи. В частности, при $x=0$ и $y \neq 0$ (7,26) дает:

$$u = \frac{4V}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{2s+1},$$

что, в силу известного соотношения

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{2s+1}, \quad 0 < y < b, \quad (7,27)$$

действительно, равно V , как оно и должно быть по заданию.

7.3. Ряд (7,26) дает практически удобное представление искомой функции в тех случаях, когда $a \geq b$, притом лишь для тех точек внутри прямоугольника, для которых отношение $2\pi x/b$ не мало по сравнению с единицей, ибо тогда будет приближенно¹

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi a}{b}} \cong \frac{e^{\frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}}}{e^{\frac{(2s+1)\pi a}{b}}} = e^{-\frac{(2s+1)\pi x}{b}},$$

и последовательные члены ряда (7,26) убывают примерно как

$$e^{-\frac{\pi x}{b}} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi x s}{b}}}{2s+1}.$$

Но ряд (7,26) сходится очень плохо для точек вблизи от стороны OC , для которых $2\pi x/b$ — это малая величина, причем это относится и к случаю, когда $a \geq b$. Если, в частности, пожелать вычислить с помощью (7,26) значение x -овой составляющей электрического поля в точках этой стороны, то получим ряд

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4V}{b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi a}{b}} \sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}, \quad (7,28)$$

¹ Считаем для простоты, что $e^{-\frac{2\pi(a-x)}{b}} \ll 1$.

пригодный для вычисления E_x вдали от стороны OC , но который при $x=0$ дает:

$$(E_x)_{x=0} = \frac{4V}{b} \sum_{s=0}^{\infty} \operatorname{th} \frac{(2s+1)\pi a}{b} \sin \frac{(2s+1)\pi y}{b},$$

т. е. расходящийся ряд. Мы займемся поэтому преобразованием найденного решения к другому виду, для чего воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi a}{b}} = \frac{2e^{-\frac{(2s+1)\pi a}{b}}}{1 - e^{-\frac{(2s+1)2\pi a}{b}}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2s+1)\pi a}{b}(2n+1)}, \quad (7,29)$$

верной при любых вещественных a и b . Внося (7,29) в (7,26), найдем, заменяя еще $\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}$ через $\frac{1}{2} \left[e^{\frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}} - e^{-\frac{(2s+1)\pi(a-x)}{b}} \right]$:

$$u = \frac{4V}{\pi} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{2s+1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{b}(2s+1)(2na+x)} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{2s+1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{b}(2s+1)[2(n+1)a-x]} \right\}. \quad (7,30)$$

Меняя порядок суммирования в этих двойных рядах, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{2s+1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{b}(2s+1)(2na+x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[e^{-\frac{\pi(2na+x)}{b}} \right]^{2s+1}}{2s+1} \sin \frac{(2s+1)\pi y}{b} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2na+x)\pi}{b}} \right], \end{aligned} \quad (7,31)$$

и аналогично:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2s+1)\pi y}{b}}{2s+1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{b}(2s+1)[2(n+1)a-x]} &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{[2(n+1)a-x]\pi}{b}} \right], \end{aligned} \quad (7,32)$$

причем использована формула

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^{2s+1} \sin(2s+1)\theta}{2s+1} &= \operatorname{Im} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\rho e^{i\theta})^{2s+1}}{2s+1} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\lg \frac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \lg \frac{(1 - \rho^2) + i2\rho \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2\rho \sin \theta}{1 - \rho^2} \right), \quad (-1 < \rho < +1). \end{aligned} \quad (7,33)$$

Подставляя (7,31) и (7,32) в (7,30), найдем:

$$u = \frac{2V}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2na+x)\pi}{b}} - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2na-x)\pi}{b}} \right\}. \quad (7,34)$$

Эта форма решения уже может быть использована и вблизи от $x=0$. Из нее получаем:

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2V}{b} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2na+x)\pi}{b}}{\sin^2 \frac{\pi y}{b} + \operatorname{sh}^2 \frac{(2na+x)\pi}{b}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2na-x)\pi}{b}}{\sin^2 \frac{\pi y}{b} + \operatorname{sh}^2 \frac{(2na-x)\pi}{b}} \right\} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (7,35)$$

что дает при $x=0$:

$$(E_x)_{x=0} = \frac{2V}{b} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi y}{b}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi na}{b}}{\sin^2 \frac{\pi y}{b} + \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi na}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} \right\}. \quad (7,36)$$

Эта формула уже вполне пригодна для вычисления $(E_x)_{x=0}$.

7.4. Если $a=\infty$, так что прямоугольник превращается в бесконечную полуполосу (рис. 5), то (7,34) и (7,35) дают:

$$u = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} \right), \quad (7,37)$$

и

$$E_x = \frac{2V}{b} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b}}{\sin^2 \frac{\pi y}{b} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{b}} = \frac{4V}{b} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{b} - \cos \frac{2\pi y}{b}}. \quad (7,38)$$

В частности, в середине стороны OC , т. е. при $x=0$, $y=\frac{b}{2}$, получается

$$(E_x)_{x=0} = \frac{2V}{b}. \quad (7,39)$$

7.5. Если предположить, что и ширина b полосы тоже стремится к бесконечности, так что прямоугольник $OABC$ распространяется на весь первый квадрант плоскости (x, y) , то приходим к задаче о поле прямого угла, горизонтальная сторона которого (положительная полуось x) находится при потенциале $u=0$, а вертикальная (поло-

жительная полуось y) — при потенциале $u = V$. Для u получается, в этом случае, из (7,37):

$$u = \frac{2V}{\pi} \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (7,40)$$

Эквипотенциальные линии при этом — это радиусы $y = Cx$, а силовые линии — дуги окружностей, описанных из начала координат.

7.6. При выводе формулы (7,37) мы предполагали, что высота b прямоугольника остается конечной, тогда как ширина его a неограниченно возрастает, причем прямоугольник превращается в горизонтальную полуполосу высотой b (рис. 5). Предположим, теперь, что a остается конечной, а $b \rightarrow \infty$, так что прямоугольник обращается в вертикальную полуполосу (рис. 6), вдоль одной из бесконечно длинных $\varphi = V$

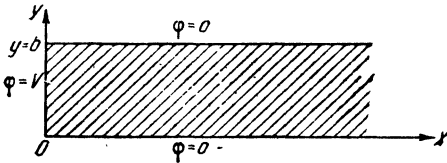


Рис. 5.

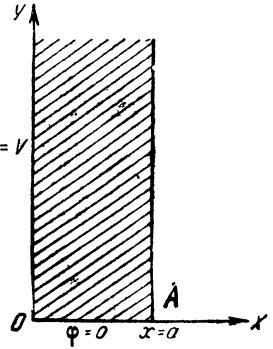


Рис. 6.

сторон которой потенциал равен V , тогда как на параллельной ей стороне и на горизонтальном отрезке OA потенциал равен нулю. (7,34) принимает тогда такой вид:¹

$$\begin{aligned} u &= \frac{2V}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{2na+x} - \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{2(n+1)a-x} \right\} = \frac{2V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{2na+x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{2na-x} \right] \right\} = \\ &= \frac{2V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2xy}{4n^2a^2 + y^2 - x^2} \right\}, \end{aligned} \quad (7,41)$$

причем использована формула вычитания арктангенсов:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}. \quad (7,42)$$

Формула (7,41) весьма удобна для вычисления потенциала и поля при значениях y порядка a или меньших.

При $y \rightarrow \infty$, т. е. в той области, где поле должно, очевидно, становиться равномерным, поскольку влияние стороны OA с потенциалом, равным нулю, должно, по мере удаления от этой стороны, делаться пренебрежимо-малым, формула (7,41)

¹ Правильность предельного перехода, приводящего к формуле (7,41), если положить $b = \infty$ в (7,34), нетрудно обосновать.

становится, правда, неудобной для непосредственного использования, но все же дает возможность обнаружить это стремление поля к равномерности следующим образом: пусть $y \gg a \gg x$, так что каждая из величин $\frac{2xy}{y^2 - x^2 + 4n^2a^2}$ — весьма малая дробь при всех $n \geq 0$. Тогда пользуясь формулой

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha = \int_0^{\alpha} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \int_0^{\alpha} \left[1 - \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \right] d\xi = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \xi^2}, \quad (7,43)$$

которая, в силу неравенства

$$\int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \alpha^2} > \int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{1}{(1 + \alpha^2)} \cdot \frac{\alpha^3}{3},$$

может быть, очевидно, переписана и так:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha = \alpha - \theta \cdot \frac{\alpha^3}{3}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (7,44)$$

где θ — некоторая величина, лежащая в указанных пределах, можем переписать (7.41) следующим образом:

$$u = \frac{2V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2xy}{y^2 - x^2 + 4n^2a^2} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \frac{8x^3y^3}{[y^2 - x^2 + 4n^2a^2]^3} \right\}, \quad (7,45)$$

где все θ_n — правильные дроби.

При очень большом y последовательные члены рядов в формуле (7,45) весьма мало отличаются друг от друга, и суммы выгодно заменить интегралами. Чтобы это сделать, замечаем, что для любой монотонно убывающей положительной функции $f(\xi)$ от переменной ξ всегда выполняется двойное неравенство [ср. рис. (7a) и (7б)]:

$$\int_0^n f(\xi) d\xi > \sum_{k=1}^n f(k) > \int_1^{n+1} f(\xi) d\xi, \quad (7,46)$$

поскольку $\sum_{k=1}^n f(k)$ равна сумме площадей заштрихованных прямоуголь-

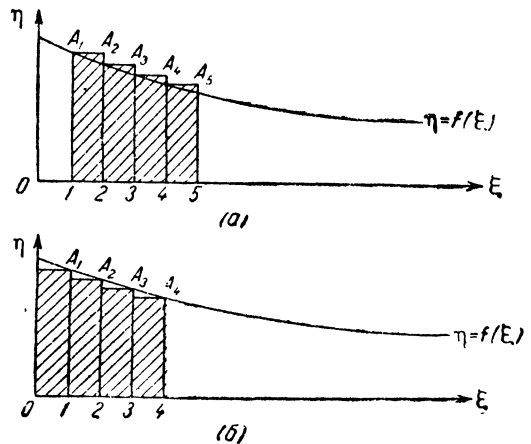


Рис. 7.

ников указанного на рисунках (7a) и (7б) типа,¹ тогда как, например, $\int_0^n f(\xi) d\xi$ равен площади, ограниченной дугой кривой $\eta = f(\xi)$ от $\xi = 0$ до $\xi = n$, ординатой $A_n B_n$ и осями $O\xi$ и $O\eta$ и т. д.

Если при $n \rightarrow \infty$ как сумма, так и интегралы в формуле (7,46) сходятся, то из этих неравенств, очевидно, следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi - \alpha \int_0^1 f(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi - \beta f(0), \quad (7,47)$$

¹ Эти рисунки соответствуют случаю $n = 4$.

где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Пользуясь соотношением (7,47), можем, поэтому, переписать первую сумму в формуле (7,45) следующим образом:¹

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2xy}{y^2 - x^2 + 4n^2 a^2} = \int_0^{\infty} \frac{2xy d\xi}{y^2 - x^2 + 4a^2 \xi^2} - \beta \frac{2xy}{y^2 - x^2},$$

где $0 < \beta < 1$, т. е., выполняя интегрирование и считая, что $y \gg x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2xy}{y^2 - x^2 + 4n^2 a^2} = \frac{\pi xy}{2a \sqrt{y^2 - x^2}} + O\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi x}{2a} + O\left(\frac{x}{y}\right). \quad (7,48)$$

Наряду с этим, для второй суммы (7,45) получим оценку:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \frac{8x^2 y^2}{[(y^2 - x^2) + 4a^2 n^2]^3} &< \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8x^2 y^2}{(y^2 - x^2)^3 + 3(y^2 - x^2)^2 \cdot 4a^2 n^2} = \\ &= \frac{4x^2 y^2}{3(y^2 - x^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2xy}{y^2 - x^2 + 4n^2 \cdot 3a^2} = \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{1}{\left[1 - \frac{x^2}{y^2}\right]^2} \left[\frac{\pi x}{2a \sqrt{3}} + O\left(\frac{x}{y}\right) \right] = O\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (7,49)$$

причем предпоследний результат находится прямо из (7,48) при замене a^2 через $3a^2$, т. е. a через $\sqrt{3}a$. Поэтому, если еще воспользоваться соотношением

$$\arctg \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - O\left(\frac{x}{y}\right), \quad (7,50)$$

и подставить результаты (7,48), (7,49) и (7,50) в (7,45), то получится:

$$u = \frac{2V}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a} + O\left(\frac{x}{y}\right) \right] = V \left(1 - \frac{x}{a}\right) + O\left(\frac{x}{y}\right), \quad (7,51)$$

что при $y \rightarrow \infty$ дает:

$$u = V \left(1 - \frac{x}{a}\right). \quad (7,52)$$

Это и есть потенциал, отвечающий однородному полю, соответствующему условиям $(u)_{x=0} = V$ и $(u)_{x=a} = 0$.

Заметим, что если бы мы вместо формулы (7,47) и (7,44) воспользовались для преобразования выражения (7,41) формулой Эйлера — Маклорена:²

$$\sum_{k=1}^{k=m} f(k) = \int_1^m f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [f(1) + f(m)] + \frac{1}{12} [f'(1) - f'(m)] + \dots, \quad (7,53)$$

дающей в общем виде связь между стоящей слева суммой и ее приближенным выражением в виде интеграла, и применили бы ее к функции

$$f(k) = \arctg \frac{2xy}{y^2 - x^2 + 4a^2 k^2}, \quad (7,54)$$

¹ Можно было бы также исходить из формулы:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + m^2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a}$$

[см. Е. Уиттекер и Г. Ватсон, Курс современного анализа, ч. I, стр. 183, пример 7].

² См. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, 1933 г. (2-ое изд.), стр. 267.

а $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ заменили бы через $\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)$, то мы пришли бы к приближенной формуле для нахождения значений u при $y \gg a \gg x$. Гораздо выгоднее, однако, поступить иначе, именно, с самого начала выделить из u потенциал $u_1 = V \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ того однородного поля, в которое поле между пластинами рассматриваемого конденсатора должно переходить при бесконечном удалении от находящейся при нулевом потенциале стороны OA , и искать непосредственно выражение для потенциала $\varphi = u - u_1$ разностного поля, которое, как мы сейчас покажем, может быть получено при этом в простой замкнутой форме.

Чтобы найти φ , замечаем, прежде всего, что так как u_1 удовлетворяет, подобно исходному потенциалу u , уравнению Лапласа, то и разность $\varphi = u - u_1$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (7,55)$$

тогда как граничные условия для φ , очевидно, будут:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi)_{x=0} &= (u)_{x=0} - (u_1)_{x=0} = 0, & (\varphi)_{x=a} &= 0, \\ (\varphi)_{y=0} &= -V \left(1 - \frac{x}{a}\right), & (\varphi)_{y=\infty} &= 0, \quad (0 < x \leq a) \end{aligned} \right\} \quad (7,56)$$

Задача о нахождении φ является, стало быть, частным случаем рассмотренной в п. 7.1 задачи о нахождении $u^{(2)}$. Применяя данные там формулы, получим:¹

$$\varphi_k = -\frac{2V}{k\pi} e^{-\frac{k\pi y}{a}}, \quad (7,57)$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{a} = -\frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k\pi y}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}}{k} = \\ &= -\frac{2V}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{ik\pi(x+iy)}{a}}}{k} = -\frac{2V}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \lg \left[1 - e^{i\frac{\pi(x+iy)}{a}} \right] \right\} = \\ &= -\frac{2V}{\pi} \operatorname{arc tg} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{e^{\frac{\pi y}{a}} - \cos \frac{\pi x}{a}} \right]. \end{aligned} \quad (7,58)$$

Возвращаясь к первоначальной функции u , видим, что

$$u = u_1 + \varphi = V \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{2V}{\pi} \operatorname{arc tg} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{e^{\frac{\pi y}{a}} - \cos \frac{\pi x}{a}} \right), \quad (7,59)$$

¹ При этом можно сразу писать $\varphi_k = u_k^{(2)}$ в виде $\varphi_k = C_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}$ вместо того, чтобы пользоваться формулой (7,20), ибо при $y = \infty$ должно быть $\varphi_k = 0$. В соответствии с этим получаем значение $C_k = (\varphi_k)_{y=0} = -\frac{2}{a} \int_0^a V \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin \frac{k\pi x}{a} dx = -\frac{2V}{k\pi}$.

Общие формулы (7,21) дают, конечно, при $b = \infty$ тот же результат.

откуда, в частности, следует, что разность φ между u и u_1 убывает с возрастанием y чрезвычайно быстро, именно, что φ является, согласно формуле (7,58), величиной порядка $e^{-\frac{\pi y}{a}}$, тогда как в (7,51) мы могли только убедиться в том, что φ имеет порядок $O\left(\frac{x}{y}\right)$.

Нетрудно непосредственно проверить, что решение (7,59) удовлетворяет всем условиям задачи, ибо оно является решением уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и удовлетворяет при этом всем граничным условиям.

7.7. Чтобы покончить с рассматриваемыми в этом параграфе вопросами, заметим, что мы выше получали решение для полуполосы, как предельный случай решения для прямоугольника, одна из сторон которого вытягивалась до бесконечности. Но мы только что видели на примере определения функции φ , что, по крайней мере, в одном случае, именно, когда значения искомой функции равны нулю на бесконечно длинных сторонах полосы, решение могло быть получено общим способом, без всяких изменений и прямо для нее. Для задачи же второго типа, т. е. когда значения искомой функции заданы (и отличны от нуля) на бесконечно-длинных сторонах полосы, скажем, при $x=0$ и при $x=a$, и равны нулю на конечной стороне [на „перемычке“ OA , (рис. 6)], решение задачи не может быть получено обычным приемом, ибо он требует умножения основного уравнения Лапласа на такую функцию $\varphi_\alpha(y)$, которая обращалась бы в нуль при $y=0$ и при $y=\infty$, между тем, как таких решений вообще нет, кроме тождественно обращающихся в нуль.

При всем том решение может быть все-же получено вполне сходным образом, если только граничные значения $(u)_{x=0} = F_1(y)$ и $(u)_{x=a} = F_2(y)$ искомой функции убывают при возрастании y достаточно быстро для того, чтобы интегралы

$$\int_0^\infty |F_1(y)| dy \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |F_2(y)| dy \quad (7,60)$$

сходились. Тогда, умножая уравнение (7,11) на любое из решений $\varphi(y)$, обращающихся в нуль при $y=0$ и остающихся ограниченными на бесконечности, т. е. на $\varphi(y) = \sin \alpha y$, где α —любое вещественное число, и повторяя вычисление (7,14) найдем:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} \sin \alpha y dy = \sin \alpha y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \Big|_0^\infty - \alpha \cos \alpha y \cdot u^{(1)} \Big|_0^\infty - \alpha^2 \int_0^\infty u^{(1)} \sin \alpha y dy. \quad (7,61)$$

Если допустить, что $\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=\infty} = 0$, то первый член справа пропадает, а так как второй обращается в нуль, поскольку, по условию $(u^{(1)})_{y=\infty} = 0$, то получаем:¹

¹ Ср. вывод уравнения (7,15).

$$\frac{d^2 u_a^{(1)}}{dx^2} = \alpha^2 u_a^{(1)}, \quad (7,62)$$

где

$$u_a^{(1)} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} u^{(1)} \sin \alpha y dy, \quad (7,63)$$

и где разница с (7,15) та, что здесь α —это любое вещественное число, а не одно из дискретного ряда возможных чисел, как это было раньше.

Уравнение (7,62), вместе с граничными условиями для $u_a^{(1)}$, именно:

$$\left. \begin{aligned} (u_a^{(1)})_{x=0} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} F_1(y) \sin \alpha y dy, \\ (u_a^{(1)})_{x=a} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} F_2(y) \sin \alpha y dy, \end{aligned} \right\} \quad (7,64)$$

дает возможность найти $u_a^{(1)}$.

Чтобы перейти от $u_a^{(1)}$ к самой функции $u^{(1)}$, надо воспользоваться интегралом Фурье, который, как известно, в применении к произвольной функции $F(y)$, удовлетворяющей условию кусочной гладкости во всяком конечном интервале, и дополнительному условию, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)| dy$ сходится, может быть записан в следующей форме:

$$F(y) = \int_0^{\infty} [P(\alpha) \sin \alpha y + Q(\alpha) \cos \alpha y] d\alpha, \quad (7,65)$$

где

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \sin \alpha \lambda d\lambda, \quad (7,66)$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda. \quad (7,67)$$

Если функция $F(y)$ определена только в интервале $(0, \infty)$, то продолжая ее нечетным образом в интервал $(-\infty, 0)$, т. е. полагая $F(-y) = -F(y)$, получим значения:

$$P(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \sin \alpha \lambda d\lambda, \quad (7,68)$$

$$Q(\alpha) = 0,$$

так что формула (7,65) переходит в следующую:

$$F(y) = \int_0^{\infty} P(\alpha) \sin \alpha y d\alpha. \quad (7,69)$$

Сравнивая (7,68) с (7,63) видим, что если положить $F(y) = u^{(1)}$, то должно быть

$$u_x^{(1)} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} F(\lambda) \sin \alpha \lambda d\lambda = \frac{\pi}{\alpha} P(\alpha), \quad (7,70)$$

и (7,69) дает:

$$u^{(1)} = F(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha u_x^{(1)} \sin \alpha y d\alpha. \quad (7,71)$$

Эта формула и дает решение задачи, если удовлетворяется требование, что $\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=-\infty} = 0$, как то было условно допущено при выводе формулы (7,61). Мы видим, что решение при этом представляется уже не рядом, а интегралом Фурье.

Глава III

ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО СПОСОБА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

§ 8. Первая предельная задача для прямоугольника для уравнения Пуассона

8.1. В предыдущем параграфе мы показали каким образом можно получить общее решение первой предельной задачи для уравнения Лапласа для прямоугольной области при помощи обращающихся в нуль на границах области функций $f_a(x)$ и $\varphi_b(y)$, к которым приходим при разыскании частных решений уравнения Лапласа по методу разделения переменных в декартовых координатах. Покажем теперь, что аналогичный метод, основанный на использовании тех же самых функций, непосредственно ведет к цели и в случае двухмерного уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y), \quad (8,1)$$

где $\rho(x, y)$ — некоторая заданная функция, определяющая распределение источников поля, и значения функции u заданы на сторонах $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ прямоугольника, именно:

$$(u)_{x=0} = F_1(y); (u)_{x=a} = F_2(y); (u)_{y=0} = \psi_1(x); (u)_{y=b} = \psi_2(x). \quad (8,2)$$

Заметим, прежде всего, что можно, не ограничивая общности, считать, что $F_1(y) = F_2(y) = 0$, $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$, т. е. что искомая функция принимает на границах прямоугольника значения, равные нулю. В самом деле, полагая

$$u = v + w, \quad (8,3)$$

где v удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (8,4)$$

и тем же граничным условиям, как u , т. е.

$$(v)_{x=0} = F_1(y), (v)_{x=a} = F_2(y); (v)_{y=0} = \psi_1(x); (v)_{y=b} = \psi_2(x), \quad (8,5)$$

найдем, что w должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y)$$

и условию, что $w=0$ на всем контуре прямоугольника.

Так как задача о нахождении функции v , удовлетворяющей уравнению (8,4) и граничным условиям вида (8,5) уже была решена в предыдущих параграфах в общем виде, то нахождение функции u , удовлетворяющей уравнению (8,1) и граничным условиям (8,2), свелось к нахождению функции w , удовлетворяющей тому же уравнению (8,1) и обращающейся в нуль на контуре прямоугольника. Этим и доказывается наше утверждение.

8.2. Для того, чтобы проинтегрировать в общем виде уравнение (8,1) для функции u при нулевых граничных условиях на контуре рассматриваемого прямоугольника, поступим с ним так же, как мы поступали в § 7 с уравнением (7,11), т. е. умножим (8,1) на ту же функцию $\frac{2}{b} \varphi_{\frac{k\pi}{b}}(y) dy = \frac{2}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy$, обращающуюся в нуль при $y=0$ и при $y=b$, на которую мы умножали уравнение (7,11), и проинтегрируем получившееся выражение по y от нуля до $y=b$. Пользуясь обозначениями типа (7,9), и интегрируя по частям, как в (7,14), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{dx^2} + \frac{2}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{b} dy &= \frac{d^2 u_k}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k = -4\pi\rho_k, \\ \text{где} \\ u_k &= u_k(x) = \frac{2}{b} \int_0^b u \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \\ \rho_k &= \rho_k(x) = \frac{2}{b} \int_0^b \rho \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \end{aligned} \right\} \quad (8,6)$$

(8,6)—это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Интеграл соответствующего однородного уравнения, —

$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \bar{u} = 0$, — имеет вид:

$$\bar{u} = M \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + N \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b}, \quad (8,7)$$

а общий интеграл уравнения (8,6), получающийся из (8,7) варьированием произвольных постоянных, можно записать в таком виде:

$$u_k = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} - \frac{4b}{k} \int_0^x \rho_k(t) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{b}(x-t) dt, \quad (8,8)$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Для определения A_k и B_k служат граничные условия для u_k , именно:

$$\left. \begin{aligned} (u_k)_{x=0} &= \frac{2}{b} \int_0^b (u)_{x=0} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = 0, \\ (u_k)_{x=a} &= \frac{2}{b} \int_0^b (u)_{x=a} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8,9)$$

(ибо граничные значения $(u)_{x=0}$ и $(u)_{x=a}$ по условию равны нулю), причем получается:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{4b}{k} \int_0^a \rho_k(t) \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{b}(a-t)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} dt, \\ B_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8,10)$$

Подставляя эти значения A_k и B_k в (8,8), находим u_k , после чего получаем, как в (7,1), саму искомую функцию u по формуле:¹

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (8,11)$$

на чем решение задачи и заканчивается. Тем самым находится и общее решение первоначальной предельной задачи (8,1) — (8,2).

Решение этой последней задачи можно было бы получить еще следующим способом: замечая, что, согласно (2,17), функция

$$\bar{u}(x, y) = -2 \int_{\xi=0}^{\xi=a} \int_{\eta=0}^{\eta=b} \rho(\xi, \eta) \lg r d\xi d\eta, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

является частным решением уравнения (8,1), так что в каждой точке внутри прямоугольника удовлетворяется соотношение

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y), \quad (A)$$

видим, вычитая (A) из (8,1), что функция

$$\varphi = u - \bar{u}$$

удовлетворяет внутри прямоугольника уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (B)$$

Так как, сверх того, известны ее значения на сторонах прямоугольника, именно:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi)_{x=0} &= (u)_{x=0} - (\bar{u})_{x=0} = F_1(y) - \bar{u}(0, y); \quad (\varphi)_{x=a} = F_2(y) - \bar{u}(a, y); \\ (\varphi)_{y=0} &= \psi_1(x) - \bar{u}(x, 0); \quad (\varphi)_{y=b} = \psi_2(x) - \bar{u}(x, b), \end{aligned} \right\}$$

¹ Ср. также (6,27) — (6,28).

то вопрос сводится к нахождению функции, удовлетворяющей уравнению (Б), по известным граничным значениям ее на сторонах прямоугольника, т. е. к уже решенной выше задаче.

Примечание. Мы могли, конечно, также умножить (8,1) не на $\frac{2}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy$, с последующим интегрированием по y в пределах $(0, b)$, а на $\frac{2}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx$ и интегрировать по x в пределах от 0 до a .

Так как оба направления x и y совершенно равноправны, то получающиеся при этом результаты отличались бы от (8,10)—(8,11) лишь соответствующей заменой букв. Оба приема приводят к решению задачи, но дают его в неодинаковой аналитической форме, поскольку одна из переменных входит под знаком тригонометрических функций, а вторая — гиперболических.

Пример

Заряженная нить внутри прямоугольника¹

8.3. Переходя к электростатическому толкованию только что решенной задачи, будем считать функцию $\rho(x, y)$, в соответствии с (2,16), линейной плотностью электрических зарядов в пустоте, а u — соответствующим электростатическим потенциалом.

Рассмотрим вопрос о нахождении u в том случае, когда первичное поле создается бесконечно длинной нитью с зарядом e на единицу длины, проходящей через точку (ξ, η) внутри прямоугольника $OABCO$ (рис. 8), причем будем эту нить рассматривать, как предельный случай равномерно заряженной по

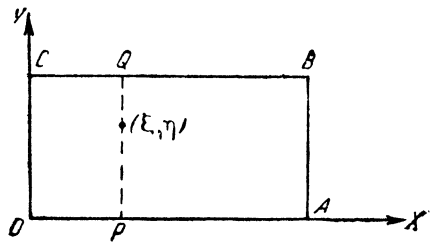


Рис. 8.

объему призмы бесконечно малого сечения, целиком лежащей внутри прямоугольника $OABC$, и ограниченной плоскостями $(\xi \pm \delta)$, $(\eta \pm \delta)$, где δ — стремящаяся к нулю величина. При этом надо положить в (8,1):

$$\rho = \rho(x, y) = \begin{cases} \frac{e}{4\delta^2} & \text{при } 0 < \xi - \delta \leq x \leq \xi + \delta < a \\ & \text{и } 0 < \eta - \delta \leq y \leq \eta + \delta < b, \\ 0 & \text{во всей остальной части области } OABC, \end{cases} \quad (8,12)$$

¹ Решение этой задачи дает так называемую функцию Грина для прямоугольника для предельных условий первого рода.

Изложение общей теории функций Грина и их приложения к решению краевых задач математической физики можно найти в книгах: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, ОГИЗ, Л.—М., 1941. — Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики [в дальнейшем: Курант — Гильберт], т. I, ГТТИ, М.—Л., 1933; т. II, ОГИЗ, М.—Л., 1945. — Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. I, ГТТИ, М.—Л., 1933; т. III, ч. II, ГТТИ, М.—Л., 1934.

для того, чтобы нить (призма) имела нужный полный заряд на единицу длины.

Используя (8, 12), находим:

$$\rho_k(x) = \begin{cases} \frac{2}{b} \int_0^b \rho(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2}{b} \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \frac{e}{4\delta^2} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{e}{k\pi\delta^2} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \sin \frac{k\pi\delta}{b} \\ \text{при } 0 < \xi - \delta \leq x \leq \xi + \delta < b, \\ 0 \text{ при всех остальных значениях } x. \end{cases} \quad (8, 13)$$

Это дает для входящего в (8, 8) интеграла:

$$\int_0^x \rho_k(t) \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-t)}{b} dt = 0 \text{ при } x \leq \xi - \delta \quad (8, 14)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^x \rho_k(t) \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-t)}{b} dt &= \frac{e}{k\pi\delta^2} \sin \frac{k\pi\delta}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-t)}{b} dt = \\ &= \frac{2eb}{(k\pi\delta)^2} \sin \frac{k\pi\delta}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi\delta}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-\xi)}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \text{ при } x \geq \xi + \delta. \end{aligned} \quad (8, 15)$$

Если теперь перейти к пределу $\delta = 0$, то получим:

$$\frac{4b}{k} \int_0^x \rho_k(t) \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-t)}{b} dt = \begin{cases} 0 \text{ при } x < \xi \\ \frac{8e}{k} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-\xi)}{b} \text{ при } x > \xi. \end{cases} \quad (8, 16)$$

Полагая здесь $x = a$ и вводя результат в (8, 10), найдем:

$$A_k = \frac{8e}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-\xi)}{b} \cdot \sin \frac{k\pi\eta}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}; \quad B_k = 0. \quad (8, 17)$$

Подстановка значений (8, 16) и (8, 17) в (8, 8) дает, после элементарных приведений:

$$u_k = \begin{cases} \frac{8e}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-\xi)}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \text{ при } x < \xi, \\ \frac{8e}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi\xi}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \text{ при } x > \xi. \end{cases} \quad (8, 18)$$

Внося эти результаты в (8, 11), находим искомое значение u , именно:

$$u = 8e \times \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-\xi)}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \text{ при } x < \xi, \text{ (a).} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi\xi}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \text{ при } x > \xi, \text{ (b).} \end{cases} \quad (8, 19)$$

Формула (8,19 (β)) могла бы быть также прямо получена, почти без всяких вычислений, из (8,19 (α)). Действительно, формула (8,19 (α)) дает значения функции u в той части прямоугольника $OABC$, которая расположена влево от прямой PQ , проходящей через точку (ξ, η) параллельно оси u -ов. Но совершенно такая же формула должна получиться для остальной части прямоугольника $OABC$, если за начало координат выбрать вместо точки O вершину A прямоугольника, и направить исходящие из нее новые координатные оси — X' и Y' — соответственно от A к O и от A к B , а вместо координат (ξ, η) заряда в системе (X, Y) подставить его координаты $\xi' = a - \xi$ и $\eta' = \eta$ в системе (X', Y') . При этом для области $BQPAV$ получится из (8,19 (α)):

$$u = 8e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-\xi')}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi x'}{b} \sin \frac{k\pi\eta'}{b} \sin \frac{k\pi y'}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \quad \text{при } x' < \xi',$$

т. е., если еще учесть, что $x' = a - x$, $y' = y$:

$$u = 8e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi\xi}{b} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b} \sin \frac{k\pi\eta}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \quad \text{при } x > \xi,$$

а это и есть (8,19 (β)).

8.4. Характер сходимости рядов (8,19) примерно такой же, как у изученного выше ряда (7,26), т. е. ряды эти хорошо сходятся при $a \geq b$,¹ притом лишь для тех точек внутри прямоугольника, для которых $2\pi x/b$ — не малая величина. Сходимость их очень плоха при $2\pi x/b \ll 1$. В силу этого их полезно преобразовать еще к другому виду, с помощью приема, подобного тому, которым мы воспользовались при преобразовании (7,26) к виду (7,34). Именно, используя всегда верное разложение

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-\xi)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} = \frac{e^{-\frac{k\pi\xi}{b}} - e^{-\frac{k\pi(2a-\xi)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi ka}{b}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{b}(2na+\xi)} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{b}(2na-\xi)} \quad (8,20)$$

и второе такое же, в котором только следует заменить ξ на x , получим из (8,19), например, при $x < \xi$, подставляя туда разложение (8,20), переставляя порядок суммирования и заменяя $\sin \frac{k\pi\eta}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}$ через

$$\frac{1}{2} \left[\cos \frac{k\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{k\pi(y+\eta)}{b} \right] \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \quad \text{через} \quad \frac{1}{2} \left[e^{\frac{k\pi x}{b}} - e^{-\frac{k\pi x}{b}} \right]:$$

¹ Собственно, при a того же порядка как b или при $a > b$.

$$\begin{aligned}
u &= 2e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi(2na+\xi-x)}{b}k} \frac{1}{k} \left[\cos \frac{k\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{k\pi(y+\eta)}{b} \right] - \right. \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi(2na+\xi+x)}{b}k} \frac{1}{k} \left[\cos \frac{k\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{k\pi(y+\eta)}{b} \right] - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi(2na-\xi-x)}{b}k} \frac{1}{k} \left[\cos \frac{k\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{k\pi(y+\eta)}{b} \right] + \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi(2na-\xi+x)}{b}k} \frac{1}{k} \left[\cos \frac{k\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{k\pi(y+\eta)}{b} \right] \right\} = \\
&= -e \sum_{n=0}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na+\xi-x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y-\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na+\xi-x)\pi}{b}} \right] + \\
&\quad + e \sum_{n=0}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na+\xi-x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y+\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na+\xi-x)\pi}{b}} \right] + \\
&\quad + e \sum_{n=0}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na+\xi+x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y-\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na+\xi+x)\pi}{b}} \right] - \\
&\quad - e \sum_{n=0}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na+\xi+x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y+\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na+\xi+x)\pi}{b}} \right] + \\
&\quad + e \sum_{n=1}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na-\xi-x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y-\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na-\xi-x)\pi}{b}} \right] - \\
&\quad - e \sum_{n=1}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na-\xi-x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y+\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na-\xi-x)\pi}{b}} \right] - \\
&\quad - e \sum_{n=1}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na-\xi+x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y-\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na-\xi+x)\pi}{b}} \right] + \\
&\quad + e \sum_{n=1}^{\infty} \lg \left[1 - 2e^{-\frac{(2na-\xi+x)\pi}{b}} \cos \frac{\pi(y+\eta)}{b} + e^{-\frac{2(2na-\xi+x)\pi}{b}} \right], \quad (8, 21)
\end{aligned}$$

причем использована известная формула

$$-\frac{1}{2} \lg(1 - 2u \cos \theta + u^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k} \cos k\theta, \quad (-1 < u < +1). \quad (8, 22)$$

Выражению (8, 21) можно придать еще такую форму:

$$\begin{aligned}
 &= -e \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{lg} \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{(2na + \xi - x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y - \eta)}{b} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{(2na + \xi + x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y + \eta)}{b} \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{(2na + \xi - x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y + \eta)}{b} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{(2na + \xi + x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y - \eta)}{b} \right]} + \\
 &+ e \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{lg} \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{(2na - \xi - x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y - \eta)}{b} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{(2na - \xi + x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y + \eta)}{b} \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{(2na - \xi - x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y + \eta)}{b} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{(2na - \xi + x)\pi}{b} - \cos \frac{\pi(y - \eta)}{b} \right]}, \quad (8, 23)
 \end{aligned}$$

причем в этом виде формула эта верна уже как при $x < \xi$, так и при $x > \xi$. Ряды (8, 21) и (8, 23) сходятся, вообще говоря, быстро и при $2\pi x/b \ll 1$, когда исходные ряды (8, 19) делаются практически непригодными для нахождения потенциала и поля.

Формулы (8, 21) и (8, 23) можно было бы получить более непосредственно совсем иным путем, пользуясь так называемым методом отражения.¹ Они также находятся в тесной связи с теорией эллиптических функций.

8.5. Если положить в (8, 23) $a = \infty$, то получится решение для полуполосы, именно:

$$u = -e \operatorname{lg} \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi(x - \xi)}{b} - \cos \frac{\pi(y - \eta)}{b} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(x + \xi)}{b} - \cos \frac{\pi(y + \eta)}{b} \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi(x - \xi)}{b} - \cos \frac{\pi(y + \eta)}{b} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(x + \xi)}{b} - \cos \frac{\pi(y - \eta)}{b} \right]}, \quad (8, 24)$$

так как при этом остается только нулевой член первой суммы, соответствующий $n = 0$.

8.6. Из (8, 24) можно теперь получить и решение для случая нити, находящейся между двумя безграничными параллельными пластинками. Для этого примем местоположение нити (ξ, η) за начало новой системы координат (x', y'), оси которой параллельны осям старой, так что

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - \xi, \\ y' &= y - \eta, \end{aligned} \right\} \quad (8, 25)$$

подставим это в (8, 24) и будем стремить ξ к бесконечности, что соответствует тому, что левая стенка OC уходит на бесконечно далекое расстояние от нити и перестает оказывать влияние на поле. При этом получается:

$$\begin{aligned}
 u &= -e \operatorname{lg} \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi x'}{b} - \cos \frac{\pi y'}{b} \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi x'}{b} - \cos \frac{\pi(y' + 2\eta)}{b} \right]} + e \operatorname{lg} \left\{ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(x' + 2\xi)}{b} - \cos \frac{\pi(y' + 2\eta)}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x' + 2\xi)}{b} - \cos \frac{\pi y'}{b}} \right\} = \\
 &= -e \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x'}{b} - \cos \frac{\pi y'}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x'}{b} - \cos \frac{\pi(y' + 2\eta)}{b}}, \quad (8, 26)
 \end{aligned}$$

¹ Ср., например: Курант — Гильберт, т. I, стр. 362 (6).

и это и есть искомое решение. Уравнения, которыми определяются верхняя и нижняя пластинки, суть $y' = b - \eta$ и $y' = -\eta$, и на них u обращается в нуль.

8.7. Если, наконец, удалить на бесконечность еще и верхнюю пластинку, т. е. положить в (8, 26) $b = \infty$, то должно получиться поле нити, находящейся над проводящей неограниченной плоскостью. При этом найдем, разлагая входящие в (8, 26) гиперболические и простые косинусы в степенные ряды:

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x'}{b} - \cos \frac{\pi y'}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x'}{b} - \cos \frac{\pi (y' + 2\eta)}{b}} = \\ & = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi x'}{b} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi x'}{b} \right)^4 + \dots \right] - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi y'}{b} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi y'}{b} \right)^4 - \dots \right]}{\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi x'}{b} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi x'}{b} \right)^4 + \dots \right] - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\pi (y' + 2\eta)}{b} \right]^2 + \frac{1}{4!} \left[\frac{\pi (y' + 2\eta)}{b} \right]^4 - \dots \right\}} = \\ & = \frac{x'^2 + y'^2}{x'^2 + (y' + 2\eta)^2}, \end{aligned}$$

так что получается

$$u = -e \lg (x'^2 + y'^2) + e \lg [x'^2 + (y' + 2\eta)^2]. \quad (8, 27)$$

Сравнивая это с формулой (2,18), видим, что полный потенциал нити с зарядом e на единицу длины, расположенной на высоте η над проводящей плоскостью, складывается из потенциала $u_{\text{перв.}} = -e \lg (x'^2 + y'^2)$ самой первичной нити и потенциала $u_{\text{втор.}} = +e \lg [x'^2 + (y' + 2\eta)^2]$ „отраженной“ нити, как бы находящейся в точке $(0, -2\eta)$, т. е. на глубине η под плоскостью.

Вводя в рассмотрение радиусы-векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , проведенные в точку (x', y') из местоположения первичной и отраженной нитей, причем

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{r}_1| = r_1 &= \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ |\mathbf{r}_2| = r_2 &= \sqrt{x'^2 + (y' + 2\eta)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8, 28)$$

найдем для поля \mathbf{E} в этой точке выражение:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u = \frac{2e}{r_1^2} \mathbf{r}_1 - \frac{2e}{r_2^2} \mathbf{r}_2. \quad (8, 29)$$

Если теперь отодвинуть на бесконечность проводящую плоскость, т. е. если положить в (8,28) — (8,29) $\eta = \infty$, то (8,29) упростится и даст:

$$\mathbf{E} = \frac{2e}{r_1^2} \mathbf{r}_1, \quad (8, 30)$$

ибо поле „отражения“ исчезает. (8,30) дает, таким образом, только поле первичной нити, которому соответствует потенциал

$$u_{\text{перв.}} = -2e \lg r + \text{const} = -e \lg (x'^2 + y'^2) + \text{const}. \quad (8, 31)$$

Мы получили, стало быть, в качестве побочного результата проведенного здесь исследования, элементарное решение (2,18) уравнения

Лапласа для случая, когда поле создается равномерно наэлектризованной по длине бесконечной нитью.¹

Глава IV

ТРЕТИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ИНЫХ ТИПОВ

§ 9. Третий метод подхода к решению первой предельной задачи для прямоугольника

9.1. Мы подробно разобрали вопрос о решении уравнений Лапласа и Пуассона для прямоугольника при произвольном распределении объемных зарядов внутри его и при произвольном задании граничных значений искомой функции, и дали полное решение этой задачи, которое в своей первичной форме получается в виде рядов, с помощью которых искомая функция определяется как внутри прямоугольника, так и на его границах.

Если отбросить последнее требование, т. е. если ограничиться нахождением решения *лишь внутри* прямоугольника, не заботясь о том, чтобы оно оставалось верным и на самой границе области, где значения искомой функции и без того известны по заданию, то можно поступить и иначе, чем это делалось выше, и получить решение задачи еще другим, притом более коротким, способом.

Чтобы это показать, вернемся еще раз к вопросу о нахождении функции u , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y) \quad (8,1)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= F_1(y); & (u)_{x=a} &= F_2(y); \\ (u)_{y=0} &= \psi_1(x); & (u)_{y=b} &= \psi_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (8,2)$$

Если бы мы эту функцию знали в ее зависимости, например, от y , то мы могли бы ее разложить в интервале $0 < y < b$ в ряд Фурье вида (6,28), т. е.

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (9,1)$$

где, согласно (6,27), должно было бы быть положено

$$u_k(x) = u_k = \frac{2}{b} \int_0^b u(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \quad (9,2)$$

¹ Находящейся в пустоте.

Этот ряд годился бы для представления u в указанном интервале но, вообще говоря, не на его границах, т. е. кроме как при $y=0$ или при $y=b$, когда он обращается в нуль, тогда как истинная функция u должна при $y=0$ и при $y=b$ обращаться соответственно в $\psi_1(x)$ и в $\psi_2(x)$. Тем не менее внутри интервала $0 < y < b$ разложение (9,1) должно быть всюду справедливо, и оно могло бы служить для представления функции u , если бы удалось каким-нибудь образом найти коэффициенты u_k .

Покажем, что это может быть сделано, если поступить с уравнением (8,1) так же, как мы с ним поступали раньше, т. е. если его умножить на $\frac{2}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy$ и проинтегрировать по y от нуля до b . При этом получим сперва соотношение:

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} + \frac{2}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = -4\pi p_k(x),$$

где обозначения те же, как в (8,6), а преобразуя входящий сюда интегральный член, как в (7,14), придем к уравнению

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k - \frac{2k\pi}{b^2} u(x, y) \cos \frac{k\pi y}{b} \Big|_0^b = -4\pi p_k(x),$$

т. е.

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k = -4\pi p_k(x) + \frac{2k\pi}{b^2} [(-1)^k \psi_2(x) - \psi_1(x)]. \quad (9,3)$$

Это неоднородное линейное уравнение того же типа, как (8,6), только с несколько иной, чем в этом последнем, правой частью, которая, однако, тоже не включает неизвестных функций. Интегрируя, поэтому, это уравнение, при добавочных условиях, что

$$\left. \begin{aligned} (u_k)_{x=0} &= \frac{2}{b} \int_0^b (u)_{x=0} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2}{b} \int_0^b F_1(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \\ (u_k)_{x=a} &= \frac{2}{b} \int_0^b (u)_{x=a} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2}{b} \int_0^b F_2(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \end{aligned} \right\} \quad (9,4)$$

сразу найдем все u_k , а подставляя их в (9,1) получим решение задачи в искомой форме, дающей возможность найти $u(x, y)$ в любой точке внутри рассматриваемого прямоугольника. Решение это будет годиться и на сторонах $x=0$ и $x=a$ прямоугольника, но, вообще говоря, не при $y=0$ и $y=b$.

9.2. Совершенно аналогичным образом мы могли бы, умножая (6,34) не на $\frac{2}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy$, а на $\frac{2}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx$ и интегрируя по x от нуля до a , получить решение задачи, представляющее искомую функцию внутри

прямоугольника и при $y=0$ и $y=b$, но, вообще говоря, не при $x=0$ и $x=a$. Соответствующее дифференциальное уравнение для коэффициента \bar{u}_k Фурье в разложении решения в ряд вида

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad 0 < x < a, \quad (9,5)$$

где

$$\bar{u}_k = \frac{2}{a} \int_0^a u(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \quad (9,6)$$

было бы тогда:

$$\frac{d^2 u_k}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \bar{u}_k = -4\pi \bar{\rho}_k(y) + \frac{2k\pi}{a^2} [(-1)^k F_2(y) - F_1(y)], \quad (9,7)$$

причем

$$\bar{\rho}_k(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \quad (9,8)$$

а граничные условия имели бы вид:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}_k)_{y=0} &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \\ (\bar{u}_k)_{y=b} &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx. \end{aligned} \right\} \quad (9,9)$$

Таким образом находим еще одну форму решения первой предельной задачи.

9.3. Подчеркиваем, что полученные только что решения (9,1) и (9,5) кардинальным образом отличаются от решений, получаемых по методу Фурье—Ламе. В самом деле, каждый отдельный член этих рядов *не является частным решением уравнения Лапласа, даже в том случае, когда стоящая в правой части уравнения (8,1) функция $\rho(x, y)$ тождественно равна нулю*, а члены эти представляют собой просто последовательные члены разложения искомой функции в соответствующие ряды Фурье по одним синусам дуг кратных $\frac{\pi y}{b}$ или $\frac{\pi x}{a}$.¹ При этом из того обстоятельства, что ряды эти представляют искомую функцию только *внутри* рассматриваемой области, но не на ее границе, следует, как известно, что члены рядов (9,1) или (9,5) не могут убывать с возрастанием номера k быстрее, чем $1/k$. Поэтому ряды, получаемые из них одно- и двукратным дифференцированием по y , соответственно, по x , перестают сходиться и не могут

¹ Т. е. ряды (9,5) и (9,1) дают разложение решения задачи с неоднородными граничными условиями в ряды по собственным функциям задач с однородными в направлении оси x , соответственно оси y , граничными условиями.

быть непосредственно подставляемы в уравнение (8,1) для определения u_k и \bar{u}_k . При всем том, как мы видели, величины эти могут быть найдены непосредственно из уравнения (8,1) указанным выше методом, вне зависимости от характера сходимости рядов (9,1) и (9,5).

9. 4. Существенно заметить, что поскольку то обстоятельство, что члены рядов (9,1) и (9,5) убывают не быстрее чем $1/k$, обязано своим происхождением отличию от нуля значений разлагаемой функции u на границах интервалов ($0 \leq x \leq a$), ($0 \leq y \leq b$), и так как значения эти на границах интервалов заданы, то можно сразу улучшить сходимость рассматриваемых рядов, применяя следующее преобразование их коэффициентов:

$$u_k = \frac{2}{b} \int_0^b u \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2}{k\pi} [\psi_1(x) + (-1)^{k-1} \psi_2(x)] - u_k', \quad (9,10)$$

причем использованы соотношения (8,2) и положено:

$$u_k' = \frac{2b}{(k\pi)^2} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \quad (9,11)$$

Аналогичное преобразование применяем к \bar{u}_k .

Подстановка (9,10) в (9,1) дает, если воспользоваться известными суммами рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\xi}{k} = \begin{cases} \frac{\pi - \xi}{2} & \text{при } 0 < \xi < 2\pi, \\ 0 & \text{при } \xi = 0, 2\pi, \end{cases} \quad (9,12)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\xi}{k} = \begin{cases} \frac{\xi}{2} & \text{при } -\pi < \xi < +\pi, \\ 0 & \text{при } \xi = -\pi, +\pi, \end{cases} \quad (9,13)$$

[из которых второй получается просто заменой ξ на $(\pi - \xi)$ в (9,12)]:

$$u = \psi_1(x) \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \psi_2(x) \frac{y}{b} - \sum_{k=1}^{\infty} u_k' \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (9,14)$$

и аналогично для (9,5). Члены входящего в (9,14) ряда убывают уже быстрее чем $1/k^2$. Вычитая, поэтому, из ряда (9,1) почленно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [\psi_1(x) + (-1)^{k-1} \psi_2(x)] \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (9,15)$$

для функции $\psi_1(x) \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \psi_2(x) \frac{y}{b}$, придем к ряду, члены которого будут, вообще говоря, убывать гораздо быстрее, чем члены исходного.¹

¹ Это связано с тем, что разностная функция $u - \left[\psi_1(x) \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \psi_2(x) \frac{y}{b} \right]$ обращается в нуль на границах интервала ($0 \leq y \leq b$) и потому разлагается внутри этого интервала в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям соответствующей одномерной задачи.

Примеры

9.5. В качестве первого примера рассмотрим решение этим способом уже разобранный выше в п. 7.2 задачи об интегрировании уравнения Лапласа, —

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (9,16)$$

при условии, что $(u)_{x=0} = V = \text{const}$, тогда как на остальных сторонах прямоугольника $u = 0$.

В п. 7.2 мы воспользовались тем, что граничные значения u равны нулю при $y = 0$ и при $y = b$, и искали, в соответствии с этим, разложение решения в ряд вида (7,1), т. е. в ряд, состоящий из обращающихся в нуль на этих границах частных решений уравнения (9,16). Будем теперь искать разложение решения в ряд вида (9,5), для чего умножим, согласно сказанному выше, уравнение (9,16) на $\frac{2}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx$ и проинтегрируем по x от нуля до a . Получающееся при этом уравнение (9,7) для \bar{u}_k имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{u}_k}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \bar{u}_k = -\frac{2k\pi V}{a^2}, \quad (9,17)$$

тогда как граничные условия (9,9) дают теперь:

$$(\bar{u}_k)_{y=0} = (\bar{u}_k)_{y=b} = 0. \quad (9,18)$$

Интегрируя уравнение (9,17) при условиях (9,18), легко найдем:

$$u_k = \frac{2V}{k\pi} \left[1 - \frac{\text{ch} \frac{k\pi(b-2y)}{2a}}{\text{ch} \frac{k\pi b}{2a}} \right]. \quad (9,19)$$

Искомое решение получается, стало быть, в такой форме:

$$u = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[1 - \frac{\text{ch} \frac{k\pi(b-2y)}{2a}}{\text{ch} \frac{k\pi b}{2a}} \right] \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (9,20)$$

Для того, чтобы улучшить сходимость этого ряда, нужно в соответствии со сказанным выше, вычесть из него почленно ряд для функции

$$(u)_{x=0} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) + (u)_{x=a} \cdot \frac{x}{a} = V \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

причем получится:

$$u = V \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ch} \frac{k\pi(b-2y)}{2a}}{k \text{ch} \frac{k\pi b}{2a}} \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (9,21)$$

Здесь члены, обуславливавшие плохую сходимость ряда (9,20), уже отсутствуют, и ряд (9,21) дает нам новую форму решения рассматривавшейся в п. 7. 2 задачи. Ряд этот особенно удобен для практических расчетов при $b \gg a$, т. е. как раз тогда, когда решение (7,26) оказывается практически непригодным и требует для возможности его использования при этих условиях предварительных специальных преобразований.

Полагая, в частности, в формуле (9,21) $b = \infty$, получим:

$$\begin{aligned} u &= V \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi y}{a}} \frac{\sin \frac{k\pi x}{a}}{k} = \\ &= V \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{2V}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{e^{\frac{\pi y}{a}} - \cos \frac{\pi x}{a}}, \end{aligned}$$

т. е. сразу находим, без всяких сложных преобразований или искусственных приемов, ту самую формулу (7,59), которую мы раньше вывели совсем иным путем.

9.6. В качестве второго примера проведем решение по этому способу рассматривавшейся в п. 6.4 задачи об интегрировании уравнения Лапласа (6,1) при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= 0; & (u)_{x=a} &= ay; \\ (u)_{y=0} &= 0; & (u)_{y=b} &= bx, \end{aligned} \right\} \quad (6,34)$$

задачи, которая использовалась там для иллюстрации недостаточной адекватности изложенного в § 6 метода частных решений.

Составляем, прежде всего, в соответствии с изложенной в п. 9.1 методикой, уравнение (9,3), которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 u_k = (-1)^k \frac{2k\pi}{b} x, \quad (k \geq 1). \quad (9,22)$$

К нему добавляются граничные условия (9,4):

$$(u_k)_{x=0} = 0; \quad (u_k)_{x=a} = (-1)^{k+1} \frac{2ab}{k\pi}, \quad (k \geq 1). \quad (9,23)$$

Интеграл уравнения (9,22), удовлетворяющий условиям (9,23), будет, как нетрудно видеть:

$$u_k = (-1)^{k-1} \frac{2b}{k\pi} x. \quad (9,24)$$

Подстановка в (9,1) дает:

$$u = \frac{2bx}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{k\pi y}{b}}{k} = xy, \quad (9,25)$$

последнее с помощью (9,13). Таким образом, этот способ решения задачи, не требующий искусственного расчленения искомой функции на отдельные части и учитывающий сразу все ее характерные свойства, выражаемые совокупностью четырех граничных условий (6,34),

сразу приводит к формуле (6,35). Это свидетельствует в пользу большей естественности и адекватности примененного здесь метода по сравнению с тем, которым мы пользовались в § 6.

9.7. Следует подчеркнуть то обстоятельство, что данный в этом параграфе метод решения первой предельной задачи для неоднородного уравнения (8,1) приводит к цели потому и только потому, что те функции $f(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}$ и $\varphi(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}$, на которые умножалось это уравнение с тем, чтобы его затем проинтегрировать по x или по y по всему интервалу изменения соответствующей переменной, являются обращающимися в нуль на концах этих интервалов решениями уравнений типа (6,5) и (6,6), именно,

$$f''(x) = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 f(x), \quad (9,26)$$

$$\varphi''(y) = -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \varphi(y), \quad (9,27)$$

получающихся при разделении переменных в соответствующем однородном уравнении (6,1).

Действительно, с одной стороны, благодаря тому, что эти функции обращаются в нуль на границах интервалов изменения соответствующих переменных, выпадают появляющиеся при интегрировании по частям выражений

$$\int_0^a f(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = f(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^a - f'(x) u \Big|_0^a + \int_0^a u f''(x) dx \quad (9,28)$$

и

$$\int_0^b \varphi(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \varphi(y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^b - \varphi'(y) u \Big|_0^b + \int_0^b u \varphi''(y) dy \quad (9,29)$$

члены $f(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^a$ и $\varphi(y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^b$, содержащие неизвестные предельные значения $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}$ или $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=b}$ производных искомой функции, и остаются только члены $-f'(x) u \Big|_0^a$ и $-\varphi'(y) u \Big|_0^b$, в которые входят известные в данном случае¹ предельные значения самой функции u . Члены же $\int_0^a u f''(x) dx$ и $\int_0^b u \varphi''(y) dy$ уравнений (9,28) и (9,29) оказываются при этом пропорциональными соответственно величинам $\bar{u}_k = \frac{2}{a} \int_0^a u f(x) dx$ и $u_k = \frac{2}{b} \int_0^b u \varphi(y) dy$, поскольку $f(x)$ и $\varphi(y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9,26) и (9,27).

¹ Т. е. когда решается первая предельная задача.

Таким образом, эти два обстоятельства, вместе взятые, как раз и приводят к тому, что из соотношений

$$\frac{2}{a} \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} f(x) dx = -4\pi \cdot \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x, y) f(x) dx = -4\pi \bar{\rho}_k(y), \quad (9,30)$$

или

$$\frac{2}{b} \int_0^b \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \varphi(y) dy = -4\pi \cdot \frac{2}{b} \int_0^b \rho(x, y) \varphi(y) dy = -4\pi \bar{\rho}_k(x), \quad (9,31)$$

получаются в результате указанных преобразований уравнения (9,3) или (9,7) прямо для коэффициентов разложения u_k и \bar{u}_k .

§ 10. Вторая предельная задача для прямоугольника (задача Неймана)

10.1. Из изложенных в конце предыдущего параграфа соображений ясно, как следует поступать в том случае, когда мы имеем дело не с задачей Дирихле (первая предельная задача), а, например, с так называемой задачей Неймана (вторая предельная задача), когда на контуре заданы не значения самой функции u , а значения ее нормальной к контуру производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е. в данном случае¹

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} &= p_1(y); & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} &= p_2(y); \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} &= q_1(x); & \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=b} &= q_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (10,1)$$

Именно, выберем теперь за $f(x)$ и $\varphi(y)$ те решения уравнений

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\alpha^2 f, \quad (6,5)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\beta^2 \varphi, \quad (6,6)$$

производные которых $f'(x)$ и $\varphi'(y)$ обращаются в нуль на границах области, т. е. при $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ соответственно. Это будут функции

$$f(x) = \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \infty, \quad (10,2)$$

$$\varphi(y) = \cos \frac{k\pi y}{b}, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \infty, \quad (10,3)$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$f''(x) = -\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 f(x), \quad (10,4)$$

$$\varphi''(y) = -\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \varphi(y). \quad (10,5)$$

¹ О тех ограничениях, которым должна при этом удовлетворять функция $\frac{\partial u}{\partial n}$, см. ниже (10,18).

Умножая теперь уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y) \quad (8, 1)$$

на $\frac{2}{a}f(x)dx$ и интегрируя по x в пределах $(0, a)$, т. е. переходя к формуле (9, 30), получим, интегрируя по частям как в (9, 28) и замечая, что при этом из-за $f'(0)=0$ и $f'(a)=0$ второй член справа в (9, 28) пропадает:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} f(x) dx &= \frac{2}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^a - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{2}{a} \int_0^a u(x, y) f(x) dx = \\ &= \frac{2}{a} [(-1)^k p_2(y) - p_1(y)] - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 u'_k, \end{aligned} \quad (10, 6)$$

причем использовано уравнение (10, 4) и положено

$$u'_k = \frac{2}{a} \int_0^a u(x, y) f dx = \frac{2}{a} \int_0^a u \cos \frac{k\pi x}{a} dx. \quad (10, 7)$$

(9, 30) дает теперь:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u'_k}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 u'_k &= \\ &= -4\pi\rho'_k(y) - \frac{2}{a} [(-1)^k p_2(y) - p_1(y)], \quad (k=0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (10, 8)$$

где

$$\rho'_k(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x, y) \cos \frac{k\pi x}{a} dx. \quad (10, 9)$$

Таким образом, для u'_k получается дифференциальное уравнение того же типа, как раньше для \bar{u}_k [см. (9, 7)]. Чтобы из него определить u'_k , достаточно добавить к нему граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{du'_k}{dy}\right)_{y=0} &= \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \cos \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a q_1(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \\ \left(\frac{du'_k}{dy}\right)_{y=b} &= \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=b} \cos \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a q_2(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \end{aligned} \right\} (k=0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (10, 10)$$

получающиеся при использовании (10, 1). Заметим, что решение системы уравнений (10, 8) — (10, 10) возможно не всегда, а лишь при существовании некоторых соотношений, связывающих функции p_1 , p_2 , q_1 , q_2 . В самом деле, при $k \geq 1$ уравнения (10, 8) имеют общие интегралы вида¹

$$u'_k = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} - \frac{4a}{k} \int_0^y \chi_k(\eta) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a}(y - \eta) d\eta, \quad (10, 11)$$

¹ Ср. с (8, 6) и (8, 8).

где

$$\chi_k(\eta) = \rho'_k(\eta) + \frac{1}{2\pi a} [(-1)^k p_2(\eta) - p_1(\eta)], \quad (10, 12)$$

а A_k и B_k — произвольные постоянные. Это дает:

$$\frac{d\alpha'_k}{dy} = \frac{k\pi}{a} \left[A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} - \frac{4a}{k} \int_0^y \chi_k(\eta) \operatorname{ch} \frac{k\pi}{a}(y-\eta) d\eta \right]. \quad (10, 13)$$

Приравнивая получающиеся отсюда при $y=0$ и $y=b$ значения $\left(\frac{d\alpha'_k}{dy}\right)_{y=0}$ и $\left(\frac{d\alpha'_k}{dy}\right)_{y=b}$ их заданным значениям (10, 10), приходим к всегда разрешимой относительно A_k и B_k системе двух линейных уравнений. Но при $k=0$ (10, 8) обращается в уравнение

$$\frac{d^2\alpha'_0}{dy^2} = -4\pi \rho'_0(y) - \frac{2}{a} [p_2(y) - p_1(y)], \quad (10, 14)$$

которое дает:

$$\frac{d\alpha'_0}{dy} = -4\pi \int_0^y \rho'_0(\eta) d\eta - \frac{2}{a} \int_0^y [p_2(\eta) - p_1(\eta)] d\eta + c \quad (10, 15)$$

— выражение, содержащее *только одну произвольную постоянную* c . Определяя ее из того условия (10, 10), которое относится к $y=0$, и которое при $k=0$ дает:

$$c = \left(\frac{d\alpha'_0}{dy}\right)_{y=0} = \frac{2}{a} \int_0^a q_1(x) dx, \quad (10, 16)$$

видим, что этим одним условием значение $\frac{d\alpha'_0}{dy}$ уже однозначно определяется при всех значениях y , в частности и при $y=b$. Поэтому, решение нашей задачи возможно лишь в том случае, если получаемое из (10, 15) — (10, 16) значение $\left(\frac{d\alpha'_0}{dy}\right)_{y=0}$ совпадает с тем, которое дается вторым условием (10, 10), т. е. если выполняется равенство

$$\frac{2}{a} \int_0^a q_2(x) dx = -4\pi \int_0^b \rho'_0(y) dy - \frac{2}{a} \int_0^b [p_2(y) - p_1(y)] dy + \frac{2}{a} \int_0^a q_1(x) dx,$$

которое, если учесть (10, 1) и (10, 9), может быть переписано так:

$$\begin{aligned} & \int_0^a [q_1(x) - q_2(x)] dx + \int_0^b [p_1(y) - p_2(y)] dy = \\ & = \int_0^a \left[\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{y=0} - \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{y=b} \right] dx + \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} \right] dy = \\ & = 4\pi \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \rho(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (10, 17)$$

Это не что иное, как условие

$$-\int_{\square} \frac{\partial n}{\partial n} ds = +4\pi \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \rho(x, y) dx dy, \quad (10,18)$$

где слева стоит линейный интеграл от нормальной к контуру производной от u , и которое может быть и непосредственно получено из требования, что функция, удовлетворяющая уравнению (8, 1), должна удовлетворять также вытекающему из него интегральному соотношению:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy &= \int_0^b dy \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \int_0^a dx \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \\ &= 4\pi \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \rho(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (10, 19)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} \right] dy + \int_0^a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=b} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right] dx = \\ = -4\pi \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \rho(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Это как раз и есть формула (10, 17). Физический смысл этого условия становится ясным, если представить себе, что u — это электростатический потенциал системы линейно-распределенных зарядов с плотностью $\rho(x, y)$. Тогда, справа в (10, 17) или в (10, 18) стоит умноженный на 4π полный заряд, находящийся внутри прямоугольника (на единицу длины оси, перпендикулярной к его плоскости), а слева — полный поток сил (смещения), пронизывающий контур прямоугольника, так что формулы эти выражают просто известную электростатическую теорему Гаусса в применении к данному частному случаю.

Если условие (10,17) выполнено, то задача имеет решение и все коэффициенты u_k при $k \geq 0$ определяются, кроме аддитивной постоянной в выражении u^0 . После этого решение может быть закончено следующим образом: так как в интервале ($0 \leq x \leq a$) всякая кусочно-гладкая функция¹ $F(x)$ может быть разложена в ряд Фурье, содержащий одни косинусы, т. е. в ряд вида

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad (10, 20)$$

¹ И даже более общие функции.

где

$$a_k = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \quad k=0, 1, 2 \dots \infty, \quad (10, 21)$$

то, предполагая, что u может быть представлена в такой форме при $0 \leq x \leq a$, найдем для нее:

$$u = \frac{1}{2} u'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u'_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (10, 22)$$

Это и дает искомое решение второй предельной задачи.

10.2. Само собою разумеется, что можно было умножать (8,1) не на $\frac{2}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} dx$, а на $\frac{2}{b} \cos \frac{k\pi y}{b} dy$ и интегрировать по y в пределах $(0, b)$. В результате пришли бы для коэффициента

$$\bar{u}'_k = \frac{2}{b} \int_0^b u(x, y) \cos \frac{k\pi y}{b} dy \quad (10, 23)$$

к дифференциальному уравнению типа (10,8), в котором только y и a были бы заменены через x и b , а функции p_1 и p_2 — через q_1 и q_2 . Граничные условия для \bar{u}'_k отличались бы от (10,10) тоже только заменой q_1, q_2 на p_1, p_2 , и для u нашли бы решение:

$$u = \frac{1}{2} \bar{u}'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}'_k \cos \frac{k\pi y}{b}, \quad (0 \leq y \leq b). \quad (10, 24)$$

Оба решения (10, 22) и (10, 24) представляют функцию во всякой точке прямоугольника, но первое из них не может, вообще говоря, служить для представления $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x=0$ и при $x=a$, а второе — для представления $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y=0$ и $y=b$, поскольку из рядов (10, 22) и (10, 24) получаются для этих величин значения, равные нулю, тогда как истинные значения их отличны от нуля и даются условиями (10,1). Из этого, между прочим, следует, что члены рядов (10, 22) и (10, 24) не могут убывать быстрее, чем $1/k^2$, а потому ряды эти нельзя двукратно дифференцировать по x , соответственно по y .

10.3. **Примечание.** Заметим, что если бы мы попытались решать рассмотренную здесь вторую предельную задачу при помощи первичного варианта метода частных решений, аналогичного примененному в § 6, то мы должны были бы при интегрировании уравнения (8, 1) прежде всего ввести в это уравнение вместо u новую функцию w , определяемую соотношением:

$$w = u - \bar{u}, \quad (10, 25)$$

¹ Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно разлагаемую функцию $F(x)$ продолжить четным образом в интервал $(-a \leq x \leq 0)$, т. е. положить $F(-x) = F(x)$, и применить разложение (6, 25) — (6, 26), причем только нужно в (6, 25) заменить y на x и b на a . Получатся как раз формулы (10, 20) — (10, 21).

где \bar{u} — частное решение уравнения (8, 1), имеющее вид¹

$$\bar{u} = -2 \int_{\xi=0}^{\xi=a} \int_{\eta=0}^{\eta=b} \rho(\xi, \eta) \lg r d\xi d\eta, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \quad (10, 26)$$

Для w получилось бы при этом уже уравнение Лапласа, —

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (10, 27)$$

и граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{x=0} = p_1(y) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{x=0} \equiv \bar{p}_1(y); \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} &= p_2(y) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{x=a} \equiv \bar{p}_2(y); \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} &= q_1(x) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y=0} \equiv \bar{q}_1(x); \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b} &= q_2(x) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y=b} \equiv \bar{q}_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (10, 28)$$

Далее, естественно было бы пытаться разложить w на сумму $w^{(1)} + w^{(2)}$ двух функций, каждая из которых тоже удовлетворяла бы уравнению Лапласа, и которые были бы сверх того подчинены граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=0} = \bar{q}_1(x); \quad \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=b} = \bar{q}_2(x); \quad (10, 29)$$

$$\left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=0} = \bar{p}_1(y); \quad \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=a} = \bar{p}_2(y); \quad \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}\right)_{y=b} = 0, \quad (10, 30)$$

и решать задачу для каждой из этих функций в отдельности, пытаясь искать $w^{(1)}$ в форме

$$w^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(1)}(y) \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad (10, 31)$$

т. е. разлагая ее в ряд по функциям (10, 2), для которых $f'(0) = f'(a) = 0$, а для $w^{(2)}$ полагая аналогично:

$$w^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(2)}(x) \cos \frac{k\pi y}{b}. \quad (10, 32)$$

Но это, вообще говоря, невозможно, ибо, согласно (10, 17), для разрешимости первой из этих задач должно было бы удовлетворяться условие:

$$\int_0^a \bar{q}_1(x) dx = \int_0^a \bar{q}_2(x) dx, \quad (10, 33)$$

а для второй:

$$\int_0^b \bar{p}_1(y) dy = \int_0^b \bar{p}_2(y) dy, \quad (10, 34)$$

¹ Ср. (2, 17), а также стр. 56 [после формулы (8,11)].

чего, вообще говоря, не будет, поскольку значения \bar{p}_1 , \bar{p}_2 , \bar{q}_1 и \bar{q}_2 на самом деле должны, для разрешимости основной задачи, удовлетворять лишь одному условию, именно:

$$\int_0^a [\bar{q}_1(x) - \bar{q}_2(x)] dx + \int_0^b [\bar{p}_1(y) - \bar{p}_2(y)] dy = 0, \quad (10, 35)$$

а не условиям (10, 33) и (10, 34) в отдельности.

10.4. Сходимость рядов (10, 22) и (10, 24) может быть улучшена с помощью приема, аналогичного тому, который был применен в п. 9.4 для улучшения сходимости ряда (9, 1), полученного при решении первой предельной задачи. Именно, находим:

$$\begin{aligned} u'_k &= \frac{2}{a} \int_0^a u \cos \frac{k\pi x}{a} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \\ &= \frac{2a}{(k\pi)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{k\pi x}{a} \Big|_0^a - \frac{2a}{(k\pi)^2} \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{k\pi x}{a} dx = \\ &= \frac{2a}{(k\pi)^2} [(-1)^k p_2(y) - p_1(y)] - v_k, \end{aligned} \quad (10, 36)$$

где

$$v_k = \frac{2a}{(k\pi)^2} \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{k\pi x}{a} dx \quad (10, 37)$$

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/k^2$, если только производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, рассматриваемая, как функция от x (при постоянном y), удовлетворяет некоторым общим условиям.¹

Подставляя (10, 36) в (10, 22) и используя известные формулы:²

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\xi}{k^2} &= \frac{\xi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{при } -\pi \leq \xi \leq +\pi, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\xi}{k^2} &= \frac{(\pi - \xi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq 2\pi, \end{aligned} \right\} \quad (10, 38)$$

получим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} u'_0(y) + \\ &+ \frac{a}{2} \left\{ p_2(y) \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] - p_1(y) \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos \frac{k\pi x}{a}, \end{aligned} \quad (10, 39)$$

причем члены входящего сюда ряда уже сходятся быстрее, чем члены исходного.

Аналогичным образом можно преобразовать и ряд (10, 24).

¹ Например, условиям Дирихле.

² Они легко получаются из формул (9, 12) и (9, 13) путем интегрирования этих последних по ξ от нуля до ξ .

Пример

10.5. В качестве примера рассмотрим вопрос о нахождении того распределения потенциала внутри и на границах проводника прямоугольного сечения $OACBO$ (рис. 9), которое могло бы обусловить равномерное по поверхности втекание тока через грань OA и равномерный же отток его через грань OB при условии, что остальные грани изолированы (плоская токовая задача).¹

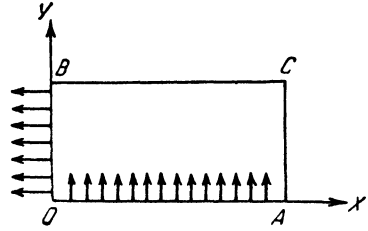


Рис. 9.

Вопрос этот приводится к задаче об интегрировании уравнения²

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (10, 40)$$

для потенциала электрического поля внутри прямоугольника при следующих граничных условиях:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{I}{\sigma b}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{I}{\sigma a}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=b} = 0, \quad (10, 41)$$

где I обозначает полный ток, втекающий через OA и вытекающий через OB , а σ — проводимость проводника.

Заметим, что при таком задании граничных условий, условие (10, 17) разрешимости рассматриваемой задачи естественно оказывается удовлетворенным.

Умножаем (10, 40) на $\frac{2}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} dx$ и интегрируем от нуля до a . Для u'_k получаем при этом уравнение:

$$\frac{d^2 u'_k}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 u'_k = \frac{2I}{\sigma ab}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10, 42)$$

Граничные условия дают:

$$\left(\frac{du'_k}{dy}\right)_{y=0} = -\frac{2I}{\sigma a^2} \int_0^a \cos \frac{k\pi x}{a} dx = \begin{cases} -\frac{2I}{\sigma a} & \text{при } k=0, \\ 0 & k>0, \end{cases} \quad (10, 43)$$

$$\left(\frac{du'_k}{dy}\right)_{y=b} = 0. \quad (10, 44)$$

Интегрируя уравнение (10, 42) при условиях (10, 43)—(10, 44), находим:

$$\left. \begin{aligned} u'_0 &= \frac{I}{\sigma ab} (y-b)^2 + \text{const}, \\ u'_k &= -\frac{2Ia}{\pi^2 \sigma b k^2} \text{ при } k > 0. \end{aligned} \right\} \quad (10, 45)$$

¹ Эту задачу можно также рассматривать как задачу теории теплопроводности, соответствующую случаю, когда через сторону OA равномерно подводится тепло, а через OB — равномерно отводится, а две другие грани — AC и BC — покрыты тепловой изоляцией.

² См. п. 2.7.

(10, 22) дает теперь:

$$\begin{aligned} u &= \frac{I}{2\sigma ab} (y-b)^2 - \frac{2Ia}{\pi^2\sigma b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi x}{a}}{k^2} + \text{const} = \\ &= \frac{I}{2\sigma ab} [(y-b)^2 - (x-a)^2] + \text{const}, \end{aligned} \quad (10, 46)$$

последнее с помощью (10, 38). Это и есть искомое решение, которое, как нетрудно видеть, удовлетворяет всем условиям задачи.

§ 11. Распространение метода на другие предельные задачи для прямоугольника

11.1. Обратим теперь внимание на то, что при переходе от уравнения (8, 1) к уравнению (10, 8) нам понадобились только первые два условия (10, 1), именно:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = p_1(y); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} = p_2(y), \quad (11, 1)$$

которыми задавались значения нормальных к контуру производных искомой функции u на *вертикальных* сторонах, $-x=0$ и $x=a$, — прямоугольника. Вторые два условия (10, 1), т. е.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = q_1(x); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=b} = q_2(x), \quad (11, 2)$$

были использованы уже лишь впоследствии, притом только для получения граничного условия (10, 10) для уравнения (10, 8). При этом то обстоятельство, что на сторонах $y=0$ и $y=b$ граничные условия имели специальную форму (11, 2), определило только вид граничного условия (10, 10) для уравнения (10, 8). Но величины u_k можно было бы найти из уравнения (10, 8) и в том случае, если бы граничные условия (11, 2) на сторонах $y=0$ и $y=b$ заменились бы какими-нибудь другими, линейными относительно искомой функции u и ее нормальной к контуру производной $\frac{\partial u}{\partial y}$. Так, например, если вместо (11, 2) дано, что

$$(u)_{y=0} = r_1(x); \quad (u)_{y=b} = r_2(x), \quad (11, 3)$$

где $r_1(x)$ и $r_2(x)$ — некоторые функции, заданные в интервале от нуля до a , то в качестве граничных условий получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (u'_k)_{y=0} &= \frac{2}{a} \int_0^a (u)_{y=0} \cos \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a r_1(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \\ (u'_k)_{y=b} &= \frac{2}{a} \int_0^a r_2(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \quad (k=0, 1, 2, \dots, \infty), \end{aligned} \right\} \quad (11, 4)$$

и все постоянные A_k, B_k в решении (10, 11) уравнения (10, 8) при $k \geq 1$ опять определяются. При $k=0$ получаем для u_0 интеграл вида [ср. (10, 15)]:

$$\begin{aligned} u'_0 &= -4\pi \int_0^y d\eta \int_0^\eta \left\{ \rho'_0(\xi) + \frac{1}{2\pi a} [p_2(\xi) - p_1(\xi)] \right\} d\xi + Cy + D = \\ &= -4\pi \int_0^y (y-\xi) \left\{ \rho'_0(\xi) + \frac{1}{2\pi a} [p_2(\xi) - p_1(\xi)] \right\} d\xi + Cy + D, \end{aligned} \quad (11, 5)$$

где обе постоянные C и D тоже определяются из (11, 4) (при $k=0$), притом, в отличие от только что рассмотренной задачи второго рода, без всяких дополнительных ограничений для функций p_1, p_2, r_1, r_2 . Подставляя найденные значения u'_k в формулу (10, 22), получим решение нашей „смешанной“ задачи, когда на одной паре противоположащих сторон даны значения самой искомой функции, а на другой — значения ее нормальных к контуру производных.

11.2. Если бы вместо задания на сторонах $y=0$ и $y=b$ самой функции там задавались бы линейные комбинации из функции и ее нормальной к контуру производной, именно:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda u \right)_{y=0} = s_1(x); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mu u \right)_{y=b} = s_2(x), \quad (11, 6)$$

где λ и μ — некоторые постоянные, тогда как при $x=0$ и $x=a$ по-прежнему сохранялись бы условия (11, 1), то для u'_k опять имели бы уравнения (10, 8) и (10, 11), но уже при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{du'_k}{dy} + \lambda u'_k \right)_{y=0} &= \frac{2}{a} \int_0^a s_1(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx; \\ \left(\frac{du'_k}{dy} + \mu u'_k \right)_{y=b} &= \frac{2}{a} \int_0^a s_2(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx. \end{aligned} \right\} \quad (11, 7)$$

Решение задачи опять давалось бы формулой (10, 22), причем при проведении соответствующих вычислений автоматически получились бы те ограничения, которые должны быть наложены на функции, фигурирующие в граничных условиях, для того, чтобы задача вообще имела решение, если такие ограничения должны иметь место.¹

11.3. Аналогичным образом, если бы на сторонах $x=0$ и $x=a$ были известны значения самой функции, т. е. если бы было дано, что

$$(u)_{x=0} = f_1(y); \quad (u)_{x=a} = f_2(y), \quad (11, 8)$$

¹ Подобно тому, как это имело место для предельной задачи второго рода, в которую рассматриваемая здесь общая задача переходит при $\lambda = \mu = 0$. Ср. п. 10. 1.

тогда как при $y=0$ и $y=b$ имели бы место граничные условия вида (11,6), то поступая так, как указано в п. 9.2, мы пришли бы к дифференциальному уравнению (9,7) для величин

$$\bar{u}_k = \frac{2}{a} \int_0^a u(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \quad (9,6)$$

причем для определения постоянных интегрирования служили бы получающиеся из (11,6) граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\bar{u}_k}{dy} + \lambda \bar{u}_k \right)_{y=0} &= \frac{2}{a} \int_0^a s_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \\ \left(\frac{d\bar{u}_k}{dy} + \mu \bar{u}_k \right)_{y=b} &= \frac{2}{a} \int_0^a s_2(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \end{aligned} \right\} \quad (11,9)$$

а сама функция u определялась бы внутри прямоугольника формулой (9,5):

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (0 < x < a). \quad (9,5)$$

На самых границах $x=0$ и $x=a$ эта формула дает для u значения, равные нулю, и для представления u , вообще говоря, служить не может.

11.4. Изложенная методика допускает распространение на такие более общие задачи, когда искомая функция u удовлетворяет на сторонах прямоугольника соотношениям:

$$\left(\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_0 u \right)_{x=0} = F_0(y), \quad (11,10)$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \right)_{x=a} = F_1(y), \quad (11,11)$$

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_2 u \right)_{y=0} = F_2(x), \quad (11,12)$$

$$\left(\alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_3 u \right)_{y=b} = F_3(x), \quad (11,13)$$

где α_i, β_i ($i=0, 1, 2, 3$) — какие-нибудь постоянные, а F_i — некоторые заданные функции соответствующих аргументов (граничные условия третьего рода). Частным случаем этой общей задачи являются все до сих пор рассмотренные (если все $\alpha_i=0$, то это предельная задача первого рода, если все $\beta_i=0$, — второго рода и т. д.). В этой книге нам с такими задачами почти не придется иметь дела.¹ Все же для полноты изложения рассмотрим вкратце, каким образом может быть проведено их решение.

¹ Они возникают, например, в связи с задачами теплопроводности, когда теплоотдача в окружающее пространство пропорциональна температуре на внешней поверхности тела, а также в ряде других случаев.

Заметим прежде всего, что мы можем, например, в граничных условиях (11, 10) и (11, 11), относящихся к сторонам $x=0$ и $x=a$ прямоугольника, считать одну из постоянных α_0 и α_1 отличной от нуля, так как иначе мы приходим к уже изученному в пп. 9.1 и 11.3 случаю. Можно также считать, что одна из постоянных β_0 , β_1 отлична от нуля, так как иначе мы возвращаемся к уже решенной в п. 10.1 или п. 11.2 задаче. Это показывает, что достаточно рассмотреть два следующих еще возможных случая:

А. Когда условия (11, 10) — (11, 11) приводятся к виду

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u\right)_{x=0} = v_0(y), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu u\right)_{x=a} = v_1(y), \quad (11, 14)$$

где λ и μ — некоторые конечные постоянные, не равные нулю одновременно, а $v_i(y) = F_i(y)/\alpha_i$, и

Б. Когда они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= v_0(y), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u\right)_{x=a} &= v_1(y), \end{aligned} \right\} \quad (11, 15)$$

где λ — тоже постоянная, которая, в частности, может равняться нулю.

Рассмотрим их поочередно.

11.5. Случай А. Вспоминая, что в том случае, когда при $x=0$ и $x=a$ даны были значения самой функции u , мы исходили при решении уравнения (8, 1) из того частного решения $f = \sin \frac{k\pi x}{a}$ уравнения (6, 5), которое обращалось в нуль на границах интервала $0 \leq x \leq a$, т. е. для которого $(f)_{x=0} = (f)_{x=a} = 0$, а когда требовалось решить вторую предельную задачу, причем задавались значения $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}$, — то из решения $f = \cos \frac{k\pi x}{a}$ уравнения (6, 5), для которого $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a} = 0$, можно теперь попытаться исходить из того решения f уравнения (6, 5), для которого

$$\left(\frac{df}{dx} + \lambda f\right)_{x=0} = f'(0) + \lambda f(0) = 0, \quad (11, 16)$$

$$\left(\frac{df}{dx} + \mu f\right)_{x=a} = f'(a) + \mu f(a) = 0. \quad (11, 17)$$

Заметим, что если мы найдем такое решение $f = f_k$, соответствующее некоторому значению $\alpha = \alpha_k$ параметра α в уравнении (6, 8), причем, стало быть, выполняется соотношение

$$\frac{d^2 f_k}{dx^2} = -\alpha_k^2 f_k, \quad (11, 13)$$

и f_k удовлетворяет граничным условиям (11,16) — (11,17), то поступая с уравнением (8,1) так же, как выше, т. е. умножая его на $f_k dx$, интегрируя по x в пределах $(0, a)$ и вводя обозначения

$$u_k^* = \int_0^a u(x, y) f_k(x) dx, \quad (11,19)$$

$$\rho_k^* = \int_0^a \rho(x, y) f_k(x) dx, \quad (11,20)$$

найдем для u_k^* уравнение:

$$\frac{d^2 u_k^*}{dy^2} - \alpha_k^2 u_k^* = f(0) v_0(y) - f(a) v_1(y) - 4\pi \rho_k^*. \quad (11,21)$$

Оно легко получается, если использовать формулу (9,12) и соотношения (11,16) — (11,17) и (6,5), что дает, если объединить в нижеприводимой формуле одинаковым образом подчеркнутые члены и использовать условия (11,14):

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f(x) dx &= f(a) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} - f(0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} - \underbrace{f'(a)(u)_{x=a}} + \underbrace{f'(0)(u)_{x=0}} - \\ &+ \int_0^a u f''(x) dx = f(a) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu u \right]_{x=a} - f(0) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right]_{x=0} - \\ &- \alpha_k^2 \int_0^a u f(x) dx = f(a) v_1(y) - f(0) v_0(y) - \alpha_k^2 u_k^*. \end{aligned} \quad (11,22)$$

К уравнению (11,21) присоединяются граничные условия, получаемые из (11,12) и (11,13) путем умножения их на $f_k(x) dx$ и интегрирования по x от нуля до a , а именно:

$$\left. \begin{aligned} \left(\alpha_2 \frac{du_k^*}{dy} + \beta_2 u_k^* \right)_{y=0} &= \int_0^a F_2(x) f_k(x) dx, \\ \left(\alpha_3 \frac{du_k^*}{dy} + \beta_3 u_k^* \right)_{y=b} &= \int_0^a F_3(x) f_k(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (11,23)$$

Эти условия должны служить для определения произвольных постоянных в решении уравнения (11,21). Вопрос сводится, таким образом, прежде всего к нахождению функций $f_k(x)$ и к установлению возможности выражения через находимые с помощью их величины u_k^* самой искомой функции u , подобно тому как это удавалось сделать в случае рассматривавшихся до сих пор задач.

11.6. Остановимся сперва на первом из этих вопросов, т. е. на нахождении функций $f_k(x)$.

(11,18) дает:

$$f_k = A_k \sin \alpha_k x + B_k \cos \alpha_k x, \quad (11,24)$$

где A_k и B_k — постоянные. Условия (11,16) и (11,17) приводят к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k A_k + \lambda B_k &= 0, \\ (\alpha_k \cos \alpha_k a + \mu \sin \alpha_k a) A_k + (\mu \cos \alpha_k a - \alpha_k \sin \alpha_k a) B_k &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11,25)$$

т. е. для существования отличных от нуля решений требуется выполнение условия:

$$(\lambda \mu + \alpha_k^2) \sin \alpha_k a + \alpha_k (\lambda - \mu) \cos \alpha_k a = 0. \quad (11,26)$$

Полагая здесь

$$\alpha_k a = \xi_k, \quad (11,27)$$

перепишем (11,26) в такой форме:

$$\operatorname{ctg} \xi_k = \frac{1}{a(\mu - \lambda)} \left[\xi_k + \frac{\lambda \mu a^2}{\xi_k} \right]. \quad (11,28)$$

В реальных физических задачах λ и μ обычно имеют разные знаки, причем $\mu > 0$, $\lambda < 0$. Уравнение (11,28) имеет бесчисленное множество вещественных корней, получаемых пересечением котангенсоиды

$$y_1 = \operatorname{ctg} \xi \quad (11,29)$$

с алгебраической кривой

$$y_2 = \frac{1}{a(\mu - \lambda)} \left[\xi + \frac{\lambda \mu a^2}{\xi} \right], \quad (11,30)$$

которая при $\mu > 0$, $\lambda < 0$ начинается с минус бесконечности при $\xi = 0$, затем возрастает и асимптотически переходит в прямую $y = \frac{1}{a(\mu - \lambda)} \xi$.

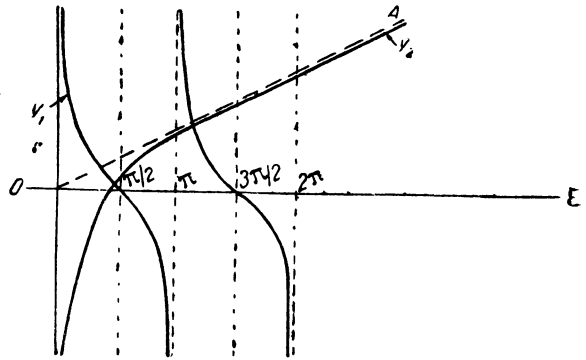


Рис. 10.

Обозначим эти корни через ξ_k , $k=1, 2, 3, \dots, \infty$ [$\xi=0$ — это при $\lambda \mu \neq 0$ не корень, что, в частности, видно из рис. 10, на котором OA изображает асимптоту кривой (11,30)]. Им соответствует, согласно (11,27), бесчисленное множество характеристических значений

$$\alpha_k = \frac{\xi_k}{a} \quad (11,31)$$

параметра α_k в уравнении (11,18), для которых соответствующие функции $f_k(x)$ удовлетворяют как этому уравнению, так и условиям (11,16) — (11,17).

Так как при этом должно быть, согласно (11,25),

$$B_k = -\frac{\alpha_k}{\lambda} A_k = -\frac{\xi_k}{a\lambda} A_k, \quad (11,32)$$

то подстановка в (11,24) дает, если положить $A_k/a\lambda = A'_k$:

$$f_k(x) = A'_k \left(a\lambda \sin \frac{\xi_k x}{a} - \xi_k \cos \frac{\xi_k x}{a} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (11,33)$$

Постоянную A'_k можно выбрать произвольно.

Функции f_k обладают свойством ортогональности, в чем нетрудно убедиться следующим образом: возьмем уравнения (11,18) для двух различных функций $f_k(x)$ и $f_m(x)$

$$\begin{aligned} f_k'' &= -\alpha_k^2 f_k, \\ f_m'' &= -\alpha_m^2 f_m. \end{aligned}$$

умножим первое на f_m , второе на f_k и вычтем второй результат из первого. Получится:

$$f_m f_k'' - f_k f_m'' = \frac{d}{dx} (f_m f_k' - f_k f_m') = (\alpha_m^2 - \alpha_k^2) f_k f_m,$$

откуда

$$(\alpha_m^2 - \alpha_k^2) \int_0^a f_k f_m dx = (f_m f_k' - f_k f_m') \Big|_0^a. \quad (11,34)$$

Пользуясь условиями (11,16) и (11,17), убеждаемся в том, что выражение справа равно нулю, т. е. что при $m \neq k$ будет действительно:

$$\int_0^a f_k f_m dx = 0. \quad (11,35)$$

Допуская теперь, что искомая функция может быть представлена в интервале $(0, a)$ рядом вида

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} M_k f_k(x), \quad (11,36)$$

где M_k — некоторые независящие от x коэффициенты, и предполагая, что ряд (11,36) можно интегрировать почленно, сможем найти значения M_k следующим образом: умножим (11,36) на $f_m(x) dx$, где m — фиксированное число, и проинтегрируем в пределах от нуля до a . (11,35) дает при этом:

$$\int_0^a u f_m(x) dx = M_m \int_0^a f_m^2 dx,$$

т. е., пользуясь обозначением (11,19):

$$M_m = \frac{u_m^*}{\int_0^a f_m^2 dx}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots, \infty). \quad (11,37)$$

В силу произвольности постоянных A'_k , можем выбрать их так, чтобы было:

$$\int_0^a f_k^2 dx = 1, \quad (k \geq 1),^1 \quad (11,38)$$

причем (11,37) переходит просто в

$$M_m = u_m^*, \quad (11,39)$$

и для u получается формула:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^* f_k(x). \quad (11,40)$$

Так как выше уже было показано, как найти u_k^* , если известны функции $f_k(x)$, то (11,40) и дает окончательное решение задачи для случая (А). Относительно возможности представления функции u рядом вида (11,36), отсылаем к теории разложения произвольных функций в тригонометрические ряды² или к общей литературе по теории ортогональных функций, связанных с уравнениями штурм-лиувиллевского типа.³ По вопросу об условиях, при которых уравнение (11, 28) не имеет иных решений, кроме вещественных, см. там же (вещественность характеристических чисел). Этот же вопрос можно, впрочем, исследовать и непосредственно.

11.7. Случай Б. Переходим теперь ко второму случаю, когда граничные условия при $x=0$ и $x=a$ имеют вид (11,15). При этом выбираем, по аналогии с предыдущим, за „основные решения“ $\bar{f}_k(x)$ те, которые соответствуют таким значениям $\bar{\alpha}_k$ параметра α в уравнении (11,18), при которых решения \bar{f}_k уравнения

$$\frac{d^2 \bar{f}_k}{dx^2} = -\bar{\alpha}_k^2 \bar{f}_k \quad (11,41)$$

удовлетворяют однородным граничным условиям типа (11,15), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_k(0) &= 0, \\ \bar{f}_k'(a) + \lambda \bar{f}_k(a) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11,42)$$

¹ Такие функции $f_k(x)$ называются нормированными.

² Picard, E., Traité d'analyse, t. II, или А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, изд. 2-е, АН СССР, (1932), §§ 55—56. См. также Г. Гринберг, Известия Лнгр. политехнич. ин-та, т. XXXIII. У Picard'a и Крылова показывается, что всякая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле в интервале $(0, a)$, может быть разложена в этом интервале в ряд вида (11,40).

³ В. А. Стеклов, Основные задачи математической физики, I, 1922.—К у р а н т—Гильберт, тт. I и II.—В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV и др.

Соответствующие функции $\bar{f}_k(x)$ имеют вид:

$$\bar{f}_k(x) = A_k \sin \bar{\alpha}_k x, \quad (11, 43)$$

где $\bar{\alpha}_k$ — это корни уравнения

$$\bar{\alpha}_k \cos \bar{\alpha}_k a + \lambda \sin \bar{\alpha}_k a = 0, \quad (11, 44)$$

или, что то же, уравнения

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}_k a = -\frac{\lambda}{\bar{\alpha}_k}, \quad (11, 45)$$

которых существует бесчисленное множество и которые при $\lambda > 0$ все вещественны. Функции $\bar{f}_k(x)$ образуют ортогональную систему, что нетрудно проверить с помощью соотношений (11, 34), в которых надо только величины α и f заменить такими же, но со штрихом сверху. Произвольные величины A_k в (11, 43) выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^a \bar{f}_k^2 dx = 1, \quad (11, 46)$$

для чего достаточно положить

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\sqrt{\int_0^a \sin^2 \bar{\alpha}_k x dx}} = \sqrt{\frac{2\bar{\alpha}_k}{a\bar{\alpha}_k - \sin \bar{\alpha}_k a \cos \bar{\alpha}_k a}} = \\ &= \sqrt{\frac{2(\lambda^2 + \bar{\alpha}_k^2)}{\lambda + a(\lambda^2 + \bar{\alpha}_k^2)}}, \end{aligned} \quad (11, 47)$$

[последний результат получается с помощью (11,45)].

Пронумеруем положительные корни уравнения (11,44) в порядке возрастания их величины от $k=1$ до $k=\infty$. Умножим теперь уравнение (8,1), как обычно, на $\bar{f}_k(x) dx$ и проинтегрируем в пределах $(0, a)$. Вводя обозначения:

$$\bar{u}_k^* = \int_0^a u(x, y) \bar{f}_k(x) dx; \quad \bar{\chi}_k^* = \int_0^a \chi(x, y) \bar{f}_k(x) dx \quad (11, 48)$$

и преобразуя, как всегда, член $\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bar{f}_k(x) dx$ интегрированием по частям, что дает в данном случае:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bar{f}_k(x) dx = \bar{f}_k'(a) v_1(y) + \bar{f}_k'(0) \cdot v_0(y) - \bar{\alpha}_k^2 \bar{u}_k^*, \quad (11, 49)$$

получим для \bar{u}_k^* уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}_k^*}{dy^2} - \bar{\alpha}_k^2 \bar{u}_k^* &= -4\pi \bar{\chi}_k^* - [\bar{f}_k'(a) v_1(y) + \bar{f}_k'(0) v_0(y)] = \\ &= -4\pi \bar{\chi}_k^* - A_k [\sin \bar{\alpha}_k a \cdot v_1(y) + \bar{\alpha}_k v_0(y)]. \end{aligned} \quad (11, 50)$$

К нему добавляются граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \left(\alpha_2 \frac{d\bar{u}_k^*}{dy} + \beta_2 \bar{u}_k^* \right)_{y=0} &= \int_0^a F_2(x) \bar{f}_k(x) dx; \\ \left(\alpha_3 \frac{d\bar{u}_k^*}{dy} + \beta_3 \bar{u}_k^* \right)_{y=s} &= \int_0^a F_3(x) \bar{f}_k(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (11,51)$$

Определив из (11,50) — (11,51) все \bar{u}_k^* , ($k \geq 1$),¹ сможем затем найти u по формуле, аналогичной (11,40), т. е.

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k^* \bar{f}_k(x), \quad (11,52)$$

которая получается совершенно так же, как (11,40).

11.8. Суммируя все изложенное, можем сказать, что указанным методом сформулированная в п. 11.4 общая проблема полностью решается во всех тех случаях, когда она вообще допускает решение. Условия такой допустимости, ясные обыкновенно из физических соображений, во всех случаях выявляются в самом ходе решения задачи, именно при определении постоянных в выражениях для коэффициентов \bar{u}_k^* или \bar{u}_k^* , подобно тому, как это имело место в случае задачи Неймана. Мы здесь не будем более детально входить в относящиеся к этому подробности, поскольку нам с ними в наших проблемах, как правило, не придется встречаться, и ограничимся поэтому сказанным и некоторыми замечаниями в даваемых ниже примерах.

§ 12. Примеры на приложение развитых выше методов

Разберем несколько примеров с целью иллюстрировать общие методы предыдущего параграфа.

Пример 1

12.1. Решим плоскую задачу электростатики для случая, когда потенциал u и поле E требуется найти внутри бесконечной полуполосы, ограниченной отрезком $0 \leq x \leq a$ оси x и бесконечными полупрямыми (полуплоскостями) $x=0$ и $x=a$ при $y \geq 0$ (рис. 11), причем дано, что $(u)_{y=0} = 0$, $(u)_{x=0} = 0$, $(u)_{x=a} = V$ и заряды внутри полуполосы отсутствуют.

Заметим, что при $y = \infty$ поле внутри полуполосы становится однородным, так что $(u)_{y=\infty} = V \frac{x}{a}$.

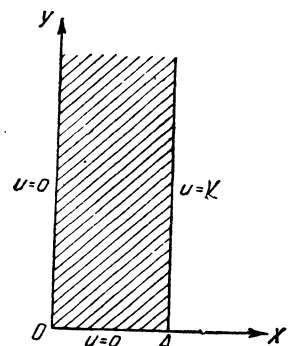


Рис. 11.

¹ В тех случаях, когда это вообще возможно.

Внутри полуполосы должно выполняться уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (12, 1)$$

Так как в данном случае имеем дело с предельной задачей первого рода, то пользуясь данным в п. 9.2 методом, умножаем (12,1) на $\frac{2}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx$ и интегрируем от нуля до a . Получающееся при этом уравнение (9,7) принимает в данном случае вид:

$$\frac{d^2 \bar{u}_k}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \bar{u}_k = (-1)^k \frac{2k\pi V}{a^2}, \quad (12, 2)$$

тогда как условия (9,9) обращаются в такие:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}_k)_{y=0} &= 0, \\ (\bar{u}_k)_{y=\infty} &= \frac{2V}{a^2} \int_0^a x \sin \frac{k\pi x}{a} dx = (-1)^{k-1} \frac{2V}{k\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (12, 3)$$

Интеграл уравнения (12, 2), удовлетворяющий второму условию (12, 3), будет

$$\bar{u}_k = A_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} + (-1)^{k-1} \frac{2V}{k\pi}, \quad (12, 4)$$

тогда как первое условие (12, 3) дает:

$$\bar{u}_k = (-1)^{k-1} \frac{2V}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k\pi y}{a}} \right]. \quad (12, 5)$$

Подставляя в (9,5), получим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2V}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{k\pi x}{a}}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{-\frac{k\pi y}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}}{k} \right\} = \\ &= V \frac{x}{a} - \frac{2V}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{e^{\frac{\pi y}{a}} + \cos \frac{\pi x}{a}}, \end{aligned} \quad (12, 6)$$

причем использовано известное значение первого ряда, а второй суммируется совершенно так же, как аналогичный ряд в (7,58).¹

Формула (12, 6) совпадает с ранее найденной иным способом формулой (7,59) для того же случая, причем только нужно при сравнении обеих формул заменить в (12,6) x на $(a-x)$, поскольку в (7,59) координата x отсчитывается от стенки с потенциалом $u=V$, а в (12,6) — от стенки с $u=0$.

¹ Первый ряд может быть также получен из второго при $y=0$, когда

$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{e^{\pi y/a} + \cos \frac{\pi x}{a}} \right)_{y=0} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right) = \frac{\pi x}{2a}.$$

Пример 2

12. 2. Пусть требуется найти распределение тока внутри бесконечного плоского однородного проводящего слоя толщины a и проводимости σ , окруженного непроводящей средой, причем источником тока является линейный провод (заземлитель), помещенный внутри слоя и параллельный ограничивающим его плоскостям.

Так как растекание токов от провода происходит в перпендикулярных к нему плоскостях и не зависит от местоположения такой плоскости, то все распределение токов зависит только от координат x и y в этой плоскости (плоская задача). Оси X и Y выбираем так, как показано на рисунке 12, где изображено сечение рассматриваемого слоя плоскостью, перпендикулярной к проводу. При этом начало координат расположено на левом основании слоя, а перпендикулярная к плоскостям оснований ось X проходит через местоположение A провода, x -овую координату которого обозначим через ξ . Исходящий из провода на единицу длины ток положим равным J .

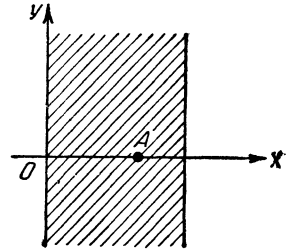


Рис. 12.

Согласно п. 2.7 наша токовая задача совершенно эквивалентна такой электростатической, когда пространство между плоскостями $x=0$ и $x=a$ заполнено однородным диэлектриком с постоянной $\epsilon=\sigma$, в точке A с координатами $(\xi, 0)$ находится заряженная нить с зарядом $e=\frac{J}{4\pi}$ на единицу длины [см. (2,61)], а на плоскостях $x=0$ и $x=a$ предписаны условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=a}=0, \quad (12.7)$$

вытекающие из условий (2,59), поскольку проводимость одной из соприкасающихся сред равна нулю (здесь φ —это потенциал соответствующей электростатической задачи).

К этим условиям прибавляется еще условие стационарности режима, которое требует, чтобы полный ток, оттекающий на бесконечность, равнялся току, подводимому с провода.

Это задача рассмотренного в § 10 типа (задача Неймана), и она решается данным там методом. Именно, рассматривая заряженную нить как предел бесконечно длинной призмы с плоскостями оснований $x=\xi$, $x=\xi+\delta$ и $y=0$, $y=\delta$ и объемной плотностью $\rho_0=\frac{e}{\delta^2}=\frac{J}{4\pi\delta^2}$ при $\delta\rightarrow 0$, причем потенциал φ внутри полосы $0 < x < a$ удовлетворяет уравнению:¹

¹ Ибо диэлектрическая постоянная ϵ эквивалентной электростатической задачи равна σ . Ср. уравнение (2,11).

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\rho(x, y)}{\sigma}, \quad (12, 8)$$

где

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_0 = J/4\pi\delta^2 & \text{при } \xi \leq x \leq \xi + \delta \text{ и } 0 \leq y \leq \delta, \\ 0 & \text{при всех остальных значениях } x \text{ и } y, \end{cases} \quad (12, 9)$$

умножая (12, 8) на $\frac{2}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} dx$ и интегрируя по x от нуля до a , придем к уравнению:¹

$$\frac{d^2 \varphi'_k}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \varphi'_k = -\frac{4\pi}{\sigma} \rho'_k(y), \quad (k \geq 0), \quad (12, 10)$$

где

$$\rho'_k(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x, y) \cos \frac{k\pi x}{a} dx. \quad (12, 11)$$

При $k \geq 1$, общий интеграл его имеет, согласно (10, 11), вид:

$$\begin{aligned} \varphi'_k &= M_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + N_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} - \\ &- \frac{8}{\sigma k} \int_0^y \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (y - \eta) d\eta \int_0^a \rho(x, \eta) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \end{aligned} \quad (12, 12)$$

причем гиперболические синусы и косинусы заменены экспоненциальными функциями, что всегда удобнее в случае бесконечного промежутка изменения рассматриваемой координаты.

Поступая так же, как в п. 8.3, легко найдем, что в пределе, при $\delta \rightarrow 0$ и при $y > 0$, получится:²

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^y \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (y - \eta) d\eta \int_0^a \rho(x, \eta) \cos \frac{k\pi x}{a} dx &= \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\delta} \operatorname{sh} \frac{k\pi (y - \eta)}{a} d\eta \int_{\xi}^{\xi + \delta} \rho_0 \cos \frac{k\pi x}{a} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_0 \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \cdot \cos \frac{k\pi \xi}{a} \cdot \delta^2 = \frac{J}{4\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \cos \frac{k\pi \xi}{a}, \end{aligned} \quad (12, 13)$$

тогда как при $y < 0$ двойной интеграл справа обращается в нуль. Итак:

$$\varphi'_k = \begin{cases} M_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + N_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} & \text{при } y < 0, \\ M_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + N_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} - \frac{2J}{\pi \sigma k} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \cos \frac{k\pi \xi}{a} & \text{при } y > 0. \end{cases} \quad (12, 14)$$

Так как потенциал φ не может расти экспоненциально при удалении от источника поля, т. е. от провода, то первое из этих выражений

¹ Ср. (10, 8).

² Надо начинать при этом с вычисления (12, 12) при $y > \delta$, а потом перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$.

показывает, что $N_k = 0$ [иначе $(\varphi_k')_{y=-\infty} = \infty$], тогда как из второго получается при этом:

$$\varphi_k' = \left(M_k - \frac{J}{\pi\sigma k} \cos \frac{k\pi\xi}{a} \right) e^{\frac{k\pi y}{a}} + \frac{J}{\pi\sigma k} \cos \frac{k\pi\xi}{a} \cdot e^{-\frac{k\pi y}{a}}. \quad (12, 15)$$

Это выражение может оставаться ограниченным при $y \rightarrow +\infty$ лишь в том случае, если

$$M_k = \frac{J}{\pi\sigma k} \cos \frac{k\pi\xi}{a}. \quad (12, 16)$$

Из (12, 14) и (12, 15) находим теперь, поэтому:

$$\psi_k' = \begin{cases} \frac{J}{\pi\sigma k} e^{\frac{k\pi y}{a}} \cos \frac{k\pi\xi}{a} & \text{при } y < 0, \\ \frac{J}{\pi\sigma k} e^{-\frac{k\pi y}{a}} \cos \frac{k\pi\xi}{a} & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (k \geq 1), \quad (12, 17)$$

выражения, симметричные относительно y и $-y$, как и должно быть.

Остается найти φ_0' , для которого (12, 10) и (12, 11) дают:

$$\frac{d^2\varphi_0'}{dy^2} = -\frac{4\pi}{\sigma} \rho_0'(y),$$

где

$$\rho_0'(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x, y) dx = \begin{cases} \frac{2}{a} \rho_0 \delta & \text{при } 0 \leq y \leq \delta \\ 0 & \text{при } y > \delta, \end{cases} \quad (12, 18)$$

так что при $y > \delta$ получается выражение:

$$\varphi_0' = Ay + B - \frac{4\pi}{\sigma} \int_0^y d\eta \int_0^\eta \rho_0'(u) du = \left(A - \frac{2J}{\sigma a} \right) y + B, \quad (12, 19)$$

где A и B — постоянные.

Для определения постоянной A служит указанное выше условие, что оттекающий на бесконечность ток $-J_{\text{оттек.}}^1$ — должен равняться J . При этом, так как по симметрии оттекающий ток равен удвоенному току, оттекающему в направлении положительной оси Y , то должно быть

$$J_{\text{оттек.}} = -2\sigma \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = -a\sigma \frac{d}{dy} \left(\frac{2}{a} \int_0^a \varphi dx \right) = -a\sigma \frac{d\varphi_0'}{dy} = -a\sigma \left(A - \frac{2J}{\sigma a} \right) = -J,$$

т. е.

$$A - \frac{2J}{\sigma a} = -\frac{J}{a\sigma}. \quad (12, 20)$$

Что касается постоянной B , то она остается неопределенной, как всегда во второй предельной задаче.

¹ На единицу длины оси, параллельной проводу.

Подставляя найденное значение A в (12, 19), и составляя затем по формуле (10, 24) ряд для φ , находим при $y > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{J}{2a\sigma}y + \frac{J}{\pi\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k\pi y}{a}}}{k} \cos \frac{k\pi\xi}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} + B = \\ &= -\frac{J}{2a\sigma}y - \frac{J}{4\pi\sigma} \lg \left(1 - 2e^{-\frac{\pi y}{a}} \cos \frac{\pi(x-\xi)}{a} + e^{-\frac{2\pi y}{a}} \right) + \\ &\quad + \frac{J}{4\pi\sigma} \lg \left(1 - 2e^{-\frac{\pi y}{a}} \cos \frac{\pi(x+\xi)}{a} + e^{-\frac{2\pi y}{a}} \right) + \text{const} = \\ &= -\frac{J}{4\pi\sigma} \lg \left(\text{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x-\xi)}{a} \right) - \frac{J}{4\pi\sigma} \lg \left(\text{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x+\xi)}{a} \right) + \text{const}, \end{aligned} \quad (12, 21)$$

причем использовано (8, 22).

Эта формула и дает окончательное решение задачи. Заметим, что на бесконечности оттекающий ток оказывается равномерно распределенным по сечению слоя, чего, конечно, и следовало ожидать.

Глава V

ВНУТРЕННИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

§ 13. Общие соображения и их применение к нахождению электромагнитного поля провода, питаемого переменным током и помещенного в идеально проводящую трубу прямоугольного сечения

13.1. Переходим теперь к решению предельных задач для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = -4\pi\chi(x, y), \quad k = \text{const}, \quad (13, 1)$$

для которого могут быть поставлены предельные задачи тех же типов, как для уравнения (8, 1).

Начинаем с рассмотрения граничных задач для прямоугольной области с вершинами в точках $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) (рис. 4).

Заметим прежде всего, что поступая с уравнением (13, 1) в случае какой-нибудь из этих задач в точности так же, как мы поступали раньше с уравнением (8, 1) для решения аналогичной предельной задачи, сразу придем к ее решению. При этом, если для решения некоторой предельной задачи для уравнения (8, 1) нужно было его помножить на какие-либо функции $f(x)$ или $\varphi(y)$ и интегрировать по x или по y соответственно в пределах $(0, a)$ или $(0, b)$, то для решения той же предельной задачи для уравнения (13, 1) нужно его помножить на те же самые функции $f(x)$ или $\varphi(y)$ и интегрировать в тех же самых пределах.

Действительно, если, например, при умножении уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi\chi(x, y) \quad (8, 1)$$

на $f_m(x) dx$, где $f_m(x)$ — одна из собственных функций рассматриваемой предельной задачи для уравнения (8,1), и при интегрировании по x от нуля до a из (8,1) получалось для $\tilde{u}_m = \int_0^a u f_m(x) dx$ дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 \tilde{u}_m}{dy^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \tilde{u}_m = -4\pi \tilde{\chi}_m(y) + F_m(y), \quad (13,2)$$

где

$$\tilde{\chi}_m(y) = \int_0^a \chi(x, y) f_m(x) dx, \quad (13,3)$$

а $F_m(y)$ — некоторая известная функция от y , определяемая характером граничных условий при $x=0$ и $x=a$,¹ то при умножении (13,1) на то же самое выражение и интегрировании в тех же пределах $0 \leq x \leq a$, получим вновь то же уравнение (13,2), только дополненное слева членом

$$k^2 \int_0^a u f_m(x) dx = k^2 \tilde{u}_m,$$

проистекающим от наличия нового слагаемого $-k^2 u$ — в уравнении (13,1) по сравнению с (8,1). Итак, теперь получится:

$$\frac{d^2 \tilde{u}_m}{dy^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2\right] \tilde{u}_m = -4\pi \tilde{\chi}_m(y) + F_m(y). \quad (13,4)$$

В этом уравнении $\tilde{\chi}_m(y)$ и $F_m(y)$ — известные функции от y , притом те же самые, как для уравнения Пуассона для тех же граничных условий при $x=0$ и $x=a$. Что касается граничных условий при $y=0$ и $y=b$, то они остаются в точности такими же, как для соответствующей предельной задачи для уравнения Пуассона и должны служить для однозначного определения постоянных интегрирования при нахождении \tilde{u}_m из уравнения (13,4) в тех случаях, когда это вообще может быть сделано.

Найдя все \tilde{u}_m , сможем, как раньше, представить искомую функцию u в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \alpha_m \tilde{u}_m f_m(x), \quad (13,5)$$

где $\alpha_m = 1$ при $m \geq 1$, а α_0 равно нулю или половине в зависимости от характера функций $f_m(x)$.²

Таким образом придем, в тех случаях, когда это вообще возможно, к полному решению для уравнения (13,1) всех тех же предельных задач, как выше для уравнения (8,1).

¹ Ср. уравнения (7,15), (8,6), (9,7), (10,8), (11,21), (11,50) и т. д.

² Ср. (7,19), (9,5), (10,22), (11,40), (11,52).

Пример

13.2. В качестве примера на приложение изложенной методики, рассмотрим вопрос о нахождении электромагнитного поля, создаваемого внутри бесконечно длинной трубы прямоугольного сечения с идеальнопроводящими стенками помещенным внутрь ее проводом, параллельным оси трубы и питаемым переменным током частоты ω .

Направим ось X вдоль стороны OA прямоугольника, ось Y — вдоль OB (см. рис. 13, на котором изображено сечение трубы). Ось Z направим по оси трубы. Провод квадратного сечения с осью, параллельной оси трубы и проходящей через точку $M(\xi, \eta)$, будем считать ограниченными плоскостями $x = \xi \pm \delta$, $y = \eta \pm \delta$, причем полный ток J , текущий по нему, будем считать равномерно распределенным по его сечению с плотностью $j_z^{(e)} = j^{(e)} = \frac{J}{4\delta^2}$, тогда как $j_x^{(e)} = j_y^{(e)} = 0$. Полагая в преде-

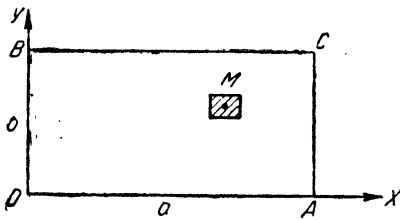


Рис. 13.

ле $\delta = 0$, сможем впоследствии перейти к случаю линейного тока, проходящего через точку M .

Будем считать, что весь процесс не зависит от z , т. е. что процессы, протекающие в разных плоскостях, перпендикулярных к оси Z , синфазны.¹ Тогда, в соответствии с изложенным в п. 3.1, задача сво-

дится к нахождению вектор-потенциала A поля, для которого, ввиду того что $j_x^{(e)} = j_y^{(e)} = 0$, $j_z^{(e)} \neq 0$, будем иметь $A_x = A_y = 0$, тогда как $A_z = A$ должно быть определено из z -вой проекции уравнения (3, 13), принимающей, при независимости процесса от z , такой вид:

$$\Delta A + k^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A = -\frac{4\pi\mu}{c} j_z^{(e)}, \quad (13, 6)$$

где

$$k^2 = \frac{(\epsilon\omega - 4\pi\omega i)\mu\omega}{c^2} \quad (13, 7)$$

и

$$j_z^{(e)} = j^{(e)} = \begin{cases} \frac{J}{4\delta^2} & \text{при } \xi - \delta \leq x \leq \xi + \delta \text{ и } \eta - \delta \leq y \leq \eta + \delta, \\ 0 & \text{при всех остальных значениях } x \text{ и } y. \end{cases} \quad (13, 8)$$

Здесь ϵ , μ и σ относятся к заполняющему трубу веществу.

К уравнению (13, 6) должны быть добавлены граничные условия, которые в данном случае получаются из требования, что переменное поле не может проникать внутрь идеального проводника, так что нормальные к стенкам составляющие B_n вектора магнитной индукции

¹ Это во всяком случае допустимо, если соответствующая частоте ω длина волны λ в заполняющем трубу веществе велика по сравнению с линейными размерами сечения трубы.

должны, согласно (1, 23), обращаться в нуль у стенок трубы внутри ее, поскольку они равны нулю везде внутри стенок.¹ Поэтому должно быть, из-за $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$(H_x)_{x=0} = (H_x)_{x=a} = 0; (H_y)_{y=0} = (H_y)_{y=b} = 0, \quad (13, 9)$$

а так как (3, 11) показывает, что при $A_x = A_y = 0$, $A_z = A$ и $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A}{\partial y}, \\ H_y &= -\frac{\partial A}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (13, 10)$$

то граничные условия для A принимают такой вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x=0} &= 0; \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x=a} = 0; \\ \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{y=0} &= 0; \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{y=b} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13, 11)$$

Эти условия показывают, что тангенциальные к стенкам трубы компоненты градиента A равны нулю, т. е. что A сохраняет вдоль всего контура постоянное значение.² При этом, так как поле определяется из A только с помощью дифференциальных операций, т. е. во всяком случае лишь с точностью до постоянной, то на контуре можно положить

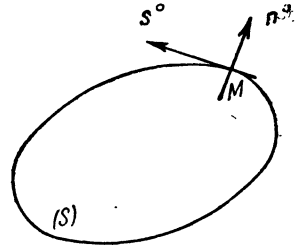


Рис. 14.

¹ Что касается граничного условия (1, 21), то оно в данном случае не соблюдается и граничным условием служить не может, так как при бесконечно-большой проводимости стенок по поверхности их текут *конечные* поверхностные токи (в бесконечно-тонком слое), которые защищают внутренность идеального проводника от проникновения туда переменного поля. H_z при этом на поверхности разрывна. Ср. по этому поводу п. 1. 3.

² Это условие получается при сделанных предположениях о характере процесса не только для прямоугольного контура, но и для контура произвольной формы. В самом деле, и в этом случае верны уравнения (13, 10), которые в векторной форме могут быть записаны так:

$$\mathbf{H} = -[i_z, \text{grad } A], \quad (\text{a})$$

где i_z — орт, направленный по оси z .

Вводя в рассмотрение орты s^0 и n^0 касательной и нормали к контуру s (рис. 14) и выбирая направления их так, чтобы они вместе с i_z образовывали правый триедр (s^0, n^0, i_z) , получим из (a) для нормальной к контуру составляющей H_n поля выражение:

$$H_n = -[n^0, \text{grad } A] = -(\text{grad } A, [n^0, i_z]),$$

т. е., так как $[n^0, i_z] = s^0$, то $H_n = -\frac{\partial A}{\partial s}$.

Из условия, что вдоль контура $H_n = 0$, получается, стало быть, что $\frac{\partial A}{\partial s} = 0$, т. е. что $A = \text{const}$ вдоль контура.

$$A = 0, \quad (13, 12)$$

т. е. более подробно:

$$\left. \begin{aligned} (A)_{x=0} = (A)_{x=a} = 0; \\ (A)_{y=0} = (A)_{y=b} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13, 13)$$

Итак, задача свелась к интегрированию уравнения (13, 6) при граничных условиях (13, 13), т. е. к предельной задаче первого рода для уравнения (13, 1), и остается применить данный в п. 13. 1 метод интегрирования этого уравнения для соответствующих граничных условий.

13. 3. Переходим к решению задачи, для чего умножаем (13, 6) на $\frac{2}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx$ и интегрируем от нуля до a . Получается, как обычно:

$$\frac{d^2 \bar{A}_m}{dy^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - k^2 \right] \bar{A}_m = - \frac{4\pi\mu}{c} \overline{j_m^{(e)}}(y), \quad (m = 1, 2, 3, \dots \infty), \quad (13, 14)$$

где обозначения аналогичны (9, 6) и (9, 8).

Если величина

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - k^2} \quad (13, 15)$$

не равна нулю, то общий интеграл этого уравнения имеет вид:¹

$$\bar{A}_m = M_m \operatorname{sh} \alpha_m y + N_m \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{4\pi\mu}{c\alpha_m} \int_0^y \overline{j_m^{(e)}} \operatorname{sh} \alpha_m (y - u) du. \quad (13, 16)$$

Если же $\alpha_m = 0$, то находим значение:

$$\bar{A}_m = My + N - \frac{4\pi\mu}{c} \int_0^y du \int_0^u \overline{j_m^{(e)}}(\xi) d\xi. \quad (13, 17)$$

К этим уравнениям присоединяются граничные условия

$$(\bar{A}_m)_{y=0} = 0; \quad (\bar{A}_m)_{y=b} = 0. \quad (13, 18)$$

Допустим сперва, что имеется хотя бы очень малая, но все же отличная от нуля, проводимость σ заполняющей трубу среды. Так как при этом k^2 — это, как показывает (13, 7), комплексное число, то α_m не может обращаться в нуль, и при всех $m \geq 1$ следует пользоваться интегралом (13, 16).

Первое условие (13, 18) показывает тогда, что

$$N_m = 0, \quad (13, 19)$$

тогда как второе дает:

$$M_m = \frac{4\pi\mu}{c\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m b} \int_0^b \overline{j_m^{(e)}} \operatorname{sh} \alpha_m (b - u) du. \quad (13, 20)$$

¹ Ср. (10, 8), (10, 11) и (10, 12).

Так как здесь α_m — комплексное число, то $\text{sh} \alpha_m b \neq 0$ при всех $m \geq 1$, и все постоянные M_m отсюда действительно определяются. Подставляя (13, 19) и (13, 20) в (13, 16), находим все \bar{A}_m при $m \geq 1$, а отсюда получаем, как в (9, 5), самый вектор-потенциал A , именно:

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (13, 21)$$

13.4. Перейдем в предыдущих формулах к предельному случаю линейного провода, когда $\delta \rightarrow 0$. Поступая при этом аналогично тому, как это делалось, например, при выводе формулы (12, 13), получим:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^b \overline{J_m^{(e)}} \text{sh} \alpha_m (b - u) du = \frac{2J}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \text{sh} \alpha_m (b - \eta), \quad (13, 22)$$

так что, например, при $y < \eta$ будет:

$$\bar{A}_m = \frac{8\pi\mu J}{ca \alpha_m \text{sh} \alpha_m b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \text{sh} \alpha_m (b - \eta) \text{sh} \alpha_m y, \quad (0 < y < \eta), \quad (13, 23)$$

т. е., согласно (13, 21):

$$A = \frac{8\pi\mu J}{ca} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \text{sh} \alpha_m (b - \eta) \text{sh} \alpha_m y}{\alpha_m \text{sh} \alpha_m b}, \quad (0 < y < \eta). \quad (13, 24)$$

При $y > \eta$ получается:

$$A = \frac{8\pi\mu J}{ca} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \text{sh} \alpha_m (b - y) \text{sh} \alpha_m \eta}{\alpha_m \text{sh} \alpha_m b}. \quad (13, 25)$$

Эти формулы вполне аналогичны (8, 19).

13.5. Если положить здесь $b = \infty$ и считать, что значение квадратного корня в формуле (13, 15) выбрано так, что $\text{Re}(\alpha_m) > 0$, то (13, 24) и (13, 25) дадут:

$$A = \frac{8\pi\mu J}{ca} \times \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m \eta} \text{sh} \alpha_m y}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \text{ при } y < \eta; \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m y} \text{sh} \alpha_m \eta}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \text{ при } y > \eta. \end{cases} \quad (13, 26)$$

При этом сечение трубы представляет собой уже не прямоугольник, как на рис. 13, а превращается в полуполосу изображенного на рис. 6 вида.

13.6. Чтобы теперь перейти к случаю провода между двумя безграничными параллельными пластинками, достаточно считать, что в предыдущих формулах η стремится к бесконечности, т. е. что провод вдвигается все глубже между пластинками, удаляясь неограниченно от оси X . При этом надо принять местоположение провода за

начало новой системы координат (x', y') , оси которой параллельны осям старой, так что

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad (13, 27)$$

и, введя это в (13, 26), перейти к пределу $\eta = \infty$, считая, что x' и y' имеют конечные значения.¹

Замечая, что

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-\alpha_m \eta} \operatorname{sh} \alpha_m y = \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [e^{\alpha_m y'} - e^{-\alpha_m (y' + 2\eta)}] = \frac{1}{2} e^{\alpha_m y'}$$

и

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-\alpha_m y'} \operatorname{sh} \alpha_m \eta = \frac{1}{2} e^{-\alpha_m y'},$$

и что

$$\sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi m \xi}{a} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi m x'}{a} - \cos \frac{\pi m (x' + 2\xi)}{a} \right],$$

получим в этом случае из (13, 26):

$$A = \frac{2\mu J}{ca} \times \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha_m y'}}{\alpha_m} \left[\cos \frac{m\pi x'}{a} - \cos \frac{m\pi (x' + 2\xi)}{a} \right], & y' < 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m y'}}{\alpha_m} \left[\cos \frac{m\pi x'}{a} - \cos \frac{m\pi (x' + 2\xi)}{a} \right], & y' > 0, \end{cases} \quad (13, 28)$$

причем провод находится в начале координат, а уравнения поверхностей пластинок суть $x' = a - \xi$ и $x' = -\xi$, и $-\xi \leq x' \leq a - \xi$.

13.7. Будем теперь стремиться в формуле (13, 28) a к бесконечности, чему соответствует удаление правой пластинки на бесконечность. При этом суммы в правой части формулы (13, 28) переходят в интегралы и дают, например, при $y' > 0$:

$$A = \frac{2\mu J}{c} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y'} \cos x' u}{\sqrt{u^2 - k^2}} du - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y'} \cos (x' + 2\xi) u}{\sqrt{u^2 - k^2}} du \right\}. \quad (13, 29)$$

В этом легко убедиться, если положить в (13, 28)

$$u_m = \frac{\pi m}{a}, \quad \Delta u_m = u_{m+1} - u_m = \frac{\pi}{a} \rightarrow 0,$$

причем получится, например:

$$\frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m y'}}{\alpha_m} \cos \frac{m\pi x'}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u_m^2 - k^2} y'}}{\sqrt{u_m^2 - k^2}} \cos x' u_m \Delta u_m,$$

а эта сумма имеет пределом определенный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y'}}{\sqrt{u^2 - k^2}} \cos x' u du.$$

¹ Поскольку, очевидно, интерес представляет лишь поле на конечном расстоянии от провода.

Аналогичное выражение получится и для второй суммы, причем только нужно будет x' заменить через $(x' + 2\xi)$.

Пользуясь формулой¹

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2}y'}}{\sqrt{u^2 - k^2}} \cos x' u du = -\frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(k\sqrt{x'^2 + y'^2}), \quad \text{Im}(k) < 0, \quad (13, 30)$$

где $H_0^{(2)}$ — ханкелева функция второго рода нулевого порядка, и полагая $\sqrt{x'^2 + y'^2} = r$, $\sqrt{(x' + 2\xi)^2 + y'^2} = r'$, где r — расстояние от провода до точки x' , y' , а r' — расстояние от той же точки до „отражения“ провода в плоскости $x' = -\xi$, можем переписать (13,29) так:

$$A = -\frac{\pi \mu J i}{c} \left\{ H_0^2(kr) - H_0^2(kr') \right\}. \quad (13, 31)$$

13.8. Если теперь удалить на бесконечность еще последнюю остающуюся пластину, полагая в соответствии с этим в (13,31) $\xi = \infty$, то второй член справа, содержащий r' , обращается в нуль, поскольку $r' = \infty$, и остается просто:

$$A = -\frac{\pi \mu J i}{c} H_0^2(kr). \quad (13, 32)$$

¹ Она легко получается из более общей формулы

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} J_m(bt) \frac{K_n(a\sqrt{t^2 + x^2})}{(t^2 + x^2)^{n/2}} t^{m+1} dt = \\ & = \frac{b^m}{a^n} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{x} \right)^{n-m-1} K_{n-m-1}(x\sqrt{a^2 + b^2}), \quad a > 0, b > 0, m > -1, \end{aligned} \quad (A)$$

(Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции [в дальнейшем: Кузьмин, Б. Ф.], ОНТИ, Л.—М., 1935, стр. 151, (31)), в которой $K_{n-m-1}(x\sqrt{a^2 + b^2})$ обозначает функцию Макдональда, и где следует положить $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. Так как при этом

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(bt) &= \sqrt{\frac{2}{\pi bt}} \cos bt, \quad K_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad \text{то (A) дает:} \\ & \int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t^2 + x^2}} \cos btdt}{\sqrt{t^2 + x^2}} = K_0(x\sqrt{a^2 + b^2}). \end{aligned} \quad (B)$$

Здесь x — произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Поэтому если k — такое комплексное число, что $\text{Im}(k) < 0$, так что $-\pi < \arg k < 0$, то можно положить в (B) $x = ik$, причем получится:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t^2 - k^2}} \cos btdt}{\sqrt{t^2 - k^2}} = K_0(ik\sqrt{a^2 + b^2}), \quad (B)$$

что в силу известных соотношений $K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz)$ и $H_0^{(1)}(-\rho) = -H_0^{(2)}(\rho)$ совпадает с (13,30)

Этой формулой и определяется вектор-потенциал бесконечно-длинного провода, питаемого синфазно во всех течениях током частоты ω и находящегося в неограниченной неоднородной среде, характеризующейся постоянной k .¹ Формула (13,32), конечно, может быть получена гораздо проще непосредственным путем.²

13.9. Заметим еще, что если бы мы стали стремиться к бесконечности в формуле (13,24) не b , как это делалось в п. 13.5, а a , то, полагая, как выше, $u_m = \frac{\pi m}{a}$, $\Delta u_m = u_{m+1} - u_m = \frac{\pi}{a}$ и $Re(\alpha_m) > 0$, и замечая, что

$$\frac{1}{\text{sh } \alpha_m b} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)b\alpha_m} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)b \sqrt{u_m^2 - k^2}}$$

$$\text{sh } \alpha_m (b - \eta) \text{sh } \alpha_m y = \frac{1}{4} \left[e^{(b-\eta+y) \sqrt{u_m^2 - k^2}} + \right.$$

$$\left. + e^{-(b-\eta+y) \sqrt{u_m^2 - k^2}} - e^{(b-\eta-y) \sqrt{u_m^2 - k^2}} - e^{-(b-\eta-y) \sqrt{u_m^2 - k^2}} \right],$$

¹ При $|kr| \rightarrow 0$, т. е. на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны в данной среде (квазистационарная область), найдем из (13,32), учитывая, что при $x \rightarrow 0$ $H_0^{(2)}(x) \rightarrow \frac{2}{\pi i} \lg x + \text{const}$:

$$(A)_{|kr| \rightarrow 0} = -\frac{\pi \mu J i}{c} H_0^{(2)}(kr) \rightarrow -\frac{2\mu J}{c} \lg r + \text{const},$$

т. е. при этом вектор-потенциал переменного поля переходит, как и должно быть в обычный вектор-потенциал (12,33) постоянного.

² Именно, так как для бесконечно-длинного линейного тока уравнение (13,6) для вектор-потенциала A принимает во внешних по отношению к проводу точках следующий простой вид

$$\Delta A + k^2 A = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) + k^2 A = \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + k^2 A = 0, \quad \text{Im}(k) < 0, \quad (A)$$

где r — расстояние от провода (в данном случае все зависит только от r , по симметрии), то учитывая, что A должен обращаться в нуль при $r \rightarrow \infty$, найдем для него выражение:

$$A = M H_0^{(2)}(kr), \quad M = \text{const}. \quad (B)$$

Постоянную M можем найти из условия, что на расстояниях r , весьма малых по сравнению с длиной волны λ , соответствующей частоте ω , т. е., собственно, при $|kr| \rightarrow 0$, вектор-потенциал A должен приближенно переходить в вектор-потенциал

$$A_{\text{стационар.}} = -\frac{2\mu J}{c} \lg r + \text{const} \quad (B)$$

стационарного тока J .

Так как при этом

$$(A)_{|kr| \rightarrow 0} = M \{ H_0^{(2)}(kr) \}_{|kr| \rightarrow 0} \rightarrow -\frac{2i}{\pi} M \lg r + \text{const},$$

то сравнение с (B) показывает, что $M = -\mu J i / c$, т. е. действительно непосредственно приходим к формуле (13,32).

Заметим еще, что так как формула (13,32) получилась как предельный случай формулы (13,29) при $\xi \rightarrow \infty$, и так как в этом случае входящий в (13,29) интеграл,

получим из (13, 24), переходя к пределу $a = \infty$, заменяя пределы сумм интегралами и пользуясь формулой (13, 30):

$$\begin{aligned}
 A = & -\frac{\pi\mu J}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb + \eta - y)^2 + (x - \xi)^2}) - \right. \\
 & - H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb + \eta - y)^2 + (x + \xi)^2}) - H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb + \eta + y)^2 + (x - \xi)^2}) + \\
 & \left. + H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb + \eta + y)^2 + (x + \xi)^2}) \right\} - \\
 & -\frac{\pi\mu J}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb - \eta + y)^2 + (x - \xi)^2}) - \right. \\
 & - H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb - \eta + y)^2 + (x + \xi)^2}) - \\
 & - H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb - \eta - y)^2 + (x - \xi)^2}) + \\
 & \left. + H_0^{(2)}(k\sqrt{(2nb - \eta - y)^2 + (x + \xi)^2}) \right\}. \quad (13, 33)
 \end{aligned}$$

Эта формула представляет собой точный аналог предельного случая формулы (8, 21) (при $b = \infty$) для соответствующего электростатического случая.¹ Она могла бы быть, проще всего, получена с помощью метода отражения.

13. 10. Во всем предыдущем изложении, начиная с формулы (13, 20), мы считали, что заполняющая трубу среда обладает некоторой, отличной от нуля, проводимостью, так что k^2 — комплексное число и все α_m — тоже комплексные числа. В силу этого, входящие в знаменатель формулы (13, 20) величины $\text{sh } \alpha_m b$ были при любом $m \geq 1$ отличны от нуля и все M_m однозначно определялись и оказывались конечными величинами.

содержащий ξ , обращается в нуль (из-за бесконечно-часто переменного множителя $\cos(x + 2\xi)$), то A оказывается также равным

$$A = \frac{2\mu J}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y'} \cos x' n}{\sqrt{u^2 - k^2}} du. \quad (\Gamma)$$

Так как этот вектор-потенциал должен быть тождественен с только что найденным совсем иным путем вектором-потенциалом $A = -\frac{\pi\mu J}{c} H_0^{(2)}(kr)$, где $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, то, приравнявая эти два выражения одной и той же величины, вновь получим формулу (13, 30), которая выше была выведена строго, а здесь получается хотя и не строго, но зато из весьма ясных физических соображений [ср., в связи с этим, также данные в п. 14. 9 два вывода формулы (14, 49): один строгий, другой — из физических соображений, аналогичных использованным выше].

¹ Действительно, полагая в (8, 21) $b \rightarrow \infty$ и поступая так же, как в п. 8.6 при выводе формулы (8, 27) из (8, 26), найдем, что в этом предельном случае каждый член вида $\lg(1 - 2e^{-\frac{\pi u}{b}} \cos \frac{\pi v}{b} + e^{-\frac{2\pi u}{b}})$ нужно будет в окончательной сумме заменить просто через $\lg(u^2 + v^2)$, чем и доказывается наше утверждение, если еще учесть, что при $x \rightarrow 0$ $H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2}{\pi i} \lg x$.

В случае, когда проводимость среды полностью отсутствует, т. е. когда $\sigma=0$, положение отличается от изложенного в том отношении, что, при некотором значении частоты ω питающего провод тока, одна или несколько из величин $\text{sh } \alpha_m b$ могут оказаться равными нулю. Именно, это будет иметь место всегда тогда, когда будет выполнено условие

$$\alpha_m b = b \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2} = in\pi, \quad (13, 34)$$

где n — любое целое число или нуль.

Это дает для k^2 , которое при $\sigma=0$ равно просто

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2},$$

где v — скорость распространения электромагнитных волн в заполняющей трубу среде, значения:

$$k^2 = \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \pi^2, \quad \left(\begin{array}{l} m \geq 1, \\ n \geq 0. \end{array} \right). \quad (13, 35)$$

Соответствующие значения ω , которые равны

$$\omega_{mn} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 v^2, \quad (13, 36)$$

определяют собственные частоты колебаний волн рассматриваемого типа в трубе прямоугольного сечения. Эти частоты отличаются от всех других тем, что для них возможны отличные от нуля решения однородного уравнения (13,6)¹ при нулевых граничных условиях (13,13).

Если же $j_z^{(e)} \neq 0$ и по проводу течет ток частоты ω , совпадающей с одной из ω_{mn} , то коэффициент M_m в (13,20), вообще говоря, обращается в бесконечность. Это явление резонанса, при котором стационарная амплитуда вынужденных колебаний частоты ω_{mn} должна, при отсутствии затухания, становиться бесконечно-большой.

13. 11. Заметим еще, что если бы мы искали решение не для вектор-потенциала A рассматриваемого поля, а для одной из декартовых составляющих поля, например, для E_x , то, согласно сказанному в п. 3.3, уравнение для E_x имело бы такой же вид, как (13,6), только с иной, чем в (13,6), правой частью [ср. (3,22)], но граничные условия были бы несколько иные. Именно, так как на поверхности идеального проводника вектор \mathbf{E} должен быть перпендикулярен к нему, то, во-первых, при $y=0$ и $y=b$ должно быть $(E_x)_{y=0} = 0$ и $(E_x)_{y=b} = 0$. Сверх того, при $x=0$ и $x=a$ должны выполняться условия:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{x=a} = 0,$$

вытекающие, с одной стороны, из условия, что везде внутри трубы

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

¹ Т. е. такого, в котором правая часть не содержит вынуждающих токов $j_z^{(e)}$.

(что, в частности, верно и в точках в непосредственной близости от стенок трубы), и что с другой, — около стенок $x=0$ и $x=a$ должны быть равны нулю производные $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$, поскольку касательные к этим стенкам составляющие E_y и E_z должны отсутствовать в каждой точке поверхности, так что должны обращаться в нуль и их тангенциальные производные $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. Итак, при непосредственном нахождении E_x , мы встретились бы уже с задачей об интегрировании уравнения вида (13,1) с $u = E_x$ при „смешанных“ граничных условиях:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} = 0; \quad (u)_{y=0} = 0; \quad (u)_{y=b} = 0. \quad (13,37)$$

Эту задачу можно было бы решить аналогично предыдущей, пользуясь данным в п. 13.1 общим методом.

Сходным образом обстоит дело и в случае задач о нахождении других компонент электрического и магнитного поля.

Глава VI

ЗАДАЧА ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА, ПУАССОНА И ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИЛИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

§ 14. Общий метод. Примеры

14.1. Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании общего уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = -4\pi\lambda(x, y, z), \quad (14,1)$$

для области изображенного на рис. 15 типа, ограниченной извне двумя плоскостями $z=0$ и $z=c$ и цилиндрической поверхностью $ABCD A'B'C'D'$, описываемой прямой, параллельной оси z , когда точка пересечения ее с плоскостью $z=0$ перемещается по некоторому контуру $ABCD A$ (контур (s)). Контур (s) может быть, в частности, и бесконечно-большим, например, охватывать всю плоскость HOY , причем рассматриваемая область превращается в плоско-параллельный неограниченный слой толщины c .

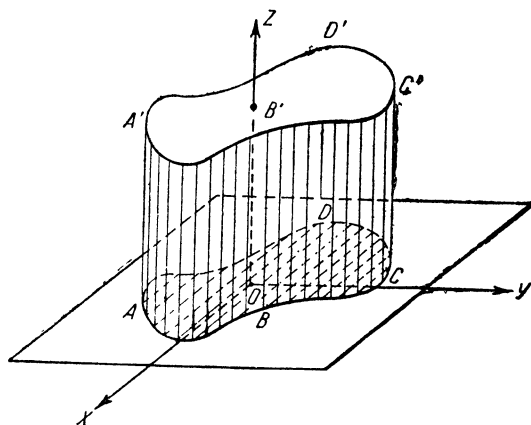


Рис. 15.

превращается в плоско-параллельный неограниченный слой толщины c .

Пусть на плоскостях $z=0$ и $z=c$ оснований области заданы для искомой функции u какие-либо граничные условия вида

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} + \beta_0 (u)_{z=0} &= \psi_1(x, y), \\ \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=c} + \beta (u)_{z=c} &= \psi_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (14,2)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha$ и β — постоянные, причем в каждой паре величин (α_0, β_0) и (α, β) по крайней мере одна не равна тождественно нулю и может быть, при желании, принята за единицу. Условия (14,2) являются очевидным обобщением ранее рассматривавшихся условий (11,10)—(11,11) или (11,12)—(11,13).

Далее, пусть на боковой поверхности цилиндра (призмы) должно выполняться условие вида

$$\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u = F(s, z), \quad (14,3)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — это нормальная к боковой поверхности производная искомой функции, а γ_1 и γ_2 — постоянные, или некоторые функции длины дуги s контура (s) , отсчитываемой от произвольно выбранной на нем начальной точки (одна из величин γ_1, γ_2 может, в частности, равняться нулю, если на поверхности задано значение самой функции или ее нормальной производной).

Тогда, пользуясь тем же приемом, как раньше, в § 11, т. е. умножая уравнение (14,1) на одну из функций $f_n(z)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} + \alpha_n^2 f_n = 0, \quad (n \geq 1) \quad (14,4)$$

и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 f'_n(0) + \beta_0 f_n(0) &= 0, \\ \alpha f'_n(c) + \beta f_n(c) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14,5)$$

и полагая

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_n(x, y) = \int_0^c u(x, y, z) f_n(z) dz, \\ \chi_n &= \chi_n(x, y) = \int_0^c \chi(x, y, z) f_n(z) dz, \end{aligned} \right\} \quad (14,6)$$

получаем из (14,1) уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + (k^2 - \alpha_n^2) u_n = -4\pi \chi_n(x, y) + \psi(x, y), \quad (14,7)$$

где $\psi(x, y)$ — некоторая известная функция указанных координат. Эта функция появляется также, как и член $-\alpha_n^2 u_n$, в результате интегрирования по частям левой части следующего соотношения:

$$\int_0^c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} f_n(z) dz = \left[f_n(c) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=c} - f'_n(c) (u)_{z=c} \right] - \left[f_n(0) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} - f'_n(0) (u)_{z=0} \right] - \alpha_n^2 u_n \quad (14,8)$$

причем входящие в каждую из квадратных скобок неизвестные в отдельности величины $(u)_{z=0}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}$ и т. д. исключаются, если использовать соотношения (14,5) и (14,2) [ср., например, аналогичные вычисления в (11,22), (11,49) и т. д.], и $\psi(x, y)$ оказывается выраженной только через известные функции.

К уравнению (14,7) должно быть добавлено еще граничное условие для $u_n(x, y)$, получающееся, если умножить (14,3) на $f_n(z) dz$ и проинтегрировать по z от нуля до $z=c$. Так как γ_1 и γ_2 , по условию, от z не зависят, то при этом получается

$$\gamma_1 \frac{\partial u_n}{\partial n} + \gamma_2 u_n = \int_0^c F(s, z) f_n(z) dz \equiv F_n(s). \quad (14,9)$$

Решение задачи сводится, таким образом, к определению функции $u_n(x, y)$, удовлетворяющей уже не трехмерному, а двумерному волновому уравнению (14,7) с известной правой частью, причем эта функция на контуре (s) должна удовлетворять граничному условию (14,9). Тем самым решение первоначальной трехмерной задачи свелось к решению новой, уже двумерной. Если мы эту новую задачу сможем решить и найдем, таким образом, все $u_n(x, y)$ при $n \geq 1$, то саму функцию $u(x, y, z)$ найдем по формулам типа (11,36)—(11,37) или (11,52), т. е.

$$u = u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n u_n(x, y) f_n(z), \quad \text{где } m_n = 1 / \int_0^c f_n^2(z) dz. \quad (14,10)$$

Если функции $f_n(z)$ — нормированные, то просто

$$m_n = 1. \quad (14,11)$$

14.2. Само собой разумеется, что решение уравнения (14,7) совсем не обязательно проводить в координатах (x, y) . Можно вместо них ввести любые другие, более подходящие для решаемой задачи, криволинейные координаты (q_1, q_2) , например, полярные, эллиптические на плоскости и т. д. При этом двумерный лапласиан,

$$\Delta u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2},$$

заменится своим выражением в этих координатах. Так, если ввести на плоскости (x, y) полярные координаты (r, θ) , то уравнение (14,7) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + (k^2 - \alpha_n^2) u_n = -4\pi \bar{\chi}_n(r, \theta) + \bar{\psi}(r, \theta), \quad (14,12)$$

где $\bar{\chi}_n(r, \theta)$ и $\bar{\psi}(r, \theta)$ — те же функции, как в (14,7), только выраженные через (r, θ) , а не через (x, y) .

В соответствии с этим и (14,10) запишется теперь так:

$$u = u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n u_n(r, \theta) f_n(z) \quad (14,13)$$

и т. д.

14.3. Рассмотрим несколько примеров на приложение только что изложенных правил.

В качестве первого примера рассмотрим вопрос о нахождении электростатического поля, возникающего внутри прямоугольного параллелепипеда с проводящими стенками, под действием заданного распределения объемных зарядов с плотностью $\rho(x, y, z)$, находящихся внутри него.

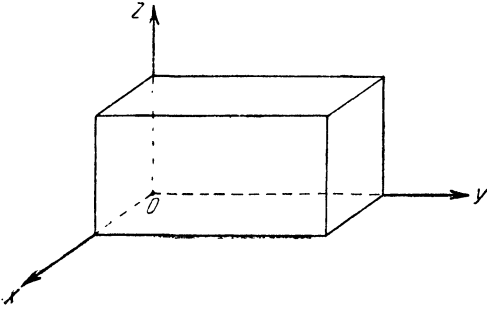


Рис. 16.

Принимаем одну из вершин параллелепипеда за начало системы координат X, Y, Z , причем оси направляем вдоль его ребер. Длины ребер по осям X, Y, Z пусть будут a, b, c (рис. 16) Решение задачи приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z), \quad (14,14)$$

при условии, что на гранях параллелепипеда φ принимает постоянное значение, которое можно положить равным нулю.

Граничные условия будут при этом:

$$(\varphi)_{x=0} = (\varphi)_{x=a} = 0; (\varphi)_{y=0} = (\varphi)_{y=b} = 0, \quad (14,15)$$

$$(\varphi)_{z=0} = (\varphi)_{z=c} = 0. \quad (14,16)$$

В соответствии с тем, что говорилось в п. 14. 1, выбираем за $f_n(z)$ функцию

$$f_n(z) = A_n \sin \frac{n\pi z}{c}, \quad (14,17)$$

удовлетворяющую уравнению,

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 f_n = 0 \quad (14,18)$$

и условиям

$$f_n(0) = f_n(c) = 0, \quad (14,19)$$

причем надо еще положить

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{c}}, \quad (14,20)$$

чтобы выполнялось условие нормировки (14,11).

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= \int_0^c u f_n(z) dz = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c u(x, y, z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz, \\ \rho_n &= \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \rho(x, y, z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz, \end{aligned} \right\} \quad (14,21)$$

получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \varphi_n = -4\pi\rho_n(x, y), \quad (14,22)$$

тогда как условия (14,15) дают:

$$(\varphi_n)_{x=0} = (\varphi_n)_{x=a} = 0; \quad (\varphi_n)_{y=0} = (\varphi_n)_{y=b} = 0. \quad (14,23)$$

Уравнение (14,22) совпадает с уравнением (13,6), если в этом последнем положить:

$$k = \frac{in\pi}{c}; \quad \frac{\rho_n^{(e)}}{c} = \rho_n(x, y); \quad A = \varphi_n, \quad (14,24)$$

тогда как граничные условия (14,23) совпадают при этом с граничными условиями (13,13) для уравнения (13,6). Мы можем, поэтому, прямо использовать, в данном случае, решение (13,16) — (13,21) уравнения (13,6), причем в (13,6) нужно, согласно (13,19), положить $N_m = 0$ и ввести туда значение M_m из (13,20), а α_m положить, согласно (13,15) и (14,24), равным:

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2} \pi. \quad (14,25)$$

Таким образом, получаем для величины

$$\varphi_m^{(n)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_n(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \quad (14,26)$$

соответствующей \bar{A}_m в (13,16):

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(n)} &= \frac{4\pi \operatorname{sh} \alpha_m y}{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m b} \int_0^b \rho_m^{(n)}(u) \operatorname{sh} \alpha_m (b-u) du - \\ &- \frac{4\pi}{\alpha_m} \int_0^y \rho_m^{(n)}(u) \operatorname{sh} \alpha_m (y-u) du, \end{aligned} \quad (14,27)$$

где

$$\rho_m^{(n)}(u) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho_n(x, u) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (14,28)$$

(13,21) дает теперь:

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^{(n)} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (14,29)$$

и далее согласно (14,10):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y) \sin \frac{n\pi z}{c} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^{(n)} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}. \end{aligned} \quad (14,30)$$

Этой формулой и дается общее решение поставленной задачи.

14.4. Если для конкретности предположить теперь, что внутри параллелепипеда имеется лишь точечный заряд e в точке ξ, η, ζ , то рассматривая его, как предельный случай заряда, равномерно распределенного по объему кубика с гранями $x = \xi, x = \xi + \delta, y = \eta, y = \eta + \delta, z = \zeta, z = \zeta + \delta$ с объемной плотностью $\rho = e/\delta^3$, причем $\delta \rightarrow 0$, получим последовательно:

$$\rho_n(x, y) = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \rho(x, y, z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz, \quad (14.31)$$

$$\rho_m^{(n)} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^c \rho(x, y, z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz, \quad (14.32)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^y \rho_m^{(n)}(u) \operatorname{sh} \alpha_m(y-u) du = 0 \quad \text{при } 0 < y < \eta, \quad (14.33)$$

тогда как при $y > \eta + \delta$ и при $\delta \rightarrow 0$ будет:

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^y \rho_m^{(n)}(u) \operatorname{sh} \alpha_m(y-u) du = \\ & = \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{c}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e}{\delta^3} \int_{\eta}^{\eta+\delta} \operatorname{sh} \alpha_m(y-u) du \int_{\xi}^{\xi+\delta} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_{\zeta}^{\zeta+\delta} \sin \frac{n\pi z}{c} dz = \\ & = \frac{2\sqrt{2}e}{a\sqrt{c}} \operatorname{sh} \alpha_m(y-\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\zeta}{c}, \quad (y > \eta). \end{aligned} \quad (14.34)$$

(14.27) дает теперь, например, при $y < \eta$:

$$\varphi_m^{(n)} = \frac{8\sqrt{2}\pi e \operatorname{sh} \alpha_m y}{a\sqrt{c} \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m b} \operatorname{sh} \alpha_m(b-\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\zeta}{c}, \quad (14.35)$$

а подставляя это в (14.30), найдем:

$$\varphi = \frac{16\pi e}{ac} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m(b-\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\zeta}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}}{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m b}, \quad (0 \leq y < \eta). \quad (13.36)$$

При $b \geq y > \eta$ получим сходным образом:

$$\varphi = \frac{16\pi e}{ac} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m(b-y)}{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m b} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\zeta}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}, \quad (b \geq y > \eta). \quad (14.37)$$

Найденное нами решение (14.36)—(14.37) дает при $e=1$ функцию Грина для рассматриваемой параллелепипедальной области. Мы получили это решение, пользуясь нашим общим методом, в виде двойных рядов. Можно дать иную трактовку вопроса, исходя из метода отражения. Мы здесь в это входить не будем, отсылая за всеми подробностями к книге Куранта — Гильберта „Методы математической физики“.¹

¹ Курант — Гильберт, т. I, стр. 357.

14.5. Так как в уравнение (14,22) и в граничные условия (14,23) координаты x и y входят вполне равноправно, то можно было бы, очевидно, получить совершенно аналогичным образом решение при обратном порядке проведения интегрирования по x и по y . При этом только обменялись бы местами величины (x, a, ξ) и (y, b, η) , именно, получилось бы, например, при $\xi < x \leq a$:

$$\varphi = \left. \begin{aligned} & \frac{16\pi e}{bc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \beta_m \xi \text{ sh } \beta_m (a-x)}{\beta_m \text{ sh } \beta_m a} \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi\xi}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}, \\ & \text{где} \end{aligned} \right\} (14,38)$$

$$\beta_m = \sqrt{\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2} \cdot \pi,$$

и такое же выражение, но с переставленными местами величинами x и ξ , при $0 \leq x < \xi$.

Аналогичным образом можно написать и другие формулы такого же типа, с произвольно переставленными местами тройками величин (x, a, ξ) , (y, b, η) и (z, c, ζ) .

14.6. Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи полученных формул. Пусть $a \rightarrow \infty$, так что параллелепипед превращается в полу-бесконечную трубу прямоугольного сечения. Тогда (14,38) дает:

$$\varphi = \frac{8\pi e}{bc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m(x-\xi)} - e^{-\beta_m(x+\xi)}}{\beta_m} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi\xi}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}, \quad (x > \xi), \quad (14,39)$$

тогда как в (14,37) суммирование по m превращается в интегрирование, подобно тому, как это имело место в случае сходного предельного перехода от формулы (13,28) к (13,29). При этом получается:

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \eta \text{ sh } \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} (b-y)}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \text{ sh } \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi\xi}{a} = \\ & = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \eta \text{ sh } \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} (b-y)}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \text{ sh } \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} b} \sin xu \sin \xi u du. \quad (14,40) \end{aligned}$$

Формула (14,37) переходит поэтому в такую:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{8e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} & \frac{\text{sh } \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \eta \text{ sh } \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} (b-y)}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \text{ sh } \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} b} \sin \frac{n\pi\xi}{c} \sin \frac{n\pi z}{c} \times \\ & \times [\cos(x-\xi)u - \cos(x+\xi)u] du. \quad (14,41) \end{aligned}$$

(14,39) и (14,41) дают две различные формы решения для полубесконечной трубы прямоугольного сечения.

14.7. Чтобы получить отсюда решение для бесконечной трубы, нужно считать, что заряд e удаляется на бесконечность от конца трубы, т. е. от плоскости $x=0$. Иными словами, нужно в (14,39) и в (14,41) стремиться ξ к бесконечности, рассматривая в то же время поле на конечном расстоянии от заряда.

Принимая, поэтому, заряд за начало новых координат x' , y' , z' , параллельных старым, причем

$$x = x' + \xi; \quad y = y' + \eta; \quad z = z' + \zeta, \quad (14,42)$$

вводим эти значения в (14,39) и (14,41) и переходим затем к пределу $\xi = \infty$, считая в то же время, что x' , y' , z' сохраняют конечные значения. (14,39) дает при этом:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{4\pi e}{bc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} x'}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2}} \left[\cos \frac{m\pi y'}{b} - \right. \\ \left. - \cos \frac{m\pi}{b} (y' + 2\eta) \right] \sin \frac{n\pi z'}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}, \quad (14,43) \end{aligned}$$

тогда как формула (14,41) переходит в такую:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{4e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \eta \operatorname{sh} \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} (b - y' - \eta)}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \operatorname{sh} \sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} b} \left[\cos \frac{n\pi z'}{c} - \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi}{c} (z' + 2\zeta) \right] \cos x' u du. \quad (14,44) \end{aligned}$$

Второй интеграл в (14,41) пропадает из-за бесконечно-часто переменного при $\xi \rightarrow \infty$ множителя $\cos(x' + 2\xi)$.

14.8. Полагая теперь еще $b \rightarrow \infty$, найдем из (14,44):

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{2e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} y'} - e^{-\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} (y' + 2\eta)}}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2}} \left[\cos \frac{n\pi z'}{c} - \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi}{c} (z' + 2\zeta) \right] \cos x' u du. \quad (14,45) \end{aligned}$$

Отсюда при $\eta = \infty$ получим решение для случая точечного заряда, находящегося между двумя параллельными проводящими плоскостями, именно:

$$\varphi = \frac{2e}{c} \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} y'}}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2}} \left[\cos \frac{n\pi z'}{c} - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \frac{n\pi}{c} (z' + 2\zeta) \right] \right\} \cos x' u du. \quad (14,46)$$

14.9. Удаляя, далее, на бесконечность одну из пластин, причем следует положить в (14,46) $c = \infty$, находим решение для точечного заряда e в присутствии одной проводящей плоскости:

$$\varphi = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} \cos x' u du \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 + v^2} y'}}{\sqrt{u^2 + v^2}} [\cos z' v - \cos (z' + 2\zeta) v] dv, \quad (14,47)$$

причем опять сумма превратилась в интеграл.

Если теперь удалить на бесконечность еще и последнюю пластину, чему соответствует $\zeta = \infty$ в (14,47), то получим решение для потенциала точечного заряда в безграничном пространстве в виде:

$$\varphi = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} \cos z' v dv \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 + v^2} y'}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cos x' u du. \quad (14,48)$$

Этот потенциал должен, однако, равняться e/R , где

$$R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Таким образом, приходим к формуле

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 + v^2} y'}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cos x' u \cos z' v du dv = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{1}{R}. \quad (14,49)$$

Эту формулу можно получить и непосредственно, пользуясь формулой (Б) сноски на стр. 99, которая показывает, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 + v^2} y'}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cos x' u du = K_0(\sqrt{x'^2 + y'^2} v), \quad (14,50)$$

Формула (14,48) превращается при этом в такую:

$$\varphi = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\sqrt{x'^2 + y'^2} v) \cos z' v dv, \quad (14,51)$$

Из легко находимого значения интеграла:¹

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(\rho a) a^{\nu} \cos z a d a = 2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \rho^{\nu} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{(\rho^2 + z^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}, \quad (\rho > 0), \quad (14,52)$$

где K_{ν} — функция Макдональда порядка ν , а $\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ — функция гамма от указанного аргумента, получаем при $\nu = 0$, $\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $z = z'$:

$$\int_0^{\infty} K_0(\sqrt{x'^2 + y'^2} a) \cos z' a d a = \frac{\pi}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}, \quad (14,53)$$

причем учтено, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Подставляя это в (14,51), приходим к окончательному результату:

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

что и требовалось показать.

Пользуясь формулой (14,49), можем переписать (14,47) таким образом:

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' + 2\eta)^2}},$$

что соответствует закону „отражения“ заряда e в плоскости.

14.10. Формула (14,45) переходит при учете (14,50) в такую:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{4e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_0\left(\frac{n\pi}{c} \sqrt{x'^2 + y'^2}\right) - \right. \\ \left. - K_0\left(\frac{n\pi}{c} \sqrt{x'^2 + (y' + 2\eta)^2}\right) \right] \sin \frac{n\pi z}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}. \end{aligned} \quad (14,54)$$

Полагая здесь $\eta = \infty$ и $\sqrt{x'^2 + y'^2} = r$, получим:

$$\varphi = \frac{4e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right) \sin \frac{n\pi z}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (14,55)$$

Эта формула дает разложение потенциала точечного заряда, находящегося между двумя проводящими параллельными бесконечными пластинами, в ряд по функциям Макдональда, причем ряд этот сходится весьма быстро для всех тех точек, расстояние r которых от проходящей

¹ Его можно, например, получить, разлагая в (14,52) $\cos za$ в ряд по степеням (za) и выполняя почленное интегрирование с помощью известной формулы $\int_0^{\infty} K_{\nu}(t) t^{\mu-1} dt = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)$. См. п. 58.2, форм. (58,11), стр. 393.

через заряд оси симметрии поля будет не мало по сравнению с расстоянием c между пластинами.¹

14.11. В качестве второго примера рассмотрим задачу о нахождении электрического поля внутри цилиндрической коробки (рис. 17), оба основания которой заземлены, а боковая поверхность находится при потенциале $\varphi = V$ по отношению к ним.²

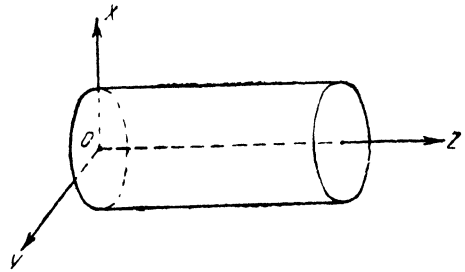


Рис. 17.

Высоту цилиндра обозначим через c , радиус основания — через a . Вводим цилиндрические координаты r, θ, z с осью Z по оси цилиндра, причем, по симметрии, $\varphi = \varphi(r, z)$.

Внутри цилиндра должно удовлетворяться уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (14,56)$$

к которому должны быть еще присоединены граничные условия:

$$(\varphi)_{z=0} = (\varphi)_{z=c} = 0 \quad (14,57)$$

и

$$(\varphi)_{r=a} = \varphi(a, z) = V. \quad (14,58)$$

Для решения уравнения (14,56) применяем изложенный в п. 14.1 метод, именно, умножаем (14,65) на $f_n(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{n\pi z}{c}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и на dz , и интегрируем в пределах от нуля до c .

Пользуясь обозначением (14,21), получим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_n}{dr} \right) - \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \varphi_n = 0, \quad (n \geq 1), \quad (14,59)$$

¹ Это ясно видно из асимптотического выражения для $K_0(t)$ при больших t , которое имеет вид [см. Д₂(61) или Кузьмин, Б. Ф., стр. 77, (31)]:

$$K_0(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t},$$

причем погрешность этой формулы уже при значениях t порядка нескольких единиц не превышает немногих процентов и быстро убывает с возрастанием t .

² Считаю при этом, что основания отделены от боковой поверхности бесконечно-узкими зазорами. Поля такого типа встречаются в электроннооптических приборах.

тогда как (14,58) дает:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_n)_{r=a} &= \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \varphi(a, z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz = \\
 &= \begin{cases} \frac{2\sqrt{2c}}{(2s+1)\pi} V & \text{при } n=2s+1, (s \geq 0), \\ 0 & \text{при } n=2s \geq 2. \end{cases} \quad (14,60)
 \end{aligned}$$

Общий интеграл уравнения (14,59) имеет вид:

$$\varphi_n = \varphi_n(r) = A_n I_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right) + B_n K_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right), \quad (14,61)$$

где $I_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right)$ — бesselева функция нулевого порядка от чисто мнимого аргумента,¹ а $K_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right)$ — уже встречавшаяся выше функция Макдональда.

Для определения постоянных A_n и B_n имеется пока только одно условие (14,60). Вторым условием, получающимся из очевидного, с физической точки зрения, соображения, что потенциал φ не может обращаться в бесконечность на оси рассматриваемой системы, т. е. при $r=0$, будет служить требование, что должна, в силу этого, оставаться ограниченной также величина

$$\varphi_n(0) = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c (\varphi)_{r=0} \sin \frac{n\pi z}{c} dz. \quad (14,62)$$

Но в то время как $I_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right)$ стремится при $r \rightarrow 0$ к единице, функция $K_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right)$ стремится при этом к бесконечности. Требование конечности величины $\varphi_n(0)$ приводит, стало быть, к условию:

$$B_n = 0, \quad (14,63)$$

так что формула (14,61) переходит в такую:

$$\varphi_n = A_n I_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right), \quad (n \geq 1). \quad (14,64)$$

Пользуясь граничными условиями (14,60) и замечая, что при $r \geq 0$ $I_0\left(\frac{n\pi r}{c}\right) \geq 1$, приходим к окончательному результату:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_{2s+1} &= \frac{2\sqrt{2c} V}{(2s+1)\pi} \frac{I_0\left[\frac{(2s+1)\pi r}{c}\right]}{I_0\left[\frac{(2s+1)\pi a}{c}\right]}, \quad (s \geq 0), \\
 \varphi_{2s} &= 0, \quad (s \geq 1).
 \end{aligned} \right\} \quad (14,65)$$

¹ См.: Дополнение II, § 4, или Кузьмин, Б. Ф., § 4.

(14,10) дает теперь:

$$\varphi(r, z) = \frac{4V}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{I_0 \left[\frac{(2s+1)\pi r}{c} \right]}{(2s+1) I_0 \left[\frac{(2s+1)\pi a}{c} \right]} \sin \frac{(2s+1)\pi z}{c}, \quad (14,66)$$

и это и есть искомое решение задачи.

14.12. Если высота цилиндра c стремится к бесконечности, так что он превращается в закрытую с одного конца полубесконечную трубу, то сумма (14,66) переходит в интеграл. Именно, найдем, полагая $\frac{(2s+1)\pi}{c} = u_s$, $u_{s+1} - u_s = \Delta u_s = \frac{2\pi}{c}$:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{I_0 \left[\frac{(2s+1)\pi r}{c} \right]}{(2s+1) I_0 \left[\frac{(2s+1)\pi a}{c} \right]} \sin \frac{(2s+1)\pi z}{c} &= \\ &= \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{I_0(u_s r) \sin u_s z}{u_s I_0(u_s a)} \Delta u_s = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ur) \sin uz}{u I_0(ua)} du, \end{aligned} \quad (14,67)$$

так что

$$\varphi(r, z) = \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin uz}{u} \frac{I_0(ur)}{I_0(ua)} du. \quad (14,68)$$

Для электронно-оптических приложений главный интерес представляют потенциал и поле на оси системы, т. е. при $r=0$. (14,68) дает при этом:

$$(\varphi)_{r=0} = \varphi(0, z) = \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin uz}{u I_0(ua)} du = \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{z}{a} \right) \xi d\xi}{\xi I_0(\xi)}, \quad (14,69)$$

и

$$\begin{aligned} (E_z)_{r=0} &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{r=0} = E_z(0, z) = - \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos uz du}{I_0(ua)} = \\ &= - \frac{2V}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{z}{a} \right) \xi d\xi}{I_0(\xi)}. \end{aligned} \quad (14,70)$$

В частности, для электрического поля в центре торца цилиндра, т. е. при $z=0$, находим значение:

$$E_z(0,0) = - \frac{2V}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{dv}{I_0(v)}. \quad (14,71)$$

Входящий сюда интеграл может быть легко найден численным интегрированием, с помощью таблицы значений $I_0(v)$,¹ и равен приближенно 2.08. Окончательно получается поэтому:

$$-E_z(0,0) \cong \frac{4,16V}{\pi a} \cong \frac{4}{3} \frac{V}{a} = \frac{8}{3} \frac{V}{b}, \quad (14,72)$$

где $b=2a$ — это диаметр цилиндра.

Этот результат интересно сравнить с формулой (7,39) для соответствующего плоского случая (см. рис. 5), где разность потенциалов бесконечных параллельных плоских стенок и „перемычки“ b тоже равна V (только с обратным знаком, что, очевидно, не играет роли). Сравнение показывает, что в плоском случае это поле, как и следовало ожидать, меньше чем в цилиндрическом, причем первое составляет примерно три четверти второго.

14.13. Интегралы (14,69)—(14,70) дают удобные для расчета выражения для $\varphi(0, z)$ и $E_z(0, z)$ лишь при относительно небольших значениях отношения z/a (до нескольких единиц). При $z/a \gg 1$ они становятся неудобными и должны быть заменены другими, которые можно из них вывести чисто аналитическим путем. Мы, однако, получим их впоследствии другим более естественным способом (см. п. 17.9), где заодно укажем и пути для перехода от одной формы решения к другой.

14.14. Совершенно аналогичным образом можно решить и общую электростатическую задачу для той же цилиндрической коробки, в случае, когда внутри нее находится любое аксиально-симметричное распределение зарядов, с объемной плотностью $\rho = \rho(r, z)$, а граничные условия (14,57)—(14,58) заменены такими:

$$(\varphi)_{z=0} = f_1(r); \quad \varphi_{z=c} = f_2(r); \quad (14,73)$$

$$(\varphi)_{r=a} = \psi(z). \quad (14,74)$$

При этом только в уравнении (14,59) появится справа, во-первых, член $-4\pi\rho_n(r)$, где

$$\rho_n(r) = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \rho(r, z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz, \quad (14,75)$$

а, во-вторых, как обычно, входящие при интегрировании по частям члены:

$$-\sqrt{\frac{2}{c}} \frac{n\pi}{c} [f_1(r) + (-1)^{n-1} f_2(r)].$$

Уравнение (14,59) заменится, поэтому, следующим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_n}{dr} \right) - \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \varphi_n = -4\pi\rho_n(r) - \sqrt{\frac{2}{c}} \frac{n\pi}{c} [f_1(r) + (-1)^{n-1} f_2(r)], \quad (14,76)$$

¹ См., например, Кузьмин, Б. Ф.

причем граничные условия будут:

$$\left. \begin{aligned} 1) (\varphi_n)_{r-a} &= \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \psi(z) \sin \frac{n\pi z}{c} dz; \\ 2) \text{Условие конечности } \varphi_n &\text{ при } r=0. \end{aligned} \right\} \quad (14, 77)$$

Находимое при этом по формуле

$$\varphi(r, z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r) \sin \frac{n\pi z}{c} \quad (14, 78)$$

решение будет в этом случае представлять искомую функцию φ везде внутри цилиндра, но, вообще говоря, не на его основаниях (торцах), т. е. при $0 < z < c$, но не при $z=0$ и $z=c$. Только в том случае, когда $(\varphi)_{z=0} = (\varphi)_{z=c} = 0$, решение будет верно и на самих границах $z=0$ и $z=c$. Впоследствии мы еще вернемся к решению этой же задачи другим способом и сможем получить решение в иной форме, причем оно будет годиться также и на самих границах области при произвольном задании граничных значений φ при $z=0$ и $z=c$.¹

14.15. Проведем вычисления до конца для случая, когда цилиндр заземлен, так что на поверхности его потенциал можно принять равным нулю, и когда внутри его, на его оси, находится точечный заряд e . Этот точечный заряд будем рассматривать, как предельный случай бесконечно-малого цилиндрика радиуса δ и длины h , коаксиального с основным цилиндром и заполненного равномерно распределенным объемным зарядом с плотностью

$$\rho_0 = \frac{e}{\pi \delta^2 h}. \quad (14, 79)$$

Граничными плоскостями этого цилиндрика пусть будут плоскости $z=l$ и $z=l+h$, где l — расстояние точечного заряда e от торца цилиндра, принимаемого за плоскость $z=0$.

Уравнение (14, 76) превращается в этом случае в такое:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_n}{dr} \right) - \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \varphi_n = -4\pi \rho_n(r), \quad (14, 80)$$

где $\rho_n(r)$ определяется из (14, 75) и (14, 79).

Общий интеграл уравнения (14, 80), получаемый вариированием произвольной постоянной в интеграле (14, 61) соответствующего однородного уравнения (14, 59), имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n(r) &= M_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) + N_n K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) + \\ &+ 4\pi \int_0^r \xi \left[I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) - I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) \right] \times \rho_n(\xi) d\xi, \quad (14, 81) \end{aligned}$$

¹ То обстоятельство, что формула (14, 78), вообще говоря, не представляет решения на самих границах $z=0$ и $z=c$, как мы уже видели выше, никакой принципиальной роли не играет, поскольку в любой внутренней точке области формула (14, 78)

причем использовано соотношение ¹

$$I_0'(x) K_0(x) - I_0(x) K_0'(x) = \frac{1}{x}, \quad (14, 82)$$

а M_n и N_n — новые постоянные.

Так как при $r=0$ интеграл в формуле (14, 81) обращается в нуль, ² то второе условие (14, 77) показывает, что $N_n=0$, после чего, определяя M_n из первого условия (14, 77), которое в данном случае приводится к виду $(\varphi_n)_{r=a} = 0$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= M_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) + 4\pi \int_0^r \xi \left[I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) \right] \rho_n(\xi) d\xi, \\ M_n &= - \frac{4\pi}{I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right)} \int_0^a \xi \left[I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) K_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right) K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) \right] \rho_n(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (14, 83)$$

где

Формула (14, 83) пока еще верна для любого аксиально-симметричного распределения зарядов. Переходя к нашему конкретному случаю, т. е. рассматривая случай заряженного цилиндрика радиуса δ с плотностью $\rho_0 = e/\pi\delta^2 h$ объемного заряда, и замечая, что при этом ³

$$\rho_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \geq r > \delta, \\ \sqrt{\frac{2}{c}} \rho_0 \int_l^{l+h} \sin \frac{n\pi z}{c} dz \equiv \rho_n = \text{const} & \text{при } 0 \leq r \leq \delta, \end{cases} \quad (14, 84)$$

видим, что M_n может быть записано в такой форме:

$$M_n = - \frac{4\pi\rho_n K_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right)}{I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right)} \int_0^{\delta} \xi I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) d\xi + 4\pi\rho_n \int_0^{\delta} \xi K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) d\xi, \quad (14, 85)$$

определяет функцию $\varphi(r, z)$, а на самих границах $z=0$ и $z=c$ эта функция имеет известные (заданные) значения. При практическом же использовании полученного решения следует сперва улучшить сходимость ряда (14, 78), пользуясь данной в п. 9. 4 методикой.

¹ См.: (Д₂ 150) или Watson, A treatise on the theory of Bessel functions [в дальнейшем: Watson, Bessel functions], Cambridge, 1922, стр. 80 (20). Заметим, что интеграл в (14, 81) сходится, так как хотя на нижнем пределе $\left[K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) \right]_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \infty$, но стремление ее к бесконечности имеет логарифмический характер, а потому $\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\xi K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) \right] = 0$.

² Ибо произведение $K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) \int_0^r \xi I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) \varphi_n(\xi) d\xi$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$ по тем же соображениям, по которым интеграл в формуле (14, 81) имеет смысл (см. предыдущее примечание).

³ Ср. (14, 75), где $\rho(r, z) = 0$ при $r > \delta$.

тогда как выражение (14,83) для φ_n при $r > \delta$ переходит теперь в такое:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= M_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) + 4\pi \rho_n \left\{ K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) \int_0^\delta \xi I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) d\xi - I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) \int_0^\delta \xi K_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) d\xi \right\} = \\ &= \frac{4\pi \rho_n \left[K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right) - K_0' \left(\frac{n\pi a}{c} \right) I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) \right]}{I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right)} \int_0^\delta \xi I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (14, 86)$$

Так как при $h \rightarrow 0$ (14, 84) дает:

$$\rho_n = \sqrt{\frac{2}{c}} \frac{e}{\pi \delta^2} \sin \frac{n\pi l}{c}, \quad (14, 87)$$

то переходя в (14,86) к пределу $\delta = 0$, получим для точечного заряда:

$$\varphi_n = 2e \sqrt{\frac{2}{c}} \frac{\left[K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right) - I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) K_0' \left(\frac{n\pi a}{c} \right) \right]}{I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right)} \sin \frac{n\pi l}{c}, \quad (14, 88)$$

причем использовано то, что при $x \rightarrow 0$ $I_0(x) \rightarrow 1$.¹ Подстановка в (14, 78) дает:

$$\varphi(r, z) = \frac{4e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right) - K_0' \left(\frac{n\pi a}{c} \right) I_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) \right]}{I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right)} \sin \frac{n\pi l}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (14, 89)$$

Эта формула и дает решение задачи.

14.16. Если положить в (14, 89) $a = \infty$, что соответствует удалению боковой поверхности цилиндра на бесконечность, то получим случай точечного заряда e между двумя бесконечными параллельными проводящими плоскостями. При этом $I_0 \left(\frac{n\pi a}{c} \right) \rightarrow \infty$, $K_0' \left(\frac{n\pi a}{c} \right) \rightarrow 0$, и формула (14,89) переходит в такую:

$$\varphi(r, z) = \frac{4e}{c} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{n\pi r}{c} \right) \sin \frac{n\pi l}{c} \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (14, 90)$$

Это в точности совпадает с ранее найденной совсем другим путем формулой (14, 55) для того же случая (так как l и z обозначают одно и то же расстояние). Заметим кстати, что если бы мы не знали зна-

¹ Можно воспользоваться и точным значением интеграла, входящего в (14, 86), именно формулой:

$$\int_0^\delta \xi I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) d\xi = \frac{c\delta}{n\pi} I_0' \left(\frac{n\pi \delta}{c} \right) = \frac{c\delta}{n\pi} I_1 \left(\frac{n\pi \delta}{c} \right),$$

вытекающей из дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{dI_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right)}{d\xi} \right] - \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \xi I_0 \left(\frac{n\pi \xi}{c} \right) = 0$$

и из того, что $I_0'(x) = I_1(x)$.

чения интеграла (14, 50), то почленное сравнение коэффициентов при отдельных произведениях

$$\sin \frac{\pi l}{c} \sin \frac{\pi z}{c}$$

в формулах (14, 46)¹ и (14, 90) дало бы возможность вывести для него формулу (14, 50).

14.17. Если в (14, 89) стремиться к бесконечности не a , а c , то сумма по n переходит в интеграл и получается:

$$\varphi(r, z) = \frac{4e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(ar) I_0(ua) - K_0(ua) I_0(ar)}{I_0(ua)} \sin ul \sin uz \, du, \quad (14, 91)$$

или иначе:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) &= \frac{2e}{\pi} \left[\int_0^{\infty} K_0(ru) \cos(l-z)u \, du - \int_0^{\infty} K_0(ru) \cos(l+z)u \, du \right] - \\ &\quad - \frac{4e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(ua) I_0(ar)}{I_0(ua)} \sin ul \sin uz \, dz = \\ &= \frac{e}{\sqrt{r^2 + (l-z)^2}} - \frac{e}{\sqrt{r^2 + (l+z)^2}} - \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(ua) I_0(ar)}{I_0(ua)} [\cos(l-z)u - \\ &\quad - \cos(l+z)u] \, du, \end{aligned} \quad (14, 92)$$

причем использована формула (14, 53).

Таково значение потенциала в полубесконечной трубе, на оси которой находится, на расстоянии l от ее конца, точечный заряд e .

Если теперь отсчитывать координату вдоль оси трубы от местоположения заряда, т. е. если ввести вместо z координату z' соотношением

$$z' = z - l, \quad (14, 93)$$

внести это в (14, 92) и затем перейти к пределу $l = \infty$, то получится решение для случая заряда, находящегося внутри уходящей обоими концами на бесконечность проводящей трубы. При этом найдем, считая, разумеется, что r и z' сохраняют конечные значения:

$$\varphi(r, z) = \frac{e}{\sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(ua) I_0(ar)}{I_0(ua)} \cos uz' \, du. \quad (14, 94)$$

Первый член здесь дает потенциал самого точечного заряда, а второй выражает влияние проводящих стенок трубы.

14.18. Если здесь еще и a стремиться к бесконечности, то интеграл обращается в нуль, и в (14, 94) остается лишь первый член, который, как и должно быть, дает правильное значение потенциала точечного заряда e , находящегося в пустоте в отсутствии каких-либо проводников, причем потенциал на бесконечности считается равным нулю.

¹ Выражение в квадратной скобке в формуле (14, 46) как раз равно $2 \sin \frac{\pi l}{c} \sin \frac{\pi z}{c}$.

Пример 3

14.19. В качестве третьего примера рассмотрим задачу о распределении стационарного тока внутри однородного проводящего цилиндра (рис. 18), в который ток вводится через круглый электрод AB , наложенный на один из его торцов, а отводится через кольцевой электрод CD , лежащий на его боковой поверхности.¹

Начало координат располагаем в центре нижнего торца цилиндра, ось Z направляем вверх (рис. 18). Вводим обозначения:

R —внешний радиус цилиндра;

h —высота цилиндра;

ρ —радиус электрода AB (центр электрода считаем лежащим на оси Z).

a —расстояние нижнего края кольца CD от плоскости $z=0$;

δ —ширина кольцевого электрода.

Распределение втекающего и вытекающего тока по поверхности электродов будем считать заданным, притом аксиально-симметричным.

Задача эта приводится к решению уравнения Лапласа для потенциала φ электрического поля, которое в данном случае может быть записано так:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (14, 95)$$

причем должны выполняться граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} &= 0; & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h} &= f(r); \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} &= \psi(z); \end{aligned} \right\} \quad (14, 96)$$

где $f(r)$ и $\psi(z)$ —заданные функции, из которых первая равна нулю при $r > \rho$, а вторая отлична от нуля лишь при $a \leq z \leq a + \delta$.

Условие равенства втекающего и вытекающего токов (условие стационарности режима, оно же условие разрешимости рассматриваемой задачи Неймана) требует, чтобы было соблюдено соотношение

$$\int_0^R 2\pi r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h} dr + 2\pi R \int_0^h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} dz = 0,$$

$$\int_0^{\rho} r f(r) dr + R \int_a^{a+\delta} \psi(z) dz = 0. \quad (14, 97)$$

¹ Другой способ решения этой задачи дается ниже, в п. 17.5.

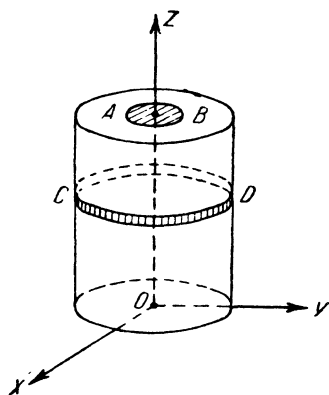


Рис. 18.

Умножая (14, 95) на $\frac{2}{h} \cos \frac{k\pi z}{h} dz$, интегрируя в пределах $(0, h)$ и полагая

$$\varphi_k = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi \cos \frac{k\pi z}{h} dz, \quad (14, 98)$$

получим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_k}{dr} \right) - \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 \varphi_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{h} f(r), \quad (14, 99)$$

причем (14, 96) дает еще условие:

$$\left(\frac{d\varphi_k}{dr} \right)_{r=R} = \frac{2}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} \cos \frac{k\pi z}{h} dz = \frac{2}{h} \int_a^{a+\delta} \psi(z) \cos \frac{k\pi z}{h} dz. \quad (14, 100)$$

Интеграл уравнения (14, 99), удовлетворяющий условию (14, 100) и остающийся конечным на оси цилиндра, легко находится и равен:

$$\varphi_0(r) = -\frac{2}{h} \int_0^r \frac{du}{u} \int_0^u \xi f(\xi) d\xi + \text{const при } k=0;$$

$$\varphi_k(r) = \frac{2}{h} \left\{ (-1)^k K_0 \left(\frac{k\pi r}{h} \right) \int_0^r \xi f(\xi) I_0 \left(\frac{k\pi \xi}{h} \right) d\xi + \right.$$

$$\left. + I_0 \left(\frac{k\pi r}{h} \right) \left[(-1)^k \int_r^R \xi f(\xi) K_0 \left(\frac{k\pi \xi}{h} \right) d\xi + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{h}{k\pi} \int_a^{a+\delta} \psi(z) \cos \frac{k\pi z}{h} dz + (-1)^{k+1} K_0' \left(\frac{k\pi R}{h} \right) \int_0^R \xi f(\xi) I_0 \left(\frac{k\pi \xi}{h} \right) d\xi \right] \Bigg\} \text{ при } k > 0, \quad (14, 101)$$

причем первый интеграл в прямой скобке пропадает при $r > R$.

Решение представляется рядом:

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \cos \frac{k\pi z}{h}, \quad (14, 102)$$

члены которого убывают как $1/k^2$, и сходимость которого может быть еще улучшена указанным выше общим методом.

Глава VII

ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 15. Принципы метода и доказательство основной теоремы

15.1. Данные в главах II—VI методы интегрирования уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца для прямоугольных или призматических областей были существенным образом основаны на том, что соответствующие однородные уравнения, т. е. уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + k^2 \bar{u} = 0$$

допускали получающиеся разделением переменных частные решения вида

$$u_m = f_m(x) \sin(my + \alpha_m); \quad \bar{u}_m = F_m(x, y) \sin(mz + \alpha_m),$$

и что решения эти можно было, при надлежащем выборе постоянных m и α_m , подчинить на противоположащих сторонах $y = y_1$, $y = y_2$ прямоугольника или, соответственно, на противоположащих гранях $z = z_1$, $z = z_2$ призмы или цилиндра, граничным условиям такого же типа, как первичные граничные условия для самих искомым функций u или \bar{u} , но уже однородным. Покажем теперь, что эти методы можно обобщить таким образом, чтобы сделать их применимыми для решения соответствующих граничных задач для общего класса уравнений вида

$$D(s_1, s_2, \dots, s_m)u \equiv D[u] = f(s_1, s_2, \dots, s_m), \quad (15, 1)$$

где $f(s_1, s_2, \dots, s_m)$ — какая-либо заданная функция от s_1, s_2, \dots, s_m , а D — некоторый линейный дифференциальный оператор от указанных переменных,¹ притом такой, что однородное уравнение — $D[u] = 0$ — допускает частные решения вида

$$u = \varphi(s_k) \chi(s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_m),$$

где функция φ зависит только от s_k , а χ — только от остальных s_i .²

Начнем с доказательства следующей основной теоремы:

Теорема

Пусть функция u от переменных s_1, s_2, \dots, s_m удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению вида (15, 1), т. е.

$$D[u] \equiv D(s_1, s_2, \dots, s_m)u = f(s_1, s_2, \dots, s_m),$$

¹ Т. е. $D[u] = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial s_i \partial s_k} + \sum_{i=1}^{i=m} b_i \frac{\partial u}{\partial s_i} + cu$, где a_{ik} , b_i и c — некоторые функции от переменных s_i .

² Мы будем кратко говорить в подобном случае, что уравнение (15, 1) допускает отделение переменной s_i .

причем соответствующее однородное уравнение

$$D[u] = D(s_1, s_2, \dots, s_m)u = 0 \quad (15, 2)$$

допускает частное решение вида

$$u = Q(s_1)F(s_2, s_3, \dots, s_m), \quad (15, 3)$$

где Q зависит только от s_1 , тогда как F от s_1 не зависит.

Пусть далее при подстановке (15, 3) в (15, 2) и по разделении на произведение QF получается результат вида

$$\frac{D_1(s_2, s_3, \dots, s_m)F}{F} + \frac{1}{r_1(s_1)Q} \left\{ \frac{d}{ds_1} \left[p(s_1) \frac{dQ}{ds_1} \right] + q_1(s_1)Q \right\} = 0, \quad (15, 4)$$

где оператор D_1 уже не содержит s_1 , а p_1 , q_1 и r_1 — функции только от s_1 , так что должно быть

$$D_1(s_2, s_3, \dots, s_m)F = \lambda F, \quad (15, 5)$$

$$\frac{d}{ds_1} \left[p_1(s_1) \frac{dQ}{ds_1} \right] + [q_1(s_1) + \lambda r_1(s_1)]Q = 0, \quad (15, 6)$$

где λ — некоторая постоянная.

Тогда, давая этой постоянной какое-либо определенное значение $\lambda = \lambda_k$ и обозначая через F_k и Q_k соответствующие этому значению λ решения уравнений (15, 5) — (15, 6), найдем для величины¹

$$u_k = \int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) u Q_k(s_1) ds_1, \quad (15, 7)$$

где a_1 и b_1 — две какие-нибудь постоянные, дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} D_1(s_2, s_3, \dots, s_m)u_k - \lambda_k u_k = & -p_1(s_1) \frac{\partial u}{\partial s_1} Q_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1} + \\ & + p_1(s_1) Q_k'(s_1) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} r_1 f Q_k ds_1. \end{aligned} \quad (15, 8)$$

Доказательство. Так как уравнение (15, 4) получается из уравнения (15, 2) в результате деления этого последнего на произведение QF , то умножая (15, 4) на $r_1(s_1)FQ = r_1(s_1)u$, найдем, что

$$\begin{aligned} r_1(s_1)D(s_1, s_2, \dots, s_m)u = & r_1(s_1)D_1(s_2, \dots, s_m)u + \\ & + \frac{\partial}{\partial s_1} \left(p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} \right) + q_1 u = r_1 f, \end{aligned} \quad (15, 9)$$

откуда видно, что для того, чтобы разделение переменных (15, 4) могло иметь место, оператор D должен иметь вид, определяемый соотношением

$$\begin{aligned} r_1(s_1)D(s_1, s_2, \dots, s_m) = & r_1(s_1)D_1(s_2, \dots, s_m) + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial s_1} \left[p_1(s_1) \frac{\partial}{\partial s_1} \right] + q_1(s_1) \right\}. \end{aligned} \quad (15, 10)$$

¹ Ее можно назвать преобразованной функцией или коэффициентом Фурье.

Умножая (15, 9) на $Q_k ds_1$ и интегрируя по s_1 от $s_1 = a_1$ до $s_1 = b_1$, получаем:

$$\begin{aligned} D_1 \left[\int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) Q_k(s_1) u ds_1 \right] + \int_{a_1}^{b_1} Q_k \frac{\partial}{\partial s_1} \left[p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} \right] ds_1 + \int_{a_1}^{b_1} q_1 Q_k u ds_1 = \\ = \int_{a_1}^{b_1} r_1 Q_k f ds_1, \end{aligned} \quad (15, 11)$$

причем в первом члене интегрирование производится под знаком D_1 , так как оператор D_1 не содержит s_1 . Второй член преобразуем интегрированием по частям, именно:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} Q_k \frac{\partial}{\partial s_1} \left(p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} \right) ds_1 &= p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} Q_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_{a_1}^{b_1} p_1 \frac{dQ_k}{ds_1} \frac{\partial u}{\partial s_1} ds_1 = \\ &= p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} Q_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1} - p_1 Q_k'(s_1) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} u \frac{d}{ds_1} \left(p_1 \frac{dQ_k}{ds_1} \right) ds_1 = \\ &= p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} Q_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1} - p_1 Q_k'(s_1) u \Big|_{a_1}^{b_1} - \int_{a_1}^{b_1} u [q_1 + \lambda_k r_1] Q_k ds_1. \end{aligned} \quad (15, 12)$$

последнее с помощью уравнения (15, 6), где надо положить $\lambda = \lambda_k$ и $Q = Q_k$. Подставляя (15, 12) в (15, 11) и замечая, что члены вида $\pm \int_{a_1}^{b_1} u q_1 Q_k ds_1$ сокращаются, получаем для величины u_k уравнение

$$D_1(s_2, \dots, s_m) u_k - \lambda_k u_k = - p_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} Q_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1} + p_1 Q_k'(s_1) u \Big|_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} r_1 f Q_k ds_1,$$

а это и есть формула (15, 8).

15.2. Покажем теперь, как можно использовать полученный результат для решения интересующих нас задач математической физики.

Предположим, что уравнению (15, 1) удовлетворяет некоторая физическая величина u , причем s_1, s_2, \dots, s_m — это какие-нибудь криволинейные, вообще говоря, координаты, а также, возможно, время t ,¹ а функция $f(s_1, s_2, \dots, s_m)$ дает плотность распределения источников этой величины в пространстве (s_1, s_2, \dots, s_m) .

Пусть далее функция $u(s_1, s_2, \dots, s_m)$ удовлетворяет на поверхностях $s_1 = a_1$ и $s_1 = b_1$, где a_1 и b_1 постоянные, граничным условиям одного из следующих типов:

1) Предельные условия первого рода:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{s_1 = a_1} &= f_1(s_2, s_3, \dots, s_m) \equiv f_1 \\ (u)_{s_1 = b_1} &= f_2(s_2, s_3, \dots, s_m) \equiv f_2 \end{aligned} \right\} \quad (15, 13)$$

¹ Если в число этих величин входит время, то будем считать, что $t = s_m$.

2) Предельные условия второго рода:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial s_1}\right)_{s_1=a_1} &= \psi_1(s_2, s_3, \dots, s_m) \equiv \psi_1, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial s_1}\right)_{s_1=b_1} &= \psi_2(s_2, s_3, \dots, s_m) \equiv \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (15, 14)$$

3) Предельные условия третьего рода:

$$\left. \begin{aligned} \left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \beta_1 u\right]_{s_1=a_1} &= F_1(s_2, s_3, \dots, s_m) \equiv F_1, \\ \left[\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \beta_2 u\right]_{s_1=b_1} &= F_2(s_2, s_3, \dots, s_m) \equiv F_2 \end{aligned} \right\} \quad (15, 15)$$

где α_1, β_1 и α_2, β_2 — постоянные.

Заметим, прежде всего, что если функции $p_1(s_1)$, $q_1(s_1)$ и $r_1(s_1)$ удовлетворяют некоторым общим условиям, которые мы в дальнейшем будем считать выполненными,¹ то существует бесчисленное множество отличных от тождественного нуля решений $Q_k = Q_k(s_1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, \infty$) уравнения (15, 6),² получающихся при надлежащем выборе значений λ_k параметра λ и удовлетворяющих однородным граничным условиям вида

$$Q_k(a_1) = Q_k(b_1) = 0 \quad (15, 16)$$

(фундаментальные или собственные функции первого рода). Аналогичные утверждения справедливы и для решений $Q_k(s_1)$ этого уравнения, удовлетворяющих условиям

$$\bar{Q}_k'(a_1) = \bar{Q}_k'(b_1) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (15, 17)$$

фундаментальные функции второго рода) и получающихся при значениях $\lambda = \bar{\lambda}_k$, а также для тех решений его $\bar{Q}_k(s)$, для которых

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{Q}_k'(a_1) + \beta_1 \bar{Q}_k(a_1) &= 0, \\ \alpha_2 \bar{Q}_k'(b_1) + \beta_2 \bar{Q}_k(b_1) &= 0, \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (15, 18)$$

(фундаментальные функции третьего рода), и которые получаются при $\lambda = \bar{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \dots, \infty$.³

В общей теории фундаментальных функций доказывается, что всякая кусочно-непрерывная в интервале (a_1, b_1) функция $f(s_1)$, имеющая

¹ В частности, если это непрерывные во всем интервале (a_1, b_1) функции от s_1 , причем $p_1(s_1) > 0$ и имеет непрерывную производную, и $r_1(s_1) > 0$.

В некоторых случаях может быть также и $p_1(a_1) = 0$ или $p_1(b_1) = 0$. См. Курант — Гильберт, т. I, стр. 276—279 и далее. — В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, стр. 291 и далее. — В. А. Стеклов, Основные задачи математической физики, ч. I, гл. V, (стр. 73 и далее). — Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. II (интегральные уравнения и их приложения).

² Уравнения такого вида называются уравнениями типа Штурма — Лиувилля.

³ Числа $\lambda_k, \bar{\lambda}_k, \lambda_k$ называются характеристическими числами для соответствующих задач.

первую производную с интегрируемым квадратом¹ может быть разложена в ряд по собственным функциям каждого из трех указанных типов, причем ряды эти сходятся абсолютно и равномерно во всех замкнутых частичных областях интервала (a_1, b_1) , не содержащих точек разрыва функции, а в точках разрыва сумма ряда равняется, как и в случае ряда Фурье, среднему арифметическому из правого и левого предельных значений функции (для дальнейшего существенно то, что теорема эта не предполагает, что разлагаемая функция удовлетворяет граничным условиям).² Соответствующие разложения имеют вид:³

$$f(s_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) f(s) Q_k(s) ds}{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) [Q_k(s)]^2 ds} Q_k(s_1), \quad (15, 19)$$

$$f(s_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) f(s) \bar{Q}_k(s) ds}{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) [\bar{Q}_k(s)]^2 ds} \bar{Q}_k(s_1), \quad (15, 20)$$

$$f(s_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) f(s) \bar{Q}_k(s) ds}{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) [\bar{Q}_k(s)]^2 ds} \bar{Q}_k(s_1). \quad (15, 21)$$

¹ Под квадратичной интегрируемостью производной подразумевается условие конечности интегралов от квадрата производной, взятых по отдельным частным интервалам, внутри которых функция остается непрерывной.

² Курант — Гильберт, т. I, стр. 406.

³ Если допустить равномерную сходимость рядов (15, 19) — (15, 21) во всем интервале (a_1, b_1) , то коэффициенты при $Q_k(s_1)$ и т. д. этих рядов легко получаются из свойства ортогональности фундаментальных функций, выражаемого формулой

$$\int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) U_m(s_1) U_n(s_1) ds_1 = 0 \text{ при } m \neq n, \quad (A)$$

где $U_m(s_1)$ и $U_n(s_1)$ — это две какие-нибудь фундаментальные функции, относящиеся к одной из сформулированных выше трех задач. Именно, обозначая через λ_m' и λ_n' относящиеся к этим функциям характеристические числа, будем иметь уравнения:

$$\frac{d}{ds_1} (p_1 U_m') + (q_1 + \lambda_m' r_1) U_m = 0, \quad (a)$$

$$\frac{d}{ds_1} (p_1 U_n') + (q_1 + \lambda_n' r_1) U_n = 0, \quad (б)$$

а умножая (а) на U_n , а (б) — на U_m и вычитая второй результат из первого, найдем:

$$\frac{d}{ds_1} [p_1 (U_n U_m' - U_m U_n')] = (\lambda_n' - \lambda_m') r_1 U_m U_n. \quad (в)$$

Если функции $Q_k(s_1)$, $\bar{Q}_k(s_1)$, $\overline{\bar{Q}}_k(s_1)$ нормированы, т. е. если выполнены условия

$$\int_{a_1}^{b_1} r_1 Q_k^2 ds_1 = 1; \quad \int_{a_1}^{b_1} r_1 \bar{Q}_k^2 ds_1 = 1; \quad \int_{a_1}^{b_1} r_1 \overline{\bar{Q}}_k(s_1) ds_1 = 1, \quad (15, 22)$$

то формулы (15, 19) — (15, 21) упрощаются и дают:

$$f(s_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) f(s) Q_k(s) ds \right) Q_k(s_1), \quad (15, 23)$$

и аналогично для $\bar{Q}_k(s_1)$ и $\overline{\bar{Q}}_k(s_1)$.

Будем теперь искать решение u уравнения (15, 1) для предельных задач указанных выше трех типов, т. е. (15, 13) — (15, 15), соответственно, в форме рядов вида (15, 19), (15, 20) и (15, 21), предполагая, что решение это, рассматриваемое как функция от s_1 , удовлетворяет тем условиям, которые требуются для разложимости его в ряды подобного типа. Коэффициенты разложения u в такие ряды будут пропорциональны соответственно величинам:

$$\begin{aligned} u_k &= \int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) u Q_k(s_1) ds_1, \\ \bar{u}_k &= \int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) u \bar{Q}_k(s_1) ds_1, \\ \overline{\bar{u}}_k &= \int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) u \overline{\bar{Q}}_k(s_1) ds_1, \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение в пределах (a_1, b_1) , получим:

$$(\lambda_n' - \lambda_m') \int_{a_1}^{b_1} r_1 U_m U_n ds_1 = p_1(s_1) [U_n(s_1) U_m'(s_1) - U_m(s_1) U_n'(s_1)] \Big|_{a_1}^{b_1}. \quad (г)$$

Легко видеть, что какой бы из групп (15, 16) — (15, 18) граничных условий ни удовлетворяли функции $U_m(s_1)$ и $U_n(s_1)$, правая часть формулы (г) обращается в нуль, что и дает формулу (А). Пользуясь этой последней и допуская разложимость функции $f(s_1)$ в равномерно сходящийся в интервале (a_1, b_1) ряд вида

$$f(s_1) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m U_m(s_1), \quad (д)$$

получим, умножая его на $r_1(s_1) U_n(s_1) ds_1$ и интегрируя в пределах (a_1, b_1) :

$$\int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) f(s_1) U_n(s_1) ds_1 = a_n \cdot \int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) [U_n(s_1)]^2 ds_1. \quad (е)$$

Подставляя найденное отсюда значение a_n в (д), придем к общей формуле

$$f(s_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) f(s) U_m(s) ds}{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s) [U_m(s)]^2 ds} U_m(s_1), \quad (ж)$$

что и дает формулы (15, 19) — (15, 21).

а эти величины, как мы видели выше, удовлетворяют уравнениям вида (15, 8), причем если еще учесть граничные условия (15, 13) — (15, 15) для u и условия (15, 16) — (15, 18) для функций $Q_k, \bar{Q}_k, \bar{\bar{Q}}_k$ соответственно, то уравнения эти принимают следующий вид:

$$D_1 u_k - \lambda_k u_k = [p_1(b_1) Q_k'(b_1) f_2 - p_1(a_1) Q_k'(a_1) f_1] + \int_{a_1}^{b_1} r_1 f Q_k ds_1, \quad (15, 24)$$

$$D_1 \bar{u}_k - \bar{\lambda}_k \bar{u}_k = [p_1(a_1) \bar{Q}_k(a_1) \psi_1 - p_1(b_1) \bar{Q}_k(b_1) \psi_2] + \int_{a_1}^{b_1} r_1 f \bar{Q}_k ds_1, \quad (15, 25)$$

и

$$\left. \begin{aligned} D_1 \bar{\bar{u}}_k - \bar{\bar{\lambda}}_k \bar{\bar{u}}_k &= p_1(a_1) \bar{\bar{Q}}_k(a_1) \frac{F_1}{\alpha_1} - \frac{p_1(b_1) \bar{\bar{Q}}_k(b_1)}{\alpha_2} F_2 + \int_{a_1}^{b_1} r_1 f \bar{\bar{Q}}_k ds_1 \\ &\text{при } \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \\ D_1 \bar{\bar{u}}_k - \bar{\bar{\lambda}}_k \bar{\bar{u}}_k &= p_1(a_1) \bar{\bar{Q}}_k(a_1) \frac{F_1}{\alpha_1} + p_1(b_1) \bar{\bar{Q}}_k'(b_1) \frac{F_2}{\beta_2} + \int_{a_1}^{b_1} r_1 f \bar{\bar{Q}}_k ds_1 \\ &\text{при } \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15, 26)$$

Итак, благодаря удачному выбору функций $Q_k, \bar{Q}_k, \bar{\bar{Q}}_k$, во всех трех случаях получаются для величин $u_k, \bar{u}_k, \bar{\bar{u}}_k$ дифференциальные уравнения, в правые части которых входят только известные функции от s_2, s_3, \dots, s_m , причем число независимых переменных в этих уравнениях на единицу меньше, чем в исходных уравнениях (15, 1). Заметим, что если исходное уравнение содержит только две независимых переменных, то для $u_k, \bar{u}_k, \bar{\bar{u}}_k$ получаются уже обыкновенные линейные уравнения.²

15.3. К уравнениям для $u_k, \bar{u}_k, \bar{\bar{u}}_k$ надо добавить соответствующие граничные условия.

Если граничные условия, оставшиеся после использования уравнений (15, 13) — (15, 15) для u , все линейны относительно самой функ-

¹ При $\alpha_2 = 0$ уравнения (15, 18) принимают вид

$$\bar{Q}_k'(a_1) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \bar{Q}_k(a_1) = 0, \quad \bar{Q}_k(b_1) = 0,$$

что соответствует обращению граничных условий (15, 15) в такие:

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \beta_1 u \right)_{s_1 = a_1} = F_1; \quad (u)_{s_1 = b_1} = F_2$$

² Тот же прием для нахождения решения годится и тогда, когда исходное уравнение (15, 1) само содержит только одну независимую переменную, т. е. является обыкновенным уравнением. В этом случае формулы (15, 24) — (15, 26) непосредственно дают значения самих величин $u_k, \bar{u}_k, \bar{\bar{u}}_k$ (когда решение вообще возможно), т. е. они дают непосредственно разложение решения неоднородной задачи с неоднородными краевыми условиями по собственным функциям однородной задачи с однородными краевыми условиями.

ции u и ее производных по s_2, s_3, \dots, s_m и не содержат s_1 и производной $\frac{\partial u}{\partial s_1}$, то мы можем их преобразовать в граничные условия для u_k и т. д. путем умножения их на $r_1(s_1)Q_k(s_1)$ и проч. и интегрирования по s_1 в пределах от a_1 до b_1 (ср. получение граничных условий в §§ 6, 11 и др.). Решая затем уравнения (15, 24) — (15, 26) при получившихся таким образом граничных условиях, найдем все $u_k, \bar{u}_k, \overline{\bar{u}}_k$, а затем и саму искомую функцию u по формулам вида (15, 19) — (15, 21), т. е.

$$u = u(s_1, s_2, \dots, s_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(s_2, s_3, \dots, s_m)}{\int_{a_1}^{b_1} r_1(s_1) [Q_k(s_1)]^2 ds_1} Q_k(s_1) \quad (15, 27)$$

и т. д., а если функции $Q_k(s_1)$ и прочие еще и нормированные, то по несколько более простым:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(s_2, s_3, \dots, s_m) \cdot Q_k(s_1). \quad (15, 28)$$

Формулы эти будут давать значения u внутри всего интервала $a_1 < s_1 < b_1$, на концах же его, т. е. при $s_1 = a_1$ и $s_1 = b_1$, полученные ряды, как правило, не будут удовлетворять граничным условиям.

Последнее обстоятельство влечет за собой относительно медленную сходимость соответствующих рядов, поскольку, например, коэффициенты u_k ряда (15, 28) будут, вообще говоря, убывать лишь как $\frac{1}{k}$. Но так как величины скачков функции u (или ее производной и т. д.) на границах интервала известны, то так же, как в рассмотренных в п. п. 9.4 и 10.4 задачах, сходимость представляющих u рядов может быть крайне просто улучшена. Так, например, в случае ряда (15, 28), достаточно из него вычесть почленно хотя бы соответствующий ряд¹ для функции

$$F = f_1 - \left(\frac{s_1 - a_1}{b_1 - a_1} \right) (f_1 - f_2) = (u)_{s_1 = a_1} - \frac{s_1 - a_1}{b_1 - a_1} [(u)_{s_1 = a_1} - (u)_{s_1 = b_1}], \quad (15, 29)$$

принимаящей при $s_1 = a_1$ и $s_1 = b_1$ те же граничные значения, как u , причем разностный ряд для функции $u - F$, обращаясь в нуль на границах интервала (a_1, b_1) , должен уже сходиться, по известной теореме,² абсолютно и равномерно. Сходным образом следует поступать и в случае других граничных задач. Именно, вычитая из полученного решения u разложение в соответствующий ряд любой непрерывной функции $F(s_1)$, обладающей непрерывной первой и кусочно-непрерывной второй производной и удовлетворяющей тем же граничным усло-

¹ Т. е. тоже по функциям $Q_k(s_1)$.

² См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, стр. 291.

виям, как само u , получим для разности $u - F$ абсолютно и равномерно сходящийся ряд. Например, в случае предельных условий третьего рода [см. (15, 15)], можно было бы, в случае, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 + a_1\beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 + b_1\beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю, принять за $F(s_1)$ функцию

$$[(\alpha_1 + a_1\beta_1 - \beta_1 s_1) F_2(s_2, \dots, s_m) - (\alpha_2 + b_1\beta_2 - \beta_2 s_1) F_1(s_2, \dots, s_m)] / \Delta,$$

удовлетворяющую граничным условиям (15, 15) и т. д. Некоторым недостатком этого метода улучшения сходимости рядов, представляющих решение наших предельных задач, является необходимость фактического нахождения значений интегралов

$$\int_{a_1}^{b_1} F(s_1) r_1(s_1) Q_k(s_1) ds_1; \int_{a_1}^{b_1} F(s_1) r_1(s_1) \bar{Q}_k(s_1) ds_1;$$

$$\int_{a_1}^{b_1} F(s_1) r_1(s_1) \bar{\bar{Q}}_k(s_1) ds_1,$$

которыми определяются коэффициенты разложения $F(s_1)$ по соответствующим собственным функциям. Ниже мы увидим, как можно, используя некоторые добавочные соображения, совершенно избавиться от этой дополнительной работы и дать простые и единообразные правила, позволяющие крайне несложным образом осуществлять желаемое улучшение сходимости.¹

15.4. Если u зависит более чем от двух переменных, то уравнения (15, 24) — (15, 26) для u_k , \bar{u}_k , $\bar{\bar{u}}_k$ тоже будут уравнениями в частных производных.

Если соответствующее им однородное уравнение, т. е. уравнение

$$D_1\psi - \lambda\psi = 0, \quad (15, 30)$$

допускает такую же трактовку, как (15, 2), т. е. если оно имеет частные решения вида

$$\psi = M(s_2) \cdot \chi(s_3, \dots, s_m), \quad (15, 31)$$

причем подстановка (15, 31) в (15, 30) приводит, по разделении на произведение $M\chi\varphi$, где $\varphi = \varphi(s_2, s_3, \dots, s_m)$ — некоторая известная функция указанных переменных, к результату вида

$$\frac{D_2(s_2, \dots, s_m)\chi}{\chi} + \frac{1}{r_2(s_2)M} \left\{ \frac{d}{ds_2} \left[p_2(s_2) \frac{dM}{ds_2} \right] + q_2(s_2)M \right\} = 0, \quad (15, 32)$$

где оператор D_2 уже от s_2 не зависит, и если функция u_k удовлетворяет при двух значениях a_2 и b_2 координаты s_2 граничным условиям такого же типа, как раньше u [ср. (15, 13) — (15, 15)], то для решения

¹ См. по этому поводу ниже, гл. XII.

уравнений (15, 24) — (15, 26) вновь может быть применена указанная выше методика и т. д. При этом ясно, что так как уравнение (15, 30) совпадает с уравнением (15, 5) для функции F , получившимся при разделении переменных в уравнении (15, 2), то указанный процесс разделения будет в конце концов приводить всегда тогда к решению обыкновенных уравнений, когда исходное однородное уравнение (15, 2) допускает частные решения вида

$$u = \prod_{i=1}^{i=m} N_i(s_i), \quad (15, 33)$$

где каждая из функций $N_i(s_i)$ зависит только от одной из независимых переменных (полное разделение).

Подчеркиваем, что решения, получаемые таким способом даже в случае однородных уравнений, но при хотя бы отчасти неоднородных граничных условиях,¹ не являются суммой частных решений предложенного уравнения, а дают разложение решения в ряд по некоторым собственным функциям уравнений, соответствующих разделенным переменным. Только в том весьма частном случае, когда граничные условия однородны по всем координатам, кроме, может быть, одной, они переходят в обычное решение, получаемое по методу Фурье—Ламе, который, таким образом, является лишь частным случаем значительно более общего метода.

15.5. Заметим, в заключение, что, изменяя последовательность, в которой указанная выше процедура применяется к отдельным координатам s_i , входящим в уравнение (15, 1), будем получать различные формы решения задачи. Каждая из этих форм имеет обычно свою область наивыгоднейшего применения, поскольку быстрота сходимости получаемых таким путем рядов не будет, вообще говоря, одинаковой для одних и тех же интервалов изменения переменных.²

15.6. **Примечание 1.** В некоторых случаях граничные условия даются не при двух значениях a_i и b_i какой-либо координаты s_i , а только при одном, причем второе граничное условие заменяется требованием, чтобы искомая функция оставалась конечной и однозначной внутри всего рассматриваемого интервала изменения переменной, включая его концы.³ С подобным случаем встречаемся обыкновенно тогда, когда на одном из концов интервала, скажем при $s_1 = a_1$, функция $p_1(s_1)$ в уравнении (15, 6), обращается в нуль, так что $p_1(a_1) = 0$. Тогда соответствующие функции $Q_k(s_1)$ нельзя, вообще говоря, выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям вида $Q_k(a_1) = 0$ или $Q_k'(a_1) = 0$ и т. д., так как может вообще не существовать отличных

¹ Неоднородных по двум или более координатам, если $m \geq 2$.

² Примеры этого мы уже имели выше, см. §§ 7 и 9 [ряды (7, 26) и (9, 21)] и др.

³ См., например, п. 14.11 [вопрос о выборе постоянных A_n и B_n в формуле (14, 61)].

от нуля решений такого рода. Но легко видеть, что для возможности применения изложенного в этом параграфе метода это и не требуется, т. к. если подчинить те решения уравнения (15, 6), которые остаются конечными в точке $s_1 = a_1$, условиям $Q_k(b_1) = 0$ или, соответственно, $Q_k'(b_1) = 0$ и т. д. на втором конце интервала, то из правой части уравнения (15, 8) неизвестные граничные значения величины $\frac{\partial u}{\partial s_1}$ (соответственно, u и т. п.) выпадут из-за того, что при $s_1 = a_1$ обращается теперь в нуль функция $p_1(s_1)$. Таким образом вновь приходим для нахождения коэффициентов u_k к уравнениям с известной правой частью, и решение доводится до конца, как указано выше¹ (ср., например, ниже, п. 17.5).

15.7. Примечание 2. Если рассматривается решение какой-либо задачи в полярных или цилиндрических координатах r, φ , соответственно r, φ, z , причем решение ищется во всей области $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ изменения угла φ ², то как искомую функцию u , так и правую часть уравнения (15, 1), а также граничные условия, надо разложить в ряды Фурье по углу, т. е. положить

$$u = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} u_n e^{in\varphi} \quad \text{или} \quad u = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n e^{in\varphi} \quad \text{или} \quad f = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

и т. д., подставить эти значения в (15, 1) и приравнять нулю коэффициенты при всех степенях $e^{in\varphi}$ или при всех синусах и косинусах в отдельности.³ Таким образом придем к уравнениям для величин u_n ,

¹ В виде исключения получаем иногда в таких случаях и такие функции $Q_k(s_1)$, которые, оставаясь конечными на одном конце интервала, не могут обращаться в нуль (сами или их производные и т. д.) на втором конце интервала. Таков, например, случай радиальных функций $Q_k(r) = Ar^k$, где $A = \text{const}$, k — целое число, получающихся при разделении переменных в двухмерном уравнении Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (\text{A})$$

если его требуется решить для внутренности круга некоторого радиуса R . Такие случаи могут быть, при желании, подведены под данную выше общую схему, если рассматривать их как предельные, решая сперва задачу для меньшего интервала $a_1' \leq s_1 \leq b_1$, где $b_1 > a_1' > a_1$, на обеих границах которого заданы вытекающие из физических соображений, относящихся к данной задаче, граничные условия, и переходя затем к пределу, когда a_1' стремится к a_1 . Так, например, в случае уравнения (A) можно было бы начать с интегрирования его для кольцевой области, ограниченной кругами $r = \varepsilon > 0$ и $r = R > \varepsilon$, и затем перейти в полученном решении к пределу $\varepsilon = 0$.

² А не только внутри некоторого сектора $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$.

³ Заметим, что этот (обычный в таких случаях) прием можно рассматривать тоже как частный случай данного в этом параграфе общего метода подхода к решению

с которыми дальше уже следует поступать в соответствии с указанной выше общей методикой.

Сходным образом должно поступать и с задачами, требующими применения сферических координат r, θ, φ , причем $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В этом случае следует начать с разложения как искомой функции u , так и правой части f уравнения (15, 1), а также граничных условий, в ряды по сферическим функциям и т. д.

15.8. В заключение заметим еще, что для применимости изложенного в этом параграфе метода вовсе не обязательно, чтобы граничные условия, относящиеся ко всем переменным s_i , непременно имели один из видов (15, 13) — (15, 15). Во многих случаях достаточно, чтобы они имели такой вид по одной или по двум из этих переменных, тогда как по остальным они могут быть и иными (при условии, конечно, что они остаются линейными относительно искомой функции и ее производных).¹ Это, в частности, имеет место при рассмотрении нестационарных процессов, когда одна из переменных s_i это время t , и граничные условия по этой переменной — это начальные условия. При этом вместо задания значений искомой величины при двух разных значениях t задаются значения ее самой и ее производной при одном значении $t = t_0$. Ниже будет показано, как следует поступать для получения решения задач такого рода.² Мы рассмотрим также обобщение изложенной методики на некоторые случаи, когда решение задачи приводится к вопросу об интегрировании не одного уравнения с разделяющимися переменными, а нескольких совокупных

уравнения (15, 1). В самом деле, положим в (15, 1) — (15, 8) $s_1 = \varphi$ и пусть за $Q_k(s_1)$ выбрано одно из периодических по углу решений вида $e^{in\varphi}, \cos n\varphi, \sin n\varphi$, где n целое число. Тогда в правой части уравнения (15, 8) пропадают выделившиеся при интегрировании по частям члены —

$$p_1(s_1) \frac{\partial p}{\partial s_1} Q_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1} + p_1(s_1) p Q'_k(s_1) \Big|_{a_1}^{b_1},$$

поскольку значения входящих в них величин на нижнем и на верхнем пределах равны, и мы приходим к тому же результату, к какому приводит указанный в тексте путь. Аналогичное замечание относится и к упомянутому ниже случаю разложения по сферическим функциям и т. п.

¹ Так, например, пусть имеет место полное разделение переменных и пусть граничные условия по переменным s_1, s_2, \dots, s_{m-1} относятся к одному из типов (15, 13) — (15, 15), а по s_m имеют иной вид. Тогда, применяя сперва общий метод данного параграфа в отношении всех переменных s_1, s_2, \dots, s_{m-1} , придем к некоторому обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с независимой переменной s_m .

Для определения входящих в интеграл этого уравнения произвольных постоянных понадобятся два каких-либо условия (граничных, начальных и т. д.), которые, однако, совсем не обязаны принадлежать к одному из типов (15, 13) — (15, 15).

² См. гл. X—XI.

уравнений подобного типа.¹ Примеры такого обобщения даны в §§ 18 и 19, а также в п. п. 20.6 и 20.7.

15.9. Переходим теперь к приложениям общего метода, причем начнем с решения предельных задач для уравнений Гельмгольца и Пуассона в цилиндрических координатах.

Глава VIII

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩЕГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

§ 16. Решение уравнений $\Delta\varphi = -4\pi f$ и $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi f$ в цилиндрических координатах

16.1. Общее уравнение $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi f$, где $k = \text{const}$, записанное в цилиндрических координатах (r, θ, z) , имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = -4\pi f(r, \theta, z). \quad (16, 1)$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0 \quad (16, 2)$$

допускает частные решения вида

$$\varphi = U(r) V(\theta) W(z), \quad (16, 3)$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (16, 3) в (16, 2). При этом получим, по разделении на UVW :

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{Vr^2} \frac{d^2 V}{d\theta^2} + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} + k^2 = 0,$$

что может удовлетворяться тождественно только в том случае, если

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} = -\lambda^2 V, \quad \lambda = \text{const}, \quad (16, 4)$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = +\mu^2 W, \quad \mu = \text{const},^2 \quad (16, 5)$$

причем для U получаем уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) + \left[(\mu^2 + k^2) - \frac{\lambda^2}{r^2} \right] U = 0. \quad (16, 6)$$

¹ С задачами подобного типа встречаемся тогда, когда внутри рассматриваемой области пространства имеется несколько различных сред, отличающихся друг от друга по своим свойствам.

² Мы для удобства пишем здесь λ^2 и μ^2 , а не просто λ и μ , причем, так как λ и μ могут пока иметь любые вещественные или комплексные значения, то это общности решения не уменьшает.

Решения уравнений (16, 4), (16, 5), (16, 6) могут быть, вообще говоря, представлены в такой форме

$$U = Z_\lambda(\sqrt{\mu^2 + k^2} r), \quad (16, 7)$$

$$V = A_\lambda e^{i\lambda\theta} + B_\lambda e^{-i\lambda\theta}, \quad (16, 8)$$

$$W = M_\mu e^{\mu z} + N_\mu e^{-\mu z} = M'_\mu \operatorname{ch} \mu z + N'_\mu \operatorname{sh} \mu z, \quad (16, 9)$$

где $Z_\lambda(x)$ обозначает какую-либо бесселеву функцию порядка λ , а A_λ , B_λ , M_μ , N_μ , M'_μ , N'_μ — постоянные. Исключение составляет лишь тот частный случай, когда рассматривается плоская задача для уравнения Пуассона, т. е. когда φ не зависит от z . Уравнение (16, 2) принимает при этом следующий вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (16, 10)$$

Частное решение его следует искать в форме произведения только двух функций

$$\varphi = u(r) v(\theta), \quad (16, 11)$$

причем для v и u получаются уравнения

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} = -\lambda^2 v, \quad (16, 12)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{\lambda^2}{r} u = 0. \quad (16, 13)$$

Интегралы этих уравнений имеют вид

$$u = A_\lambda r^\lambda + B_\lambda r^{-\lambda} \quad (16, 14)$$

и

$$v = M_\lambda e^{i\lambda\theta} + N_\lambda e^{-i\lambda\theta}, \quad (16, 15)$$

где A_λ , B_λ , M_λ , N_λ — постоянные.

16.2. Из существования частных решений вида (16, 3) или (16, 11) следует, в соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, что в случае, если требуется решить уравнение (16, 1) или (16, 10) при граничных условиях одного из рассмотренных в § 15 типов, то решение это может быть найдено с помощью изложенного там общего метода. С целью иллюстрировать это, рассмотрим несколько примеров.

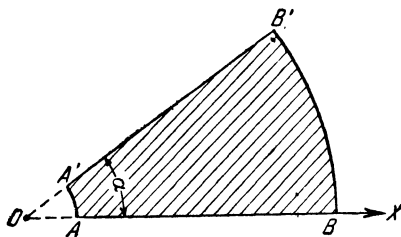


Рис. 19.

Пример 1

16.3. Решим плоскую электростатическую задачу для изображенной на рис. 19 области $AA'B'B'$ (кругового прямоугольника, ограниченного двумя дугами кругов AA' и BB' , описанных из начала координат радиусами $OA = r_1$ и $OB = r_2$, и двумя отрезками радиусов AB и $A'B'$), причем будем считать, что объемные заряды внутри области отсутствуют и что даны значения потенциала φ на ее границах.

Уравнение для φ имеет вид (16, 10), причем к нему присоединяются граничные условия

$$(\varphi)_{\theta=0} = f_1(r); \quad (\varphi)_{\theta=\alpha} = f_2(r), \quad (16, 16)$$

$$(\varphi)_{r=r_1} = \psi_1(\theta); \quad (\varphi)_{r=r_2} = \psi_2(\theta), \quad (16, 17)$$

где α — это угол BOB' .

16.4. Будем сперва предполагать, что $r_1 \neq 0$. Для решения уравнения (16, 10) можем теперь, по желанию, начинать с умножения его на такую функцию $v(\theta)$ вида (16, 15), которая обращается в нуль при $\theta=0$ и $\theta=\alpha$, или на такую функцию $u(r)$ вида (16, 14), которая обращается в нуль при $r=r_1$ и $r=r_2$. Используем оба способа, причем начнем с первого из них.

Нормированные функции $v_k(\theta)$, обращающиеся в нуль при $\theta=0$ и $\theta=\alpha$, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} v_k(\theta) &= a_k \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ a_k^2 &= \frac{2}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (16, 18)$$

Для коэффициентов

$$\varphi_k = \int_0^\alpha \varphi v_k(\theta) d\theta \quad (16, 19)$$

получаем обычным способом, учитывая условия (16, 16), уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_k}{dr} \right) - \left(\frac{k\pi}{\alpha r} \right)^2 \varphi_k = \frac{k\pi a_k}{\alpha r^2} [(-1)^k f_2(r) - f_1(r)] \quad (16, 20)$$

и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k)_{r=r_1} &= a_k \int_0^\alpha \psi_1(\theta) \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} d\theta, \\ (\varphi_k)_{r=r_2} &= a_k \int_0^\alpha \psi_2(\theta) \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (16, 21)$$

Выполняя интегрирование уравнения (16, 20) при условиях (16, 21), получим искомое решение. Пусть, например, для конкретности

$$f_1(r) = 0, \quad f_2(r) = V = \text{const}; \quad \psi_1(\theta) = \psi_2(\theta) = \frac{V}{\alpha} \theta. \quad (16, 22)$$

Тогда

$$(\varphi_k)_{r=r_1} = (\varphi_k)_{r=r_2} = \frac{V a_k}{\alpha} \int_0^\alpha \theta \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} d\theta = (-1)^{k-1} \frac{V \alpha a_k}{k\pi}, \quad (16, 23)$$

в то время, как (16, 20) дает

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_k}{dr} \right) - \left(\frac{k\pi}{\alpha r} \right)^2 \varphi_k = (-1)^k \frac{k\pi a_k}{\alpha r^2} V. \quad (16, 24)$$

Так как это уравнение имеет очевидное частное решение

$$\bar{\varphi}_k = (-1)^{k-1} \frac{V a_k \alpha}{k\pi},$$

то общий интеграл его будет, согласно (16, 14):

$$\varphi_k = A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r^{-\frac{k\pi}{\alpha}} + (-1)^{k-1} \frac{V a_k \alpha}{k\pi}. \quad (16, 25)$$

Для определения A_k и B_k получаем два уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_k r_1^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r_1^{-\frac{k\pi}{\alpha}} &= 0, \\ A_k r_2^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r_2^{-\frac{k\pi}{\alpha}} &= 0, \end{aligned} \right\} (k \geq 1)$$

которые показывают, что $A_k = B_k = 0$ при всех k . (16, 25) дает теперь:

$$\varphi_k = (-1)^{k-1} \frac{V a_k \alpha}{k\pi}, \quad (16, 26)$$

а отсюда, если воспользоваться значением $a_k^2 = \frac{2}{\alpha}$ из (16, 18):

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \vartheta_k(\theta) = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}}{k} = \frac{V}{\alpha} \theta, \quad (16, 27)$$

причем использована формула (9, 13).

Это и есть искомое решение нашей граничной задачи. При этом, хотя в ходе вывода мы предполагали, что $r_1 \neq 0$, но так как окончательный результат от r_1 вообще не зависит и справедлив при сколь угодно малом r_1 , то он верен и в предельном случае, когда $r_1 = 0$, т. е. когда область $AA'BV'$ обращается в сплошной сектор $OBV'O$.

16.5. Решим теперь то же уравнение (16, 10) с теми же граничными условиями (16, 16)–(16, 17) вторым способом. Для этого надо прежде всего найти те функции $u(r) = A_\lambda r^\lambda + B_\lambda r^{-\lambda}$, которые обращаются в нуль при $r = r_1$ и $r = r_2$. При этом должно быть

$$A_\lambda r_1^\lambda + B_\lambda r_1^{-\lambda} = 0, \quad (16, 28)$$

$$A_\lambda r_2^\lambda + B_\lambda r_2^{-\lambda} = 0. \quad (16, 29)$$

Отсюда

$$-\frac{B_\lambda}{A_\lambda} = r_1^{2\lambda} = r_2^{2\lambda}, \quad (16, 30)$$

т. е.

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2\lambda} = e^{2\lambda \lg \frac{r_2}{r_1}} = 1, \quad (16, 31)$$

для чего должно быть:

$$2\lambda \lg \frac{r_2}{r_1} = 2\pi k i, \quad k = 0, 1, 2, \dots \infty.$$

Обозначив соответствующие значения λ через λ_k , получим по-
этому:

$$\lambda_k = \frac{\pi k i}{\lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}, \quad (k \geq 0). \quad (16, 32)$$

Вводя это и значение $r_1^{2\lambda}$ отношения $\frac{B_\lambda}{A_\lambda}$ из (16, 30) в фор-
мулу (16,14) для $u(r) = u_k(r)$ и обозначив через C_k новую постоянную,
легко найдем при $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_k &= A_{\lambda_k} r_1^{\lambda_k} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\lambda_k} - \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\lambda_k} \right] = \text{const} \times \left[e^{\lambda_k \lg \left(\frac{r}{r_1} \right)} - e^{-\lambda_k \lg \left(\frac{r}{r_1} \right)} \right] = \\ &= C_k \cdot \sin \left[\frac{\pi k \lg \left(\frac{r}{r_1} \right)}{\lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \right], \quad (k \geq 1), \end{aligned} \quad (16, 33)$$

тогда как при $k=0$, когда и $\lambda_0=0$, (16,13) имеет общий интеграл
вида $u = A + B \lg r$, который может одновременно обращаться в нуль
при $r=r_1$ и при $r=r_2$ только при $A=B=0$. Итак, в формуле (16, 33)
содержатся все решения u_k искомого типа.

Так как сравнение уравнения (16,13) для u_k с уравнением (15, 6)
общей теории показывает, что в данном случае $p_1(s_1) = r$ и $r_1(s_1) = \frac{1}{r}$,¹
то, согласно (15,7), получаем²

$$\varphi_k^* = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varphi u_k(r) dr}{r} \quad (16, 34)$$

Уравнение (15, 8) для φ_k^* приобретает теперь такой вид:

$$\frac{d^2 \varphi_k^*}{d\theta^2} + \lambda_k^2 \varphi_k^* = r \varphi u_k' \Big|_{r_1}^{r_2},$$

т. е. если обозначить $\lg \frac{r_2}{r_1}$ через m и использовать (16, 32), (16, 33) и
граничные условия (16,17):

$$\frac{d^2 \varphi_k^*}{d\theta^2} - \left(\frac{\pi k}{m} \right)^2 \varphi_k^* = \frac{\pi k}{m} C_k [(-1)^k \psi_2(\theta) - \psi_1(\theta)], \quad (16, 35)$$

тогда как граничные условия (16, 16) дают:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k^*)_{r=r_1} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{f_1(r) u_k(r) dr}{r}, \\ (\varphi_k^*)_{r=r_2} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{f_2(r) u_k(r) dr}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (16, 36)$$

¹ То обстоятельство, что постоянная λ в уравнении (15, 6) заменена в (16, 3) через $(-\lambda^2)$, очевидно, не существенно.

² Звездочка в φ_k^* введена, чтобы устранить возможность смешения с φ_k в (16, 19).

Уравнениями (16,35) и (16,36) задача опять решается. Так, для граничных условий (16,22) получим

$$\frac{d^2 \varphi_k^*}{d\theta^2} - \left(\frac{\pi k}{m}\right)^2 \varphi_k^* = \frac{V\pi k}{m\alpha} C_k [(-1)^k - 1] \theta, \quad (16,37)$$

и

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k^*)_{\theta=0} &= 0, \\ (\varphi_k^*)_{\theta=\alpha} &= C_k V \int_{r_1}^{r_2} \sin \left[\frac{\pi k}{m} \lg \frac{r}{r_1} \right] \frac{dr}{r} = \\ &= C_k V \int_0^m \sin \frac{\pi k \xi}{m} d\xi = \frac{VC_k m}{\pi k} [1 - (-1)^k]. \end{aligned} \right\} (16,38)$$

Общее решение уравнения (16,37) имеет вид

$$\varphi_k^* = M_k e^{\frac{\pi k \theta}{m}} + N_k e^{-\frac{\pi k \theta}{m}} + \frac{VC_k m}{\pi k \alpha} [1 - (-1)^k] \theta. \quad (16,39)$$

Выбирая постоянные M_k и N_k так, чтобы удовлетворялись условия (16,38), найдем:

$$M_k e^{\frac{\pi k \alpha}{m}} + N_k e^{-\frac{\pi k \alpha}{m}} = 0, \quad M_k + N_k = 0,$$

откуда следует, что все M_k и N_k равны нулю. (16,39) дает поэтому:

$$\varphi_k^* = \frac{VC_k m}{\pi k \alpha} [1 - (-1)^k] \theta = \begin{cases} \frac{2VmC_k \theta}{\pi(2s+1)\alpha} & \text{при } k=2s+1, \\ 0 & \text{при } k=2(s+1). \end{cases} \quad (s \geq 0) \quad (16,40)$$

Если функции u_k нормированы, для чего должно быть

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{u_k^2 dr}{r} = C_k^2 \int_0^m \sin^2 \frac{\pi k \xi}{m} d\xi = \frac{C_k^2 m}{2}, \quad \text{т. е. } C_k^2 = \frac{2}{m}, \quad (16,41)$$

то, как обычно,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^* u_k(r) = \frac{4V\theta}{\pi\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \left[\frac{(2s+1)\pi \lg \left(\frac{r}{r_1} \right)}{m} \right]}{2s+1} = \frac{V\theta}{\alpha}, \quad (16,42)$$

причем использована формула (7,27). Таким образом, вновь получили прежнее решение (16,27), как оно, естественно, и должно быть.

Пример 2

Первая предельная задача для двухмерного уравнения Пуассона для секториальной или неполной секториальной области

16.6. Во всем предыдущем решении угол α мог иметь какое угодно значение в пределах $0 < \alpha < 2\pi$.

Если $\alpha > \pi$, то получается конфигурация электродов изображенного на рис. 20 типа, когда внутрь цилиндра BCB' вдается двугранный электрод $BAA'B'$ с цилиндрическим округлением ADA' на конце. Если при этом радиус $OA = r_1$ стремится к нулю, то электрод этот принимает форму острого угла, вдающегося в основной цилиндр. Если $r_1 = 0$, а $\alpha \rightarrow 2\pi$, то $BAA'B'$ переходит в бесконечно тонкую пластинку AB , вставленную в цилиндр. Распределение потенциала на электродах может быть при этом задано любое. Задача решается, очевидно, также и в том случае, если внутри рассматриваемой области имеется любое распределение зарядов, зависящее от r и θ . При этом нужно только решать не уравнение Лапласа, а уравнение Пуассона, которое будет иметь вид.

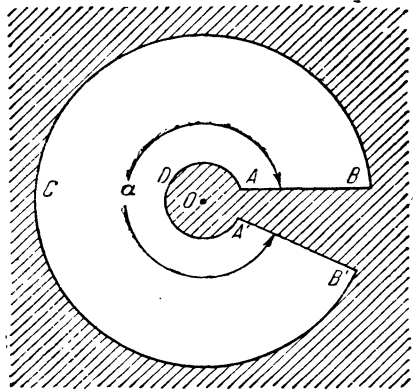


Рис. 20.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -4\pi\rho(r, \theta). \tag{16, 43}$$

Будем, для конкретности, искать решение, соответствующее случаю, когда через точку (R, γ) внутри области $BCB'A'AB$ проходит заряженная нить, параллельная оси цилиндра и обладающая зарядом e на единицу длины.¹ Нить эту будем рассматривать как предел равномерно заряженной по объему призмы (бесконечной), сечение которой плоскостью чертежа ограничено двумя дугами кругов $r = R > r_1$ и $r = R + \delta < r_2$ и двумя радиусами $\theta = \gamma > 0$, $\theta = \gamma + \varepsilon < \alpha$, где δ и ε весьма малые положительные величины, в пределе стремящиеся к нулю. Объемную плотность ρ_0 равномерно распределенного внутри призмы заряда нужно при этом принять равной

$$\rho_0 = \frac{e}{R\delta\varepsilon}. \tag{16, 44}$$

Кроме того, граничное значение φ на всей поверхности области можно принять равным нулю, поскольку мы уже проинтегрировали уравнение Лапласа для этой области при произвольных граничных значениях φ .

Воспользуемся для решения уравнения (16, 43) тем же методом, как в п. 16.4, т. е. умножим его на $v_k(\theta)$, где $v_k(\theta)$ определяется уравнениями (16, 18), и проинтегрируем от нуля до α . Для коэффициента φ_k [см. (16, 19)] получим, если учесть то, что по условию $(\varphi)_{\theta=0} = (\varphi)_{\theta=\alpha} = 0$:

¹ При $e = 1$ и φ , обращаемся в нуль на всей границе области $BCB'A'AB$, получим функцию Грина для этой области.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_k}{dr} \right) - \left(\frac{k\pi}{ar} \right)^2 \varphi_k = -4\pi\rho_k(r), \quad (16, 45)$$

где

$$\rho_k(r) = \int_0^\alpha \rho v_k(\theta) d\theta = a_k \int_0^\alpha \rho(r, \theta) \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} d\theta. \quad (16, 46)$$

Общий интеграл этого уравнения легко находимый с помощью варьирования произвольной постоянной из интеграла

$$\varphi_k = A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r^{-\frac{k\pi}{\alpha}}$$

однородного уравнения и удовлетворяющий условиям $(\varphi_k)_{r=r_1} = (\varphi_k)_{r=r_2} = 0$,¹ имеет вид

$$\varphi_k = M_k \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right] - \frac{2\alpha}{k} \int_{r_1}^r \rho_k(\xi) \xi \left[\left(\frac{r}{\xi} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r}{\xi} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right] d\xi, \quad (16, 47)$$

где

$$M_k = \frac{2\alpha}{k} \frac{\int_{r_1}^{r_2} \rho_k(\xi) \xi \left[\left(\frac{r_2}{\xi} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_2}{\xi} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right] d\xi}{\left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right]}. \quad (16, 48)$$

Переходим теперь к пределу $\delta \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть сперва $R > r > r_1$. Так как при таких r $\rho(r, \theta) = 0$, а стало быть, и $\rho_k = 0$, то для φ_k получаем простую формулу:

$$\varphi_k = M_k^0 \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right], \quad (R > r > r_1), \quad (16, 49)$$

где M_k^0 — это предельное значение выражения (16, 48) при $\delta = 0$ и $\varepsilon = 0$. Далее, находим:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{r_1}^{r_2} \rho_k(\xi) \xi \left[\left(\frac{r_2}{\xi} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_2}{\xi} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right] d\xi = \\ & = a_k \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_R^{R+\delta} \xi \left[\left(\frac{r_2}{\xi} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_2}{\xi} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right] d\xi \times \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} \rho_0 \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} d\theta = \\ & = a_k e \left[\left(\frac{r_2}{R} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{R}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right] \sin \frac{k\pi\gamma}{\alpha}, \end{aligned} \quad (16, 50)$$

так что (16, 48) и (16, 49) дают:

$$\varphi_k = a_k \frac{2ae}{k} \frac{\left[\left(\frac{r_2}{R} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{R}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right]}{\left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right]} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right] \sin \frac{k\pi\gamma}{\alpha}, \quad (16, 51)$$

¹ Ибо по заданию $(\varphi)_{r=r_1} = (\varphi)_{r=r_2} = 0$.

а отсюда:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k a_k \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} = 4e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{r_2}{R} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{R}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right]}{k \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right]} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right] \times \\ \times \sin \frac{k\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}, \quad (r_1 < r < R). \quad (16, 52)$$

Аналогично можно получить и значение φ при $r_2 > r > R$. Таким образом, найдено общее решение нашей задачи. Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи.

16.7. Пусть $r_1 \rightarrow 0$. (16, 52) дает тогда:

$$\varphi = 4e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{r_2}{R} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{R}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right]}{k} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin \frac{k\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} = \\ = 2e \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \left[\cos \frac{k\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} - \cos \frac{k\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{Rr}{r_2^2} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \left[\cos \frac{k\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} - \cos \frac{k\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} \right] \right\} = \\ = e \lg \frac{\left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right] \left[1 - 2 \left(\frac{Rr}{r_2^2} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} + \left(\frac{Rr}{r_2^2} \right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right]}{\left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right] \left[1 - 2 \left(\frac{Rr}{r_2^2} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} + \left(\frac{Rr}{r_2^2} \right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right]}, \quad (16, 53)$$

причем использовано (8, 22). Это — общее решение для случая, когда клин с округлением превращается в острый клин.

16.8. Если в (16, 53) положить $r_2 = \infty$, что соответствует удалению внешнего цилиндра на бесконечность, то получим решение для случая острого клина, находящегося в поле заряженной линии, именно

$$\varphi = e \lg \frac{\left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right]}{\left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right]}. \quad (16, 54)$$

16.9. При $\alpha = 2\pi$ клин превращается в пластинку (бесконечно тонкую), для которой (16, 54) дает:

$$\varphi = e \lg \frac{\left[1 - 2 \sqrt{\frac{r}{R}} \cos \frac{(\gamma+\theta)}{2} + \frac{r}{R} \right]}{\left[1 - 2 \sqrt{\frac{r}{R}} \cos \frac{(\gamma-\theta)}{2} + \frac{r}{R} \right]}. \quad (16, 55)$$

16.10. Если не стремиться в (16,52) r_1 к нулю, а положить там $r_2 = \infty$, то получится решение для клина с цилиндрическим закруглением на конце, внесенного в поле заряженной нити. Именно, найдем:

$$\varphi = 4e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_1}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \cdot \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \right] \sin \frac{k\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} =$$

$$= e \lg \frac{\left[1 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right] \left[1 - 2 \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right]}{\left[1 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma-\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right] \left[1 - 2 \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\gamma+\theta)}{\alpha} + \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right]}, \quad (16,56)$$

где суммирование выполняется так же, как в (16,53). В частности, полагая здесь $\alpha = \pi$, что соответствует случаю проводящей плоскости с полуцилиндрической выпуклостью на ней (рис. 21), получим:

$$\varphi = e \lg \frac{\left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\gamma+\theta) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \left[1 - 2 \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right) \cos(\gamma-\theta) + \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right)^2 \right]}{\left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\gamma-\theta) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \left[1 - 2 \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right) \cos(\gamma+\theta) + \left(\frac{r_1^2}{Rr}\right)^2 \right]}. \quad (16,57)$$

Нетрудно непосредственно проверить, что все найденные в этом параграфе решения, т. е. (16,27) — (16,42) и (16,52) — (16,57) удовлетворяют всем условиям задачи.

Пример 3

16.11. Рассмотрим вопрос о решении первой предельной задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ для изображенной на рис. 19 области,

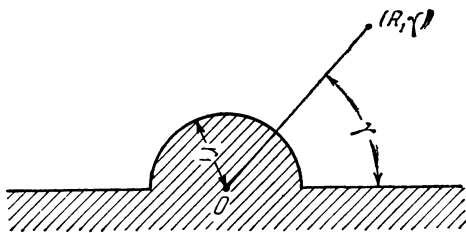


Рис. 21.

причем опять будем предполагать, что весь процесс от z не зависит. Эта задача содержит, в частности, в качестве предельного случая, задачу Зоммерфельда о диффракции плоской электромагнитной волны от идеально проводящего клина. Действительно, пусть, например, показанный на рис. 20 контур

$ABB'A'DA$ изображает сечение плоскостью чертежа бесконечно длинной перпендикулярной к ней трубы с идеально проводящими стенками, причем параллельно оси трубы проходит провод, питаемый переменным током относительно небольшой частоты, так что фазу тока можно считать практически не зависящей от z .¹

¹ По поводу этого и последующих допущений см. § 13, где аналогичная задача решается для трубы прямоугольного сечения.

Тогда, как было показано в § 13, задача сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta A + k^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + k^2 A = -\frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)}, \quad (16, 58)$$

где k^2 имеет значение (13, 7), $j^{(e)}$ — плотность сторонних токов, а $A \equiv A_z$ — единственная в данном случае компонента вектора-потенциала поля, причем вектор-потенциал A должен обращаться в нуль на стенках трубы.¹ Таким образом, решение этого вопроса приводится к частному случаю первой предельной задачи для уравнения (16, 58).

Если теперь стремить r_1 к нулю, а r_2 к бесконечности, считая при этом, что заполняющая трубу среда обладает хотя бы очень малой, но все же отличной от нуля проводимостью, то придем к задаче о диффракции волн, исходящих от провода, питаемого переменным током, набегающих на идеально проводящий клин. Удаляя провод на бесконечность и увеличивая в то же время силу тока в нем таким образом, чтобы амплитуда доходящих от него до вершины клина волн оставалась конечной, получим зоммерфельдовский случай диффракции плоских волн от клина с любым растворением.

16.12. Переходим к решению нашей предельной задачи, причем начнем с того частного случая ее, который соответствует только что рассмотренной электромагнитной задаче, т. е. со случая нулевых граничных условий. При этом сперва проведем интегрирование уравнения (16, 58), считая правую часть его произвольной функцией от r и θ , а затем применим полученные общие формулы к случаю помещенного внутрь трубы линейного провода, который будем рассматривать, подобно тому, как это делалось для заряженного провода в предыдущей электростатической задаче, как предел призматического провода, сечение которого плоскостью чертежа ограничено дугами кругов $r = R > r_1$, $r = R + \delta < r_2$ и радиусами $\theta = \gamma > 0$, $\theta = \gamma + \varepsilon < \alpha$, где δ и ε в пределе стремятся к нулю. Плотность тока в проводе примем равной

$$j^{(e)} \equiv j = \frac{I}{R\delta\alpha}, \quad (16, 59)$$

где I — полный ток в долженствующем получиться после перехода к пределу линейном проводе.

Для интегрирования уравнения (16, 58), умножим его, в соответствии с общим правилом, на $v_m(\theta)$, где $v_m(\theta)$ берем из (16, 18). Если учесть, что на границе области $A = 0$, то при этом получается, в обычных обозначениях, уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_m}{dr} \right) + \left[k^2 - \left(\frac{m\pi}{ar} \right)^2 \right] A_m = -\frac{4\pi\mu}{c} j_m(r), \quad (16, 60)$$

с граничными условиями

$$(A_m)_{r=r_1} = (A_m)_{r=r_2} = 0. \quad (16, 61)$$

¹ См. сноску на стр. 95.

Считаем сначала, что $r_1 \neq 0$. Так как общий интеграл однородного уравнения, соответствующего (16, 60), может быть записан в виде

$$A_m = M_m H_n^{(1)}(kr) + N_m H_n^{(2)}(kr), \quad n = \frac{m\pi}{\alpha}, \quad (16, 62)$$

где $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ — ханкелевы функции первого и второго рода n -ого порядка, то варьируя постоянные M_m и N_m и учитывая, что

$$H_n^{(1)}(x) \frac{dH_n^{(2)}(x)}{dx} - H_n^{(2)}(x) \frac{dH_n^{(1)}(x)}{dx} = -\frac{4i}{\pi x}, \quad (16, 63)$$

получим:

$$A_m = P_m H_n^{(1)}(kr) + Q_m H_n^{(2)}(kr) + \frac{\pi^2 \mu i}{c} \int_{r_1}^r \xi [H_n^{(1)}(kr) H_n^{(2)}(k\xi) - H_n^{(2)}(kr) H_n^{(1)}(k\xi)] \times j_m(\xi) d\xi, \quad (16, 64)$$

где P_m, Q_m — новые постоянные.

Условия (16, 61) дают:

$$\begin{aligned} P_m H_n^{(1)}(kr_1) + Q_m H_n^{(2)}(kr_1) &= 0, \\ P_m H_n^{(1)}(kr_2) + Q_m H_n^{(2)}(kr_2) + \\ + \frac{\pi^2 \mu i}{c} \int_{r_1}^{r_2} \xi [H_n^{(1)}(kr_2) H_n^{(2)}(k\xi) - H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(k\xi)] \times j_m(\xi) d\xi &= 0, \end{aligned}$$

так что

$$A_m = C_m [H_n^{(1)}(kr) H_n^{(2)}(kr_1) - H_n^{(2)}(kr) H_n^{(1)}(kr_1)] + \frac{\pi^2 \mu i}{c} \int_{r_1}^r \xi [H_n^{(1)}(kr) H_n^{(2)}(k\xi) - H_n^{(2)}(kr) H_n^{(1)}(k\xi)] \times j_m(\xi) d\xi, \quad (16, 65)$$

где

$$C_m = \frac{\pi^2 \mu i}{c} \frac{\int_{r_1}^{r_2} \xi [H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(k\xi) - H_n^{(2)}(k\xi) H_n^{(1)}(kr_2)] j_m(\xi) d\xi}{H_n^{(1)}(kr_2) H_n^{(2)}(kr_1) - H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(kr_1)}, \quad n = \frac{m\pi}{\alpha}. \quad (16, 66)$$

Таким образом нашли A_m , а тем самым и A . Именно,

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} A_m v_m(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_m \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}, \quad (16, 67)$$

и это верно при пока еще произвольном распределении сторонних токов $j \equiv j^{(e)}$ по сечению трубы. Таким образом нашли общее решение поставленной выше задачи.

16.13. Переходя теперь к конкретному случаю провода, т. е. принимая, что j дается формулой (16, 59) внутри провода и $j=0$ вне его, находим последовательно:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \delta}} \int_1^{r_2} \xi [H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(k\xi) - H_n^{(2)}(k\xi) H_n^{(1)}(kr_2)] j_m(\xi) d\xi = \\ & = a_m \lim_{\substack{\delta=0 \\ \epsilon=0}} \int_R^{\delta} \xi [H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(k\xi) - H_n^{(2)}(k\xi) H_n^{(1)}(kr_2)] d\xi \int_{\gamma}^{\gamma+\epsilon} j \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha} d\theta = \\ & = a_m I [H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(kR) - H_n^{(2)}(kR) H_n^{(1)}(kr_2)] \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha}, \quad (16, 68) \end{aligned}$$

так что при этом, согласно (16, 66):

$$C_m = \frac{\pi^2 a_m \mu I}{c} \frac{[H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(kR) - H_n^{(2)}(kR) H_n^{(1)}(kr_2)]}{[H_n^{(1)}(kr_2) H_n^{(2)}(kr_1) - H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(kr_1)]} \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha}. \quad (16, 69)$$

Подставляя это в (16,55), а затем в (16,67), получим полное решение нашей задачи для любой области изображенного на рис. 19—20 вида. Так, при $r < R$ получим, например, ввиду исчезновения при этом входящего в правую часть формулы (16,65) интеграла:

$$\begin{aligned} A = & \frac{2\pi^2 \mu I}{c\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(kR) - H_n^{(2)}(kR) H_n^{(1)}(kr_2)]}{[H_n^{(1)}(kr_2) H_n^{(2)}(kr_1) - H_n^{(2)}(kr_2) H_n^{(1)}(kr_1)]} [H_n^{(1)}(kr) H_n^{(2)}(kr_1) - \\ & - H_n^{(2)}(kr) H_n^{(1)}(kr_1)] \times \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}, \quad (r < R), \quad (16,70) \end{aligned}$$

и аналогичным образом может быть найдена формула для A при $r > R$. Формула (16,70) вполне аналогична формуле (16,52) для соответствующего статического случая, причем вывод ее, как видно из предыдущего, несколько не сложнее вывода этой последней.

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи формулы (16,70).

16. 14. Пусть $r_2 \rightarrow \infty$. Тогда, если считать, как обычно, что $Im(k) < 0$, то $H_n^{(2)}(kr_2) \rightarrow 0$, тогда как $|H_n^{(1)}(kr_2)| \rightarrow \infty$, и (16,70) дает

$$\begin{aligned} A = & \frac{2\pi^2 \mu I}{c\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(kR)}{H_n^{(2)}(kr_1)} [H_n^{(2)}(kr) H_n^{(1)}(kr_1) - \\ & - H_n^{(1)}(kr) H_n^{(2)}(kr_1)] \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}. \quad (16,71) \end{aligned}$$

Эта формула дает решение задачи о диффракции электромагнитных волн, испускаемых бесконечно-длинным проводом, от бесконечного идеально проводящего клина с цилиндрическим округлением. В частности, при $\alpha = \pi$ округленный на конце клин переходит в плоскость с выпуклостью в виде полуцилиндра (рис. 21). (16,71) дает при этом:

$$\begin{aligned} A = & \frac{2\pi \mu I}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m^{(2)}(kR)}{H_m^{(2)}(kr_1)} [H_m^{(2)}(kr) H_m^{(1)}(kr_1) - \\ & - H_m^{(1)}(kr) H_m^{(2)}(kr_1)] \sin m\gamma \sin m\theta, \quad (16,72) \end{aligned}$$

причем учтено, что в этом случае $n = \frac{m\pi}{\alpha} = m$.

16.15. Если теперь стремить радиус r_1 закругления к нулю, то, учитывая, что модули функций $H_n^{(1)}(kr_1)$ и $H_n^{(2)}(kr_1)$ стремятся при этом к бесконечности, а отношение $\frac{H_n^{(2)}(kr_1)}{H_n^{(1)}(kr_1)}$ — к минус единице,¹ и замечая, что²

$$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) = 2J_n(x), \quad (16,73)$$

получаем из (16,71):

$$A = -\frac{4\pi^2 \mu I i}{ca} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m^{(2)}(kR)}{\frac{m}{\alpha}} J_{\frac{m}{\alpha}}(kR) \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}, \quad (16,74)$$

и эта формула дает уже решение задачи о диффракции испускаемых проводом волн от клина с внешним углом α .

В частности, если клин обращается в идеально проводящую пластинку, то надо положить $\alpha = 2\pi$, и (16,74) дает

$$A = -\frac{2\pi \mu I i}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m^{(2)}(kR)}{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(kR) \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}. \quad (16,75)$$

16.16. Из (16,74) можно получить и решение для случая набегающей на клин из бесконечности плоской волны, для чего достаточно предположить, что провод удаляется на бесконечность, но сила тока в нем увеличивается так, чтобы амплитуда волны у вершины клина имела конечное значение. Именно, замечая, что вектор-потенциал A^0 первичного поля, создаваемого проводом на расстоянии ρ от него при свободном распространении волн (т. е. при отсутствии клина), дается найденной нами раньше формулой (13,32), т. е.

$$A = -\frac{\pi \mu I i}{c} H_0^{(2)}(k\rho), \quad (16,76)$$

заменяя здесь ρ через R , т. е. через расстояние провода от вершины клина, устремляя, далее, R к бесконечности при фиксированном γ и при условии, что A имеет в начале координат (т. е. на ребре клина) фиксированное постоянное значение, которое примем равным единице, получим, используя асимптотическое выражение

$$H_0^{(2)}(kR) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})},$$

¹ По определению

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{i \sin \nu\pi} \quad \text{и} \quad H_\nu^{(2)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{i\nu\pi} J_\nu(x)}{-i \sin \nu\pi}$$

см.: (Д₉ 36) и (Д₉ 38) или К у з ь м и н, Б. Ф., стр. 45, (2)], так что при $\nu > 0$ и $x \rightarrow 0$, когда $|J_{-\nu}(x)| \rightarrow \infty$, а $J_\nu(x) \rightarrow 0$ получим, что

$$\left(\frac{H_\nu^{(2)}(x)}{H_\nu^{(1)}(x)} \right)_{x \rightarrow 0} \rightarrow -1.$$

² См. выражения для $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, данные в предыдущей сноске.

следующее условие, связывающее I и R :

$$-\frac{\pi \mu l i}{c} H_0^{(2)}(kR) \approx -\frac{\pi \mu l i}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})} = 1. \quad (16,77)$$

Подставляя теперь в (16,74) вместо $H_{\frac{m\pi}{\alpha}}^{(2)}(kR)$ ее асимптотическое выражение

$$H_{\frac{m\pi}{\alpha}}^{(2)}(kR) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-i(kR - \frac{m\pi^2}{2\alpha} - \frac{\pi}{4})} \quad (16,78)$$

и учитывая (16,77), получим в пределе при $R = \infty$ для клина с внешним углом α :

$$A = \frac{4\pi}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} e^{+i\frac{m\pi^2}{2\alpha}} J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(kr) \sin \frac{m\pi\gamma}{\alpha} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}. \quad (16,79)$$

В частности, для бесконечно-тонкой пластинки ($\alpha = 2\pi$)

$$A = 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{+i\frac{\pi m}{4}} J_{\frac{m}{2}}(kr) \sin \frac{m\gamma}{2} \sin \frac{m\theta}{2}, \quad \text{Im}(k) < 0. \quad (16,80)$$

Таким образом, мы получили полное решение поставленной задачи. К задаче о диффракции волн от бесконечного проводящего клина мы еще вернемся впоследствии, причем рассмотрим другой метод ее решения.

16.17. Заметим еще, что ряды (16,79)—(16,80) можно было бы суммировать, выразив их через комплексные интегралы определенного типа.¹ Преобразуя эти интегралы, можно было бы представить найденное выше решение в иных формах, что является крайне существенным, поскольку первичные ряды обладают сплошь и рядом настолько плохой сходимостью, что они мало пригодны (или даже вообще непригодны) для практических вычислений.² Мы здесь не будем останавливаться подробнее на этих преобразованиях в применении к рядам (16,79)—(16,80), поскольку те же результаты будут нами получены впоследствии иным способом.

16.18. Для того, чтобы покончить с рассматриваемой в данном разделе граничной задачей, остается еще разобрать вопрос об интегрировании уравнения (16,58) в том случае, когда задаваемые на контуре $ABB'A'A$ (рис. 19) значения искомой функции отличны от нуля.

Итак, пусть дано, что

$$\left. \begin{aligned} (A)_{r=r_1} &= f_1(\theta); & (A)_{r=r_2} &= f_2(\theta); & (0 < \theta < \alpha) \\ (A)_{\theta=0} &= \psi_1(r); & (A)_{\theta=\alpha} &= \psi_2(r); & (r_1 < r < r_2), \end{aligned} \right\} \quad (16,81)$$

где f_1, f_2, ψ_1, ψ_2 — некоторые заданные функции своих аргументов.

¹ Аналогичное замечание относится вообще к большинству полученных нами выше решений, имеющих форму рядов, члены которых суть голоморфные или мероморфные функции номера члена ряда.

² См., например, Франк — Мизес, ч. II, стр. 873.

Очевидно, достаточно рассмотреть вопрос об интегрировании однородного уравнения

$$\Delta A + k^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + k^2 A = 0 \quad (16,82)$$

при тех же граничных условиях (16,81). Действительно, так как выше (в п. 16.12) было найдено общее решение неоднородного уравнения (16,58) с произвольной правой частью при нулевых условиях на контуре, то вычитая его из искомого решения, определяемого уравнением (16,58) и граничными условиями (16,81), получим для разностной функции как раз уравнение (16,82) при тех же граничных условиях (16,81).

Для интегрирования уравнения (16,82), умножим его, в соответствии с общим правилом, на $v_m(\theta) d\theta$ [см. (16,18)] и проинтегрируем от нуля до α . Получается уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_m}{dr} \right) + \left[k^2 - \left(\frac{\pi m}{\alpha r} \right)^2 \right] A_m = \frac{\sqrt{2} \pi m}{\alpha^{3/2} r^2} [(-1)^m \psi_2(r) - \psi_1(r)], \quad (16,83)$$

интеграл которого легко находится и выражается через бесселевы функции порядка $\frac{\pi m}{\alpha}$.

Для определения постоянных интегрирования будут служить находимые из (16,81) граничные условия

$$\left. \begin{aligned} (A_m)_{r=r_1} &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_0^\alpha f_1(\theta) \sin \frac{\pi m \theta}{\alpha} d\theta, \\ (A_m)_{r=r_2} &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_0^\alpha f_2(\theta) \sin \frac{\pi m \theta}{\alpha} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (16,83')$$

Искомое решение получается теперь в виде ряда

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} A_m v_m(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m \theta}{\alpha}, \quad (16,84)$$

и мы таким образом находим полное решение данной предельной задачи при произвольном задании значений искомой функции на контуре области.

16.19. Примечание. Заметим, что если попытаться решать уравнение (16,82) при граничных условиях (16,81) путем применения обычного метода частных решений, для чего разложить функцию A на сумму двух функций $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, каждая из которых тоже удовлетворяет уравнению (16,82), и для которых граничные условия были бы ¹

$$(A^{(1)})_{r=r_1} = f_1(\theta); \quad (A^{(1)})_{r=r_2} = f_2(\theta); \quad (A^{(1)})_{\theta=0} = (A^{(1)})_{\theta=\alpha} = 0, \quad (16,85)$$

$$(A^{(2)})_{r=r_1} = (A^{(2)})_{r=r_2} = 0; \quad (A^{(2)})_{\theta=0} = \psi_1(r); \quad (A^{(2)})_{\theta=\alpha} = \psi_2(r), \quad (16,86)$$

¹ Ср. § 5 и п. 6.2.

то решение для $A^{(1)}$ надо было бы искать в форме ряда¹

$$A^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} [P_m J_{\frac{\pi m}{\alpha}}(kr) + Q_m J_{-\frac{\pi m}{\alpha}}(kr)] \sin \frac{\pi m \theta}{\alpha}, \quad (16,87)$$

где P_m и Q_m — постоянные, которые можно было бы легко определить, используя граничные условия (16,85), тогда как для $A^{(2)}$ пришлось бы составить сумму из всех тех частных решений уравнения (16,82), которые имеют вид

$$A_m = (C_m \sin m\theta + D_m \cos m\theta) [M_m J_m(kr) + N_m J_{-m}(kr)] \quad (16,88)$$

(C_m, D_m, M_m, N_m — постоянные) и которые обращаются в нуль при $r = r_1$ и при $r_1 = r_2$. Это последнее требование может быть удовлетворено, как нетрудно проверить, лишь в том случае, если m является одним из корней уравнения

$$J_m(kr_1)J_{-m}(kr_2) - J_m(kr_2)J_{-m}(kr_1) = 0, \quad (16,89)$$

которое, стало быть, нужно решать относительно номера m входящих в него бесселевых функций. Это обстоятельство делает решение задачи на таком пути практически невозможным, поскольку при этом потребовалось бы, кроме нахождения корней $m_s, s = 1, 2, \dots$ уравнения (16,89), еще и табулировать в интервале $r_1 < r < r_2$ входящие в решения (16,88) функции $[J_{m_s}(kr_1)J_{-m_s}(kr) - J_{m_s}(kr)J_{-m_s}(kr_1)]$ при $s = 1, 2, \dots$ Данное же выше решение (16,83) — (16,84) содержит только бесселевы функции вещественных² и известных номеров $\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right)$, где $m = 1, 2, \dots, \infty$. В частности, если α составляет целую часть от 2π , то номера этих функций будут целыми или полуцелыми, т. е. решение приводится к табулированным функциям. Очевидно, что получение решения с помощью метода частных решений неизмеримо сложнее получения его с помощью данного выше приема.

Пример 4

16. 20. Пусть теперь требуется решить первую предельную задачу для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = -4\pi\chi(r, \theta, z) \quad (16,90)$$

для цилиндрической области, образующие которой параллельны оси z , а сечение, перпендикулярное оси z , имеет изображенный на рис. 19 вид.³

¹ Т. е. в виде суммы частных решений, обращающихся в нуль при $\theta = 0$ и при $\theta = \alpha$.

² Корни m уравнения (16,89) будут, вообще говоря, комплексными, тем более, что обычно k — это комплексная величина.

³ Постоянная k в уравнении (16,90) может, в частности, равняться нулю; тогда это уравнение сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\chi(r, \theta, z).$$

Значения функции u будем считать заданными на поверхностях

$$r=r_1, r=r_2, \theta=0, \theta=\alpha, z=0, z=c, \quad (16,91)$$

причем

$$(u)_{r=r_1} = f_1(\theta, z); \quad (u)_{r=r_2} = f_2(\theta, z); \quad (16,92)$$

$$(u)_{\theta=0} = \psi_1(r, z); \quad (u)_{\theta=\alpha} = \psi_2(r, z); \quad (16,93)$$

$$(u)_{z=0} = F_1(r, \theta); \quad (u)_{z=c} = F_2(r, \theta). \quad (16,94)$$

Умножая (16,90) на $\sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{m\pi z}{c} dz$ и интегрируя в пределах от нуля до c , получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \theta^2} + \left[k^2 - \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right] u_m = -4\pi\chi_m + \frac{m\pi a}{c} [(-1)^m F_2 - F_1], \quad (16,95)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} u_m &= a \int_0^c u \sin \frac{m\pi z}{c} dz, \\ \chi_m &= a \int_0^c \chi \sin \frac{m\pi z}{c} dz. \end{aligned} \right\} \left(a = \sqrt{\frac{2}{c}} \right) \quad (16,96)$$

Граничные условия для u_m будут

$$\left. \begin{aligned} (u_m)_{r=r_1} &= a \int_0^c f_1(\theta, z) \sin \frac{m\pi z}{c} dz; & (u_m)_{r=r_2} &= a \int_0^c f_2(\theta, z) \sin \frac{m\pi z}{c} dz; \\ (u_m)_{\theta=0} &= a \int_0^c \psi_1(r, z) \sin \frac{m\pi z}{c} dz; & (u_m)_{\theta=\alpha} &= a \int_0^c \psi_2(\theta, z) \sin \frac{m\pi z}{c} dz. \end{aligned} \right\} \quad (16,97)$$

Задача о нахождении u сводится таким образом к нахождению величин u_m , определяемых уравнениями (16,95) и (16,97). Но эта последняя задача уже полностью решена нами в предыдущем примере, причем только надо там в уравнении (16,58) заменить k^2 через $\left[k^2 - \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right]$ и соответственно изменить входящие в правую часть уравнения (16,58) и в граничные условия функции. Найдя таким путем u_m , получим u в форме ряда

$$u = a \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin \frac{m\pi z}{c}, \quad (16,98)$$

т. е. получим полное решение поставленной задачи.

Так как таким образом найдем решение и при $k=0$, когда уравнение (16,90) переходит в уравнение Пуассона, то тем самым получим также и решение соответствующей трехмерной электростатической задачи. В частности, найдя решение при произвольных r_1 и r_2 и полагая затем $r_1=0, r_2=\infty$, а также удаляя плоскости $z=0$ и $z=c$ на беско-

нечное расстояние от создающей первичное поле системы зарядов,¹ сможем получить решение задачи о поле бесконечного идеально-проводящего клина, помещенного в произвольное внешнее трехмерное электростатическое поле (для этого надо будет проводить интегрирование в предположении, что как на поверхности клина, так и на бесконечности $u=0$). Мы здесь на этом останавливаться не будем, но впоследствии еще вернемся к этой задаче и дадим ее решение совсем другим способом.

§ 17. Поле внутри или вне цилиндра

17.1. В предыдущем параграфе мы занимались нахождением решений уравнений $\Delta u = -4\pi\rho$ или $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ для внутренних точек области, ограниченной шестью координатными поверхностями

$$r=r_1; r=r_2; \theta=\theta_1; \theta=\theta_2 > \theta_1; z=z_1; z=z_2,$$

на которых задавались граничные условия для искомой функции.

Если при этом, в частности, $r_1=0$, а разность $\theta_2-\theta_1$ очень близка к 2π , то обе координатные поверхности (полуплоскости) $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$ образуют соответственно малый двугранный угол (клин) (см. рис. 19, где $\theta_1=0$; $\theta_2=\alpha$), причем когда разность $\theta_2-\theta_1$ стремится к значению, равному 2π , то клин этот обращается в пределе в бесконечно-тонкую пластинку. Однако, и в этом предельном случае граничные условия

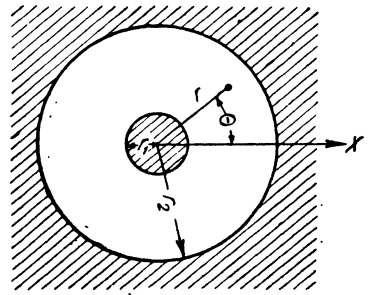


Рис. 22.

должны попрежнему задаваться в отдельности на обеих сторонах этой пластинки, т. е., например при $\theta=0$ и при $\theta=2\pi$.

Мы, однако, постоянно встречаемся и с такими задачами, когда ни при каких фиксированных значениях угла граничные условия не задаются. Именно, это будет всегда тогда, когда рассматривается область, внутренняя или внешняя по отношению к какому-либо цилиндру, например, область, ограниченная двумя коаксиальными цилиндрами (рис. 22).²

Для того, чтобы применить наш общий метод и к таким случаям, достаточно учесть то, что хотя теперь граничные условия не задаются

¹ При этом следует сперва положить в решении $c=\infty$, а затем выбрать какую-либо точку внутри распределения первичных зарядов, которые считаем сосредоточенными внутри некоторого конечного объема, за начало новых координат x' , y' , z' , подобно тому, как мы это делали, например, в п. 14.7 [см. (14,42)] или в п. 14.16 [см. (14,93)], и удалить на бесконечность от начала новой системы координат плоскость $z=0$.

² Вообще говоря, конечной длины по оси z .

ни при каких частных значениях θ , но зато само решение должно быть периодической функцией от θ с периодом, равным 2π , поскольку все значения θ , $\theta \pm 2\pi$, $\theta \pm 4\pi$ и т. д. полярного угла фактически соответствуют одной и той же точке пространства с каким-то вполне определенным значением искомой функции u . Последняя должна поэтому разлагаться в абсолютно и равномерно сходящийся во всем интервале ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) ряд вида

$$u = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \quad (17,1)$$

или, что то же,

$$u = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} u_m(r, z) e^{im\theta}, \quad (17,2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_m &\equiv a_m(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi + \theta_0} u(r, \theta, z) \cos m\theta d\theta, \\ b_m &\equiv b_m(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi + \theta_0} u(r, \theta, z) \sin m\theta d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (17,3)$$

и

$$u_m = u_m(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi + \theta_0} u(r, \theta, z) e^{-im\theta} d\theta, \quad (17,4)$$

и где θ_0 — любое вещественное число.

Применяя эту методику к общему уравнению (16,1), подставляя в него вместо u одно из выражений (17,1) или (17,2) и разлагая входящую в правую часть его функцию $f(r, \theta, z)$ тоже в соответствующий ряд вида

$$f(r, \theta, z) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (17,5)$$

или

$$f(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f_m(r, z) e^{im\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (17,6)$$

с коэффициентами, определяемыми подобно (17,3) и (17,4), получим, приравнявая коэффициенты при отдельных $\sin m\theta$, $\cos m\theta$ или $e^{im\theta}$:¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) a_m &= -4\pi \alpha_m, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 b_m}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) b_m &= -4\pi \beta_m, \end{aligned} \right\}, \quad (m \geq 0) \quad (17,7)$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) u_m = -4\pi f_m, \quad (-\infty \leq m \leq +\infty). \quad (17,8)$$

¹ Равенство их вытекает из единственности разложения функций в ряд Фурье во всем интервале ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Если граничные условия для u задаются на поверхностях $r=r_1$, $r=r_2$, $z=z_1$, $z=z_2$ и принадлежат к одному из типов (15,13), (15,14) или (15,15), то подставляя в них вместо u его выражения (17,3) или (17,4) и разлагая их правые части f_1 , f_2 , ψ_1 , ψ_2 или F_1 , F_2 в ряды вида (17,5) или (17,6), переведем их в аналогичные условия для a_m , b_m или u_m . Тем самым задача о нахождении u сведется к задаче о нахождении величин a_m , b_m или u_m , а это уже задача, решаемая данным выше общим методом. Ее решение, естественно, чрезвычайно упрощается в том частном случае, когда рассматриваемые явления обладают симметрией вращения вокруг оси z , т. е. когда они от угла θ вообще не зависят. Тогда подлежащее интегрированию уравнение (16,1) принимает более простой вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = -4\pi f(r, z), \quad (17,9)$$

и может быть решено обычным способом.

Пример 1

17.2. В качестве первого примера рассмотрим распределение стационарного тока в тонкой пластинке постоянной толщины и проводимости, к которой ток подводится и от которой отводится через два точечных электрода, наложенных на ее поверхность.

Будем рассматривать пластинку, как цилиндр радиуса R и высоты h , ось которого совпадает с осью z . Координаты оснований цилиндра пусть будут $z=0$, $z=h$.

Точечные электроды A_1 и A_2 (рис. 23), через которые ток I входит в пластинку и выходит из нее, будем считать расположенными на основании $z=0$ цилиндра, на диаметре $\theta=0$, симметрично относительно центра пластинки на расстоянии a от него. Мы будем их при этом сначала рассматривать не как точечные, а как имеющие форму малых площадок, ограниченных двумя диаметрами $\theta=-\varepsilon$ и $\theta=\varepsilon$, где ε весьма малая величина, в пределе стремящаяся к нулю, и двумя дугами кругов $r=a$ и $r=a+\delta < R$, где δ тоже стремится к нулю. Ток I будем считать входящим и выходящим через эти площадки с равномерной плотностью j_0 , равной

$$j_0 = \frac{I}{2a\varepsilon\delta}, \quad (17,10)$$

что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ даст как раз полный ток I через каждый электрод.

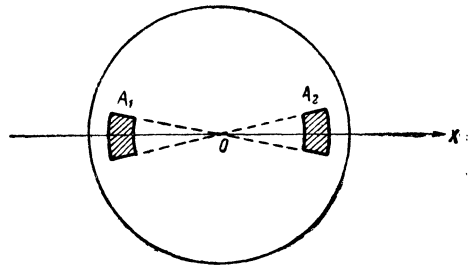


Рис. 23.

Плотность \mathbf{j} токов внутри цилиндра определяется формулой

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \text{grad } \varphi, \quad (17,11)$$

где φ — потенциал токового поля, удовлетворяющий внутри цилиндра уравнению Лапласа¹

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (17,12)$$

На той части боковой поверхности цилиндра, через которую ток не вытекает, нормальная к поверхности составляющая тока должна равняться нулю. Это дает условия

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 0, \quad (17,13)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h} = 0, \quad (17,14)$$

тогда как на торце $z=0$ будет, в соответствии с (17,11):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{вне пределов соприкосновения с электродами;} \\ -j_0/\sigma & \text{на положительном электроде } A_1; \\ +j_0/\sigma & \text{на отрицательном электроде } A_2. \end{cases} \quad (17,15)$$

Чтобы решить задачу, полагаем, как в (17,2) и (17,4)

$$\varphi = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos m\theta \quad (17,16)$$

и²

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \varphi \cos m\theta \, d\theta, \quad (17,17)$$

причем учитываем, что при выбранном нами расположении электродов потенциал φ должен быть четной функцией от θ , так что синусные члены в разложении (17,16) должны отсутствовать.

Для a_m получается уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} a_m = 0. \quad (17,18)$$

Переводим, далее, граничные условия (17,13) — (17,15) для φ в условия для a_m , для чего умножаем их на $\frac{1}{\pi} \cos m\theta \, d\theta$ и интегрируем по θ от $-\varepsilon$ до $2\pi - \varepsilon$. Это дает:

$$\left(\frac{\partial a_m}{\partial r} \right)_{r=R} = 0, \quad (17,19)$$

$$\left(\frac{\partial a_m}{\partial z} \right)_{z=h} = 0, \quad (17,20)$$

и

$$\left(\frac{\partial a_m}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \text{ при } 0 \leq r < a \text{ и при } R > r > a + \delta, \quad (17,21)$$

¹ См. п. 2.7.

² Ср. (17,4). То, что здесь положено $\theta_0 = -\varepsilon$, вызывается соображениями вычислительного удобства.

тогда как при $a \leq r \leq a + \delta$ получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a_m}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} \cos m\theta d\theta = \frac{j_0}{\pi\sigma} \left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \cos m\theta d\theta - \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \cos m\theta d\theta \right] = \\ &= \frac{2j_0}{\pi m\sigma} \sin m\varepsilon [1 - (-1)^m]. \end{aligned} \quad (17, 22)$$

Это показывает, что

$$\left(\frac{\partial a_{2s}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0; \quad (17, 23)$$

$$\left(\frac{\partial a_{2s+1}}{\partial z}\right)_{z=0} = \begin{cases} 4j_0 \frac{\sin(2s+1)\varepsilon}{(2s+1)\pi\sigma} & \text{при } a \leq r \leq a + \delta, \\ 0 & \text{при всех остальных } r. \end{cases} \quad (17, 24)$$

17.3. Найдем распределение тока в тонкой пластинке, т. е. когда $h \ll R$. При этом составляющая тока, перпендикулярная к плоскости пластинки, интереса не представляет, а существенно знать только параллельные поверхности составляющие тока, притом даже не сами j_r и j_θ , а лишь их проинтегрированные по толщине пластинки значения (линейные плотности токов вдоль поверхности пластинки).

Нас будет, поэтому, интересовать в дальнейшем нахождение величин

$$\bar{J}_r = \int_0^h j_r dz = -\sigma \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz = -\sigma \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h \varphi dz = -\sigma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \quad (17, 25)$$

и

$$\bar{J}_\theta = \int_0^h j_\theta dz = -\sigma \int_0^h \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dz = -\frac{\sigma}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}, \quad (17, 26)$$

где

$$\bar{\varphi} = \int_0^h \varphi dz. \quad (17, 27)$$

$\bar{\varphi}$ только отсутствием множителя $\left(\frac{1}{h}\right)$ отличается от среднего по толщине пластинки значения потенциала. Решение интересующей нас задачи приводится, стало быть, к нахождению $\bar{\varphi}$ как функции от r и θ .

Для того, чтобы это сделать, замечаем, во-первых, что интегрирование соотношения (17, 16) по z в пределах $(0, h)$ дает

$$\bar{\varphi} = \int_0^h \varphi dz = \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{a}_m \cos m\theta, \quad (17, 28)$$

где

$$\bar{a}_m = \int_0^h a_m dz, \quad (17, 29)$$

а, во-вторых, что, умножая (17, 18) на dz и интегрируя в пределах $(0, h)$, получаем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{\varphi}_m}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \bar{a}_m = \left(\frac{\partial a_m}{\partial z} \right)_{z=0} \equiv f_m(z). \quad (17, 30)$$

(17, 23) вместе с условием (17, 19) и условием конечности решения при $r=0$ показывают, что при $m=2s$ $\bar{a}_{2s}=0$. При $m=2s+1$, $s \geq 0$, получаем общий интеграл уравнения (17, 30), удовлетворяющий условию конечности при $r=0$, в виде

$$\bar{a}_{2s+1} = A_{2s+1} r^{2s+1} + \frac{1}{2(2s+1)} \int_0^r f_{2s+1}(\xi) \xi \left[\left(\frac{r}{\xi} \right)^{2s+1} - \left(\frac{\xi}{r} \right)^{2s+1} \right] d\xi, \quad (17, 31)$$

где ¹

$$\begin{aligned} A_{2s+1} &= -\frac{1}{2(2s+1)R^{2s+1}} \int_0^R f_{2s+1}(\xi) \xi \left[\left(\frac{R}{\xi} \right)^{2s+1} + \left(\frac{\xi}{R} \right)^{2s+1} \right] d\xi = \\ &= -\frac{I \sin(2s+1)\varepsilon}{R^{2s+1} a \varepsilon \delta \pi \sigma (2s+1)^2} \int_a^{a+\delta} \xi \left[\left(\frac{R}{\xi} \right)^{2s+1} + \left(\frac{\xi}{R} \right)^{2s+1} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (17, 32)$$

Для $\bar{\varphi}$ находим теперь выражение:

$$\bar{\varphi} = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{a}_{2s+1} \cos(2s+1)\theta, \quad (17, 33)$$

и этой формулой задача и решается, причем только остается перейти в формулах (17, 31) — (17, 32) для \bar{a}_{2s+1} к предельному случаю $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, соответствующему точечным электродам.

Получаем при этом, в частности:

$$A_{2s+1} = -\frac{I}{R^{2s+1} \pi \sigma (2s+1)} \left[\left(\frac{R}{a} \right)^{2s+1} + \left(\frac{a}{R} \right)^{2s+1} \right], \quad s \geq 0. \quad (17, 34)$$

Если сперва ограничиться рассмотрением значений $\bar{\varphi}$ при $0 \leq r < a$, то (17, 33) вместе с (17, 31) и (17, 34) дает:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\frac{I}{\pi \sigma} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{2s+1} + \left(\frac{ar}{R^2} \right)^{2s+1} \right] \frac{\cos(2s+1)\theta}{2s+1} = \\ &= \frac{I}{4\pi \sigma} \left[\operatorname{Ig} \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} + \operatorname{Ig} \frac{R^4 - 2aR^2 r \cos \theta + a^2 r^2}{R^4 + 2aR^2 r \cos \theta + a^2 r^2} \right], \end{aligned} \quad (17, 35)$$

причем использована формула (8, 22). Формула (17, 35) верна и при $r > a$.

Подставляя найденное значение $\bar{\varphi}$ в (17, 25) и (17, 26), видим, что так как в выражения для линейной плотности токов \bar{j}_r и \bar{j}_θ входит только произведение $\bar{\varphi}$, которое, согласно (17, 35), от h не зависит,

¹ Это непосредственно вытекает из условия, что $\left(\frac{\partial \bar{a}_{2s+1}}{\partial r} \right)_{r=R} = 0$, получающегося из (17, 19),

то эти плотности не зависят от толщины пластинки и сохраняют свои значения, получаемые из (17, 25) — (17, 26) и (17, 35), и при стремлении h к нулю. Таким образом, получаем полное решение поставленной задачи. Мы можем его переписать в еще более простой форме, если введем обозначение $a' = \frac{R^2}{a}$ и положим

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}; & \rho'_1 &= \sqrt{a'^2 - 2a'r \cos \theta + r^2}; \\ \rho_2 &= \sqrt{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2}; & \rho'_2 &= \sqrt{a'^2 + 2a'r \cos \theta + r^2}, \end{aligned} \right\} (17, 36)$$

где ρ_1 и ρ_2 — расстояния точки (r, θ) от электродов A_1 и A_2 , а ρ'_1 и ρ'_2 — ее же расстояния от их отражений в круге, т. е. от точек с координатами $(a', 0)$ и $(-a', 0)$ соответственно. В этих обозначениях (17, 35) запишется так:

$$\bar{\varphi} = \frac{I}{2\pi\sigma} \lg \frac{\rho_1 \rho'_1}{\rho_2 \rho'_2}. \quad (17, 37)$$

17.4. Если бы понадобилось найти не только $\bar{\varphi}$, но и полное решение задачи для цилиндрической пластинки конечной толщины h , то надо было бы не просто интегрировать уравнение (17, 18) по z в пределах $(0, h)$, а сперва умножить его на $w_n(z)$, где $w_n(z)$ — одна из тех функций, определяемых формулой (16, 9), которые удовлетворяют условиям $w'_n(0) = w'_n(h) = 0$, т. е. одна из функций

$$w_n(z) = a \cos \frac{n\pi z}{h}, \quad a^2 = \frac{2}{h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \infty, \quad (17, 38)$$

и потом уже интегрировать по z в тех же пределах. При этом получится вместо (17, 30) уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{da_m^{(n)}}{dr} \right) - \left(\frac{n^2 \pi^2}{h^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) a_m^{(n)} = a \left(\frac{\partial a_m}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad n \geq 0, \quad (17, 39)$$

где

$$a_m^{(n)} = \int_0^h a_m(r, z) w_n(z) dz. \quad (17, 40)$$

Так как общий интеграл однородного уравнения, получающегося из (17, 39) при обращении правой его части в нуль, известен и равен

$$a_m^{(n)} = A_m^{(n)} I_m \left(\frac{n\pi r}{h} \right) + B_m^{(n)} K_m \left(\frac{n\pi r}{h} \right), \quad (17, 41)$$

где $A_m^{(n)}$ и $B_m^{(n)}$ постоянные, то легко найдем и интеграл уравнения (17, 39), удовлетворяющий условиям, что $(a_m^{(n)})$ должно оставаться конечным при $r=0$ и что $\left(\frac{\partial a_m^{(n)}}{\partial r} \right)_{r=R} = 0$ [ср. (17, 19)]. Таким образом получим $a_m^{(n)}$ при $n \geq 0$, а отсюда и a_m , ибо

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_m^{(n)} w_n(z) = a \sum_{n=1}^{\infty} a_m^{(n)} \cdot \cos \frac{n\pi z}{h}. \quad (17, 42)$$

Подставляя это в (17, 16), найдем полное решение задачи.

Пример 2

17.5. В качестве второго примера рассмотрим наново уже решавшуюся нами раньше в п. 14.19 задачу о распределении стационарного тока внутри цилиндра при указанном там расположении электродов, причем, однако, начнем с умножения основного уравнения (14, 95) задачи не на $\frac{2}{h} \cos \frac{k\pi z}{h} dz$, как было сделано в п. 14.19, а на соответствующую функцию от r .

Для нахождения этой функции заметим, прежде всего, что общее решение уравнения (14, 95), имеющее форму произведения функции только от r на функцию только от z , будет

$$\varphi = (A \operatorname{sh} nz + B \cos nz) [MJ_0(nr) + NY_0(nr)], \quad (17, 43)$$

где A, B, M, N и n — постоянные, а $J_0(nr)$ и $Y_0(nr)$ — бесселевы функции нулевого порядка первого и второго рода. Из этих функций только $J_0(nr)$ остается конечной при $r=0$, тогда как $Y_0(nr)$ обращается в бесконечность, а потому, в соответствии с изложенными в п. 15.6 соображениями, должно положить ¹

$$\bar{Q}_k(r) = J_0(n_k r), \quad (17, 44)$$

причем числа n_k должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось условие $\bar{Q}'_k(R) = 0$. Это дает уравнение

$$J'_0(n_k R) = -J_1(n_k R) = 0. \quad (17, 45)$$

Отсюда видно, что должно быть

$$n_k = \frac{\xi_k}{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \infty, \quad (17, 46)$$

где ξ_k — корни уравнения $J_1(\xi) = 0$, которые считаем расположенными в порядке их возрастания, причем $\xi_0 = 0$.

Сравнивая уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{Q}_k}{dr} \right) + n_k^2 r \bar{Q}_k = 0, \quad (17, 47)$$

которому удовлетворяет функция (17, 44), с общим уравнением (15, 6), в котором нужно заменить теперь s_1 через r , видим, что в данном случае $p_1(s_1) = p_1(r) = r$, $q_1(s_1) = 0$, $r_1(s_1) = r_1(r) = r$, а так как кроме того $a_1 = 0$; $b_1 = R$, то, как показывает сравнение с (15, 7), непосредственно определяться из уравнения (14, 95) будет величина

$$\bar{\varphi}_k = \int_0^R r \varphi \bar{Q}_k dr = \int_0^R r \varphi J_0(n_k r) dr. \quad (17, 48)$$

Чтобы найти $\bar{\varphi}_k$, нужно, как обычно, помножить (14, 95) на $r \bar{Q}_k dr$ и проинтегрировать по r от нуля до R .

¹ Если бы мы пожелали воспользоваться нормированными функциями, то нужно было бы еще ввести в формулу (17, 44) нормировочную постоянную.

Учитывая при этом условие (17, 45) и поведение \bar{Q}_k при $r \rightarrow 0$, придем к уравнению

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_k}{dz^2} - n_k^2 \bar{\varphi}_k = -R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} J_0(\xi_k) = -R \psi(z) J_0(\xi_k), \quad (17,49)$$

причем использована одна из формул (14, 96). Остальные формулы (14, 96) дают:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \bar{\varphi}_k}{dz} \right)_{z=0} &= \int_0^R r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} J_0(n_k r) dr = 0, \\ \left(\frac{d \bar{\varphi}_k}{dz} \right)_{z=h} &= \int_0^R r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h} J_0(n_k r) dr = \int_0^{\rho} r f(r) J_0(n_k r) dr. \end{aligned} \quad (17,50)$$

Полагая для краткости

$$-R \psi(z) J_0(\xi_k) = F_k(z); \quad \int_0^{\rho} r f(r) J_0(n_k r) dr = \psi_k, \quad (17,51)$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_k &= \frac{\text{ch}(n_k z)}{n_k \text{sh}(n_k h)} \psi_k - \frac{\text{ch } n_k (h-z)}{n_k \cdot \text{sh}(n_k h)} \int_0^h F_k(t) \text{ch } n_k t dt - \\ &- \frac{1}{n_k} \int_z^h F_k(t) \text{sh } n_k (z-t) dt. \end{aligned} \quad (17,52)$$

Окончательное решение задачи найдем теперь по формуле (15, 20), причем так как

$$\int_0^R r \bar{Q}_k^2 dr = \int_0^R r J_0^2 \left(\frac{\xi_k r}{R} \right) dr = \frac{R^2 J_0^2(\xi_k)}{2}, \quad (17,53)$$

то получается:

$$\varphi = \frac{2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_k}{J_0^2(\xi_k)} J_0 \left(\xi_k \frac{r}{R} \right). \quad (17,54)$$

Таким образом нашли новую форму решения рассматриваемой задачи, отличную от ранее данной.²

Пример 3

17.6. В качестве последнего примера рассмотрим наново уже разбиравшуюся в п. 14.14 задачу о нахождении электростатического поля, создаваемого внутри цилиндрической полости некоторым аксиально-симметричным распределением зарядов, причем распределение потенциала на поверхности, ограничивающей полость, будем считать задан-

¹ (Д_э 184).

² По поводу улучшения сходимости ряда (17, 54) см. п. 28. 5, пример 3.

ным и тоже обладающим симметрией вращения. Эта задача сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho(r, z) \quad (17,55)$$

при условии, что на оси цилиндра функция u должна оставаться конечной,¹ а при $r=a$ и при $z=0$ и $z=c$ — принимать заданные значения, причем будем полагать

$$(u)_{r=a} = F(z); \quad (17,56)$$

$$\left. \begin{aligned} (u)_{z=0} &= f_1(r) \\ (u)_{z=c} &= f_2(r) \end{aligned} \right\}. \quad (17,57)$$

Так как соответствующее одночленное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0$$

допускает, согласно (17, 43) и (14, 95), частное решение вида $\bar{u} = Q(r) \cdot F(z)$, где $Q(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dQ}{dr} \right) + \lambda^2 r Q = 0, \quad \lambda^2 = \text{const}, \quad (17,58)$$

и имеет вид

$$Q = M J_0(\lambda r) + N Y_0(\lambda r), \quad (17,59)$$

то следует, в соответствии с общей теорией, искать u в форме ряда

$$u = \sum_{(k)} u_k(z) Q_k(r), \quad (17,60)$$

где

$$u_k(z) = \int_0^a r u Q_k(r) dr, \quad (17,61)$$

и где $Q_k(r)$ — те из решений (17, 59) уравнения (17, 58), которые сохраняют конечное значение при $r=0$, обращаются в нуль при $r=a$ и удовлетворяют условию нормировки (15, 22). Такими решениями будут, согласно (17, 59), функции

$$Q_k(r) = M_k J_0\left(\frac{rx_k}{a}\right), \quad k = 1, 2, \dots \text{ до } \infty, \quad (17,62)$$

где x_k — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$, причем для нахождения постоянной M_k получаем формулу²

$$M_k^2 = \frac{1}{\int_0^a r J_0^2\left(\frac{rx_k}{a}\right) dr} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\int_0^1 u J_0^2(ux_k) du} = \frac{2}{a^2 [J_0'(x_k)]^2}. \quad (17,63)$$

Умножая (17, 55) на $r Q_k dr = M_k r J_0\left(\frac{rx_k}{a}\right) dr$, интегрируя от нуля до a и используя (17, 56) и (17, 58), где надо положить $\lambda = \frac{x_k}{a}$, а также

¹ Поскольку мы пока будем считать плотность внутри цилиндра ограниченной функцией координат.

² Ср. (Д₂ 185) или Кузьмин, Б. Ф., стр. 126, формула (2).

учитывая поведение $Q_k(r)$ и $Q'_k(r)$ при $r=0$, получим следующее уравнение для u_k :¹

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{dz^2} - \left(\frac{x_k}{a}\right)^2 u_k &= x_k M_k J'_0(x_k) F(z) - 4\pi\rho_k = \\ &= -x_k M_k J_1(x_k) F(z) - 4\pi\rho_k, \end{aligned} \quad (17,64)$$

причем положено:

$$\rho_k = \int_0^a r \rho(r, z) Q_k(r) dr = M_k \int_0^a r \rho J_0\left(\frac{x_k r}{a}\right) dr. \quad (17,65)$$

Граничные условия (17, 57) дают:

$$\left. \begin{aligned} (u_k)_{z=0} &= M_k \int_0^a r f_1(r) J_0\left(\frac{x_k r}{a}\right) dr \\ (u_k)_{z=c} &= M_k \int_0^a r f_2(r) J_0\left(\frac{x_k r}{a}\right) dr \end{aligned} \right\}, \quad (17,66)$$

и решение задачи привелось к интегрированию уравнения (17,64) при условиях (17, 66), что уже не представляет труда.

17.7. Доведем до конца вычисления для случая, когда объемный заряд отсутствует, а потенциал u на боковой поверхности цилиндра и на его торце $z=c$ равен нулю, а при $z=0$ имеет постоянное значение, равное V .

(17, 64) дает тогда

$$\frac{d^2 u_k}{dz^2} - \left(\frac{x_k}{a}\right)^2 u_k = 0, \quad (17,67)$$

а граничные условия (17, 66) обращаются в такие:

$$\left. \begin{aligned} (u_k)_{z=0} &= V \int_0^a r Q_k(r) dr = -\frac{M_k V a^2}{x_k} J'_0(x_k), \\ (u_k)_{z=c} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17,68)$$

Решение уравнения (17, 67), удовлетворяющее условию (17,68), имеет вид

$$u_k = -\frac{M_k V a^2 J'_0(x_k)}{x_k \operatorname{sh} \frac{x_k c}{a}} \operatorname{sh} \frac{(c-z)x_k}{a}, \quad (17,69)$$

¹ Заметим также, что $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$ в силу аксиальной симметрии.

² Значение интеграла в этой формуле сразу получается из уравнения (17, 58), где надо положить $\lambda = \frac{x_k}{a}$ и проинтегрировать по r от нуля до a . Пользуясь при этом выражением (17, 62) для $Q_k(r)$, как раз найдем данный в тексте результат.

а подставляя это в (17, 60) и пользуясь формулами (17, 62) и (17, 63), найдем:

$$u = -2V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{c-z}{a} \right) x_k \cdot J_0 \left(\frac{rx_k}{a} \right)}{x_k J_0'(x_k) \operatorname{sh} \frac{x_k c}{a}}. \quad (17,70)$$

Если, в частности, конец $z=c$ цилиндра удаляется на бесконечность, так что $c=\infty$, то формула (17, 70) переходит в такую:

$$u = -2V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{zx_k}{a}} J_0 \left(\frac{rx_k}{a} \right)}{x_k J_0'(x_k)} = 2V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{zx_k}{a}} J_0 \left(\frac{rx_k}{a} \right)}{x_k J_1(x_k)}. \quad (17,71)$$

17.8. Заметим, что только что полученное нами решение (17, 71) должно совпадать с ранее найденным решением (14, 68) аналогичной задачи, если только в этом последнем заменить V на $-V$ и добавить к нему аддитивную постоянную V . Действительно, в обоих случаях мы имеем дело с решением уравнения Лапласа для полубесконечного цилиндра радиуса a (внутренняя задача), у которого потенциал торца равен V , а боковая поверхность имеет потенциал, равный нулю. Так как оба рассматриваемых решения, кроме того, убывают достаточно быстро при $z \rightarrow \infty$ (т. е. при удалении от торца цилиндра), то из единственности решения электростатической задачи при перечисленных условиях и вытекает высказанное выше утверждение. Заметим при этом, что в то время как (14, 68) дает форму решения, удобную при больших значениях отношения $\frac{z}{a}$ и невыгодную при $\frac{z}{a} \gg 1$, формула (17, 71), напротив, весьма удобна при $\frac{z}{a} \gg 1$ и мало пригодна при $\frac{z}{a} \ll 1$.¹

17.9. Покажем еще непосредственно тождественность обоих указанных решений. Для этого заметим, что ряд (17, 71) можно рассматривать как сумму вычетов функции

$$F(t) = -2V \frac{e^{-t \frac{z}{a}} J_0 \left(\frac{r}{a} t \right)}{t J_0(t)}, \quad \frac{r}{a} < 1, \quad (17,72)$$

в особых точках ее, соответствующих корням стоящей в знаменателе функции $J_0(t)$. Так как эта сумма вычетов равна деленному на $2\pi i$ значению комплексного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(z)} F(t) dt, \quad (17,73)$$

¹ В частности, если попытаться вычислить, исходя из (17, 71), поле у самой поверхности торца, в центре его, т. е. при $z=0$ и при $r=0$, то получим даже расходящийся ряд. Как мы видели в § 14, поле это легко вычислить, исходя из (14, 68).

взятого в плоскости t по петле L , идущей, как показано на рис. 24, из $+\infty$ над вещественной положительной полуосью OX , пересекающей ее между нулем и первым корнем x_1 функции $J_0(\xi)$, и возвращающейся в $+\infty$ под этой осью, то получим

$$u = -\frac{V}{\pi i} \int_{(L)} \frac{e^{-t \frac{z}{a}} J_0\left(\frac{r}{a} t\right) dt}{t J_0(t)}. \quad (17,74)$$

Нетрудно видеть, что к пути интегрирования могут быть добавлены бесконечно удаленные дуги B_1A_1 и A_2B_2 , интегралы по которым равны нулю. Интеграл (17, 74) может быть поэтому заменен интегралом по мнимой оси, взятым от $+i\infty$ до $-i\infty$, причем только нужно обойти точку $t=0$ по малому полукружку CDE радиуса $\rho < x_1$, расположенному справа от этой оси. Таким образом получаем:

$$u = -\frac{V}{\pi i} \left[\int_{i\infty}^{i\rho} \frac{e^{-iy \frac{z}{a}} J_0\left(\frac{ry}{a} i\right) dy}{y J_0(iy)} + \int_{-i\rho}^{-i\infty} \frac{e^{-iy \frac{z}{a}} J_0\left(\frac{zy}{a} i\right) dy}{y J_0(iy)} + \int_{(P)} \frac{e^{-t \frac{z}{a}} J_0\left(\frac{rt}{a}\right) dt}{t J_0(t)}, \quad (17,75)$$

где последний интеграл берется по полукружку CDE .

Если теперь стремиться ρ к нулю, то в последнем интеграле $|t| \rightarrow 0$, причем

$$\frac{e^{-t \frac{z}{a}} J_0\left(\frac{rt}{a}\right)}{J_0(t)} \rightarrow 1,$$

из чего следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{(P)} \frac{e^{-t \frac{z}{a}} J_0\left(\frac{rt}{a}\right) dt}{t J_0(t)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{(CDE)} \frac{dt}{t} = -\pi i, \quad (17,76)$$

тогда как первые два можно объединить, если заменить во втором из них y на $-y$. Учитывая, что $J_0(ix) = I_0(x)$,¹ находим:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{+i\infty}^{i\rho} + \int_{-i\rho}^{-i\infty} \right\} = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{yz}{a} I_0\left(\frac{ry}{a}\right) dy}{y I_0(y)}, \quad (17,77)$$

и формула (17, 75) обращается в такую:

$$u = -\frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{yz}{a} I_0\left(\frac{ry}{a}\right) dy}{y I_0(y)} + V = V - \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin uz I_0(ur) du}{u I_0(ua)}. \quad (17,78)$$

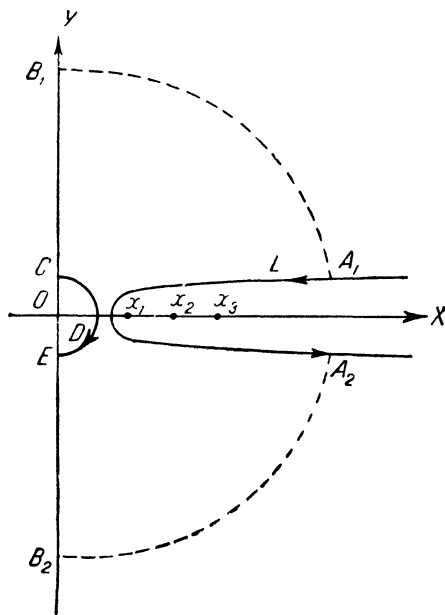


Рис. 24.

¹ См. (Д₂ 53).

Это решение соответствует случаю, когда на торце цилиндра, т. е. при $z=0$, потенциал равен V , а на боковой поверхности при $r=a$ он равен нулю.¹ Вычитая из u V , получим решение u_1 для случая, когда потенциал на торце равен нулю, а на боковой поверхности равен $-V$. При этом находим:

$$u_1 = (u - V) = -\frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin uz}{u} \frac{I_0(ur)}{I_0(ua)} du,$$

а заменяя здесь V на $-V$, получим как раз формулу (14, 68).

§ 18. Несколько различных однородных сред. Граничные поверхности в виде коаксиальных круговых цилиндров

18.1. До сих пор мы ограничивались рассмотрением проблем, связанных с решением того или иного уравнения для некоторой области, заполненной одной однородной средой. Тот же метод может быть, однако, применен во многих случаях и тогда, когда в пространстве имеется не одна, а несколько сред, различающихся по своим свойствам.

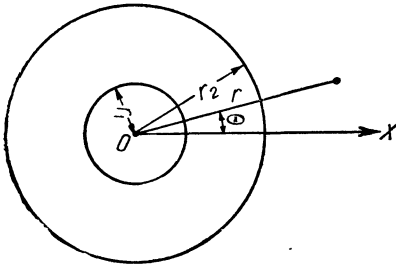


Рис. 25.

Покажем это на примере электростатической задачи, причем предположим, что поверхности раздела отдельных сред имеют форму коаксиальных цилиндров (рис. 25) с радиусами r_1, r_2, \dots , и т. д., и что внутри первого цилиндра с радиусом r_1 находится среда с диэлектрической постоянной ϵ_1 , между цилиндрами $r=r_1$ и $r=r_2$ — среда с диэлектрической постоянной ϵ_2 и т. д. Согласно (2,20), в k -ой области, т. е. в области, заполненной средой с $\epsilon = \epsilon_k$, потенциал $\varphi = \varphi^{(k)}$ должен удовлетворять уравнению

$$\Delta \varphi^{(k)} = -\frac{4\pi \rho^{(k)}}{\epsilon_k}, \tag{18,1}$$

где $\rho^{(k)}$ — плотность объемного заряда в некоторой точке этой области, а на границе k -ой и $(k+1)$ -ой областей должны выполняться условия (2,21), которые в случае, если на самой поверхности раздела сред не имеется поверхностных зарядов и двойных слоев, могущих

¹ И то и другое, кстати, прямо видно из (17,78), ибо при $z=0$ входящий в формулу интеграл обращается в нуль, а при $r=a$ и $z > 0$ $\int_0^{\infty} \frac{\sin uz}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

обусловить скачок радиальной компоненты вектора \mathbf{D} или потенциала при переходе от k -ой среды к $(k+1)$ -ой,¹ могут быть записаны в таком виде:

$$(\varphi^{(k)})_{r=r_k} = (\varphi^{(k+1)})_{r=r_k}, \quad (18,2)$$

$$\varepsilon_k \left(\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r} \right)_{r=r_k} = \varepsilon_{k+1} \left(\frac{\partial \varphi^{(k+1)}}{\partial r} \right)_{r=r_k}. \quad (18,3)$$

К этим условиям добавляется еще, в случае необходимости, требование конечности $\varphi^{(1)}$ в точке $r=0$ и требование обращения в нуль потенциала или поля на бесконечности или условия на внешних электродах, если таковые имеются.

Перепишывая уравнение (18,1) в цилиндрических координатах с осью, совпадающей с общей осью пограничных цилиндрических поверхностей, что дает:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial z^2} = - \frac{4\pi \rho^{(k)}(r, \theta, z)}{\varepsilon_k} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (18,4)$$

и разлагая каждую из величин $\varphi^{(k)}$ и $\rho^{(k)}$ в ряды вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(k)} &= \frac{1}{2} a_0^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^{(k)} \cos m\theta + b_m^{(k)} \sin m\theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varphi_m^{(k)} e^{im\theta}, \\ \text{где} \\ a_m^{(k)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^{(k)} \cos m\theta d\theta; \quad b_m^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^{(k)} \sin m\theta d\theta; \\ \varphi_m^{(k)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^{(k)} e^{-im\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (18,5)$$

и

$$\rho^{(k)} = \frac{1}{2} \alpha_0^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(k)} \cos m\theta + \beta_m^{(k)} \sin m\theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \rho_m^{(k)} e^{im\theta}, \quad (18,6)$$

получим, например, для величин $\varphi_m^{(k)}$ систему уравнений

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_m^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_m^{(k)}}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \varphi_m^{(k)} = - \frac{4\pi \rho_m^{(k)}}{\varepsilon_k}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (18,7)$$

тогда как граничные условия (18,2) — (18,3) дают:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_m^{(k)})_{r=r_k} &= (\varphi_m^{(k+1)})_{r=r_k}, \\ \varepsilon_k \left(\frac{\partial \varphi_m^{(k)}}{\partial r} \right)_{r=r_k} &= \varepsilon_{k+1} \left(\frac{\partial \varphi_m^{(k+1)}}{\partial r} \right)_{r=r_k}. \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (18,8)$$

Аналогичные результаты получаются для $a_m^{(k)}$ и $b_m^{(k)}$, так что например,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_m^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 a_m^{(k)}}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} a_m^{(k)} = - \frac{4\pi \alpha_m^{(k)}}{\varepsilon_k}, \quad (18,9)$$

¹ Можно было бы, при желании, провести все решение задачи и не вводя этих ограничений, а используя непосредственно граничные условия в форме (2, 21).

$$\left. \begin{aligned} (a_m^{(k)})_{r=r_k} &= (a_m^{(k+1)})_{r=r_k}, \\ \varepsilon_k \left(\frac{\partial a_m^{(k)}}{\partial r} \right)_{r=r_k} &= \varepsilon_{k+1} \left(\frac{\partial a_m^{(k+1)}}{\partial r} \right)_{r=r_k}, \end{aligned} \right\} \quad (18,10)$$

и такие же уравнения для $b_m^{(k)}$. Решая полученные системы (18, 7) — (18, 8) и т. д., найдем все $\varphi_m^{(k)}$, или соответственно, все $a_m^{(k)}$ и $b_m^{(k)}$, а тем самым и полное решение задачи.

Пример 1

18.2. Плоская задача. В этом случае как распределение зарядов, так и поле не зависят от z , и уравнения (18, 9) — (18, 10) принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{da_m^{(k)}}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} a_m^{(k)} = - \frac{4\pi a_m^{(k)}}{\varepsilon_k} \equiv f_m^{(k)}(r), \quad (18,11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k \frac{da_m^{(k)}}{dr} \Big|_{r=r_k} &= \varepsilon_{k+1} \frac{da_m^{(k+1)}}{dr} \Big|_{r=r_k}, \\ a_m^{(k)} \Big|_{r=r_k} &= a_m^{(k+1)} \Big|_{r=r_k}, \end{aligned} \right\} \quad (18,12)$$

и такие же уравнения получаются для $b_m^{(k)}$ или для $\varphi_m^{(k)}$.

Предположим, для конкретности, что имеются три среды $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, из которых внешняя простирается до бесконечности, и что внешнее поле создается бесконечно-тонкой заряженной нитью с зарядом e на единицу длины, находящейся во второй среде и проходящей через точку $(a, 0)$.

Нить эту будем рассматривать так же, как мы это делали выше, как предельный случай равномерно заряженной по объему призмы (бесконечно-длинной),¹ сечение которой плоскостью $z=0$ ограничено двумя радиусами $\theta = -\Delta, \theta = +\Delta$ и двумя дугами кругов $r=a > r_1$ и $r=a+\delta < r_2$, где δ и Δ весьма малы и в пределе стремятся к нулю, а объемная плотность ρ_0 заполняющего призму объемного заряда равна

$$\rho_0 = \frac{e}{2a\delta\Delta}. \quad (18,13)$$

В первой и третьей областях получается из-за $f_m^{(1)} = f_m^{(3)} = 0$:²

$$a_m^{(1)} = \begin{cases} A_0^{(1)} \lg r + B_0^{(1)} & \text{при } m=0; \\ A_m^{(1)} r^m + B_m^{(1)} r^{-m} & \text{при } m>0; \end{cases} \quad (18,14)$$

$$a_m^{(3)} = \begin{cases} A_0^{(3)} \lg r + B_0^{(3)} & \text{при } m=0; \\ A_m^{(3)} r^m + B_m^{(3)} r^{-m} & \text{при } m>0, \end{cases} \quad (18,15)$$

¹ Ср. например п. 16. 6.

² Ср. (18, 11).

где $A_m^{(1)}$, $A_m^{(3)}$, $B_m^{(1)}$, $B_m^{(3)}$ — постоянные, тогда как для $a_m^{(2)}$ найдем:

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} A_0^{(2)} \lg r + B_0^{(2)} + \int_{r_1}^r f_0^{(2)}(\xi) \xi \lg \frac{r}{\xi} d\xi, & (m=0), \\ A_m^{(2)} r^m + B_m^{(2)} r^{-m} + \frac{1}{2m} \int_{r_1}^r f_m^{(2)}(\xi) \xi \left[\left(\frac{r}{\xi} \right)^m - \left(\frac{\xi}{r} \right)^m \right] d\xi, & (m>0). \end{cases} \quad (18,16)$$

Так как распределение потенциала симметрично относительно диаметра $\theta=0$, то разложения всех $\varphi^{(k)}$ в ряды Фурье содержат в данном случае только косинусы, так что все $b_m^{(k)}=0$.

Применим теперь граничные условия. Для $a_m^{(1)}$ получаем из требования конечности решения при $r=0$:

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(1)} &= B_0^{(1)}, \\ a_m^{(1)} &= A_m^{(1)} r^m \quad \text{при } m > 0. \end{aligned} \right\} \quad (18,17)$$

Так как в третьей среде поле должно обращаться в нуль на бесконечности, так что должно быть $\left(\frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0$, то умножая это уравнение на $\frac{1}{\pi} \cos m\theta d\theta$ и интегрируя по θ от $-\pi$ до $+\pi$, найдем,¹ что при всех $m \geq 0$ должны выполняться условия:

$$\left(\frac{da_m^{(3)}}{dr} \right)_{r=\infty} = 0. \quad (18,18)$$

Применяя это к (18,15), получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(3)} &= A_0^{(3)} \lg r + B_0^{(3)}, \\ a_m^{(3)} &= B_m^{(3)} r^{-m} \quad \text{при } m > 0. \end{aligned} \right\} \quad (18,19)$$

Условия (18, 12) дают при $r=r_1$ и при $m=0$, если учесть (18,16) и (18, 17):

$$\begin{aligned} \frac{A_0^{(2)}}{r_1} &= 0, \\ B_0^{(1)} &= A_0^{(2)} \lg r_1 + B_0^{(2)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$A_0^{(2)} = 0; \quad B_0^{(2)} = B_0^{(1)}, \quad (18,20)$$

причем можно положить также и $B_0^{(1)} = B_0^{(2)} = 0$, поскольку постоянная в выражении потенциала плоской задачи может быть выбрана произвольно. Вводя эти значения постоянных в первую из формул (18, 16),

¹ Ср. выражение (18, 5) для $a_m^{(k)}$.

(при $m=0$) и подставляя полученный результат, а также значение $a_m^{(3)}$ из (18, 19), в условия (18, 12), найдем при $r=r_2$ и $m=0$:

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(3)} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \int_{r_1}^{r_2} f_0^{(2)}(\xi) \xi d\xi; \\ B_0^{(3)} &= \int_{r_1}^{r_2} f_0^{(2)}(\xi) \xi \left[\lg \frac{r_2}{\xi} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \lg r_2 \right] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (18,21)$$

Аналогично находим при $m > 0$ и при $r=r_1$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 r_1^{m-1} A_m^{(1)} &= \varepsilon_2 [A_m^{(2)} r_1^{m-1} - B_m^{(2)} r_1^{-m-1}], \\ r_1^m A_m^{(1)} &= A_m^{(2)} r_1^m + B_m^{(2)} r_1^{-m}, \end{aligned} \right\} \quad (18,22)$$

тогда как при $r=r_2$ будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \left\{ m [A_m^{(2)} r_2^{m-1} - B_m^{(2)} r_2^{-m-1}] + \frac{1}{2r_2} \int_{r_1}^{r_2} f_m^{(2)}(\xi) \xi \left[\left(\frac{r_2}{\xi} \right)^m + \left(\frac{\xi}{r_2} \right)^m \right] d\xi \right\} = \\ = -m \varepsilon_3 r_2^{-m-1} B_m^{(3)} \end{aligned} \quad (18,23)$$

и

$$A_m^{(2)} r_2^m + B_m^{(2)} r_2^{-m} + \frac{1}{2m} \int_{r_1}^{r_2} f_m^{(2)}(\xi) \xi \left[\left(\frac{r_2}{\xi} \right)^m - \left(\frac{\xi}{r_2} \right)^m \right] d\xi = r_2^{-m} B_m^{(3)}. \quad (18,24)$$

Из четырех уравнений (18, 22) — (18, 24) определяем все четыре постоянных $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$, $B_m^{(2)}$, $B_m^{(3)}$.

В нашем конкретном случае имеем:

$$f_m^{(2)}(r) = -\frac{2e}{a\varepsilon_2\delta\Delta} \times \begin{cases} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \cos m\theta d\theta = \frac{2 \sin m\Delta}{m} & \text{при } a \leq r \leq a + \delta, \\ 0 & \text{при всех остальных значениях } r, \end{cases} \quad (18,25)$$

так что для любой функции $F(\xi)$, конечной и непрерывной в интервале ($r_1 \leq \xi \leq r_2$), будет

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\xi \rightarrow r \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{r_1}^{r_2} f_m^{(2)}(\xi) F(\xi) d\xi &= -\frac{2e}{a\varepsilon_2\delta\Delta} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_a^{a+\delta} F(\xi) d\xi \int_{-\Delta}^{+\Delta} \cos m\theta d\theta = \\ &= -\frac{4eF(a)}{a\varepsilon_2}, \quad (m \geq 0). \end{aligned} \quad (18,26)$$

В частности,

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{r_1}^{r_2} f_m^{(2)}(\xi) \xi \left[\left(\frac{r_2}{\xi} \right)^m \pm \left(\frac{\xi}{r_2} \right)^m \right] d\xi = -\frac{4e}{\varepsilon_2} \left[\left(\frac{r_2}{a} \right)^m \pm \left(\frac{a}{r_2} \right)^m \right]. \quad (18,27)$$

Подставляя это в (18, 23) и (18, 24) и используя (18, 22), получим:

$$\left. \begin{aligned} A_m^{(1)} &= \frac{4e}{ma^m} \frac{[(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) r_2^{2m} - (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) a^{2m}]}{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) r_2^{2m} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) r_1^{2m}]}, \\ A_m^{(2)} &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\varepsilon_2} A_m^{(1)}, \\ B_m^{(2)} &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_2} A_m^{(1)} r_1^{2m}, \\ B_m^{(3)} &= \frac{4e}{ma^m} \frac{[(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) a^{2m} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r_1^{2m}] r_2^{2m}}{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) r_2^{2m} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) r_1^{2m}]}. \end{aligned} \right\} (m > 0) \quad (18,28)$$

Так как (18, 21) и (18, 26) дают теперь еще:

$$B_0^{(3)} = 4e \left(\frac{1}{\varepsilon_3} \lg r_2 - \frac{1}{\varepsilon_2} \lg \frac{r_2}{a} \right); \quad A_0^{(3)} = -\frac{4e}{\varepsilon_3}, \quad (18,29)$$

тогда как, согласно найденному выше, $A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = A_0^{(2)} = B_0^{(2)} = 0$, то видим, что все коэффициенты в формулах (18, 16), (18, 17) и (18, 19) для величин $a_m^{(1)}$, $a_m^{(2)}$, $a_m^{(3)}$ определились, и искомые потенциалы находятся по формулам

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} a_0^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(k)} \cos m\theta, \quad k=1, 2, 3 \dots \quad (18,30)$$

Частные случаи

18.3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ (заряженная нить в однородной среде). (18, 28) и (18, 29) дают теперь:

$$\left. \begin{aligned} A_m^{(1)} &= A_m^{(2)} = \frac{2e}{m\varepsilon a^m}, \\ B_m^{(2)} &= 0, \\ B_m^{(3)} &= \frac{2e}{m\varepsilon} a^m, \\ A_0^{(3)} &= -\frac{4e}{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} (18,31)$$

так что при этом

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \varphi^{(2)} = \frac{2e}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a} \right)^m = \\ &= -\frac{e}{\varepsilon} \lg \left[1 - 2 \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (18,32)$$

При $a + \delta < r < r_2$ и при $\delta \rightarrow 0$ будет, согласно (18,16), (18,20) и (18,26):

$$\left. \begin{aligned} a_m^{(2)} &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{r_1}^r f_0^{(2)}(\xi) \xi \lg \frac{r}{\xi} d\xi = -\frac{4e}{\varepsilon} \lg \frac{r}{a}, \\ a_m^{(2)} &= \frac{2e}{m\varepsilon a^m} r^m + \frac{1}{2m} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{r_1}^r f_m^{(2)}(\xi) \xi \left[\left(\frac{r}{\xi} \right)^m - \left(\frac{\xi}{r} \right)^m \right] d\xi = \\ &= \frac{2e}{m\varepsilon} \left(\frac{a}{r} \right)^m. \end{aligned} \right\} \quad (18,33)$$

Это дает при $r_2 > r > a$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= -\frac{2e}{\varepsilon} \lg \frac{r}{a} + \frac{2e}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^m = \\ &= -\frac{2e}{\varepsilon} \lg \frac{r}{a} - \frac{e}{\varepsilon} \lg \left[1 - 2 \left(\frac{a}{r} \right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (18,34)$$

При $r > r_2$ получаем в точности такое же выражение для $\varphi^{(3)}$, причем r_1 и r_2 из формулы выпадают, как и должно быть, и все три формулы для $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ дают просто разложение при $r < a$ и при $r > a$ одного и того же потенциала

$$\varphi = -\frac{e}{\varepsilon} \lg (a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) + \text{const} \quad (18,35)$$

нити с зарядом e на единицу длины, находящейся в пространстве, заполненном веществом с диэлектрической постоянной ε .

18.4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_3 \neq \varepsilon$.

При этом суммирование рядов для потенциалов дает:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{e}{\varepsilon} \lg (a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) - \\ &- \frac{e'}{\varepsilon} \lg (a'^2 - 2a'r \cos \theta + r^2) + \text{const} \\ &\quad \text{при } 0 \leq r < a, \\ \varphi &= -\frac{2e}{\varepsilon_3} \lg r - \frac{e}{\varepsilon + \varepsilon_3} \lg \left(1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) + \text{const} \\ &\quad \text{при } r > a, \end{aligned} \right\} \quad (18,36)$$

где

$$a' = \frac{r_2^2}{a} \quad (18,37)$$

и

$$e' = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon)}{(\varepsilon_3 + \varepsilon)} e. \quad (18,38)$$

a' и e' определяют местоположение и линейный заряд некоторой эффективной нити, называемой отражением в цилиндре $r = r_2$ первичной нити, находящейся в точке $(a, 0)$ и обладающей зарядом e на единицу длины.

18. 5. Если положить в полученных выражениях (18 36) — (18, 38) $\varepsilon_3 = \infty$, то получим решение для случая наэлектризованной бесконечной линии с зарядом e на единицу длины, помещенной внутри бесконечной цилиндрической трубы с проводящими стенками¹ с внутренним радиусом, равным r_2 . (18, 36) показывает, что при этом будет $e' = -e$, т. е. что заряд отраженной нити становится равным по величине и обратным по знаку заряду первичной. Для потенциала φ внутри цилиндра получается при этом значение

$$\varphi = -\frac{e}{\varepsilon} \lg \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{a'^2 - 2a'r \cos \theta + r^2} + \text{const}, \quad (18,39)$$

тогда как при $r > a$ потенциал обращается в нуль, как оно и должно быть. На самой поверхности $r = r_2$ потенциал φ постоянен, поскольку отношение

$$\frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{a'^2 - 2a'r \cos \theta + r^2}$$

становится при $r = r_2$ постоянным, равным $\frac{a^2}{r_2^2}$.

18. 6. Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$, причем вторая и третья среды сливаются в одну, и получить решение для заряженной нити, находящейся вне диэлектрического цилиндра радиуса $r = r_1$, в то время как п. 18. 5 относился к случаю, когда нить эта находилась внутри него.

Полагая в результате $\varepsilon_1 = \infty$, найдем решение для случая заряженной нити, параллельной проводящему цилиндру и лежащей вне его.

Пример 2

18. 7. Пусть теперь при том же расположении сред, как в п. 18. 1, заполняемые ими цилиндрические слои не уходят концами на бесконечность, а ограничены двумя проводящими, перпендикулярными к оси плоскостями (рис. 26), находящимися на расстоянии h друг от друга.

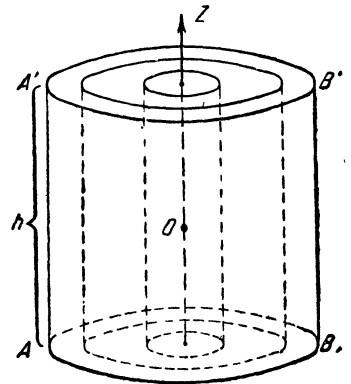


Рис. 26.

Распределение зарядов ρ в пространстве будем попрежнему считать произвольным.

Тогда, умножая, как обычно, уравнения (18, 7) и (18, 8) на функцию $W_n(z)$ вида (16, 9), обращающуюся в нуль на торцах цилиндра,² сведем задачу к решению уравнений вида

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_{mn}^{(k)}}{dr} \right) - \left[\left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] \varphi_{mn}^{(k)} = \psi_n^{(k)}(r), \quad (18,40)$$

¹ См. п. 2. 4.

² $W_n(z) = \text{const} \times \sin \frac{n\pi z}{h}$.

где

$$\varphi_{mn}^{(k)} = \int_a^b \varphi_m^{(k)} W_n(z) dz, \quad (18,41)$$

а $\psi_n^{(k)}$ — известная функция от r .

Так как интеграл уравнения (18,40) легко получается варьированием произвольных постоянных $A_{mn}^{(k)}$ и $B_{mn}^{(k)}$ в интеграле соответствующего однородного уравнения, имеющего вид

$$\varphi_{mn}^{(k)} = A_{mn}^{(k)} I_m \left(\frac{n\pi r}{h} \right) + B_{mn}^{(k)} K_m \left(\frac{n\pi r}{h} \right), \quad (18,42)$$

и из соответственно преобразованных граничных условий (18,2), (18,3), то задача эта полностью решается при любом количестве различных сред ϵ_k , произвольном распределении зарядов ρ и любой длине h цилиндра.

Если концы цилиндра увести на бесконечность, то полученные формулы дадут в пределе решение задачи о поле, возникающем в системе, состоящей из ряда бесконечно-длинных коаксиальных цилиндрических слоев, находящихся в произвольном внешнем поле. С подобными вопросами приходится встречаться, например, в теории электроразведки (каротажа).¹ Как частный случай, получим таким путем и решение задачи о проводящем цилиндре, внесенном в произвольное внешнее поле (при $n=2$, $\epsilon_1 = \infty$, $\epsilon_2 \neq \infty$).

18.8. Совершенно подобным же образом можем решить также токовую задачу для аналогичного распределения сред, причем только диэлектрические постоянные ϵ_k надо заменить проводимостями σ_k . Если, например, при этом на торцы AB и $A'B'$ цилиндра и на боковую поверхность самого внешнего цилиндра² наложены электроды, по поверхности которых распределение входящего и отводимого тока считается известным,³ то решение задачи сводится к решению системы совокупных уравнений⁴ такого же вида, как (18,40), (18,41), где только под $W_n(z)$ нужно будет подразумевать ту из функций (16,9), производная от которой по z обращается в нуль на торцах цилиндра. Граничные условия на поверхностях раздела разных сред тоже сохраняют при этом свой вид и изменятся только условия на внешних электродах, которые будут теперь вполне подобны условиям (14,96) — (14,100) для ранее рассмотренной аналогичной задачи, в которой разбирался только простейший случай одной среды.⁵

¹ См. В. А. Фок, Теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа, ГТТИ, Л-д, 1933 г.

² Т. е. при $r = r_n$.

³ Ср. п. 14.19.

⁴ Ср. п. 2.7, особенно (2,55) — (2,56).

⁵ См. п. 14.19.

§ 19. Плоская и пространственная задачи для секториального распределения сред

19.1. Рассмотрим теперь плоскую электростатическую задачу для области с показанным на рис. 27 секториальным распределением сред, число которых пусть равно n , и которые будем считать однородными и изотропными. Первая среда занимает при этом область, ограниченную плоскостями $\theta=0$ и $\theta=\theta_1$ и двумя цилиндрами $r=r_1$ (внутренним) и $r=r_2$ (внешним). Вторая среда ограничена плоскостями $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$ и теми же цилиндрами и т. д.

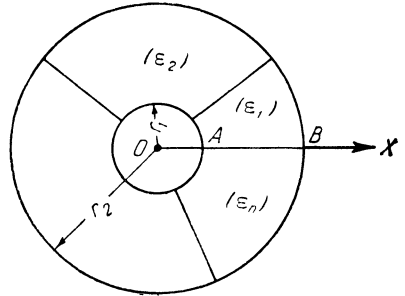


Рис. 27.

На цилиндрах $r=r_1$ и $r=r_2$ будем считать заданным распределение потенциала φ , так что можно положить

$$\left. \begin{aligned} (\varphi)_{r=r_1} &= \psi_1(\theta), \\ (\varphi)_{r=r_2} &= \psi_2(\theta), \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (19,1)$$

где ψ_1 и ψ_2 — известные функции от θ .

Внутри s -ой среды потенциал $\varphi = \varphi^{(s)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(s)}}{\partial \theta^2} = - \frac{4\pi \rho^{(s)}(r, \theta)}{\epsilon_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (19,2)$$

тогда как на граничных поверхностях $\theta = \theta_s$ должны удовлетворяться условия:¹

$$\left. \begin{aligned} (\varphi^{(s)})_{\theta = \theta_s} &= (\varphi^{(s+1)})_{\theta = \theta_s}; \\ \epsilon_{s+1} \left(\frac{\partial \varphi^{(s+1)}}{\partial \theta} \right)_{\theta = \theta_s} &= \epsilon_s \left(\frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial \theta} \right)_{\theta = \theta_s}; \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (19,3)$$

и

$$(\varphi^{(1)})_{\theta=0} = (\varphi^{(n)})_{\theta=2\pi}; \quad \epsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \epsilon_n \left(\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \theta} \right)_{\theta=2\pi}.$$

Чтобы решить эту задачу, поступим так же, как в п. 16.5, где мы уже имели дело с интегрированием уравнения того же типа, как (19,2), причем задача решалась для области такой же формы, как каждая из областей, занятых средами $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, и значения искомой функции тоже задавались при $r=r_1$ и при $r=r_2$ (ср. рис. 19).

Умножая, стало быть, как в п. 16.5, (19,2) на функцию²

$$u_k = u_k(r) = c \sin \frac{\pi k \lg \frac{r}{r_1}}{\lg \frac{r_2}{r_1}}, \quad c = \sqrt{\frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2}{\lg \frac{r_2}{r_1}}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19,4)$$

¹ Считаем, что на поверхностях раздела сред истинных зарядов нет.

² См. (16,33) и (16,41).

и на $\frac{dr}{r}$ и интегрируя по r в пределах от r_1 до r_2 , получим, пользуясь обозначениями, подобными (16, 34), но без звездочки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_k^{(s)}}{d\theta^2} - \left(\frac{k\pi}{m}\right)^2 \varphi_k^{(s)} &= \frac{\pi k}{m} c [(-1)^k \psi_2(\theta) - \psi_1(\theta)] - \frac{4\pi}{\varepsilon_s} \int_{r_1}^{r_2} r p^{(s)}(r, \theta) u_k(r) dr, \\ m &= \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (19,5)$$

Граничные условия (19, 3) переходят в такие:

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(s)} \Big|_{\theta = \theta_s} &= \varphi_k^{(s+1)} \Big|_{\theta = \theta_s}, \\ \varepsilon_{s+1} \frac{d\varphi_k^{(s+1)}}{d\theta} \Big|_{\theta = \theta_s} &= \varepsilon_s \left(\frac{d\varphi_k^{(s)}}{d\theta} \right)_{\theta = \theta_s}, \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (19,6)$$

тогда как на AB (рис. 27) нужно положить:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k^{(1)} \Big|_{\theta = 0} &= (\varphi_k^{(n)})_{\theta = 2\pi}, \\ \varepsilon_1 \frac{d\varphi_k^{(1)}}{d\theta} \Big|_{\theta = 0} &= \varepsilon_n \frac{d\varphi_k^{(n)}}{d\theta} \Big|_{\theta = 2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (19,7)$$

Так как решения уравнений (19, 5), содержат в совокупности $2n$ постоянных интегрирования, а условия (19, 6) — (19, 7) на n границах дают $2n$ соотношений для нахождения их, то, решая систему (19, 5) при условиях (19, 6) — (19, 7), найдем все $\varphi_k^{(s)}$, а из них, пользуясь формулами

$$\varphi^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(s)} u_k(r), \quad (19,8)$$

и сами $\varphi^{(s)}$, т. е. решение задачи.

Пример

19.2. Пусть требуется решить плоскую электростатическую задачу в предположении наличия двух различных сред ε_1 и ε_2 , из которых каждая занимает половину пространства между заземленными проводящими цилиндрами¹ $r=r_1$ и $r=r_2$ (см. рис. 28), причем через точку M с координатами (a, γ) проходит заряженная нить с зарядом e на единицу длины.

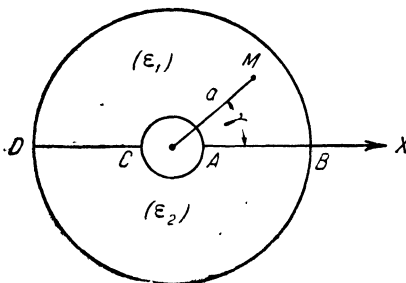


Рис. 28.

¹ Т. е. находящимися при нулевых потенциалах.

Будем для определенности считать, что нить находится в первой среде. Так как в данном случае $\psi_1(\theta) = \psi_2(\theta) = 0$ и $\rho^{(2)} = 0$, то уравнения (19, 5) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_k^{(1)}}{d\theta^2} - \left(\frac{k\pi}{m}\right)^2 \varphi_k^{(1)} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} f_k(\theta), \text{ где } f_k(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} r \rho^{(1)}(r, \theta) u_k(r) dr, \\ \frac{d^2 \varphi_k^{(2)}}{d\theta^2} - \left(\frac{k\pi}{m}\right)^2 \varphi_k^{(2)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19, 9)$$

тогда как граничные условия будут

1) на AB :

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k^{(1)})_{\theta=0} &= (\varphi_k^{(2)})_{\theta=2\pi}, \\ \varepsilon_1 \frac{d\varphi_k^{(1)}}{d\theta} \Big|_{\theta=0} &= \varepsilon_2 \frac{d\varphi_k^{(2)}}{d\theta} \Big|_{\theta=2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (19, 10)$$

2) на CD :

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k^{(1)})_{\theta=\pi} &= (\varphi_k^{(2)})_{\theta=\pi}, \\ \varepsilon_1 \frac{d\varphi_k^{(1)}}{d\theta} \Big|_{\theta=\pi} &= \varepsilon_2 \frac{d\varphi_k^{(2)}}{d\theta} \Big|_{\theta=\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (19, 11)$$

При решении будем сначала, как обычно, заменять заряженную нить с зарядом e на единицу длины равномерно заряженной по объему призмой весьма малого сечения, ограниченной плоскостями $\theta = \gamma$ и $\theta = \gamma + \Delta < \pi$ и цилиндрами $r = a$ и $r = a + \delta < r_2$, где Δ и δ стремятся в пределе к нулю.

Обычного типа расчет дает при решении первого уравнения (19, 9):

$$\varphi_k^{(1)} = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi\theta}{m} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi\theta}{m} - \frac{4m}{\varepsilon_1 k} \int_0^\theta f_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m} (\theta - \xi) d\xi, \quad (19, 12)$$

а после перехода к пределу $\Delta = 0$ и $\delta = 0$:

$$\varphi_k^{(1)} = \begin{cases} A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi\theta}{m} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi\theta}{m} & \text{при } 0 < \theta < \gamma, \\ A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi\theta}{m} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi\theta}{m} - \frac{4m e c}{\varepsilon_1 k} \sin \frac{\pi k \lg \left(\frac{a}{r_1}\right)}{m} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m} (\theta - \gamma) & \text{при } \pi > \theta > \gamma. \end{cases} \quad (19, 13)$$

Так как общий интеграл второго уравнения (19, 9) можно написать так:

$$\varphi_k^{(2)} = M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m} (2\pi - \theta) + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{m} (2\pi - \theta), \quad (19, 14)$$

то, применяя граничные условия (19, 10) и (19, 11), находим для определения четырех постоянных A_k , B_k , M_k , N_k следующие уравнения:

$$\begin{aligned} B_k &= N_k, \\ \varepsilon_1 A_k &= -\varepsilon_2 M_k, \\ A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi^2}{m} - \frac{4mec}{\varepsilon_1 k} \sin \frac{\pi k \lg \left(\frac{a}{r_1} \right)}{m} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m} (\pi - \gamma) &= \\ &= M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m} + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi^2}{m}, \\ \varepsilon_1 \left[A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi^2}{m} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m} - \frac{4mec}{\varepsilon_1 k} \sin \frac{\pi k \lg \left(\frac{a}{r_1} \right)}{m} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{m} [\pi - \gamma] \right] &= \\ &= -\varepsilon_2 \left[M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi^2}{m} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{4mec}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) k} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{b\pi (\pi - \gamma)}{m} \sin \left[\frac{\pi k \lg \left(\frac{a}{r_1} \right)}{m} \right]}{\operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m}}, \\ B_k &= \frac{4mec}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) k} \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{m} (\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m}} \sin \left[\frac{\pi k \lg \left(\frac{a}{r_1} \right)}{m} \right], \\ M_k &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_k, \\ N_k &= B_k. \end{aligned} \right\} \quad (19, 15)$$

Подставляя найденные значения постоянных в (19, 13), (19, 14) и в (19, 8), находим искомое решение. Например, для $\varphi^{(1)}$ получаем при $0 < \theta < \gamma$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \frac{8e}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varepsilon_2 \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi (\pi - \gamma)}{m} \operatorname{sh} \frac{k\pi\theta}{m} \sin \left(\frac{\pi k}{m} \lg \frac{a}{r_1} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{m} \lg \frac{r}{r_1} \right)}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m}} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{m} (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \frac{k\pi\theta}{m} \sin \left(\frac{\pi k}{m} \lg \frac{a}{r_1} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{m} \lg \frac{r}{r_1} \right)}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi^2}{m}} \right]. \end{aligned} \quad (19, 16)$$

19.3. Будем в полученном решении стремиться r_1 к нулю, причем $m = \lg \frac{r_2}{r_1}$ стремится к бесконечности. Замечая, что $\lg \frac{r}{r_1} = \lg \frac{r}{r_2} + m$, так что

$$\sin \frac{\pi k \lg \left(\frac{r}{r_1} \right)}{m} = \sin \left[\pi k \frac{\lg \left(\frac{r}{r_2} \right)}{m} + \pi k \right] = (-1)^k \sin \left[\pi k \frac{\lg \left(\frac{r}{r_2} \right)}{m} \right],$$

и что аналогично

$$\sin \frac{\pi k \lg \left(\frac{a}{r_1} \right)}{m} = (-1)^k \frac{\sin \left[\pi k \lg \frac{a}{r_2} \right]}{m},$$

и полагая

$$\frac{\pi k}{m} = u_k, \quad \frac{\pi}{m} = u_{k+1} - u_k = \Delta u_k, \quad \lg \frac{r}{r_2} = \xi, \quad \lg \frac{a}{r_2} = \xi_a,$$

можем переписать (19, 16) в такой форме:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & \frac{8e}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left\{ \varepsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi - \gamma) u_k \operatorname{sh} \theta u_k \sin \xi u_k \sin \xi_a u_k \Delta u_k}{u_k \operatorname{sh} \pi u_k} \Delta u_k + \right. \\ & \left. + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \gamma) u_k \operatorname{ch} \theta u_k \sin \xi u_k \sin \xi_a u_k \Delta u_k}{u_k \operatorname{sh} \pi u_k} \Delta u_k \right\}, \end{aligned}$$

что при $m \rightarrow \infty$ и, соответственно, $\Delta u_k \rightarrow 0$ переходит в сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & \frac{8e}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left[\varepsilon_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi - \gamma) a \operatorname{sh} \theta a \sin \xi u \sin \xi_a a}{a \operatorname{sh} \pi u} du + \right. \\ & \left. + \varepsilon_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \gamma) a \operatorname{ch} \theta a \sin \xi a \sin \xi_a a}{a \operatorname{sh} \pi a} du \right], \quad (0 < \theta < \gamma). \quad (19, 17) \end{aligned}$$

Это выражение соответствует случаю, когда радиус внутреннего проводящего цилиндра обратился в нуль и когда, стало быть, влияние его на поле исчезает в силу его бесконечно-малой емкости. Таким образом, полученное решение должно соответствовать случаю, когда среды ε_1 и ε_2 сплошь заполняют каждая свою половину цилиндра и никакого проводника в центре нет.

Значения входящих в (19, 17) интегралов нетрудно найти. Именно, заменяя в них $\sin \xi u \cdot \sin \xi_a u$ через $\frac{1}{2} [\cos(\xi - \xi_a) u - \cos(\xi + \xi_a) u]$, найдем, что, например, первый интеграл разбивается на два интеграла вида

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi - \gamma) a \operatorname{sh} \theta a \cos bu}{a \operatorname{sh} \pi u} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibu} \operatorname{sh}(\pi - \gamma) a \operatorname{sh} \theta a du}{a \operatorname{sh} \pi u},$$

где

$$b = |\xi \pm \xi_a| \geq 0.$$

Замечая далее, что в этом последнем интеграле можно из-за условия $0 < \theta < \gamma$ дополнить путь интегрирования по вещественной оси дугой бесконечно-большого полукруга в верхней полуплоскости, видим, что он сводится к умноженной на πi сумме вычетов подынтегральной функции в верхней полуплоскости. Так как особыми точками подынтегральной функции в верхней полуплоскости будут корни зна-

менателя, кроме точки $u=0$, т. е. значения $u_s = si$, где $s=1, 2, \dots$, то вычисляя соответствующие вычеты, находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibu} \operatorname{sh}(\pi - \gamma) u \operatorname{sh} \theta u du}{u \operatorname{sh} \pi u} &= - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{e^{-bs} \sin(\pi - \gamma) s \cdot \sin \theta s}{s} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-bs} \cos(\gamma - \theta) s}{s} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-bs} \cos(\gamma + \theta) s}{s} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{lg} \frac{(1 - 2e^{-b} \cos(\gamma + \theta) + e^{-2b})}{(1 - 2e^{-b} \cos(\gamma - \theta) + e^{-2b})}. \end{aligned} \quad (19, 18)$$

Исходный интеграл равен поэтому, если учесть, что $b = \left| \operatorname{lg} \frac{r}{r_2} \pm \operatorname{lg} \frac{a}{r_2} \right|$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi - \gamma) u \operatorname{sh} \theta u \sin \xi u \sin \xi_a u}{u \operatorname{sh} \pi u} du = - \frac{1}{4} \operatorname{lg} \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{4} \operatorname{lg} \frac{R_1'}{R_2'}, \quad (19, 19)$$

где

$$a' = \frac{r_2^2}{a}$$

и

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{r^2 - 2ar \cos(\gamma - \theta) + a^2}, \\ R_1' &= \sqrt{r^2 - 2ar \cos(\gamma + \theta) + a^2} \\ R_2 &= \sqrt{r^2 - 2a'r \cos(\gamma - \theta) + a'^2} \\ R_2' &= \sqrt{r^2 - 2a'r \cos(\gamma + \theta) + a'^2} \end{aligned} \right\}. \quad (19, 20)$$

Совершенно аналогично находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibu} \operatorname{ch}(\pi - \gamma) u \operatorname{ch} \theta u du}{u \operatorname{sh} \pi u} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{e^{-bs} \cos(\pi - \gamma) s \cos \theta s}{s} = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-bs} \cos \gamma s \cos \theta s}{s} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-bs} \cos(\gamma - \theta) s}{s} + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-bs} \cos(\gamma + \theta) s}{s} \right\} = - \frac{1}{4} \operatorname{lg} [1 - 2e^{-b} \cos(\gamma - \theta) + e^{-2b}] \times \\ &\times [1 - 2e^{-b} \cos(\gamma + \theta) + e^{-2b}], \end{aligned} \quad (19, 21)$$

откуда легко получаем, если принять во внимание, что

$$|\xi - \xi_a| = \operatorname{lg} \frac{r}{a} \quad \text{при } r > a \quad \text{и} \quad = \operatorname{lg} \frac{a}{r} \quad \text{при } r < a,$$

тогда как $|\xi + \xi_a| = \lg \frac{a'}{r}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(\pi - \gamma)u \text{ch} \theta u \sin \xi u \sin \xi_a u du}{u \text{sh} \pi u} = \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|\xi - \xi_a|u} \text{ch}(\pi - \gamma)u \text{ch} \theta u du}{u \text{sh} \pi u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\xi + \xi_a)u} \text{ch}(\pi - \gamma)u \text{ch} \theta u du}{u \text{sh} \pi u} \right] = + \frac{1}{4} \lg R_2 R_2' - \frac{1}{4} \lg R_1 R_1' - \frac{1}{2} \lg(a') +$$

$$+ \frac{1}{2} \lg \begin{cases} a & \text{при } r < a, \\ r & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (19, 22)$$

Подставляя значения (19, 19) и (19, 22) в (19, 17), находим

$$\varphi^{(1)} = - \frac{2e}{\varepsilon_1} \lg \frac{R_1}{R_2} + \frac{2e}{\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \lg \frac{R_2'}{R_1'} +$$

$$+ \frac{4e}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \lg \begin{cases} \left(\frac{a}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{a}{a'} \right) & \text{при } r < a, \\ (ra') & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (19, 23)$$

Входящие сюда величины R_1, R_2, R_1', R_2' допускают простую геометрическую интерпретацию. Именно, если назвать отражением точки (a, γ) (нити) во внешнем цилиндре точку M' с координатами (a', γ) , то R_1 и R_1' обозначают расстояния до точки (r, θ) от нити и от ее отражения в плоскости раздела сред, тогда как R_2 и R_2' обозначают соответствующие расстояния до (r, θ) от точки M' и от ее отражения в той же плоскости. Формула (19, 23) показывает, что отраженной нити нужно приписать заряд $e \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)$ на единицу длины.

19. 4. Если теперь пожелаем перейти в формулах (19, 23) к пределу $r_2 = \infty$, т. е. к случаю, когда внешний цилиндр удален на бесконечность,¹ то встретимся с тем затруднением, что и правая часть формулы (19, 23) стремится при этом к бесконечности. Эта трудность, однако, только кажущаяся и связана с тем, что мы выше при решении задачи положили потенциал на этой внешней поверхности равным нулю. Это вполне допустимо при конечном r_2 , но обязательно должно дать бесконечное значение потенциала на конечном расстоянии от начала координат, если эта поверхность удалена на бесконечность, поскольку в нашем случае полный заряд системы отличен от нуля (если бы он был равен нулю, этого бы не случилось). Легко, однако, видеть, что вычисляемые из (19, 23) составляющие $E_r^{(1)} = - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}$ и $E_\theta^{(1)} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta}$ поля стремятся при $r_2 \rightarrow \infty$ к совершенно определенным конечным пределам, которые и соответствуют случаю, когда внешний цилиндр удален на бесконечность и на поле уже не влияет. Таким образом поле может быть найдено и в том случае, когда $r_1 = 0$ и $r_2 = \infty$,

¹ Т. е. когда он вообще отсутствует.

т. е. когда проводники в нашей системе из двух сред вообще отсутствуют, а есть только создающие первичное поле заряды.

Аналогичное замечание относится и к общей задаче многих сред, приводящейся к решению системы уравнений (19, 5) при условиях (19, 6) — (19, 7). Во всех случаях решаем ее сперва при конечных r_1 и r_2 , а затем можем, полагая сперва $r_1 = 0$ и вычисляя в этом случае компоненты поля E_r и E_θ , а затем переходя к пределу $r_2 = \infty$, найти поле и в случае неограниченно простирающихся секториальных сред, общим стыком которых служит проходящая через начало координат перпендикулярно к плоскости чертежа ось z . Отсюда видно, однако, что хотя таким образом и получается решение самой общей задачи такого рода, но решение это получается лишь довольно сложным окольным путем. Мы впоследствии укажем совсем иной путь решения той же задачи,¹ который непосредственно ведет к цели и ближе отвечает истинной природе задачи.

19.5. В случае, если требуется решить электростатическую задачу для такого же секториального распределения сред, как изображено на рис. 27, но уже в любом трехмерном поле, то можно решать ее подобно только что рассмотренной задаче, причем только следует начать с разложения потенциалов $\varphi^{(s)}$ и плотностей объемного заряда в интегралы (или ряды) Фурье по оси z ,² а затем решать получающиеся из (19, 2) уравнения для амплитуд отдельных гармонических составляющих при вытекающих при этом из (19, 3) граничных условиях для них. На этом ближе останавливаться не будем, поскольку впоследствии будет дано полное решение этой задачи для любого числа сред иным, более удобным методом.

Глава IX

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩЕГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

§ 20. Решение уравнений $\Delta u = -4\pi f$ и $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ в сферических координатах

20.1. В сферической системе координат (r, θ, φ) однородное уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ имеет такой вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (20, 1)$$

¹ См. главы XIV и XVIII.

² В интегралы, если среды простираются неограниченно по оси z , и в ряды, если среды ограничены с обеих сторон двумя перпендикулярными к оси z плоскостями (секториальное распределение сред внутри цилиндра конечной длины).

Оно допускает частные решения вида

$$u = L(r) M(\theta) N(\varphi), \quad (20, 2)$$

в чем нетрудно убедиться, подставляя выражение (20, 2) в (20, 1). При этом получается по разделении на LMN и умножении на r^2 :

$$\frac{1}{L} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dL}{dr} \right) + \frac{1}{M \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dM}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{N} \frac{d^2 N}{d\varphi^2} + k^2 r^2 = 0, \quad (20, 3)$$

что, очевидно, может тождественно удовлетворяться лишь в том случае, если, во-первых,

$$\frac{1}{N} \frac{d^2 N}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{const},^1 \quad (20, 4)$$

и, во-вторых, если равны постоянным в отдельности выражения

$$f(r) \equiv \frac{1}{L} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dL}{dr} \right) + k^2 r^2$$

и

$$F(\theta) \equiv \frac{1}{M \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dM}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta},$$

поскольку (20,3), после подстановки в него значения $\frac{1}{N} \frac{d^2 N}{d\varphi^2}$ из (20, 4), получает вид

$$f(r) + F(\theta) = 0.$$

Полагая поэтому $f(r) = \text{const} = n(n+1) = -r''(r)$, где n произвольная пока постоянная,² получим

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dL}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] L = 0 \quad (20, 5)$$

и

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dM}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] M = 0. \quad (20, 6)$$

Эти уравнения могут быть переписаны в несколько иной форме. Именно, положим

$$L = \frac{R}{\sqrt{r}}, \quad (20, 7)$$

где R — новая функция от r . Уравнение (20, 5) переходит тогда, как легко проверить, в такое:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right] R = R'' + \frac{1}{r} R' + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (20, 8)$$

¹ Ибо при умножении уравнения (20, 3) на $\sin^2 \theta$ оно разделяется на две группы членов, из которых одна зависит только от r и θ , тогда как $\frac{1}{N} \frac{d^2 N}{d\varphi^2}$ зависит лишь от φ , и сумма их может равняться нулю лишь в том случае, если каждая из этих групп в отдельности равна постоянной величине.

² Целесообразность задания произвольной постоянной именно в такой форме выясняется ниже [см. (20, 8) — (20, 9) и (20, 12) — (20, 13)].

Если $k \neq 0$, то это — бесселево уравнение для функций порядка $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ от аргумента kr . Общее решение его имеет вид

$$R = Z_{n + \frac{1}{2}}(kr), \quad (20,9)$$

где $Z_{n + \frac{1}{2}}(x)$ обозначает какую-нибудь из бесселевых функций порядка $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ от аргумента x . Для L получаем поэтому:

$$L = \frac{Z_{n + \frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}. \quad (20,10)$$

Если же $k=0$, т. е. если имеем дело с уравнением Лапласа, а не с волновым, то уравнение (20,8) обращается в такое:

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} R = 0, \quad (20,11)$$

так что

$$R = A_n r^{n + \frac{1}{2}} + B_n r^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)}, \quad (20,12)$$

где A_n и B_n — это постоянные. Соответствующее L имеет, стало быть, вид:

$$L = A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}. \quad (20,13)$$

20.2. В уравнение (20,6) вводим новую независимую переменную

$$x = \cos \theta, \quad (20,14)$$

причем получается:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dM}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] M = 0. \quad (20,15)$$

Это не что иное, как уравнение так называемых присоединенных функций Лежандра $P_n^m(x)$, которые при целом положительном m и произвольном n (вещественном или комплексном) могут быть определены формулой¹

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m \Gamma(n+m+1)}{2^m \Gamma(n-m+1) \Gamma(m+1)} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} F\left(m-n, n+m+1, m+1, \frac{1-x}{2}\right), \quad (20,16)$$

где $F(a, b, c, z)$, как обычно, обозначает гипергеометрическую функцию.

¹ Н о б с о н, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge, 1931, стр. 189, (12). Общее определение $P_n^m(x)$ при любых m и n см. там же, стр. 228. По поводу гипергеометрической функции $F(a, b, c, z)$ см. У и т т е к е р и В а т с о н, Курс современного анализа [в дальнейшем: У и т т е к е р — В а т с о н], ч. II, гл. XIV.

Так как $x = \cos \theta$, то можем переписать это и так:

$$P_n^m(\cos \theta) = \\ = \frac{(-1)^m \Gamma(n+m+1)}{2^m m! \Gamma(n-m+1)} \sin^m \theta \cdot F\left(m-n, n+m+1, m+1, \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (20, 17)$$

Так как уравнение (20, 15) не изменяет своего вида при замене x на $(-x)$, то $P_n^m(-x) = P_n^m(-\cos \theta)$ тоже является решением его. Для $P_n^m(-\cos \theta)$ получается из (20, 16) выражение:

$$P_n^m(-\cos \theta) = \\ = \frac{(-1)^m \Gamma(n+m+1)}{2^m m! \Gamma(n-m+1)} \cdot \sin^m \theta \cdot F\left(m-n, n+m+1, m+1, \cos^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (20, 18)$$

Можно показать, что если n не равно целому положительному числу, то функции $P_n^m(\cos \theta)$ и $P_n^m(-\cos \theta)$ представляют собой два линейно независимых частных решения уравнения (20, 15), из которых первое обращается в бесконечность при $\theta = \pi$, а второе при $\theta = 0$, тогда как при всех остальных значениях, принадлежащих интервалу $(0 \leq \theta \leq \pi)$, они остаются конечными. Общий интеграл уравнения (20, 15) можно поэтому представить в этом случае в таком виде:

$$M = A_n^m P_n^m(x) + B_n^m P_n^m(-x), \quad (20, 19)$$

где A_n^m и B_n^m — постоянные.

20.3. Если n тоже целое и положительное, то $P_n^m(x)$ принимает простую форму

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n \cdot n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n. \quad (20, 20)$$

При $m=0$ функции $P_n^m(x)$ переходят в полиномы Лежандра, для которых получается из (20, 20):

$$P_n(x) \equiv P_n^0(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \quad (20, 21)$$

Формулы (20, 20) и (20, 21) показывают, что при целых положительных m и n имеет место зависимость

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (20, 22)$$

Из формулы (20, 20) следует, что при целых m и n функции $P_n^m(x)$ и $P_n^m(-x)$ перестают быть линейно независимыми друг от друга, ибо тогда просто $P_n^m(-x) = (-1)^{m+n} P_n^m(x)$. Для получения полного интеграла уравнения (20, 15) нужно поэтому найти второе линейно независимое от $P_n^m(x)$ частное решение этого уравнения. Таковым является функция $Q_n^m(x)$, которая при целых m и n определяется формулой

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}, \quad (20, 23)$$

где под $Q_n(x) \equiv Q_n^0(x)$ подразумевается функция ¹

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \lg \frac{x+1}{x-1} - \left[\frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \dots \right] = \frac{1}{2} P_n(x) \lg \frac{x+1}{x-1} - \sum_{k=0}^{k_{\max.}} \frac{(2n-4k-1)}{(2k+1)(n-k)} P_{n-2k-1},$$

где

$$k_{\max.} = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & \text{при четном } n, \\ \frac{n-1}{2} & \text{при нечетном } n. \end{cases} \quad (20, 24)$$

Стоящий справа ряд обрывается, как указано, и представляет собой целую рациональную функцию (полином) от x . Другое выражение для $Q_n(x)$, связывающее ее непосредственно с $P_n(x)$, имеет такой вид:

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_x^\infty \frac{d\mu}{(\mu^2 - 1) [P_n(\mu)]^2}. \quad (20, 25)$$

Функция $Q_n(x)$ становится логарифмически бесконечной при $x = \pm 1$.² В бесконечность обращается при $x = \pm 1$ и определяемая уравнением (20, 23), получаемая из $Q_n(x)$ дифференцированием, функция $Q_n^m(x)$.

Общий интеграл уравнения (20, 15) может быть, при целых положительных m и n , представлен в виде

$$M(x) = a_n^m P_n^m(x) + b_n^m Q_n^m(x), \quad (20, 26)$$

где a_n^m и b_n^m — постоянные.

Уравнение (20, 4) имеет общий интеграл

$$N = P_m e^{+im\varphi} + Q_m e^{-im\varphi} = R_m \cos m\varphi + S_m \sin m\varphi, \quad (20, 27)$$

где P_m, Q_m, R_m, S_m — постоянные.

20.4. Если искомая функция должна обладать симметрией вращения, то выбирая ось симметрии за ось сферической системы координат и замечая, что искомая функция не будет при этом зависеть от φ , видим, что в уравнении (20, 1) пропадает член, содержащий $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. В этом случае нужно искать частное решение этого уравнения уже в форме произведения только двух функций, именно

$$U = L(r) M(\theta), \quad (20, 28)$$

причем, как легко видеть, уравнение для $L(r)$ сохраняет форму (20, 5), так что $L(r)$ будет попрежнему иметь вид (20, 10), если рас-

¹ Уиттекер — Ватсон, ч. II, стр. 132, пример № 29.

² Ибо $P_n(1) = 1$ и $P_n(-1) = (-1)^n$.

считается уравнение волновое, или (20, 13), если дело касается решения уравнения Лапласа или Пуассона. Уравнение же (20, 15) упрощается и обращается в такое:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dM}{dx} \right] + n(n+1)M = 0, \quad (20, 29)$$

которому удовлетворяют функции $P_n^0(x)$ и $P_n^0(-x)$, обозначаемые обычно просто $P_n(x)$ и $P_n(-x)$.

Если n — целое положительное число или нуль, то общий интеграл уравнения (20, 29) имеет вид:

$$M = a_n P_n(x) + b_n Q_n(x). \quad (20, 30)$$

20.5. Так как уравнение (20, 1) допускает неограниченное множество частных решений вида (20, 2) или (20, 28), то согласно изложенной в § 15 общей теории, оба уравнения

$$\begin{aligned} \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -4\pi\rho(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (20, 31)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = -4\pi f(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (20, 32)$$

могут быть решены в общем виде всякий раз тогда, когда требуется найти решение для области (внутренней), ограниченной поверхностями, получаемыми при пересечении двух конусов

$$\theta = \theta_1 = \text{const} \quad \theta = \theta_2 = \text{const}$$

с двумя шаровыми поверхностями $r=r_1$ и $r=r_2$ и двумя плоскостями $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, причем на каждой из этих плоскостей заданы граничные условия одного из рассмотренных в § 15 типов. При этом возможны, естественно, и предельные типы, например, когда одна из шаровых поверхностей имеет бесконечно-большой радиус, вторая стягивается в точку в начале координат, а один из конусов отсутствует, так же как и секущие плоскости $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$. Границей области будет в этом случае служить просто уходящий на бесконечность круговой конус, и соответствующая краевая задача будет ставиться для ограниченной им области пространства. Еще более простым будет случай, когда решается внутренняя или внешняя задача для шара. Сходным образом могут быть трактованы и многие задачи с иными граничными условиями, например, относящиеся к случаю нескольких различных сред и др. При этом всегда должно из функций $P_n^m(x)$, $P_n^m(-x)$ или $Q_n^m(x)$ использовать для решения лишь те, которые остаются конечными, непрерывными и однозначными внутри рассматриваемой области пространства. Так как, в частности, функции $P_n^m(x) = P_n^m(\cos \theta)$ при не целом $n > 0$ обращаются в бесконечность при $\theta = \pi$ (т. е. при

$x = -1$), а функции $P_n^m(-x) = P_n^m(-\cos \theta)$ обращаются в бесконечность при $\theta = 0$, то если рассматриваемая область ограничена одним конусом с углом растворения $\theta = \alpha < \pi$, причем все точки $0 \leq \theta < \alpha$ принадлежат области, то для пригодности решений надо в нем сохранить только функцию $P_n^m(x) = P_n^m(\cos \theta)$, остающуюся конечной внутри всего конуса, т. е. надо брать

$$M = A_n^m P_n^m(\cos \theta). \quad (20, 33)$$

Если же решение требуется найти для области вне этого конуса, т. е. при $\alpha < \theta \leq \pi$, то нужно из общего решения (20, 19) выбросить функцию $P_n^m(\cos \theta)$, которая обращается в бесконечность при $\theta = \pi$, и сохранить лишь член $b_n^m P_n^m(-\cos \theta)$.

Лишь в том случае, когда решение ищется в области между двумя конусами $\theta = \alpha > 0$ и $\theta = \beta > \alpha$, причем $\beta < \pi$, то в (20, 19) должны быть сохранены оба члена. В этом случае зато будет два граничных условия — при $\theta = \alpha$ и при $\theta = \beta$, вместо прежнего одного, когда второе условие заменялось требованием конечности решения внутри соответствующей области.

Если требуется найти решение, пригодное во всем интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ (например в случае проводящей сферы во внешнем поле), то пригодны лишь те решения, которые остаются конечными внутри всего этого интервала, включая его концы. Таковыми являются, как известно, лишь функции $P_n^m(\cos \theta)$ с целыми индексами m и n . Соответствующие функции Q_n^m будут при этом терпеть разрывы при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ [ср. формулы (20, 23) и (20, 24)], а потому должны быть отброшены. Решение (20, 26) принимает при этом, стало быть, опять вид (20, 33), где m и n целые числа ≥ 0 .

Аналогичное соображение позволяет выбрать нужное решение и в том случае, когда решение обладает симметрией вращения и от φ не зависит, т. е. когда для $M(x)$ имеем выражение (20, 30).

Приведем несколько примеров с целью иллюстрировать изложенные здесь общие правила.

Пример 1

Диэлектрическая сфера в поле точечного заряда

20.6. Центр сферической системы (r, θ, φ) совместим с центром диэлектрической сферы, а ось направим через местоположение заряда (рис. 29). Радиус сферы обозначим через r_1 , величину заряда — через e , расстояние его от центра сферы — через a , причем будем считать, что $a > r_1$. Точечный заряд e , лежащий на оси на расстоянии a от центра, будем рассматривать как предел заряда, равномерно распределенного по объему, вырезаемому из очень узкого конуса с углом растворения $\theta = \gamma$ двумя сферами радиусов $r = a$ и $r = a + \delta$, где γ и δ в пределе стремятся к нулю.

Плотность ρ_0 равномерно распределенного в этом объеме заряда положим равной

$$\rho_0 = \frac{e}{\pi(\gamma a, \delta)^2}, \quad (20, 34)$$

что в пределе при γ и δ , стремящихся к нулю, приведет к правильному значению полного заряда в точке $r=a, \theta=0$.

Будем обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к средам, расположенным внутри и вне сферы $r=r_1$. Для потенциалов $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в этих средах будем иметь уравнения:¹

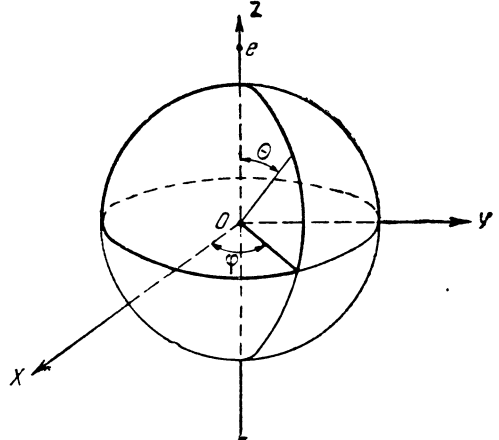


Рис. 29.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right] = -\frac{4\rho^{(k)}\pi}{\epsilon_k}, \quad (k=1, 2), \quad (20, 35)$$

где

$$\rho^{(1)} = 0, \quad \rho^{(2)} = \begin{cases} \rho_0 & \text{при } 0 \leq \theta \leq \gamma \text{ и } a \leq r \leq a + \delta, \\ 0 & \text{при всех остальных значениях } \theta \text{ и } r, \end{cases} \quad (20, 36)$$

а ϵ_1 и ϵ_2 — соответствующие диэлектрические постоянные.

Так как в данном случае поле не зависит от φ , а пределами изменения для угла θ являются значения $\theta=0$ и $\theta=\pi$, то, согласно сказанному выше, за $M(\theta)$ должна быть выбрана одна из функций

$$M_n = A_n P_n(\cos \theta) = A_n P_n(x), \quad n=0, 1, 2, \dots \infty. \quad (20, 37)$$

Выберем A_n так, чтобы M_n была нормированной функцией, т. е. чтобы было

$$\int_{x=-1}^{x=+1} [M_n(x)]^2 dx = A_n^2 \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = 1.$$

Пользуясь известным значением интеграла²

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad (20, 38)$$

¹ От φ искомые потенциалы, очевидно, не зависят.

² См. Уиттекер — Ватсон, ч. II, стр. 94, 15, 14.

получаем отсюда:

$$A_n^2 = \frac{2n+1}{2}. \quad (20,39)$$

Умножая (20,35) на M_n и интегрируя в пределах $(-1 \leq x \leq +1)$, найдем:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_n^{(k)}}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} u_n^{(k)} = - \frac{4\pi \rho_n^{(k)}(r)}{\varepsilon_k}, \quad (20,40)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(k)}(r) &= \int_{-1}^{+1} u^{(k)} M_n(x) dx = A_n \int_{-1}^{+1} u^{(k)} P_n(x) dx, \\ \rho_n^{(k)}(r) &= A_n \int_{-1}^{+1} \rho^{(k)} P_n(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (20,41)$$

Общий интеграл соответствующего однородного уравнения имеет форму

$$u_n^{(k)} = A_n^{(k)} r^n + \frac{B_n^{(k)}}{r^{n+1}}, \quad (20,42)$$

и это дает окончательный вид решения в первой среде, поскольку в ней $\rho_n^{(1)}(r)$ равно нулю.² Решение же уравнения (20,40) для второй среды получаем из (20,42) путем варьирования постоянных. Таким образом находим, что

$$u_n^{(1)} = C_n^{(1)} r^n + D_n^{(1)} r^{-(n+1)}, \quad (20,43)$$

$$u_n^{(2)} = C_n^{(2)} r^n + D_n^{(2)} r^{-(n+1)} + \frac{4\pi}{(2n+1)\varepsilon_2} \int_{r_1}^r \rho_n^{(2)}(\xi) \xi \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r}{\xi} \right)^n \right] d\xi, \quad (20,44)$$

где $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ — произвольные постоянные.

Так как $u_n^{(1)}$ должно оставаться конечным при $r=0$, то должно быть $D_n^{(1)}=0$, тогда как условие конечности $u_n^{(2)}$ при $r=\infty$ показывает, что

$$C_n^{(2)} = \frac{4\pi}{(2n+1)\varepsilon_2} \int_a^{a+\delta} \rho_n^{(2)}(\xi) \xi^{1-n} d\xi, \quad (20,45)$$

¹ Несмотря на то, что $P_n(x)$ не обращается в нуль при $x = \pm 1$, члены, выделяющиеся при интегрировании по частям выражения

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right] P_n(x) dx,$$

равные

$$(1-x^2) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} P_n(x) \Big|_{-1}^{+1} \quad \text{и} \quad (1-x^2) P_n'(x) u^{(k)} \Big|_{-1}^{+1},$$

обращаются в нуль из-за множителя $(1-x^2)$.

² См. (20,36) и (20,41).

ибо (20,44) дает при $r > a + \delta$:

$$u_n^{(2)} = \left[C_n^{(2)} - \frac{4\pi}{(2n+1)\varepsilon_2} \int_a^{a+\delta} \rho_n^{(2)}(\xi) \xi^{1-n} d\xi \right] r^n + \\ + \left[D_n^{(2)} + \frac{4\pi}{(2n+1)\varepsilon_2} \int_a^{a+\delta} \rho_n^{(2)}(\xi) \xi^{n+2} d\xi \right] r^{-(n+1)}, \quad (20,46)$$

где второй член при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а первый возрастает неограниченно, кроме как при условии (20,45).

Чтобы определить остающиеся постоянные $C_n^{(1)}$ и $D_n^{(2)}$, надо использовать граничные условия на поверхности раздела сред. На этой границе должны быть непрерывны потенциалы и нормальные составляющие диэлектрического смещения. Это дает соотношения:²

$$\left. \begin{aligned} (u_n^{(1)})_{r=r_1} &= (u_n^{(2)})_{r=r_1}, \\ \left(\varepsilon_1 \frac{du_n^{(1)}}{dr} \right)_{r=r_1} &= \left(\varepsilon_2 \frac{du_n^{(2)}}{ar} \right)_{r=r_1}. \end{aligned} \right\} \quad (20,47)$$

Используя их, получаем:

$$C_n^{(1)} r_1^n = C_n^{(2)} r_1^n + D_n^{(2)} r_1^{-(n+1)}$$

и

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n C_n^{(1)} r_1^n = n C_n^{(2)} r_1^n - (n+1) \frac{D_n^{(2)}}{r_1^{n+1}},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_n^{(1)} &= \frac{(2n+1)\varepsilon_2}{[n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2]} C_n^{(2)}, \\ D_n^{(2)} &= \frac{n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r_1^{2n+1}}{[n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2]} C_n^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (20,48)$$

Так как нас здесь интересует лишь предельный случай точечного заряда, то замечая, что для любой конечной и непрерывной в смежности с $\xi = a$ функции $F(\xi)$ будет иметь место соотношение

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{r_1}^{\infty} \rho_n^{(2)}(\xi) F(\xi) d\xi = \lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} A_n \int_a^{a+\delta} F(\xi) d\xi \int_{\cos \gamma}^1 \rho_0 P_n(x) dx = \frac{e A_n}{\pi a^2} \times \\ \times F(a) P_n(1) \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \gamma)}{\gamma^2} = \frac{e F(a) A_n}{2\pi a^2}, \quad (20,49)$$

¹ Ибо при $r > a + \delta$ и при $r < a$ $\rho^{(2)}(r, \theta) = 0$, а, стало быть, и $\rho_n^{(2)}(r) = 0$.

² Ср. аналогичные условия (18,12) и их получение из (18,3).

³ Ибо пределам ($0 \leq \theta \leq \gamma$), в которых $\rho(r, \theta)$ отлична от нуля, соответствуют пределы $1 \geq x \geq \cos \gamma$ по x .

видим, что (20,48) и (20,45) дают вместе:

$$\left. \begin{aligned} C_n^{(1)} &= A_n \frac{2e}{[n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2] a^{n+1}}, \\ C_n^{(2)} &= A_n \frac{2e}{(2n+1) a^{n+1} \varepsilon_2}, \\ D_n^{(2)} &= A_n \frac{2n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r_1^{2n+1} e}{(2n+1) [n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2] a^{n+1} \varepsilon_2}. \end{aligned} \right\} \quad (20,50)$$

Так как, в соответствии с общей теоремой, разложение u по нормированным функциям $M_n(x) = A_n P_n(x)$ имеет вид:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n M_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n P_n(x), \quad (20,51)$$

то, например, для $u^{(1)}$ получим, если учесть, что $A_n^2 = \frac{2n+1}{2}$ и вспомнить, что, как было показано выше, $D_n^{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n^{(1)} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n C_n^{(1)} r^n P_n(x) = \\ &= \frac{e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{[n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2]} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(x), \quad (r < a). \end{aligned} \quad (20,52)$$

Аналогичным образом можем получить выражения для $u^{(2)}$ при $r_1 < r < a$ и при $r > a$, исходя из формул (20,44) и (20,51) и пользуясь значениями (20,50) постоянных $C_n^{(2)}$ и $D_n^{(2)}$.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ формула (20,52) дает, в частности, если воспользоваться основным свойством функций $P_n(x)$:¹

$$u^{(1)} = \frac{e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(x) = \frac{e}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}}, \quad (20,53)$$

т. е. получается потенциал точечного заряда e , находящегося в точке $r=a$, $\theta=0$ в пустоте, как оно и должно быть.

20.7. Мы рассмотрели здесь случай двух различных сред с шаровой поверхностью раздела. Совершенно аналогично можно было бы решить задачу в случае произвольного числа сред, если поверхности раздела их — это концентрические сферы, а внешнее поле создается любой системой как угодно расположенных зарядов.

Пример 2

20.8. В качестве второго примера рассмотрим задачу о распределении электричества по поверхности бесконечного проводящего кругового конуса, находящегося в пустоте и подвергающегося электростатическому воздействию со стороны расположенного на его оси точечного заряда.

¹ См. Уиттекер — Ватсон, ч. II, стр. 91, (15,1).

20. 9. Для большей общности рассмотрим сначала задачу для конечной области, в качестве какой возьмем пространство, ограниченное двумя концентрическими сферами $r=r_1$ и $r=r_2$ и конусом $\theta=\alpha < \pi$. Точечный заряд e , находящийся на оси конуса на расстоянии a от его вершины, заменим, как в предыдущем примере, непрерывным равномерно распределенным зарядом внутри малого объема, ограниченного сферическими поверхностями $r'=a$ и $r''=a+\delta < r_2$ и конусом $\theta=\gamma$, причем γ и δ весьма малы и в пределе стремятся к нулю. Объемную плотность ρ_0 внутри этого объема положим равной¹

$$\rho_0 = \frac{e}{\pi (a\gamma)^2 \delta}. \quad (20,54)$$

Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -4\pi\rho \quad (20,55)$$

при условии, что на всей поверхности области $u=0$.

Так как поле обладает симметрией вращения и не зависит от φ , и так как в данном случае решение ищется в интервале $(0 \leq \theta < \alpha < \pi)$, то за $M(x)$ нужно, согласно указанному выше общему принципу, принять функцию

$$M_n(x) = A_n P_n(x), \quad (20,56)$$

причем значения n должны быть выбраны таким образом, чтобы на поверхности ограничивающей область конуса $\theta=\alpha$ эта функция обращалась в нуль. Это дает для определения допустимых значений n условие

$$P_n(\cos \alpha) = 0, \quad (20,57)$$

которое следует рассматривать, как уравнение относительно n . Решение такого уравнения подробно исследовано Макдональдом,² который нашел, что в естественном соответствии с упомянутой в п. 15. 2 общей теоремой это уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней n_m , $m=1, 2, \dots, \infty$. Им же даны и формулы для вычисления этих корней. В частности, если α не слишком близко к нулю или к π , то имеем для них разложения:

$$\left. \begin{aligned} n_m &= x_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\alpha} \frac{1}{1+x_0} + \\ &+ \frac{9}{64} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\alpha} \frac{1}{(1+x_0)(2+x_0)} - \frac{1}{64} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\alpha} \frac{1}{(1+x_0)^2} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (20,58)$$

где

$$x_0 = \frac{\pi}{2\alpha} \left(2m - \frac{1}{2} \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

¹ Ср. (20,34).

² Н. М. Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc., 1899. К этой работе и отсылаем за всеми подробностями о корнях уравнений $P_n^m(x) = 0$, в которых x и m — заданные величины, а n — искомая.

В дальнейшем, чтобы не усложнять написание формул, будем всегда писать вместо n_m просто n , понимая под этим одно из значений n_m , в соответствии с чем будем и в формуле (20,56) приписывать n такое же значение, т. е. $n = n_m$. Далее, постоянную A_n в (20,56) выбираем так, чтобы $M_n(x)$ была нормированной функцией, причем должно быть

$$A_n^2 = \frac{1}{\int_{x_\alpha}^1 [P_n(x)]^2 dx}, \quad x_\alpha = \cos \alpha \quad (20,59)$$

Входящий сюда интеграл может быть также представлен в другой форме, именно:¹

$$\int_{x_\alpha}^1 [P_n(x)]^2 dx = -\frac{1-x_\alpha^2}{2n+1} \left\{ \frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right\}_{x=x_\alpha},$$

где

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial n} = \left(\frac{\partial P_\nu(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=n}, \quad (20,60)$$

что дает для A_n^2 значение:

$$A_n^2 = -\frac{2n+1}{\sin^2 \alpha \left\{ \frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right\}_{x=x_\alpha}}. \quad (20,61)$$

Умножая теперь (20,55) на $M_n(x) dx$ и интегрируя в пределах от x_α до единицы, получим, как обычно, [ср. (20,40)]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_n}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} u_n = -4\pi \rho_n(r), \quad (20,62)$$

¹ Так как $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n = 0$, а $P_m(x)$, где m какое-либо отличное от n число, удовлетворяет такому же уравнению, в котором только n заменено через m , и так как эти уравнения представляют собой частный случай уравнений (а) и (б) в сноске³ на стр. 127, причем надо только в этих последних положить $s_1 = x$, $p_1 = 1-x^2$, $q_1 = 0$, $r_1 = 1$, $\lambda'_n = n(n+1)$, то для них имеет место соотношение (г) той же сноски, в котором надо положить $a_1 = x_\alpha = \cos \alpha$, $b_1 = 1$. Это дает, из-за $n(n+1) - m(m+1) = (n-m)(n+m+1)$:

$$\begin{aligned} \int_{x_\alpha}^1 P_n(x) P_m(x) dx &= \frac{(1-x^2)[P_n(x)P'_m(x) - P_m(x)P'_n(x)] \Big|_{\cos \alpha}^1}{(n+m+1)(n-m)} = \\ &= \left[\frac{\sin^2 \alpha P'_n(\cos \alpha)}{n+m+1} \right] \left[\frac{P_m(\cos \alpha)}{n-m} \right], \end{aligned}$$

последнее из-за того, что $P_n(\cos \alpha) = 0$. Здесь m пока произвольное число. Переходя теперь к пределу $m = n$ и раскрывая по правилу Лопиталья появляющуюся справа неопределенность, находим:

$$\int_{x_\alpha}^1 [P_n(x)]^2 dx = -\frac{\sin^2 \alpha \cdot P'_n(\cos \alpha)}{(2n+1)} \left[\frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial m} \right]_{m=n},$$

а это и есть формула (20,60).

где

$$\left. \begin{aligned} u_n &= A_n \int_{x_\alpha}^1 u P_n(x) dx, \\ \rho_n(r) &= A_n \int_{x_\alpha}^1 \rho P_n(x) dx = A_n \int_{x_\gamma}^1 \rho P_n(x) dx, \quad x_\gamma = \cos \gamma. \end{aligned} \right\} (20,63)$$

Уравнение (20,62) совпадает с (20,40), если в этом последнем положить $\epsilon_k = 1$. Интеграл его имеет поэтому вид (20,44) и может быть записан в такой форме:

$$u_n = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)} + \frac{4\pi}{2n+1} \int_{r_1}^r \rho_n(\xi) \xi \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r}{\xi} \right)^n \right] d\xi, \quad (20,64)$$

причем, однако, n здесь теперь уже не целое число.

Граничные условия для u_n будут

$$(u_n)_{r=r_1} = (u_n)_{r=r_2} = 0, \quad (20,65)$$

что дает при подстановке в (20,64) и при учете того, что в предельном случае точечного заряда получится при $r > \delta + a$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0 \\ r_1 \rightarrow a}} \int_{r_1}^r \rho_n(\xi) \xi \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r}{\xi} \right)^n \right] d\xi = \\ & = A_n \frac{e}{\pi a^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \gamma^2} \int_a^{a+\delta} \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r}{\xi} \right)^n \right] \xi d\xi \int_{\cos \gamma}^1 P_n(x) dx = \\ & = \frac{A_n e}{2\pi a} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right], \end{aligned} \quad (20,66)$$

тогда как при $r < a$ аналогичный интеграл равен нулю:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{2 A_n e (a^{2n+1} - r_2^{2n+1})}{(2n+1) a^{n+1} [r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}]}, \\ D_n &= -C_n r_1^{2n+1}. \end{aligned} \right\} (20,67)$$

Таким образом, решение (20,64) полностью определяется. Значение u найдется теперь по обычной формуле

$$u = \sum_{(n)} u_n M_n(x) = \sum_{(n)} A_n u_n P_n(x), \quad (20,68)$$

где суммирование распространено на все корни $n = n_m$ уравнения (20,57). Это дает, например, при $r < a$:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{(n)} A_n C_n r^n \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n+1} \right] P_n(x) = \\ &= \frac{2e}{\sin^2 \alpha} \sum_{(n)} \frac{(a^{2n+1} - r_2^{2n+1}) r^n}{a^{n+1} [r_2^{2n+1} - r_1^{2n+1}]} \times \\ &\times \left[\frac{P_n(\cos \theta)}{\left[\frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right]_{x=\cos \alpha}} \right] \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n+1} \right], \end{aligned} \quad (20,69)$$

и аналогичным образом можем получить соответствующую формулу для $r > a$.¹

20. 10. Полагая здесь $r_1 = 0$ и $r_2 = \infty$, получим искомое решение для бесконечного конуса:



Рис. 30.

$$u = \frac{2e}{a} \sum_{(n)} \frac{A_n^2}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta) =$$

$$= -\frac{2e}{a \sin^2 \alpha} \sum_{(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{P_n(\cos \theta)}{\left[\frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x}\right]_{x=\cos \alpha}}. \quad (20,70)$$

20. 11. Если положить в (20,69) $r_2 = \infty$, оставляя r_1 конечным, то получится решение для бесконечного конуса с шаровым закруглением на конце (рис. 30). При этом будет:

$$u = \frac{2e}{a} \sum_{(n)} \frac{A_n^2}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n+1}\right] P_n(\cos \theta) =$$

$$= -\frac{2e}{a \sin^2 \alpha} \sum_{(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n+1}\right] \frac{P_n(\cos \theta)}{\left[\frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x}\right]_{x=\cos \alpha}}, \quad (20,71)$$

что разбивается на разность двух решений вида (20,70), во втором из которых только $\left(\frac{r}{a}\right)$ заменяется через $\left(\frac{r_1}{ar}\right)$ и все оно умножается на $\left(\frac{r_1}{r}\right)$.

20. 12. Если положить в (20,70) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, что соответствует случаю, когда конус переходит в бесконечную плоскость, то корни n уравнения $P_n\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = P_n(0) = 0$ становятся равными [ср. (20,58)]:

$$n = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (20,72)$$

а для A_n^2 получается, согласно (20,59) и (20,33), значение

$$A_n^2 = \frac{1}{\int_0^1 [P_{2m-1}(x)]^2 dx} = \frac{2}{\int_{-1}^1 [P_{2m-1}(x)]^2 dx} = 4m - 1 = 2n + 1. \quad (20,73)$$

(20,70) дает в этом случае

$$u = \frac{2e}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m+1} P_{2m+1}(\cos \theta) =$$

$$= \frac{e}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} - \frac{e}{\sqrt{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2}}, \quad (20,74)$$

¹ Рассмотренную в этом примере задачу решал Н. М. Масдонлд, Transactions of the Cambridge Philosoph. Society, т. XVIII, 1900, обычным методом частных решений. Однако, данная им окончательная формула для случая конуса с округлением неверна из-за вкрадшейся вычислительной ошибки. Формула же для остроконечного конуса верна и совпадает с нашей. У него же даны ссылки на предыдущих авторов, в частности на Mehler'a.

т. е. u оказывается равной сумме потенциалов первичного и отраженного зарядов, как оно и должно быть.

20. 13. При тех же условиях изображенный на рис. 30 округленный на конце конус переходит в бесконечную плоскость с полушаровой выпуклостью радиуса r_1 на ней. Для потенциала u поля, возникающего при этом под действием точечного заряда e , расположенного на высоте a над плоскостью на перпендикуляре к ней, восстановленном из центра полусферы, получаем тогда из формулы (20,71), подобно предыдущему,

$$u = e \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2}} \right] - \frac{r_1}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{a'^2 - 2a'r \cos \theta + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{a'^2 + 2a'r \cos \theta + r^2}} \right] \right\}, \quad (20,75)$$

где $a' = \frac{r_1^2}{a}$ дает местоположение отраженного в полусфере заряда. Легко проверить, что это выражение удовлетворяет всем условиям задачи.

20. 14. Если, наконец, положить в (20, 69) $r_1 = 0$, оставляя r_2 конечным, то получим решение для случая области, образованной пересечением конуса $\theta = \alpha$ со сферой $r = r_2$.

Пример 3

20. 15. В качестве последнего примера рассмотрим задачу о нахождении электромагнитного поля диполя, колеблющегося с частотой ω ,¹ помещенного на оси идеально проводящего конического рефлектора.²

Задача приводится к интегрированию системы уравнений Максвелла (1, 12) — (1, 15), в которых $\frac{\partial}{\partial t}$ заменено через $i\omega$ и которые в данном случае выгодно записать в сферической системе координат. Рассматривая при этом сразу более общий случай любого аксиально-симметричного радиального распределения первичных токов $j^{(e)}$, т. е. полагая в уравнениях Максвелла $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ и $j_{\theta}^{(e)} = j_{\varphi}^{(e)} = 0$, тогда как $j_r^{(e)} = j$ может быть функцией координат r и θ , и замечая, что при этом, очевидно, $E_{\varphi} = 0$, получаем следующие соотношения:

$$H_r = \frac{ic}{\mu\omega} \operatorname{rot}_r \mathbf{E} = \frac{ic}{\mu\omega r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot E_{\varphi}) - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad (20,76)$$

$$H_{\theta} = \frac{ic}{\mu\omega} \operatorname{rot}_{\theta} \mathbf{E} = \frac{ic}{\mu\omega r \sin \theta} \left[\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial (rE_{\varphi})}{\partial r} \right] = 0, \quad (20,77)$$

$$H_{\varphi} = \frac{ic}{\mu\omega} \operatorname{rot}_{\varphi} \mathbf{E} = \frac{ic}{\mu\omega r} \left[\frac{\partial (rE_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right], \quad (20,78)$$

¹ Круговой.

² Эта задача рассмотрена иным методом Конторовичем и Лебедевым. См.: ЖЭТФ, 9, вып. 6, 1939, 729, а также ниже, § 76.

и далее, используя (1, 12) и полагая $H_\varphi = H$:

$$\frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (H \sin \theta) = \frac{i\varepsilon'\omega}{c} E_r + \frac{4\pi}{c} j, \quad (20,79)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial (rH)}{\partial r} = \frac{i\varepsilon'\omega}{c} E_\theta, \quad (20,80)$$

где

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{4\pi\sigma}{i\omega}, \quad (20,81)$$

причем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ удовлетворяется автоматически.

20. 16. Чтобы удовлетворить уравнению (20, 80), полагаем,

$$rE_\theta = \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}, \quad (20,82)$$

$$rH = -\frac{i\omega}{c} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (20,83)$$

где v — некоторая новая функция. Подставляя эти значения rE_θ и rH в (20, 78), получим:

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon'} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon'\mu\omega^2}{c^2} v \right] = \frac{1}{\varepsilon'} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + k^2 v \right], \quad (20,84)$$

где k^2 имеет значение (3, 15). Подставляя значения (20, 83) и (20, 84) в (20, 79), получаем уравнение для v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + k^2 v + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{4\pi i}{\omega} j. \quad (20,85)$$

Пользуясь этим уравнением, можем переписать (20, 84), в такой форме:

$$E_r = -\frac{1}{\varepsilon'} \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{4\pi i}{\omega} j \right\}, \quad (20,86)$$

что в свободных от первичных токов точках дает просто

$$E_r = -\frac{1}{\varepsilon' r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (20,87)$$

Таким образом, все сводится к определению v из уравнения (20, 85), к которому должны быть добавлены соответствующие граничные условия.

20. 17. При решении интересующей нас задачи, поступим так же, как в предыдущем статическом примере, именно, начнем с рассмотрения области, ограниченной двумя сферами $r=r_1$ и $r=r_2$ и конусом $\theta=\alpha$. Создающий первичное поле элемент тока $j^{(e)}$ заменим сначала непрерывным распределением (равномерным) первичных токов с объемной плотностью j_0 внутри объема, ограниченного сферами $r=a > r_1$ и $r=a+h < r_2$ и конусом $\theta=\gamma$, причем в пределе будем стремиться γ к нулю, сохраняя постоянным и равным I произведение $\pi (a\gamma)^2 j_0$. Это дает:

$$j_0 = \frac{I}{\pi (a\gamma)^2}. \quad (20,88)$$

В пределе при $\gamma=0$ получим линейную антенну длиной h , по которой циркулирует переменный ток с амплитудой, равной I . Если за-

тем устремить к нулю и длину h этой антенны, сохраняя, однако, постоянным произведение $P = Ih$ из длины антенны на силу тока в ней, то получим решение для первичного излучателя в виде диполя с моментом P .

Граничные условия сводятся в нашем случае к обращению в нуль на стенках области нормальной к ним составляющей \mathbf{H} и тангенциальной составляющей \mathbf{E} . Первое условие удовлетворяется само собой, так как \mathbf{H} не имеет нормальных к стенкам составляющих H_θ и H_r , тогда как условие для \mathbf{E} дает

$$(E_r)_{\theta=\alpha} = 0, \quad (20,89)$$

и

$$(E_\theta)_{r=r_1} = (E_\theta)_{r=r_2} = 0. \quad (20,90)$$

Второе из них можно из-за (20, 82) переписать так:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]_{r=r_1} = 0; \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]_{r=r_2} = 0, \quad (20,91)$$

тогда как (20, 89) и (20, 84) дают:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + k^2 v \Big|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (20,92)$$

Условия (20, 91) и (20, 92) будут выполнены, если положим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0; \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_2} = 0, \quad (0 \leq \theta \leq \alpha) \quad (20,93)$$

и

$$(v)_{\theta=\alpha} = 0, \quad (r_1 < r < r_2), \quad (20,94)$$

ибо, дифференцируя уравнение (20,93) по θ , придем вновь к (20, 91), а дифференцируя (20,94) по r дважды и замечая, что при этом получается $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)_{\theta=\alpha} = 0$, видим, что из этого и из (20,94) вновь получается (20,92).¹ Таким образом, мы пришли к задаче об интегрировании уравнения (20,85) при граничных условиях (20,93) и (20,94), причем правая часть уравнения (20,85) определяется условиями

$$j = \begin{cases} j_0 = \frac{I}{\pi a^2 \gamma^2} \text{ при } a \leq r \leq a + h \text{ и } 0 \leq \theta \leq \gamma, \\ 0 \text{ при всех остальных значениях } r \text{ и } \theta. \end{cases} \quad (20,95)$$

20. 18. Переходим к интегрированию уравнения (20, 85), которое записываем в таком виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + k^2 v + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{4\pi i}{\omega}, \quad x = \cos \theta. \quad (20,96)$$

Умножаем его, в соответствии с граничными условиями (20, 93), на ту же функцию $M_n(x) = A_n P_n(x)$, как в (20,56), и интегрируем по x

¹ Замена условий (20,91) — (20, 92) условиями (20, 93) — (20, 94) допустима, ввиду наличия в выражении v произвольных функций, не влияющих на значения \mathbf{E} и \mathbf{H} .

от $x_\alpha = \cos \alpha$ до $x = 1$. Получаем при этом, так же, как в случае уравнения (20, 62):

$$\frac{d^2 v_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] v_n = \frac{4\pi i}{\omega} j_n, \quad (20,97)$$

где обозначения такие же, как в (20, 63).

Вводя в однородное уравнение

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] u_n = 0 \quad (20,98)$$

новую функцию z соотношением

$$u_n = \sqrt{r} z, \quad (20,99)$$

легко убедиться в том, что z удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right] z = 0. \quad (20,100)$$

Общий интеграл уравнения (20, 98) может быть поэтому записан в такой форме:

$$u_n = A_n u_n^{(1)} + B_n u_n^{(2)}, \quad (20,101)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(1)}(r) &= \sqrt{r} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr), \\ u_n^{(2)}(r) &= \sqrt{r} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr), \end{aligned} \right\} \quad (20,102)$$

а A_n и B_n — постоянные. Варьируя постоянные A_n и B_n , получаем общий интеграл уравнения (20, 97), именно:

$$\begin{aligned} v_n &= M_n u_n^{(1)}(r) + N_n u_n^{(2)}(r) + \\ &+ \frac{\pi^2}{\omega} \int_{r_1}^r [u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)}(r) - u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)}(r)] j_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (20,103)$$

где M_n и N_n — новые постоянные. При выводе его использовано соотношение

$$u_n^{(1)'} u_n^{(2)} - u_n^{(1)} u_n^{(2)'} = \text{const} = \frac{4i}{\pi}, \quad (20,104)$$

в котором значение постоянной легко определяется,¹ если воспользо-

¹ Постоянство выражения (20, 104) [определителя Вронского для двух решений $u_n^{(1)}$ и $u_n^{(2)}$ уравнения (20, 98)] вытекает из основных положений теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка и легко доказывается, если уравнения $u_n^{(1)''} + [k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}] u_n^{(1)} = 0$ и $u_n^{(2)''} + [k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}] u_n^{(2)} = 0$, которым удовлетворяют $u_n^{(1)}$ и $u_n^{(2)}$, умножить соответственно на $u_n^{(2)}$ и на $u_n^{(1)}$ и вычесть одно из другого.

Это сразу дает $\frac{d}{dr} [u_n^{(1)} u_n^{(2)'} - u_n^{(2)} u_n^{(1)'}] = 0$, т. е. $u_n^{(1)'} u_n^{(2)} - u_n^{(1)} u_n^{(2)'} = \text{const}$.

ваться асимптотическими значениями функций u_1 и u_2 и их производных при $r \rightarrow \infty$, именно:

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(1)}(r) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{2}} e^{ikr}; & u_n^{(1)'} &\approx ik u_n^{(1)}; \\ u_n^{(2)}(r) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{2}} e^{-ikr}; & u_n^{(2)'} &\approx -ik u_n^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (20,105)$$

Для определения M_n и N_n имеются условия:

$$\left(\frac{dv_n}{dr} \right)_{r=r_1} = 0; \quad \left(\frac{dv_n}{dr} \right)_{r=r_2} = 0, \quad (20,106)$$

которые непосредственно получаются из (20, 93). Применяя их, находим:

$$\begin{aligned} M_n u_n^{(1)'}(r_1) + N_n u_n^{(2)'}(r_1) &= 0, \\ M_n u_n^{(1)'}(r_2) + N_n u_n^{(2)'}(r_2) + \frac{\pi^2}{\omega} \int_a^{a+h} [u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)'}(r_2) - u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)'}(r_2)] \times \\ &\times j_n(\xi) d\xi = 0, \end{aligned}$$

так что

$$\left. \begin{aligned} M_n &= \frac{\pi^2 u_n^{(2)'}(r_1)}{\omega [u_n^{(1)'}(r_2) u_n^{(2)'}(r_1) - u_n^{(2)'}(r_2) u_n^{(1)'}(r_1)]} \times \\ &\times \int_a^{a+h} [u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)'}(r_2) - u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)'}(r_2)] j_n(\xi) d\xi; \\ N_n &= -\frac{u_n^{(1)'}(r_1)}{u_n^{(2)'}(r_1)} M_n. \end{aligned} \right\} \quad (20,107)$$

Таким образом, искомое общее решение найдено, и остается его применить к случаю излучателя в виде диполя. Подставляя для этого в общее выражение для j_n , т. е. в формулу

$$j_n = A_n \int_{x_a}^1 j(r, x) P_n(x) dx,$$

значение (20, 95) для j , причем получается

$$\left. \begin{aligned} j_n(r) &= \frac{A_n I}{\pi a^2 \gamma^2} \int_{\cos \gamma}^1 P_n(x) dx \quad \text{при } a \leq r \leq a + h, \\ j_n(r) &= 0 \quad \text{при всех остальных значениях } r, \end{aligned} \right\} \quad (20,108)$$

и, переходя к предельному случаю бесконечно-тонкого излучателя (антенны), для чего полагаем в (20, 108) $\gamma \rightarrow 0$, находим:¹

$$\lim_{\gamma=0} [j_n(r)] = \frac{A_n I}{2\pi a^2}, \quad a \leq r \leq a + h. \quad (20,109)$$

Это соответствует антенне высотой h с равномерно распределенным по длине ее „сторонним“ током I . Подставляя (20,109) в (20,107) и

¹ Так как $[P_n(x)]_{x \rightarrow 1} \rightarrow 1$.

считая, что $P = Ih$ тоже стремится к нулю, притом так, что „момент“ $P = Ih$ антенны сохраняет постоянное значение, получим:

$$M_n = \frac{\pi u_n^{(2)'}(r_1) A_n}{2a^2 \omega [u_n^{(1)'}(r_2) u_n^{(2)'}(r_1) - u_n^{(2)'}(r_2) u_n^{(1)'}(r_1)]} \lim_{h \rightarrow 0} I \int_a^{a+h} [u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)'}(r_2) - u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)'}(r_2)] d\xi = \frac{\pi A_n u_n^{(2)'}(r_1) [u_n^{(1)}(a) u_n^{(2)'}(r_2) - u_n^{(2)}(a) u_n^{(1)'}(r_2)] P}{2\omega a^2 [u_n^{(1)'}(r_2) u_n^{(2)'}(r_1) - u_n^{(2)'}(r_2) u_n^{(1)'}(r_1)]}. \quad (20,110)$$

Аналогично вычисляется интеграл, входящий в формулу (20,103), причем при $r < a$ он равен нулю из-за того, что $j_n(\xi) = 0$ при $\xi < a$, тогда как при $r > a + h$ он обращается, при учете (20,109), в такой:

$$\int_{r_1}^r F(\xi, r) j_n(\xi) d\xi = \frac{A_n I}{2\pi a^2} \int_a^{a+h} F(\xi, r) d\xi, \quad (20,111)$$

где положено

$$F(\xi, r) = u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)}(r) - u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)}(r). \quad (20,112)$$

При $h \rightarrow 0$ и $P = Ih = \text{const}$ (20,111) дает:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{r_1}^r F(\xi, r) j_n(\xi) d\xi = \frac{A_n P F(a, r)}{2\pi a^2}, \quad r_2 > r > a. \quad (20,113)$$

Подставляя полученные значения постоянных в (20,103) и учитывая то, что было сказано о значении входящего в (20,103) интеграла при $r < a$, получим окончательно:

$$v_n = \frac{\pi A_n P [u_n^{(1)}(r) u_n^{(2)'}(r_1) - u_n^{(2)}(r) u_n^{(1)'}(r_1)] [u_n^{(1)}(a) u_n^{(2)'}(r_2) - u_n^{(2)}(a) u_n^{(1)'}(r_2)]}{2\omega a^2 [u_n^{(1)'}(r_2) u_n^{(2)'}(r_1) - u_n^{(2)'}(r_2) u_n^{(1)'}(r_1)]}, \quad (r < a), \quad (20,114)$$

и сходное выражение при $r > a$, которого выписывать не будем. v получается теперь по формуле вида (20,68), т. е.

$$v = \sum_{(n)} A_n v_n P_n(x), \quad (20,115)$$

где суммирование распространено на все корни $n = n_m$ уравнения (20,57), а A_n определяется одной из формул (20,59) или (20,61).

20.19. Полученное решение годится пока для области, ограниченной любыми двумя сферами $r = r_1$ и $r = r_2$ и конусом $\theta = \alpha$.

Перейдем теперь к предельным случаям и положим сперва $r_2 \rightarrow \infty$. Считая, как обычно, $\text{Im}(k) < 0$, видим, что при $r_2 \rightarrow \infty$ будет, согласно (20,105):

$$\left. \begin{aligned} |u_n^{(1)}(r_2)| \rightarrow \infty, & |u_n^{(1)'}(r_2)| \rightarrow \infty, \\ |u_n^{(2)}(r_2)| \rightarrow 0, & |u_n^{(2)'}(r_2)| \rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad (20,116)$$

и формула (20, 114) переходит в такую:

$$(\mathcal{V}_n)_{r_2=\infty} = - \frac{\pi A_n P [u_n^{(1)}(r) u_n^{(2)'}(r_1) - u_n^{(2)}(r) u_n^{(1)'}(r_1)] u_n^{(2)}(a)}{2\omega a^2 u_n^{(2)'}(r_1)}. \quad (20,117)$$

Эта формула вместе с (20, 115) дает решение задачи об электромагнитном поле, создаваемом колеблющимся диполем, расположенным на оси бесконечного конуса, имеющего на конце шаровое закругление изображенного на рис. 30 типа, причем радиус этого закругления равен r_1 . В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ конус с округленным концом переходит в бесконечную плоскость с полушаровой выпуклостью на ней, а так как при этом корни n уравнения $P_n(\cos \frac{\pi}{2}) = P_n(0) = 0$ обращаются, как уже указывалось выше, в $n = 2m - 1$, ($m = 1, 2, \dots$), а $A_n^2 = 4m - 1$, то (20, 115) и (20, 117) дают:

$$v = - \frac{\pi P}{2\omega a^2} \sum_{m=1}^{\infty} (4m - 1) \frac{u_{2m-1}^{(2)}(a)}{u_{2m-1}^{(2)'}(r_1)} [u_{2m-1}^{(1)}(r) u_{2m-1}^{(2)'}(r_1) - u_{2m-1}^{(2)}(r) u_{2m-1}^{(1)'}(r_1)]. \quad (20,118)$$

20. 20. Полагаем теперь в (20, 117) $r_1 \rightarrow 0$. Так как при этом функции $u_n^{(1)'}(r_1)$ и $u_n^{(2)'}(r_1)$ безгранично возрастают, что ясно из их выражений (20, 102) и из поведения входящих в них ханкелевых функций при аргументе, стремящемся к нулю, и так как предел отношения $\frac{u_n^{(1)'}(r_1)}{u_n^{(2)'}(r_1)}$ при $r \rightarrow 0$ равен $(-1)^1$, то (20, 117) дает:

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_n)_{r_2=0} &= - \frac{\pi A_n P}{2\omega a^2} [u_n^{(1)}(r) + u_n^{(2)}(r)] u_n^{(2)}(a) = \\ &= - \frac{\pi A_n P}{\omega a^2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) \sqrt{ar}, \end{aligned}$$

причем использованы (20, 102) и (16, 73). Подставляя это в (20, 115) и пользуясь формулой (20, 61), получим теперь:

$$v = \frac{\pi P \sqrt{ar}}{\omega a^2 \sin^2 \alpha} \sum_{(n)} \frac{(2n+1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\left[\frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right]_{x=\cos \alpha}} P_n(\cos \theta), \quad (r < a), \quad (20,119)$$

¹ Это видно из того, что при $r_1 \rightarrow 0$, когда $|u_n^{(1)}(r_1)| \rightarrow \infty$ и $|u_n^{(2)}(r_1)| \rightarrow \infty$, (20, 104) дает:

$$\frac{u_n^{(1)'}(r_1)}{u_n^{(2)'}(r_1)} \rightarrow \frac{u_n^{(1)}(r_1)}{u_n^{(2)}(r_1)} = \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr_1)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr_1)},$$

а это последнее отношение, согласно примечанию на стр. 148, стремится при $r_1 \rightarrow 0$ к минус единице.

и сходное выражение при $r > a$. Эти формулы и дают окончательное решение первоначально поставленной задачи. При этом для магнитного поля H , через которое, согласно (20,79), (20,80), выражаются и обе компоненты электрического вектора, находим из (20,83):

$$H = \frac{i\pi P \sin \theta}{ca \sin^2 \alpha} \sum_{(n)} \frac{(2n+1)}{\left[\frac{\partial P_n(x)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right]_{x=\cos \alpha}} \times \\ \times \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{a} \sqrt{r}} P'_n(\cos \theta), \quad (r < a). \quad (20,120)$$

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ конус превращается в плоскость, и так как при этом опять $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \dots, \infty$, а $A_n^2 = 4m - 1$ и $M_n(x) = A_n P_{2n-1}(x)$, то получается:

$$v = -\frac{\pi Pr}{\omega a} \sum_{m=1}^{\infty} (4m-1) \frac{H_{2m-\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) J_{2m-\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{a} \sqrt{r}} P_{2m-1}(\cos \theta), \quad (20,121)$$

а для H найдем, если учесть, что $\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta)$ ¹

$$H = -\frac{i\omega}{cr} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \\ = \frac{2i\pi P k^3 r}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \left(2m - \frac{1}{2}\right) \frac{H_{2m-\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) J_{2m-\frac{1}{2}}(kr)}{(ka)^{\frac{3}{2}} (kr)^{\frac{3}{2}}} P_{2m-1}^1(\cos \theta). \quad (20,122)$$

Входящий в (20,121) ряд может быть суммирован, если воспользоваться известной формулой сложения цилиндрических функций, именно:²

$$\frac{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{H_{m-\frac{1}{2}}^{(2)}(ka)}{(ka)^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \frac{J_{m-\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} P_{m-1}(\cos \theta), \quad (r < a), \quad (20,123)$$

где $R = \sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}$. Именно, если прибавить к (20,123) аналогичную формулу, в которой только θ заменено на $(\pi - \theta)$, причем R перейдет в $R' = \sqrt{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2}$ и получится

$$\frac{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr')}{(kr')^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{H_{m-\frac{1}{2}}^{(2)}(ka)}{(ka)^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \frac{J_{m-\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} P_{m-1}(-\cos \theta), \quad (20,124)$$

¹ См. ниже, (20,140).

² Watson, Bessel Funktionen, стр. 366, формулы (9) и (10) [формулу (10) умножить на i и сложить с (9)], а также Дополнение II, § 5, формула (D₃ 67).

то учитывая еще, что $P_{m-1}(-\cos \theta) = (-1)^{m-1} P_{m-1}(\cos \theta)$, найдем:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{Pkr}{\omega a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{H_1^{(2)}(kR)}{\sqrt{kR}} - \frac{H_1^{(2)}(kR')}{\sqrt{kR'}} \right\} = \\ &= \frac{Pr}{i\omega a} \left[\frac{e^{-ikR'}}{R'} - \frac{e^{-ikR}}{R} \right]. \end{aligned} \quad (20,125)$$

Для H находим теперь по формуле (20, 83):

$$\begin{aligned} H &= -\frac{i\omega}{cr} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{Pr}{c} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R'} \frac{\partial}{\partial R'} \left(\frac{e^{-ikR'}}{R'} \right) \right\} \sin \theta, \end{aligned} \quad (20,126)$$

откуда сразу видно, что H представляет собой наложение полей от основного и отраженного диполей. Формула (20,126) может быть переписана и в такой форме:

$$H = -\frac{Pksl}{c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{H_3^{(2)}(kR)}{(kR)^{\frac{3}{2}}} + \frac{H_3^{(2)}(kR')}{(kR')^{\frac{3}{2}}} \right\} r \sin \theta, \quad (20,127)$$

в которой она и дана у Конторовича и Лебедева, решавших ту же задачу совсем иным методом. Использованный этими авторами метод требует значительно более сложных выкладок и преобразований, чем данный здесь. Кроме того, они непосредственно вычисляли поле H , не вводя вспомогательной функции v , что еще более осложняет вычисление.

20. 21. Примечание. Формула для H дана Конторовичем и Лебедевым в форме, несколько отличной от нашей, но которая, однако, легко получается из формулы (20,120). Именно, для этого достаточно заметить, что функции

$$u_1 = P_n(\cos \theta) = P_n(x) \text{ и } u_2 = P_n(-\cos \theta) = P_n(-x)$$

являются обе частными решениями уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + n(n+1)u = 0, \quad (20,128)$$

так что определитель Вронского $\Delta = u_1' u_2 - u_2' u_1$ для этой пары решений удовлетворяет уравнению¹

$$(1-x^2) \Delta = (1-x^2) [P_n'(x) P_n(-x) + P_n'(-x) P_n(x)] = c = \text{const}. \quad (20,129)$$

¹ Ибо, умножая уравнение

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) u_1'] + n(n+1) u_1 = 0$$

на u_2 , а

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) u_2'] + n(n+1) u_2 = 0$$

на u_1 , и вычитая второе из первого, получим, что

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) (u_1' u_2 - u_2' u_1)] = 0,$$

откуда и вытекает (20,129).

Чтобы определить значение постоянной c , заметим прежде всего, что (20,16) дает при $m=0$ и любом n :

$$P_n^0(x) \equiv P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right), \quad (20,130)$$

а отсюда и из известной формулы¹

$$\frac{d}{dz} F(a, b, c, z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z) \quad (20,131)$$

для производной от гипергеометрической функции находим:

$$P'_n(x) = \frac{n(n+1)}{2} F\left(-n+1, n+2, 2, \frac{1-x}{2}\right). \quad (20,132)$$

Полагая в формулах (20,130) и (20,132) $x=1$, видим что

$$\left. \begin{aligned} P_n(1) &= F(-n, n+1, 1, 0) = 1, \\ P'_n(1) &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (20,133)$$

Далее, так как при $x \rightarrow 1$, имеем еще, что²

$$\left. \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)F(a, b, a+b, x)}{\Gamma(a+b) \lg \frac{1}{1-x}} \right|_{x \rightarrow 1} \rightarrow 1,$$

тогда как при $a+b > c$ будет

$$\left. \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)F(a, b, c, x)(1-x)^{a+b-c}}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} \right|_{x \rightarrow 1} \rightarrow 1, \quad (20,134)$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(1-x^2)P_n(-x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1-x^2)F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+x}{2}\right) \right] = 0, \quad (20,135)$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [(1-x^2)P'_n(-x)] &= \frac{n(n+1)}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1-x^2)F\left(-n+1, n+2, 2, \frac{1+x}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(1)}{\Gamma(1-n)\Gamma(n+2)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^2)}{1-\frac{1+x}{2}} = \frac{2}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)} = \frac{2 \sin \pi n}{\pi}, \end{aligned} \quad (20,136)$$

последнее, согласно известному свойству функции гамма. Подставляя в (20,129) найденные значения самих P_n и их производных при $x=1$, получим:

$$(1-x^2)[P'_n(x)P_n(-x) + P'_n(-x)P_n(x)] = \frac{2 \sin \pi n}{\pi}, \quad (20,137)$$

что можно записать и так [см. ниже, (20,140)]:

$$\sin \theta [P_n^{(1)}(\cos \theta)P_n(-\cos \theta) + P_n^{(1)}(-\cos \theta)P_n(\cos \theta)] = -\frac{2 \sin \pi n}{\pi}. \quad (20,138)$$

Эта формула справедлива при любых n и θ . Пусть теперь $\theta = \alpha$ и $n = n_m$, так что $P_n(\cos \alpha) = 0$. (20,137) дает тогда

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha P'_n(\cos \alpha)} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \left(\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right)_{x = \cos \alpha}} = \frac{\pi P_n(-\cos \alpha)}{2 \sin \pi n}. \quad (20,139)$$

¹ Уиттекер—Ватсон, ч. II, стр. 65.

² Уиттекер—Ватсон, ч. II, стр. 86, (18).

Подставляя это в (20, 120), найдем, принимая еще в соображение,¹ что

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \cdot P'_n(\cos \theta) = P_n^{(1)}(\cos \theta); \quad (20,140)$$

$$H = \frac{\pi^2 P}{2 \alpha i} \sum_{(n)} \frac{(2n+1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(-\cos \alpha) P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\sqrt{ar} \left[\frac{\partial P_n(\cos \alpha)}{\partial n} \right] \sin n\pi}, \quad (20,141)$$

а это и есть формула, найденная Конторовичем и Лебедевым.

20. 22. Заметим, в заключение, что поступая вполне аналогично тому, как мы это делали в §§ 18 и 19 для задач, разрешимых в цилиндрических координатах, можно было бы и здесь дать общее решение различных классов задач, относящихся к случаю наличия в пространстве различных сред с подходящими формами поверхностей раздела (например, в виде неограниченных коаксиальных конусов с общей вершиной и т. д.). Решение подобных задач может быть проведено совершенно теми же методами, как применявшиеся до этого выше, и не представляет никаких принципиальных трудностей, почему мы здесь на этом останавливаться не будем. Впоследствии мы еще встретимся с вопросом о решении некоторых задач подобного рода с помощью специального метода, предложенного для этой цели Конторовичем и Лебедевым.

Глава X

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОБЛЕМ (ПЕРВЫЙ СПОСОБ)

§ 21. Общие принципы. Примеры

21. 1. Пусть рассматривается нестационарный процесс, описываемый уравнением вида (15, 1) с разделяющимися переменными, причем одна из величин s_1, s_2, \dots, s_m обозначает время t , а граничные условия по остальным переменным принадлежат к одному из типов (15, 13) — (15, 15).

Полагая тогда $t = s_m$ и применяя сперва ко всем координатам s_1, s_2, \dots, s_{m-1} описанный в п. 15.2 процесс последовательного сведения данного уравнения к уравнениям с меньшим числом независимых переменных и преобразуя, параллельно с этим, обычным образом остающиеся граничные и начальные условия, придем в результате к некоторому обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с временем t в качестве независимой переменной, которое и останется проинтегрировать при попутно получившихся начальных условиях.

¹ Соотношение (20, 140) сразу получается из сравнения (20, 132) и (20, 16), где надо положить $m = 1$.

Так, например, если требуется решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad a = \text{const.} \quad (21,1)$$

для пластинки толщиной h (рис. 31), причем дано начальное распределение температуры в ней, скажем

$$(T)_{t=0} = F(x), \quad (21,2)$$

где $F(x)$ — некоторая заданная функция, и, кроме того, дано, что на внешней поверхности пластинки температура изменяется со временем заданным образом, так что

$$(T)_{x=0} = \varphi(t), \quad (T)_{x=h} = \psi(t), \quad (21,3)$$

то, действуя в соответствии с общей методикой, умножаем уравнение (21,1) на

$$\frac{2}{h} \sin \frac{k\pi x}{h} dx,$$

где k — четное число,¹ и интегрируем от нуля до h . Полагая

$$T_k = \frac{2}{h} \int_0^h T \sin \frac{k\pi x}{h} dx, \quad (21,4)$$

получим при этом:

$$\frac{dT_k}{dt} + \left(\frac{k\pi a}{h}\right)^2 T_k = \frac{2k\pi a^2}{h^2} [(-1)^{k+1} \psi(t) + \varphi(t)], \quad (21,5)$$

тогда как (21,2) дает:

$$(T_k)_{t=0} = \frac{2}{h} \int_0^h (T)_{t=0} \sin \frac{k\pi x}{h} dx = \frac{2}{h} \int_0^h F(x) \sin \frac{k\pi x}{h} dx. \quad (21,6)$$

Интегрируя уравнение (21,5) при начальном условии (21,6), найдем $T_k = T_k(t)$, после чего получим и саму температуру T :

$$T = T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{h}. \quad (21,7)$$

Улучшение сходимости этого ряда может быть сразу произведено с помощью способа, указанного в п. 9.4, являющегося применением к данному частному случаю общего метода, изложенного в п. 15.3.²

¹ Ибо мы имеем здесь дело с предельными условиями первого рода, поскольку на поверхностях $x=0$ и $x=h$ заданы значения самой функции T . Поэтому уравнение (21,1) нужно умножать на те из получаемых при разделении переменных в нем частные решения, которые обращаются в нуль при $x=0$ и при $x=h$, а это и есть $\sin \frac{k\pi x}{h}$ при $k=1, 2, 3, \dots, \infty$.

² См. также главу XII.

Совершенно аналогичным образом должно поступать и в других задачах подобного рода. При этом решение не осложнилось бы и в том случае, если бы в правой части уравнения (21, 1) имелся член, соответствующий наличию объемного тепловыделения, зависящего заданным образом от x и от t .

Поясним сказанное несколькими простыми примерами.

Пример 1

21. 2. В качестве первого примера рассмотрим более подробно решение указанной в п. 21. 1 тепловой задачи, причем предположим для конкретности, что начальная температура пластинки равна нулю и что при $x=h$ температура поддерживается равной нулю, а при $x=0$ она растет линейно со временем, так что $(T)_{x=0} = At$, где A — некоторая постоянная.

Уравнение (21, 5) принимает в этом случае такой вид:

$$\frac{dT_k}{dt} + \left(\frac{k\pi a}{h}\right)^2 T_k = \frac{2\pi a^2 k A}{h^3} t, \quad (21, 8)$$

а начальное условие (21, 6) будет

$$(T_k)_{t=0} = 0. \quad (21, 9)$$

Интеграл уравнения (21, 8), удовлетворяющий условию (21, 9), имеет вид:

$$T_k = \frac{2A}{k\pi} t - \frac{2h^2 A}{k^3 \pi^3 a^3} \left[1 - e^{-\left(\frac{k\pi a}{h}\right)^2 t}\right]. \quad (21, 10)$$

Подставляя в (21, 7), находим:

$$T = \frac{2At}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{h}}{k} - \frac{2h^2 A}{\pi^3 a^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\left(\frac{k\pi a}{h}\right)^2 t}}{k^3} \sin \frac{k\pi x}{h}. \quad (21, 11)$$

Для улучшения сходимости этого ряда пользуемся, согласно данному выше общему правилу, формулой (9, 12), причем получается:

$$T = At \left(1 - \frac{x}{h}\right) - \frac{2h^2 A}{\pi^3 a^3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{h}}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{k\pi a}{h}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{h}}{k^3} \right\}. \quad (21, 12)$$

Входящие сюда ряды содержат только члены, убывающие не медленнее, чем $1/k^3$, так что эта формула непосредственно годится уже для численных расчетов. Она может быть еще более упрощена, если воспользоваться известным значением входящей в (21, 12) первой суммы; именно: ¹

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{h}}{k^3} = \frac{\pi^3}{12} \left[3\left(\frac{x}{h}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{h}\right) - \left(\frac{x}{h}\right)^3 \right], \quad 0 \leq x \leq h, \quad (21, 13)$$

¹ Эта формула сразу получается из второй формулы (10, 38), если эту последнюю проинтегрировать по ξ от нуля до $\frac{\pi x}{h}$.

что дает:

$$T = At \left(1 - \frac{x}{h} \right) - \frac{h^2 A}{6a^2} \left[2 \left(\frac{x}{h} \right) - 3 \left(\frac{x}{h} \right)^2 + \left(\frac{x}{h} \right)^3 \right] + \frac{2h^2 A}{\pi^3 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{k\pi a}{h}\right)^2 t}}{k^3} \sin \frac{k\pi x}{h}. \quad (21,14)$$

При возрастании t последняя сумма быстро убывает. Она выражает собой отмирающую со временем часть процесса и играет тем меньшую роль, чем время t больше.

Пример 2

21.3. Рассмотрим теперь двухмерную тепловую задачу для прямоугольника, на сторонах которого поддерживается заданным образом меняющееся со временем распределение температуры.

Задача приводится к решению уравнения

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a = \text{const}, \quad (21,15)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} (T)_{x=0} &= f_1(y, t); & (T)_{x=h} &= f_2(y, t); \\ (T)_{y=0} &= \psi_1(x, t); & (T)_{y=l} &= \psi_2(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (21,16)$$

и при начальном условии

$$(T)_{t=0} = F(x, y), \quad (21,17)$$

где f_1, f_2, ψ_1, ψ_2 и F — некоторые заданные функции.

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда лишь одна из функций f_1, f_2, ψ_1, ψ_2 отлична от нуля, так как решение общей задачи может быть получено простым наложением четырех решений, соответствующих отличию температуры от нуля на одной из сторон при равенстве ее нулю на всех остальных. Будем поэтому считать функции f_2, ψ_1 и ψ_2 равными нулю и решать задачу сразу для этого более простого случая.¹

Поскольку разделение переменных в уравнении (21,15) приводит к частным решениям вида

$$T = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) (C \sin \beta y + D \cos \beta y) e^{-a^2(\alpha^2 + \beta^2)t}, \quad (21,18)$$

где A, B, C, D, α и β — произвольные постоянные, следует для решения нашей предельной задачи умножить уравнение (21,15) на одну из обращаящихся в нуль на сторонах прямоугольника функций $A \sin \frac{m\pi x}{h}$ или $C \sin \frac{n\pi y}{l}$, где m и n — целые, и интегрировать по всему

¹ Это делается только для некоторого сокращения вычислений, а не по необходимости, так как наш метод дает, очевидно, возможность рассмотреть совершенно аналогичным образом и общий случай, когда все эти функции отличны от нуля одновременно.

интервалу изменения соответствующей переменной. Таким путем получим сперва, полагая

$$T_n = \frac{2}{l} \int_0^l T \sin \frac{n\pi y}{l} dy, \quad (21, 19)$$

что

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T_n}{\partial t}, \quad (21, 20)$$

причем учтено, что

$$(T)_{y=0} = (T)_{y=l} = 0.$$

(21, 17) дает:

$$(T_n)_{t=0} = \frac{2}{l} \int_0^l (T)_{t=0} \sin \frac{n\pi y}{l} dy = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy. \quad (21, 21)$$

а первые две из формул (21, 16), где надо положить $f_2 = 0$,

$$\begin{aligned} (T_n)_{x=0} &= \frac{2}{l} \int_0^l (T)_{x=0} \sin \frac{n\pi y}{l} dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f_1(y, t) \sin \frac{n\pi y}{l} dy; \quad (T_n)_{x=h} = 0. \end{aligned} \quad (21, 22)$$

Умножаем теперь (21, 20) и (21, 21) на $\frac{2}{h} \sin \frac{m\pi x}{h} dx$ и интегрируем от нуля до h . Вводя обозначение:

$$T_{nm} = \frac{2}{h} \int_0^h T_n \sin \frac{m\pi x}{h} dx, \quad (21, 23)$$

получим при этом, учитывая (21, 22):

$$\frac{dT_{nm}}{dt} = -a^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{l^2} \right) T_{nm} + \frac{4m\pi a^2}{lh^2} \int_0^l f_1(y, t) \sin \frac{n\pi y}{l} dy, \quad (21, 24)$$

и начальное условие:

$$\begin{aligned} (T_{nm})_{t=0} &= \frac{2}{h} \int_0^h (T_n)_{t=0} \sin \frac{m\pi x}{h} dx = \\ &= \frac{4}{hl} \int_0^h \int_0^l F(x, y) \sin \frac{m\pi x}{h} \sin \frac{n\pi y}{l} dx dy. \end{aligned} \quad (21, 25)$$

Найдя T_{nm} из (21, 24) и (21, 25), получим сперва T_n по формуле:

$$T_n = \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} \sin \frac{m\pi x}{h}, \quad (21, 26)$$

а затем и температуру T , именно:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin \frac{n\pi y}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} \sin \frac{m\pi x}{h} \right) \sin \frac{n\pi y}{l}. \quad (21, 27)$$

Сходимость получающихся рядов может быть улучшена обычным способом.

21.4. Доведем вычисления до конца в случае, аналогичном рассмотренному в п. 21.2, именно, когда $(T)_{x=0} = At$, где A — постоянная, и $(T)_{t=0} = 0$.

Уравнения (21, 24) и (21, 25) дают тогда, поскольку $f_1(y, t) = At$ и $F(x, y) = 0$:

$$\frac{dT_{nm}}{dt} = -a^2\pi^2 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{l^2} \right) T_{nm} + \frac{4ma^2At}{nh^2} [1 - (-1)^n] \quad (21, 28)$$

и

$$(T_{nm})_{t=0} = 0, \quad (21, 29)$$

откуда

$$T_{nm} = \frac{4mA l^2 [1 - (-1)^n]}{n\pi^2 (l^2 m^2 + n^2 h^2)} \left\{ t - \frac{l^2 h^2}{a^2 \pi^2 (l^2 m^2 + n^2 h^2)} [1 - e^{-a^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{l^2} \right) t}] \right\}. \quad (21, 30)$$

При четном n , T_{nm} обращается в нуль. Ограничиваясь поэтому только нечетными значениями n и полагая $n = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \dots, \infty$, получим, подставляя (21, 30) в (21, 26):

$$T_{2s} = 0,$$

$$T_{2s+1} = \frac{8At}{(2s+1)\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{h}}{m^2 + \left[\frac{(2s+1)h}{l} \right]^2} - \frac{8Aa^2}{(2s+1)h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1 - e^{-\alpha_{ms}t})}{\alpha_{ms}^2} \sin \frac{m\pi x}{h},$$

$$\alpha_{ms} = \left[\frac{m^2}{h^2} + \frac{(2s+1)^2}{l^2} \right] a^2 \pi^2. \quad (21, 31)$$

Сходимость этого ряда могла бы быть улучшена обычным способом, т. е. посредством почленного вычитания из него ряда

$$\frac{8At}{(2s+1)\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{h}}{m}$$

для функции $(T_{2s+1})_{x=0} \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Выгоднее, однако, воспользоваться в данном случае известной суммой ряда¹

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\gamma}{m^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\text{sh}(\pi - \gamma)a}{\text{sh} \pi a}, \quad 0 < \gamma < \pi, \quad (21, 32)$$

с помощью которой вторая формула (21, 31) превращается в такую:

$$T_{2s+1} = \frac{4At}{(2s+1)\pi} \frac{\text{sh} \frac{(2s+1)\pi(h-x)}{l}}{\text{sh} \frac{(2s+1)\pi h}{l}} - \frac{8Aa^2}{(2s+1)h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1 - e^{-\alpha_{ms}t})}{\alpha_{ms}^2} \sin \frac{m\pi x}{h}, \quad (s \geq 0).$$

¹ Уингтекер — Ватсон, ч. I, стр. 262, (8).

Подставляя это значение T_{2s+1} в (21, 27) и вспоминая, что $T_{2s} = 0$, найдем для T выражение:

$$T = \frac{4At}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi(h-x)}{l}}{(2s+1) \operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi h}{l}} \sin \frac{(2s+1)\pi y}{l} - \frac{8Aa^2}{h^2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1 - e^{-\alpha m s t}) \sin \frac{m\pi x}{h}}{(2s+1) \alpha_{ms}^2} \sin \frac{(2s+1)\pi y}{l}. \quad (21, 33)$$

Первая сумма в точности совпадает с уже встречавшейся нам в п. 7.2 суммой (7, 26), а потому все проведенные там (а также в п. 9.5) преобразования, имевшие целью привести ее к удобному для практического использования виду, могут быть полностью перенесены и на данный случай. Двойная же сумма представляет собой, вообще говоря, хорошо сходящийся ряд, дальнейшим преобразованием которого мы здесь заниматься не будем. Заметим только, что для таких значений t , при которых произведение $\alpha_{10}t = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2}\right) a^2 \pi^2 t$ становится величиной порядка единицы или бóльшей, причем члены этого ряда, содержащие экспоненциальные множители, убывают весьма быстро с возрастанием m и s , выгодно преобразовать остающуюся¹ двойную сумму, —

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{h} \sin \frac{(2s+1)\pi y}{l}}{(2s+1) [l^2 m^2 + (2s+1)^2 h^2]}, \quad (21, 34)$$

в однократную, пользуясь легко получаемым из формулы (21, 32), путем дифференцирования ее по a , значением ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\gamma}{(m^2 + a^2)^2} = \frac{\pi\gamma}{4a} \frac{\operatorname{ch} a(\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} a\pi} - \frac{\pi^2}{4a} \frac{\operatorname{sh} a\gamma}{\operatorname{sh}^2 \pi a}, \quad (0 < \gamma \leq \pi).$$

Эта формула дает возможность выполнить в (21, 34) суммирование по m .

Пример 3

21.5. Пусть теперь требуется изучить процесс разогрева или охлаждения сплошного цилиндра из однородного материала. Будем считать цилиндр бесконечным и распределение температуры в нем зависящим только от r и от t .

Уравнение Фурье принимает тогда вид:

$$\frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (21, 35)$$

Считаем, что на внешней поверхности цилиндра, — при $r = R$, температура является заданной функцией времени, именно

$$(T)_{r=R} = f(t), \quad (21, 36)$$

¹ С точностью до множителя.

и что в начальный момент

$$(T)_{t=0} = \psi(r), \quad (0 \leq r \leq R), \quad (21,37)$$

где $\psi(r)$ — тоже заданная функция.

Умножая тогда (21, 35) на $rJ_0\left(\frac{rx_k}{R}\right) dr$, где x_k — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$,¹ и интегрируя в пределах $(0, R)$, получим:

$$\frac{dT_k}{dt} - \left(\frac{ax_k}{R}\right)^2 T_k = a^2 x_k J_0'(x_k) f(t), \quad (21,38)$$

где

$$T_k = \int_0^R r T J_0\left(\frac{rx_k}{R}\right) dr. \quad (21,39)$$

Начальное условие будет:

$$(T_k)_{t=0} = \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{rx_k}{R}\right) dr, \quad (21,40)$$

и решение получится по формуле:²

$$T = \sum_{(k)} \frac{2T_k(t) J_0\left(\frac{rx_k}{R}\right)}{J_1^2(x_k)}, \quad (21,41)$$

в которой суммирование распространяется на все положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

Пример 4

21.6. В качестве последнего примера рассмотрим задачу о решении волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v = \text{const}, \quad (21,42)$$

при граничных условиях:

$$(u)_{x=0} = f_1(t); \quad (u)_{x=a} = f_2(t), \quad (21,43)$$

и при начальных условиях:

$$(u)_{t=0} = \psi_1(x); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi_2(x).^3 \quad (21,44)$$

Умножаем (21, 42) и (21, 44) на $\frac{2}{a} \sin \frac{\pi k x}{a} dx$, где k — целое число, и интегрируем от нуля до a .

¹ Ср. п. 17.6.

² Ср. п. 17.6.

³ Это также задача о колебаниях струны, концы которой совершают вынужденные движения по заданному закону.

Получается:

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \left(\frac{k v \pi}{a}\right)^2 u_k = \frac{2 k \pi v^2}{a^2} [f_1(t) + (-1)^{k+1} f_2(t)] \quad (21, 45)$$

и

$$(u_k)_{t=0} = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{k \pi x}{a} dx; \quad \left(\frac{du_k}{dt}\right)_{t=0} = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{k \pi x}{a} dx, \quad (21, 46)$$

где

$$u_k = \frac{2}{a} \int_0^a u \sin \frac{k \pi x}{a} dx. \quad (21, 47)$$

Найдя u_k из (21, 45)—(21, 46), получим затем u по формуле:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin \frac{k \pi x}{a}. \quad (21, 48)$$

Глава XI

ВТОРОЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОБЛЕМ

§ 22. Общие принципы

22.1. В предыдущей главе мы рассмотрели вопрос о решении уравнения

$$D(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, t) \varphi = f(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, t) \quad (22, 1)$$

в том случае, когда как само это уравнение, так и граничные условия линейны относительно искомой функции и ее производных, а оператор D допускает полное разделение переменных. Считая при этом, что граничные условия принадлежат к одному из типов (15, 13)—(15, 15), мы применяли общий метод пятнадцатого параграфа сначала к пространственным координатам, исключая их последовательно из уравнений для искомым величин и оставляя выяснение зависимости от времени t напоследок.

Можно, однако, во многих случаях действовать и в обратном порядке, т. е. начинать с исключения времени t из уравнения, а затем уже переходить к выяснению зависимости искомым величин от координат. Это возможно, в частности, всегда тогда, когда как коэффициенты линейного оператора D , так и коэффициенты линейных соотношений, выражающих граничные условия, не зависят от времени.

Поясним это на примере. Пусть требуется решить уравнение

$$D[\varphi] \equiv \Delta \varphi - \left(a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \varphi\right) = f, \quad (22, 2)$$

где a , b и c — постоянные, а f — некоторая заданная функция координат и времени, причем известно, что на некоторых граничных поверхностях должны выполняться краевые условия вида

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \delta \varphi = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \chi, \quad (22, 3)$$

где α , β , γ , δ и ε могут зависеть только от координат, а χ — как от координат, так и от времени.

Начальные значения искомой функции и ее первой производной по времени пусть будут:¹

$$\left. \begin{aligned} (\varphi)_{t=0} &= g(x, y, z), \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} &= H(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (22, 4)$$

Так как однородное уравнение $D[\psi] = 0$ имеет частные решения вида

$$\psi = Q(t) \cdot F(x, y, z) = e^{-pt} F(x, y, z), \quad (22, 5)$$

где p — любое вещественное или комплексное число, то поступая с уравнением (22, 2) так же, как мы поступали в п. 15.1 с уравнением (15, 1), т. е. умножая (22, 2) на $e^{-pt} dt$ и интегрируя в пределах от нуля до некоторого $t = T$, получим, как в (15, 8):

$$\Delta \varphi_p - (ap^2 + bp + c) \varphi_p - e^{-pt} \left[a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (ap + b) \varphi \right] \Big|_0^T = \int_0^T e^{-pt} f dt, \quad (22, 6)$$

причем положено:

$$\varphi_p = \int_0^T e^{-pt} \varphi dt. \quad (22, 7)$$

Так как значения φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ при $t=0$ известны, то (22, 6) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_p - (ap^2 + bp + c) \varphi_p &= \int_0^T e^{-pt} f dt - aH(x, y, z) - \\ &- (ap + b) g(x, y, z) + e^{-pT} \left[a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (ap + b) \varphi \right]_{t=T}. \end{aligned} \quad (22, 8)$$

Это уравнение не может, вообще говоря, служить для нахождения φ_p , поскольку значение величины $\left[a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (ap + b) \varphi \right]$ нам неизвестно ни при каком $T > 0$.

Если, однако, известно на основании каких-либо общих соображений, что искомая функция и ее производная $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ должны во все вре-

¹ Второе из этих условий нужно, очевидно, только при $a \neq 0$. При $a = 0$, уравнение (22, 2) не содержит второй производной по времени и требуется только задание значения φ при $t=0$.

мена оставаться ограниченными, или, по крайней мере, возрастая со временем не быстрее, чем экспоненциально, причем как φ , так и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ остаются при любом t по абсолютной величине меньше, чем Ae^{at} , где A и a — конечные положительные постоянные,¹ то выбирая p так, чтобы было $Re(p) > a$ и полагая $T = \infty$, найдем из (22, 7) — (22, 8):

$$\Delta \bar{\varphi} - (ap^2 + bp + c)\bar{\varphi} = \bar{f} - aH - (ap + b)g, \quad (22, 9)$$

где

$$\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi dt \quad (22, 10)$$

и

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f dt. \quad (22, 11)$$

При этом, разумеется, предполагается, что функция f такова, что интеграл (22, 11) сходится при выбранном значении p , т. е. что он имеет смысл при $Re(p) > \beta \geq a$, где β — некоторая новая постоянная.

В уравнение (22, 9) входят уже только известные функции, и оно может служить для нахождения $\bar{\varphi}$, если к нему добавить еще соответствующие краевые условия на границах области. Эти условия легко получаются обычным образом из условий (22, 3) путем умножения этих последних на $e^{-pt} dt$ и последующего интегрирования в пределах от нуля до бесконечности. Если при этом возможно найти такое $\gamma \geq \beta$, чтобы интеграл

$$\bar{\chi} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \chi dt \quad (22, 12)$$

сходился при $Re(p) \geq \gamma$, то таким путем получим:

$$a \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + (\delta - \varepsilon p) \bar{\varphi} = -\varepsilon g(x, y, z) + \bar{\chi}. \quad (22, 13)$$

¹ Собственно говоря, установление условий, при которых этот интеграл действительно существует, входило бы в задачу исследования характера интегралов уравнения (22, 2). Мы, однако, здесь этим заниматься не будем и ограничимся замечанием, что в реальных физических задачах этот интеграл, как правило, имеет смысл при достаточно большом $Re(p)$. Это связано с тем, что в реальных процессах, идущих с хотя бы очень малым поглощением („трением“), искомая величина φ либо остается во все времена ограниченной во всей области своего существования, либо же, при наличии непрерывного подвода энергии в систему извне и идеализированной постановке задачи, когда поглощение считается вообще отсутствующим, может нарастать, как правило, не быстрее чем экспоненциально. Если при этом $|\varphi(x, y, z, t)| < Ae^{at}$, то сходимость интеграла (22, 10) имеет место, если только выбрать $Re(p) > \beta > a$, ибо

тогда $|\bar{\varphi}| < A \int_0^{\infty} e^{-(\beta - a)t} dt = \frac{A}{\beta - a} =$ конечной величине.

Мы видим, таким образом, что применение метода пятнадцатого параграфа к данному случаю¹ приводит к уравнению (22,9) и граничным условиям (22,13) для функции $\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi dt$, которая носит название лапласовой преобразованной от φ . Если удастся из уравнения (22,9) и из соответствующих граничных условий найти $\bar{\varphi}$ (причем $\bar{\varphi}$ будет функцией не только координат, но и комплексного параметра p), то, как будет показано в следующем параграфе, нахождение самой искомой функции φ может быть произведено с помощью так называемой теоремы обращения Римана—Меллина и требует просто выполнения некоторого интегрирования (комплексного). Поэтому, нахождение функции $\bar{\varphi}$, которую мы в дальнейшем будем называть преобразованной, немедленно приводит также к решению первичной задачи.

22.2. Заметим в заключение, что если бы в уравнении (22,2) лапласиан от φ заменился каким-нибудь другим линейным дифференциальным оператором, коэффициенты которого не зависели бы от t , то, действуя вполне аналогичным образом, получили бы опять уравнение для $\bar{\varphi}$. Подобный же прием может быть применен и к системе совокупных уравнений подобного типа, причем получится система совокупных уравнений для всех преобразованных функций.

§ 23. Теорема обращения Римана—Меллина (первая)²

23.1. Рассмотрим функцию $F(t)$, кусочно-гладкую во всяком конечном интервале.

Если существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt$, то такая функция может быть, как известно, представлена во всякой точке, в которой она непрерывна, интегралом Фурье такого вида:³

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{-iv(\tau-t)} d\tau. \quad (23,1)$$

Пусть теперь имеется функция $f(t)$, равная нулю при $t < 0$ и кусочно-гладкая во всяком конечном интервале при $t > 0$, но не удо-

¹ С теми видоизменениями обычной методики, которые естественно диктуются той особенностью рассматривавшейся здесь задачи, что для искомой функции „граничные“ (в данном случае начальные) условия задаются не при двух различных значениях переменной t , а лишь при одном, — $t = 0$.

² Обратная ей теорема обращения, — вторая теорема Римана—Меллина, — доказывается ниже в § 35.

³ Ср. Курант—Гильберт, т. I, стр. 73.

влетворяющая условию конечности интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| dt$,

причем, однако, она при $t \rightarrow \infty$ возрастает не быстрее, чем экспоненциально, так что при всех $t > 0$ удовлетворяется неравенство

$$|f(t)| < Ae^{\alpha t}, \tag{23,2}$$

где A и α — некоторые постоянные.¹

Тогда функция $F(t) = f(t)e^{-ct}$, где $c > \alpha$, удовлетворяет всем условиям, которые требовались для справедливости формулы (23, 1), ибо для нее уже

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt = \\ & = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt < A \int_0^{\infty} e^{-(c-\alpha)t} dt = \frac{A}{c-\alpha} = \text{конечной величине.} \end{aligned}$$

Вводя поэтому это значение $F(t)$ в (23, 1), получим, учитывая, что при $t < 0$ $F(t) = 0$:

$$e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-c\tau} e^{-i\nu(\tau-t)} d\tau,$$

т. е., по разделении на e^{-ct} :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(c+i\nu)\tau} f(\tau) d\tau \right\} e^{(c+i\nu)t} d\nu. \tag{23, 3}$$

Полагаем здесь

$$p = c + i\nu, \tag{23, 4}$$

и заменяем в (23, 3) интегрирование по ν интегрированием по p . В плоскости комплексной переменной $p = u + i\nu$ интегрирование будет происходить по бесконечной прямой AB (рис. 32), параллельной мнимой оси и отсекающей на вещественной оси отрезок c , причем пределами интегрирования будут значения $p = c - i\infty$ и $p = c + i\infty$. (23, 3) дает поэтому:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp, \tag{23,5}$$

причем использовано прежнее обозначение:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \tag{23,6}$$

для преобразованной функции.

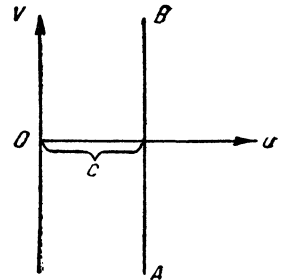


Рис. 32.

¹ Сколь угодно большие, но конечные.

Формула (23, 5) и решает интересующую нас задачу о нахождении функции $f(t)$ по данной преобразованной $\bar{f}(p)$. При этом из самого вывода формулы (23, 5) видно, что за c может быть выбрано любое число, большее чем α , и выбор этот не отражается на значении входящего в нее интеграла.

23.2. При практическом применении формулы (23, 5) требуется уметь выбирать нужное значение c , не зная самой функции $f(t)$, а располагая только преобразованной $\bar{f}(p)$.

Для того, чтобы это было возможно сделать, достаточно заметить, что так как при $c > \alpha$ интеграл $\int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) dt$, по предположению, сходится абсолютно, то интеграл

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

сходится при $Re(p) \geq c$ абсолютно и равномерно относительно p и представляет собой в соответствующей полуплоскости регулярную функцию от p .¹ Это показывает, что справа от пути интегрирования в формуле (23, 5) функция $\bar{f}(p)$ должна быть регулярной, т. е. что путь этот должен быть выбран таким образом, чтобы все особые точки подинтегральной функции находились слева от него. Это и есть искомое правило.²

§ 24. Примеры на приложение второго способа

24.1. Установление стационарного режима в безиндукционном кабеле, один конец которого заземлен, а другой приключается к источнику постоянного напряжения.

Обозначая через φ потенциал некоторой точки жилы кабеля по отношению к земле, а через x —координату этой точки, отсчитываемую от начала кабеля, будем иметь для устанавливающегося режима уравнение [см. (4, 9)]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = CR \frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (24, 1)$$

где C и R —емкость и сопротивление единицы длины кабеля.

Считая, что в начальный момент кабель не заряжен и что в момент $t=0$ к точке $x=0$ приключается постоянное напряжение $\varphi=V$, тогда как конец его $x=l$ заземлен, будем иметь следующие начальное и граничные условия:

$$(\varphi)_{t=0} = 0 \quad \text{при } 0 < x \leq l, \quad (24, 2)$$

$$(\varphi)_{x=0} = V, \quad (\varphi)_{x=l} = 0. \quad (24, 3)$$

¹ См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, стр. 204.

² Более подробное обоснование этого правила можно найти в цитированных на стр. 231 книгах А. И. Лурье и А. М. Эфроса и А. М. Данилевского.

Применим к уравнению (24, 1) изложенный выше метод, т. е. помножим его на $e^{-pt} dt$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Для преобразованной функции $\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi dt$ получается при этом уравнение:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = \frac{p}{a^2} \bar{\varphi}, \quad (24, 4)$$

общий интеграл которого может быть записан в таком виде:

$$\bar{\varphi} = A \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x) + B \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x), \quad (24, 5)$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Граничные условия для $\bar{\varphi}$ будут:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\varphi})_{x=0} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} (\varphi)_{x=0} dt = \frac{V}{p}, \\ (\bar{\varphi})_{x=l} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} (\varphi)_{x=l} dt = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24, 6)$$

а определяя с помощью их постоянные A и B , получаем, что

$$\bar{\varphi} = V \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x)}{p \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l}. \quad (24, 7)$$

Подставляя это в (23, 5) находим:

$$\varphi = \frac{V}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l} dp, \quad (24, 8)$$

причем c должно быть выбрано так, чтобы все особые точки подынтегральной функции остались слева от пути интегрирования.

Особыми точками здесь являются корни знаменателя, т. е. все те значения $p = p_k$, которые удовлетворяют уравнению

$$p_k \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p_k}}{a} l = 0. \quad (24, 9)$$

Так как эти значения определяются формулой $\frac{\sqrt{p_k} l}{a} = ik\pi$, где k — любое целое число или нуль, то

$$p_k = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24, 10)$$

причем все эти особые точки — это полюсы первого порядка подинтегральной функции.¹ Так как все $p_k \leq 0$, то за путь интегрирования может быть выбрана любая прямая, параллельная мнимой оси и расположенная правее ее, т. е. в (24, 8) надо положить $c > 0$.

Чтобы вычислить интеграл (24, 8), дополним путь интегрирования дугой бесконечно-большого круга, лежащей в левой полуплоскости и имеющей центром начало координат, причем будем предполагать, что эта дуга является предельным положением серий дуг C_n с радиусами $R = R_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $R_n = \frac{(2n+1)^2 a^2 \pi^2}{4l^2}$. Нетрудно видеть, что интеграл по такой дуге равен нулю. Действительно, для точки p , не лежащей на отрицательной вещественной полуоси, притом такой, что $\arg(p) < \pi - \epsilon$, где ϵ — некоторое фиксированное, сколь угодно малое положительное число, выражение

$$\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x) / \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l$$

при $|p|$, стремящемся к бесконечности, стремится к $e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$ (предполагаем, что знак у корня выбран положительный), т. е. стремится к нулю. Если же p лежит на самой отрицательной вещественной

полуоси, то отношение $\frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l}$ превращается на дуге C_n в

$$\frac{\sin \frac{\sqrt{R_n}}{a} (l-x)}{\sin \frac{\sqrt{R_n} l}{a}} = (-1)^n \sin \frac{(2n+1)(l-x)\pi}{2l},$$

т. е. остается ограниченным при любом n . Следовательно, множитель при e^{pt} в подинтегральной функции равномерно стремится к нулю во всех точках добавленной дуги, а потому интеграл по этой последней равен, согласно известной лемме Жордана,² нулю.

¹ Несмотря на видимое наличие корня квадратного из p , подинтегральная функция на самом деле однозначна, что видно из верного при любом p разложения

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}(l-x)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}l}{a}} = \frac{1 + \frac{p}{6} \frac{(l-x)^2}{a^2} + \dots}{1 + \frac{p}{6} \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \dots}$$

Наряду с этим, при $p=0$ эта функция обращается в единицу, так что точка $p=0$ тоже является полюсом первого порядка.

² В применении к интересующим нас вопросам, лемма Жордана может быть сформулирована следующим образом: пусть $p = Re^{i\theta}$, где $R = |p|$; если функция $F(p)$ регулярна при $R > A > 0$, где A — некоторая постоянная, и при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$, и если $|F(p)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ равномерно относительно аргумента θ при

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2},$$

Мы превратили, таким образом, исходный интеграл, взятый по мнимой оси, в интеграл от той же подинтегральной функции, но взятый в положительном направлении по замкнутому контуру, охватывающему всю левую полуплоскость, а этот последний интеграл равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подинтегральной функции в указанных выше особых точках ее.

Так как вычет $(a_{-1})_0$ в точке $p=0$ равен

$$(a_{-1})_0 = 1 - \frac{x}{l}, \quad (24, 11)$$

тогда как при $p=p_k$, $k > 1$, будет:

$$(a_{-1})_k = \frac{2a}{l} \frac{e^{p_k t} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p_k}(l-x)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{p_k} l}{a}} = - \frac{2e^{-\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}}{k\pi}, \quad (24, 12)$$

то из формулы (24, 8) получаем при $c > 0$ и, так как $a^2 = CR$:

$$\varphi = V \left\{ \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 CRt} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}, \quad (24, 13)$$

и это и есть искомое решение задачи.

то при $t < 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C e^{pt} F(p) dp = 0, \quad (A)$$

причем интеграл берется по дуге C полуокруга радиуса R , лежащей в правой полуплоскости.

Для доказательства замечаем, что по условию можно для любого заданного ε найти такое $R=R_0$, что $|F(p)| < \varepsilon/\pi$ при $R > R_0$. Далее, из-за $|e^{pt}| = e^{tR \cos \theta}$ и $|dp| = R d\theta$, будет:

$$\left| \int_C e^{pt} F(p) dp \right| = \int_{\theta = +\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} |F(p)| R d\theta < \frac{2\varepsilon R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \frac{2\varepsilon R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt \sin \psi} d\psi.$$

Замечая еще, что при $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ отношение $\frac{\sin \psi}{\psi}$ является убывающей с возрастанием ψ функцией, достигающей минимума, равного $\frac{2}{\pi}$ при $\psi = \frac{\pi}{2}$, видим, что в этом интервале $\sin \psi \geq \frac{2\psi}{\pi}$, что дает возможность написать:

$$\frac{2\varepsilon R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt \sin \psi} d\psi < \frac{2\varepsilon R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R|t| \frac{2\psi}{\pi}} d\psi < \frac{2\varepsilon R}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R|t|}{\pi} \psi} d\psi = \frac{\varepsilon}{|t|} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом убедимся, что при $t > 0$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ интеграл вида (A), взятый по лежащей в левой полуплоскости дуге полуокружности радиуса R , если только $|F(p)| \rightarrow 0$ равномерно при $|p| \rightarrow \infty$ и $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

Если $e^{-\frac{\pi^2 CR}{l^2} t} \ll 1$, то ряд этот сходится быстро и дает удобную форму решения. При малых $\frac{\pi^2 CR t}{l^2}$ сходимость ряда плохая. Ниже мы увидим, каким образом можно, исходя из той же основной формулы (24, 8), но вычисляя входящий в нее интеграл иным образом, получить другую форму решения, выгодную как раз при малых $\frac{\pi^2 CR}{l^2} t$.

24.2. До сих пор мы предполагали, что кабель имеет конечную длину. Пусть теперь $l \rightarrow \infty$.

Тогда, поступая так, как мы это неоднократно делали выше, именно полагая в формуле (24, 13)

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \frac{k\pi}{l}, \\ \Delta u &= u_{k+1} - u_k = \frac{\pi}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (24, 14)$$

можем написать при $l \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 CRt} \sin \frac{k\pi x}{l}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-CRt u_k^2} \sin x u_k}{u_k} \Delta u_k \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{-CRt u^2} \sin x u}{u} du, \quad (24, 15)$$

и решение (24, 13) перейдет теперь в такое:

$$\varphi = V \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-CRt u^2} \sin x u}{u} du \right\}. \quad (24, 16)$$

Эта формула и дает искомое решение для бесконечно-длинного кабеля. Она же послужит нам исходным пунктом для преобразования первичного решения (24, 8) к форме, пригодной для изучения устанавливающегося режима при малых значениях $\frac{\pi^2 CR}{l^2} t$. Однако, прежде чем это сделать, покажем, каким образом формула (24, 16) может быть получена непосредственно из рассмотрения задачи для бесконечного кабеля, а не обходным путем через рассмотрение предельного случая кабеля конечной длины. При этом заодно преобразуем формулу (24, 16) к более удобному для приложения виду, именно, выразим входящий в нее интеграл через табулированные функции.

24.3. Непосредственное решение задачи для бесконечного кабеля.

В случае бесконечного кабеля, граничные условия (24, 3) принимают вид:

$$(\varphi)_{x=0} = V; \quad (\varphi)_{x=\infty} = 0, \quad (24, 17)$$

тогда как уравнение (24, 1) и начальное условие $(\varphi)_{t=0} = 0$ остаются прежними. Преобразованные граничные условия будут теперь

$$(\bar{\varphi})_{x=0} = \frac{V}{p}, \quad (\bar{\varphi})_{x=\infty} = 0, \quad (24, 18)$$

что вместе с (24,5) дает,¹ если выбрать $Re(\sqrt{p}) > 0$:

$$\bar{\varphi} = V \cdot \frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}. \tag{24,19}$$

Подставляя это в формулу обращения, находим φ :

$$\varphi = \frac{V}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt - \frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p} dp, \quad c > 0, \tag{24,20}$$

причем выбрано $c > 0$, поскольку единственной особой точкой подынтегральной функции является начало координат (точка разветвления).

Для вычисления интеграла (24,20) рассмотрим сначала интеграл от той же подынтегральной функции, но взятый по контуру показанного на рис. 33 типа, причем радиус R дуг CD и HK будем стремиться к бесконечности.

Интеграл по этому контуру равен нулю, поскольку внутри контура подынтегральная функция регулярна, а потому интеграл по исходному пути оказывается равным взятому со знаком минус интегралу по контуру $BCDEFHGKA$, в котором дуги BD и HK следует считать удаленными на бесконечность.

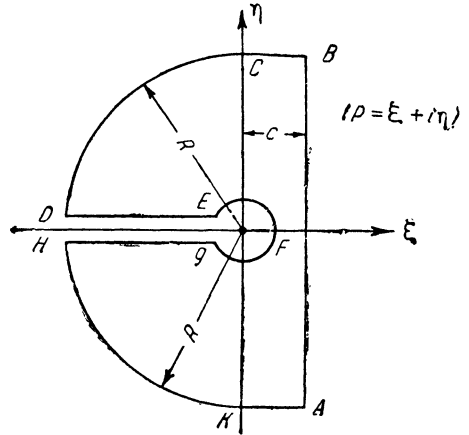


Рис. 33.

Замечая, что интегралы по этим дугам равны нулю (согласно лемме Жордана), так же, как интегралы по отрезкам BC и KA , а интеграл по бесконечно-малому кружку радиуса ρ , охватывающему начало координат, равен, как нетрудно видеть, $(-2\pi i)$, получим, учитывая, что на пути DE $p = re^{i\pi}$, $\sqrt{p} = \sqrt{r}i$, тогда как на GH (т. е. после обхода точки разветвления) $p = re^{-i\pi}$, т. е. $\sqrt{p} = -i\sqrt{r}$:

$$\begin{aligned} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt - \frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p} dp &= 2\pi i - \lim_{\rho=0} \left\{ \int_{\infty}^{\rho} \frac{e^{-rt - \frac{i\sqrt{r}}{a}x}}{r} dr + \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-rt + \frac{i\sqrt{r}}{a}x}}{r} dr \right\} = \\ &= 2\pi i \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-rt} \sin \frac{x\sqrt{r}}{a}}{r} dr \right\}. \end{aligned} \tag{24,21}$$

¹ В данном случае было бы удобнее записать (24,5) в такой форме:

$$\bar{\varphi} = Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + Be^{+\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad Re(\sqrt{p}) > 0,$$

где A и B — постоянные, причем второе условие (24,18) сразу показывает, что $B = 0$.

Это дает при подстановке в (24,20) и при введении новой переменной $u = \frac{\sqrt{r}}{a}$:

$$\begin{aligned} \varphi &= V \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 u^2 t} \sin xu}{u} du \right\} = \\ &= V \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} \sin \left(\frac{x}{a \sqrt{t}} \xi \right)}{\xi} d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (24,22)$$

т. е. вновь получаем найденную выше нестрогим предельным переходом формулу (24,16).

Преобразуем входящий в (24,22) интеграл, для чего заметим, что если положить

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} \sin \alpha \xi}{\xi} d\xi, \quad (24,23)$$

то

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \alpha \xi d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}. \quad (24,24)$$

откуда находим, интегрируя по α :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} d\alpha = \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-u^2} du. \quad (24,25)$$

Постоянная интегрирования положена здесь равной нулю, так как (24,23) показывает, что $(I)_{\alpha=0} = 0$.

Подставляя значение (24,25) в (24,22), находим:

$$\begin{aligned} \varphi &= V \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right\} = V \left\{ 1 - \text{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right\} = \\ &= V \left\{ 1 - \text{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{CRt}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (24,26)$$

причем использовано обычное обозначение для интеграла вероятности:

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (24,27)$$

Если еще учесть, что

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1, \quad (24,28)$$

то можно записать (24,26) также в такой форме:

$$\varphi = \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-u^2} du, \quad \beta = \frac{x}{2\sqrt{CRt}}. \quad (24,29)$$

Из очевидного неравенства

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du < \int_0^{\infty} e^{-\beta u} du = \frac{e^{-\beta^2}}{\beta}$$

видно, что интеграл в формуле (24,29) очень быстро стремится к нулю при возрастании β .

24. 4. Покажем теперь, как найти, пользуясь только что полученным результатом, удобную при малых t форму решения задачи для кабеля конечной длины.¹

Для этого замечаем, что так как в формуле (24,8) путь интегрирования расположен справа от мнимой оси, то подинтегральное выражение в ней может быть разложено в равномерно сходящийся на пути интегрирования ряд следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{V}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} (l-x)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l} = \frac{V e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} (2l-x)}}{p (1 - e^{-\frac{2\sqrt{p}}{a} l})} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} (x+2ls)} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} [2(s+1)l-x]} \end{aligned} \quad (24,30)$$

Здесь каждый отдельный член имеет как раз такой вид, как правая часть формулы (24,19) предыдущей задачи, только x заменен величинами $x+2ls$ или $2(s+1)l-x$. Поэтому подставляя (24,30) в (24,8) и выполняя почленное интегрирование с помощью формул (24,20) — (24,22), (24,26) или (24,29), найдем:

$$\begin{aligned} \varphi &= V \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{x+2ls}{2\sqrt{CRt}} \right) \right] - \left[1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{2(s+1)l-x}{2\sqrt{CRt}} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\frac{x+2sl}{2\sqrt{CRt}}}^{\infty} e^{-u^2} du - \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\frac{2(s+1)l-x}{2\sqrt{CRt}}}^{\infty} e^{-u^2} du \right\}. \end{aligned} \quad (24,31)$$

Это решение, как видно, как раз обладает тем свойством, что оно хорошо сходится при малых значениях $\frac{\sqrt{CRt}}{l}$. Если при этом воспользоваться верной, при достаточно малых t , оценкой

$$\int_{\beta}^{\infty} e^{-u^2} du \approx \frac{e^{-\beta^2}}{2\beta}, \text{ где } \beta = \frac{x+2sl}{2\sqrt{CRt}} \text{ или } \beta = \frac{2(s+1)l-x}{2\sqrt{CRt}},$$

то видно, что отдельные члены этого ряда убывают чрезвычайно быстро при $\frac{l}{\sqrt{CRt}} \gg 1$, и что при таких малых t ряд (24,31) дает, в отличие от формулы (24,13), весьма выгодную для расчетов форму решения.

¹ Как указывалось выше, формула (24,13) становится при $\frac{\pi^2 CRt}{l^2} \ll 1$ мало пригодной для практических расчетов.

24. 5. В качестве последнего примера рассмотрим вопрос об интегрировании волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (24,32)$$

в том случае, когда искомая функция φ удовлетворяет ему во всем безграничном пространстве, и начальные значения φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ повсеместно даны, так что

$$(\varphi)_{t=0} = f(x), \quad (-\infty \leq x \leq +\infty), \quad (24,33)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(x), \quad (-\infty \leq x \leq +\infty), \quad (24,34)$$

где $f(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции. Функции $f(x)$ и $\psi(x)$ будем для простоты считать ограниченными во всем интервале изменения x , т. е. при $(-\infty \leq x \leq +\infty)$, или, по крайней мере, такими, чтобы интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} |f(x)| dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} |f(-x)| dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} |\psi(x)| dx, \\ \int_0^{\infty} e^{-ax} |\psi(-x)| dx \quad (24,35)$$

сходились при любом $a > c \geq 0$, где c — некоторое фиксированное число.

Для преобразованной функции $\bar{\varphi}$ находим обычным путем уравнение

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx^2} = \frac{p^2}{v^2} \bar{\varphi} - \frac{\psi(x) + pf(x)}{v^2}. \quad (24,36)$$

¹ Согласно сказанному в § 3, уравнению типа (24,32) удовлетворяет, в частности, любая из компонент E_y , E_z , H_y , H_z электромагнитного поля в пустоте или в однородной изотропной, свободной от зарядов непоглощающей среде, если только все распределение поля зависит лишь от одной координаты x .

Легко видеть, что вопрос о нахождении электромагнитного поля в некоторый момент $t > 0$ при условии, что поле это известно при $t = 0$, сводится как раз к задаче указанного в тексте типа. В самом деле, пусть, например, для конкретности $\varphi = E_y$, и пусть известно, что при $t = 0$ $(E)_t=0 = E^\circ(x)$ и $(H)_t=0 = H^\circ(x)$. Величина $(\varphi)_{t=0} = (E_y)_{t=0} = E^\circ(x)$ задается при этом непосредственно. Далее, из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} =$
 $= + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ следует, что $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_{t=0} = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{dH_z^\circ}{dx}$, т. е.

приходим к сформулированной в тексте задаче.

Заметим еще, что более общая задача о нахождении электромагнитного поля по его начальному состоянию в случае зависимости его не только от одной, а от всех трех координат, сводится к интегрированию одного или нескольких волновых уравнений или уравнений Даламбера, т. е. уравнений вида

$$\Delta \varphi = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(x, y, z, t) \quad (\text{A})$$

[см. § 3; $F(x, y, z, t)$ — некоторая заданная функция] при условии, что даны начальные значения $(\varphi)_{t=0}$ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$. Действительно, пусть дано, что $(E)_{t=0} = E^\circ(x, y, z)$, $(H)_{t=0} = H^\circ(x, y, z)$, и пусть φ в уравнении (A) обозначает одну из компонент

Полагая для краткости

$$F(x) = \frac{\psi(x) + pf(x)}{v^2} \quad (24,37)$$

и замечая, что интеграл однородного уравнения, соответствующего (24,36), может быть записан в такой форме:

$$\bar{\varphi} = Ae^{\frac{px}{v}} + Be^{-\frac{px}{v}}, \quad (A \text{ и } B \text{ — постоянные}), \quad (24,38)$$

найдем путем варьирования произвольных постоянных A и B общий интеграл уравнения (24,36):

$$\bar{\varphi} = Me^{\frac{px}{v}} + Ne^{-\frac{px}{v}} - \frac{v}{p} \int_0^x F(\xi) \operatorname{sh} \frac{p(x-\xi)}{v} d\xi, \quad (24,39)$$

где M и N — новые произвольные постоянные.

Определим M и N из требования, чтобы при достаточно больших $Re(p)$ ¹ функция $\bar{\varphi}$ оставалась ограниченной при $x \rightarrow \pm\infty$.

Этого требования достаточно для однозначного определения искомым постоянных. Действительно, так как, согласно допущению (24,35), оба интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{p\xi}{v}} F(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad \int_0^{-\infty} e^{\frac{p\xi}{v}} F(\xi) d\xi = - \int_0^{\infty} e^{-\frac{p\xi}{v}} F(-\xi) d\xi$$

стремятся при $Re(p) > av$ к определенным конечным пределам, то (24,39) дает, например, при $x \rightarrow +\infty$:

$$(\bar{\varphi})_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow \left\{ \left[-\frac{v}{2p} \int_0^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{p\xi}{v}} d\xi + M \right] e^{\frac{px}{v}} \right\}_{x \rightarrow \infty},$$

что может сохранять конечное значение только в том случае, если

$$M = \frac{v}{2p} \int_0^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{p\xi}{v}} d\xi. \quad (24,40)$$

электрического или магнитного поля, например, E_x . Тогда $(\varphi)_{t=0} = E_x^0(x, y, z)$ это непосредственно известная функция координат. Далее, из уравнения $(\operatorname{rot} \mathbf{H})_x = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E_x + \frac{4\pi}{c} j_x^{(e)}$ [см. (1,12)], примененного к моменту $t=0$, получается:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right)_{t=0} = \frac{c}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z^0}{\partial y} - \frac{\partial H_y^0}{\partial z} - \frac{4\pi\sigma}{c} E_x^0 - \frac{4\pi}{c} (j_x^{(e)})_{t=0} \right], \quad (Б)$$

т. е. так как в правую часть входят только известные величины, то и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=0}$ тоже известна.

Аналогичные выводы справедливы и для других составляющих электрического и магнитного поля. Практически, однако, принято обычно, для нахождения электромагнитного поля по его начальному состоянию и последующему движению зарядов, исходить из уравнений для электромагнитных потенциалов, а не непосредственно из уравнений для компонент поля.

¹ Во всяком случае, при $Re(p) \geq av$.

Аналогично, будет:

$$(\bar{\varphi})_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow \left\{ \left[\frac{v}{2p} \int_0^{-\infty} F(\xi) e^{\frac{p\xi}{v}} d\xi + N \right] e^{-\frac{px}{v}} \right\}_{x \rightarrow -\infty},$$

и требование конечности дает:

$$N = -\frac{v}{2p} \int_0^{-\infty} F(\xi) e^{\frac{p\xi}{v}} d\xi = \frac{v}{2p} \int_0^{\infty} F(-\xi) e^{-\frac{p\xi}{v}} d\xi. \quad (24,41)$$

Подставляя найденные значения M и N в (24,39) и объединяя члены, содержащие множители $e^{\frac{px}{v}}$ и $e^{-\frac{px}{v}}$ соответственно, получим:

$$\bar{\varphi} = \frac{v}{2p} \left\{ \int_x^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{p(\xi-x)}{v}} d\xi + \int_{-\infty}^x F(\xi) e^{-\frac{p(x-\xi)}{v}} d\xi \right\}. \quad (24,42)$$

Полагая в первом из этих интегралов $\frac{\xi-x}{v} = u$, а во втором $\frac{x-\xi}{v} = \tau$, сможем переписать формулу (24,42) в следующем упрощенном виде:

$$\bar{\varphi} = \frac{v^2}{2p} \left\{ \int_0^{\infty} F(x+vu) e^{-pu} du + \int_0^{\infty} F(x-v\tau) e^{-p\tau} d\tau \right\}. \quad (24,43)$$

Подставляем сюда значение функции F из (24,37) и замечаем, что

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2p} \int_0^{\infty} F(x+vu) e^{-pu} du &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(x+vu) e^{-pu} du + \\ &+ \frac{1}{2p} \int_0^{\infty} \psi(x+vu) e^{-pu} du, \end{aligned}$$

или, так как второй интеграл справа может быть следующим образом преобразован интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \int_0^{\infty} \psi(x+vu) e^{-pu} du &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-pu}}{2p} \right) d \left(\int_0^u \psi(x+v\xi) d\xi \right) = \\ &= \frac{e^{-pu}}{2p} \int_0^u \psi(x+v\xi) d\xi \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\int_0^u \psi(x+v\xi) d\xi \right) e^{-pu} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\int_0^u \psi(x+v\xi) d\xi \right) e^{-pu} du, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2p} \int_0^{\infty} F(x+vu) e^{-pu} du &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ f(x+vu) + \right. \\ &\left. + \int_0^u \psi(x+v\xi) d\xi \right\} e^{-pu} du. \end{aligned} \quad (24,44)$$

Второй член справа в (24,43) получается отсюда просто заменой v на $-v$. Поэтому, можем окончательно переписать (24,43) в такой форме:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ f(x+vt) + f(x-vt) + \int_0^t \psi(x+v\xi) d\xi + \int_0^t \psi(x-v\xi) d\xi \right\} e^{-vt} dt. \quad (24,45)$$

Отсюда непосредственно видно, что первичная функция φ , соответствующая этой преобразованной, равна

$$\varphi = \frac{1}{2} \left\{ f(x+vt) + f(x-vt) + \int_0^t \psi(x+v\xi) d\xi + \int_0^t \psi(x-v\xi) d\xi \right\}, \quad (24,46)$$

причем в данном случае не приходится даже прибегать к теореме обращения. Замечая, что

$$\int_0^t \psi(x+v\xi) d\xi + \int_0^t \psi(x-v\xi) d\xi = \int_{-t}^{+t} \psi(x+v\xi) d\xi = \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\tau) d\tau,$$

можем переписать (24,46) еще так:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[f(x+vt) + f(x-vt) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\tau) d\tau \right]. \quad (24,47)$$

В этой форме решение было дано Даламбером. Нетрудно видеть, что оно удовлетворяет всем условиям задачи.

24. 6. Этими немногими примерами на приложение изложенного в этой главе метода к исследованию нестационарных процессов мы здесь ограничимся.

Более подробное изложение методов вычисления часто встречающихся на практике типов комплексных интегралов, а также непосредственно связанного с изложенной методикой символического метода решения нестационарных проблем, так называемого операционного исчисления Хевисайда, интересующиеся могут найти в посвященной этим вопросам весьма обширной специальной литературе.¹

¹ См., например, А. И. Лурье, *Операционное исчисление в приложениях к задачам механики*, ОНТИ НКТИ, Л.—М., 1938 и А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, *Операционное исчисление и контурные интегралы*, ОНТИ НКТП, научно-технич. издательство Украины, 1937, Харьков.

Глава XII

**УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ПОЛУЧАЕМЫХ ПРИ
ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПЯТНАДЦАТОГО ПАРАГРАФА
И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЕДЕЛАХ
ПРИМЕНИМОСТИ ЭТОГО МЕТОДА**

**§ 25. Функция Грина обыкновенного дифференциального
уравнения и ее основные свойства**

25.1. Как уже неоднократно указывалось, ряды, получаемые при применении метода пятнадцатого параграфа к решению задач с неоднородными граничными условиями, обладают обычно плохой сходимостью. Причина этого коренится в том, что хотя ряды эти и представляют искомое решение в любой точке внутри рассматриваемого интервала изменения переменной, но, по самой своей природе, они не могут удовлетворять неоднородным граничным условиям, поскольку отдельные члены их все удовлетворяют однородным граничным условиям. Поэтому они сходятся неравномерно в смежности с граничными точками интервала, и это и является причиной медленного убывания коэффициентов разложения при неограниченном возрастании их номера.

Как уже указывалось в п. 15.3, можно улучшить сходимость подобного ряда, вычитая из него почленно соответствующий ряд для любой функции, непрерывной вместе со своими первыми двумя производными¹ во всем интервале изменения переменной, включая ее границы, и удовлетворяющей тем же граничным условиям, как представляемое первичным рядом решение. Нахождение коэффициентов разложения вычитаемой функции в ряд по фундаментальным функциям рассматриваемой задачи не представляет, естественно, никаких принципиальных трудностей; однако, фактическое вычисление их может оказаться весьма сложным, если вычитаемая функция недостаточно удачно выбрана. В связи с этим мы сейчас покажем, что можно указать такой общий способ выбора вычитаемой функции, при котором полностью отпадает необходимость в вычислении каких бы то ни было интегралов, а самое нахождение ее становится крайне простым процессом. Для того, чтобы это сделать, нам придется сперва ввести в рассмотрение так называемую функцию Грина для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка и изучить некоторые ее основные свойства. К этому теперь и переходим.

25.2. Рассмотрим вопрос о нахождении решения линейного дифференциального уравнения вида (15,6), т. е.

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0, \quad (25,1)$$

¹ Непрерывность второй производной не обязательна. Достаточно, чтобы она была кусочно-непрерывной.

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) &= 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25,2)$$

где α_i и β_i — некоторые заданные постоянные, причем, разумеется, в каждом из этих соотношений по крайней мере одна из величин (α_1, β_1) или (α_2, β_2) не равна нулю.

Будем считать, что $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — непрерывные в интервале $a \leq x \leq b$ функции и что $p(x)$ и $r(x)$ не обращаются в этом интервале в нуль, а $p(x)$ имеет еще, кроме того, непрерывную производную.¹ Уравнение (25,1) имеет при этом отличные от тождественного нуля решения лишь при отдельных дискретных значениях $\lambda = \lambda_k$ ($k=1, 2, \dots, \infty$) параметра λ , которым соответствуют фундаментальные функции $y_k(x)$ данной задачи. Функции эти будем считать нормированными, т. е. удовлетворяющими условию:

$$\int_a^b r(x) y_k^2(x) dx = 1, \quad k=1, 2, \dots, \infty. \quad (25,3)$$

Предположим сперва, что ни одно из характеристических чисел λ_k не равно нулю.

Введем обозначение

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y \quad (25,4)$$

и рассмотрим наряду с уравнением (25,1) еще уравнение

$$L(g) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] + q(x)g = -f(x), \quad (25,5)$$

где под $f(x)$ будем подразумевать такую функцию, которая отлична от нуля лишь в смежности с некоторой точкой $x = \xi$ внутри интервала (a, b) , скажем, при $\xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon$, где ε весьма мало и стремится в пределе к нулю, и которая удовлетворяет условию:²

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} f(x) dx = 1. \quad (25,6)$$

Будем теперь искать непрерывное решение уравнения (25,5), соответствующее такому виду функции $f(x)$ и граничным условиям (25,2).

Нетрудно, прежде всего, установить, что в предельном случае, когда $\varepsilon = 0$, такое решение должно иметь меняющуюся скачком при переходе через значение $x = \xi$ первую производную.

В самом деле, интегрируя обе части уравнения (25,5) от $\xi - \varepsilon$ до $\xi + \varepsilon$ и переходя к пределу $\varepsilon = 0$, получим, учитывая (25,6):

$$p(x) g'(x) \Big|_{\xi - 0}^{\xi + 0} = p(\xi) [g'(\xi + 0) - g'(\xi - 0)] = -1,$$

¹ Можно при этом считать, что $p(x)$ и $r(x)$ имеют одинаковые знаки, поскольку λ — произвольный параметр.

² Такая функция носит название дельта-функции.

т е.

$$g'(\xi+0) - g'(\xi-0) = -\frac{1}{p(\xi)}. \quad (25,7)$$

Итак, искомое решение уравнения (25,5), которое мы в дальнейшем будем обозначать $g = g(x, \xi)$ и называть функцией Грина оператора $L(y)$, соответствующей граничным условиям (25,2), должно быть непрерывно само во всем интервале (a, b) и иметь непрерывную первую производную в интервалах $(a \leq x < \xi)$ и $(\xi < x \leq b)$, терпящую, однако, в точке $x = \xi$ разрыв непрерывности первого рода со скачком:¹

$$g'_x(\xi+0, \xi) - g'_x(\xi-0, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)}. \quad (25,8)$$

25.3. Функция Грина $g(x, \xi)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям $y_n(x)$ уравнения (25,1), соответствующим тем же граничным условиям (25,2),² причем должно быть, как всегда³

$$g = g(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(x), \quad a_k = \int_a^b g(x, \xi) r(x) y_k(x) dx. \quad (25,9)$$

Для нахождения коэффициента a_n разложения заметим, прежде всего, что как при $a \leq x < \xi$, так и при $\xi < x \leq b$ функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет однородному уравнению $L(g) = 0$, поскольку при таких значениях x правая часть уравнения (25,5) равна нулю. Умножая теперь уравнение $L(g) = 0$ на $y_n(x) dx$, интегрируя получившееся выражение в пределах $(a, \xi-0)$ и $(\xi+0, b)$ и складывая результаты, найдем:

$$\begin{aligned} \int_a^{\xi-0} y_n(x) \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] dx + \int_{\xi+0}^b y_n(x) \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] dx + \\ + \int_a^b q(x) g y_n(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (25,10)$$

Преобразуя первый и второй из входящих в левую часть уравнения (25,10) интегралов таким же образом, как это делалось в аналогичном случае в формуле (15,12), и учитывая (25,7) и то, что $y_n(x)$ и $g(x, \xi)$ — обе удовлетворяют граничным условиям (25,2), приведем (25,10) к такому виду:

$$\lambda_n \int_a^b g(x, \xi) r(x) y_n(x) dx = y_n(\xi).$$

т. е., учитывая вторую формулу (25,9):

$$a_n = \frac{y_n(\xi)}{\lambda_n}. \quad (25,11)$$

¹ $g'_x(x, \xi)$ и $g'_\xi(x, \xi)$ будут обозначать всегда производные от $g(x, \xi)$ по соответствующим аргументам.

² См., например: И. И. Привалов, Интегральные уравнения, ОНТИ НКПТ СССР, М.—Л., 1935.

³ Ср. (15,23).

Первая формула (25,9) дает теперь:

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\lambda_n}. \quad (25,12)$$

Это так называемая билинейная формула для функции Грина. Из нее, между прочим, видно, что функция эта симметрична относительно x и ξ , т. е. что имеет место соотношение

$$g(x, \xi) = g(\xi, x), \quad (25,13)$$

обстоятельство, которое можно обнаружить и непосредственно, исходя из основных уравнений, которыми определяется функция Грина.

25. 4. Найдем еще другое выражение для функции Грина, именно, выразим ее через два частных решения $g_1(x)$ и $g_2(x)$ уравнения

$$L(g) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] + q(x) g = 0, \quad (25,14)$$

из которых первое удовлетворяет при $x=a$ такому же граничному условию, как $g(x, \xi)$, т. е.

$$\alpha_1 g_1'(a) + \beta_1 g_1(a) = 0, \quad (25,15)$$

а второе — условию

$$\alpha_2 g_2'(b) + \beta_2 g_2(b) = 0, \quad (25,16)$$

подобному второму из соотношений (25,2) для $g(x, \xi)$, причем мы, конечно, считаем каждое из них отличным от тождественного нуля.

Заметим, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — линейно независимые друг от друга частные решения уравнения (25,14). Действительно, если бы было $g_1(x) = c g_2(x)$, где c — постоянная, то $g_1(x)$ удовлетворяло бы, согласно (25,15) и (25,16), одновременно обоим этим условиям и было бы в то же время отличным от тождественного нуля решением уравнения (25,14). Это означало бы, что $g_1(x)$ — отличное от тождественного нуля и удовлетворяющее граничным условиям (25,2) решение уравнения (25,1), в котором λ положено равным нулю, т. е. $\lambda=0$ было бы характеристическим числом уравнения (25,1), — случай, который мы пока исключили из рассмотрения. Поэтому $g_1(x)$ и $g_2(x)$ не могут быть линейно зависимыми решениями уравнения (25,14), что и утверждалось выше.

Так как в уравнении (25,5) для функции Грина функция $f(x)$ равна нулю при $x < \xi$ и при $x > \xi$, то $g(x, \xi)$ удовлетворяет во всем интервале (a, b) , кроме как в точке $x = \xi$, уравнению (25,14). Так как она, кроме того, должна при $x = a$ и $x = b$ удовлетворять условиям вида (25,15) и (25,16), соответственно, то должно, очевидно, быть:

$$\left. \begin{aligned} g(x, \xi) &= c_1 g_1(x) \text{ при } x < \xi, \\ g(x, \xi) &= c_2 g_2(x) \text{ при } x > \xi, \end{aligned} \right\} \quad (25,17)$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

Так как функция Грина непрерывна при $x = \xi$, то должно быть также $c_1 g_1(\xi) = c_2 g_2(\xi)$. Это показывает, что формулы (25,17) можно переписать в таком виде:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} c g_1(x) g_2(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ c g_2(x) g_1(\xi) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad (25,18)$$

где c — некоторая новая постоянная. Значение ее должно быть выбрано таким образом, чтобы выполнялось условие (25,8), которое при подстановке в него значений производных $g'_x(x, \xi)$, получаемых из (25,18), принимает следующий вид:

$$cp(\xi) [g'_2(\xi) g_1(\xi) - g'_1(\xi) g_2(\xi)] = -1. \quad (25,19)$$

Стоящее здесь в квадратных скобках выражение, — это определитель Вронского пары решений $g_1(x)$, $g_2(x)$, и так как решения эти линейно независимы, то он заведомо отличен от нуля. Далее, так как для любой пары решений $g_1(x)$ и $g_2(x)$ уравнения (25,14) произведение

$$p(x) [g'_2(x) g_1(x) - g'_1(x) g_2(x)]$$

имеет постоянное значение, независящее от x ,¹ то и c , найденное по формуле (25,19), не будет зависеть от ξ , т. е. будет для данной пары решений $g_1(x)$ и $g_2(x)$ абсолютной постоянной.²

Формулами (25,18) и условием (25,19) функция Грина полностью определяется. Заметим, что так как функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определены только вплоть до произвольного множителя каждая, то их всегда возможно выбрать так, чтобы удовлетворялось условие:

$$p(\xi) [g'_1(\xi) g_2(\xi) - g'_2(\xi) g_1(\xi)] = 1. \quad (25,20)$$

Постоянная c получится при этом равной единице, и формулы (25,18) примут еще более простой вид, именно:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} g_1(x) g_2(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ g_2(x) g_1(\xi) & \text{при } x > \xi. \end{cases} \quad (25,21)$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (25,22)$$

и граничные условия

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (25,23)$$

В этом случае $p(x) = r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $L(y) = y''$, и так как значение $\lambda = 0$ очевидно не является характеристическим числом, поскольку уравнение $y'' = 0$ не имеет отличных от тождественного нуля решений, удовлетворяющих условиям (25,23), то для нахождения

¹ В этом легко убедиться, умножая уравнения $\frac{d}{dx} \left[p \frac{dg_1}{dx} \right] + qg_1 = 0$ и $\frac{d}{dx} \left[p \frac{dg_2}{dx} \right] + qg_2 = 0$ соответственно на g_2 и на g_1 и вычитая второе из первого.

² Этого и следовало ожидать, так как если бы c было функцией от ξ , то определяемая формулами (25,18) функция $g(x, \xi)$ не могла бы удовлетворять условию (25,13) симметрии.

функции Грина можем непосредственно применить формулы (25, 18) — (25, 19). Это дает, поскольку в данном случае $g_1(x) = x$ и $g_2(x) = l - x$, а (25, 19) показывает, что $c = 1/l$:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{l} & \text{при } x < \xi, \\ \frac{\xi(l-x)}{l} & \text{при } x > \xi. \end{cases} \quad (25, 24)$$

Далее, характеристические числа и фундаментальные функции будут ¹

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (25, 25)$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (25, 26)$$

что при подстановке в (25, 12) дает билинейную формулу:

$$g(x, \xi) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l}}{n^2}. \quad (25, 27)$$

Ряд этот сходится абсолютно и равномерно, в полном согласии с упоминавшейся в п. 25.3 общей теоремой.

25.5. Для дальнейшего существенно, что ряд (25, 12) можно дифференцировать почленно по ξ , причем получающийся ряд сходится при фиксированном ξ ² равномерно при любых значениях x в интервале (a, b) , удовлетворяющих условию $|x - \xi| > \epsilon$, где $\epsilon > 0$.

Для специальной функции $g(x, \xi)$, определяемой формулой (25, 27), это утверждение легко проверить непосредственно, поскольку получается:

$$\begin{aligned} g_{\xi}'(x, \xi) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi \xi}{l}}{n} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{n\pi}{l} (x + \xi) + \sin \frac{n\pi}{l} (x - \xi) \right], \end{aligned} \quad (25, 28)$$

и каждый из входящих сюда рядов сходится при указанных условиях равномерно.

В общем случае аналогичный результат может быть получен, если воспользоваться выводимыми в общей теории фундаментальных функций асимптотическими выражениями для чисел λ_n и для

¹ Множитель $\sqrt{\frac{2}{l}}$ появляется в (25, 26) из условия нормировки.

² $a \leq \xi \leq b$.

функций $y_n(x)$.¹ Таким путем можно показать, что имеет место соотношение

$$g'_\xi(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y'_n(\xi)}{\lambda_n}, \quad |x - \xi| > \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (25, 29)$$

левая часть которого может быть, согласно (25, 18), записана также в таком виде:

$$g'_\xi(x, \xi) = \begin{cases} c g_1(x) g'_2(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ c g_2(x) g'_1(\xi) & \text{при } x > \xi. \end{cases} \quad (25, 30)$$

¹ Так, например, там показывается, что асимптотические выражения при $n \rightarrow \infty$ для функции $y_n(x)$, удовлетворяющей уравнению (25, 1) и граничным условиям $y_n(a) = y_n(b) = 0$, и для ее производной $y'_n(x)$ имеют вид:

$$y_n(x) = C_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l} \int_a^x \sqrt{\frac{r}{p}} dx\right)}{\sqrt[4]{pr}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\alpha)$$

$$y'_n(x) = C_n \frac{n\pi}{l} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l} \int_a^x \sqrt{\frac{r}{p}} dx\right)}{\sqrt[4]{pr}} \sqrt{\frac{r}{p}} + o(1), \quad (\beta)$$

где $l = \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dx$, а нормирующий множитель C_n определяется формулой:

$$\frac{1}{C_n^2} = \int_a^b \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{l} \int_a^x \sqrt{\frac{r}{p}} dx\right)}{\sqrt[4]{pr}} dx. \quad (7)$$

Для характеристических чисел имеет при этом место оценка:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + o(1). \quad (\delta)$$

В случае общих граничных условий (25, 2) соответствующие фундаментальные функции и их производные могут, в зависимости от значений постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, либо приводиться к виду (α) и (β), либо же выражаться совершенно аналогичными формулами с той лишь разницей, что в формуле (α) нужно будет заменить синус косинусом, а в (β) соответственно заменить косинус на минус синус, сохраняя аргументы их неизменными.

Пользуясь этими асимптотическими выражениями для функций $y_n(x)$ и $y'_n(x)$ и для чисел λ_n , подставляя их в формулы (25, 12) и (25, 29) и сравнивая получающиеся формулы с (25, 27) и (25, 28), придем к доказательству высказанных в тексте утверждений о характере сходимости рядов (25, 12) и (25, 29).

Примечание. Для вывода указанных асимптотических формул вводят в уравнение (25, 1) новую функцию z и новую независимую переменную t соотноше-

ниями $z = \sqrt[4]{p(x)r(x)} y$ и $t = \int_a^x \sqrt{\frac{r(\xi)}{p(\xi)}} d\xi$, причем так как предполагается, что

Здесь c определяется формулой (25, 19). Формула (25, 29) дает, стало быть, разложение функции $g_{\xi}'(x, \xi)$ в ряд по фундаментальным функциям соответствующей задачи.¹

§ 26. Улучшение сходимости рядов, когда ни одно из характеристических чисел не равно нулю

26.1. Начнем с рассмотрения вопроса об улучшении сходимости рядов, к которым приводит решение задач с предельными условиями первого рода.

В § 15 мы видели, что искомое решение u представляется при этом рядом (15, 28), т. е.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n Q_n(s_1), \quad (a_1 < s_1 < b_1), \quad (15, 28)$$

$p(x)$ и $r(x)$ имеют одинаковые знаки во всем интервале (a, b) , то монотонному возрастанию x от a до b соответствует монотонное же возрастание t от нуля до

$$t_{\max.} = l = \int_a^b \sqrt{\frac{r(\xi)}{p(\xi)}} d\xi.$$

Уравнение (25, 1) принимает в новых переменных вид:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + [\lambda - \rho] z = 0, \quad (A)$$

где ρ — некоторая функция от t , остающаяся ограниченной во всем интервале $0 \leq t \leq l$.

Граничные условия (25, 2) для u переходят в аналогичные условия для z :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' z'(0) + \beta_1' z(0) &= 0 \\ \alpha_2' z'(l) + \beta_2' z(l) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (B)$$

Где α_1' , α_2' , β_1' , β_2' — опять некоторые постоянные.

Решение уравнения (A) при граничных условиях (B) представляет собой задачу, вполне эквивалентную задаче о решении исходного уравнения (25, 1) при условиях (25, 2). Оно возможно лишь тогда, когда $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — одно из характеристических чисел данной задачи. Так как при $n \rightarrow \infty$ $|\lambda_n|$ тоже стремится к бесконечности и так как при этом ρ становится сколь угодно малым по сравнению с λ , то естественно ожидать, что при $n \rightarrow \infty$ фундаментальные функции уравнения (A) при условиях (B) будут сколь угодно мало отличаться от соответствующих решений уравнения

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda z = 0.$$

Как показывает детальное исследование, это ожидание отвечает истинному положению вещей, и подробное проведение соответствующих оценок с последующим возвращением к первичным переменным дает указанные асимптотические оценки. См., например: Курант — Гильберт, т. I, стр. 316.

¹ Заметим, что коэффициенты этого разложения — это обычные коэффициенты Фурье для функции $g_{\xi}'(x, \xi)$, поскольку дифференцирование правой и левой части формулы (25, 11) по параметру ξ показывает, при учете второй формулы (25, 9), что

$$\frac{y_n'(\xi)}{\lambda_n} = \int_a^b g_{\xi}'(x, \xi) r(x) y_n(x) dx.$$

причем функции $Q_n(s_1)$ — это нормированные фундаментальные решения уравнения (15,6), соответствующие граничным условиям $Q_n(a_1) = Q_n(b_1) = 0$ [см. (15,16)] и получающиеся при характеристических значениях $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, о которых мы здесь предположим, что ни одно из них не равно нулю.¹

Ряд (15,28) представляет искомую функцию во всем интервале $a_1 < s_1 < b_1$, но не на его границах $s_1 = a_1$ и $s_1 = b_1$, где ряд дает для u значения, равные нулю, тогда как истинные значения $u(a_1)$ и $u(b_1)$ должны, согласно (15,13), равняться соответственно f_1 и f_2 .

Заменим в дальнейшем s_1 на x и отбросим для упрощения письма значок (1) у s_1, a_1 и b_1 , а также у функций $p_1(s_1)$, $q_1(s_1)$ и $r_1(s_1)$, входящих в уравнение (15,6).

Уравнение (15,6) становится при этом тождественным с уравнением (25,1), а функции $Q_n(s_1) = Q_n(x)$ совпадают с фундаментальными решениями $u_n(x)$ этого уравнения, соответствующими тому частному виду граничных условий (25,2), когда

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (26,1)$$

Построим теперь функцию Грина $g(x, \xi)$ для уравнения (25,1) и граничных условий (26,1). Считая при этом, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют всем перечисленным в п. 25.1 условиям, можем непосредственно применить к данному случаю изложенную в § 25 общую теорию.

В частности, будем иметь для $g(x, \xi)$ как ее выражения (25,18), (25,19), в которых под $g_1(x)$ и $g_2(x)$ подразумеваются те частные решения уравнения (25,14), которые удовлетворяют условиям

$$g_1(a) = g_2(b) = 0, \quad (26,2)$$

так и билинейную формулу (25,12), принимающую в данном случае вид:

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x) Q_n(\xi)}{\lambda_n}. \quad (26,3)$$

Составим теперь функцию

$$F(x) = f_1 \frac{g'_\xi(x, a)}{g'_\xi(a+0, a)} + f_2 \frac{g'_\xi(x, b)}{g'_\xi(b-0, b)}, \quad (26,4)$$

где $g(x, \xi)$ считается определенной соотношениями (25,18), (25,19).

Пользуясь формулой (25,18) и замечая, что

$$g'_\xi(x, a) = c g_2(x) g'_1(a); \quad g'_\xi(x, b) = c g_1(x) g'_2(b),$$

причем $g'_1(a) \neq 0$ и $g'_2(b) \neq 0$,² можем переписать (26,4) в такой форме:

¹ Функция u зависит, вообще говоря, не только от s_1 , но и от остальных переменных s_2, s_3, \dots, s_m , которыми определяется решение. Соответственно этому, зависят от тех же параметров и коэффициенты разложения u_n . Однако, это обстоятельство в данном вопросе роли не играет.

² Последнее непосредственно вытекает из (25,19), если там положить $\xi = a$ или $\xi = b$ и принять во внимание, что $g_1(a) = 0$ и $g_2(b) = 0$.

$$F(x) = f_1 \frac{g_2(x)}{g_2(a)} + f_2 \frac{g_1(x)}{g_1(b)}. \quad (26,5)$$

Из этой формулы видно, что $F(a) = f_1$ и $F(b) = f_2$, т. е. что функция $F(x)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, как u , и что она является непрерывной функцией от x с непрерывными первой и второй производными во всем замкнутом промежутке $a \leq x \leq b$.

Подставляя в (26,4) вместо $g_\xi'(x, a)$ и $g_\xi'(x, b)$ ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x) Q_n'(a)}{\lambda_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x) Q_n'(b)}{\lambda_n},$$

которыми эти функции, согласно сказанному в п. 25.5, представляются, первая при $x > a$, а вторая при $x < b$, найдем:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_1 Q_n'(a)}{g_\xi'(a+0, a)} + \frac{f_2 Q_n'(b)}{g_\xi'(b-0, b)} \right] \frac{Q_n(x)}{\lambda_n}, \quad (26,6)$$

и это и есть тот ряд, который нужно вычесть из ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n Q_n(x) \quad (26,7)$$

для того, чтобы улучшить его сходимость.

Пример 1

Для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ и условий $y(0) = y(l) = 0$ функция Грина дается формулами (25,24), а $g_\xi'(x, \xi)$ — формулой (25,28), причем $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ и $Q_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Подставляя в (26,4) значения $g_\xi'(x, a) = g_\xi'(x, 0)$ и т. д. из (25,24) получим:

$$F(x) = f_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + f_2 \cdot \frac{x}{l}, \quad (26,8)$$

тогда как (26,6) дает

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [f_1 + (-1)^{n-1} f_2] \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (26,9)$$

что, если не считать разницы в обозначениях, полностью совпадает с подлежащей вычитанию из решения функцией, найденной для этого частного случая совсем иным путем в п. 9.4.² Данное в п. 9.4 правило является, таким образом, частным случаем сформулированного выше гораздо более общего.

Пример 2

Для уравнения Бесселя

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \lambda xy = 0 \quad (26,10)$$

¹ $g_2(a)$ и $g_1(b)$ не могут равняться нулю, поскольку было предположено, что $\lambda = 0$ не есть характеристическое число.

² Ср. (9,15).

в граничных условиях $y(a) = y(b) = 0$, где $b > a > 0$, имеем:

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right), \quad p(x) = x, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = x,$$

и находим последовательно:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} -\lg\left(\frac{x}{a}\right) \lg\left(\frac{\xi}{b}\right) / \lg\left(\frac{b}{a}\right) & \text{при } x < \xi, \\ -\lg\left(\frac{x}{b}\right) \lg\left(\frac{\xi}{a}\right) / \lg\left(\frac{b}{a}\right) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad (26,11)$$

$$F(x) = f_1 \frac{\lg\left(\frac{x}{b}\right)}{\lg\left(\frac{a}{b}\right)} + f_2 \frac{\lg\left(\frac{x}{a}\right)}{\lg\left(\frac{b}{a}\right)}. \quad (26,12)$$

Функции $Q_n(x)$ имеют в данном случае вид:

$$Q_n(x) = A_n [J_0(\sqrt{\lambda_n} x) Y_0(\sqrt{\lambda_n} a) - Y_0(\sqrt{\lambda_n} x) J_0(\sqrt{\lambda_n} a)], \quad (26,13)$$

где λ_n — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} J_0(\sqrt{\lambda} a), & Y_0(\sqrt{\lambda} a) \\ J_0(\sqrt{\lambda} b), & Y_0(\sqrt{\lambda} b) \end{vmatrix} = 0, \quad (26,14)$$

а постоянная A_n определяется из условия нормировки:

$$\int_a^b x Q_n^2(x) dx = 1. \quad (26,15)$$

Подставляя это значение $Q_n(x)$ в (26, 6), получим разложение $F(x)$ по фундаментальным функциям данной задачи.

26.2. Пусть теперь требуется улучшить сходимость ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n \overline{Q}_n, \quad (26,16)$$

получаемого при решении некоторой граничной задачи с предельными условиями 3-го рода,¹ причем $\overline{Q}_n(x)$ — нормированные фундаментальные функции уравнения (25, 1), соответствующие граничным условиям (25, 2).²

Характеристические числа, которым отвечают эти функции, будем обозначать так же, как в § 15, через $\overline{\lambda}_n$.

Предположим сначала, что, в отличие от только что разбиравшегося выше случая, обе величины α_1 и α_2 на этот раз отличны от нуля.

¹ См. § 15, (15, 15).

² Ср. (25, 1) — (25, 2) с (15, 6) и (15, 18).

Построим теперь функцию Грина $g(x, \xi)$ для уравнения (25,1) и граничных условий (25,2) и образуем с помощью ее функцию

$$F(x) = \frac{f_1}{[\alpha_1 g'_x(a+0, a) + \beta_1 g(a+0, a)]} g(x, a) + \frac{f_2}{[\alpha_2 g'_x(b-0, b) + \beta_2 g(b-0, b)]} g(x, b).^1 \quad (26,17)$$

Легко видеть, что $F(x)$ удовлетворяет при $x=a$ и $x=b$ тем же граничным условиям, как u , т. е. что

$$\alpha_1 F'(a) + \beta_1 F(a) = f_1, \quad (26,18)$$

$$\alpha_2 F'(b) + \beta_2 F(b) = f_2. \quad (26,19)$$

Действительно, составляя, например, с помощью выражения (26,17) для $F(x)$, величину $[\alpha_1 F'(a) + \beta_1 F(a)]$, получим:

$$\alpha_1 F'(a) + \beta_1 F(a) = f_1 + \frac{f_2}{[\alpha_2 g'_x(b-0, b) + \beta_2 g(b-0, b)]} [\alpha_1 g'_x(a, b) + \beta_1 g(a, b)] = f_1,$$

последнее потому, что функция Грина удовлетворяет, по самому способу своего построения, граничному условию (25, 2) в точке a . Аналогично доказывается и (26,19).

Итак, функция $F(x)$ действительно удовлетворяет при $x=a$ и $x=b$ тем же граничным условиям, как u . Так как, наряду с этим, можно, пользуясь билинейной формулой для $g(x, \xi)$, приводящейся в данном случае к виду:

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{Q}_n(x) \bar{Q}_n(\xi)}{\lambda_n}, \quad (26,20)$$

написать сразу разложение $F(x)$ в ряд по фундаментальным функциям, именно

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_1 \bar{Q}_n(a)}{[\alpha_1 g'_x(a+0, a) + \beta_1 g(a+0, a)]} + \frac{f_2 \bar{Q}_n(b)}{[\alpha_2 g'_x(b-0, b) + \beta_2 g(b-0, b)]} \right\} \frac{\bar{Q}_n(x)}{\lambda_n}, \quad (26,21)$$

¹ Заметим, что входящие в формулу (26,17) выражения $[\alpha_1 g'_x(a+0, a) + \beta_1 g(a+0, a)] \equiv A$ и $[\alpha_2 g'_x(b-0, b) + \beta_2 g(b-0, b)] \equiv B$ оба отличны от нуля.

В самом деле, составим, например, пользуясь формулой (25, 18), величину A , которая равна $\lim_{x \rightarrow a} [\alpha_1 g'_x(x, a) + \beta_1 g(x, a)]$, причем будем исходить из соотношения $g(x, a) = c g_2(x) g_1(a)$, поскольку в данном случае $x > a$. Получаем, что $A = c [\alpha_1 g'_2(a) + \beta_1 g_2(a)] g_1(a)$. Выражение в квадратной скобке отлично от нуля, ибо $g_2(x)$ не может удовлетворять одновременно условиям (25, 15) и (25, 16) (ср. п. 25.4), а $g_1(a) \neq 0$, так как, согласно предположению, $\alpha_1 \neq 0$ (иначе и $g'_1(a) = 0$, так что и $g_1(x) = 0$). Итак, действительно $A \neq 0$. Аналогично доказывается и то, что $B \neq 0$.

то, вычитая почленно (26, 21) из (26, 16), получим искомый ряд с улучшенной сходимостью.

26.3. Осталось рассмотреть случай, когда на одном конце интервала, скажем, при $x=a$, граничное условие имеет вид

$$y(a)=0, \quad (26,22)$$

тогда как при $x=b$ будет попрежнему:

$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \quad (26,23)$$

и $\alpha_2 \neq 0$.

Вычитаемая функция должна, очевидно, в этом случае иметь такой вид: ¹

$$F(x) = f_1 \frac{g'_\xi(x, a)}{g'_\xi(a+0, a)} + f_2 \frac{g(x, b)}{\alpha_2 g_{x'}(b-0, b) + \beta_2 g(b-0, b)}, \quad (26,24)$$

где $g(x, \xi)$ — функция Грина для граничных условий (26,22), (26,23).

Обозначая через $y_n(x)$ и λ_n соответствующие фундаментальные функции (нормированные) и характеристические числа, получим для $F(x)$ разложение:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left\{ f_1 \frac{y'_n(a)}{g'_\xi(a+0, a)} + f_2 \frac{y_n(b)}{\alpha_2 g_{x'}(b-0, b) + \beta_2 g(b-0, b)} \right\} y_n(x), \quad (26,25)$$

которое и надо вычитать из ряда для u .

Тем самым получено полное решение поставленной в этом параграфе задачи.

§ 27. Функция Грина (обобщенная) в том случае, когда $\lambda=0$ — характеристическое число. Ее применение к улучшению сходимости рядов

27.1. В § 25 мы определили функцию Грина для уравнения (25,1) и граничных условий (25,2) как то решение уравнения (25,5), которое удовлетворяло тем же граничным условиям (25,2), причем $f(x)$ считалась удовлетворяющей соотношению (25,6). При этом, как показано было в п. 25.4, если значение $\lambda=0$ не являлось характеристическим числом, то оказывалось возможным вполне однозначно построить удовлетворяющую этим условиям функцию Грина, для которой, попутно получалось билинейное разложение (25,12) по собственным функциям задачи.

Если $\lambda=0$ — характеристическое число, так что уравнение $L(y)=0$ имеет некоторое отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям (25,2), то построение такой функции невозможно. Можно, однако, так обобщить определение функции Грина, чтобы

¹ Это непосредственно вытекает из сравнения с формулами (26,4) и (26,17).

охватить и этот случай. Именно, обозначая через $y_0(x)$ фундаментальное решение уравнения $L(y)=0$,¹ удовлетворяющее условию нормировки, т. е.

$$\int_a^b r(x)y_0^2(x)dx=1, \quad (27,1)$$

определим обобщенную функцию Грина $g(x, \xi)$ как то непрерывное решение уравнения

$$L(g) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] + q(x)g = r(x)y_0(x)y_0(\xi) - f(x), \quad (27,2)$$

где $f(x)$ обозначает ту же функцию, как в уравнении (25, 5), которое удовлетворяет граничным условиям (25,2), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 g_x'(a, \xi) + \beta_1 g(a, \xi) &= 0, \\ \alpha_2 g_x'(b, \xi) + \beta_2 g(b, \xi) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

причем рассматривается предельный случай этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При этом, однако, нужно для определенности решения добавить еще какое-нибудь дополнительное условие, ибо ясно, что если мы нашли одну какую-нибудь функцию $g_1(x, \xi)$, удовлетворяющую всем перечисленным условиям, то и любая функция вида

$$g_2(x, \xi) = g_1(x, \xi) + \alpha y_0(x),$$

где $\alpha = \text{const}$, будет им тоже удовлетворять. Мы потребуем поэтому, чтобы выполнялось добавочное требование:

$$\int_a^b g(x, \xi) r(x) y_0(x) dx = 0, \quad (27,3)$$

т. е. чтобы искомая функция Грина была ортогональна к $y_0(x)$.

27. 2. Интегрируя (27,2) по x от $\xi - \varepsilon$ до $\xi + \varepsilon$ и переходя к пределу $\varepsilon = 0$, видим, прежде всего, что для новой функции $g(x, \xi)$ остается в силе прежнее условие (25,7).

Из этого, в частности, следует, что решение уравнения (27,2), в котором под $f(x)$ подразумевается предельный вид этой функции при $\varepsilon = 0$, можно заменить нахождением непрерывного в точке $x = \xi$ решения уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] + q(x)g = r(x)y_0(x)y_0(\xi), \quad (27,4)$$

которому функция $g = g(x, \xi)$ удовлетворяет как при $x < \xi$, так и при $x > \xi$, причем в самой точке $x = \xi$ производная $g_x'(x, \xi)$ испытывает скачкообразное изменение, величина которого дается соотношением (25,7).

Далее, рассмотрим вопрос о разложении $g(x, \xi)$ в ряд по фундаментальным функциям $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots \infty$.

¹ Т. е. решение его, удовлетворяющее условиям (25, 2).

Это разложение должно иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} g(x, \xi) &= a_0 y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x), \\ a_n &= \int_a^b g(x, \xi) r(x) y_n(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (27,5)$$

или, из-за (27,3):

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x). \quad (27,6)$$

Для нахождения коэффициентов a_n поступаем точно так же, как в п. 25.3, т. е. умножаем (27,4) на $y_n(x) dx$, где $n \geq 1$, и интегрируем по x от a до $(\xi - 0)$ и от $(\xi + 0)$ до b и складываем результаты. Получается:

$$\begin{aligned} & \int_a^{\xi-0} y_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] dx + \int_{\xi+0}^b y_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dg}{dx} \right] dx + \\ & + \int_a^b q(x) y_n dx = y_0(\xi) \int_a^b r(x) y_0(x) y_n(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (27,7)$$

последнее в силу ортогональности функций $y_0(x)$ и $y_n(x)$ при $n > 1$. Так как (27,7) в точности совпадает с (25,10), то отсюда следует, что, подобно (25,11), будет теперь:

$$a_n = \frac{y_n(\xi)}{\lambda_n}, \quad n \geq 1. \quad (27,8)$$

Вместе с (27,6) это дает:

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\lambda_n}. \quad (27,9)$$

Итак, для обобщенной функции Грина сохраняется без всяких изменений билинейное разложение, причем только в нем суммирование распространяется лишь на те собственные функции, которые соответствуют характеристическим числам, отличным от нуля.

Заметим, что, как показывает (27,9), попрежнему будет

$$g(x, \xi) = g(\xi, x), \quad (27,10)$$

т. е. свойство симметрии сохраняется и у обобщенной функции Грина.

Пример

Пусть дано уравнение

$$L(y) + \lambda y = y'' + \lambda y = 0 \quad (27,11)$$

и граничные условия:

$$y'(0) = y'(l) = 0. \quad (27,12)$$

$\lambda = 0$ — это характеристическое число данной задачи, ибо уравнение (27,11) имеет при $\lambda = 0$ решение $y = c = \text{const}$, удовлетворяю-

щее граничным условиям (27,12) при любом значении постоянной c . Полагая, в частности, $c = \frac{1}{\sqrt{l}}$, получим нормированную собственную функцию $y_0(x)$, так что

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}. \quad (27,13)$$

Уравнение (27,4), которому функция Грина должна удовлетворять как при $x < \xi$, так и при $x > \xi$, будет, поэтому:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{l}, \quad (27,14)$$

тогда как условие (25,7) дает:

$$g'_x(\xi + 0) - g'_x(\xi - 0) = -1. \quad (27,15)$$

Так как функция $g(x, \xi)$ должна быть, кроме того, непрерывной при $x = \xi$ и удовлетворять граничным условиям:

$$g'_x(0, \xi) = g'_x(l, \xi) = 0, \quad (27,16)$$

то легко находим, что

$$g(x, \xi) = \frac{x^2 + \xi^2}{2l} + \frac{l}{3} - \xi \quad \text{при } x < \xi \quad (27,17)$$

и

$$g(x, \xi) = \frac{\xi^2 + x^2}{2l} + \frac{l}{3} - x \quad \text{при } x > \xi. \quad (27,18)$$

Нормированные собственные функции, соответствующие характеристическим числам, отличным от нуля, суть

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (27,19)$$

причем

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (27,20)$$

и билинейное разложение будет

$$g(x, \xi) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi \xi}{l}}{n^2}. \quad (27,21)$$

27.3. Пользуясь введенной здесь обобщенной функцией Грина, можем непосредственно распространить на случай, когда $\lambda = 0$ — характеристическое число, изложенный в § 26 метод улучшения сходимости рядов по фундаментальным функциям.

Ряды эти будут отличаться от рядов (15, 28) и (26, 16) только наличием дополнительных нулевых членов, отвечающих характеристическому числу $\lambda_0 = 0$ и соответствующей собственной функции, т. е. они будут:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Q_k(x) = u_0 Q_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k Q_k(x), \quad (27,22)$$

$$u = \overline{\overline{u_0}} \overline{\overline{Q_0}}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\overline{u_k}} \overline{\overline{Q_k}}(x). \quad (27,23)$$

Функции же $F(x)$, которые нужно вычитать из (27,22) и (27,23) для улучшения сходимости этих рядов, даются соответственно формулами (26,4), (26,6) или (26,17), (26,21) и (26,24), (26,25), причем под $g(x, \xi)$ подразумевается обобщенная функция Грина для соответствующих задач, и суммирование в формулах (26, 6), (26, 21) и (26, 25) распространяется на все собственные функции, кроме нулевой.

Пример

Для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ и условий $y'(0) = y'(l) = 0$ обобщенная функция Грина дается формулами (27, 17) и (27, 18), причем функции $\bar{Q}_n(x)$ ¹ совпадают при $n \geq 1$ с введенными в (27, 19) функциями $u_n(x)$, так что

$$\bar{Q}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (27,24)$$

и

$$\bar{Q}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}. \quad (27,25)$$

Для улучшения сходимости ряда

$$u = \bar{u}_0 \bar{Q}_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \bar{Q}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \left[\bar{u}_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \cos \frac{n\pi x}{l} \right] \quad (27, 26)$$

для функции u , удовлетворяющей граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = f_1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = f_2, \quad (27,27)$$

нужно, согласно (26, 17) и (26, 18) — (26, 19), положить

$$F(x) = \frac{f_1}{g'_x(+0, 0)} g(x, 0) + \frac{f_2}{g'_x(l-0, l)} g(x, l) = f_2 g(x, l) - f_1 g(x, 0), \quad (27,28)$$

т. е.

$$F(x) = \frac{l}{2} f_2 \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] - \frac{l}{2} f_1 \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{3} \right], \quad (27,29)$$

последнее с помощью (27, 17) и (27, 18).

Ряд для этой функции получается из (27, 28) и (27, 21) и имеет вид:

$$F(x) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n f_2 - f_1}{n^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (27,30)$$

Функция $F(x)$, определяемая формулой (27,29) и подлежащая вычитанию из решения (27,26) для улучшения сходимости представляющего это решение ряда, полностью совпадает с аналогичной функцией, найденной ранее для данной частной задачи совсем иным путем [ср. (10,39)].

¹ В соответствии с введенной в п. 15.2 терминологией, следовало бы эти функции обозначать $\bar{Q}_n(x)$, а не $\bar{Q}_n(x)$.

§ 28. Случай, когда $p(x)$ обращается в нуль на одном из концов промежутка (a, b)

28.1. Для полноты рассмотрим еще вкратце вопрос о нахождении функции Грина в том случае, когда $p(x)$ обращается в нуль на одном из концов интервала (a, b) , скажем, при $x=a$.

В подобных случаях задается всегда лишь граничное условие при $x=b$,¹ которое будем считать имеющим вид:

$$\alpha y'(b) + \beta y(b) = 0. \quad (28,1)$$

При $x=a$ граничное условие заменяется требованием конечности искомого решения, его производной и т. д., и это относится как к собственным функциям $y_n(x)$, так и к функции Грина $g(x, \xi)$.

Эту последнюю определяем в точности таким же образом, как это делалось выше в §§ 25 и 27, заменяя только, как сказано, граничное условие при $x=a$ требованием конечности $g(x, \xi)$ и $g'_x(x, \xi)$ в этой точке. В частности, и в данном случае $g(x, \xi)$ должна оставаться непрерывной при $x=\xi$, а $g'_x(x, \xi)$ — претерпевать разрыв, определяемый формулой (25, 8).

При нахождении коэффициентов a_n разложения функции Грина в ряд (25,9) по собственным функциям задачи будем снова исходить из формулы (25,10) и преобразовывать ее подобно формуле (15,12).² Замечая при этом, что обе функции $g(x, \xi)$ и $y_n(x)$ удовлетворяют при $x=b$ условию (28,1), и что при $x=a$ как они, так и их производные остаются конечными, тогда как $p(a)=0$, видим, что все выделяющиеся при интегрировании по частям граничные члены обращаются и в этом случае в нуль, так что для a_n опять получается формула (25,11). Таким образом вновь приходим к билинейной формуле (25,12) для введенной здесь функции Грина, что дает нам возможность полностью перенести и на этот случай все рассуждения и выводы, относящиеся к улучшению сходимости рядов, получаемых при решении краевых задач по указанному в § 15 методу. Единственная разница будет заключаться в том, что теперь придется считаться лишь с отличием от нуля величины

$$\left(\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \beta p \right)_{x=b},$$

тогда как при $x=a$ никакой поправки не потребуется.

Пример 1

28.2. Найдем характеристические значения $\lambda = \lambda_k$ и соответствующие им нормированные собственные функции y_k уравнения:

$$L(y) + \lambda y = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) + \lambda r y = 0, \quad (28,2)$$

¹ См., например, п. 15. 6.

² Если $\lambda = 0$ — характеристическое число, то нужно исходить из данного в § 27 определения функции Грина и заменить, в соответствии с этим, уравнение (25,10) уравнением (27,7).

обращающиеся в нуль при $r=1$ и остающиеся конечными при $r=0$.

Получаем:¹

$$y_k(r) = M_k J_0(x_k r), \quad M_k^2 = \frac{2}{J_0^2(x_k)} = \frac{2}{J_1^2(x_k)} \quad (28,3)$$

и

$$\lambda_k = x_k^2, \quad (28,4)$$

где x_k — один из корней уравнения $J_0(x) = 0$.

Так как $\lambda = 0$ не есть характеристическое число и так как уравнение $L(g) = 0$ имеет линейно-независимые решения $g_1 = 1$ и $g_2 = \lg r$, то для функции Грина легко получим:

$$g(r, \xi) = \begin{cases} -\lg \xi & \text{при } r \leq \xi, \\ -\lg r & \text{при } r \geq \xi. \end{cases} \quad (28,5)$$

Билинейное разложение будет:

$$g(r, \xi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(x_k r) J_0(x_k \xi)}{x_k^2 J_1^2(x_k)}, \quad (28,6)$$

и этот ряд сходится абсолютно и равномерно при $\varepsilon \leq r \leq 1$, где ε — любое фиксированное положительное число.

28.3. Если при решении некоторой краевой задачи для искомой функции $u(r)$, конечной по условиям задачи в точке $r=0$ и принимающей при $r=1$ некоторое отличное от нуля значение $u(1) = A$, получилось выражение в виде ряда²

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot y_k(r),$$

то для улучшения его сходимости вычтем из него соответствующий ряд для функции

$$F(r) = u(1) \cdot \frac{g'_\xi(r, 1)}{[g'_\xi(r, 1)]_{r=1}} = A, \quad (28,7)$$

т. е. просто для постоянной A .

Ряд этот равен, согласно (28,5) — (28,6):

$$F(r) = A = 2A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2 J_1^2(x_k)} J_0(x_k r), \quad (28,8)$$

и он и решает задачу об улучшении сходимости ряда (28,7).

Пример 2

28.4. Если бы вместо уравнения (28,2) было дано более общее, —

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{n^2}{r} \right) y = 0, \quad (28,9)$$

¹ Ср. п. 17.6, форм. (17,62) и (17,63).

² Ср. п. 17.6.

где n — любое положительное число, а условия при $r=0$ и при $r=1$ остались прежние, то весь ход решения задачи остался бы неизменным, только функция Грина (28, 5) заменилась бы следующей:

$$g(r, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{r}{\xi} \right)^n - (r\xi)^n \right] & \text{при } r \leq \xi, \\ \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^n - (r\xi)^n \right] & \text{при } r \geq \xi, \end{cases} \quad (28,10)$$

а нормированные собственные функции были бы равны $a_k J_n(x_k^{(n)} r)$, где $x_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(x) = 0$, и $a_k^2 = \frac{2}{[J'_n(x_k^{(n)})]^2}$.¹

Для $F(r)$ получилось бы при этом:

$$F(r) = u(1) \cdot \frac{g'_\xi(r, 1)}{[g'_\xi(r, 1)]_{r=1}} = u(1) \cdot r^n = -2u(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_n(x_k^{(n)} r)}{x_k^{(n)} J'_n(x_k^{(n)})}. \quad (28,11)$$

Пример 3

28.5. В качестве последнего примера рассмотрим нахождение функции Грина для уравнения (28, 2) при условии, что $y'(1) = 0$ и что как сама функция Грина, так и ее первая производная остаются конечными при $r=0$.²

В этом случае значение $\lambda=0$ будет характеристическим числом, так как уравнение

$$L(y) = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) = 0 \quad (28,12)$$

имеет отличное от нуля решение (нормированное)

$$y_0(r) = \sqrt{2r}, \quad (28,13)$$

удовлетворяющее граничному условию и требованию конечности при $r=0$. Функцию Грина (обобщенную) следует поэтому строить так, как указано в § 27, заменяя только граничное условие при $r=0$ требованием конечности самой функции $g(r, \xi)$ и ее производной в этой точке.

Уравнение (27, 4) будет в данном случае:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) = 2r, \quad (28,14)$$

откуда получаем сперва

$$\left. \begin{aligned} g(r, \xi) &= \frac{r^2}{2} + A && \text{при } r < \xi, \\ g(r, \xi) &= \frac{r^2}{2} - \lg \frac{r}{\xi} + A && \text{при } r > \xi, \end{aligned} \right\} \quad (28,15)$$

где A — произвольная постоянная, и выполнены как граничное условие и условие конечности при $r=0$, так и требование непрерывности функции $g(r, \xi)$ в точке $r=\xi$. Условие (25, 8) выполняется при этом автоматически.

¹ См. (Д₂ 184).

² Ср. п. 17.5.

Для нахождения A остается удовлетворить еще только условию (27, 3), которое при учете (28, 13) принимает такой вид:

$$\int_0^1 r g(r, \xi) dr = 0. \quad (28,16)$$

Получается:

$$A = \frac{\xi^2}{2} - \lg \xi - \frac{3}{4}, \quad (28,17)$$

что при подстановке в (28, 15) дает:

$$g(r, \xi) = \begin{cases} \frac{r^2 + \xi^2}{2} - \lg \xi - \frac{3}{4} & \text{при } r < \xi, \\ \frac{r^2 + \xi^2}{2} - \lg r - \frac{3}{4} & \text{при } r > \xi. \end{cases} \quad (28,18)$$

Найденная функция Грина удовлетворяет, как и должно быть, условию симметрии относительно r и ξ .

Собственные функции имеют вид:¹

$$y_k(r) = \alpha_k J_0(\mu_k r), \quad \alpha_k^2 = \frac{2}{J_0^2(\mu_k)}, \quad (28,19)$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0'(\mu) = 0$, и билинейное разложение будет:

$$g(r, \xi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r) J_0(\mu_k \xi)}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}. \quad (28,20)$$

Для улучшения сходимости ряда

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot y_k(r) = u_0 y_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \alpha_k J_0(\mu_k r) \quad (28,21)$$

для функции $u(r)$, производная которой $u'(r)$ не обращается в нуль при $r=1$, нужно, стало быть, в соответствии с общими принципами, изложенными в §§ 26—27, вычесть из (28, 21) соответствующий ряд для функции²

$$F(r) = u'(1) \frac{g(r, 1)}{[g_r'(r, 1)]_{r=1}},$$

т. е. ряд

$$F(r) = u'(1) \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{4} \right) = 2u'(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}. \quad (28,22)$$

§ 29. Заключительные замечания о решении уравнений с разделяющимися переменными

29.1. Заканчивая на сказанном изложение принципов решения уравнений с разделяющимися переменными, добавим к этому еще только следующее. Мы приложили развитую в § 15 общую методику

¹ Ср. п. 17.5, в частности, формулу (17, 53).

² Ср. (26, 17).

к интегрированию уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца и т. д. и к решению нестационарных проблем в тех случаях, когда решение их представлялось удобным проводить в декартовых, цилиндрических или сферических координатах. Совершенно аналогичным образом можно было бы применить ту же методику и в других случаях, когда имеет место разделение переменных, например, когда требуется найти решение соответствующих граничных задач для уравнений Лапласа, Пуассона или Гельмгольца в эллиптических координатах на плоскости или в пространстве и т. д.¹

Заметим еще, что область применения метода, естественно, не ограничивается уравнениями Пуассона, Гельмгольца или Фурье, а распространяется на все те случаи, когда однородное уравнение, получающееся из данного, $-D(s_1, s_2, \dots, s_m) u = F(s_1, s_2, \dots, s_m)$, отбрасыванием правой части, допускает хотя бы частичное разделение переменных. Ниже мы покажем, например, применение его к изучению вопроса о распространении волн в средах с изменяющимися от точки к точке свойствами.

29. 2. Заметим также, что мы, как правило, применяли наш метод к областям конечных размеров, переходя уже затем, если это было необходимо, к предельному случаю, когда границы их неограниченно раздвигались.

Во многих случаях можно рассматривать сразу также бесконечные области. Это, однако, часто приводит к некоторым осложнениям, не связанным по существу с природой задачи. Так, например, в п. 7. 7 мы видели, что хотя плоскую задачу Дирихле для бесконечной полуполосы можно решить с помощью интеграла Фурье в случае, когда искомое поле стремится к нулю на бесконечности, но если это последнее условие не выполнено, то такой метод непосредственно неприменим. Чтобы распространить его и на такие случаи, приходится, поэтому, прибегать к вспомогательному искусственному приему — вычитанию некоторой функции, без чего нельзя применить эту методику, например, даже к столь элементарному случаю, как рассмотренный в п. 7. 6. Сходные трудности возникают и во многих других случаях, когда речь идет об областях с бесконечно-удаленными границами. С примерами подобного рода мы еще встретимся ниже. Во всех подобных случаях требуется разлагать искомые функции уже не в ряды, а представлять их в виде некоторых интегралов, вещественных или комплексных, причем сплошь и рядом требуется придать искомой функции, с помощью какого-либо искусственного

¹ См. также о разделении переменных в уравнении Лапласа в так называемых кольцевых или тороидальных координатах [например, Уиттекер — Ватсон, ч. II, стр. 225, (12)], причем только переменные разделяются не для самой первичной функции, а при введении в уравнение некоторой новой функции, пропорциональной первичной.

приема, некоторые специальные свойства, чтобы она вообще допускала соответствующее интегральное представление. Мы впоследствии дадим примеры решения задач такого рода.

29.3. В заключение отметим еще, что данная в § 15 общая методика решения уравнений с разделяющимися переменными может, собственно говоря, считаться надлежащим образом обоснованной лишь в применении к тем случаям, когда искомая функция непрерывна, вместе со своей первой производной, внутри всего интервала изменения той переменной, от которой зависят собственные функции, по которым производится разложение решения в ряд.¹

При всем том получаемые с помощью этого метода результаты справедливы, как правило, и для разрывных решений.² Положение здесь вполне аналогично тому, которое имеет место в операционном исчислении, изложенном вкратце в главе XI, и основанном, как там было показано, на идеях, родственных общему методу пятнадцатого параграфа. Операционный метод дает, в частности, возможность исследования вопросов, относящихся к распространению волнового возмущения с резко ограниченным фронтом и т. п.,³ хотя при выводе основной формулы (22, 9) подобные случаи, должны были бы быть, казалось бы, исключены из рассмотрения. Не имея возможности войти здесь в детали, укажем лишь, что и в таких случаях можно пользоваться для получения решения обычной методикой пятнадцатого параграфа, причем, однако, следует в вызывающих сомнение случаях проверять уже полученное таким способом решение, чтобы непосредственно установить, удовлетворяет ли оно всем требованиям задачи или нет.

¹ Ибо эти условия требуются при выводе фундаментальной формулы (15, 8), лежащей в основе всего метода.

² По крайней мере тогда, когда речь идет о реальных физических задачах, причем на поверхности разрыва удовлетворяются так называемые условия совместности (см., например: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, §§ 206—214).

³ См., например: А. И. Лурье, Операционное исчисление в применении к задачам механики, ОНТИ НКТП, Л.—М., 1938.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Глава XIII

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕСКОЛЬКИХ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

§ 30. Постановка задачи. „Свободные“ заряды на поверхностях раздела различных сред и уравнения для нахождения их распределения

30.1. В предыдущей части книги было показано, каким образом многие задачи математической физики, решение которых сводится к интегрированию одного или нескольких уравнений в частных производных с разделяющимися переменными, могут быть непосредственно решены путем интегрирования этих уравнений при соответствующих граничных условиях. Таким образом, в частности, удавалось получить решение некоторых классов задач электро- и магнитостатики.

Покажем теперь, что для тех задач этой последней группы,¹ которые относятся к случаю наличия в пространстве ряда различных однородных изотропных сред, возможен еще совсем иной метод подхода к их решению, заключающийся в сведении задачи к нахождению плотностей „свободных“ зарядов,² выделяющихся на поверхностях раздела разнородных сред.

В случае простейших форм граничных поверхностей (плоскость, цилиндр, сфера, некоторые их комбинации и проч.), этот метод приводит, как будет показано ниже, к чрезвычайно простым и непосредственно разрешимым уравнениям для определения этих плотностей, а, стало быть, и к полному решению поставленной задачи. В более сложных случаях получаются, вообще говоря, системы сово-

¹ А также для математически эквивалентных им задач теории распространения токов в проводящих средах, теории теплопроводности и т. д. Ср. § 4.

² См. ниже, (30,10).

купных интегральных уравнений, которые для некоторых важных классов задач могут быть решены в общем виде и дают, тем самым, искомое решение связанных с ними вопросов.

30. 2. Переходим к постановке задачи и к формулировке основных уравнений.

Рассмотрим основную электростатическую задачу, которая может быть сформулирована следующим образом: в пространстве дано некоторое распределение проводников, диэлектриков и „истинных“ зарядов;¹ требуется найти электрическое поле в любой точке пространства, если известны заряды или потенциалы отдельных проводников.

Для решения этой задачи исходим из основных уравнений электростатики, именно:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (30,1)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi. \quad (30,2)$$

Если ограничиться случаем изотропных диэлектриков, то к (30,1) и (30,2) прибавляется еще соотношение:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (30,3)$$

где ε — диэлектрическая постоянная. Кроме того, на поверхности соприкосновения двух разнородных диэлектриков с диэлектрическими постоянными ε_i и ε_k имеют место соотношения (рис. 34):

$$D_{n_i}^{(i)} + D_{n_k}^{(k)} = \varepsilon_i E_{n_i}^{(i)} + \varepsilon_k E_{n_k}^{(k)} = 4\pi\eta, \quad (30,4)$$

$$E_s^{(i)} = E_s^{(k)}, \quad (30,5)$$

где η — поверхностная плотность истинных зарядов, сидящих на поверхности раздела.

Если, как это обычно бывает, $\eta = 0$, то уравнение (30,4) упрощается и принимает такой вид:

$$\varepsilon_i E_n^{(i)} = \varepsilon_k E_n^{(k)}, \quad (30,6)$$

где \mathbf{n} обозначает любую из нормалей \mathbf{n}_i^0 или \mathbf{n}_k^0 .

Если мы в уравнении (30,4) положим $\varepsilon_i = \varepsilon_k = 1$, то получится соотношение

$$E_{n_i}^{(i)} + E_{n_k}^{(k)} = 4\pi\eta, \quad (30,7)$$

определяющее скачок нормальной составляющей электрического вектора при прохождении через наэлектризованную поверхность, расположенную в пустоте.

На границе проводника и диэлектрика имеют место условия:

$$D_n = \varepsilon E_n = 4\pi\eta, \quad E_s = 0, \quad (30,8)$$

где η — поверхностная плотность истинного заряда на проводнике.

¹ Т. е. внесенных извне, а не поляризованных и не индуцированных.

Пусть в пространстве имеется ряд различных диэлектриков с различными, но неизменными по объему каждого диэлектрика, диэлектрическими постоянными. Тогда, как известно, поле \mathbf{E} в любой точке пространства таково, как если бы оно вызывалось совместным действием истинных зарядов ρ и выделившихся в местах их нахождения и на поверхностях раздела разнородных диэлектриков поляризационных зарядов. При этом выделившиеся в местах нахождения истинных объемных зарядов ρ поляризационные заряды ρ' , равные $-\operatorname{div} \mathbf{P}$, где \mathbf{P} — вектор поляризации, частично нейтрализуют истинные, так что остающиеся, эффективные в смысле создания внешнего поля заряды, — „свободные заряды“, — равны $\rho'' = \rho + \rho' = \rho/\epsilon$, причем значение ϵ , естественно, относится к той точке, в которой находится заряд ρ . Таким образом, поле \mathbf{E} , создаваемое истинными зарядами ρ в присутствии диэлектриков, можно вычислять как поле в пустоте, создаваемое эффективными зарядами $\rho'' = \rho/\epsilon$, на которое налагается поле поверхностных зарядов, расположенных на поверхностях раздела диэлектриков и на поверхностях проводников.

Вследствие важности этого положения для всего дальнейшего, приводим его краткий вывод. Именно, заметим, прежде всего, что внутри каждого из диэлектриков должно выполняться, согласно (30,1) — (30,3), соотношение:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho/\epsilon = 4\pi\rho'', \quad (30,9)$$

где ϵ — местная диэлектрическая постоянная.

Далее, условие (30,4) на границе k -того и i -того диэлектриков можно, вводя вектор поляризации $\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi$, переписать так:

$$E_{n_i}^{(i)} + E_{n_k}^{(k)} = 4\pi\eta - 4\pi(P_{n_i}^{(i)} + P_{n_k}^{(k)}) = 4\pi(\eta + \eta_{\text{пол.}}) = 4\pi\sigma, \quad (30,10)$$

где $\eta_{\text{пол.}} = -(P_{n_i}^{(i)} + P_{n_k}^{(k)})$ — поверхностная плотность поляризационных зарядов, а σ — плотность свободных зарядов. Наконец, (30,8) показывает что на поверхности проводников имеют место условия:

$$E_n = 4\pi\eta/\epsilon, \quad \varphi = \text{const.} \quad (30,11)$$

Так как из (30,9) и (30,2) следует, что

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho/\epsilon = -4\pi\rho'', \quad (30,12)$$

то задача наша привелась к такой: в пустоте дано распределение объемных зарядов с плотностью $\rho'' = \rho/\epsilon$ и распределение поверхностных зарядов σ по поверхностям раздела разнородных сред. Найти поле, создаваемое всеми этими зарядами.

Если бы величины поверхностных зарядов были известны, то задача решалась бы непосредственно с помощью обычных формул:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \int \frac{\rho'' dv}{r} + \int \frac{\sigma df}{r}, \quad (30,13)$$

где первый интеграл распространен на весь объем, занимаемый истинными зарядами, а второй — по всем поверхностям раздела. Эти формулы верны, конечно, лишь при условии, что вся система создаю-

щих поле зарядов лежит в конечной области, или, по крайней мере, что количество зарядов достаточно быстро убывает по мере удаления на бесконечность. В ином случае нужно их заменить другими, например, для плоской задачи электростатики пользоваться логарифмическим потенциалом или непосредственно выражениями для компонент поля.

Итак, если бы было известно распределение поверхностной плотности σ , то задача наша была бы решена, поскольку после этого оставалось бы только выполнить квадратуры в формулах для потенциалов. Нетрудно сформулировать некоторое условие, которому σ должна удовлетворять и которое дает путь для ее непосредственного определения. Для того, чтобы это сделать, заметим, что поле E в непосредственной близости от некоторой точки M , лежащей на поверхности раздела, покрытой эффективным зарядом с плотностью σ , можно рассматривать, как наложение поля E' от кружочка AB (рис. 35), описанного из M весьма малым радиусом MA^1 с центром

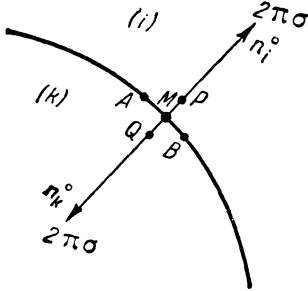


Рис. 35.

в точке M , и поля E'' от всех остальных зарядов, лежащих как на данной поверхности, так и во всем остальном пространстве. Первое из этих полей равно $2\pi\sigma$ и направлено в двух бесконечно-близких к поверхности точках P и Q соответственно по нормальям \mathbf{n}_i^0 и \mathbf{n}_k^0 к поверхности, т. е. в разные стороны, тогда как второе меняется непрерывно при проходе через поверхность. Поэтому получаем (рис. 35):

$$\left. \begin{aligned} E_{n_i}^{(i)} &= 2\pi\sigma + E''_{n_i} \\ E_{n_k}^{(k)} &= 2\pi\sigma + E''_{n_k} = 2\pi\sigma - E''_{n_i} \end{aligned} \right\} \quad (30,14)$$

ибо $E''_{n_k} = -E''_{n_i} = -[E''_{n_i}]$, где $[E''_{n_i}]$ обозначает значение E''_{n_i} в точке M , т. е. на самой поверхности.² Подставляя это в (30,4), находим:

$$\varepsilon_i \left(2\pi\sigma + [E''_{n_i}] \right) + \varepsilon_k \left(2\pi\sigma - [E''_{n_i}] \right) = 4\pi\eta,$$

так что³

$$\sigma = \frac{2\eta}{\varepsilon_i + \varepsilon_k} + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_i}{2\pi(\varepsilon_i + \varepsilon_k)} [E''_{n_i}]. \quad (30,15)$$

¹ Если только M не есть угловая точка поверхности.

² А не в смежности с поверхностью.

³ Данный здесь вывод основной формулы (30,15), физически весьма простой и наглядный, далек, однако, от математической строгости. Вполне строгий вывод, приводящий, естественно, к тем же результатам, получается, если использовать даваемое в теории потенциала доказательство скачкообразного изменения нормальной составляющей поля при прохождении через слой с поверхностной плотностью σ . См., например: Г. Мюнц, Интегральные уравнения, т. I, стр. 303, ГТИ, 1934.

Если истинного заряда на поверхности нет, то уравнение (30,15) несколько упрощается, именно получается:

$$\sigma = \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_i)}{2\pi(\varepsilon_i + \varepsilon_k)} \left[E''_{n_i} \right]. \quad (30,16)$$

Соотношения (30,15) и (30,16), которые имеют место для каждого элемента любой поверхности раздела, могут служить для определения σ . При этом, так как в $\left[E''_{n_i} \right]$ входит также поле, созданное самими зарядами σ , то это дает, вообще говоря, систему совокупных интегральных уравнений для нахождения плотностей на отдельных поверхностях. Ниже будет показано, как в различных частных случаях эта задача может упрощаться, а также будут указаны общие методы решения получающихся систем интегральных уравнений для некоторых классов проблем.

30. 3. В случае магнитостатической задачи мы имеем совершенно сходное положение вещей с той единственной разницей, что место истинных зарядов занимают теперь токи, создающие в окружающем пространстве первичное, притом не потенциальное, а вихревое поле. Это первичное поле не меняется, если внести всю создающую его систему токов в любую намагничивающуюся среду. Если при этом последняя не однородна, а состоит из ряда отдельных однородных изотропных частей (областей), каждая с постоянной по ее объему магнитной проницаемостью μ , то созданное ею дополнительное поле будет просто полем от выделившихся на поверхностях раздела „магнитных поляризационных плотностей“, совершенно аналогично тому, как это имело место в случае диэлектриков.¹ Полное же поле \mathbf{H} в каждой точке пространства будет суммой первичного поля от неизменных токов и указанного „поляризационного“ поля.

Из этого следует, что все рассуждения, приведшие к основной формуле (30, 16) в случае диэлектриков, могут быть без всяких изменений перенесены и на случай намагничивающихся сред, если только заменить ε через μ . Это дает для σ_m уравнение:

$$\sigma_m = \frac{\mu_k - \mu_i}{2\pi(\mu_i + \mu_k)} \left[H''_{n_i} \right], \quad (30,17)$$

где μ_i и μ_k — магнитные проницаемости соприкасающихся сред, а $\left[H''_{n_i} \right]$ имеет тот же смысл, как $\left[E''_{n_i} \right]$ в формуле (30,16).

Уравнения (30,16) и (30,17) не отличаются по форме, так что все методы, пригодные для решения одного из них в каких-либо случаях, дают одновременно решение как электростатической, так и соответствующей магнитостатической задачи.

30. 4. Поскольку уравнения, определяющие распределение стационарных токов в изотропных средах, и соответствующие уравнения

¹ Ср. п. 2. 6.

теплопроводности формально не отличаются от уравнений электростатической задачи,¹ то ясно, что их решение может быть сведено к решению уравнений типа (30,15) или (30,16). Ввиду полной очевидности способа переноса данных выше рассуждений на эти случаи, мы на этом далее задерживаться не будем.

§ 31. Разбор на основе общего метода ряда элементарных случаев

Переходя к применениям указанного метода, займемся сначала приложением уравнений (30,15) — (30,17) к решению некоторых элементарных задач.

Два диэлектрика с плоской поверхностью раздела

31.1. Пусть верхнее полупространство заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ_1 , а нижнее — с ϵ_2 (рис. 36). Применяя

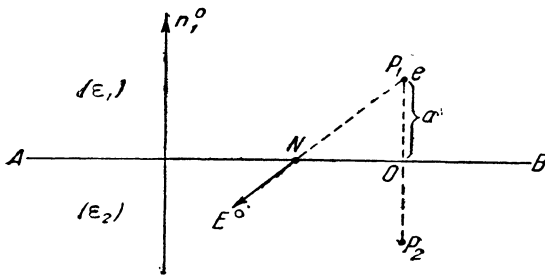


Рис. 36.

формулу (30,15) и замечая, что в данном случае в $[E''_{n_i}]$ поле от поверхностных зарядов, лежащих на поверхности AB , не входит,² т. е. что $[E''_{n_i}] = E_n^0$, где E^0 — поле от зарядов,³ находящихся внутри самих диэлектриков, находим непосредственно:

$$\sigma = \frac{2\eta}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} E_{n_1}^0, \quad (31,1)$$

что и дает полное решение задачи.

Если, в частности, на поверхности раздела истинных зарядов η не имеется, то формула (31,1) упрощается и дает:

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} E_{n_1}^0. \quad (31,2)$$

¹ Так, в случае задачи о распределении токов, уравнение (30,4) электростатической задачи заменяется условием:

$$\sigma_i [E_{n_i}^{(i)}] + \sigma_k [E_{n_k}^{(k)}] = 4\pi j,$$

где σ_i и σ_k — электропроводности граничащих сред, j — плотность поверхностных токов, если таковые текут по поверхности раздела, и т. д.

² Напоминаем, что $[E''_{n_i}]$ — это нормальная компонента полного электрического поля на самой поверхности раздела, а не вблизи от нее. Поэтому поверхностные заряды, лежащие на самой плоскости AB , нормальной к ней составляющей поля не дают.

³ Свободных.

Если положить здесь $\varepsilon_2 = \infty$, то получим случай проводящего нижнего полупространства, причем плотность свободных зарядов на поверхности — σ_0 — оказывается равной:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi} E_{n_1}^0. \quad (31, 3)$$

Этот результат, естественно, мог бы быть получен и непосредственно из второй формулы (30, 14), ибо внутри металла поле $E_{n_k}^{(k)} = E_{n_2}^{(2)}$ должно быть равно нулю, что прямо приводит к (31, 3).

Если, например, первичное поле создается одним точечным зарядом e , находящимся в P_1 (рис. 36), то $E_{n_1}^0 = -\frac{ea}{\varepsilon_1 \cdot PN^3}$, так что в этом случае

$$\sigma_0 = -\frac{ea}{2\pi\varepsilon_1 \cdot PN^3}, \quad (31, 4)$$

хорошо известный закон, показывающий, что плотность индуцированного заряда убывает обратно пропорционально кубу расстояния точки на поверхности от заряда e .

(31, 2) и (31, 3) дают вместе:

$$\sigma = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sigma_0, \quad (31, 5)$$

причем, естественно, считается, что все создающие поле заряды лежат в верхнем полупространстве. Тем самым показано, что характер распределения свободных зарядов σ по поверхности раздела двух диэлектриков в данном поле E^0 не зависит от их диэлектрических постоянных и совпадает с характером распределения заряда σ_0 по поверхности проводника, отличаясь от последнего лишь постоянным множителем $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

31. 2. Исходя из найденных результатов, легко прийти к так называемому правилу отражения точечного заряда в проводящей плоскости. Для этого достаточно заметить, что истинный заряд e в P_1 , эквивалентный свободному заряду $e' = e/\varepsilon_1$, создает на проводящей поверхности AB такое распределение σ_0 поверхностного заряда, которое полностью нейтрализует первичное поле от самого e' внутри проводника. Из этого видно, что поле, создаваемое в этом случае в нижнем полупространстве (т. е. внутри проводника) плотностью σ_0 , таково, как если бы оно исходило из заряда $-e'$, помещенного в P_1 , и полностью нейтрализующего первичный свободный заряд e' . Но так как действие поверхностного слоя зарядов σ_0 на AB , очевидно, симметрично в отношении верхнего и нижнего полупространств, то те же заряды σ_0 создают в верхнем полупространстве такое поле, как будто оно исходит от заряда $-e'$ в отраженной точке P_2 . Это и есть искомое правило отражения в проводящей плоскости.

31. 3. Чтобы перенести это правило на общий случай поверхности раздела двух любых диэлектриков ε_1 и ε_2 , достаточно вспомнить, что,

согласно найденному выше, плотность σ распределения свободных поверхностных зарядов по поверхности раздела отличается от σ_0 только постоянным множителем $(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$. Поэтому при замене проводника диэлектриком ϵ_2 влияние свободных зарядов на поверхности раздела будет эквивалентно наличию заряда $-\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{e}{\epsilon_1}$ в точке P_2 , если рассматривается поле, создаваемое ими в верхнем полупространстве, или в точке P_1 , если речь идет о поле внутри ϵ_2 . В этом последнем случае заряд $-\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{e}{\epsilon_1}$ складывается с основным свободным зарядом e/ϵ_1 , находящимся в P_1 , так что результирующее электрическое поле в ϵ_2 будет как бы исходить из одного точечного заряда $e'' = \frac{2e}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, находящегося в P_1 .

Из изложенного видно, что все эти хорошо известные закономерности получаются с помощью изложенного метода совершенно автоматически, являясь прямым следствием формул (31, 2), (31, 3).

31.4. Магнетики. Если диэлектрики, о которых шла речь в п. п. 31.1 — 31.3, заменить намагничивающимися средами с проницаемостями μ_1 и μ_2 , а через H^0 обозначить магнитное поле от магнитов и токов, помещенных в эти среды, то, пользуясь формулой (30, 17) и перенося на этот случай рассуждения пункта 31.1, находим для плотности σ_m , выделяющейся на поверхности раздела:

$$\sigma_m = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} H_{n_1}^0. \quad (31, 6)$$

Отсюда вытекают следствия, совершенно аналогичные тем, которые получались из формулы (31, 2) для соответствующей электростатической задачи, в частности, правила отражения для полюсов и для токов. Действительно, для магнитных полюсов это правило получается непосредственно, поскольку оно уже было доказано для электрических зарядов, и теперешняя задача отличается от прежней только обозначениями. Для токов оно выводится столь же просто, так что мы на этом останавливаться не будем.

В дальнейшем, так как метод подхода к решению электро- и магнитостатических задач при одной и той же форме граничной поверхности совершенно одинаков, ограничиваемся, как правило, разбором электростатических задач. Общий способ перехода от решения какой-либо плоской электростатической задачи к решению соответствующей магнитостатической будет дан ниже в § 46.

Однородный диэлектрический цилиндр с диэлектрической постоянной ϵ_2 , помещенный в неограниченный однородный диэлектрик ϵ_1

31.5. Рассмотрим плоскую электростатическую задачу, т. е. предположим, что первичное внешнее поле и плотность истинного заряда η

не зависят от координаты z в направлении оси цилиндра. Для решения задачи будем опять исходить из основного уравнения (30, 15), причем только теперь в выражении $[E''_{n_i}]$ нормальной составляющей поля на самой поверхности цилиндра войдет, кроме поля от внешних зарядов — $[E^0_{n_i}]$, — еще и поле $[E^{(c)}_{n_i}]$ от зарядов на самой поверхности цилиндра.

Найдем прежде всего это последнее. Поле, создаваемое в точке B (рис. 37) поверхности цилиндра зарядами, лежащими вдоль его образующей на полоске боковой поверхности шириной ds в точке A , равно

$$dE^{(c)} = \frac{2\sigma ds}{AB^2} \cdot \vec{AB} = \frac{2de''}{AB^2} \cdot \vec{AB}, \quad (31, 7)$$

где de'' — свободный заряд, приходящийся на единицу длины этой полоски. Это дает (см. рис. 37):

$$[dE^{(c)}_{n_1}] = \frac{2de''}{AB} \sin \theta = \frac{de''}{R}, \quad (31, 8)$$

так как $AB = 2R \sin \theta$.

Суммируя поля от всех элементов цилиндра (окружности), найдем, поэтому:

$$[E^{(c)}_{n_1}] = \frac{\Sigma de''}{R} = \frac{e''}{R} = \int_0^{2\pi} \sigma(\alpha) d\alpha, \quad (31, 9)$$

где e'' — свободный заряд единицы длины цилиндра. Таким образом собственное поле, создаваемое цилиндром в B , зависит только от суммарного заряда e'' , но не от его распределения по поверхности.

Подставляя найденное значение $[E^{(c)}_{n_1}]$ в (30, 15), получим:

$$\sigma = \frac{2\eta}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[\frac{e''}{R} + [E^0_{n_1}] \right]. \quad (31, 10)$$

Умножая (31, 10) на $Rd\alpha$, интегрируя по всей окружности цилиндра и замечая, что по теореме Гаусса

$$\int_0^{2\pi} [E^0_{n_1}] R d\alpha = 4\pi e''_{\text{внутр.}},$$

где $e''_{\text{внутр.}}$ — суммарный свободный заряд, лежащий внутри¹ цилиндра на единице длины, найдем:

$$e'' = \int_0^{2\pi} \sigma R d\alpha = \frac{2e}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} [2\pi e'' + 4\pi e''_{\text{внутр.}}],$$

¹ Но не на самой поверхности.

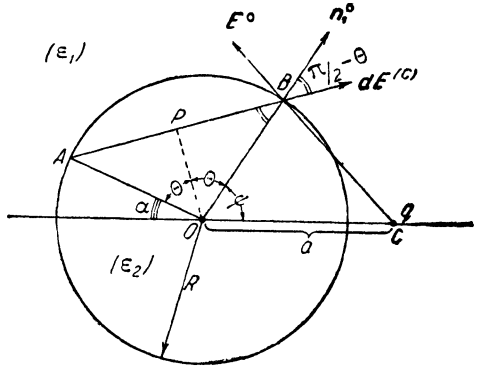


Рис. 37.

причем через e обозначен *истинный* поверхностный заряд единицы длины цилиндра. Вводя истинный заряд $e_{\text{внутр.}} = \epsilon_2 e''_{\text{внутр.}}$, находим:

$$e'' = \frac{e}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) e_{\text{внутр.}} \quad (31,11)$$

Подстановка этого значения e'' в (31,10) и дает окончательное решение задачи. В частности, при отсутствии внешнего поля и внутренних зарядов получается при $\epsilon_2 = \infty$, что соответствует проводящему цилиндру:

$$\sigma = \frac{e}{2\pi R \epsilon_1},$$

т. е. равномерное распределение заряда по поверхности.

Если $\eta = 0$, т. е. если на цилиндре находится только наведенный заряд, то (31,10) упрощается и дает:

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[[E_{n_1}^0] + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \frac{e_{\text{внутр.}}}{R} \right]. \quad (31,12)$$

При $\epsilon_2 = \infty$ получаем случай проводящего цилиндра, причем, полагая $e_{\text{внутр.}} = 0$, находим:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi} [E_{n_1}^0]. \quad (31,13)$$

Рассмотрим особо случай, когда внешнее поле создается заряженной нитью, параллельной оси цилиндра, находящейся от нее на расстоянии a в точке C и обладающей зарядом q на единицу длины. Потенциал поля, создаваемого этой нитью в произвольной точке $M(r, \psi)$, равен (рис. 37):

$$\varphi = -q' \lg(a^2 + r^2 - 2ar \cos \psi) + \text{const},$$

где $q' = q/\epsilon_1$, так что $[E_{n_1}^0]$ получается равным:

$$\begin{aligned} [E_{n_1}^0] &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 2q' \frac{R - a \cos \psi}{a^2 + R^2 - 2aR \cos \psi} = \\ &= \frac{q'}{R} \left[1 + \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2 - 2aR \cos \psi} \right] = \frac{q'}{R} \left[1 + \frac{R^2 - a^2}{CB^2} \right]. \end{aligned} \quad (31,14)$$

Подставляя это в (31,13), находим соответствующее распределение плотности по поверхности цилиндра. Второй член дает обычный закон отражения,¹ а первый соответствует равномерному распределению по

¹ См. п. п. 18.4 и 18.5. В этом нетрудно также убедиться непосредственно следующим образом: потенциал $\varphi_{\text{ц.}}$, создаваемый во внешней по отношению к цилиндру точке $M(r, \theta)$ зарядами σ_0 , распределенными по его поверхности, имеет вид:

$$\varphi_{\text{ц.}} = -R \int_0^{2\pi} \sigma_0(\psi) \lg[r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta) + R^2] d\psi, \quad (r > R), \quad (a)$$

где, согласно сказанному выше,

$$\sigma_0(\psi) = \frac{q'}{\pi} \cdot \frac{R - a \cos \psi}{a^2 + R^2 - 2aR \cos \psi}. \quad (б)$$

Замечая, что

$$\lg[r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta) + R^2] = 2 \lg r - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{r} \right)^k \cos k(\psi - \theta),$$

поверхности заряда q , который вместе с отраженным дает в сумме, заряд на цилиндре, равный нулю. Формула (31,12) показывает теперь что и в случае двух диэлектрических сред правило отражения остается в силе для внешней среды, если только изменить величину отраженного и компенсирующего зарядов в $(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ раз.

Что касается поля внутри цилиндра, то его тоже нетрудно найти. Для этого достаточно заметить, что в случае проводящего цилиндра плотность σ_0 создает внутри цилиндра такое поле E' , которое полностью нейтрализует первичное поле, исходящее от нити q в точке C , так что суммарное поле внутри цилиндра равно нулю. Поле E' сов-

получаем из (а):

$$\varphi_{ц.} = -2\pi A_0 R \lg r + 2\pi R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{r}\right)^k [A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta], \quad (в)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\psi) \cos k\psi d\psi, \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\psi) \sin k\psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

— коэффициенты Фурье для функции $\sigma_0(\psi)$.

Они могут быть сразу найдены и без выполнения указанных в (г) квадратур. Для этого достаточно заметить, что $\sigma_0(\psi)$ можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \sigma(\psi) &= -\frac{q'}{2\pi} \left[\frac{e^{i\psi}}{a - Re^{i\psi}} + \frac{e^{-i\psi}}{a - Re^{-i\psi}} \right] = \\ &= -\frac{q'}{2\pi a} \left\{ e^{i\psi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^k e^{ik\psi} + e^{-i\psi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^k e^{-ik\psi} \right\} = \\ &= -\frac{q'}{\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^k \cos k\psi = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\psi + B_k \sin k\psi), \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_k = -\frac{q'}{\pi R} \left(\frac{R}{a}\right)^k \quad \text{при } k \geq 1, \\ B_k &= 0 \quad \text{при } k \geq 0. \end{aligned}$$

Подставляя это в (в), находим, полагая $\frac{R^2}{a} = a'$:

$$\begin{aligned} \varphi_{ц.} &= -2q' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{a'}{r}\right)^k \cos k\theta = \\ &= -2q' \lg r + q' \lg (r^2 - 2a'r \cos \theta + a'^2). \end{aligned} \quad (д)$$

Последнее выражение может быть интерпретировано, как сумма потенциала нити с зарядом q' на единицу длины, расположенной на оси цилиндра, и нити с зарядом $(-q')$ на единицу длины, находящейся в точке $(a', 0)$ и представляющей собой отражение первичной нити $(a, 0)$ в цилиндре.

падает поэтому внутри цилиндра с полем, которое создавалось бы нитью со свободным зарядом $-q'$, помещенной в точке C и полностью нейтрализующей действие первичной нити, проходящей через ту же точку.

В случае диэлектрического цилиндра распределение плотностей σ по его поверхности будет, как было только что показано, в точности таким же, как в случае проводящего цилиндра, только самая величина плотностей σ при этом в $(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ раз меньше плотностей σ_0 в соответствующих точках. Поэтому и создаваемое плотностями σ внутри цилиндра поле будет по своему характеру таким же, как в случае проводящего цилиндра, только его интенсивность будет в каждой точке в $(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ раз меньше, чем в случае проводника. Оно будет, стало быть, совпадать с полем от нити с зарядом $q'' = -q' \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$, помещенной в C и совпадающей с первичной нитью q' . Полное результирующее поле внутри цилиндра будет, таким образом, просто полем от нити с зарядом $q''' = q' + q'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q' = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, находящейся в C , причем силовые линии внутри диэлектрического цилиндра имеют направление радиусов, исходящих из C .

Совершенно аналогично можно рассмотреть случай, когда внешнее поле создается зарядами, помещенными внутри цилиндрической полости в проводящем теле. Для этого нужно только положить в формуле (31,12) $\epsilon_1 = \infty$, что сразу дает:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e_{\text{внутр.}}}{R\epsilon_2} - E_r^0 \right]. \quad (31,15)$$

Например, если на оси цилиндра находится нить с зарядом $e_{\text{внутр.}}$ на единицу длины, то $E_r^0 = 2e_{\text{внутр.}}/R\epsilon_2$, так что

$$\sigma = -\frac{e_{\text{внутр.}}}{2\pi R\epsilon_2} \quad (31,16)$$

и т. д.

Проводящий шар в однородной среде

31.6. Основная задача, как и в случае цилиндра, заключается в нахождении нормальной к поверхности составляющей „собственного“ поля $\mathbf{E}^{(e)}$ шара, т. е. поля самих поверхностных зарядов σ .

Чтобы ее найти, рассмотрим поле $d\mathbf{E}^{(e)}$, создаваемое в точке B на поверхности шара зарядом $de'' = \sigma df$, лежащим на элементе поверхности df в точке A (рис. 38). Проводя через A и B дугу большого круга, получаем в плоскости этого круга картину, вполне аналогичную той, которую мы имели на рис. 37.

Находим, как там:

$$[dE_{n_1}^{(c)}] = \frac{de''}{AB^2} \sin \theta = \frac{de''}{2R \cdot AB}, \quad (31,17)$$

так что

$$[E_{n_1}^{(c)}] = \frac{1}{2R} \int_{(f)} \frac{de''}{AB} = \frac{1}{2R} \varphi^{(c)}, \quad (31,18)$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара и $\varphi^{(c)}$ обозначает потенциал, создаваемый в точке B лежащими на самом шаре зарядами. Но так как на поверхности проводника суммарный потенциал V , создаваемый как этими зарядами, так и внешним полем, должен быть постоянен, то, обозначая потенциал внешнего поля через φ^0 , найдем:

$$\varphi^{(c)} = V - \varphi^0, \quad (31,19)$$

так что (31,18) дает:

$$[E_{n_1}^{(c)}] = \frac{V - \varphi^0}{2R}. \quad (31,20)$$

Подставляя это в (30,15), где надо положить $\varepsilon_i = \varepsilon_1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_2 = \infty$, получим:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} [E_{n_1}^{(c)}] = \frac{V - \varphi^0}{4\pi R} + \frac{E_r^0}{2\pi}, \quad (31,21)$$

причем нормаль \mathbf{n}_1^0 направлена по радиусу изнутри шара наружу.

Формула (31,21) полностью решает задачу о распределении поверхностной плотности σ на шаре при внесении его в любое внешнее поле. При этом различаем два случая, именно:

1) Потенциал шара V известен.

Тогда (31,21) сразу дает окончательное решение задачи.

2) Дан суммарный заряд шара e .

Так как истинная плотность η и вектор смещения на самой поверхности связаны соотношением:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} [D_{n_1}] = \frac{\varepsilon_1}{2\pi} [E_{n_1}^{(c)}] = \varepsilon_1 \sigma, \quad (31,22)$$

то, умножая (31,21) на df и интегрируя по всей поверхности шара, найдем:

$$e = \int_{(f)} \eta df = \varepsilon_1 \int_{(f)} \sigma df = \varepsilon_1 R \left[V - \int_{(f)} \frac{\varphi^0 df}{4\pi R^2} \right], \quad (31,23)$$

ибо $\int_{(f)} E_r^0 df = 0$, поскольку поле \mathbf{E}^0 исходит от внешних по отношению к шару источников. Поэтому, если обозначить через $(\varphi^0)_{\text{сред.}}$ усредненный по поверхности шара потенциал внешнего поля, то для V находим значение

$$V = \frac{e}{\varepsilon_1 R} + (\varphi^0)_{\text{сред.}}, \quad (31,24)$$

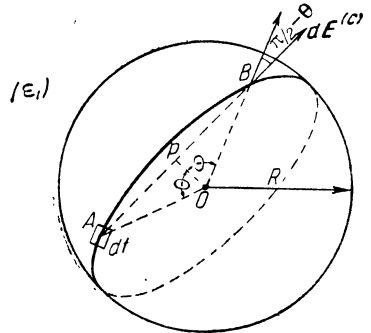


Рис. 38.

268 Разбор ряда случаев с более сложными формами поверхности раздела [Ч. III которое и остается подставить в (31,21), чтобы закончить решение. Получается:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi\epsilon_1 R^2} + \frac{(\varphi^0)_{\text{сред.}} - \varphi^0}{4\pi R} + \frac{E_r^0}{2\pi} \quad (31,25)$$

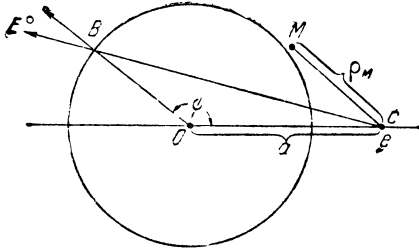


Рис. 39.

31.7. Рассмотрим два простых примера. Если внешнее поле отсутствует, то $\varphi^0 = (\varphi^0)_{\text{сред.}} = 0$, и (31,25) дает:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi\epsilon_1 R^2} \quad (31,26)$$

Если внешнее поле создается точечным зарядом e , лежащим на расстоянии a от центра заземленного шара,¹ находящегося в пустоте, то потенциал от него в некоторой точке M равен (см. рис. 39):

$$\varphi_M^0 = e/MC = e/\rho_M \quad (31,27)$$

Для E_r^0 в точке B находим:

$$E_r^0 = - \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial r} \right)_B = \frac{e(R - a \cos \psi)}{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \psi)^{3/2}} = \frac{e}{2R} \left[\frac{1}{\rho_B} + \frac{R^2 - a^2}{\rho_B^3} \right] \quad (31,28)$$

Подставляя найденное значение E_r^0 в (31,21), где надо положить $V=0$, получаем:

$$\sigma = \frac{e(R^2 - a^2)}{4\pi R \rho_B^3}, \quad (31,29)$$

хорошо известный закон, дающий распределение плотности индуцированного заряда по поверхности проводящего шара.³

31.8. Если бы рассматривалось распределение σ , возникающее на внутренней поверхности сферической полости внутри заземленного проводника, то формула (31,20) для $[E_{n1}^{(c)}]$ осталась бы в силе и теперь, но в основной формуле (30,15) надо было бы положить $\epsilon_i = \epsilon_1 = \infty$ и первичные заряды считать расположенными внутри сферы, т. е. в среде

¹ Т. е. имеющего потенциал $V=0$.

² Заметим, что средний потенциал $(\varphi^0)_{\text{сред.}}$ по поверхности сферы равен просто e/a , ибо

$$(\varphi^0)_{\text{сред.}} = \frac{e}{4\pi R^2} \int \frac{df}{\rho},$$

а так как $I = \int \frac{df}{\rho}$ представляет собой не что иное, как потенциал в точке C от рассматриваемого шара, если его покрыть равномерно зарядом с поверхностной плотностью, равной единице, то $I = 4\pi R^2/a$. Это и дает значение $(\varphi^0)_{\text{сред.}} = e/a$.

³ Его легко получить, в частности, из формул п. 20.6, в которых нужно при этом положить $\epsilon_1 = \infty$ и $\epsilon_2 = 1$.

с постоянной ϵ_2 , которую, для простоты, полагаем равной единице. Получается:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varphi^0}{2R} - E_r^0 \right). \quad (31, 30)$$

Если, например, поле \mathbf{E}^0 создается точечным зарядом e в центре сферы, то $\varphi^0 = e/R$, $E_r^0 = e/R^2$, так что

$$\sigma = - \frac{e}{4\pi R^2},$$

как оно и должно быть.

§ 32. Разбор ряда случаев с более сложными (комбинированными) формами поверхности раздела

Данные выше решения относились к случаю наиболее простых граничных поверхностей — плоскости, цилиндра, шара. Переходим теперь к рассмотрению некоторых более сложных форм поверхностей раздела.

Диэлектрический полуцилиндр на проводящей плоскости

32.1. Рассмотрим неограниченный полуцилиндр из вещества с диэлектрической постоянной ϵ_2 , лежащий на неограниченной же проводящей плоскости и окруженный средой ϵ_1 (рис. 40). Пусть вся система находится в произвольном „плоском“ внешнем поле

$$\mathbf{E}^0 = i_x E_x(x, y) + i_y E_y(x, y)$$

(x и y — координаты в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра). Замечаем прежде всего, что, дополнив наш полуцилиндр до полного с помощью отражения его в плоскости PQ и вводя поле отраженной системы зарядов, можем решить нашу задачу таким же образом, как это было сделано в 31.5 для полного цилиндра в однородной среде. Действительно, будем, как обычно, пользоваться формулой (30,16).

$[E'_{n_i}]$ состоит теперь из трех частей, именно:

а) $[E'_{n_i}] = [E_r^0]$, где \mathbf{E}^0 — данное внешнее поле;

б) $[E'_{n_i}] = [E_r^{0'}]$, где $\mathbf{E}^{0'}$ — поле от системы отраженных внешних зарядов;

γ) $[E'_{n_i}] = [E_r^{(c)}]$, где $\mathbf{E}^{(c)}$ — поле от всех поверхностных зарядов (действительных и отраженных), лежащих на цилиндре.

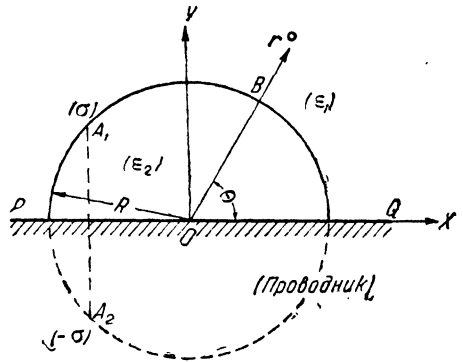


Рис. 40.

Так как для этого последнего поля имеем, согласно формуле (31, 9), что $[E_{n_i}^{(c)}] = e''/R$, где e'' — полный свободный заряд на поверхности цилиндра,¹ и так как этот полный заряд по условию отражения равен нулю, то $[E_{n_i}^{(c)}] = 0$. Формула (30, 16) дает поэтому:

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} ([E_r^0] + [E_r^0']). \quad (32, 1)$$

Этой формулой задача и решается, так как поле в любой точке пространства складывается из внешних полей основного и отраженного и из поля цилиндра, покрытого плотностью σ , определяемой уравнением (32, 1).²

Если, например, E^0 представляет собой однородное поле, направление которого перпендикулярно к плоскости PQ , то, полагая $E_y^0 = E$ и замечая, что „отраженное“ поле просто равно первичному и приводит, стало быть, к его удвоению, получаем из (32, 1):

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} E \sin \theta. \quad (32, 2)$$

Эта формула дает и „отраженную“ плотность на нижней половине цилиндра, ибо σ при замене θ на $(-\theta)$ меняет знак. Замечая, что для поверхностной плотности свободного заряда на диэлектрическом цилиндре с постоянной ϵ_2 , находящемся в среде с постоянной ϵ_1 и внесенном в перпендикулярное к его оси однородное поле $2E$, получается опять значение, даваемое формулой (32, 2),³ видим, что в обоих случаях индуцированные заряды дают одинаковое внешнее поле. Так как при этом поле, создаваемое диэлектрическим цилиндром, эквивалентно полю линейного диполя с моментом

$$p = 2ER^2 \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \quad (32, 3)$$

на единицу длины, направленным по положительной оси Y , то суммарное поле в случае нашей основной задачи складывается из поля такого диполя и из направленного по оси Y однородного поля $2E$.

Если положить в формулах (32, 2) и (32, 3) $\epsilon_2 = \infty$, то получится решение, соответствующее проводящему полуцилиндру. Момент эквивалентного линейного диполя обратится при этом в $p_\infty = 2ER^2$.

32.2. Аналогичным образом может быть разобран и *случай проводящего полушара на проводящей плоскости*. Именно, отражая как внешнее поле, так и полушар в плоскости и применяя рассужде-

¹ На единицу длины оси.

² Формула (32, 1) дает правильное значение плотности и на нижней половине цилиндра. См. по этому поводу также п. 31.5.

³ Ср. формулу (31, 10), где надо положить

$$\eta = 0, e'' = 0, [E_{n_1}^0] = 2E \sin \theta.$$

ния, аналогичные проведенным в п. 31.6, придем к формуле для плотности σ :¹

$$\sigma = -\frac{\varphi^0 + \varphi^{0'}}{4\pi R} + \frac{E_r^0 + E_r^{0'}}{2\pi}, \quad (32, 4)$$

которая отличается от (31, 21) лишь тем, что наряду с потенциалом φ^0 и полем E_r^0 заданного распределения зарядов входят еще те же величины, происходящие от отраженной системы.

Примем центр полусферы за начало сферической системы координат (r, θ, ψ) , причем углы широты θ будем отсчитывать от оси Z , перпендикулярной к проводящей плоскости (рис. 41).

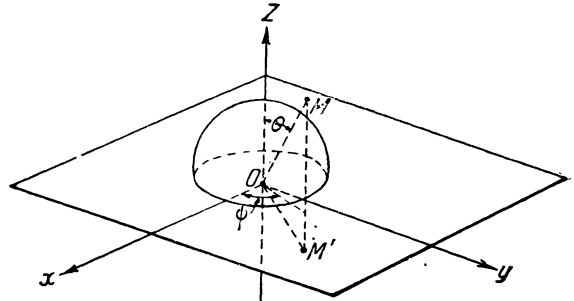


Рис. 41.

Тогда, если координаты некоторой точки M в верхнем полупространстве обозначить через (r, θ, ψ) , то координаты отраженной точки M' будут $(r, \pi - \theta, \psi)$.

Если потенциал первичного поля φ^0 в точке M равен

$$\varphi^0 = \varphi^0(r, \theta, \psi), \quad (32, 5)$$

то потенциал „отраженного“ поля $-\varphi^{0'}$ — в ней же равняется²

$$\varphi^{0'} = -\varphi^0(r, \pi - \theta, \psi), \quad (32, 6)$$

а соответствующие поля будут:

$$E_r^0 = -\frac{\partial \varphi^0(r, \theta, \psi)}{\partial r}, \quad E_r^{0'} = \frac{\partial \varphi^0(r, \pi - \theta, \psi)}{\partial r}. \quad (32, 7)$$

Подставляя в (32, 4), находим окончательный вид решения:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi R} \left[\varphi^0(R, \pi - \theta, \psi) - \varphi^0(R, \theta, \psi) \right] + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial \varphi^0(r, \pi - \theta, \psi)}{\partial r} - \frac{\partial \varphi^0(r, \theta, \psi)}{\partial r} \right]_{r=R}, \quad (32, 8)$$

причем выражение это дает правильное значение плотности как на действительной, так и на отраженной половине шара.

Если, например,

$$\varphi^0 = -Ez = -Er \cos \theta, \quad (32, 9)$$

что соответствует однородному полю, направленному по оси Z , то

$$\sigma = 3E \cos \theta / 2\pi, \quad (32, 10)$$

причем это дает сразу плотность и на отраженной половине шара. Плотность получается при этом такая же, как если бы весь шар был внесен в однородное поле интенсивности $2E$, т. е. создаваемое ей

¹ V полагаем равным нулю.

² Ибо он равен потенциалу первичного поля в точке M' , но с обратным знаком.

поле эквивалентно полю от диполя с моментом $P_z = 2ER^3$, помещенного в центр шара, а полное поле в окружающем пространстве является результатом наложения на это поле однородного поля $2E$, направленного по оси Z .

32.3. В заключение рассмотрим еще решение электростатической задачи в случае, изображенном на рис. 42, т. е. когда полупространство над проводящей плоскостью AB заполнено двумя различными диэлектриками с плоской поверхностью раздела, перпендикулярной к AB .

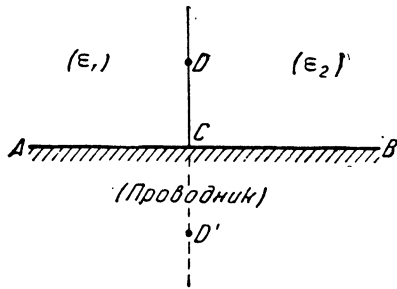


Рис. 42.

Отражая в плоскости AB как внешнее поле E^0 , причем получается „отраженное поле“ $E^{0'}$, так и распределение поверхностных зарядов на поверхности раздела CD , приводим все дело к нахождению распределения σ по плоскости DD' под действием суммарного внешнего поля $E^0 + E^{0'}$. Формула (30,16) дает сразу:

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} (E_{n_1}^0 + E_{n_1}^{0'}), \quad (32,11)$$

и это и есть искомое решение.

На этом мы закончим рассмотрение примеров задач, допускающих элементарное решение на основе излагаемого метода, и перейдем к разбору более сложных случаев.

Глава XIV

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС „ПЛОСКИХ“ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ („СЕКТОРИАЛЬНОЕ“ РАСПОЛОЖЕНИЕ СРЕД)

§ 33. Формулировка задачи

33.1. В примерах, разобранных в предыдущих параграфах, речь шла обычно об определении поля при наличии в пространстве двух различных сред, поверхность раздела которых либо имела особенно простую форму, — плоскость, цилиндр, шар, — либо сводилась к таковой посредством отражения. Мы перейдем теперь к более сложным формам разграничивающих поверхностей и рассмотрим прежде всего решение одного специального класса „плоских“ задач электро- и магнитостатики, имеющих как самостоятельный, так и определенный технический интерес. Именно, пусть имеется указанное на рис. 43 „секториальное“ распределение различных диэлектриков в пространстве,¹ причем не

¹ Прямые OA_k — это следы пересечения разграничивающих раздвге среды плоскостей с перпендикулярной к ним плоскостью чертежа.

исключается и случай $\varepsilon_i = \infty$, что соответствует наличию проводящего угла. Задача заключается в нахождении поля \mathbf{E} , возникающего в любой точке пространства, если вся система находится в заданном „плоском“ внешнем поле $\mathbf{E}^0 = \mathbf{i}_x E_x(x, y) + \mathbf{i}_y E_y(x, y)$.

Отметим, что частными случаями этой задачи являются, например, следующие:

а) Диэлектрический или проводящий угол в пустоте или в одно-

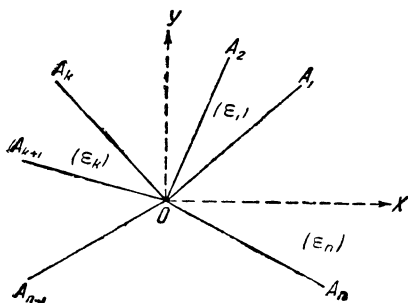


Рис. 43.

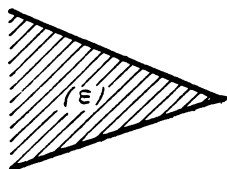


Рис. 44.

родной среде (рис. 44), внесенный в произвольное „плоское“ поле (в случае проводящего угла задача допускает непосредственное решение с помощью конформного преобразования).

б) Аналогичная задача для магнитных сред, в частности, для прямолинейного тока или любой системы таких токов (катушки), помещенной внутри или вне прямого или косоугольного угла, заполненного веществом с постоянной магнитной проницаемостью μ (рис. 45 и 46).

Точное решение этих задач дает возможность детально исследовать соответствующее распределение магнитной индукции и поля внутри и вне рассматриваемого угла.

в) Влияние диэлектрической подкладки на поле у края металлического электрода (краевой эффект, см. рис. 47) и т. д.

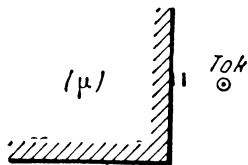


Рис. 45.

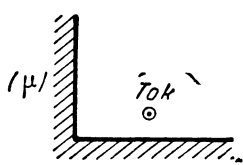


Рис. 46.

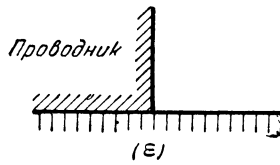


Рис. 47.

Мы сначала дадим постановку и решение задачи в общем виде, после чего займемся рассмотрением некоторых частных случаев.

33.2. Постановка задачи. Пусть имеется указанное на рис. 48 „секториальное“ распределение диэлектриков в пространстве, причем границами между отдельными средами служат неограниченные полупрямые¹ OA_k , ($k=1, 2, \dots, n$), исходящие из общей

¹ Т. е., по существу, полуплоскости, перпендикулярные к плоскости чертежа и пересекающие ее вдоль прямых OA_k .

точки O , которую принимаем за начало полярной системы координат (r, θ) . Отсчет углов θ будем производить от произвольно выбранной на плоскости оси OX (против часовой стрелки), причем будем считать для определенности, что $0 \leq \theta < 2\pi$. Положение полупрямой OA_k на плоскости будет при этом характеризоваться углом θ_k , ($0 \leq \theta_k < 2\pi$), составляемым ею с осью OX и отсчитываемым от нее против часовой стрелки.

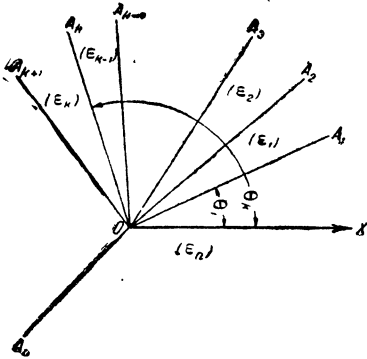


Рис. 48.

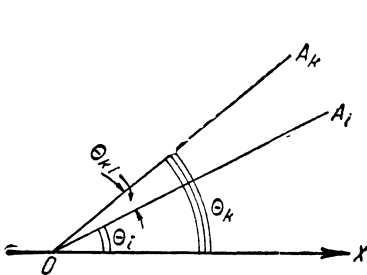
Обозначая, далее, через θ_{ki} , причем $0 < \theta_{ki} < 2\pi$, угол, составляемый i -ой поверхностью раздела OA_i с k -ой — OA_k , отсчитываемый от OA_i тоже против

часовой стрелки до встречи с OA_k , будем, очевидно, иметь (см. рис. 49а и 49б)

$$\theta_{ki} = \begin{cases} \theta_k - \theta_i & \text{при } \theta_k > \theta_i, \\ \theta_k - \theta_i + 2\pi & \text{при } \theta_k < \theta_i. \end{cases} \quad (0 < \theta_{ki} < 2\pi). \quad (33.1)$$

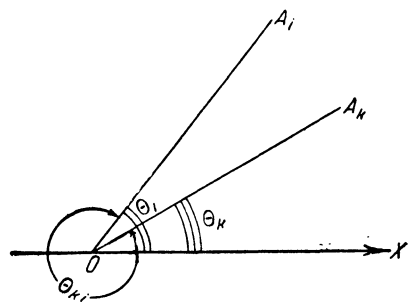
Будем считать, что плоскости раздела перенумерованы в таком порядке, что $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_n$, и что сектор, ограниченный полупрямыми OA_k и OA_{k+1} , заполнен средой с диэлектрической постоянной ϵ_k .

Пусть вся рассматриваемая система диэлектриков внесена в какое-либо заданное внешнее поле. Тогда на каждой из плоскостей раздела различных сред выделяются некоторые поляризаационные заряды.



$$\theta_k > \theta_i; \quad \theta_{ki} = \theta_k - \theta_i$$

Рис. 49а.



$$\theta_k < \theta_i, \quad \theta_{ki} = 2\pi - (\theta_i - \theta_k)$$

Рис. 49б.

Обозначим через σ_k плотность свободных зарядов, выделяющихся на плоскости OA_k , разделяющей среды с диэлектрическими постоянными ϵ_{k-1} и ϵ_k , причем плотность эта является функцией расстояния s_k той точки M_k , в которой она рассматривается, от O (рис. 50).

Считая, что на поверхностях раздела истинных зарядов η нет,¹ и применяя к точке M_k поверхности раздела ($\epsilon_{k-1}, \epsilon_k$) общую формулу (30,16), найдем, замечая, что в данном случае нормальной к поверхности раздела будет компонента E_θ электрического поля:

$$\sigma_k = \sigma_k(s_k) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ \mathfrak{E}_\theta + \sum_{i \neq k} E_\theta^{(i)} \right\}_{\theta = \theta_k}, \quad (33,2)$$

$$\alpha_k = \frac{\epsilon_k - 1 - \epsilon_k}{\epsilon_k - 1 + \epsilon_k},$$

где \mathfrak{E}_θ — угловая компонента поля от внешних источников, а E_θ^i — соответствующая компонента поля от поляризационных зарядов σ_i , находящихся на плоскости OA_i . Суммирование в правой части формулы (33,2) распространяется на все поверхности (плоскости) раздела кроме OA_k .

Найдем прежде всего величину E_θ^i . С этой целью разделим, как показано на рис. 50, всю плоскость OA_i на бесконечно тонкие полоски ширины ds_i , перпендикулярные к плоскости чертежа, и заметим, что потенциал $d\varphi_i$, создаваемый такой полоской в некоторой точке M с координатами (r, θ) , равен (ср. рис. 50):

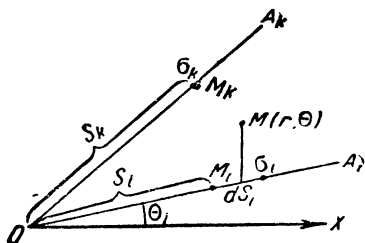


Рис. 50.

$$d\varphi_i = -2[\sigma_i(s_i) ds_i] \lg MM_i = -\sigma_i(s_i) \lg [r^2 + s_i^2 - 2rs_i \cos(\theta - \theta_i)] ds_i, \quad (33,3)$$

ибо это просто потенциал нити с зарядом $\sigma_i(s_i) ds_i$ на единицу длины ее, находящейся в точке $M_i(s_i, \theta_i)$. θ -овая составляющая поля этой полоски равна, стало быть:

$$dE_\theta^{(i)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (d\varphi_i) = \frac{2\sigma_i(s_i) s_i \sin(\theta - \theta_i) ds_i}{r^2 + s_i^2 - 2rs_i \cos(\theta - \theta_i)}, \quad (33,4)$$

а полная угловая составляющая поля от всей плоскости, получаемая из (33,4) интегрированием по s_i от нуля до бесконечности, равна:

$$E_\theta^{(i)} = 2 \sin(\theta - \theta_i) \int_0^\infty \frac{\sigma_i(s) ds}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_i)}. \quad (33,5)$$

Полагая здесь $\theta = \theta_k$ и $r = s$ и подставляя это значение $(E_\theta^{(i)})_{\theta = \theta_k}$ в формулу (33,2), получим, используя введенное в (33,1) обозначение:

$$\sigma_k(s) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ (\mathfrak{E}_\theta)_\theta = \theta_k + 2 \sum_{i \neq k} \sin \theta_{ki} \int_0^\infty \frac{\sigma_i(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 + s^2 - 2s\xi \cos \theta_{ki}} \right\}. \quad (33,6)$$

¹ Обобщение вычислений на тот случай, когда на поверхностях имеются истинные плотности, не представляет никаких затруднений, причем только нужно исходить из (30,15), а не из (30,16).

Здесь

$$\mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \theta}, \quad (33,7)$$

где φ_α — потенциал внешнего поля, т. е. потенциал определяющих первичное поле свободных зарядов.

Полагая в формуле (33,6) последовательно $k=1, 2, 3, \dots, n$, получаем для определения плотностей σ_k систему из n совокупных интегральных уравнений, которая и должна служить для их нахождения.

33.3. Отметим, что в том частном случае, когда источником внешнего поля является одна бесконечно-тонкая заряженная нить со свободным зарядом e' на единицу длины, находящаяся в точке $r=a$, $\theta=\gamma$, потенциал φ_α внешнего поля в произвольной точке $M(r, \theta)$ равен

$$\varphi_\alpha = -e' \lg [r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma)], \quad (33,8)$$

так что, согласно (33,7):

$$\mathcal{G}_\theta = \frac{2e'a \sin(\theta - \gamma)}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma)}. \quad (33,9)$$

(33,6) принимает при этом такой вид:

$$\sigma_k(s) = \frac{\alpha_k}{\pi} \left\{ \frac{e'a \sin(\theta_k - \gamma)}{s^2 + a^2 - 2as \cos(\theta_k - \gamma)} + \sum_{i \neq k} \sin \theta_{ki} \int_0^\infty \frac{\sigma_i(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 + s^2 - 2\xi s \cos \theta_{ki}} \right\}, \quad (33,10)$$

$(k=1, 2, 3, \dots, n).$

Так как любое „плоское“ (т. е. независящее от перпендикулярной к плоскости чертежа координаты) распределение зарядов можно разбить на совокупность бесконечно-тонких, равномерно заряженных по длине нитей только-что рассмотренного типа, то, умея решить задачу для одной нити, сведем решение ее в самом общем случае произвольного „плоского“ внешнего поля к простому наложению (интегрированию) элементарных решений для отдельных нитей. В силу этого мы в дальнейшем будем, в основном, заниматься решением системы уравнений (33,10), которая дает ключ к решению общей электростатической задачи при произвольном внешнем поле. Аналогичным образом можно было бы рассмотреть и „ключевой“ случай задачи магнитостатики, когда первичное поле создается бесконечно-длинной и тонкой токовой нитью, перпендикулярной к плоскости чертежа. Но так как ниже, в § 46, мы дадим совершенно общий способ перехода от решения какой-либо плоской электростатической задачи, в которой внешнее поле считается исходящим от бесконечно-длинной заряженной нити, к решению соответствующей магнитостатической, в которой диэлектрики заменены, без изменения их формы, магнетиками, а заряженная нить — бесконечно-длинным линейным током, то мы на этом здесь останавливаться не будем.

§ 34. Первый этап решения задачи. „Преобразованные“ плотности и уравнения для них

34.1. Для того, чтобы решить полученную в предыдущем параграфе систему интегральных уравнений, помножим (33,6) на $s^\nu ds$, где ν — некоторое прилично выбранное комплексное число, притом такое, что во всяком случае $-1 < \text{Re}(\nu) < +1$,¹ и проинтегрируем по s от нуля до бесконечности.

Введем общее обозначение

$$\bar{f} = \bar{f}(\nu) = \int_0^\infty f(s) s^\nu ds, \quad (34,1)$$

где $f(s)$ — произвольная функция от s , удовлетворяющая лишь тому условию, что интеграл (34,1) существует, и назовем величину $\bar{f} = \bar{f}(\nu)$ преобразованной от $f(s)$.²

Допуская теперь, что возможно выбрать ν так, чтобы все интегралы

$$\bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_k(\nu) = \int_0^\infty \sigma_k(s) s^\nu ds \quad (34,2)$$

имели одновременно конечные значения,³ и допуская, что в получающихся справа двойных интегралах порядок интегрирования может быть изменен, найдем:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k &= \bar{\sigma}_k(\nu) = \int_0^\infty \sigma_k(s) s^\nu ds = \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ (\overline{\mathbb{G}}_k)_\theta = \theta_k + \right. \\ &+ 2 \sum_{i \neq k} \sin \theta_{ki} \int_0^\infty s^\nu ds \int_0^\infty \frac{\sigma_i(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 - 2\xi s \cos \theta_{ki} + s^2} \left. \right\} = \\ &= \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ (\overline{\mathbb{G}}_k)_\theta = \theta_k + 2 \sum_{i \neq k} \sin \theta_{ki} \int_0^\infty \sigma_i(\xi) \xi d\xi \int_0^\infty \frac{s^\nu ds}{\xi^2 - 2s\xi \cos \theta_{ki} + s^2} \right\}. \quad (34,3) \end{aligned}$$

¹ Условие $-1 < \text{Re}(\nu) < +1$ требуется для сходимости входящего ниже в вычисления интеграла (34,4).

² Это, по существу, лапласова преобразованная от f того же типа, как введенная выше в п. 22.1. Действительно, полагая в (34,1) $s = e^{-t}$, получим:

$$\int_0^\infty f(s) s^\nu ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\nu+1)t} f(e^{-t}) dt,$$

а это выражение уже принадлежит к введенному в п. 22.1 типу (22.,12), с той только разницей, что в данном случае функция $f(e^{-t})$ не предполагается обращающейся в нуль при $t < 0$, что всегда имело место для тех функций, для которых составлялись преобразованные в § 22.

³ Это во всяком случае должно иметь место при $\nu = 0$, ибо тогда $\bar{\sigma}_k(0) = \int_0^\infty \sigma_k(s) ds$ это полный поляризационный заряд, выделившийся на k -ой плоскости раздела, а этот последний в случае, если возбуждающих поле зарядов (истинных) имеется конечное количество (на единицу длины оси системы, понятно), тоже должен быть конечным, ибо он может связать лишь часть линий индукции, исходящих от первичных зарядов и, следовательно, должен быть меньше их суммы.

Полагая в последнем интеграле $s = \xi t$ и пользуясь известным значением интеграла¹

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\nu} dt}{1 - 2t \cos \theta_{ki} + t^2} = \frac{\pi \sin(\pi - \theta_{ki})^{\nu}}{\sin \pi \nu \cdot \sin \theta_{ki}}, \quad \left. \begin{array}{l} (0 < \theta_{ki} < 2\pi), \\ (-1 < \operatorname{Re}(\nu) < +1), \end{array} \right\} \quad (34,4)$$

найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sigma_i(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} \frac{s^{\nu} ds}{s^2 - 2\xi s \cos \theta_{ki} + s^2} &= \int_0^{\infty} \sigma_i(\xi) \xi^{\nu} d\xi \int_0^{\infty} \frac{t^{\nu} dt}{1 - 2t \cos \theta_{ki} + t^2} = \\ &= \frac{\pi \sin(\pi - \theta_{ki})^{\nu}}{\sin \pi \nu \cdot \sin \theta_{ki}} \bar{\sigma}_i, \end{aligned}$$

так что (34, 3) принимает такой вид:

$$\bar{\sigma}_k = \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ (\bar{\mathcal{E}}_{\theta})_{\theta = \theta_k} + \frac{2\pi}{\sin \pi \nu} \sum_{i \neq k} \bar{\sigma}_i \sin(\pi - \theta_{ki})^{\nu} \right\}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (34, 5)$$

Таким образом, система (33, 6) исходных интегральных уравнений для плотностей σ_k превратилась просто в систему линейных алгебраических уравнений для их преобразованных значений $\bar{\sigma}_k$. Решая эту последнюю систему относительно величин $\bar{\sigma}_k$, найдем из нее все $\bar{\sigma}_k$ как функции от ν , т. е.

$$\bar{\sigma}_k = f_k(\nu), \quad (34, 6)$$

и останется найти по этим $\bar{\sigma}_k$ сами величины $\sigma_k(s)$. Это может быть сделано при помощи второй теоремы обращения Римана — Меллина, доказательство которой будет дано в следующем параграфе, и которая является обратной теоремой по отношению к данной ранее в § 23 первой теореме Римана — Меллина. Пока же отметим еще, что в случае, когда внешнее поле создается одной заряженной нитью, т. е. когда $\bar{\mathcal{E}}_{\theta}$ дается формулой (33, 9), а $\sigma_k(s)$ — формулой (33, 10), для преобразованного внешнего поля $(\bar{\mathcal{E}})_{\theta = \theta_k}$ в формуле (34, 5) найдем, пользуясь формулой (34, 4) и считая пока угол θ в формуле (33, 9) произвольным:²

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{\theta} &= 2e'a \sin(\theta - \gamma) \int_0^{\infty} \frac{s^{\nu} ds}{a^2 - 2as \cos(\theta - \gamma) + s^2} = \\ &= 2e'a^{\nu} \sin(\theta - \gamma) \cdot \frac{\pi \sin(\pi - |\theta - \gamma|)^{\nu}}{\sin \pi \nu \cdot \sin |\theta - \gamma|} \end{aligned} \quad (34, 7)$$

[заметим, что здесь должно быть именно $|\theta - \gamma|$, а не просто $(\theta - \gamma)$, ибо в (34, 4) угол θ_{ki} должен лежать в пределах $0 < \theta_{ki} < 2\pi$ и не может быть отрицательным].

¹ См., например: Уиттекер и Ватсон, т. I, стр. 159, пример 4.

² Т. е. мы ищем сперва значение $\bar{\mathcal{E}}$ вдоль произвольного радиуса, идущего из начала координат.

Введем, подобно тому, как это было сделано в формуле (33, 1), такой угол, χ_γ что

$$\chi_\gamma = \begin{cases} \theta - \gamma & \text{при } \theta > \gamma \\ \theta - \gamma + 2\pi & \text{при } \theta < \gamma \end{cases}, \quad (0 < \chi_\gamma < 2\pi). \quad (34, 8)$$

Это не что иное, как угол между радиусом-вектором Oe' , идущим из начала координат к местоположению заряда e' , и радиусом-вектором OM , составляющим с полярной осью угол θ (рис. 51а и 51б), причем угол этот отсчитывается против часовой стрелки от Oe' до первой встречи с OM .

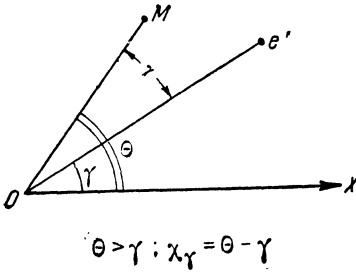


Рис. 51а.

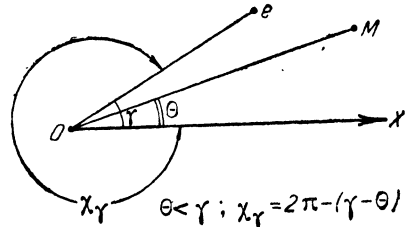


Рис. 51б.

Так как теперь при $\theta > \gamma$ будет

$$|\theta - \gamma| = \chi_\gamma, \text{ а при } \theta < \gamma \rightarrow |\theta - \gamma| = -(\theta - \gamma) = 2\pi - \chi_\gamma,$$

то в первом случае

$$\frac{\sin(\theta - \gamma) \sin(\pi - |\theta - \gamma|)^\nu}{\sin|\theta - \gamma|} = \sin(\pi - [\theta - \gamma])^\nu = \sin(\pi - \chi_\gamma)^\nu,$$

а во втором

$$\frac{\sin(\theta - \gamma) \sin(\pi - |\theta - \gamma|)^\nu}{\sin|\theta - \gamma|} = \frac{\sin(\gamma - 2\pi) \sin(-\pi + \gamma)^\nu}{\sin(2\pi - \chi_\gamma)} = \sin(\pi - \chi_\gamma)^\nu,$$

т. е. в обоих случаях формула (34, 7) приобретает единообразный вид, именно:

$$\bar{\mathcal{E}}_\theta = \frac{2\pi e' a^\nu \sin(\pi - \chi_\gamma)^\nu}{\sin \pi \nu}. \quad (34, 9)$$

Формула (34, 5) переходит в данном случае в такую:

$$\bar{\sigma}_k = \frac{a_k}{\sin \pi \nu} \left\{ e' a^\nu \sin(\pi - \theta_{k\gamma})^\nu + \sum_{i \neq k} \bar{\sigma}_i \sin(\pi - \theta_{ki})^\nu \right\}, \quad (34, 10)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

причем, в соответствии с (34, 8) положено:

$$\theta_{k\gamma} = \begin{cases} \theta_k - \gamma & \text{при } \theta_k > \gamma, \\ \theta_k - \gamma + 2\pi & \text{при } \theta_k < \gamma, \end{cases} \quad (0 < \theta_{k\gamma} < 2\pi). \quad (34, 11)$$

Формула (34, 10) и будет основным предметом нашего рассмотрения в дальнейшем.

34. 2. Заметим еще, что преобразованное значение радиальной компоненты \mathfrak{E}_r того же первичного поля, равной:

$$\mathfrak{E}_r = - \frac{d\varphi_a}{dr} = \frac{2e' [r - a \cos(\theta - \gamma)]}{r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + a^2}, \tag{34,12}$$

вычисляется аналогичным образом и равно:¹

$$\mathfrak{E}_r = 2e' \int_0^\infty \frac{|r - a \cos(\theta - \gamma)| r^\nu dr}{r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + a^2} = - \frac{2\pi e' a^\nu \cos(\pi - \gamma)^\nu}{\sin \pi \nu}. \tag{34,13}$$

§ 35. Вторая теорема обращения Римана — Меллина

35. 1. Пусть $v = u + it$ — комплексная переменная, и пусть внутри полосы $a < u < b$ функция $F(v)$ регулярна и $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u + it)| dt$ сходится, а в каждой более узкой полосе $a + \delta \leq u \leq b - \delta$, где $\delta > 0$ — произвольно малое постоянное число, функция $F(v)$ равномерно стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$.

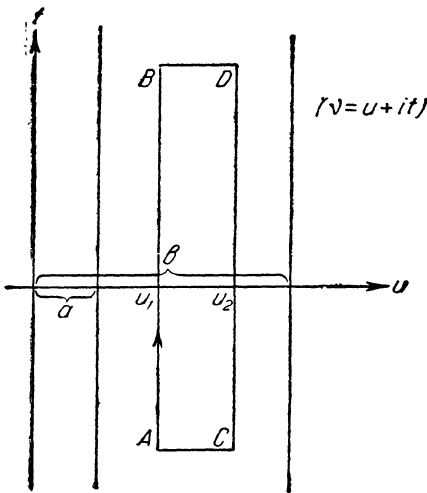


Рис. 52.

Тогда, если положить для вещественных положительных s и фиксированного $u = u_1$:

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} s^{-v-1} F(v) dv, \tag{35,1}$$

$(s > 0),$

то внутри полосы $a < u < b$ выполняется равенство:

$$F(v) = \int_0^\infty s^\nu \psi(s) ds. \tag{35,2}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим, прежде всего, интеграл $I = \frac{1}{2\pi i} \int s^{-(v+1)} F(v) dv$, взятый по прямоугольнику $ABDCA$ (рис. 52) с вершинами в точках $u_1 - iT, u_1 + iT, u_2 + iT, u_2 - iT$, где $a < u_1 < u_2 < b$ и $T \rightarrow \infty$. Имеем:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{u_1 - iT}^{u_1 + iT} s^{-(v+1)} F(v) dv + \int_{u_1 + iT}^{u_2 + iT} s^{-(u+1) - iT} F(u + iT) du + \right. \\ \left. + \int_{u_2 + iT}^{u_2 - iT} s^{-(v+1)} F(v) dv + \int_{u_2 - iT}^{u_1 - iT} s^{-(u+1) + iT} F(u - iT) du \right\} = 0, \tag{35,3}$$

¹ Ср. также получение формулы (41,8) для \overline{E}_r на стр. 308—309, исходя из (41,3).

последнее из-за регулярности подинтегральной функции в рассматриваемом прямоугольнике.

Будем стремить T к бесконечности. Тогда интегралы

$$\int_{u_1+iT}^{u_2+iT} s^{-(u+1)-iT} F(u+iT) du, \quad \int_{u_2-iT}^{u_1-iT} s^{-(u+1)+iT} F(u-iT) du,$$

в которых модули функций $F(u+iT)$ и $F(u-iT)$ стремятся, согласно предположению, к нулю, а модули величин $s^{-(u+1)\pm iT}$, равные $s^{-(u+1)}$, сохраняют конечные значения, так же, как длина пути интегрирования, равная $|u_1-u_2|$, стремятся оба к нулю. (35,3) дает поэтому при $T=\infty$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{u_1-i\infty}^{u_1+i\infty} s^{-(v+1)} F(v) dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_2-i\infty}^{u_2+i\infty} s^{-(v+1)} F(v) dv = \psi(s), \quad (35,4)$$

(последнее из (35,1)). Это показывает, что прямую интегрирования в (35,1) можно произвольно перемещать внутри рассматриваемой полосы.

Основываясь на этом, можно следующим образом доказать справедливость формулы (35,2). Выберем два числа u_1 и u_2 , удовлетворяющие условиям $a < u_1 < \operatorname{Re}(v) = u < u_2 < b$, и перепишем входящий в (35,2) интеграл так:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^v \psi(s) ds &= \int_0^1 s^v \psi(s) ds + \int_1^\infty s^v \psi(s) ds = \\ &= \int_0^1 s^v ds \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1-i\infty}^{u_1+i\infty} s^{-(v_1+1)} F(v_1) dv_1 + \\ &+ \int_1^\infty s^v ds \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{u_2-i\infty}^{u_2+i\infty} s^{-(v_2+1)} F(v_2) dv_2 \equiv M_1 + M_2. \end{aligned} \quad (35,5)$$

В последних двух интегралах можно изменить порядок интегрирований, так как имеет место абсолютная сходимость их, что видно из оценок:

$$\begin{aligned} |M_1| &< \int_0^1 s^u ds \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-(u_1+1)} |F(u_1+it)| dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u_1+it)| dt \right\} \cdot \int_0^1 s^{(u-u_1)-1} ds = \frac{1}{2\pi(u-u_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u_1+it)| dt, \\ |M_2| &< \int_1^\infty s^u ds \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-(u_2+1)} |F(u_2+it)| dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(u_2-u)} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u_2+it)| dt. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\int_0^1 s^\nu ds \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} s^{-(\nu_1 + 1)} F(\nu_1) d\nu_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} F(\nu_1) d\nu_1 \int_0^1 s^{(\nu - \nu_1) - 1} ds = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} \frac{F(\nu_1) d\nu_1}{\nu - \nu_1}$$

и

$$\int_1^\infty s^\nu ds \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{u_2 - i\infty}^{u_2 + i\infty} s^{-(\nu_2 + 1)} F(\nu_2) d\nu_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_2 - i\infty}^{u_2 + i\infty} F(\nu_2) d\nu_2 \int_1^\infty s^{-(\nu_2 - \nu) - 1} ds = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_2 - i\infty}^{u_2 + i\infty} \frac{F(\nu_2) d\nu_2}{\nu_2 - \nu}$$

и (35,5) дает:

$$\int_0^\infty s^\nu \psi(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_2 - i\infty}^{u_2 + i\infty} \frac{F(\nu_2) d\nu_2}{\nu_2 - \nu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 + i\infty}^{u_1 - i\infty} \frac{F(\nu_1) d\nu_1}{\nu_1 - \nu}. \quad (35,6)$$

Так как справа можно прибавить два равных нулю интеграла по бесконечно-удаленным горизонтальным отрезкам, соединяющим пути $(u_1 - i\infty, u_1 + i\infty)$ и $(u_2 - i\infty, u_2 + i\infty)$, именно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{u_2 + i\infty}^{u_1 + i\infty} \frac{F(\nu_2) d\nu_2}{\nu_2 - \nu} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 - i\infty}^{u_2 - i\infty} \frac{F(\nu_1) d\nu_1}{\nu_1 - \nu},$$

которые дополняют правую часть равенства (35,6) до интеграла по замкнутому контуру от функции

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{F(z)}{z - \nu},$$

а этот последний интеграл равен, согласно основной формуле Коши, $F(\nu)$, то (35,5) принимает вид:

$$\int_0^\infty s^\nu \psi(s) ds = F(\nu),$$

т. е. действительно (35,1) удовлетворяет при указанных условиях соотношению (35,2).

35. 2. Пример. Пусть $F(\nu) = \frac{1}{\nu^2}$. Тогда $F(\nu)$ регулярна в полосе $\delta \leq u < \infty$, где $\delta > 0$ и произвольно, $|F(u + it)| \rightarrow 0$ равномерно при $|t| \rightarrow \infty$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u + it)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|u + it|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{u^2 + t^2} = \frac{\pi}{u} \leq \frac{\pi}{\delta}$$

имеет конечное значение. Поэтому внутри этой полосы должно иметь место при $s > 0$ обращение:

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} \frac{s^{-(\nu + 1)}}{\nu^2} d\nu = \frac{1}{2\pi i s} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} \frac{e^{-\nu(\lg s)} d\nu}{\nu^2}, \quad \left. \vphantom{\psi(s)} \right\} \quad (35,7)$$

($u_1 > \delta > 0$).

Здесь надо различать два случая.

1) $\lg s > 0$, т. е. $s > 1$.

Тогда дополняя путь интегрирования дугой бесконечно-большого круга вправо и замечая, что интеграл по этой дуге равен нулю, и что внутри получившегося контура нет особых точек подынтегральной функции, видим, что как получившийся после добавления дуги, так, стало быть, и исходный интеграл равны нулю, т. е. что

$$\psi(s) = 0 \quad \text{при } s > 1. \quad (35, 8)$$

2) $\lg s < 0$, т. е. $s < 1$.

Дополняя аналогичной дугой влево, замечаем, что интеграл равен вычету подынтегральной функции в точке $v = 0$, деленному на s . Этот вычет определяется из разложения:

$$\frac{e^{-v(\lg s)}}{v^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{(\lg s)}{v} + \dots,$$

т. е. он равен $(-\lg s)$. Итак:

$$\psi(s) = -\frac{\lg s}{s} \quad \text{при } s < 1. \quad (35, 9)$$

Объединяя результаты, получаем:

$$\psi(s) = \begin{cases} -\frac{\lg s}{s} & \text{при } s < 1; \\ 0 & \text{при } s > 1. \end{cases} \quad (35, 10)$$

§ 36. Применение второй теоремы обращения Римана—Меллина к нахождению плотностей $\sigma(s)$ по их преобразованным значениям $\bar{\sigma}(v)$

36.1. Применим только что доказанную теорему обращения к задаче, рассматривавшейся в § 34.

Замечая, что функция $F(v) = \int_0^{\infty} s^v \psi(s) ds$ — это, по нашей терминологии, преобразованная $\bar{\psi}(v)$ от функции $\psi(s)$, и применяя теорему к найденным выше функциям $\bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_k(v)$, ($k = 1, 2, \dots, n$), [ср. (34,6)], видим, что если они в некоторой полосе $a < \operatorname{Re}(v) < b$ удовлетворяют всем условиям, наложенным выше на $F(v)$, то сами функции $\sigma_k(s)$ находятся, согласно (35,1), по формулам:

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-ico}^{u+ico} s^{-(v+1)} \bar{\sigma}_k(v) dv, \quad (a < \operatorname{Re}(v) < b), \quad \left. \begin{array}{l} \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n). \end{array} \right\} \quad (36, 1)$$

Но, как уже указывалось выше, если только полное количество первичных (истинных) зарядов, внесенных в систему извне и приходящихся на единицу длины оси ее, конечно, то все величины $\bar{\sigma}_k(0) = \int_0^{\infty} \sigma_k(s) ds$ должны, во всяком случае, иметь одновременно конеч-

ные значения, ибо они представляют собой просто выделившиеся на соответствующих поверхностях раздела поляризационные (свободные) заряды, которые могут связывать только часть линий индукции, исходящих из первичных зарядов, и которые поэтому меньше суммы этих последних. Более того, ясно, что должны иметь конечные значения также и интегралы от абсолютных значений плотностей

$\sigma_k(s)$, т. е. величины $A_k = \int_0^{\infty} |\sigma_k(s)| ds$, равные сумме абсолютных

величин выделившихся на OA_k поляризационных зарядов, ибо из самого физического существа рассматриваемой задачи очевидно, что должны быть конечными в отдельности количества связанных на этой поверхности положительных и отрицательных поляризационных зарядов, а стало быть, и равная A_k сумма их абсолютных величин. Это показывает, что при $Re(\nu) = 0$ должен сходиться абсолютно так же интеграл

$$\bar{\sigma}_k(\nu) = \int_0^{\infty} \sigma_k(s) s^{\nu} ds,$$

т. е. что все функции $\bar{\sigma}_k(\nu)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, имеют на плоскости ν определенные конечные значения во всех точках мнимой оси.

Если функции $\sigma_k(\nu)$ сверх того регулярны внутри некоторой полосы сколь угодно малой, но конечной ширины $-\delta < Re(\nu) < +\delta$, где $\delta > 0$, примыкающей к мнимой оси (что в конкретных случаях всегда легко установить), и если внутри этой полосы все $\bar{\sigma}_k(\nu)$ равномерно стремятся к нулю при $Im(\nu) \rightarrow \pm\infty$, а интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{\sigma}_k(u + it)| dt$ имеют во всей полосе конечные значения, то выполнены все условия для применимости второй теоремы обращения Римана — Меллина, и для $\sigma_k(s)$ получаем формулы:

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-(\nu+1)} \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (36, 2)$$

или, что то же:

$$s\sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-\nu} \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu. \quad (36, 3)$$

С помощью этих формул поставленная выше задача полностью решается, притом в квадратурах.

36.2. Рассмотрим более подробно вопрос о решении „ключевой“ задачи, когда величины $\bar{\sigma}_k(\nu)$ определяются системой уравнений (34, 10).

Решая эту систему относительно $\bar{\sigma}_k(v)$, находим, полагая $\pi - \theta_{ki} = \psi_{ki}$ и $\pi - \theta_{k\gamma} = \psi_{k\gamma}$:

$$\bar{\sigma}_k(v) = e^v a^v \frac{M_k(v)}{\Delta(v)}, \tag{36, 4}$$

где $\Delta(v)$ — определитель системы, равный

$$\Delta(v) = \begin{vmatrix} \sin \pi v, & -\alpha_1 \sin \psi_{12} v, & -\alpha_1 \sin \psi_{13} v, \dots, & -\alpha_1 \sin \psi_{1n} v \\ -\alpha_2 \sin \psi_{21} v, & \sin \pi v & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{36, 5}$$

а $M_k(v)$ — определитель, получаемый из $\Delta(v)$ заменой элементов k -ого столбца, равных $(-\alpha_i \sin \psi_{ik} v)$, соответственно через $(\alpha_i \sin \psi_{i\gamma} v)$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Особыми точками функций $\bar{\sigma}_k(v)$ могут быть только корни знаменателя $\Delta(v)$, т. е. только значения $v = v_m$, удовлетворяющие уравнению $\Delta(v_m) = 0$. Они соответствуют полюсам функций $\bar{\sigma}_k(v)$.

Так как, согласно сказанному выше, функции $\bar{\sigma}_k(v)$ должны оставаться конечными на всей мнимой оси, т. е. так как они на этой оси никаких особенностей иметь не могут, то нас могут интересовать только комплексные корни уравнения $\Delta(v) = 0$ с отличной от нуля вещественной частью.

Заметим теперь, что так как $\Delta(-v) = (-1)^n \Delta(v)$, то уравнению $\Delta(v) = 0$ удовлетворяет, наряду с некоторым корнем v_m , также и $v'_m = -v_m$, так что мы можем ограничиться рассмотрением корней с положительной вещественной частью. Обозначая при этом через δ ту из них, которая меньше, или, во всяком случае, не больше вещественных частей всех остальных корней, видим, что все функции $\bar{\sigma}_k(v)$ голоморфны внутри полосы $-\delta < Re(v) < +\delta$.

Далее, легко видеть, что все $|\bar{\sigma}_k(u + it)|$ равномерно стремятся к нулю при фиксированном u и $t \rightarrow \pm\infty$ во всякой полосе $-(\delta - \epsilon) < Re(v) < +(\delta - \epsilon)$, где ϵ — фиксированное число, большее нуля и меньшее δ . Действительно, так как при комплексных значениях $v = u + it$ и $t \rightarrow \pm\infty$ модули всех величин вида $\sin mv$, где m — вещественное число, асимптотически стремятся к значениям $\frac{1}{2} e^{|mt|}$, и так как все величины $|\psi_{ki}|$ и $|\psi_{k\gamma}|$ меньше π (ибо $0 < \theta_{ki} < 2\pi$ и $0 < \theta_{k\gamma} < 2\pi$), то, при $t \rightarrow \pm\infty$, $|\Delta(v)| = |\Delta(u + it)| \rightarrow |\sin^n \pi v| \rightarrow \frac{1}{2^n} e^{n\pi |t|}$. В самом деле всякий определитель n -ого порядка, составленный из каких-либо элементов a_{ik} , т. е.

$$A = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

равен сумме взятых со знаками (\pm) произведений вида $a_{ik} \cdot a_{i'k'} \cdot a_{i''k''} \dots$, получаемых перемножением n различных элементов, причем все i, i', \dots между собой различны, и все k, k', \dots — тоже, и общее число членов суммы равно $n!$ Так как в нашем случае $a_{ik} \sim \sim \sin \psi_{ik} \nu$ (это верно и при $i=k$, если положить $\psi_{kk} = \pi$), то при $t \rightarrow \pm \infty$ модули отдельных произведений будут $|a_{ik} a_{i'k'} a_{i''k''} \dots| \sim \sim e^{(|\psi_{ik}| + |\psi_{i'k'}| + |\psi_{i''k''}| + \dots) \nu}$, причем сумма $(|\psi_{ik}| + |\psi_{i'k'}| + |\psi_{i''k''}| + \dots)$ равна $n\pi$, если $i=k, i'=k', i''=k'',$ т. е. если рассматривается произведение диагональных членов определителя, и меньше $n\pi$ во всех других случаях. Отсюда видно, что при $t \rightarrow \pm \infty$ произведение диагональных членов является главным членом, из чего и вытекает данное выше асимптотическое значение $|\Delta(u+it)| \approx \frac{1}{2^n} e^{n\pi |t|}$.

Так как по аналогичным соображениям $|M_k(\nu)|$ всегда растет при $|t| \rightarrow \infty$ тоже экспоненциально, но медленнее, чем $e^{n\pi |t|}$, ибо там ни в одном из произведений сумма показателей не может достигать $n\pi |t|$, и так как $|a^\nu| = |a^{u+it}| = a^u$ — это конечная величина, то $|\bar{\sigma}_k(u+it)|_{|t| \rightarrow \infty} \sim e^{-b|t|}$, где $b > 0$ — некоторая фиксированная положительная постоянная. Тем самым показано, что при $t \rightarrow \pm \infty$ внутри рассматриваемой полосы все функции $\bar{\sigma}_k(\nu)$ равномерно стремятся к нулю и что все интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{\sigma}_k(u+it)| dt$ там сходятся. Отсюда непосредственно вытекает применимость формулы (36, 2) для решения ключевой задачи.

36.3. Остановимся еще на вопросе о фактическом вычислении комплексных интегралов (36, 2).

Нетрудно показать, что в случае ключевой задачи, когда $\bar{\sigma}_k(\nu)$ дается формулой (36, 4) и является мероморфной функцией от ν , вычисление интеграла

$$\sigma_k(s) = \frac{e'}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^\nu \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} d\nu \quad (36, 6)$$

может быть, как правило, сведено к нахождению суммы вычетов подинтегральной функции в правой (при $\frac{a}{s} < 1$) или в левой (при $\frac{a}{s} > 1$) полуплоскости ν .

Действительно, пусть, например, $\frac{a}{s} < 1$. Особыми точками подинтегральной функции в (36, 6) являются корни ν_m уравнения $\Delta(\nu) = 0$.¹ Обозначим модули этих корней, расположенные в порядке возрастания их, через r_1, r_2, r_3, \dots ,² так что $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$,³ и выберем беско-

¹ Кроме $\nu = 0$.

² Одному и тому же модулю r_k может при этом соответствовать не один корень, а несколько разных корней.

³ Из приводимых ниже примеров будет видно, что уравнение $\Delta(\nu) = 0$ имеет всегда бесчисленное множество корней, причем $(r_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$.

нечную последовательность чисел R_n , $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$, лежащих в интервалах $r_n < R_n < r_{n+1}$ и отстоящих на конечное расстояние от их концов. Примем эти R_n за радиусы бесконечной серии дуг кругов, описанных из начала координат O (рис. 53) и рассмотрим интеграл

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i s} \int_{ABCEA} s^{-\nu} \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu = \frac{e'}{2\pi i s} \int_{ABCEA} \left(\frac{a}{s}\right)^\nu \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} d\nu, \quad (36, 7)$$

взятый по изображенному на рис. 53 контуру $ABCEA$, т. е. по отрезку AB мнимой оси и по замыкающей контур дуге $BCEA$ круга радиуса R_n . Интеграл этот равен взятой со знаком минус и умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подинтегральной функции в полюсах ее, попадающих внутрь контура.

Покажем, что при $R_n \rightarrow \infty$ интеграл по дуге стремится к нулю. Для этого выделим из дуги $AECB$ отрезок CE , соответствующий таким углом θ , что $\varepsilon R_n^{-1/2} \leq \theta \leq +\varepsilon R_n^{-1/2}$, где ε — сколь угодно малое, но конечное положительное число, удовлетворяющее во всяком случае условию, что $\varepsilon/\sqrt{R_n} < \pi/2$, и оценим отдельно интегралы по CE и по остальным частям дуги.

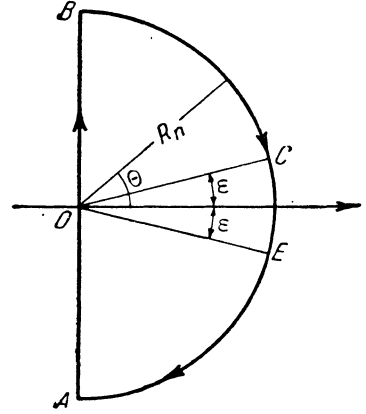


Рис. 53.

На дугах BC и AE , где $|Im(\nu)| = |t| = R_n |\sin \theta| \geq R_n \sin(\varepsilon R_n^{-1/2})$ стремится при $R_n \rightarrow \infty$ к бесконечности, подинтегральная функция, согласно сказанному в п. 36.2, будет величиной порядка $e^{-b|t|} \leq e^{-bR_n \sin(\varepsilon R_n^{-1/2})} \approx e^{-b\varepsilon \sqrt{R_n}}$, так что, по известной лемме Дарбу, интеграл по этим дугам, суммарная длина которых равна $(\pi - 2\varepsilon)R_n < \pi R_n$, не будет превосходить по модулю величины порядка $R_n e^{-b\varepsilon \sqrt{R_n}}$, стремящейся к нулю при $R_n \rightarrow \infty$.

Что касается дуги CE , то на ней, как нетрудно видеть, отношение $\left| \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} \right|$ остается меньше некоторой ограниченной постоянной, умноженной на $e^{n\pi R_n \sin \varepsilon R_n^{-1/2}} / |\Delta(\nu)|_{\min} \approx e^{n\pi \varepsilon \sqrt{R_n}} / |\Delta(\nu)|_{\min}$, где $|\Delta(\nu)|_{\min}$ — минимальное значение модуля $\Delta(\nu)$ на дуге CE .

Действительно, $|M_k(\nu)|$, как уже указывалось выше, растет с возрастанием $|t|$ медленнее, чем произведение из $e^{n\pi|t|}$ на некоторую ограниченную постоянную. Так как в то же время на дуге CE $\left| \left(\frac{a}{s}\right)^\nu \right| \leq \left(\frac{a}{s}\right)^{R_n \cos \varepsilon R_n^{-1/2}} \approx \left(\frac{a}{s}\right)^{R_n} = e^{-(\lg \frac{s}{a}) R_n}$, то вся подинтегральная функция на CE имеет порядок, меньший, чем $e^{-(\lg \frac{s}{a}) \cdot R_n + n\pi \varepsilon \sqrt{R_n}} / |\Delta(\nu)|_{\min}$, а интеграл от нее по отрезку дуги CE , равному $2\varepsilon \sqrt{R_n}$ будет поряд-

ка не выше, чем $\sqrt{R_n} e^{-\left(\lg \frac{s}{a}\right) R_n + n\pi e \sqrt{R_n}} / |\Delta(v)|_{\min.} \equiv I_n$, т. е. он заведомо стремится к нулю при $R_n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Мы не будем здесь оценивать в общем виде величину этого отношения, поскольку это потребовало бы специального исследования. Заметим лишь, что, так как все числа R_n могут выбираться произвольно, притом независимо друг от друга, внутри интервалов (r_n, r_{n+1}) , то, как правило, возможно их выбрать так, чтобы значения $|\Delta(v)|_{\min.}$ на соответствующих дугах все были одновременно больше некоторого фиксированного числа a , не зависящего от номера дуги.¹ При этом, во всяком случае $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, т. е. интеграл по дуге CE обращается в пределе в нуль.

При указанных условиях интеграл по дуге $AECB$ действительно стремится к нулю при $R_n \rightarrow \infty$, а так как при этом интеграл по AB переходит в интеграл (36, 6), а дуга $AECB$ охватывает всю правую полуплоскость, то получается, если обозначить через $(a_{-1})_m$ вычет подинтегральной функции в точке v_m :

$$\sigma_k(s) = -\frac{e'}{s} \sum_{(m)} (a_{-1})_m, \quad (36, 8)$$

где суммирование распространяется на все вычеты подинтегральной функции, лежащие в правой полуплоскости.

Совершенно аналогичным образом доказывается, что интеграл (36, 6) при $\left(\frac{s}{a}\right) > 1$ равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции в левой полуплоскости.²

Полученные формулы дают полное решение поставленной в § 33 задачи. Из них, в частности, следует, что нахождение решения ключевой задачи, — а тем самым, как указывалось выше, и общей задачи, — требует в каждом конкретном случае только нахождения корней уравнения $\Delta(v) = 0$ и вычисления вычетов подинтегральной функции (36, 6) в соответствующих точках. В следующих параграфах мы дадим несколько примеров, имеющих целью иллюстрировать изложенные здесь общие соображения.

§ 37. Две среды с прямоугольной поверхностью раздела

37.1. В качестве первого примера рассмотрим ключевую задачу для случая двух различных сред ϵ_1 и ϵ_2 с прямоугольной поверхностью раздела (рис. 54), причем будем предполагать, что первичное поле создается свободным зарядом e' , находящимся в точке с координатами (a, γ) .³

¹ Это легко проверить на всех приводимых ниже примерах.

² Ср. также, по этому поводу, вторую формулу (57, 16) для $\sigma_k(s)$ в § 57

³ Предполагаем, что эта точка не лежит на поверхности раздела сред.

Так как в данном случае $n=2$, $\theta_1=0$, $\theta_2=\frac{\pi}{2}$, и так как, согласно (33,1),

$$\theta_{12}=\theta_1-\theta_2+2\pi \cdot 2\pi-\frac{\pi}{2}, \quad \theta_{21}=\theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{2},$$

то уравнения (34,10) принимают теперь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \frac{\alpha}{\sin \pi\nu} \left\{ e' a' \sin \lambda_1 \nu + \sin \frac{\pi\nu}{2} \cdot \bar{\sigma}_2 \right\}, \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{\alpha}{\sin \pi\nu} \left\{ e' a' \sin \lambda_2 \nu + \sin \frac{\pi\nu}{2} \cdot \bar{\sigma}_1 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (37, 1)$$

причем положено, для краткости,

$$\alpha = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad (37, 2)$$

$$\begin{aligned} \pi - \theta_{1\gamma} &= -(\pi - \gamma) = -\lambda_1, \quad \pi - \theta_{2\gamma} = +\lambda_2 = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \gamma & \text{при } \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ -3\pi/2 + \gamma & \text{при } \gamma > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (37, 3)$$

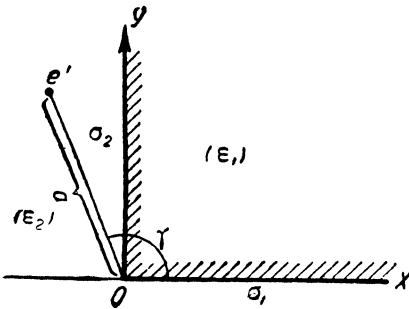


Рис. 54.

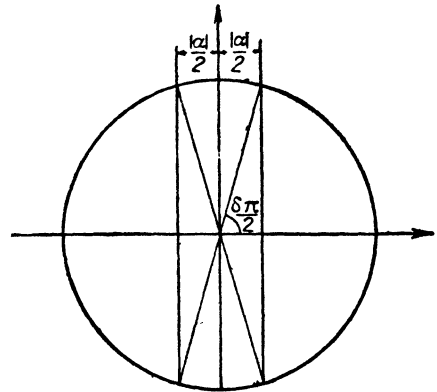


Рис. 55.

Решая систему уравнений (37, 1) относительно $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$, находим:

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\nu) = \frac{ae'a' \left[\sin \lambda_1 \nu \cdot \cos \frac{\pi\nu}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \lambda_2 \nu \right]}{2 \sin \frac{\pi\nu}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi\nu}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]}, \quad (37, 4)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\nu) = \frac{ae'a' \left[\sin \lambda_2 \nu \cos \frac{\pi\nu}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \lambda_1 \nu \right]}{2 \sin \frac{\pi\nu}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi\nu}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]}. \quad (37, 5)$$

37.2. Найдем, прежде всего, особые точки функций $\bar{\sigma}_1(\nu)$ и $\bar{\sigma}_2(\nu)$. Таковыми могут быть, очевидно, только корни знаменателей в формулах (37,4) и (37,5), т. е. корни одного из уравнений

$$\sin \frac{\pi\nu}{2} = 0 \quad (37, 6)$$

или

$$\cos^2 \frac{\pi\nu}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = 0, \quad (37, 7)$$

из которых последнее распадается на два:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi \nu}{2} - \frac{a}{2} &= 0, \\ \cos \frac{\pi \nu}{2} + \frac{a}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37.8)$$

Как нетрудно убедиться, все эти особые точки — это простые полюса функций $\bar{\sigma}_1(\nu)$ и $\bar{\sigma}_2(\nu)$, причем точка $\nu=0$ не является особой.

Обозначим через δ наименьший положительный корень уравнения $\cos \frac{\pi \nu}{2} = \frac{|a|}{2}$, так что

$$\cos \frac{\pi \delta}{2} = \frac{|a|}{2}. \quad (37.9)$$

Тогда корни уравнения (37,7), т. е. корни пары уравнений (37,8), определяются из соотношения (см. рис. 55):

$$\frac{\pi \nu}{2} = \pm \frac{\pi \delta}{2} + k\pi, \text{ т. е. } \nu = 2k \pm \delta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

так что получается две группы корней:

$$\nu_k^{(1)} = 2k + \delta, \quad (37.10)$$

$$\nu_k^{(2)} = 2k - \delta, \quad (37.11)$$

где k — любое целое число или нуль.

Что касается уравнения (37,6), то корни его суть

$$\nu_m = 2m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (37.12)$$

причем корень $\nu_0 = 0$, как соответствующий обыкновенной точке функций $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$, нас здесь не интересует.

Замечая, что

$$0 < \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

видим, что должно быть

$$1 > \delta \geq \frac{2}{3}, \quad (37.13)$$

так что $\bar{\sigma}_1(\nu)$ и $\bar{\sigma}_2(\nu)$ голоморфны внутри полосы

$$-\delta < \operatorname{Re}(\nu) < +\delta.$$

Из этого и из того, что говорилось выше в п. п. 36.2 и 36.3, непосредственно вытекает, что выполнены все предпосылки для возможности применения формулы обращения (36,2). Подставляя в нее значения $\bar{\sigma}_1(\nu)$ и $\bar{\sigma}_2(\nu)$ из (37,4) и (37,5), находим, поэтому:

$$\sigma_1(s) = \frac{ae'}{4\pi is} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^\nu \frac{\left[\sin \lambda_1 \nu \cos \frac{\pi \nu}{2} + \frac{a}{2} \sin \lambda_2 \nu\right]}{\sin \frac{\pi \nu}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi \nu}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]} d\nu, \quad (37.14)$$

и аналогичное выражение для σ_2 , получаемое из (37,14) перестановкой λ_1 и λ_2 .

37.3. Вычислим интеграл (37,14), пользуясь указанным в п. 36.3 общим методом, т. е. выражая его через сумму вычетов подинтегральной функции в правой (при $\frac{a}{s} < 1$) или в левой (при $\frac{a}{s} > 1$) полуплоскости ν .

Пусть для определенности $s > a$, так что $\sigma_1(s)$ и $\sigma_2(s)$ даются формулами типа (36, 8), например:

$$\sigma_1(s) = -\frac{1}{s} \sum_{(\nu)} (a_{-1})_{\nu}, \quad (37,15)$$

где суммирование распространяется на все вычеты $(a_{-1})_{\nu}$ функции $\left(\frac{a}{s}\right)^{\nu} \sigma_1(\nu)$ в полюсах ее ν , лежащих в правой полуплоскости.

Определим эти вычеты. Особыми точками подинтегральной функции являются, как уже было указано выше, во-первых, лежащие в правой полуплоскости корни уравнения $\sin \frac{\pi \nu}{2} = 0$, именно, значения $\nu_m = 2m$ при $m = 1, 2, 3, \dots$, и далее значения

$$\nu_k^{(1)} = 2k + \delta \text{ при } k \geq 0 \text{ и } \nu_k^{(2)} = 2k - \delta \text{ при } k \geq 1,$$

соответствующие корням уравнения

$$\cos^2 \frac{\pi \nu}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0,$$

причем все эти корни простые (не кратные).

Искомые вычеты будут:

1) При $\nu_m = 2m$:

$$(a_{-1})_{\nu=2m} = \frac{ae'}{\pi} \left(\frac{a}{s}\right)^{2m} \frac{\left[\sin 2m\lambda_1 + (-1)^m \frac{a}{2} \sin 2m\lambda_2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]},$$

а так как из формул (37, 3) следует, что

$$\sin 2m\lambda_2 = (-1)^{m-1} \sin 2m\lambda_1, \text{ то}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_{-1})_{\nu=2m} = \frac{ae'}{\pi \left[1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]} \frac{\rho^2 \sin 2\lambda_1}{(1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4)}, \quad (37,16)$$

причем положено

$$a/s = \rho \quad (37,17)$$

и использована формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \sin ku = \frac{\xi \sin u}{1 - 2\xi \cos u + \xi^2}, \quad (|\xi| < 1), \quad (37,18)$$

являющаяся частным случаем более общей:¹

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sin (ka + \beta) &= \operatorname{Im} \left\{ e^{i\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (\xi e^{iu})^k \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\beta}}{1 - \xi e^{iu}} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\beta} (1 - \xi e^{-iu})}{1 - 2\xi \cos u + \xi^2} \right\} = \\ &= \frac{\sin \beta + \xi \sin (a - \beta)}{1 - 2\xi \cos u + \xi^2}. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \xi^k \sin(ku + \beta) = \frac{\xi \sin(u - \beta) + \sin \beta}{1 - 2\xi \cos u + \xi^2} =$$

$$= \sin \beta + \frac{\xi \sin(u + \beta) - \xi^2 \sin \beta}{1 - 2\xi \cos u + \xi^2}, \quad (|\xi| < 1). \quad (37, 19)$$

2) при $v_k^{(1)} = 2k + \delta$:

$$(a_{-1})_{v_k^{(1)} = 2k + \delta} = -\frac{ae'}{2\pi} \rho^{2k + \delta} \frac{\left[\sin \lambda_1 v_k^{(1)} \cos \frac{\pi v_k^{(1)}}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \lambda_2 v_k^{(1)} \right]}{\sin^2 \frac{\pi v_k^{(1)}}{2} \cdot \cos \frac{\pi v_k^{(1)}}{2}} =$$

$$= -\frac{ae'}{2\pi} \rho^{2k + \delta} \frac{[\sin(2k + \delta) \lambda_1 + \text{sign}(\alpha) \cdot (-1)^k \sin(2k + \delta) \lambda_2]}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]}, \quad (37, 20)$$

где $\text{sign}(\alpha)$ стоит вместо $\frac{|\alpha|}{\alpha}$ и обозначает, как это принято, знак величины α .

Суммируя по k от нуля до бесконечности с помощью формулы (37, 19), найдем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{-1})_{v_k^{(1)}} = -\frac{ae' \rho^\delta}{2\pi \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \left\{ \frac{\rho^2 \sin(2 - \delta) \lambda_1 + \sin \delta \lambda_1}{1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4} + \right.$$

$$\left. + \text{sign}(\alpha) \frac{\sin \delta \lambda_2 - \rho^2 \sin(2 - \delta) \lambda_2}{1 + 2\rho^2 \cos 2\lambda_2 + \rho^4} \right\} =$$

$$= -\frac{ae' \rho^\delta \{[\sin \delta \lambda_1 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_2] + \rho^2 [\sin(2 - \delta) \lambda_1 - \text{sign}(\alpha) \sin(2 - \delta) \lambda_2]\}}{2\pi \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] \cdot (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4)}, \quad (37, 21)$$

последнее ввиду того, что из (37, 3) получается как при $\gamma > \frac{\pi}{2}$, так и при $\gamma < \frac{\pi}{2}$, что

$$\cos 2\lambda_2 = \cos(\pi - 2\lambda_1) = -\cos 2\lambda_1.$$

3) При $v_k^{(2)} = 2k - \delta$, $k \geq 1$, получаем аналогичным образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{-1})_{v_k^{(2)}} = -\frac{ae' \rho^{2-\delta} [\sin(2-\delta) \lambda_1 - \text{sign}(\alpha) \sin(2-\delta) \lambda_2]}{2\pi \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] \cdot (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4)} -$$

$$-\frac{ae' \rho^{2-\delta} \rho^2 [\sin \delta \lambda_1 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_2]}{2\pi \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] \cdot (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4)}. \quad (37, 22)$$

Соединяя теперь суммы вычетов (37, 16), (37, 21) и (37, 22) и вводя результат в (37, 15), получаем искомое значение σ_1 :

$$\sigma_1(s) = -\frac{ae' \rho^2 \sin 2\lambda_1}{\pi s \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4)} +$$

$$+ \frac{ae'}{2\pi s \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_1 + \rho^4)} \{ \rho^\delta [(\sin \delta \lambda_1 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_2) +$$

$$+ \rho^2 (\sin(2 - \delta) \lambda_1 - \text{sign}(\alpha) \sin(2 - \delta) \lambda_2)] + \rho^{2-\delta} [(\sin(2 - \delta) \lambda_1 -$$

$$- \text{sign}(\alpha) \sin(2 - \delta) \lambda_2) + \rho^2 (\sin \delta \lambda_1 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_2)] \}. \quad (37, 23)$$

Заметим, что хотя это значение $\sigma_1(s)$ было получено в предположении, что $\rho = a/s < 1$, но найденная формула верна, по принципу аналитического продолжения, и при $\rho = a/s \geq 1$, т. е. формула (37, 23) дает значения $\sigma_1(s)$ при всех s в интервале $0 \leq s \leq \infty$.

Так как выражение для σ_2 отличается от такового для σ_1 , только тем, что λ_1 и λ_2 в них обменены местами, то из (37, 23) сразу получается и соответствующее выражение для σ_2 , именно:

$$\begin{aligned} \sigma_2(s) = & - \frac{ae' \rho^2 \sin 2\lambda_2}{\pi s \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_2 + \rho^4)} + \\ & + \frac{ae'}{2\pi s \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] (1 - 2\rho^2 \cos 2\lambda_2 + \rho^4)} \{ \rho^\delta [(\sin \delta \lambda_2 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_1) + \\ & + \rho^2 [\sin(2 - \delta) \lambda_2 - \text{sign}(\alpha) \sin(2 - \delta) \lambda_1]] + \rho^{2-\delta} [(\sin(2 - \delta) \lambda_2 - \\ & - \text{sign}(\alpha) \sin(2 - \delta) \lambda_1) + \rho^2 (\sin \delta \lambda_2 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_1)] \}, \end{aligned} \quad (37,24)$$

причем имеют место вытекающие из (37, 3) равенства:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\lambda_1 = \sin 2\lambda_2 = -\sin 2\gamma \\ \cos 2\lambda_1 = -\cos 2\lambda_2 = \cos 2\gamma \end{aligned} \right\}, \quad (37,25)$$

верные при любом γ .

Таким образом, мы нашли распределение поляризационной плотности, а тем самым и решение всей электростатической задачи, в том случае, когда внешнее поле создается одной заряженной нитью.

Если вместо одной нити имеется любое „плоское“, т. е. независящее от z распределение зарядов,¹ то разбивая его, как уже указывалось выше, на бесконечно тонкие нити и пользуясь элементарными решениями (37, 23), (37, 24), сведем задачу к простому их наложению (интегрированию).

37.4. Посмотрим теперь какой вид принимает наше решение в том элементарно-разрешимом предельном случае, когда $\epsilon_2 = \infty$, что соответствует проводящей второй среде (см. рис. 56). При этом

$$\alpha = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = -1,$$

$$\text{sign}(\alpha) = -, \text{ так как } \frac{\alpha}{|\alpha|} = -1,$$

и так как теперь должно быть $\gamma < \frac{\pi}{2}$, то по формулам (37, 3) получаем:

$$\lambda_1 = \pi - \gamma, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

так что

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{3\pi}{2}. \quad (37, 26)$$

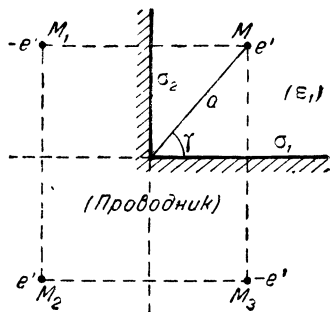


Рис. 56.

¹ Ось z считаем направленной параллельно заряженной нити.

Для δ находим теперь из уравнения (37, 9):

$$\cos \frac{\pi \delta}{2} = \frac{|\alpha|}{2} = \frac{1}{2},$$

откуда:

$$\delta = \frac{2}{3}. \tag{37, 27}$$

С помощью (37, 26), (37, 27) находим далее:

$$\left. \begin{aligned} \delta \lambda_2 &= \pi - \delta \lambda_1, \\ (2 - \delta) \lambda_2 &= 2\pi - (2 - \delta) \lambda_1, \end{aligned} \right\}$$

так что:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta \lambda_1 + \text{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_2 &= \sin \delta \lambda_1 - \sin \delta \lambda_2 = 0 \\ \sin (2 - \delta) \lambda_1 - \text{sign}(\alpha) \sin (2 - \delta) \lambda_2 &= \sin (2 - \delta) \lambda_1 + \sin (2 - \delta) \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\},$$

и фигурные скобки в формулах (37, 23) и (37, 24) обращаются в нуль. Окончательно получается, если принять во внимание, что в данном случае $e' = e/\epsilon_1$ и использовать соотношения (37, 25):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(s) &= - \frac{2e\rho^2 \sin 2\gamma}{\pi \epsilon_1 (1 - 2\rho^2 \cos 2\gamma + \rho^4)}, \\ \sigma_2(s) &= - \frac{2e\rho^2 \sin 2\gamma}{\pi \epsilon_1 (1 + 2\rho^2 \cos 2\gamma + \rho^4)}. \end{aligned} \right\} \tag{37, 28}$$

Это же решение получается обычным в этом случае элементарным путем, посредством метода отражения, причем поле в любой точке первой среды является наложением полей от четырех ниток с чередующимися по знаку зарядами $\pm e'$ в точках M, M_1, M_2, M_3 . Результат, естественно, совпадает с только что полученным, что становится особенно ясным, если переписать формулы (37, 28) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(s) &= - \frac{ea \sin \gamma}{\pi \epsilon_1 (a^2 - 2as \cos \gamma + s^2)} + \frac{ea \sin \gamma}{\pi \epsilon_1 (a^2 + 2as \cos \gamma + s^2)}, \\ \sigma_2(s) &= - \frac{ea \cos \gamma}{\pi \epsilon_1 (a^2 - 2as \sin \gamma + s^2)} + \frac{ea \cos \gamma}{\pi \epsilon_1 (a^2 + 2as \sin \gamma + s^2)}. \end{aligned} \right\} \tag{37, 29}$$

§ 38. Две диэлектрические среды с плоскостями раздела, составляющими произвольный угол

38.1. Рассмотрим теперь более общий случай, когда плоскости раздела обеих сред ϵ_1 и ϵ_2 составляют друг с другом уже не прямой, а произвольный угол β (рис. 57), так что в общих формулах (34, 10) нужно положить

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, \theta_2 = \beta, \theta_{21} = \beta, \\ \theta_{12} &= 2\pi - \beta, \theta_{1\gamma} = 2\pi - \gamma. \end{aligned}$$

Угол $\theta_{2\gamma}$, который равен $\beta - \gamma$ при $\beta > \gamma$ и $\beta - \gamma + 2\pi$ при $\beta < \gamma$, сохраняем пока в формулах, без замены его

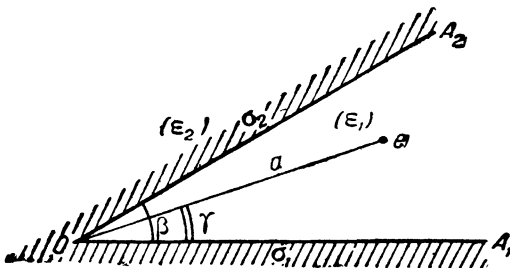


Рис. 57.

значениями, чтобы иметь возможность охватить сразу оба случая $\beta > \gamma$ и $\beta < \gamma$.

Полагая опять

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \alpha_2 = -\alpha_1, \quad (38,1)$$

находим из (34 10):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\nu) &= \frac{\alpha}{\sin \pi \nu} \{e' a^\nu \sin(\pi - \gamma)\nu + \sin(\pi - \beta)\nu \cdot \bar{\sigma}_2\}, \\ \bar{\sigma}_2(\nu) &= \frac{\alpha}{\sin \pi \nu} \{e' a^\nu \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu + \sin(\pi - \beta)\nu \cdot \sigma_1\}, \end{aligned} \right\} \quad (38,2)$$

откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{ae'a^\nu}{2} \left\{ \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu \left[\frac{1}{\sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} - \frac{1}{\sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right] + \sin(\pi - \gamma)\nu \left[\frac{1}{\sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} + \frac{1}{\sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right] \right\}, \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{ae'a^\nu}{2} \left\{ \left[\frac{\sin(\pi - \gamma)\nu}{\sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} - \frac{\sin(\pi - \gamma)\nu}{\sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu}{\sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} + \frac{\sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu}{\sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (38,3)$$

38.2. Исследуем, прежде всего, расположение особых точек функций $\sigma_1(\nu)$ и $\bar{\sigma}_2(\nu)$ на плоскости ν .

Особыми точками этих функций являются корни уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu &= 0, \\ \sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38,4)$$

за исключением точки $\nu = 0$, которая является обыкновенной точкой.

Исследуем корни этих уравнений и покажем, что все они вещественные и не кратные. При этом, очевидно, достаточно исследовать какое-нибудь одно из них, например (38, 4), считая в нем величину α положительной или отрицательной и удовлетворяющей условию $|\alpha| \leq 1$, вытекающему из того, что

$$|\alpha| = \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right|.$$

Кроме того, очевидно, достаточно ограничиться случаем, когда $0 < \beta < \pi$, ибо, если мы допускаем, что величина $\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ может быть как положительной, так и отрицательной, то безразлично, какую среду считать первой и какую второй.

38.3. Чтобы доказать, что при этих условиях корни уравнения $\sin \pi \nu = \alpha \sin(\pi - \beta)\nu$ вещественны, предположим сперва, что $\nu = x + iy$ и отделим в нем вещественную и мнимую части. Получится:

$$\begin{aligned} \sin \pi x \operatorname{ch} \pi y &= \alpha \operatorname{ch}(\pi - \beta)y \sin(\pi - \beta)x = \\ &= \alpha \operatorname{ch}(\pi - \beta)y [\sin \pi x \cos \beta x - \cos \pi x \sin \beta x], \end{aligned} \quad (38,6)$$

и

$$\begin{aligned} \cos \pi x \operatorname{sh} \pi y &= \alpha \operatorname{sh}(\pi - \beta)y \cos(\pi - \beta)x = \\ &= \alpha \operatorname{sh}(\pi - \beta)y [\cos \pi x \cos \beta x + \sin \pi x \cdot \sin \beta x]. \end{aligned} \quad (38,7)$$

Первое из этих уравнений дает:

$$\operatorname{tg} \pi x = - \frac{\alpha \sin \beta x}{\frac{\operatorname{ch} \pi y}{\operatorname{ch} (\pi - \beta) y} - \alpha \cos \beta x}, \quad (38,8)$$

тогда как из второго получается, если предположить, что $y \neq 0$, так что можно разделить обе стороны уравнения на $\operatorname{sh} (\pi - \beta) y$:

$$\operatorname{tg} \pi x = \frac{\frac{\operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} (\pi - \beta) y} - \alpha \cos \beta x}{\alpha \sin \beta x}. \quad (38,9)$$

Легко, однако, видеть, что уравнения (38, 8) и (38, 9) несовместны друг с другом. В самом деле, при всех $y \neq 0$ всегда

$$\operatorname{ch} \pi y / \operatorname{ch} (\pi - \beta) y > 1 \text{ и } \operatorname{sh} \pi y / \operatorname{sh} (\pi - \beta) y > \frac{\pi}{\pi - \beta} > 1,^1$$

а так как $|\alpha \cos \beta x| \leq 1$ из-за $|\alpha| \leq 1$, то в (38, 8) и (38, 9)

$$\frac{\operatorname{ch} \pi y}{\operatorname{ch} (\pi - \beta) y} - \alpha \cos \beta x > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} (\pi - \beta) y} - \alpha \cos \beta x > 0.$$

Но тогда, согласно уравнению (38, 8), знак $\operatorname{tg} \pi x$ должен совпадать со знаком величины $(-\alpha \sin \beta x)$, тогда как из (38, 9) следует, что $\operatorname{tg} \pi x$ должен иметь как раз обратный знак, совпадающий со знаком величины $(+\alpha \sin \beta x)$.

Это показывает, что допущение, что $y \neq 0$, ведет к противоречию, т. е. уравнение (38, 4) имеет только вещественные корни.²

38.4. Теперь нетрудно доказать и вторую часть нашего утверждения, именно, что уравнение (38, 4) не имеет кратных корней. Действительно, если бы некоторое $v = v_0$ было кратным корнем уравнения

$$f(v) \equiv \sin \pi v - \alpha \sin (\pi - \beta) v = 0,$$

то оно должно было бы обращать в нуль и производную

$$f'(v) = \pi \cos \pi v - (\pi - \beta) \alpha \cos (\pi - \beta) v.$$

Но из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin \pi v_0 &= \alpha \sin (\pi - \beta) v_0, \\ \frac{\pi}{(\pi - \beta)} \cos \pi v_0 &= \alpha \cos (\pi - \beta) v_0 \end{aligned} \right\}$$

получается, если их возвести в квадрат и сложить:

$$\frac{\pi^2}{(\pi - \beta)^2} \cos^2 \pi v_0 + \sin^2 \pi v_0 = \alpha^2,$$

т. е.

$$\cos^2 \pi v_0 = - \frac{(1 - \alpha^2)}{\left[\left(\frac{\pi}{\pi - \beta} \right)^2 - 1 \right]} < 0. \quad (38,10)$$

¹ Ибо, по условию, $0 < \pi - \beta < \pi$, так что

$$\frac{\operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} (\pi - \beta) y} = \frac{\pi}{(\pi - \beta)} \cdot \frac{\left[1 + \frac{(\pi y)^2}{3!} + \frac{(\pi y)^4}{5!} + \dots \right]}{\left[1 + \frac{[(\pi - \beta) y]^2}{3!} + \frac{[(\pi - \beta) y]^4}{5!} + \dots \right]} > \frac{\pi}{\pi - \beta} > 1.$$

² Значение $x = 0$ при $y \neq 0$, как легко видеть, тоже невозможно. Невозможно при $y \neq 0$ также выполнение условия $\sin \beta x = 0$.

Но так как только что было доказано, что ν_0 может быть только вещественным числом, то $\cos^2 \pi \nu_0$ не может быть меньше нуля. Это и показывает, что уравнение (38, 4) имеет только вещественные не кратные корни, как утверждалось выше.

38.5. Для того, чтобы представить себе характер распределения корней уравнения (38, 4), можно воспользоваться уравнением (38, 8), в котором нужно только положить $y=0$ и $x=\nu$. Получается:

$$\operatorname{tg} \pi \nu = - \frac{\alpha \sin \beta \nu}{1 - \alpha \cos \beta \nu}. \quad (38, 11)$$

Если временно исключить из рассмотрения случай, когда $|\alpha|=1$, что соответствует обращению в бесконечность одной из постоянных ε_1 или ε_2 , т. е. тому, что одна из двух соприкасающихся сред является проводником (этот случай подробно разобран ниже, см. п. 38.7), то величина

$$A = \frac{\alpha \sin \beta \nu}{1 - \alpha \cos \beta \nu}$$

остаётся ограниченной и во всяком случае не выходит из конечных пределов

$$\frac{|\alpha|}{1-|\alpha|} > A > - \frac{|\alpha|}{1-|\alpha|},$$

тогда как $\operatorname{tg} \pi \nu$ меняется от минус бесконечности до плюс бесконечности в каждом интервале

$$\left(\frac{2k-1}{2} < \nu < \frac{2k+1}{2} \right), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty.$$

Изображая, поэтому, на одном чертеже графики тангенсоиды $y_1 = \operatorname{tg} \pi \nu$ и кривой $y_2 = - \frac{\alpha \sin \beta \nu}{1 - \alpha \cos \beta \nu}$ и отмечая точки пересечения их $y_1 = y_2$, соответствующие корням уравнения (38, 11), или, что то же, уравнения (38, 4), найдем все корни его, число которых будет бесконечно, причем в каждом интервале $\left(k - \frac{1}{2} < \nu < k + \frac{1}{2} \right)$ лежит по крайней мере один корень (рис. 58).

38.6. Из изложенного следует, что функции $\bar{\sigma}_1(\nu)$ и $\bar{\sigma}_2(\nu)$ голоморфны внутри полосы $-\delta < \operatorname{Re}(\nu) < +\delta$, где δ обозначает модуль наименьшего по абсолютной величине корня уравнений (38, 4), (38, 5), так что для нахождения $\sigma_1(s)$ и $\sigma_2(s)$ можно воспользоваться формулой (36, 2). Это дает:

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) = & \frac{ae'}{4\pi is} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{a}{s} \right)^\nu \left\{ \frac{\sin(\pi - \gamma)\nu + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu}{\sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\pi - \gamma)\nu - \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu}{\sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right\} d\nu, \end{aligned} \quad (38, 12)$$

и аналогичную формулу, только с переставленными местами γ и $\theta_{2\gamma}$ для $\sigma_2(s)$.

Пользуясь общим методом, указанным в п. 36.3, сведем вычисление интеграла (38, 12) к нахождению суммы вычетов подинтегральной функции в правой или левой полуплоскости v . Таким образом, получим, например, при $\frac{a}{s} < 1$:

$$\sigma_1(s) = -\frac{ae'}{2s} \left\{ \sum_{(v_k^{(1)} > 0)} (a_{-1})_{v_k^{(1)}} + \sum_{(v_k^{(2)} > 0)} (b_{-1})_{v_k^{(2)}} \right\}, \quad (38, 13)$$

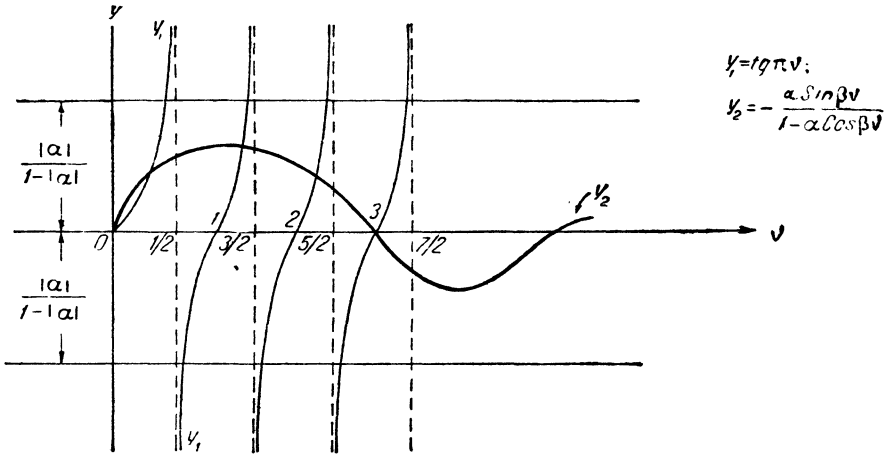


Рис. 58.

где $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ обозначают положительные корни уравнений (38, 4) и (38, 5), соответственно, а $(a_{-1})_{v_k^{(1)}}$ и $(b_{-1})_{v_k^{(2)}}$ — это вычеты функций

$$f_1(v) = \left(\frac{a}{s}\right)^v \frac{|\sin(\pi - \gamma)v + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})v|}{\sin \pi v - \alpha \sin(\pi - \beta)v} \quad (38, 14)$$

и

$$f_2(v) = \left(\frac{a}{s}\right)^v \frac{|\sin(\pi - \gamma)v - \sin(\pi - \theta_{2\gamma})v|}{\sin \pi v + \alpha \sin(\pi - \beta)v} \quad (38, 15)$$

соответственно. Это дает:

$$\sigma_1(s) = \frac{ae'}{2s} \left\{ \sum_{(v_k^{(1)} > 0)} \left(\frac{a}{s}\right)^{v_k^{(1)}} \frac{\sin(\pi - \gamma)v_k^{(1)} + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})v_k^{(1)}}{\alpha(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta)v_k^{(1)} - \pi \cos \pi v_k^{(1)}} - \sum_{(v_k^{(2)} > 0)} \left(\frac{a}{s}\right)^{v_k^{(2)}} \frac{\sin(\pi - \gamma)v_k^{(2)} - \sin(\pi - \theta_{2\gamma})v_k^{(2)}}{\alpha(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta)v_k^{(2)} + \pi \cos \pi v_k^{(2)}} \right\}, \quad \left(\frac{a}{s} < 1\right), \quad (38, 16)$$

и аналогичное выражение для $\sigma_2(s)$, получающееся из (38, 16) путем обмена местами γ и $\theta_{2\gamma}$. Суммирование по $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ распространяется здесь на все корни $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$, большие нуля.

Эти выражения для σ_1 и σ_2 годятся лишь при $a < s$. Для того, чтобы получить выражения, пригодные при $a > s$, достаточно было

бы дополнить путь интегрирования в интеграле (38, 12) дугой бесконечно-большого круга не вправо, а влево, причем рассматриваемый интеграл свелся бы к умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подинтегральной функции в левой полуплоскости, т. е. к умноженной на $\left(\frac{ae'}{2s}\right)$ сумме вычетов функций $f_1(v)$ и $f_2(v)$ в точках $v_k^{(1)} < 0$ и $v_k^{(2)} < 0$ соответственно. Тот же результат получается, однако, еще проще, прямо из (38, 12), если заменить там переменную интегрирования v на $(-v)$, причем путь интегрирования $(-i\infty, +i\infty)$ не изменится, а в подинтегральной функции множитель $\left(\frac{a}{s}\right)^v$ заменяется на $\left(\frac{a}{s}\right)^{-v} = \left(\frac{s}{a}\right)^v$. В соответствии с этим, вычисление получившегося нового интеграла, в котором теперь $\frac{s}{a} < 1$, ведет опять непосредственно к прежней формуле (38, 16), в которой только следует $\frac{a}{s}$ заменить через $\frac{s}{a}$. Таким образом, находим:

$$\sigma_1(s) = \frac{ae'}{2s} \left\{ \sum_{(v_k^{(1)} > 0)} \left(\frac{s}{a}\right)^{v_k^{(1)}} \frac{\sin(\pi - \gamma)v_k^{(1)} + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})v_k^{(1)}}{\alpha(\pi - \beta)\cos(\pi - \beta)v_k^{(1)} - \pi\cos\pi v_k^{(1)}} - \sum_{(v_k^{(2)} > 0)} \left(\frac{s}{a}\right)^{v_k^{(2)}} \frac{\sin(\pi - \gamma)v_k^{(2)} - \sin(\pi - \theta_{2\gamma})v_k^{(2)}}{\alpha(\pi - \beta)\cos(\pi - \beta)v_k^{(2)} + \pi\cos\pi v_k^{(2)}} \right\}, \quad \left(\frac{s}{a} < 1\right), \quad (38, 17)$$

и аналогичную формулу для σ_2 . Тем самым получается общее решение поставленной задачи.

38.7. Рассмотрим более подробно решение нашей задачи в том частном случае, когда одна из сред, скажем, вторая, является проводником, причем $\epsilon_2 = \infty$, $\alpha = -1$ и $\theta_2 = \beta > \gamma$, так что $\theta_{2\gamma} = \beta - \gamma$.

При фактическом нахождении решения выгоднее исходить не из общих формул (38, 16), (38, 17), применяя их к данному частному случаю, а прямо из интеграла (38, 12), который в данном случае принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= -\frac{e}{4\pi i s \epsilon_1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \rho^v \left\{ \frac{\sin(\pi - \gamma)v + \sin(\pi - \beta + \gamma)v}{\sin\pi v + \sin(\pi - \beta)v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\pi - \gamma)v - \sin(\pi - \beta + \gamma)v}{\sin\pi v - \sin(\pi - \beta)v} \right\} dv = \\ &= -\frac{e}{4\pi i s \epsilon_1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \rho^v \left\{ \frac{\cos\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)v}{\cos\frac{\beta v}{2}} - \frac{\sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)v}{\sin\frac{\beta v}{2}} \right\} dv = \\ &= -\frac{e}{2\pi i s \epsilon_1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \rho^v \frac{\sin(\beta - \gamma)v}{\sin\beta v} dv. \end{aligned} \quad (38, 18)$$

Предполагая, для определенности, что $\rho < 1$, и дополняя, как обычно, путь интегрирования дугой бесконечно-большого круга вправо, находим, как раньше, составляя сумму вычетов в точках $\nu_k = \frac{\pi k}{\beta}$ при $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= \frac{e}{s\epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\frac{\pi k}{\beta}} \frac{\sin(\beta - \gamma) \frac{\pi k}{\beta}}{\beta \cos \pi k} = -\frac{e}{s_1^2 \epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\frac{\pi k}{\beta}} \sin \frac{\pi \gamma}{\beta} k = \\ &= -\frac{e}{s_1^2 \epsilon_1} \frac{\rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \frac{\pi \gamma}{\beta}}{\left[1 - 2\rho^{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{\pi \gamma}{\beta} + \rho^{\frac{2\pi}{\beta}}\right]}. \end{aligned} \quad (38,19)$$

Это и есть выражение плотности, индуцированной на стороне проводящего угла β , окруженного диэлектриком ϵ_1 , под действием расположенной в точке (a, γ) нити с зарядом e на единицу длины.

Аналогичным образом найдем:

$$\sigma_2(s) = -\frac{e}{s_1^2 \epsilon_1} \frac{\rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \frac{\pi \gamma}{\beta}}{\left[1 + 2\rho^{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{\pi \gamma}{\beta} + \rho^{\frac{2\pi}{\beta}}\right]}, \quad (38,20)$$

что, очевидно, получается из (38,19) при замене γ через $\beta - \gamma$, как оно и должно быть.

Формулы (38,19), (38,20) могут быть, конечно, получены и проще, путем конформного отображения угла β на полуплоскость.

38.8. Остановимся еще на случае, когда угол β есть рациональная часть π , т. е. когда $\beta = \frac{\pi p}{q}$, где p и q — целые числа, которые предполагаем взаимно простыми, так что p/q несократимая дробь.

Соответственно этому, и $\pi - \beta = \pi \frac{q-p}{q} = \pi \frac{n}{q}$, где $n = q - p$, очевидно, тоже взаимно простое с q , и уравнения (38,4) и (38,5) принимают вид:

$$\sin \pi \nu - \alpha \sin \frac{\pi n \nu}{q} = 0, \quad (38,21)$$

$$\sin \pi \nu + \alpha \sin \frac{\pi n \nu}{q} = 0. \quad (38,22)$$

Так как левые части этих уравнений — это периодические функции от ν с периодом $2q$,¹ то все корни их известны, если известны корни $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ в интервале $(0 < \nu \leq 2q)$. Именно, все эти корни, которые обозначим через $\nu_{k,m}^{(1)}$ и $\nu_{k,m}^{(2)}$, выражаются через основные таким образом:

$$\begin{aligned} \nu_{k,m}^{(1)} &= \nu_k^{(1)} + 2mq, & (0 < \nu_k^{(1)} \leq 2q), \\ \nu_{k,m}^{(2)} &= \nu_k^{(2)} + 2mq, & (0 < \nu_k^{(2)} \leq 2q), \end{aligned} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (38,23)$$

¹ Если q нечетное, то даже с периодом q (см. ниже, п. 38.9).

В соответствии с этим, например, сумма по $v_k^{(1)}$ в общем решении (38,16) разобьется на суммы по отдельным группам корней, т. е. на суммы вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{v_k^{(1)}} \frac{\sin(\pi - \gamma) v_{k,m}^{(1)} + \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) v_{k,m}^{(1)}}{an \left(\frac{n}{q}\right) \cos \frac{\pi n v_{k,m}^{(1)}}{q} - \pi \cos \pi v_{k,m}^{(1)}} = \\ & = \frac{q}{\pi} \frac{\rho^{v_k^{(1)}}}{\left(an \cos \frac{\pi n v_k^{(1)}}{q} - q \cos \pi v_k^{(1)}\right)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{2qm} \sin [2q(\pi - \gamma)m + (\pi - \gamma)v_k^{(1)}] + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{2qm} \sin [2q(\pi - \theta_{2\gamma})m + (\pi - \theta_{2\gamma})v_k^{(1)}] \right\} = \\ & = \frac{q}{\pi} \frac{\rho^{v_k^{(1)}}}{\left(an \cos \frac{\pi n v_k^{(1)}}{q} - q \cos \pi v_k^{(1)}\right)} \left\{ \frac{\sin(\pi - \gamma) v_k^{(1)} + \rho^{2q} \sin(2q - v_k^{(1)})(\pi - \gamma)}{1 - 2\rho^{2q} \cos 2q(\pi - \gamma) + \rho^{4q}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sin(\pi - \theta_{2\gamma}) v_k^{(1)} + \rho^{2q} \sin(2q - v_k^{(1)})(\pi - \theta_{2\gamma})}{1 - 2\rho^{2q} \cos 2q(\pi - \theta_{2\gamma}) + \rho^{4q}} \right\}, \end{aligned}$$

которые остается еще просуммировать по $v_k^{(1)}$ в пределах $(0 < v_k^{(1)} \leq 2q)$. Аналогичным образом преобразуется в (38,16) и сумма по $v_k^{(2)}$. Окончательно получается:

$$\begin{aligned} i(s) = & \frac{aqe'}{2\pi s} \left\{ \sum_{(0 < v_k^{(1)} \leq 2q)} \frac{\rho^{v_k^{(1)}}}{an \cos \frac{\pi n v_k^{(1)}}{q} - q \cos \pi v_k^{(1)}} \left[\frac{\sin(\pi - \gamma) v_k^{(1)} + \rho^{2q} \sin(2q - v_k^{(1)})(\pi - \gamma)}{1 - 2\rho^{2q} \cos 2q(\pi - \gamma) + \rho^{4q}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sin(\pi - \theta_{2\gamma}) v_k^{(1)} + \rho^{2q} \sin(2q - v_k^{(1)})(\pi - \theta_{2\gamma})}{1 - 2\rho^{2q} \cos 2q(\pi - \theta_{2\gamma}) + \rho^{4q}} \right] - \right. \\ & \left. - \sum_{(0 < v_k^{(2)} \leq 2q)} \frac{\rho^{v_k^{(2)}}}{an \cos \frac{\pi n v_k^{(2)}}{q} + q \cos \pi v_k^{(2)}} \left[\frac{\sin(\pi - \gamma) v_k^{(2)} + \rho^{2q} \sin(2q - v_k^{(2)})(\pi - \gamma)}{1 - 2\rho^{2q} \cos 2q(\pi - \gamma) + \rho^{4q}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sin(\pi - \theta_{2\gamma}) v_k^{(2)} + \rho^{2q} \sin(2q - v_k^{(2)})(\pi - \theta_{2\gamma})}{1 - 2\rho^{2q} \cos 2q(\pi - \theta_{2\gamma}) + \rho^{4q}} \right] \right\}, \quad \left(\rho = \frac{a}{s}\right). \quad (38,24) \end{aligned}$$

Таким образом, решение получается в замкнутой форме и содержит только конечные суммы по корням уравнений (38,21) и (38,22), лежащим в интервале $(0 < v \leq 2q)$. Для σ_2 получается аналогичное выражение.

38.9. Заканчивая на этом рассмотрение случая двух различных сред, добавим в заключение, что формула (38,24) может быть еще преобразована, если учесть, что корни уравнений (38,21) и (38,22) обладают рядом свойств, которыми мы не пользовались. Так, например, легко видеть, что если v_k — корень одного из этих уравнений, то

и $v_k' = 2q - v_k$ — тоже корень того же уравнения; если q и n оба нечетные, то если v_k корень, то и $v_k'' = v_k + q$ и $v_k''' = q - v_k$ — тоже корни и т. д.

Наконец, если q и n — разной четности и $v_k^{(1)}$ — это решение уравнения (38,21), то $v_k = q - v_k^{(1)}$ — это решение уравнения (38,22) и, наоборот, из решения $v_k^{(2)}$ уравнения (38,22) получается решение $(q - v_k^{(2)})$ уравнения (38,21).

Так как, однако, все преобразования, основанные на этих и подобных им свойствах корней $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$, ничего существенно нового к найденному выше решению добавить не могут, то мы на них здесь останавливаться не будем. Что же касается фактического нахождения корней $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$, то его, вообще говоря, удобнее всего производить, исходя из уравнения (38,11), в котором при нахождении $v_k^{(2)}$ следует заменить α на $(-\alpha)$. Пользуясь графиком указанного на рис. 58 типа, можно найти приближенные значения искомых корней, которые затем нетрудно улучшить, пользуясь обычными в таких случаях приемами. Если $\beta = \pi \frac{p}{q}$, то можно также свести уравнения (38,21), (38,22) к алгебраическим, пользуясь формулой:¹

$$\frac{\sin m\theta}{\sin \theta} = x^{m-1} - \frac{(m-2)}{1!} x^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2!} x^{m-5} - \dots + (-1)^k \frac{(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k)}{k!} x^{m-2k-1} + \dots, \quad (38,25)$$

где $x = 2 \cos \theta$, и ряд обрывается и содержит $\left(\frac{m}{2}\right)$ членов при четном m и $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ — при нечетном. Полагая поэтому в уравнениях (38,21), (38,22) $\frac{\pi v}{q} = \theta$, записывая их в такой форме:

$$\sin \theta \cdot \left\{ \frac{\sin \alpha \theta}{\sin \theta} \mp \alpha \frac{\sin n \theta}{\sin \theta} \right\} = 0 \quad (38,26)$$

и подставляя вместо отношений синусов в фигурной скобке их выражения по формуле (38,25), сведем нахождение корней исходных урав-

¹ Она сразу получается из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях ξ в двух разных разложениях функции

$$\frac{1}{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2} = \frac{1}{[1 - \xi(x - \xi)]}, \quad (x = 2 \cos \theta),$$

по степеням ξ , из которых первое следует из формулы (37,17), именно:

$$\frac{1}{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \xi^{m-1} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta},$$

а второе получается из ряда

$$\frac{1}{1 - [\xi(x - \xi)]} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k (x - \xi)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \xi^k \sum_{s=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-s+1)}{s!} \xi^s x^{k-s},$$

если его перегруппировать по степеням ξ .

нений к решению алгебраических уравнений $(q - 1)$ -ой степени, которые при $q \leq 5$ допускают буквенное решение в общем виде. Так, при $\beta = \frac{\pi}{3}$ получаются уравнения

$$x^2 \pm \alpha x - 1 = 0, \tag{38,27}$$

так что искомые корни $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ найдутся из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \frac{\pi \nu^{(1)}}{3} &= + \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \\ 2 \cos \frac{\pi \nu^{(2)}}{3} &= - \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \tag{38,28}$$

и из уравнений $\sin \frac{\pi \nu^{(1)}}{3} = 0$ и $\sin \frac{\pi \nu^{(2)}}{3} = 0$, входящих в уравнение (38,26) как при $(+ \alpha)$, так и при $(- \alpha)$, и дающих корни $\nu_m^{(1)} = 3m\pi$, $\nu_m^{(2)} = 3m\pi$.

При подстановке найденных корней в формулу (38,24) следует, конечно, взять только те из них, которые удовлетворяют условиям $0 < \nu_k^{(1)} \leq 2q = 6$ и $0 < \nu_k^{(2)} \leq 6$.

При $\beta = \frac{2\pi}{3}$ получаются уравнения:

$$x^2 = (1 \pm \alpha), \tag{38,29}$$

из которых следует, что

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \frac{\pi \nu^{(1)}}{3} &= \pm \sqrt{1 + \alpha}, \\ 2 \cos \frac{\pi \nu^{(2)}}{3} &= \pm \sqrt{1 - \alpha}, \end{aligned} \right\} \tag{38,30}$$

и опять надо добавить корни $\nu^{(1)} = 3$ и 6 и $\nu^{(2)} = 3$ и 6 .

Таким же образом могли бы быть рассмотрены также случаи, когда $q = 4$ и $q = 5$, приводящие к решению уравнений третьей, соответственно, четвертой степени.

§ 39. Три разнородных среды

39.1. Разберем теперь случай трех различных сред ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 , заполняющих отдельные части пространства так, как это показано на рис. 59.

Заметим кстати, что в том частном случае, когда ϵ_1 обращается в бесконечность, а ϵ_2 — в единицу, мы приходим к задаче о поле проводящего угла A_1OA_2 , лежащего на диэлектрическом полупространстве (подслое) с диэлектрической постоянной ϵ_3 , причем вся система внесена в произвольное внешнее поле. Это дает, в частности, возможность исследовать краевой эффект вблизи от вершины угла O .

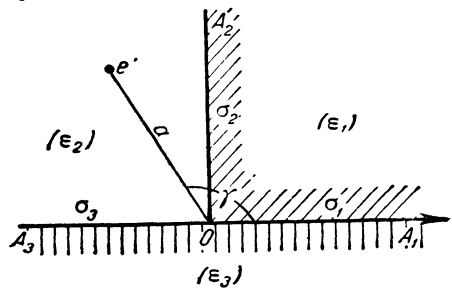


Рис. 59.

Будем решать, как обычно, ключевую задачу, считая, что первичное поле создается свободным зарядом e' , расположенным в точке (α, γ) в которой-нибудь из сред.

Так как в рассматриваемом случае $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = \pi$, то $\theta_{21} = \frac{\pi}{2}$, $\theta_{31} = \pi$, $\theta_{32} = \frac{\pi}{2}$, $\theta_{12} = \frac{3\pi}{2}$, $\theta_{13} = \pi$, $\theta_{23} = \frac{3\pi}{2}$, $\theta_{1\gamma} = 2\pi - \gamma$, так что уравнения (34,10) дают для преобразованных плотностей $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$:

$$\bar{\sigma}_1 = -\frac{\alpha_1}{\sin \pi\gamma} \left\{ e'a' \sin(\pi - \gamma) \nu + \bar{\sigma}_2 \sin \frac{\pi\gamma}{2} \right\}, \quad (39,1)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{\alpha_2}{\sin \pi\gamma} \left\{ e'a' \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3) \sin \frac{\pi\gamma}{2} \right\}, \quad (39,2)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{\alpha_3}{\sin \pi\gamma} \left\{ e'a' \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \nu + \bar{\sigma}_2 \sin \frac{\pi\gamma}{2} \right\}, \quad (39,3)$$

причем

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}. \quad (39,4)$$

Решим уравнения (39,1) — (39,3) относительно $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$, причем начнем с нахождения $\bar{\sigma}_2$. Вычитая, с этой целью, (39,3) из (39,1) и подставляя получающееся при этом значение $(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)$ в (39,2), получим, что

$$\bar{\sigma}_2 = -\frac{\alpha_2 e'a' \nu \left[\alpha_1 \sin(\pi - \gamma) \nu - 2 \cos \frac{\pi\gamma}{2} \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu + \alpha_3 \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \nu \right]}{4 \sin \frac{\pi\gamma}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi\gamma}{2} - \alpha^2 \right]}, \quad (39,5)$$

где

$$\alpha^2 = -\frac{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3)}{4} = \frac{\varepsilon_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)} \geq 0. \quad (39,6)$$

Равенство нулю может иметь здесь место только при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, т. е. когда верхние две среды превращаются в одну, так что остаются просто два диэлектрических полупространства с плоской поверхностью раздела, — элементарный случай, который мы уже рассмотрели выше в п. 31.1.

Заметим еще, что $\alpha^2 < \frac{1}{2}$, что сразу видно, если переписать выражение для α^2 в одной из следующих форм:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3 + \varepsilon_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} \right), \quad (39,7)$$

причем в первой из них каждый множитель в скобках меньше единицы при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, а второй — при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Вместе с тем, полагая в (39,6) $\varepsilon_1 = \infty$, при конечных ε_2 и ε_3 , получаем для α^2 значение $\alpha^2 = \varepsilon_3/2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, что при $\varepsilon_3 \gg \varepsilon_2$ сколь угодно близко к половине.

Подставляя найденное значение $\bar{\sigma}_2$ в (39,1) и (39,3), найдем $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_3$, именно:

$$\bar{\sigma}_1 = -\frac{\alpha_1 e' a^\nu \sin(\pi - \gamma) \nu}{\sin \pi \nu} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 e' a^\nu}{4 \sin \pi \nu} \times \frac{\left[\alpha_1 \sin(\pi - \gamma) \nu + \alpha_3 \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu - 2 \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu \cos \frac{\pi \nu}{2} \right]}{\left(\cos^2 \frac{\pi \nu}{2} - \alpha^2 \right)} \quad (39,8)$$

и

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{\alpha_3 e' a^\nu \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \nu}{\sin \pi \nu} - \frac{\alpha_2 \alpha_3 e' a^\nu}{4 \sin \pi \nu} \times \frac{\left[\alpha_1 \sin(\pi - \gamma) \nu + \alpha_3 \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \nu - 2 \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu \cos \frac{\pi \nu}{2} \right]}{\left(\cos^2 \frac{\pi \nu}{2} - \alpha^2 \right)}. \quad (39,9)$$

Выражение (39,5) для $\bar{\sigma}_2$ имеет точно такую же структуру, как формула (37,5) для $\bar{\sigma}_2$ в случае двух различных сред с прямоугольной поверхностью раздела. Вычисляя поэтому интеграл

$$\sigma_2(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-(\nu+1)} \bar{\sigma}_2(\nu) d\nu$$

точно таким же образом, как это было сделано в п. 37.3, и обозначая через δ наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \frac{\delta \pi}{2} = |\alpha|, \quad (39,10)$$

найдем, после небольших преобразований:

$$\sigma_2(s) = \frac{e' \alpha_2 (2 + \alpha_1 - \alpha_3) \rho^2 \sin 2\gamma}{2\pi s (1 - \alpha^2) (1 + 2\rho^2 \cos 2\gamma + \rho^4)} - \frac{\alpha_2 e'}{4\pi s |\alpha| (1 - \alpha^2) (1 + 2\rho^2 \cos 2\gamma + \rho^4)} \times \left\{ \rho^\delta [(\alpha_1 \sin(\pi - \gamma) \delta + \alpha_3 \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \delta) - \rho^2 (\alpha_1 \sin(2 - \delta)(\pi - \gamma) + \alpha_3 \sin(2 - \delta)(\pi - \theta_{3\gamma})) - 2|\alpha| (\sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \delta + \rho^2 \sin(2 - \delta)(\pi - \theta_{2\gamma}))] - \right. \\ \left. - \rho^{2-\delta} [(\alpha_1 \sin(2 - \delta)(\pi - \gamma) + \alpha_3 \sin(2 - \delta)(\pi - \theta_{3\gamma})) - \rho^2 (\alpha_1 \sin(\pi - \gamma) \delta + \alpha_3 \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \delta) + 2|\alpha| (\sin(2 - \delta)(\pi - \theta_{2\gamma}) + \rho^2 \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \delta)] \right\}. \quad (39,11)$$

Совершенно аналогичным образом найдем также σ_1 и σ_3 , причем первообразные функции, соответствующие членам $-\frac{\alpha_1 e' a^\nu \sin(\pi - \gamma) \nu}{\sin \pi \nu}$ и $\frac{\alpha_3 e' a^\nu \sin(\pi - \theta_{3\gamma}) \nu}{\sin \pi \nu}$ в выражениях $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_3$ не стоит подставлять в формулу обращения, так как простое сравнение с формулой (34,9), дающей преобразованную функцию от первичной функции \mathfrak{G} , выражаемой формулой (33,9), сразу показывает, что этим членам соответствуют первообразные функции, равные соответственно

$$-\frac{\alpha_1 e' a \sin \gamma}{\pi (s^2 + a^2 - 2as \cos \gamma)} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_3 e' a \sin(\theta_3 - \gamma)}{\pi [s^2 + a^2 - 2as \cos(\theta_3 - \gamma)]},$$

тогда как остальные члены легко вычисляются обычным образом.

На этом мы закончим рассмотрение примеров на приложение данного в §§ 33—36 общего метода и добавим к уже сказанному только несколько замечаний.

§ 40. Дополнительные замечания о нахождении плотностей σ в том случае, когда одна из сред — это проводник, заполняющий целое полупространство

40.1. Возвращаясь к общему случаю (§ 33), предположим, что одна из сред — проводящая, заполняющая притом целое полупространство

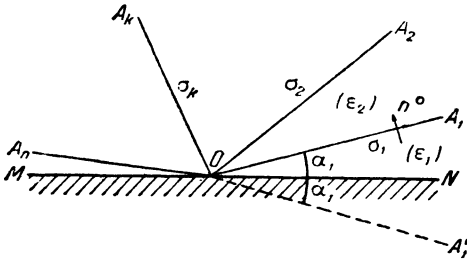


Рис. 60.

(рис. 60). Тогда решение может быть несколько упрощено, если отразить в проводящей плоскости MN поверхности раздела различных сред с сидящими на них свободными зарядами σ_k . Если, например, над MN имеется только одна поверхность раздела OA_1 сред (ϵ_1) и (ϵ_2) , то при составлении уравнения (33,6) придется учитывать только плотность σ_1 на OA_1 и „отраженную“ плотность $(-\sigma_1)$ на OA_1' . (33,6) дает при этом:

$$\sigma_1(s) = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left\{ (\mathcal{G}_0)_{\theta=\alpha} - 2 \sin 2\alpha \int_0^\infty \frac{\sigma_1(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 - 2\xi s \cos 2\alpha + s^2} \right\}, \quad (40,1)$$

а это уравнение немедленно решается указанным в §§ 33—36 методом, причем для решения служат обычные формулы (34,5) и (36,1).

Тот же прием может быть, очевидно, применен и при любом числе граничных поверхностей OA_k над плоской поверхностью проводника.

§ 41. Нахождение электростатического поля и потенциала в любой точке пространства в случае секториального распределения сред

41.1. В предыдущих параграфах был дан общий метод нахождения плотностей σ_i свободных зарядов, сидящих на поверхностях раздела различных сред, чем по существу задача решается, ибо нахождение поля, создаваемого в пространстве известным распределением зарядов, требует еще только выполнения некоторых квадратур.

Однако, поскольку получающиеся при этом выражения для плотностей, вообще говоря, весьма громоздки,¹ вычисление по ним компонент поля делается технически затруднительным, хотя самые ин-

¹ Ср., например, формулы (37,23), (37,24), (38,17), (38,24) и (39,11).

тегралы, получающиеся при этом, как правило, берутся в конечном виде.

Если еще вспомнить, что и сами эти плотности требуют для своего нахождения предварительного вычисления некоторых комплексных интегралов, то становится очевидным, что вычисление поля таким способом хотя и возможно, но требует, вообще говоря, затраты большого труда. Можно, однако, как мы сейчас покажем, полностью обойти эту трудность, если действовать в том же духе, как мы поступали в § 34 при сведении решения системы (33,6) совокупных интегральных уравнений для плотностей σ_k к решению системы (34,5) линейных уравнений для преобразованных плотностей $\bar{\sigma}_k$.

Именно, возможно свести вычисление компонент поля E_r и E_θ к непосредственному нахождению их по их „преобразованным“ значениям \bar{E}_r и \bar{E}_θ , которые, в свою очередь, весьма просто выражаются через преобразованные значения $\bar{\sigma}_k$ плотностей, найденные выше.

Более того, оказывается возможным весьма просто выразить через те же величины „комплексный“ потенциал искомого поля,¹ сведя тем самым все решение задачи к вычислению одного комплексного интеграла, подобного по своей структуре интегралам формулы (36,2) и вычисляемого теми же приемами. Тем самым надобность в промежуточном нахождении самих плотностей вообще отпадает, и во всех вычислениях фигурируют исключительно преобразованные значения $\bar{\sigma}_k$, \bar{E}_r , \bar{E}_θ плотностей зарядов и компонент поля. Можно, поэтому, сказать, что „язык“ преобразованных величин (т. е., по существу, символический, „операционный“, метод решения задач данного класса) является естественным языком для трактовки всех проблем рассматриваемого в данном разделе типа.

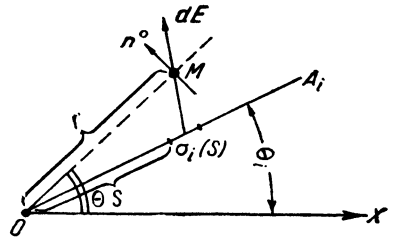


Рис. 61.

41.2. Переходим к доказательству высказанных только что утверждений. Составим, прежде всего, общие выражения для составляющих $E_r^{(i)}$ и $E_\theta^{(i)}$ поля, создаваемого в любой точке M с координатами (r, θ) зарядами σ_i , сидящими на поверхности раздела OA_i (рис. 61).

В § 33 мы уже нашли величину $E_\theta^{(i)}$, причем получилось [см. (33,5)]:

$$E_\theta^{(i)} = E_\theta^{(i)}(r, \theta) = 2 \sin(\theta - \theta_i) \int_0^\infty \frac{\sigma_i(s) s ds}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_i)}. \quad (33,5)$$

¹ Т. е. ту функцию комплексного переменного, от которой истинный потенциал Φ рассматриваемого поля с компонентами $E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ является вещественной частью. См. ниже п. п. 41.3 и 41.4.

$E_r^{(i)}$ легко найти способом, подобным тому, которым получена была формула (33,5). Именно, разбивая, как это было сделано при вычислении $E_\theta^{(i)}$, всю плоскость OA_i на бесконечно-узкие полоски ds_i (ср. рис. 50), причем потенциал от такой полоски в M равен

$$d\varphi_i = -\sigma_i(s_i) \lg [r^2 + s_i^2 - 2rs_i \cos(\theta - \theta_i)] ds_i,$$

составляя радиальную составляющую $dE_r^{(i)}$ поля этой полоски в M , равную

$$dE_r^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial r}(d\varphi_i) = \frac{2\sigma_i(s_i)[r - s_i \cos(\theta - \theta_i)] ds_i}{r^2 + s_i^2 - 2rs_i \cos(\theta - \theta_i)}, \quad (41,1)$$

и интегрируя по s_i от нуля до бесконечности, найдем:

$$E_r^{(i)} = E_r^{(i)}(r, \theta) = 2 \int_0^\infty \frac{\sigma_i(s) [r - s \cos(\theta - \theta_i)] ds}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_i)}. \quad (41,2)$$

Суммируя по всем плоскостям раздела, найдем для составляющих E_θ и E_r полного поля свободных зарядов σ_k значения:

$$E_r = E_r(r, \theta) = 2 \sum_{(k)} \int_0^\infty \frac{\sigma_k(s) [r - s \cos(\theta - \theta_k)] ds}{r^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_k) + s^2}, \quad (41,3)$$

$$E_\theta = E_\theta(r, \theta) = 2 \sum_{(k)} \sin(\theta - \theta_k) \int_0^\infty \frac{\sigma_k(s) s ds}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_k)}, \quad (41,4)$$

причем суммирование по k распространяется на все поверхности раздела.

Введем теперь в рассмотрение „преобразованные“ компоненты поля, т. е. составим выражения:

$$\bar{E}_r = \bar{E}_r(\nu) = \int_0^\infty E_r r^\nu dr, \quad (41,5)$$

$$\bar{E}_\theta = \bar{E}_\theta(\nu) = \int_0^\infty E_\theta r^\nu dr. \quad (41,6)$$

где ν , как и раньше, соответственно выбранное комплексное число.

Помножая формулу (41,3) на $r^\nu dr$, интегрируя по r от нуля до бесконечности и предполагая, как прежде, что порядок интегрирований по r и по s может быть изменен на обратный, найдем для \bar{E}_r :

$$\bar{E}_r = 2 \sum_{(k)} \left\{ \int_0^\infty \sigma_k(s) ds \int_0^\infty \frac{r^{\nu+1} dr}{r^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_k) + s^2} - \cos(\theta - \theta_k) \int_0^\infty \sigma_k(s) s ds \int_0^\infty \frac{r^\nu dr}{r^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_k) + s^2} \right\}.$$

Заменяя в интегралах по r переменную r через st и вводя в рассмотрение углы χ_k , отсчитываемые против часовой стрелки от пло-

скоростей OA_k до первой встречи с радиусом, проведенным из начала координат в точку M , т. е. углы, определяемые условиями:

$$\chi_k = \begin{cases} \theta - \theta_k & \text{при } \theta > \theta_k, \\ \theta - \theta_k + 2\pi & \text{при } \theta < \theta_k, \end{cases} \quad (0 < \chi_k < 2\pi), \quad (41,7)$$

получим, пользуясь формулой (34,4):

$$\begin{aligned} \bar{E}_r &= 2 \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k \left\{ \int_0^\infty \frac{t^{\nu+1} dt}{1-2t \cos(\theta - \theta_k) + t^2} - \cos(\theta - \theta_k) \int_0^\infty \frac{t^\nu dt}{1-2t \cos(\theta - \theta_k) + t^2} \right\} = \\ &= -\frac{2\pi}{\sin \pi\nu} \sum_{(k)} \frac{\bar{\sigma}_k}{\sin \chi_k} [\sin(\pi - \chi_k)(\nu + 1) + \cos \chi_k \sin(\pi - \chi_k)\nu] = \\ &= -\frac{2\pi}{\sin \pi\nu} \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k \cos(\pi - \chi_k)\nu, \end{aligned} \quad (41,8)$$

причем для одновременной сходимости входящих в (41,8) интегралов должно быть выполнено условие $-1 < Re(\nu) < 0$.

Для \bar{E}_θ получим, совершенно подобно тому, как получалась формула (34,9) из формулы (34,7):

$$\begin{aligned} \bar{E}_\theta &= 2 \sum_{(k)} \sin(\theta - \theta_k) \int_0^\infty \bar{\sigma}_k(s) s ds \int_0^\infty \frac{r^\nu dr}{r^2 - 2rs \cos(\theta - \theta_k) + s^2} = \\ &= \frac{2\pi}{\sin \pi\nu} \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k \sin(\pi - \chi_k)\nu. \end{aligned} \quad (41,9)$$

Тем самым показано, что E_r и \bar{E}_θ действительно выражаются через величины $\bar{\sigma}_k$, являющиеся уже известными функциями от ν и получаемые непосредственным решением уравнений (34,5) или (34,10) (последнее, если речь идет о решении ключевой задачи). Подставляя их известные значения (34,6) в (41,8) и (41,9), получим \bar{E}_r и \bar{E}_θ в виде определенных функций от ν , зная которые можно найти сами $E_r = E_r(r, \theta)$ и $E_\theta = E_\theta(r, \theta)$ при помощи Риман—Меллиновской теоремы обращения (35,1). Последняя дает:

$$\left. \begin{aligned} E_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-(\nu+1)} \bar{E}_r(\nu) d\nu, \\ E_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-(\nu+1)} \bar{E}_\theta(\nu) d\nu, \end{aligned} \right\} \quad (41,10)$$

причем c — вещественное число, во всяком случае удовлетворяющее условию $-1 < c < 0$, введенному при выводе формулы (41,8), и выбранное так, чтобы удовлетворялись все те условия, при которых теорема обращения справедлива.

Рассмотрим вопрос о выборе пути интегрирования более детально, причем ограничимся случаем ключевой задачи.

Пусть все функции $\bar{\sigma}_k(\nu)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, регулярны внутри некоторой полосы конечной ширины $-\delta < Re(\nu) = u < +\delta$, где, во всяком

случае, $\delta < 1$ и все интегралы $P_k = \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{\sigma}_k(u+it)| dt$, взятые вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси и лежащей внутри этой полосы, сходятся.

Из этого непосредственно видно, что тогда, во-первых, функция $\overline{E}_\theta(v)$, определяемая формулой (41,9), регулярна внутри той же полосы, а $\overline{E}_r(v)$, определяемая уравнением (41,8), — внутри полосы $-\delta < \text{Re}(v) = u < 0$. Из сходимости же интегралов P_k и из того, что величины $\left| \frac{\sin(\pi - \chi_i)v}{\sin \pi v} \right|$ и $\left| \frac{\cos(\pi - \chi_i)v}{\sin \pi v} \right|$ могут быть заменены на пути интегрирования при $\text{Im}(v) = t \rightarrow \pm \infty$ через $e^{-|\pi - |\pi - \chi_i|| |t|}$, т. е. стремятся из-за $|\pi - \chi_i| < \pi$ к нулю экспоненциально при возрастании $|t|$, следует, что оба интеграла $Q_r = \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{E}_r(u+it)| dt$ и

$Q_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{E}_\theta(u+it)| dt$ сходятся при $-\delta < \text{Re}(v) < 0$. Это показывает, что в формулах (41,10) величина $c < 0$ может быть выбрана по абсолютной величине сколь угодно малой, лишь бы путь интегрирования проходил левее точки $v=0$. Более того, видно, что путь интегрирования в (41,10) может быть выбран так, как показано на рис. 62, т. е. что его можно сместить на мнимую ось, выключив только точку $v=0$ малым полукружком произвольного радиуса

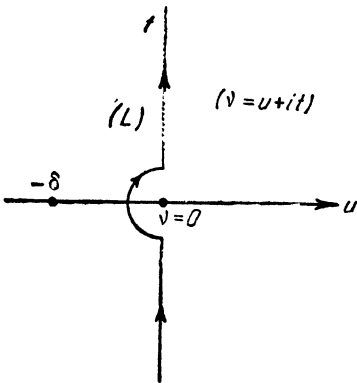


Рис. 62.

$\rho < \delta$, ибо, как ясно из предыдущего, интегралы сходятся и при $u=0$, так что сходятся и интегралы

$$\int_{\rho}^{\infty} |\overline{E}_r(it)| dt, \quad \int_{-\infty}^{-\rho} |\overline{E}_r(it)| dt, \quad \int_{\rho}^{\infty} |\overline{E}_\theta(it)| dt, \quad \int_{-\infty}^{-\rho} |\overline{E}_\theta(it)| dt,$$

а, стало быть, и интегралы

$$E_r(r, \theta) = \frac{1}{2\pi ir} \int_{(L)} r^{-v} \overline{E}_r(v) dv, \quad (41, 11)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{1}{2\pi ir} \int_{(L)} r^{-v} \overline{E}_\theta(v) dv, \quad (41, 12)$$

в которых под L подразумевается путь, изображенный на рис. 62. Заметим, что в формуле (41, 12) интегрирование можно производить и прямо по мнимой оси, ибо для $\overline{E}_\theta(v)$ $v=0$ — это обыкновенная точка.

Вычисление интегралов (41, 11) и (41, 12) совершается совершенно так же, как вычисление аналогичных интегралов (36, 2) для плотностей σ_k , и нисколько не более сложно, причем нужно только учитывать при вычислении (41, 11) вычет в точке $v=0$. Тем самым показано, что для нахождения поля \mathbf{E} нет нужды в предварительном вычислении плотностей σ_k и что излагаемый метод дает возможность непосредственно получить самые значения компонент поля кратчайшим путем.

41. 3. Мы можем, однако, еще более упростить нахождение искомого решения, именно, можем, не производя раздельного вычисления обеих компонент поля E_r и E_θ , свести все дело к вычислению одной единственной функции — комплексного потенциала этого поля, причем под комплексным потенциалом понимаем ту функцию $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\theta}$, вещественной частью которой является истинный потенциал φ искомого поля,¹ происходящего от зарядов σ_k на поверхностях раздела различных сред.

Для того, чтобы найти эту функцию $f(z)$, поступаем следующим образом.

Полагая

$$f(z) = \varphi + i\psi, \quad (41, 13)$$

где $\varphi = \text{Re}\{f(z)\}$ — искомый потенциал, а $\psi = \text{Im}\{f(z)\}$ — мнимая часть функции $f(z)$, будем иметь для нахождения φ два уравнения:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad (41, 14)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \quad (41, 15)$$

Кроме того, производные от функций φ и ψ связаны друг с другом соотношениями Коши — Римана, которые в полярной системе координат имеют такой вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (41, 16)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \quad (41, 17)$$

¹ Так как потенциал этот удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$, то такая функция $f(z)$ всегда существует.

² Они прямо получаются из сравнения производных по r и по θ от функции

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \varphi + i\psi.$$

Действительно

$$\frac{\partial}{\partial r} [f(z)] = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + i \frac{\partial\psi}{\partial r} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial r} = f'(z) e^{i\theta}, \quad (\text{A})$$

тогда как

$$\frac{\partial}{\partial\theta} [f(z)] = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + i \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial\theta} = f'(z) rie^{i\theta}. \quad (\text{B})$$

(41, 13) дает, поэтому, поскольку $z = re^{i\theta}$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \{f(z)\} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial r} = f'(z) e^{i\theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -(E_r - iE_\theta),$$

так что

$$f'(z) = -(E_r - iE_\theta) e^{-i\theta}. \quad (41, 18)$$

Вводя сюда значения E_r и E_θ из (41, 11) и (41, 12), получим:

$$f'(z) = -\frac{1}{2\pi i r e^{i\theta}} \int_{(L)} r^{-\nu} [\bar{E}_r(\nu) - i\bar{E}_\theta(\nu)] d\nu. \quad (41, 19)$$

Подставляем значения $\bar{E}_r(\nu)$ и $\bar{E}_\theta(\nu)$ из (41, 8) и (41, 9). Так как

$$\begin{aligned} \bar{E}_r - i\bar{E}_\theta &= -\frac{2\pi}{\sin \pi \nu} \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k [\cos(\pi - \chi_k) \nu + i \sin(\pi - \chi_k) \nu] = \\ &= -\frac{2\pi e^{+i\pi \nu}}{\sin \pi \nu} \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k e^{-\chi_k \nu i}, \end{aligned} \quad (41, 20)$$

где, согласно (41, 7), $\chi_k = \theta - \theta_k$ при $\theta > \theta_k$ и $\chi_k = \theta - \theta_k + 2\pi$ при $\theta < \theta_k$, то вводя вспомогательный угол

$$\beta_k = \begin{cases} (\theta_k + \pi) & \text{при } \theta > \theta_k, \\ (\theta_k - \pi) & \text{при } \theta < \theta_k \end{cases} \quad (41, 21)$$

и замечая, что $re^{i\theta} = z$, найдем окончательно:

$$f'(z) = \frac{1}{iz} \int_{(L)} \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k \frac{e^{i\beta_k \nu}}{z^\nu \sin \pi \nu} d\nu, \quad (41, 22)$$

причем считается, что $0 < \arg z < 2\pi$ и

$$\beta_k = \begin{cases} (\theta_k + \pi) & \text{при } \arg z > \theta_k, \\ (\theta_k - \pi) & \text{при } \arg z < \theta_k, \end{cases} \quad (41, 23)$$

а (L) обозначает изображенный на рис. 62 путь.

Если еще проинтегрировать соотношение (41, 22) по z под знаком интеграла [что, вообще говоря, допустимо, ибо интеграл (41, 22), как правило, сходится абсолютно и равномерно при $|z| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$], то получится:

$$f(z) = i \int_{(L)} \frac{\sum_{(k)} \bar{\sigma}_k e^{i\beta_k \nu}}{z^\nu \nu \sin \pi \nu} d\nu. \quad (41, 24)$$

Формулами (41, 22) или (41, 24) полностью решается задача о нахождении комплексного потенциала, а, стало быть, и истинного потенциала искомого поля. Практически обычно удобнее пользоваться формулой (41, 22) для $f'(z)$, чем формулой (41, 24) для $f(z)$, ибо первая

Сравнение (А) и (В) дает:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = ri \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} \right],$$

откуда и получаются формулы (41, 16) и (41, 17).

из них, при выражении соответствующего интеграла через сумму вычетов, обычно приводит к более непосредственно суммируемым рядам. К тому же для нахождения компонент поля сама функция $f(z)$ и не требуется, поскольку E_r и E_θ получаются непосредственно из $f'(z)$ по формулам [см. (41, 18)]:

$$E_r(r, \theta) = -\operatorname{Re} \{f'(re^{i\theta}) \cdot e^{i\theta}\}, \quad (41, 25)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \operatorname{Im} \{f'(re^{i\theta}) \cdot e^{i\theta}\}. \quad (41, 26)$$

Вообще же формулы (41, 22) и (41, 24) вполне эквивалентны друг другу.

41.4. В некоторых случаях оказывается полезным следующее замечание: так как формулами (41, 22) и (41, 24) определяется комплексный потенциал только той части поля, которая создается поляризованными зарядами σ_k , сидящими на поверхностях раздела среды для того, чтобы получить полный потенциал всего поля, нужно к функции $f(z)$ добавить еще комплексный потенциал $f_a(z)$ первичного поля. Этот последний можно в свою очередь представить в виде комплексного интеграла того же типа [исходя из формулы (41, 19)], после чего объединить подинтегральные функции интегралов, выражающих $f'(z)$ и $f'_a(z)$, или $f(z)$ и $f_a(z)$. Вычисление результирующего значения $f_{\text{полн.}}(z) = f(z) + f_a(z)$ комплексного потенциала суммарного поля оказывается при этом в иных случаях проще, чем вычисление одного только „поляризованного“ потенциала $f(z)$.

Составим выражение для $f'_{\text{полн.}}(z)$ для ключевой задачи, с каковой целью сперва найдем $f'_a(z)$ по всегда верной формуле (41, 19), подставляя в нее вместо \bar{E}_r и \bar{E}_θ значения (34, 9) и (34, 13) преобразованных компонент первичного поля заряженной линии.

Находим:

$$f'_a(z) = \frac{e'}{iz} \int_{(L)} \frac{a^\nu e^{i\beta_\gamma \nu}}{z^\nu \sin \pi \nu} d\nu, \quad (41, 27)$$

где, подобно (41, 21), положено:

$$\beta_\gamma = \begin{cases} (\gamma + \pi) & \text{при } \arg z > \gamma, \\ (\gamma - \pi) & \text{при } \arg z < \gamma. \end{cases} \quad (41, 28)$$

Отсюда также:

$$f_a(z) = ie' \int_{(L)} \frac{a^\nu e^{i\beta_\gamma \nu}}{z^\nu \sin \pi \nu} d\nu, \quad (41, 29)$$

и легко проверить, что эти формулы действительно приводят к исходному потенциалу φ_a первичного поля, выражаемому формулой (33, 8). Для ключевой задачи получается поэтому:

$$f'_{\text{полн.}}(z) = f'(z) + f'_a(z) = \frac{1}{iz} \int_{(L)} \frac{1}{z^\nu \sin \pi \nu} \left[\sum_{(k)} \bar{\sigma}_k e^{i\beta_k \nu} + a^\nu e^{i\beta_\gamma \nu} \right] d\nu, \quad (41, 30)$$

и аналогичная формула для $f_{\text{полн.}}(z) = f(z) + f_a(z)$.

Ниже мы покажем некоторые применения формулы (41, 30).

§ 42. Поле и потенциал в случае двух различных сред

42.1. Рассмотрим в качестве примера нахождение поля и потенциала в случае наличия двух сред: одной ϵ_1 , заполняющей угол β , и второй ϵ_2 , заполняющей угол $(2\pi - \beta)$.¹ При этом, как обычно, ограничимся ключевой задачей.

Сохраняя обозначения § 38 и подставляя найденные там значения (38, 3) $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ в (41, 22), получим, замечая, что $\beta_1 = \pi$:

$$f'(z) = \frac{ae'}{2iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^{\nu} \frac{1}{\sin \pi \nu} \left\{ \frac{[\sin(\pi - \gamma)\nu + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu] (e^{i\pi\nu} + e^{i\beta_2\nu})}{\sin \pi \nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} + \right. \\ \left. + \frac{[\sin(\pi - \gamma)\nu - \sin \nu(\pi - \theta_{2\gamma})] (e^{i\pi\nu} - e^{i\beta_2\nu})}{\sin \pi \nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right\} d\nu. \quad (42, 1)$$

Разберем сначала некоторые частные случаи.

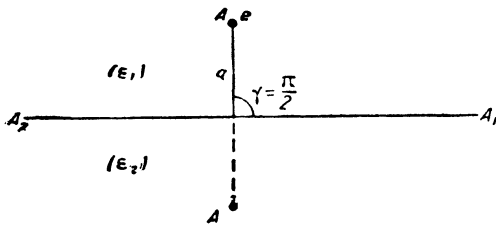


Рис. 63.

42.2. $\theta_2 = \beta = \pi$ (рис. 63).

Каждая среда заполняет целое полупространство, т. е. мы возвращаемся к элементарному случаю, уже разобранному в § 31.

Посмотрим, что дает при этом формула (42, 1), причем рассмотрим сначала поле в

верхней полуплоскости (среда ϵ_1 , $0 < \arg z < \pi$).

Так как при этом, согласно (41, 23), $\beta_2 = 0$ и так как можно, не ограничивая общности, положить $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\theta_{2\gamma} = \frac{\pi}{2}$, и (42, 1) дает:

$$f_1'(z) = \frac{ae'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^{\nu} \frac{1}{\sin^2 \pi \nu} \sin \frac{\pi \nu}{2} (e^{i\nu\pi} + 1) d\nu = \\ = \frac{ae'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^{\nu} \frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{\sin \pi \nu} d\nu, \quad (42, 2)$$

причем индекс (1) у $f_1'(z)$ показывает, что соответствующее значение комплексного потенциала относится к первой среде, т. е. к ϵ_1 .

Полагая для определенности $\frac{a}{|z|} < 1$, можем, как обычно, дополнить путь интегрирования вправо дугой бесконечно-большого круга и тем самым свести дело к нахождению суммы вычетов подынтегральной функции в особых точках, лежащих в правой полуплоскости

¹ См. § 38, рис. 57 и частный случай $\beta = \frac{\pi}{2}$ в § 37, рис. 54.

и в нуле. Вычисляя соответствующие вычеты в точках $v=0, 1, 2, \dots$, получим:

$$\begin{aligned} f_1'(z) &= -2\pi i \frac{ae'}{iz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^k e^{i\frac{\pi k}{2}}}{\pi \cos k\pi} = \\ &= -\frac{2ae'}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{ai}{z}\right)^k = -\frac{2ae'}{z+ai}, \end{aligned} \quad (42, 3)$$

т. е.

$$f_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1 = -2ae' \lg(z+ai) + \text{const.} \quad (42, 4)$$

Отделяя вещественную часть, находим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -2ae' \lg |re^{i\theta} + ai| + \text{const} = \\ &= -\frac{ae'}{\varepsilon_1} \lg(r^2 + 2ar \sin \theta + a^2) + \text{const}, \end{aligned} \quad (42, 5)$$

а это не что иное, как потенциал нити с зарядом $q = ae' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{e}{\varepsilon_1}$ на единицу длины, расположенной в точке A' , соответствующей отраженному заряду (см. рис. 63), как оно и должно быть, согласно общему правилу, данному выше в п. п. 31.2—31.3.

Если бы речь шла о вычислении поля в нижней полуплоскости, т. е. при $\pi < \arg z < 2\pi$, то надо было бы положить $\beta_2 = 2\pi$, в соответствии с чем для $f_2'(z)$ получился бы, вместо (42, 2), интеграл

$$f_2'(z) = \frac{ae'}{iz} \int_{(L)} \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^v e^{i\frac{3\pi v}{2}}}{\sin \pi v} dv, \quad (42, 6)$$

который дал бы значение

$$f_2'(z) = -\frac{2ae'}{z-ai}, \quad (42, 7)$$

т. е.

$$f_2(z) = \varphi_2 + i\psi_2 = -2ae' \lg(z-ai) + \text{const.} \quad (42, 8)$$

Отсюда:

$$\varphi_2 = -\frac{ae'}{\varepsilon_1} \lg(r^2 - 2ar \sin \theta + a^2) + \text{const}, \quad (42, 9)$$

что опять соответствует аналогичной нити, но уже в той точке, в которой находится сам первичный заряд e . Это опять полностью согласуется с данным в п. 31.3 правилом.

Формулы (42, 4) и (42, 8) можно было бы, конечно, получить и непосредственно из формулы (41, 24).

42.3. Так как полное поле и потенциал в обеих средах являются суммой полей и потенциалов, создаваемых поляризационными зарядами на поверхности раздела сред и вычисляемых с помощью формул (42, 4), (42, 5) или (42, 8), (42, 9), и первичного поля от основной нити, комплексный потенциал которой отличается от (42, 8) только отсутствием множителя α , так что он равен

$$f_a(z) = -2e' \lg(z-ai) + \text{const}, \quad (42, 10)$$

то, например, комплексный потенциал $f_{\text{полн.}}^{(1)}(z)$ полного поля в первой среде равен:

$$f_{\text{полн.}}^{(1)} = f_1(z) + f_a(z) = -2e' \lg(z - ai) - 2ae'(z + ai) + \text{const}, \quad (42, 11)$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{полн.}}^{(1)} = & -\frac{e}{\varepsilon_1} \left\{ \lg(r^2 - 2ar \sin \theta + a^2) + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \lg(r^2 + 2ar \sin \theta + a^2) \right\} + \text{const}, \end{aligned} \quad (42, 12)$$

тогда как в нижней получается:

$$f_{\text{полн.}}^{(2)} = f_2(z) + f_a(z) = -\frac{4e}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lg(z - ai) + \text{const}, \quad (42, 13)$$

т. е.

$$\varphi_{\text{полн.}}^{(2)} = -\frac{2e}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lg(r^2 - 2ar \sin \theta + a^2) + \text{const}. \quad (42, 14)$$

42.4. Пусть теперь β — произвольный угол, $a \varepsilon_2 = \infty$ (проводящая вторая среда).

Это тот же случай, который мы уже рассматривали в отношении плотностей σ в п. 38.7.

Так как при этом $\alpha = -1$, $\theta_2 = \beta > \gamma$, $\theta_{2\gamma} = \beta - \gamma$, и так как поле требуется в этом случае найти только внутри угла $0 < \arg z < \beta$, так что $\beta_1 = \pi$ и $\beta_2 = \beta - \pi$, то упрощая подинтегральное выражение в формуле (42, 1), подобно тому, как это делалось в формуле (38, 18), найдем после небольших преобразований:

$$\begin{aligned} f'(z) = & -\frac{e'}{2iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z} \right)^\nu \frac{1}{\sin \pi \nu} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)^\nu}{\cos \frac{\beta \nu}{2}} [e^{i\pi \nu} + e^{i(\beta - \pi) \nu}] + \right. \\ & \left. + \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)^\nu}{\sin \frac{\beta \nu}{2}} [e^{i\pi \nu} - e^{i(\beta - \pi) \nu}] \right\} d\nu = \\ = & -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z} \right)^\nu \frac{1}{\sin \pi \nu} \left\{ \frac{e^{i\pi \nu} \sin(\beta - \gamma)^\nu + e^{-i(\pi - \beta) \nu} \sin \gamma^\nu}{\sin \beta \nu} \right\} d\nu = \\ = & \frac{e'}{2z} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z} \right)^\nu \frac{[e^{i\pi \nu + i\beta \nu - i\gamma \nu} - e^{i\pi \nu - i\beta \nu + i\gamma \nu} + e^{-i\pi \nu + i\beta \nu + i\gamma \nu} - e^{-i\pi \nu + i\beta \nu - i\gamma \nu}]}{\sin \pi \nu \sin \beta \nu} d\nu, \end{aligned}$$

а соединяя попарно средние и крайние члены в прямых скобках, получим:

$$\begin{aligned} f'(z) = & -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z} \right)^\nu \frac{1}{\sin \pi \nu} \left\{ \frac{\sin \pi \nu}{\sin \beta \nu} e^{i(\beta - \gamma) \nu} - e^{i\gamma \nu} \frac{\sin(\pi - \beta) \nu}{\sin \beta \nu} \right\} d\nu = \\ = & -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z} \right)^\nu \left\{ \frac{e^{i(\beta - \gamma) \nu} - e^{i\gamma \nu} \cos \beta \nu}{\sin \beta \nu} + e^{i\gamma \nu} \frac{\cos \pi \nu}{\sin \pi \nu} \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (42, 15)$$

Прибавим теперь к $f'(z)$ функцию $f_a'(z)$ для первичного поля, даваемую формулой (41, 27). Так как, согласно (41, 28), при $\arg z > \gamma$

будет $\beta_\gamma = \gamma + \pi$, а при $\arg z < \gamma$ $\beta_\gamma = \gamma - \pi$, то, складывая (42, 15) и (41, 27), найдем:

$$\begin{aligned} f'_{\text{полн.}}(z) &= f'(z) + f'_a(z) = -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \left\{ \frac{e^{i(\beta-\gamma)\nu} - e^{i\gamma\nu} \cos \beta\nu}{\sin \beta\nu} \mp ie^{i\gamma\nu} \right\} d\nu = \\ &= -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{[e^{i(\beta-\gamma)\nu} - e^{i\gamma\nu} \cdot e^{\pm i\beta\nu}]}{\sin \beta\nu} d\nu, \end{aligned} \quad (42, 16)$$

где знаки (+) и (−) относятся к случаям $\arg z > \gamma$ и $\arg z < \gamma$ соответственно.

При $a/|z| < 1$ получаем, составляя сумму вычетов в правой полуплоскости и при $\nu=0$:

$$\begin{aligned} f'_{\text{полн.}}(z) &= \frac{2\pi e'}{z^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k e^{i\frac{(\beta-\gamma)k\pi}{\beta}} - e^{\frac{ik\pi\gamma}{\beta}}] \left(\frac{a}{z}\right)^{\frac{k\pi}{\beta}} = \\ &= \frac{2\pi e'}{\beta} \left\{ \frac{z^{\frac{\pi}{\beta}-1}}{[z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{-i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}]} - \frac{z^{\frac{\pi}{\beta}-1}}{[z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}]} \right\}. \end{aligned} \quad (42, 17)$$

Интегрируя по z , находим:

$$f_{\text{полн.}}(z) = 2e' \lg \frac{z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{-i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}}{z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}} + \text{const}, \quad (42, 18)$$

что дает для истинного потенциала $\varphi_{\text{полн.}} = \text{Re} \{ f_{\text{полн.}}(z) \} = \text{Re} \{ f_{\text{полн.}}(re^{i\theta}) \}$ значение:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{полн.}} &= 2e' \lg \left| \frac{z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{-i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}}{z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}} \right| + \text{const} = \\ &= -e' \lg \frac{r^{\frac{2\pi}{\beta}} - 2r^{\frac{\pi}{\beta}} a^{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{\pi(\theta-\gamma)}{\beta} + a^{\frac{2\pi}{\beta}}}{r^{\frac{2\pi}{\beta}} - 2r^{\frac{\pi}{\beta}} a^{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{\pi(\theta+\gamma)}{\beta} + a^{\frac{2\pi}{\beta}}}. \end{aligned} \quad (42, 19)$$

Это выражение можно получить и более простым путем, отображая конформно внутренность угла β на полуплоскость.

42.5. Мы сейчас вычислили поле внутри угла β , т. е. в среде с диэлектрической постоянной ϵ_1 . Покажем еще, что из наших формул вытекает и то, что внутри самого проводника, т. е. во второй среде, где $\epsilon_2 = \infty$, поле исчезает.

Будем исходить опять из формулы (42, 1) и заметим, что единственное, что теперь должно быть изменено в только что проделанном расчете, это значение β_2 , которое следует теперь положить, в соот-

ветствии с (41, 23), равным $\beta + \pi$, поскольку $\arg z > \theta_2 = \beta$. Формула (42, 15) заменится теперь поэтому такой:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{e'}{2iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{1}{\sin \pi\nu} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)^\nu}{\cos \frac{\beta\nu}{2}} [e^{i\pi\nu} + e^{i(\pi+\beta)\nu}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)^\nu}{\sin \frac{\beta\nu}{2}} [e^{i\pi\nu} - e^{i(\pi+\beta)\nu}] \right\} = \\ &= -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{e^{i\pi\nu} \cdot e^{i\frac{\beta}{2}\nu}}{\sin \pi\nu} \left[\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)^\nu - i \sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)^\nu \right] d\nu = \\ &= -\frac{e'}{iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{e^{i(\pi+\gamma)\nu}}{\sin \pi\nu} d\nu. \end{aligned} \quad (42, 20)$$

Сравнивая эту формулу со значением (41, 27) функции $f_a'(z)$ для внешнего поля, где, согласно (41, 28), должно быть положено $\beta_\gamma = \pi + \gamma$, поскольку $\arg z > \gamma$, видим, что они в точности равны друг другу по величине, но обратны по знаку. Таким образом, получается:

$$f'_{\text{полн.}}(z) = f'(z) + f_a'(z) = 0, \quad (42, 21)$$

т. е. поле от зарядов, выделившихся на сторонах проводящего угла, полностью нейтрализует первичное поле внутри проводника, и результирующее поле оказывается равным нулю, как оно и должно быть.

42.6. Пусть теперь $\theta_2 = \beta = \frac{\pi}{2}$, а ε_1 и ε_2 произвольны (прямоугольная поверхность раздела, ср. § 37, рис. 54).

Рассмотрим в отдельности поле в первой и во второй среде.

Формула (41, 23) показывает, что в первой среде, где $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, следует положить $\beta_2 = -\frac{\pi}{2}$, причем (42, 1) дает:¹

$$f'(z) = \frac{ae'}{4iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{\left[\sin \lambda_1 \nu \left(e^{i\pi\nu} \cos \frac{\pi\nu}{2} + \frac{a}{2} e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \right) + \sin \lambda_2 \nu \left(\frac{a}{2} e^{i\pi\nu} + e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \cos \frac{\pi\nu}{2} \right) \right]}{\sin^2 \frac{\pi\nu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi\nu}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]} d\nu, \quad (42, 22)$$

причем сохранены обозначения § 37.

Обозначая, как раньше, через δ наименьший положительный корень уравнения $\cos \frac{\pi\delta}{2} = \frac{|a|}{2}$ и выражая интеграл (42, 22) при $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ через сумму вычетов подинтегральной функции в особых точках ее, лежа

¹ Можно также исходить непосредственно из формул (37, 4), (37, 5) и (41, 22).

ших правее пути (L) ,¹ получим после несложных преобразований того же типа, как применявшиеся в §§ 37—39:²

$$\begin{aligned}
 f'(z) = & \frac{e'\rho}{a(1-2\rho^2\cos 2\gamma + \rho^4)} \left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \rho^2 \cos 2\gamma)}{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3i\pi}{2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} \rho^2 \sin 2\gamma \right] - \rho(e^{i\gamma} - \rho^2 e^{-i\gamma}) + \right. \\
 & + \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left(\rho^\delta [(e^{i\pi\delta} \operatorname{sign}(\alpha) + e^{-\frac{i\pi\delta}{2}})(\rho^2 \sin(2-\delta)\lambda_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \delta\lambda_1) + (e^{i\pi\delta} + \operatorname{sign}(\alpha) e^{-\frac{i\pi\delta}{2}})(-\rho^2 \sin(2-\delta)\lambda_2 + \sin \delta\lambda_2)] - \right. \\
 & \left. - \rho^{-\delta} [(e^{-i\pi\delta} \operatorname{sign}(\alpha) + e^{\frac{i\pi\delta}{2}})(\rho^2 \sin(2-\delta)\lambda_1 + \rho^4 \sin \delta\lambda_1) + \right. \\
 & \left. + (e^{-i\pi\delta} + \operatorname{sign}(\alpha) e^{-\frac{i\pi\delta}{2}})(-\rho^2 \sin(2-\delta)\lambda_2 + \right. \\
 & \left. \left. + \rho^4 \sin \delta\lambda_2) \right] \right\}, \quad \left(\rho = \frac{a}{z}\right). \quad (42, 23)
 \end{aligned}$$

Совершенно аналогичным образом найдется и значение $f'(z)$ во второй среде, причем только нужно будет положить в интеграле (42, 1)

$$\beta_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

42. 7. Переходим теперь к рассмотрению общего случая формулы (42, 1), когда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \beta$ и γ произвольны, причем $0 < \beta < 2\pi$ и $0 < \gamma < 2\pi$. При этом можно, очевидно, ограничиться нахождением поля в первой среде, поскольку безразлично, ввиду произвольности угла β , которую из сред считать первой и которую — второй. В соответствии с этим принимаем, что $0 < \arg z < \beta$, что вместе с (41, 23) дает значение $\beta_2 = \beta - \pi$. Формула (42, 1) приобретает при этом такой вид:

$$\begin{aligned}
 f'(z) = & \frac{ae'}{2iz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{1}{\sin \pi\nu} \left\{ \frac{[\sin(\pi - \gamma)\nu + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu](e^{i\pi\nu} + e^{i(\beta - \pi)\nu})}{\sin \pi\nu - \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} + \right. \\
 & \left. + \frac{[\sin(\pi - \gamma)\nu - \sin(\pi - \theta_{2\gamma})\nu](e^{i\pi\nu} - e^{i(\beta - \pi)\nu})}{\sin \pi\nu + \alpha \sin(\pi - \beta)\nu} \right\} d\nu. \quad (42, 24)
 \end{aligned}$$

¹ Эти точки соответствуют положительным корням уравнений $\cos \frac{\pi\nu}{2} = 0$ и $\cos^2 \frac{\pi\nu}{2} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0$ (полюсы первого порядка), а также корням ν_m уравнения $\sin \frac{\pi\nu_m}{2} = 0$ при $\nu_m \geq 0$ (полюсы второго порядка, кроме как при $\nu_0 = 0$).

² При этом следует учесть вытекающие из (37, 3) соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin 2m\lambda_1 &= (-1)^{m+1} \sin 2m\lambda_2 = -\sin 2m\gamma, \\
 \cos 2m\lambda_1 &= (-1)^m \cos 2m\lambda_2 = \cos 2m\gamma,
 \end{aligned} \right\} m \text{ — целое число}$$

а также получающуюся из (37, 19) при $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ формулу:

$$\sum_{k=\mathbb{C}}^{\infty} \xi^k \cos(ku + \alpha) = \frac{\cos \alpha - \xi \cos(\alpha - u)}{1 - 2\xi \cos u + \xi^2}.$$

Вычисляя этот интеграл обычным способом,¹ получим при $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$, пользуясь введенными в § 38 обозначениями:

$$f'(z) = \frac{2e'}{z - ae^{i\gamma}} - \frac{2\pi ae'}{z} \left\{ \sum_{\nu_k^{(1)} > 0} \left(\frac{ae^{i\frac{\beta}{2}}}{z} \right)^{\nu_k^{(1)}} \frac{\cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) \nu_k^{(1)}}{\sin \pi \nu_k^{(1)}} \times \right. \\ \times \frac{\sin(\pi - \gamma) \nu_k^{(1)} + \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu_k^{(1)}}{\pi \cos \pi \nu_k^{(1)} - \alpha(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) \nu_k^{(1)}} + \\ \left. + i \sum_{\nu_k^{(2)} > 0} \left(\frac{ae^{i\frac{\beta}{2}}}{z} \right)^{\nu_k^{(2)}} \frac{\sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) \nu_k^{(2)}}{\sin \pi \nu_k^{(2)}} \frac{[\sin(\pi - \gamma) \nu_k^{(2)} - \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu_k^{(2)}]}{[\pi \cos \pi \nu_k^{(2)} + \alpha(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) \nu_k^{(2)}]} \right\} \quad (42, 25)$$

тогда как при $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$ находим:²

$$f'(z) = \frac{2e'}{z - ae^{i\gamma}} + \frac{2\pi ae'}{z} \left\{ \sum_{\nu_k^{(1)} > 0} \left(\frac{z}{ae^{i\frac{\beta}{2}}} \right)^{\nu_k^{(1)}} \frac{\cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) \nu_k^{(1)}}{\sin \pi \nu_k^{(1)}} \times \right. \\ \times \frac{\sin(\pi - \gamma) \nu_k^{(1)} + \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu_k^{(1)}}{\pi \cos \pi \nu_k^{(1)} - \alpha(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) \nu_k^{(1)}} - \\ \left. - i \sum_{\nu_k^{(2)} > 0} \left(\frac{z}{ae^{i\frac{\beta}{2}}} \right)^{\nu_k^{(2)}} \frac{\sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) \nu_k^{(2)}}{\sin \pi \nu_k^{(2)}} \frac{[\sin(\pi - \gamma) \nu_k^{(2)} - \sin(\pi - \theta_{2\gamma}) \nu_k^{(2)}]}{[\pi \cos \pi \nu_k^{(2)} + \alpha(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) \nu_k^{(2)}]} \right\} \quad \text{при } \left|\frac{z}{a}\right| < 1. \quad (42, 26)$$

Из этой формулы и из (41, 18), в частности, видно, что при приближении к вершине угла, т. е. при $|z| \rightarrow 0$, электрическое поле стремится к бесконечности, как величина порядка $|z|^{\nu_{\min.} - 1}$, где $\nu_{\min.}$ — наименьший из положительных корней уравнений (38, 4), (38, 5).

¹ Через сумму вычетов в правой полуплоскости.

² Можно либо непосредственно выразить в этом случае интеграл (42, 24) через сумму вычетов в левой полуплоскости, либо же сперва преобразовать его введением новой переменной $\nu = -t$ к виду:

$$f'(z) = -\frac{ae'}{2iz} \int_{(L')} \left(\frac{z}{a} \right)^t \frac{1}{\sin \pi t} \left\{ \frac{[\sin(\pi - \gamma)t + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})t](e^{-i\pi t} + e^{-i(\beta - \pi)t})}{\sin \pi t - \alpha \sin(\pi - \beta)t} + \right. \\ \left. + \frac{[\sin(\pi - \gamma)t + \sin(\pi - \theta_{2\gamma})t](e^{-i\pi t} - e^{-i(\beta - \pi)t})}{\sin \pi t + \alpha \sin(\pi - \beta)t} \right\} dt,$$

где путь L' идет, подобно пути L , по мнимой оси снизу вверх, огибая при этом, однако, точку $t = 0$ справа, а не слева.

Глава XV

ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО ДИЭЛЕКТРИКА С ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА СРЕД

§ 43. Нахождение плотностей поляризационных зарядов, выделяющихся на поверхностях раздела

43.1. Рассмотрим теперь вопрос о решении плоской электростатической задачи в том случае, когда области пространства, занятые различными диэлектриками, имеют вид неограниченных плоских слоев постоянной толщины с параллельными друг другу поверхностями раздела.

Так как параллельные друг другу плоскости раздела можно рассматривать, как предельный случай плоскостей, пересекающихся по бесконечно-удаленной прямой, то эта задача является просто предельным случаем „секториальной“ задачи, рассмотренной в предыдущей главе.

Уже из этого видно, что и этот случай должен допускать решение при помощи данной выше общей методики, если только осуществить в общих формулах соответствующий предельный переход. Однако, нужный результат получается еще проще непосредственно. Действительно, пусть, например, имеются три среды $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, плоскости раздела которых A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 64) друг другу параллельны. Предполагая, что истинные заряды на поверхностях раздела отсутствуют, получаем, пользуясь, как всегда, уравнением (30,16):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{\alpha_1'}{2\pi} \left\{ E_y^0 + 2h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_2(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + h^2} \right\}, \\ \sigma_2(x) &= \frac{\alpha_2'}{2\pi} \left\{ -E_y^0 + 2h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + h^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (43,1)$$

причем введены обозначения:

$$\alpha_1' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad \alpha_2' = \frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_3}, \quad (43,2)$$

а E_y^0 и $E_y^{0'}$ — это значения компоненты E_y^0 первичного поля E^0 (поля истинных зарядов) на прямых A_1A_2 и B_1B_2 .

Чтобы решить получившиеся интегральные уравнения, умножаем каждое из них на e^{ixy} , где y — вещественное число, интегрируем по x

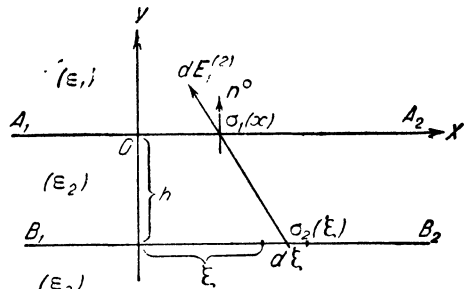


Рис. 64.

в пределах $(-\infty, +\infty)$ и меняем порядок интегрирования в двойных интегралах. Считаем, что все указанные операции имеют смысл и законны, так же, как и некоторые другие, производимые ниже, что в дальнейшем более не оговаривается.

Пользуясь известной формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy} dx}{(x-\xi)^2 + h^2} = e^{iy\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyt} dt}{t^2 + h^2} = 2e^{iy\xi} \int_0^{\infty} \frac{\cos vt dt}{t^2 + h^2} = \frac{\pi}{h} e^{-h|y|} e^{iy\xi}, \quad (43,3)$$

получаем, таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} \sigma_1(x) dx &= \frac{a_1'}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} E_y^0 dx + 2\pi e^{-h|y|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} \sigma_2(\xi) d\xi \right\}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} \sigma_2(x) dx &= \frac{a_2'}{2\pi} \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} E_y^{0'} dx + 2\pi e^{-h|y|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} \sigma_1(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (43,4)$$

Вводя обозначение:

$$f^*(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} f(x) dx, \quad (43,5)$$

можем переписать систему (43,4) так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^*(y) &= \frac{a_1'}{2\pi} \left\{ E_1^{0*} + 2\pi e^{-h|y|} \sigma_2^*(y) \right\}, \\ \sigma_2^*(y) &= \frac{a_2'}{2\pi} \left\{ -E_y^{0'*} + 2\pi e^{-h|y|} \sigma_1^*(y) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (43,6)$$

Мы пришли, таким образом, к системе двух линейных относительно σ_1^* и σ_2^* уравнений, из которых эти величины немедленно находятся. Величина $f^*(y)$ является „преобразованной по Фурье“ от функции $f(x)$, и из нее сама $f(x)$ определяется сразу с помощью хорошо известной формулы:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(y) e^{-iyx} dy, \quad (43,7)$$

являющейся непосредственным следствием интеграла Фурье. Подставляя в формулу (43,7) значения σ_1^* и σ_2^* , находимые из системы (43,6), получаем полное решение поставленной задачи.

Если, например, поле E^0 создается равномерно наэлектризованной по длине нитью, проходящей через точку $M(a, b)$, то

$$\left. \begin{aligned} E_y^0 &= -\frac{2e'b}{(x-a)^2 + b^2}, \\ E_y^{0'} &= -\frac{2e'(b+h)}{(x-a)^2 + (b+h)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (43,8)$$

где e' — свободный заряд, приходящийся на единицу длины нити.

Пользуясь формулой (43,3), находим преобразованные компоненты этого поля:

$$\left. \begin{aligned} E_y^{0*} &= -2e'b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyx} dx}{(x-a)^2 + b^2} = -2\pi e' \gamma_1 e^{-|b| \cdot |y| + iya}, \quad \gamma_1 = \frac{b}{|b|}, \\ E_y^{0'*} &= -2e'(b+h) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyx} dx}{(x-a)^2 + (b+h)^2} = \\ &= -2\pi \gamma_2 e' e^{-|b+h| \cdot |y| + iya}, \quad \gamma_2 = \frac{b+h}{|b+h|}. \end{aligned} \right\} (43,9)$$

(43,6) и (43,9) дают вместе:

$$\sigma_1^*(y) = \frac{\alpha'_1 [E_y^{0*} - \alpha'_2 e^{-h|y|} E_y^{0'*}]}{[1 - \alpha'_1 \alpha'_2 e^{-2h|y|}]} = e' \alpha'_1 e^{ia \cdot y} \frac{(\alpha'_2 \gamma_2 e^{-h'|y|} - \gamma_1 e^{-|b||y|})}{(1 - \beta e^{-2h|y|})}, \quad (43,10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} h' &= h + |b+h|, \\ \beta &= \alpha'_1 \alpha'_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(\epsilon_2 + \epsilon_3)}, \end{aligned} \right\} (43,11)$$

и сходное выражение для σ_2^* . Подставляя значение $\sigma_1^*(y)$ из (43,10) в (43,7), найдем, после элементарного преобразования:

$$\sigma_1(x) = \frac{e' \alpha'_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha'_2 \gamma_2 e^{-h'y} - \gamma_1 e^{-|b|y}}{1 - \beta e^{-2hy}} \cos(a-x) y dy, \quad (43,12)$$

что и дает искомую плотность. Формулу (43,12) можно написать и в несколько иной форме, если разложить знаменатель подынтегральной функции в ряд по степеням βe^{-2hy} ,

$$\frac{1}{1 - \beta e^{-2hy}} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k e^{-2ky}, \quad (43,13)$$

и затем выполнить почленное интегрирование, что допустимо, ибо согласно (43,11), $|\beta| < 1$ при любых конечных значениях всех ϵ_i , так что ряд (43,13) сходится в пределах интегрирования равномерно. Именно, пользуясь интегралом

$$\int_0^{\infty} e^{-my} \cos ny dy = \frac{m}{m^2 + n^2},$$

придем к результату:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{e' \alpha'_1}{\pi} \left\{ \alpha'_2 \gamma_2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{(2kh + h')}{(x-a)^2 + (2kh + h')^2} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{(2kh + |b|)}{(x-a)^2 + (2kh + |b|)^2} \right\}, \end{aligned} \right\} (43,14)$$

что соответствует представлению плотности σ_1 в виде наложения ряда плотностей, индуцируемых многократно отраженными зарядами. Заметим еще, что при $\varepsilon_2 = \infty$ (проводящая пластина) получается $\alpha'_1 = \alpha'_2 = 1$, $\beta = 1$, и в том случае, когда заряженная нить лежит над этой пластиной, т. е. когда $b > 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ и $e' = e/\varepsilon_1$, находим из (43,12):

$$\sigma_1(x) = -\frac{e}{\pi\varepsilon_1} \int_0^{\infty} e^{-by} \cos(a-x) y dy = -\frac{eb}{\pi\varepsilon_1 [(x-a)^2 + b^2]}. \quad (43,15)$$

Это, естественно, совпадает с результатом, который непосредственно получается для этого случая из (31,3), если туда подставить, вместо E_{n1}^0 , величину E_y^0 из (43,8).

В другом предельном случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \infty$ и $b < 0$, т. е. когда заряженная нить помещена между двумя проводящими пластинами, имеем:

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = -1, \quad \beta = 1, \quad h' = 2h - |b|, \quad \gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = +1, \quad e' = e/\varepsilon_2,$$

так что (43,12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{e'}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2hy + |b|y} - e^{-|b|y}}{1 - e^{-2hy}} \cos(a-x) y dy = \\ &= -\frac{e'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh}(h - |b|)y}{\text{sh}(hy)} e^{i|a-x|y} dy. \end{aligned} \quad (43,16)$$

Последний интеграл может быть легко вычислен с помощью теории вычетов, именно, он равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подинтегральной функции в верхней полуплоскости. Составляя эту сумму, находим:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= e' \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k \frac{|a-x|}{h} \pi} \sin(h - |b|) k\pi = \\ &= -\frac{e}{2\varepsilon_2} \frac{\sin(h - |b|) \pi}{\text{ch} \frac{(a-x)\pi}{h} - \cos(h - |b|) \pi}, \end{aligned} \quad (43,17)$$

что, конечно, совпадает с результатом, получаемым обычными методами.

43. 2. Мы разобрали здесь случай двух граничных плоскостей. Совершенно очевидно, что этот метод переносится без всяких изменений на общий случай какого угодно числа параллельных граничных плоскостей, почему мы здесь на этом подробнее останавливаться не будем.

§ 44. Нахождение компонент поля

44. 1. Покажем теперь, что подобно тому, как это имело место в задаче с секториальным распределением сред, можно и в данном случае непосредственно перейти от значений σ_n^* преобразованных плотностей к величинам E_x^* и E_y^* преобразованных компонент поля. Действительно, если имеется n параллельных граничных плоскостей с плот-

ностями σ_k ($k = 1, 2 \dots n$) (рис. 65), то для компонент поля \mathbf{E} , создаваемого этими плотностями в любой точке $M(x, y)$, находим

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{k=1}^{k=n} E_x^{(k)} = 2 \sum_{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_k(\xi)(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + (y-a_k)^2}, \\ E_y &= \sum_{k=1}^{k=n} E_y^{(k)} = 2 \sum_{(k)} (y-a_k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_k(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + (y-a_k)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (44,1)$$

где a_k — расстояние k -ой поверхности раздела от оси X .

Составляем „преобразованные по Фурье“ от E_x и E_y , т. е. выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_x^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} E_x dx, \\ E_y^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuy} E_y dx. \end{aligned} \right\} \quad (44,2)$$

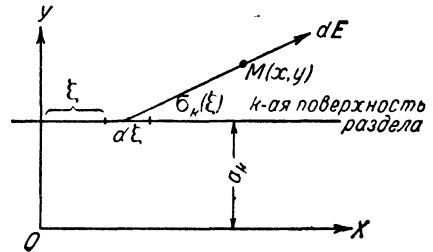


Рис. 65.

Пользуясь формулами § 43 и значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iut} t dt}{t^2 + h^2} = \gamma_u \pi i e^{-h \cdot |u|}, \quad \gamma_u = \frac{\pi}{|u|}, \quad h > 0, \quad (44,3)$$

легко получающимся из среднего интеграла формулы (43,3) путем дифференцирования последнего по параметру u , находим:

$$\begin{aligned} E_x^* &= 2 \sum_{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_k(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} (x-\xi) dx}{(x-\xi)^2 + (y-a_k)^2} = \\ &= 2\pi i \gamma_u \sum_{(k)} e^{-|y-a_k||u|} \sigma_k^*(u), \end{aligned} \quad (44,4)$$

$$E_y^* = 2\pi \sum_{(k)} \gamma_{-a_k} e^{-|y-a_k||u|} \sigma_k^*(u), \quad (44,5)$$

причем попережнему предполагается, что порядок интегрирования можно изменять. Поскольку величины $\sigma_k^*(u)$ непосредственно находятся по изложенному в предыдущем параграфе способу, и, стало быть, являются величинами известными, — остается, для нахождения самих компонент поля E_x и E_y по их преобразованным значениям (44,4) и (44,5), подставить эти последние в формулы обращения:¹

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x^* e^{-ixu} du, \\ E_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y^* e^{-ixu} du, \end{aligned} \right\} \quad (44,6)$$

чтобы получить искомое решение.

¹ См. (43,7).

Входящие в (44,6) интегралы легко вычисляются, хотя бы указанным в § 43 способом, и тем самым опять получаются окончательные выражения непосредственно для компонент поля, минуя вычисление плотностей σ_k .

§ 45. Нахождение комплексного потенциала

45.1. Мы показали в предыдущем параграфе, каким образом можно непосредственно найти компоненты E_x и E_y искомого поля, не вычисляя предварительно плотностей σ_k поляризационного заряда.

Можно, однако, еще более упростить решение задачи, если от компонент поля, даваемых выражениями (44,6), перейти к нахождению комплексного потенциала $f(z) = f(x + iy) = \varphi + i\psi$ этого поля, причем,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (45,1)$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (45,2)$$

Замечая, что

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (45,3)$$

и пользуясь уравнениями (45,1) и (44,6), находим:

$$-f'(z) = E_x - iE_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (E_x^* - iE_y^*) e^{-ixu} du. \quad (45,4)$$

С помощью формул (44,4) и (44,5) можно переписать это соотношение следующим образом:

$$f'(z) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{(k)} (\gamma_{y-a_k} - \gamma_u) \sigma_k^*(u) e^{-ixu - |y-a_k||u|} du, \quad (45,5)$$

где a_k — расстояние k -ой поверхности раздела от оси X , и суммирование распространяется на все поверхности раздела.

В подынтегральную функцию в (45,5) входят члены вида

$$e^{-ixu}, \quad e^{-|y-a_k||u|},$$

т. е. они содержат множители типа

$$e^{-iu(x \pm iy)}.$$

Покажем, что комбинация $(x - iy)$ на самом деле не встречается, так что подынтегральная функция зависит только от $(x + iy)$.

Чтобы это проверить, заметим, что при $u > 0$ будет $\gamma_u = +1$, а пока $y - a_k > 0$, то и $\gamma_{y-a_k} = +1$, так что при этом $(\gamma_u - \gamma_{y-a_k}) = 0$. Итак, при $u > 0$ в (45,5) остаются лишь те члены, в которых $y - a_k < 0$, т. е.

те, для которых $|y - a_k| \cdot |u| = (a_k - y)u$. Для них $\gamma_u - \gamma_{y - a_k} = 2$ и $e^{-ixu} \cdot e^{-|y - a_k| |u|} = e^{-iu(x + iy)}$. $e^{-a_k u} = e^{-izu - a_k u}$.

Далее, если $u < 0$, то $\gamma_u = -1$, и отличны от нуля только члены с $\gamma_{y - a_k} = +1$, т. е. те, в которых $y - a_k > 0$. Так как в этом случае $|y - a_k| = y - a_k$ и $|u| = -u$, то в отличных от нуля членах будет при этом:

$$e^{-ixu} \cdot e^{-|y - a_k| |u|} = e^{-i(x + iy)u} \cdot e^{-a_k u} = e^{-izu - a_k u}.$$

Поэтому, пользуясь непосредственно ясными обозначениями, найдем:

$$f'(z) = -2i \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{(a_k > y)} \sigma_k^*(u) e^{-a_k u - iuz} du - \int_{-\infty}^0 \sum_{(a_k < y)} \sigma_k^*(u) e^{-a_k u - iuz} du \right\}, \quad (45,6)$$

причем, так как $y = \text{Im}(z)$, то можно записать этот результат еще так:

$$f'(z) = 2i \left\{ \int_0^{\infty} e^{+iuz} \sum_{[a_k < \text{Im}(z)]} \sigma_k^*(-u) e^{a_k u} du - \int_0^{\infty} e^{-iuz} \sum_{[a_k > \text{Im}(z)]} \sigma_k^*(u) e^{-a_k u} du \right\}. \quad (45,7)$$

Если допустимо интегрирование под знаком интеграла, то отсюда получается еще:

$$f(z) = 2 \left\{ \int_0^{\infty} e^{iuz} \sum_{[a_k < \text{Im}(z)]} \sigma_k^*(-u) e^{a_k u} \frac{du}{u} + \int_0^{\infty} e^{-iuz} \sum_{[a_k > \text{Im}(z)]} \sigma_k^*(u) e^{-a_k u} \frac{du}{u} \right\}, \quad (45,8)$$

и это и есть окончательная формула для комплексного потенциала в случае произвольного числа сред с параллельными друг другу граничными плоскостями.

Глава XVI

ПЛОСКАЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

§ 46. Связь между решениями плоских электростатических и магнитостатических задач при одинаковой форме разграничивающих различные среды поверхностей

46.1. Пусть в пространстве имеется ряд примыкающих друг к другу различных однородных изотропных сред, разграниченных цилиндри-

ческими поверхностями, образующие которых все параллельны некоторой прямой, которую примем за ось ζ праввинтовой декартовой системы координат (ξ, η, ζ) с ортами ξ^0, η^0, ζ^0 . Оси $O\xi$ и $O\eta$ расположим в плоскости чертежа, как показано на рис. 66, тогда как ось $O\zeta$ направим вверх. ABC — след пересечения с плоскостью чертежа поверхности, разграничивающей i -ую и k -ую среды.

Пусть вся система внесена во внешнее поле, не зависящее от ζ и не имеющее составляющей по этой оси, так что имеем дело с плоской задачей.

Сравним друг с другом две задачи:

1) Электростатическую, когда различные среды — это диэлектрики с диэлектрическими постоянными $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, а внешнее (первичное) поле создается зарядами, — бесконечными нитями по оси ζ , — с объемной плотностью $\rho = f(\xi, \eta)$. При этом предполагаем, что на поверхностях раздела истинных зарядов нет.

2) Магнитостатическую задачу, отвечающую тем же очертаниям сред, являющихся на этот раз магнетиками и обладающих соответственно магнитными проницаемостями $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, тогда как первичное магнитное поле создается бесконечно-длинными токовыми нитями, параллельными оси ζ , причем ζ -овая составляющая плотности j_ζ этих токов равна объемной плотности ρ электрических зарядов первой задачи, т. е. $j_\zeta = f(\xi, \eta)$.

Составляющие j_ξ и j_η токов по другим осям, согласно сказанному, полагаем равными нулю.

Покажем, что решение одной из этих задач полностью сводится к решению второй. Для этого выпишем параллельно основные уравнения и граничные условия для обеих задач и сравним их друг с другом.

В случае электростатической задачи имеем, согласно (2,20), для потенциала $\varphi^{(i)}$ в i -ой среде:

$$\Delta\varphi^{(i)} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon_i}, \quad (2,20)$$

что в нашем случае принимает вид:

$$\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial\eta^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon_i} f(\xi, \eta). \quad (46,1)$$

Граничные условия на поверхности раздела i -ой и k -ой сред будут, согласно (2,21), если считать, что на этой поверхности нет истинных поверхностных зарядов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial s} &= \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial s}, \\ \epsilon_i \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial n} &= \epsilon_k \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (2,21)$$

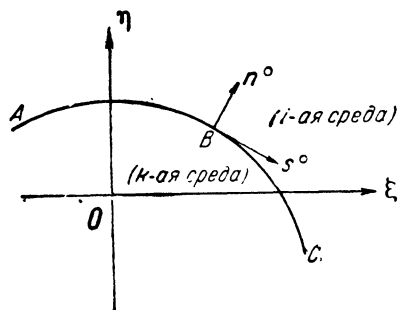


Рис. 66.

причем дифференцирование производится по направлениям касательной и нормали к граничной кривой.

Орты \mathbf{s}^0 и \mathbf{n}^0 касательной и нормали будем считать направленными таким образом, чтобы они, вместе с ортом ζ^0 , составляли правовинтовую систему. Обозначая при этом через $s_\xi^0, s_\eta^0, n_\xi^0, n_\eta^0$ проекции этих ортов на оси ξ и η , легко найдем соотношения:

$$\mathbf{n}^0 = [\zeta^0, \mathbf{s}^0] = -s_\eta^0 \xi^0 + s_\xi^0 \eta^0, \quad (46,2)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= (\text{grad } \varphi, \mathbf{s}^0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} s_\xi^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} s_\eta^0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= (\text{grad } \varphi, \mathbf{n}^0) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} s_\eta^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} s_\xi^0. \end{aligned} \right\} \quad (46,3)$$

Для магнитоэлектростатической задачи имеем, согласно п. 2.5:

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mu_i \mathbf{H}^{(i)} = \text{rot } \mathbf{A}^{(i)}, \quad (46,4)$$

причем в нашем случае будет [см. там же (2,31) и (2,30)]:

$$A_\xi^{(i)} = A_\eta^{(i)} = 0, \quad A_\zeta^{(i)} = A^{(i)} \quad (46,5)$$

и

$$\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial \eta^2} = -\frac{4\pi\mu_i}{c} j_\zeta = -\frac{4\pi\mu_i}{c} f(\xi, \eta). \quad (46,6)$$

Граничные условия будут, согласно (1,21) и (1,23):

$$H_s^{(i)} = H_s^{(k)}, \quad \mu_i B_n^{(i)} = \mu_k B_n^{(k)}. \quad (46,7)$$

Из (46,4) и (46,5) следует, что

$$B_\xi^{(i)} = \mu_i H_\xi^{(i)} = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial \eta}, \quad (46,8)$$

и

$$B_\eta^{(i)} = \mu_i H_\eta^{(i)} = -\frac{\partial A^{(i)}}{\partial \xi}. \quad (46,9)$$

Далее,

$$B_s^{(i)} = (\mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{s}^0) = B_\xi^{(i)} s_\xi^0 + B_\eta^{(i)} s_\eta^0 = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial \eta} s_\xi^0 - \frac{\partial A^{(i)}}{\partial \xi} s_\eta^0 = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial n} \quad (46,10)$$

и

$$B_n^{(i)} = (\mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{n}^0) = -\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial \eta} s_\eta^0 + \frac{\partial A^{(i)}}{\partial \xi} s_\xi^0 \right) = -\frac{\partial A^{(i)}}{\partial s}, \quad (46,11)$$

причем учтены соотношения (46,3). Это дает возможность переписать (46,7) таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial s} &= \frac{\partial A^{(k)}}{\partial s}, \\ \frac{c}{\mu_i} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial n} &= \frac{c}{\mu_k} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (46,12)$$

где c — та же постоянная (скорость света), как в (46,6).

Сравнение двух групп уравнений, — электростатической — (46,1) и (2,21), и магнитной, — (46,6) и (46,12), непосредственно показывает,¹ что если известно решение одной из них, например, первой, то достаточно в этом решении заменить все ε_i через $\frac{c}{\mu_i}$,² чтобы получить решение второй.

Таким образом, если известен потенциал φ как функция координат ξ, η и величин ε_i , рассматриваемых, как параметры, так что

$$\varphi^{(i)} = F(\xi, \eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (46,13)$$

то вектор-потенциал соответствующей магнитной задачи будет просто:

$$A^{(i)} = F\left(\xi, \eta, \frac{c}{\mu_1}, \frac{c}{\mu_2}, \dots, \frac{c}{\mu_n}\right), \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (46,14)$$

Это же, очевидно, справедливо и для комплексных потенциалов, т. е. если

$$\varphi^{(i)} = \operatorname{Ref}_i(z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad z = \xi + i\eta, \quad (46,15)$$

то

$$A^{(i)} = \operatorname{Ref}_i\left(z, \frac{c}{\mu_1}, \frac{c}{\mu_2}, \dots, \frac{c}{\mu_n}\right). \quad (46,16)$$

46.2. Следствие. Если рассматривается „ключевая“ электростатическая задача, причем источником первичного поля является линейный проводник с зарядом e на единицу длины, то в соответствующей „ключевой“ магнитной задаче, когда первичное поле создается линейным током I , нужно, кроме указанной замены $\varepsilon_i \rightarrow \frac{c}{\mu_i}$, просто заменить еще e на I , так как $e = \int_{(S)} \rho df$, где интеграл распространен по бесконечно-малой площади сечения заряженной нити, тогда как во втором случае $I = \int_{(S)} j_c df$, и интеграл берется по той же площади сечения токовой нити, причем $j_c = \rho$.

§ 47. Примеры решения магнитостатических задач при помощи теоремы § 46

Рассмотрим несколько примеров на применение найденных правил.

47. 1. В качестве первого примера, найдем поле токовой нити с током I , находящейся в неограниченной среде с магнитной проницаемостью μ и проходящей через точку (a, γ) (рис. 67). Комплексный потенциал для соответствующего электростатического случая, когда

¹ Нужно еще добавить, что для обеих задач также и поведение функций φ и A на бесконечности должно быть вполне одинаковым.

² Если измерять ток в электромагнитных единицах, то c выпадает, и будет просто $\varepsilon_i \rightarrow \frac{1}{\mu_i}$.

через точку (a, γ) проходит заряженная нить с зарядом e на единицу длины, равен, согласно (42,10):

$$f(z) = -\frac{2e}{c} \lg(z - ae^{i\gamma}) + \text{const},$$

а соответствующий вещественный потенциал:

$$\varphi = \text{Re}f(z) = -\frac{e}{c} \lg[r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + a^2] + \text{const}. \quad (47,1)$$

Поэтому вектор-потенциал магнитного поля для рассматриваемой здесь магнитной задачи получится, согласно общему правилу, из (47,1) путем замены e через $\left(\frac{c}{\mu}\right)$ и e через I , т. е. будет

$$A = -\frac{I\mu}{c} \lg[r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + a^2] + \text{const}. \quad (47,2)$$

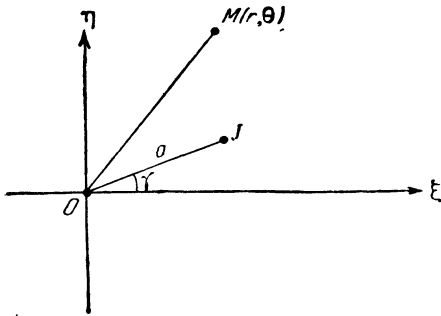


Рис. 67.

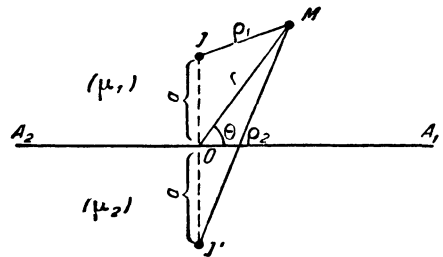


Рис. 68.

Для компонент создаваемого током I магнитного поля найдем согласно (46,4), значения:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = -\frac{2Ia \sin(\theta - \gamma)}{c[r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + a^2]}, \\ H_\theta &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2I[r - a \cos(\theta - \gamma)]}{c[r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + a^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (47,3)$$

47. 2. В качестве второго примера рассмотрим случай двух различных сред μ_1 и μ_2 с плоской поверхностью раздела, причем первичное магнитное поле создается линейным током I , проходящим через точку $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ в первой среде (рис. 68).

Так как эта задача точно соответствует решенной выше в п. п. 42. 2.—42. 3 электростатической задаче, то непосредственно получаем из данных там формул (42,12) и (42,14):

$$A^{(1)} = -\frac{I\mu_1}{c} \left\{ \lg(r^2 - 2ar \sin \theta + a^2) + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \lg(r^2 + 2ar \sin \theta + a^2) \right\} + \text{const} \quad (47,4)$$

$$\text{и} \quad A^{(2)} = -\frac{2I\mu_1\mu_2}{c(\mu_1 + \mu_2)} \lg(r^2 - 2ar \sin \theta + a^2) + \text{const}. \quad (47,5)$$

Если предположить, что $\mu_2 = \infty$ (вторая среда — идеальное железо), то эти формулы переходят в такие:

$$A^{(1)} = -\frac{2I\mu_1}{c} \{ \lg \rho_1 + \lg \rho_2 \} + \text{const}, \tag{47,6}$$

$$A^{(2)} = -\frac{4I\mu_1}{c} \lg \rho_1, \tag{47,7}$$

где $\rho_1 = \sqrt{r^2 - 2ar \sin \theta + a^2}$ и $\rho_2 = \sqrt{r^2 + 2ar \sin \theta + a^2}$ — это расстояния от истинного тока I и от его „отражения“ в точке $r = a, \theta = -\frac{\pi}{2}$ до той точки $M(r, \theta)$, в которой вычисляется вектор-потенциал. Заметим, что как показывают формулы (47,6) и (47,7), отраженный ток в этом случае равен первичному по величине и совпадает с ним по направлению, как оно и должно быть, согласно хорошо известному правилу.

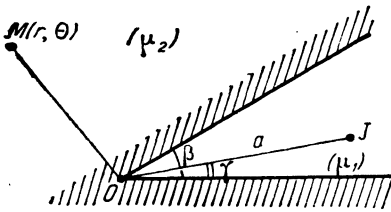


Рис. 69.

47. 3. Аналогичным образом можно использовать данное в п. 31.5 решение электростатической задачи для диэлектрического цилиндра, чтобы получить из него решение соответствующей магнитной задачи.

Так, например, для вектор-потенциала $A^{(2)}$ магнитного поля возникающего внутри цилиндра с магнитной проницаемостью μ_2 , окруженного средой μ_1 , получим, считая, что первичное магнитное поле создается линейным током I , расположенным на расстоянии a от оси цилиндра:¹

$$A^{(2)} = -\frac{2I\mu_1\mu_2}{c(\mu_1 + \mu_2)} \lg(a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) + \text{const}. \tag{47,8}$$

Столь же просто можно получить и значение $A^{(1)}$ вектор-потенциала во внешней по отношению к цилиндру среде.

47. 4. Рассмотрим теперь вопрос о распределении магнитной индукции вне и внутри неограниченного двугранного угла, заполненного идеальным железом с бесконечно-большой проницаемостью,² внесенного в поле линейного тока I , параллельного ребру угла.

Будем считать, что железо заполняет угол $(2\pi - \beta)$ (рис. 69¹), где $\mu = \mu_2 = \infty$, что остальная часть пространства (угол β) заполнена средой с $\mu = \mu_1$, и что ток I проходит через точку $r = a, \theta = \gamma$.

Так как при таком характере распределения сред μ_1 и μ_2 магнитная задача в точности соответствует разобранный и решенной в п. 42. 7 электростатической задаче для двух сред ϵ_1 и ϵ_2 , то можно было бы обычным способом перейти от решения этой последней к соответствующей

¹ Ср. п. 31. 5 и рис. 37. Обозначения сохраняем те же, как там.

² Этот случай соответствует схематизированному рассмотрению поля и индукции вблизи от ребра полюсного башмака.

щим формулам для нашей теперешней магнитной задачи, полагая, как всегда, $\varepsilon_1 = \frac{c}{\mu_1}$ и $\varepsilon_2 = \frac{c}{\mu_2}$, $e = l$ и $\mu_2 = \infty$. Однако, прямое вычисление по формуле (42,1), в которой с самого начала произведена соответствующая замена и положено $\mu_2 = \infty$, ведет к цели быстрее, по крайней мере, пока речь идет о вычислении поля или индукции вне железа. Приведем здесь, поэтому, соответствующие вычисления.

Согласно общему правилу, вектор-потенциал $A^{(1)}$ в первой среде находится как вещественная часть функции $f_{\text{полн.}}(z) = f_1(z) + f_a(z)$, где $f_1(z)$ и $f_a(z)$ определяются формулами (42,1) и (41,29) при $\arg z < \beta$ и где должно быть положено $\alpha = \frac{c/\mu_1 - c/\mu_2}{c/\mu_1 + c/\mu_2} = +1$ и $e' = \frac{e}{\varepsilon_1} = \frac{l\mu_1}{c}$.

Получаем совершенно так же, как в п. п. 42. 4—42. 5:

$$\begin{aligned} f_1'(z) &= -\frac{l\mu_1}{cz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{1}{\sin \pi\nu} \left\{ \frac{e^{+i\pi\nu} \cos(\beta - \gamma)^\nu - e^{-i(\pi - \beta)^\nu} \cos \gamma^\nu}{\sin \beta\nu} \right\} d\nu = \\ &= \frac{l\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{1}{\sin \pi\nu} \left\{ \frac{\sin \pi\nu}{\sin \beta\nu} e^{i(\beta - \gamma)^\nu} + e^{i\gamma\nu} \frac{\sin(\pi - \beta)^\nu}{\sin \beta\nu} \right\} d\nu = \\ &= \frac{l\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \left\{ \frac{e^{i(\beta - \gamma)^\nu} + e^{i\gamma\nu} \cdot \cos \beta\nu}{\sin \beta\nu} - e^{i\gamma\nu} \frac{\cos \pi\nu}{\sin \pi\nu} \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (47,9)$$

Добавляя сюда величину $f_a'(z)$, которая равна, согласно (41,27) и правилу перехода от электростатической задачи к магнитной

$$f_a'(z) = \frac{l\mu_1}{ciz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{e^{i(\gamma \pm \pi)^\nu}}{\sin \pi\nu} d\nu, \quad (47,10)$$

причем знаки (+) и (−) относятся соответственно к случаям $\arg z > \gamma$ и $\arg z < \gamma$, получим:

$$\begin{aligned} f_{\text{полн.}}(z) &= f_1(z) + f_a(z) = \frac{l\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \left\{ \frac{e^{i(\beta - \gamma)^\nu} + e^{i\gamma\nu} \cos \beta\nu}{\sin \beta\nu} \pm ie^{i\gamma\nu} \right\} d\nu = \\ &= \frac{l\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{[e^{i(\beta - \gamma)^\nu} + e^{i\gamma\nu} \pm ie^{i\beta\nu}]}{\sin \beta\nu} d\nu = \\ &= -\frac{2\pi l\mu_1}{c\beta} \left\{ \frac{z^{\frac{\pi}{\beta} - 1}}{z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{-i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}} + \frac{z^{\frac{\pi}{\beta} - 1}}{z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}} \right\}, \end{aligned} \quad (47,11)$$

так что

$$f_{\text{полн.}}^- = -\frac{2l\mu_1}{c} \lg [z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{-i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}] [z^{\frac{\pi}{\beta}} - (ae^{i\gamma})^{\frac{\pi}{\beta}}] + \text{const}, \quad (47,12)$$

и

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \text{Re} \{ f_{\text{полн.}} \} = -\frac{l\mu_1}{c} \lg \left[\left(r^{\frac{2\pi}{\beta}} - 2r^{\frac{\pi}{\beta}} a^{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{\pi(\theta - \gamma)}{\beta} + a^{\frac{2\pi}{\beta}} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(r^{\frac{2\pi}{\beta}} - 2r^{\frac{\pi}{\beta}} a^{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{\pi(\theta + \gamma)}{\beta} + a^{\frac{2\pi}{\beta}} \right) \right] + \text{const}. \end{aligned} \quad (47,13)$$

Найдем теперь комплексный вектор-потенциал в железе. Получаем так же, как (47,9):

$$f_2'(z) = \frac{I\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu e^{i\left(\pi + \frac{\beta}{2}\right)\nu} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu \cdot \left[\sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu \cos\frac{\beta\nu}{2}\right]}{\sin\frac{\beta\nu}{2} \cdot \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} - \right. \\ \left. - i \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu \left[\cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu \sin\frac{\beta\nu}{2}\right]}{\cos\frac{\beta\nu}{2} \cdot \sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} \right\} d\nu, \quad (47,14)$$

а пользуясь формулой

$$\sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu \cos\frac{\beta\nu}{2} + \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu \sin\frac{\beta\nu}{2} = \sin\pi\nu, \quad (47,15)$$

чтобы заменить попарные произведения в квадратных скобках в формуле (47,14) соответственно через два других члена в формуле (47,15), находим:

$$f_2'(z) = \frac{I\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu e^{i\left(\pi + \frac{\beta}{2}\right)\nu} \left\{ \sin\pi\nu \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu}{\sin\frac{\beta\nu}{2} \cdot \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu}{\cos\frac{\beta\nu}{2} \sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} \right] - \left[\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu - i \sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu \right] \right\} d\nu,$$

т. е.

$$f_2'(z) = \frac{I\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu}{\sin\frac{\beta\nu}{2} \cdot \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu}{\cos\frac{\beta\nu}{2} \sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} \right] e^{i\left(\pi + \frac{\beta}{2}\right)\nu} - \frac{e^{i(\gamma + \pi)\nu}}{\sin\pi\nu} \right\} d\nu. \quad (47,16)$$

Добавляя сюда величину $f_a(z)$, которая теперь дается формулой (47,10) со знаком (+) в показателе, так как $\arg z > \gamma$, получим:

$$f_{\text{полн.}}(z) = f_2'(z) + f_a(z) = \frac{I\mu_1}{icz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu}{\sin\frac{\beta\nu}{2} \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} - \right. \\ \left. - i \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu}{\cos\frac{\beta\nu}{2} \sin\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)\nu} \right] e^{i\left(\pi + \frac{\beta}{2}\right)\nu} + \frac{e^{i(\gamma + \pi)\nu}}{\sin\pi\nu} d\nu. \quad (47,17)$$

Этой формуле можно придать еще другой вид. Именно, приводя оба члена в скобках к общему знаменателю и заменяя входящие при этом произведения

$$\cos\frac{\beta\nu}{2} \cos\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu \text{ и } \sin\frac{\beta\nu}{2} \sin\left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\nu$$

через

$$\frac{1}{2} [\cos\gamma\nu \pm \cos(\beta - \gamma)\nu],$$

найдем после элементарных преобразований:

$$f_{\text{полн.}}(z) = -\frac{2I\mu_1}{cz} \int_{(L)} \left(\frac{a}{z}\right)^\nu \frac{[e^{2\pi\nu i} \cos \gamma\nu - e^{i\beta\nu} \cdot \cos(\beta - \gamma)\nu]}{\sin \beta\nu \cdot \sin(2\pi - \beta)\nu} d\nu. \quad (47,18)$$

Вычисление этого интеграла совершается обычным путем, причем приходится различать случаи, когда β и $(2\pi - \beta)$ несоизмеримы, так что все полюсы простые, и когда $\beta = \pi \frac{p}{q}$ где p и q — взаимно простые целые числа, так что точки $\nu_k = kq$, $k = 1, 2, \dots, \infty$ соответствуют кратным корням знаменателя подинтегральной функции. Так как вычисление в обоих случаях протекает полностью по обычной схеме, то мы его здесь проводить не будем. Дадим лишь результат для случая, когда $\beta = \frac{3\pi}{2}$ (прямоугольный башмак, рис. 70), именно:

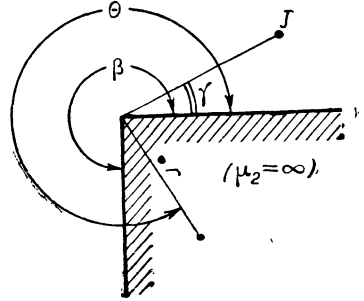


Рис. 70.

$$f_{\text{полн.}}(z) = \frac{8I\mu_1}{3ac} \left(\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{e^{-\frac{2\gamma i}{3}} - \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}{1 - 2\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\gamma}{3} + \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{4}{3}}} - \frac{2i \sin \frac{2}{3}(\gamma - \pi)}{1 - 2\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3}(\gamma - \pi) + \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{4}{3}}} \right\}. \quad (47,19)$$

Так как непосредственное применение формулы (47,18) для вычисления вектора-потенциала $A^{(1)}$ и магнитной индукции внутри железа по существу немногим проще, чем получение его же из формул п. 42.7 при $\epsilon_1 = c/\mu_1$, $\epsilon_2 = c/\mu_2 = 0$, $e = I$, то мы здесь на этом останавливаться не будем. Заметим только еще, что полагая $A_{\text{полн.}}^{(1)} = \text{const}$ и $A_{\text{полн.}}^{(2)} = \text{const}$, получаем уравнения линий магнитной индукции в первой и второй средах.¹

¹ Действительно, уравнения линий магнитной индукции получаются из дифференциального уравнения $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y}$, т. е. согласно (46,8), (46,9), $\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0$, откуда и следует, что вдоль такой линии $A = \text{const}$.

Глава XVII

ИНВЕРСИЯ В КРУГЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

§ 48. Геометрическая часть

48.1. Инверсия в круге представляет собой геометрическое преобразование, с помощью которого точкам и фигурам некоторой исходной картины на плоскости сопоставляются их „отражения“ в круге по следующему закону: выберем на исходной плоскости (рис. 71) некоторую произвольную точку O , которую назовем центром инверсии, и опишем вокруг нее круг радиусом R . Назовем изображением или отражением какой-либо другой точки A в этом круге такую точку A' , лежащую на прямой OA , чтобы произведение расстояний этих точек до центра инверсии равнялось R^2 , т. е. чтобы было

$$OA \cdot OA' = R^2. \quad (48,1)$$

Это правило будем применять как к точкам вне, так и внутри круга, так что отражение точки, лежащей вне круга, попадает внутрь его и наоборот.

Если на плоскости имеется какая-либо кривая MN (рис. 71), то, отражая каждую точку ее в круге, получим „отраженную“ кривую $M'N'$, являющуюся „изображением в круге“ первичной. Из этого следует, что если уравнение кривой MN в полярных координатах (r, θ) с началом в точке O имеет вид $f(r, \theta) = 0$, то уравнение отраженной кривой $M'N'$ будет $f\left(\frac{R^2}{r}, \theta\right) = 0$.

48.2. Покажем, что при инверсии всякий круг переходит тоже в круг (включая, как предельный случай его, прямую). Действительно, пусть P и Q — две произвольные точки на отражаемом круге (рис. 72), а AB — круг инверсии радиуса R с центром в O . Обозначим через P' и Q' соответствующие отраженные точки, через P'' и Q'' — вторые точки пересечения прямых OP и OQ с первичной окружностью, и через T — одну из точек, в которых прямые, проведенные из O , касаются этой окружности.

По известной теореме геометрии

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = OT^2, \quad (48,2)$$

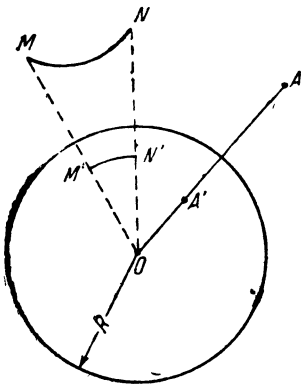


Рис. 71.

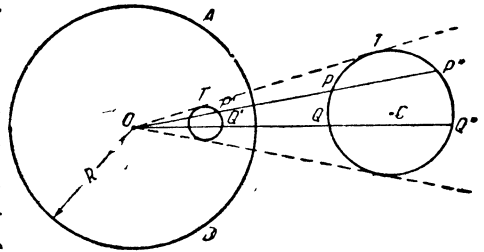


Рис. 72.

тогда как по правилу отражения

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = R^2. \quad (48,3)$$

Формулы (48,2) и (48,3) показывают, что отношение

$$\frac{OP}{OP''} = \frac{OQ'}{OQ''} = \frac{R^2}{OT^2} \quad (48,4)$$

одинаково для всех пар точек исходного круга и его отражения, т. е. что обе эти фигуры подобны друг другу. Итак, отражение круга это тоже круг, что и требовалось доказать.

48.3. Особого исследования требует случай, когда отражаемая окружность проходит через центр инверсии (рис. 73). Пусть OBA — это исходная окружность, OA — ее диаметр, а A' и B' — отражения, точек ее A и B .

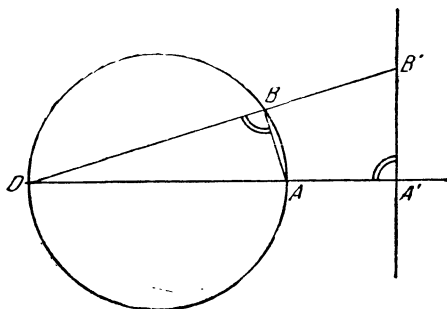


Рис. 73.

Так как $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = R^2$ так что $OB/OA = OA'/OB'$, то треугольники OAB и $OB'A'$ — подобны, и, стало быть, $\angle OA'B' = \angle OBA$, а так как угол OBA прямой, как опирающийся на диаметр, то геометрическое место точек B' , являющихся отражениями точек B окружности, это прямая, перпендикулярная к диаметру OA круга. Обратное, если будем отражать в круге бесконечную прямую, то получим окружность, проходящую через центр инверсии. Части такой прямой соответствует некоторая дуга этой окружности.

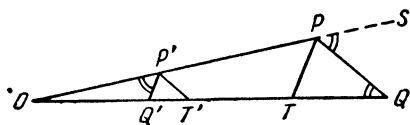


Рис. 74.

48.4. Отметим еще, что изображение, получаемое при инверсии, обладает свойством конформности, т. е. имеет место подобие основной

и отраженной картин в бесконечно-малых частях. Действительно, пусть O — центр инверсии (рис. 74), PQ — отражаемый бесконечно-малый отрезок, $P'Q'$ — его отражение.

Так как $OP \cdot OP' = R^2$, $OQ \cdot OQ' = R^2$, так что $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$, то отсюда следует, что $\triangle OPQ$ и $\triangle OQ'P'$ подобны.

Положим, $OP = r$, $OP' = r'$. Так как PQ считаем бесконечно-малым, то, во-первых, $\angle SPQ = \angle PQO = \angle OP'Q'$, так что отрезки PQ и $P'Q'$ составляют одинаковые углы с прямой OP , а, во-вторых,

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{r'}{r} = \left(\frac{r'}{R}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = h_p, \quad (48,5)$$

где величина h_p — так называемый модуль преобразования в точке P , показывает, в каком отношении находятся длины отраженного и отра-

жаемого отрезков. Так как h_p зависит от местоположения точки P , но не от выбранного отрезка, и так как углы, составляемые любым отрезком и его отражением с осью OP , равны друг другу, то любой бесконечно-малый треугольник с вершиной в точке P перейдет при инверсии в подобный ему треугольник с вершиной в P' , поскольку при этом не изменяются углы между сторонами, а длины этих сторон изменяются в одном и том же отношении. Отсюда вытекает и справедливость высказанного выше утверждения о том, что любая бесконечно-малая фигура переходит при инверсии в подобную себе фигуру, поскольку такая фигура может рассматриваться, как предельный случай вписанного в нее многоугольника, разложимого на треугольники только что рассмотренного типа.

Заметим, что все сказанное о подобии исходной и отраженной фигур предполагает, конечно, что $OP = r \neq 0$. Самая-же точка $r = 0$, т. е. центр инверсии, является особой точкой преобразования, и непосредственная окрестность ее уходит при инверсии в бесконечность.

§ 49. Электростатическая часть

49.1. Обычное применение инверсии к решению электростатических задач связано со следующей теоремой: пусть известно решение неко-

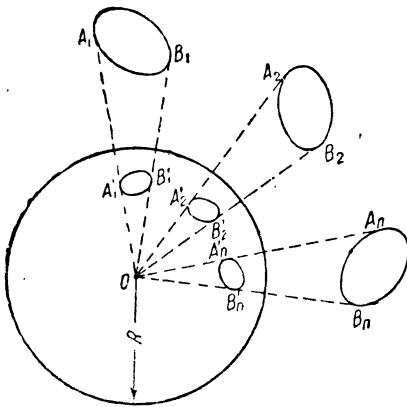


Рис. 75.

торой электростатической задачи для случая, когда имеется ряд проводников $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ какой-либо формы с заданными зарядами Q_s , а в пространстве между ними, заполненном однородным изотропным диэлектриком или пустом, имеется какое-либо заданное распределение зарядов e_s (рис. 75); тогда с помощью инверсии возможно получить из этого решения решение другой задачи, именно такой, когда первоначальные проводники заменены отраженными, находящимися тоже в однородном изотроп-

ном диэлектрике или в пустоте, и имеющими заряды, равные зарядам первичных проводников, заряды e_s заменены равными им по величине отраженными зарядами, и, сверх того, в центре инверсии добавлен заряд, равный полному заряду всей первичной системы.¹

Мы сейчас докажем как эту теорему, так и значительно более общую. Именно, мы покажем, что можно дать общий метод перехода от одной задачи указанного типа к другой, — „отраженной“, — не только в случае, когда пространство между проводниками заполнено одним

¹ На единицу длины общей оси, конечно.

однородным изотропным диэлектриком, но и тогда, когда имеется сколько угодно различных диэлектрических сред.¹ Это дает возможность дать сразу решение целого нового класса электростатических, а стало быть, и магнитостатических и родственных им задач. Ниже мы даем ряд примеров такого решения.

49.2. Переходим к доказательству только что сформулированной теоремы.

Пусть в точках A_i на плоскости расположены заряды $e_i, i = 1, 2 \dots n,$ ² (рис. 76). Выберем некоторую точку A_0 плоскости за центр инверсии O , причем будем, для общности, предполагать, что в этой точке тоже имеется некоторый заряд e_0 , который может, в частности, равняться нулю. Опишем вокруг этой точки круг радиуса R и примем O за начало полярной системы координат (r, θ) .

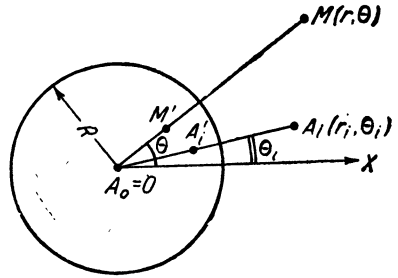


Рис. 76.

Потенциал φ_m , создаваемый зарядами $e_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, в произвольной точке $M(r, \theta)$ плоскости будет

$$\varphi_m = \varphi(r, \theta) = -2e_0 \lg r - \sum_{i=1}^{i=n} e_i \lg [r^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_i) + r_i^2] + c, \quad (49,1)$$

где r_i и θ_i — координаты точки A_i , а c — постоянная.

Введем теперь в рассмотрение, наряду с истинными зарядами e_i , при $i = 1, 2, \dots, n,$ ³ их „отражения“ e'_i в отраженных точках A'_i , координаты которых равны $r'_i = \frac{R^2}{r_i}$ и $\theta'_i = \theta_i$, причем будем полагать $e'_i = e_i$.

Обозначая через φ'_m потенциал этих отраженных зарядов в точке M с координатами $r' = \frac{R^2}{r}$ и $\theta' = \theta$, являющейся отражением точки M , найдем, обозначая через c' и c'' новые постоянные:

$$\begin{aligned} \varphi'_m &= \varphi'(r', \theta') = - \sum_{i=1}^{i=n} e_i \lg [r'^2 - 2r'r'_i \cos(\theta' - \theta'_i) + r_i'^2] + c' = \\ &= - \sum_{i=1}^{i=n} e_i \lg \left[\left(\frac{R^2}{r}\right)^2 - 2 \left(\frac{R^2}{r}\right) \left(\frac{R^2}{r_i}\right) \cos(\theta - \theta_i) + \left(\frac{R^2}{r_i}\right)^2 \right] + c' = \\ &= - \sum_{i=1}^{i=n} e_i \lg [r^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_i) + r_i^2] + 2 \left(\sum_{i=1}^{i=n} e_i \right) \lg r - 2 \sum_{i=1}^{i=n} e_i \lg \frac{R^2}{r_i} + \\ &\quad + c' = \varphi_m + 2 \left(\sum_{i=0}^{i=n} e_i \right) \lg r + c'', \end{aligned} \quad (49,2)$$

причем использована формула (49,1).

¹ Проводники могут при этом отсутствовать.

² Так как речь идет о плоской задаче, то это надо понимать так, что через точки A_i проходят перпендикулярные к плоскости чертежа бесконечно-длинные заряженные нити с зарядами e_i на единицу длины.

³ Но не при $i = 0$.

⁴ Обычно берут $e'_i = -e_i$. Для наших целей проще выбрать плюс вместо минуса.

Заменяя здесь r через $\left(\frac{R^2}{r'}\right)$ и обозначая через $Q = \sum_{i=1}^{=n} e_i$ сумму всех зарядов в исходной системе, а через c''' — новую постоянную, получим

$$\varphi_{M'}' + 2Q \lg r' = \varphi_M + c''',$$

т. е.

$$\varphi'(r', \theta') = \varphi(r, \theta) - 2Q \lg r' + c'''. \quad (49,3)$$

Из формулы (49,3) непосредственно вытекает справедливость высказанной выше теоремы. Действительно, пусть в исходной картине имеется указанное на рис. 75 распределение проводников, между которыми находятся „первичные“ свободные заряды q_s . Понимая тогда в формулах (49,1) — (49,3) под зарядами e_i как заряды q_s , так и заряды, сидящие на поверхностях проводников, будем иметь для потенциала φ_M , даваемого формулой (49,1), постоянные значения во всех точках на поверхности какого-либо проводника. Из (49,3) тогда немедленно следует, что для потенциала φ' отраженной системы зарядов будем иметь в точках M' поверхности отраженного проводника соотношение

$$\varphi' + 2Q \lg r' = \text{const}. \quad (49,4)$$

Формула (49,4) показывает, что потенциал φ' отраженных зарядов в отраженной картине сам по себе непостоянен на поверхностях отраженных проводников, но что он становится таковым, если к нему добавлен потенциал $\varphi_{\text{дополн.}} = +2Q \lg r$ нити, проходящей через центр инверсии и обладающей зарядом $-Q$ на единицу длины. Это показывает, что функция

$$\varphi'' = \varphi'(r', \theta') + 2Q \lg r' + \text{const} = \varphi\left(\frac{R^2}{r'}, \theta'\right) + \text{const} \quad (49,5)$$

решает электростатическую задачу для отраженной картины в плоскости (r', θ') , когда отраженные проводники находятся под влиянием не только отраженной системы первичных зарядов q_s , но и под действием дополнительной бесконечно-длинной нити, проходящей через центр инверсии и обладающей на единицу длины зарядом, равным по величине, но обратным по знаку, суммарному заряду всей исходной системы. При этом заряды на проводниках в новой картине равны очевидно, согласно данному выше правилу отражения зарядов, зарядам на соответствующих проводниках в исходной системе.

49.3. Пример. Потенциал φ свободного распределения зарядов по поверхности бесконечно-длинного проводящего цилиндра радиуса a с зарядом e на единицу длины, равен вне его

$$\varphi = -2e \lg \rho + \text{const}, \quad (49,6)$$

где $\rho = CM$ — расстояние точки, в которой рассматривается потенциал, от центра C цилиндра (рис. 77).

Отразим наш цилиндр в круге радиуса R , описанном вокруг произвольной точки O . Положим $OC = h$ и выберем R так, чтобы было $h = a + R$.

Так как при инверсии исходный круг ACB перейдет опять в круг $AC'B'$ с тем же зарядом e на единицу длины, тогда как в O мы должны поместить нить с зарядом $(-e)$ на единицу длины, то, применяя инверсию к исходной задаче, получим решение задачи о поле проводящего цилиндра в присутствии заряженной нити. Именно, это поле равно наложению полей от нити с зарядом $-e$ в O и от нити с зарядом $+e$ в C' , так что

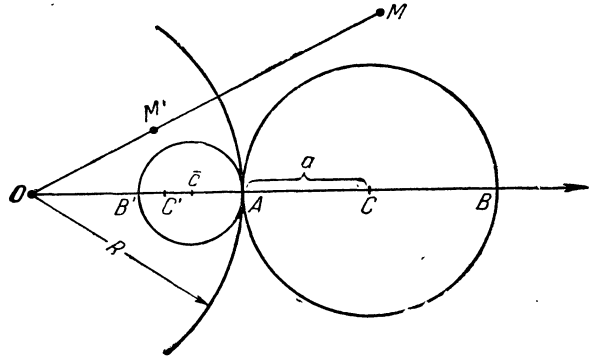


Рис. 77.

$$\varphi' = 2e \lg \frac{OM'}{C'M'} + \text{const.} \quad (49,7)$$

Так как $h = a + R$, то при инверсии конец A диаметра AB останется в A , точки же B и C перейдут в B' и C' , причем

$$B'O = \frac{R^2}{h+a} = \frac{R^2}{R+2a}, \quad (49,8)$$

$$C'O = \frac{R^2}{h} = \frac{R^2}{R+a}, \quad (49,9)$$

так что радиус a' отраженного круга равен:

$$a' = \frac{(AO - B'O)}{2} = \frac{1}{2} \left[R - \frac{R^2}{R+2a} \right] = \frac{aR}{R+2a}. \quad (49,10)$$

Для центра его \bar{C} — получаем:

$$O\bar{C} = \frac{OA + OB'}{2} = \frac{R(R+a)}{R+2a}. \quad (49,11)$$

Имеет место соотношение

$$\bar{C}O \cdot \bar{C}C' = \bar{C}O (\bar{C}O - C'O) = \left(\frac{aR}{R+2a} \right)^2 = a'^2, \quad (49,12)$$

т. е. заряды в O и в C' являются взаимными отражениями в отраженном круге.¹

Добавим в центре \bar{C} отраженного круга нить с зарядом $e' = q - e$ на единицу длины, отчего электрическое равновесие на отраженном цилиндре не нарушится.²

¹ Только с разными знаками.

² Ибо поскольку поверхность цилиндра является эквипотенциальной поверхностью как для потенциала (49,7) пары нитей в O и в C' , так и для вновь добавленной нити, она останется эквипотенциальной поверхностью и при их наложении.

Полный заряд цилиндра становится при этом равным $e' + e = q$, а потенциал всей системы будет

$$\varphi'' = 2e \lg \frac{OM'}{C'M'} - 2q \lg \bar{C}M' + \text{const.} \quad (49,13)$$

Эта формула дает потенциал поля, создаваемого заряженной нитью в O с зарядом $-e$ на единицу длины, в присутствии цилиндра $AC'B'$ с зарядом q на единицу длины.

49.4. Переходим теперь к случаю, когда в пространстве имеется ряд различных однородных, изотропных диэлектриков и какие-либо „первичные“ заряды. Тогда, если φ в формуле (49,1) — это потенциал от всех свободных зарядов как первичных, так и выделившихся на поверхностях раздела различных диэлектриков, то в любой точке A

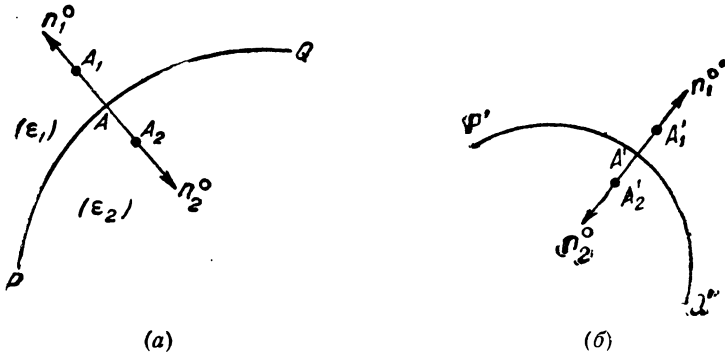


Рис. 78.

поверхности PAQ раздела сред ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 78, а) удовлетворяется условие

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \epsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = -4\pi\eta, \quad (49,14)$$

где η — это поверхностная плотность истинных зарядов, сидящих на поверхности раздела.¹ Здесь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = \lim_{A_1 A \rightarrow 0} \frac{\varphi_{A_1} - \varphi_A}{A_1 A}, \quad (49,15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = \lim_{A_2 A \rightarrow 0} \frac{\varphi_{A_2} - \varphi_A}{A_2 A}, \quad (49,16)$$

где A_1 и A_2 — две бесконечно-близкие к A точки, лежащие соответственно на нормалях n_1^0 и n_2^0 .

Пусть картина (а) переходит в результате инверсии в каком-либо круге с центром в некоторой произвольной точке в картину (б) (рис. 78, б), причем дуга PAQ переходит в $P'A'Q'$, а точки A, A_1, A_2 — в точки A', A'_1, A'_2 . В силу конформности отображения при инверсии, отрезок $A'_1 A'_2$ будет, во-первых, нормален к дуге $P'Q'$ в точке A' , и далее

$$\frac{A'A'_1}{AA_1} = \frac{A'A'_2}{AA_2} = h_A, \quad (49,17)$$

¹ В приведенных ниже примерах везде $\eta = 0$, и мы включаем её только для общности доказательства.

где h_A обозначает, как в формуле (48,5), модуль преобразования в точке A .

Так как, согласно (49,5), потенциал $\varphi = \varphi(r, \theta)$, создаваемый свободными зарядами в некоторой точке (r, θ) исходной картины, и потенциал $\varphi' = \varphi'(r', \theta')$ от отраженных свободных зарядов в соответствующей точке $r' = \frac{R^2}{r}$, $\theta' = \theta$ отраженной картины, связаны соотношением:

$$\varphi(r, \theta) = \varphi\left(\frac{R^2}{r'}, \theta'\right) = \varphi'(r', \theta') + 2Q \lg r' + \text{const} = \varphi''(r', \theta'), \quad (49,18)$$

то, вводя в рассмотрение производные по нормальям \mathbf{n}'_1 и \mathbf{n}'_2 от $\varphi = \varphi(r, \theta) = \varphi''(r', \theta)$ в отраженной картине, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} &= \frac{\partial \varphi''}{\partial n'_1} \cdot h_{A'},^1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} &= \frac{\partial \varphi''}{\partial n'_2} h_{A'}. \end{aligned} \right\} \quad (49,19)$$

Это дает, вместе с формулой (49,14):

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi''}{\partial n'_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi''}{\partial n'_2} = -4\pi\eta/h_A = -4\pi\eta, \quad (49,20)$$

где η' — это поверхностная плотность отраженных истинных зарядов на рассматриваемой поверхности раздела.²

Так как функция $\varphi'' = \varphi' + 2Q \lg r' + \text{const}$ является потенциалом системы отраженных зарядов, к которому прибавлен потенциал линейного заряда ($-Q$), проходящего через центр инверсии, и так как этот потенциал, по самому методу своего построения, непрерывен вдоль поверхностей раздела каждой пары сред³ и удовлетворяет на каждой из них условию типа (49,20), то он удовлетворяет всем тем условиям, которым должен удовлетворять потенциал такой электростатической задачи, которая соответствует отражению каждой среды с сохранением ее диэлектрической постоянной, и является, стало быть, ее решением.

¹ Ибо производные от φ по n_1 и по n'_1 , очевидно, обратно пропорциональны длинам бесконечно-малых отрезков AA_1 и $A'A'_1$, на которые приходится одинаковое падение потенциала $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_{A_1} = \varphi_{A'} - \varphi_{A'_1}$ в обеих картинах.

² Действительно, так как полные заряды отражаемого и отраженного элементов длины линии раздела сред равны друг другу (согласно общему правилу отражения), а длины их относятся как $1:h_A$ [ср. (48,5)], то $\eta' = \eta/h_A$.

³ Предполагаем, что на самих поверхностях раздела линейные заряды отсутствуют. В противном случае рассматриваем их как предельный случай очень больших поверхностных плотностей η , локализованных на очень малых отрезках линии раздела.

Таким образом, с помощью инверсии можно из уже известных решений электростатических задач получать новые не только в том случае, когда пространство между проводниками заполнено одним однородным изотропным диэлектриком, но и тогда, когда имеется целый ряд таких диэлектриков, заполняющих отдельные области пространства.

Некоторая осторожность требуется при применении этого метода к случаю, когда центр инверсии лежит на самой поверхности раздела, или когда имеются уходящие в бесконечность поверхности раздела.

Действительно, при этом на поверхности раздела в отраженной картине появится проходящая через центр инверсии заряженная нить с зарядом, равным сумме всех свободных зарядов в исходной системе, причем заряд этот, вообще говоря, не будет равен нулю. В подобном

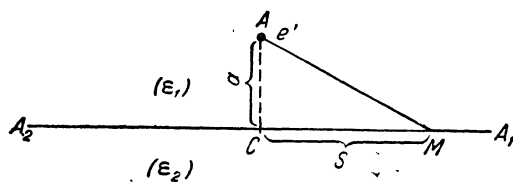


Рис. 79.

случае данное выше решение перестает, вообще говоря, быть физически интересным. Если же $Q=0$, т. е. если суммарный свободный заряд всей первичной системы, включая свободные заряды на поверхностях раздела сред, равен нулю

то применять инверсию указанным выше способом можно, не вводя при этом истинных линейных зарядов, сидящих на отраженной поверхности раздела. Формула (49,18) дает в этом случае:

$$\varphi(r, \theta) = \varphi'(r', \theta'), \quad (49,21)$$

причем $\varphi(r, \theta)$ обозначает здесь потенциал всех исходных свободных зарядов кроме того, который находится в центре инверсии.

49.5. Иллюстрируем сказанное простым примером, именно, рассмотрим вопрос о применении инверсии к решенной в п. 31.1 задаче о поле бесконечно-длинной заряженной нити, расположенной над плоской поверхностью раздела двух сред ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 79).

В этом случае вся поверхность раздела A_1A_2 покрыта поляризационными зарядами σ одного знака с плотностью

$$\sigma(s) = \frac{e'a}{\pi(a^2 + s^2)} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right), \quad (49,22)$$

где s — расстояние от основания перпендикуляра, опущенного из e' на A_1A_2 .

Полный поляризационный заряд $e_{\text{поляр.}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(s) ds$, сидящий на поверхности раздела, *отличен поэтому от нуля* и равен

$$e_{\text{поляр.}} = +e' \cdot \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right). \quad (49,23)$$

Суммарный свободный заряд всей системы отличен поэтому от нуля, и непосредственное применение к ней инверсии не приводит к результату, заслуживающему внимания. Такой результат, однако, может быть сразу получен, если обратить внимание на то обстоятельство, что суммарный поляризационный заряд $e_{\text{поляр.}}$, выделяющийся на поверхности раздела A_1A_2 , зависит, как показывает формула (49,23), только от величины e' первичного заряда, но не от его местоположения в первой среде. Добавляя, поэтому, к системе еще одну заряженную нить, проходящую через произвольную точку на плоскости и обладающую зарядом $(-e')$ на единицу длины, сделаем всю систему электрически нейтральной, причем будет равен нулю как полный поляризационный заряд на поверхности раздела диэлектриков, так и суммарный заряд Q системы.

Поместим теперь основной заряд e' и добавочный заряд $-e'$ на одном перпендикуляре к линии раздела A_1A_2 , первый в точке A , второй в D (рис. 80). Положим $AC = BC = a$, $DC = EC = h$, (см. рис. 80), опишем вокруг точки A круг радиуса a и отразим в нем всю систему зарядов и диэлектриков. Линия раздела A_1A_2 перейдет при этом в окружность $P_1AP_2CP_1$ радиуса $r = \frac{a}{2}$ с центром на прямой CD , причем внутрь ее попадет среда (ϵ_2) , а наружу (ϵ_1) .

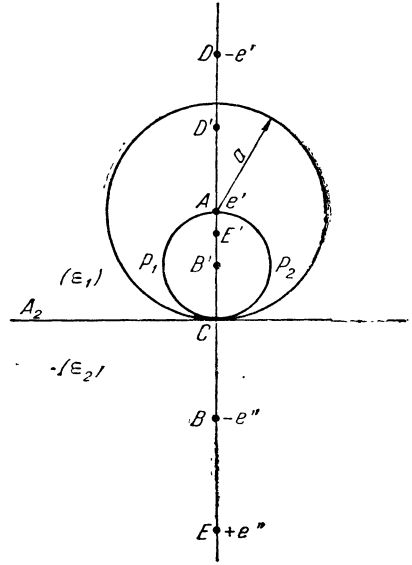


Рис. 80.

Точка B попадет при отражении в B' , т. е. как раз в центр малого круга, ибо $AB' = \frac{a^2}{AB} = \frac{a}{2}$. D переходит в точку D' , определяемую условием

$$AD' = \frac{a^2}{AD} = \frac{a^2}{h-a}, \tag{49,24}$$

а E — в E' , причем

$$AE' = \frac{a^2}{h+a} \tag{49,25}$$

Легко видеть, что D' и E' представляют собой взаимно отраженные в круге AP_1CP_2A точки.

Действительно, произведение расстояний точек D' и E' до центра B' этого круга равно

$$\begin{aligned} B'D' \cdot B'E' &= (B'A + AD') \cdot (B'A - AE') = \left(\frac{a}{2} + \frac{a^2}{h-a}\right) \times \\ &\times \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{h+a}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \end{aligned} \tag{49,26}$$

чем указанная взаимность и доказывается.

Переходя к нахождению полей в обеих средах, пользуемся уравнением (49,21), которое показывает, что поле в среде (ϵ_1) , т. е. вне цилиндра, представляется в виде наложения полей, исходящих от трех нитей,¹ именно:

1) Нити в D' с зарядом $+e'$ на единицу длины;

2) Отраженной нити в E' с зарядом $+e'' = e' \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$ на единицу длины;

3) Отраженной нити в B' с зарядом $-e''$ на единицу длины.

Поле внутри цилиндра, т. е. в (ϵ_2) , которое в исходной картине представлялось исходящим от двух нитей с зарядами $\frac{2\epsilon'}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e'$ и $-\frac{2\epsilon'}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e'$ в точках A и D , в отраженной картине представляется исходящим от одной единственной нити с зарядом $(-\frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e')$, находящейся в D' , ибо поле от зарядов в центре инверсии выпадает.

Таким образом мы получили посредством инверсии обычное, хорошо известное, решение этой задачи, найденное нами ранее в п. 31.5 совсем иным путем.

§ 50. Связь комплексных потенциалов первичной и „отраженной“ задач

50.1. Прежде чем перейти к дальнейшим приложениям метода инверсии к решению конкретных задач, укажем общий способ перехода от комплексного потенциала первичного поля к комплексному потенциалу отраженного.

Пусть комплексный потенциал первичной задачи известен и равен $\varphi^* = f(z)$, где $z = x + iy$, а x и y — декартовы координаты в соответствующей плоскости (рис. 81). $\varphi = \text{Ref}(z)$ — это истинный (физический) потенциал соответствующего поля.

Опишем теперь круг радиуса R вокруг некоторой точки O с координатами (x_0, y_0) или, что то же, с комплексной координатой $z_0 = x_0 + iy_0$, и отразим всю первичную систему зарядов в этом круге.

При этом, некоторая точка M с координатами (x, y) или, что то же, с комплексной координатой $z = x + iy$, попадет после инверсии в точку M' , координаты которой обозначим через (x', y') , а комплексную координату — через $z' = x' + iy'$.

Для того, чтобы найти связь между z и z' , поступим так: проведем через O оси $O\xi, O\eta$, соответственно параллельные осям CX, CY , и введем, кроме того, в рассмотрение полярные координаты (ρ, χ) с началом в точке O , причем углы χ будем отсчитывать от оси $O\xi$ (рис. 81). Обозначая координаты точки M в этой системе через (ρ, χ) , получим

¹ Так как в первичной задаче поле в (ϵ_1) является суммой полей от нитей с зарядами e' и $-e'$ в точках A и D и от нитей с зарядами e'' и $-e''$ в точках E и B , где $e'' = e' \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$, причем поле от нити в A при отражении не должно учитываться.

для координат (ρ', χ') точки M' :

$$\rho' = \frac{R^2}{\rho}, \quad \chi' = \chi. \quad (50.1)$$

Если ввести комплексные переменные $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\chi}$ и $\zeta' = \rho' e^{i\chi'} = \frac{R^2 e^{i\chi}}{\rho}$, то

$$\zeta' = \frac{R^2}{\bar{\zeta}}, \quad (50.2)$$

где черта над ζ как всегда обозначает комплексную сопряженную величину.

Замечая теперь, что $\zeta = z - z_0$, и что (50,2) можно переписать и так:

$$\zeta = \frac{R^2}{\bar{\zeta}'}, \quad (50,3)$$

получаем:

$$z = z_0 + \frac{R^2}{\bar{\zeta}'}. \quad (50,4)$$

Обозначая, как раньше, потенциал в отраженной системе через $\varphi' = \varphi'(\rho', \chi')$, замечая, что, согласно общей теории инверсии, должно быть¹

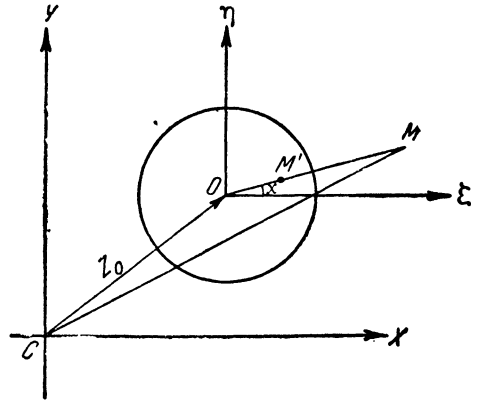


Рис. 81.

$$\varphi'_{M'} = \varphi'(\rho', \chi') = \varphi_M - 2Q \lg \rho' + \text{const} = \text{Re} [f(z)] - 2Q \lg \rho' + \text{const},$$

и подставляя сюда вместо z его значение (50,4), получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_{M'} = \varphi'(\rho', \chi') &= \text{Re} f\left(z_0 + \frac{R^2}{\bar{\zeta}'}\right) - 2Q \lg \rho' + \text{const} = \\ &= \text{Re} \left\{ f\left(z_0 + \frac{R^2}{\bar{\zeta}'}\right) - 2Q \lg \zeta' \right\} + \text{const}. \end{aligned} \quad (50,5)$$

В случае, если суммарный заряд первичной системы Q равен нулю, находим отсюда:

$$\varphi'_{M'} = \text{Re} f\left(z_0 + \frac{R^2}{\bar{\zeta}'}\right). \quad (50,6)$$

Этими формулами поставленная задача решается. Комплексную переменную ζ можно в каждом конкретном случае выражать через те или иные вещественные параметры, например, через декартовы координаты, причем $\zeta = \xi + i\eta$, через полярные, когда $\zeta = \rho e^{i\chi}$, или через какие-либо иные, более подходящие по характеру задачи.

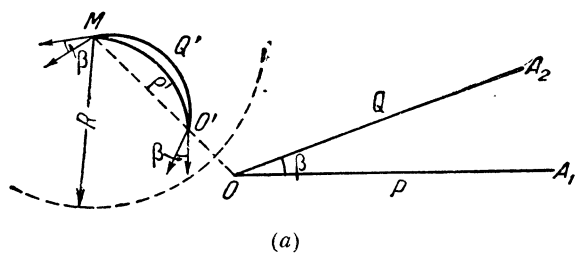
§ 51. Применение инверсии к диэлектрическим клиньям

51.1. Применим метод инверсии к нахождению новых решений из ранее полученного в § 38 решения задачи о поле неограниченного

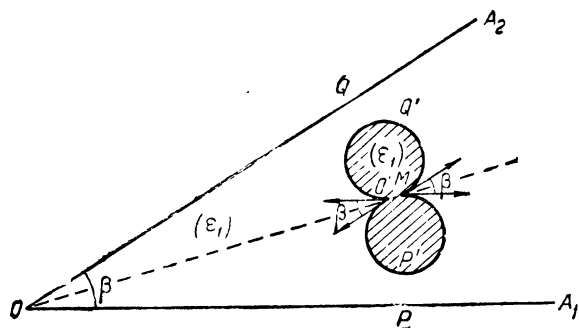
¹ Ср. (49,3).

диэлектрического клина с постоянной ϵ_1 , окруженного средой с постоянной ϵ_2 (рис. 57) и находящегося в произвольном плоском внешнем поле.

При инверсии в круге с центром, не лежащим на одной из сторон угла A_1OA_2 , стороны эти превращаются в дуги кругов, проходящие через



(a)

(б)
Рис. 82.

центр инверсии M [рис. 82 (а) и (б)] и через изображение O' вершины клина. Из конформности отображения следует, что внутренние углы, составляемые друг с другом касательными к кривым $MQ'O'$ и $MP'O'$ в точках O' и M , равны β — углу растворения отображаемого клина. При этом на рис. 82 (а) область $MQ'O'P'M$ будет соответствовать среде (ϵ_1) , а внешняя по отношению к ней часть плоскости — среде (ϵ_2) , тогда как на рис. 82 (б) расположение сред получится обратное. Выбирая подходящим об-

разом местоположение центра инверсии, сможем поэтому из известного уже решения задачи о клине с произвольным углом растворения β получить решение задачи о поле, создаваемом цилиндрическим неограниченным диэлектриком с сечением в форме „луночки“, ограниченной двумя дугами кругов, находящимся в однородной среде или в пустоте и внесенным в произвольное перпендикулярное к его оси внешнее поле.

51.2. Отметим несколько частных случаев отображения при специальных положениях центра инверсии.

А) Центр инверсии лежит на продолжении одной из сторон клина. Получается плосковыпуклая „чечевица“ одного из указанных на рис. 83 типов. В частности, при $\beta = \frac{\pi}{2}$ получается диэлектрический полуцилиндр, окруженный произвольным другим диэлектриком.

Б) Центр инверсии лежит на одной из сторон угла. При отражении получится одна из фигур, изображенных на рис. 84 (а, б, в), причем (а) соответствует случаю, когда $\beta < \frac{\pi}{2}$, (б) — когда $\beta = \frac{\pi}{2}$ и (в) — когда $\beta > \frac{\pi}{2}$.

51. 3. Так как поверхности раздела диэлектриков в исходной картине простираются в бесконечность, то при применении инверсии следует исходить из системы с суммарным свободным зарядом, равным нулю. Легко убедиться в том, что это условие удовлетворяется, если клин находится в поле, создаваемом двумя произвольно расположенными нитями с суммарным истинным зарядом, равным нулю, т. е. со свободными зарядами e' и $-e'$ на единицу длины, если обе нити находятся в одной среде, и нитями с зарядами e' и $q' = -e' \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, если первая из них находится в первой среде, а вторая — во второй.¹

Действительно, полные поляризационные заряды $e_1^{(пол.)}$ и $e_2^{(пол.)}$, выделяющиеся на сторонах клина, равны:

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(пол.)} &= \int_0^\infty \sigma_1(s) ds = \bar{\sigma}_1(0), \\ e_2^{(пол.)} &= \int_0^\infty \sigma_2(s) ds = \bar{\sigma}_2(0), \end{aligned} \right\} \quad (51,1)$$

причем использовано обозначение (34,2).

¹ Это условие было бы очевидным, если бы как поверхности раздела, так и первичные заряды лежали в конечной области. Действительно, в этом случае можно было бы окружить все эти заряды и поверхности раздела такой поверхностью (f), которая целиком находилась бы уже в однородной внешней среде, причем поток вектора D через эту поверхность равнялся бы нулю, поскольку сумма истинных зарядов внутри (f) по условию равна нулю. Но так как поверхность (f) целиком находится в однородной среде, с некоторой определенной постоянной ϵ , то

$$\int_{(f)} E_n df = \frac{1}{\epsilon} \int_{(f)} D_n df = 0,$$

а так как $\int_{(f)} E_n df$ пропорционален полному свободному заряду внутри (f), то заряд этот равен нулю, что как раз и утверждалось. В случае уходящих на бесконечность поверхностей раздела это доказательство непригодно, почему мы в тексте и исследуем этот случай особо.

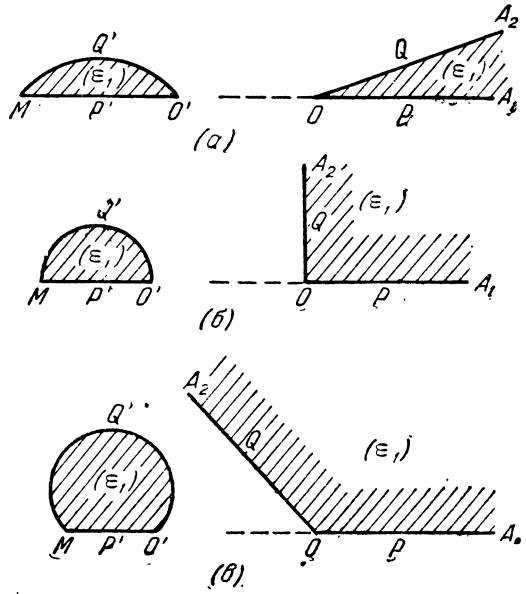


Рис. 83.

Полагая $\nu=0$ в формулах (38,3), находим:

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(\text{пол.})} &= \frac{ae'}{2} \left\{ \frac{2\pi - (\gamma + \theta_{2\gamma})}{\pi(1-\alpha) + \alpha\beta} + \frac{(\theta_{2\gamma} - \gamma)}{\pi(1+\alpha) - \alpha\beta} \right\}, \\ e_2^{(\text{пол.})} &= \frac{ae'}{2} \left\{ \frac{2\pi - (\gamma + \theta_{2\gamma})}{\pi(1-\alpha) + \alpha\beta} - \frac{(\theta_{2\gamma} - \gamma)}{\pi(1+\alpha) - \alpha\beta} \right\}, \end{aligned} \right\} \alpha = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad (51,2)$$

так что

$$e_1^{(\text{пол.})} + e_2^{(\text{пол.})} = ae' \frac{[2\pi - (\theta_{2\gamma} + \gamma)]}{[\pi(1-\alpha) + \alpha\beta]}. \quad (51,3)$$

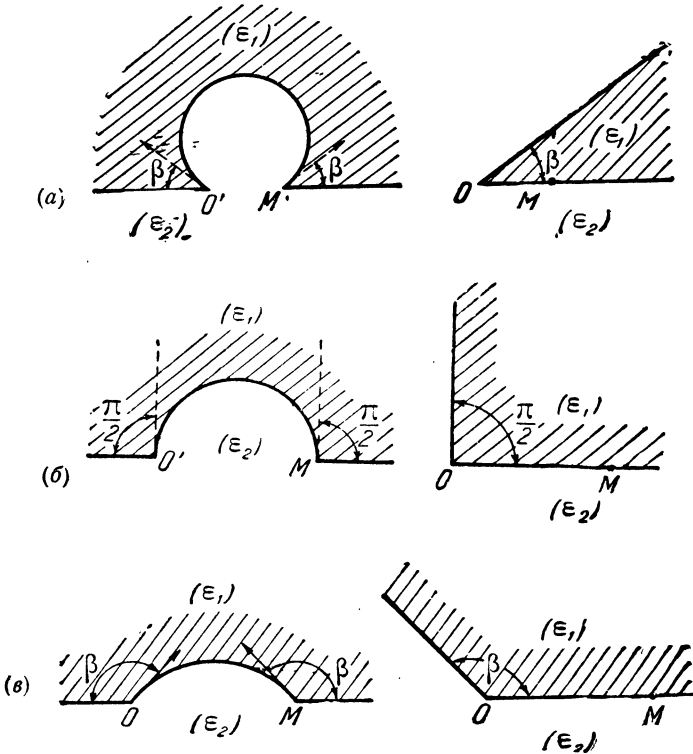


Рис. 84.

Так как угол $\theta_{2\gamma} + \gamma$ равен β при $\beta > \gamma$ и $\beta + 2\pi$ при $\beta < \gamma$, то

$$e_1^{(\text{пол.})} + e_2^{(\text{пол.})} = \frac{ae'}{[\pi(1-\alpha) + \alpha\beta]} \times \begin{cases} (2\pi - \beta) & \text{при } \beta > \gamma, \\ (-\beta) & \text{при } \beta < \gamma, \end{cases} \quad (51,4)$$

т. е. полный поляризационный заряд на сторонах клина не зависит от местоположения заряда e' , пока он не выходит из пределов одной среды.¹

(51,4) показывает поэтому, что хотя сумма первичного свободного заряда e' и полного поляризационного заряда ($e_1^{(\text{пол.})} + e_2^{(\text{пол.})}$) не равна

¹ Напомним, что условие $\beta > \gamma$ в (51,4) означает, что заряд находится в среде (ϵ_1) , тогда как при $\beta < \gamma$ он находится в (ϵ_2) .

нулю в случае наличия одной только нити e' ,¹ но что она обращается в нуль, если добавить к системе еще вторую нить с зарядом $-e'$ на единицу длины, если нить эта вносится в ту же среду (ϵ_1), в которой находится нить e' , или с зарядом $q' = -e' \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, если она вносится в (ϵ_2).² Взаимное расположение нитей при этом безразлично, пока каждая из них остается в пределах соответствующей среды.

51. 4. Результаты предыдущего пункта позволяют применить инверсию к полю диэлектрического клина, находящегося в поле двух произвольно расположенных нитей с полным истинным зарядом, равным нулю. Выбирая при этом точку, через которую проходит одна из нитей, скажем e' , за центр инверсии и применяя данные выше правила, получим в результате инверсии решение задачи о потенциале и поле, системы, состоящей из неограниченного цилиндрического диэлектрика, сечение которого плоскостью, перпендикулярной к его образующим, имеет одну из форм, указанных на рис. 82—83, т. е. форму луночки ограниченной двумя дугами кругов произвольных радиусов, пересекающихся под произвольным углом. Диэлектрик этот окружен при этом другой диэлектрической средой, и вся система находится в поле равномерно наэлектризованной нити, параллельной оси диэлектрического цилиндра и произвольно расположенной относительно него.

Выбирая различным образом угол раствора β исходного клина и местоположение обоих первичных зарядов, сможем осуществить любую из указанных на рис. 82—83 форм сечения диэлектрического цилиндра с какими угодно радиусами обеих образующих его дуг, с любым углом β (внешним или внутренним) между ними, а также с любым положением индуцирующей нити по отношению к нему. Что касается фигур рис. 84, то для них решения не могут быть получены прямо из данного в § 38 решения для клина a , так как при этом понадобилось бы решение исходной задачи для случая, когда первичная нить e' лежит на самой поверхности раздела сред, что при выводе формул § 38 было исключено.³ Поскольку, однако, находимые только что указанным способом решения получаются в общем виде для любых значений радиусов образующих луночку дуг, то устремляя в общем решении один из них к бесконечности, легко получим и эти

¹ Кроме как когда одна из сред — проводящая. Так, при $\epsilon_2 = \infty$ и $\beta > \gamma$, (51,4) дает из-за $\alpha = -1$:

$$e_1^{(\text{пол.})} + e_2^{(\text{пол.})} = -e',$$

т. е. при этом все линии сил первичного поля связываются на сторонах угла.

² Легко поверить, пользуясь формулой (51,4), что при таком q' полный заряд системы действительно обращается в нуль.

³ В этом случае, на поверхности раздела имеется истинная плотность (внесенные извне заряды), а потому при составлении исходных интегральных уравнений задачи для клина нужно было бы исходить не из формулы (30,16), а из (30,15). Соответствующее видоизменение решения было бы нетрудно найти, но, как указано в тексте для наших целей это совершенно не требуется.

предельные случаи, а, стало быть, и полное решение поставленной задачи.

Располагая решением задачи о полях, возникающих в рассматриваемой системе диэлектриков под действием одной равномерно заряженной нити (ключевая задача), сможем простым суммированием (интегрированием) получить решение ее и в том случае, когда вся система внесена в произвольное, перпендикулярное к ее оси внешнее поле.

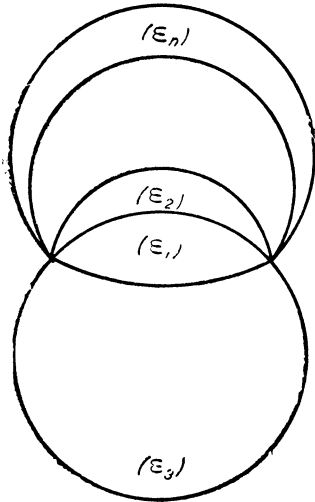


Рис. 85.

51.5. Совершенно аналогичным образом можно применить инверсию к общему случаю секториального распределения сред (§§ 33—36, рис. 48). Получим при этом не одну луночку, как в предыдущих разделах данного параграфа, а серию таких луночек с общими вершинами (рис. 85), причем каждая луночка содержит свой диэлектрик, и вся система окружена однородным изотропным диэлектриком. Так как общее решение задачи для любого числа секториально расположенных сред дается общими формулами (34,5) [или (34,10),

если речь идет о ключевой задаче], (36,2) и (41,22) [или (41,24)], то пользуясь формулой (50,6), найдем и общее решение „отраженной“ задачи.

§ 52. Биполярные координаты и их приложение к решению задач с помощью инверсии

52.1. Введем в рассмотрение так называемые биполярные координаты, определив их следующим образом: выберем на плоскости две произвольные фиксированные точки A_1 и A_2 , которые назовем полюсами системы; обозначим через r_1 и r_2 расстояния A_1M и A_2M некоторой точки M от этих полюсов и будем характеризовать положение этой точки на плоскости, с одной стороны, величиной

$$\rho = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad (52,1)$$

с другой же — углом

$$\xi = \angle A_1MA_2 \quad (52,2)$$

(рис. 86). При этом будем считать, что $-\infty \leq \rho \leq +\infty$, тогда как для ξ примем для определенности, что $-\pi \leq \xi \leq \pi$, и что положительные значения ξ соответствуют точкам верхней полуплоскости рис. 86,¹ а $\xi < 0$ — точкам нижней.² При таком соглашении относительно значе-

¹ Т. е. лежащей выше прямой A_1A_2 .

² Что именно такое сопоставление положительных и отрицательных значений ξ разным полуплоскостям является наиболее естественным, видно, в частности, из даваемой ниже формулы (52,8).

ний ξ , две точки M и \bar{M} , из которых вторая является зеркальным изображением первой относительно прямой A_1A_2 , соответствуют равным значениям ρ и равным по величине, но обратным по знаку значениям ξ .

Введем в плоскости A_1MA_2 наряду с координатами (ρ, ξ) декартовы координаты (x, y) , причем, за

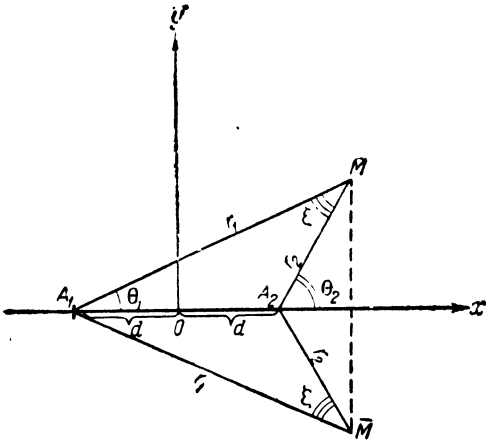


Рис. 86.

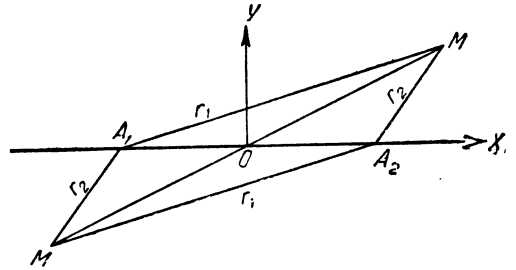


Рис. 87.

начало координат примем середину O отрезка A_1A_2 , ось x -ов направим вдоль A_1A_2 , а ось y -ов — вверх (рис. 86). Положим $OA_1 = OA_2 = d$ и выразим x и y через ρ и ξ , для чего поступим следующим образом: из треугольника A_1MA_2 следует, что

$$\begin{aligned} (A_1A_2)^2 = 4d^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \xi = r_1r_2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right) - 2 \cos \xi \right] = \\ &= 2r_1r_2 [\operatorname{ch} \rho - \cos \xi], \end{aligned} \tag{52,3}$$

причем использована формула (52,1). Отсюда

$$r_1r_2 = \frac{2d^2}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}. \tag{52,4}$$

Так как из (52,1) следует, что

$$\frac{r_1}{r_2} = e^\rho, \tag{52,5}$$

то

$$r_1^2 = \frac{2d^2 e^\rho}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi} \tag{52,6}$$

и

$$r_2^2 = \frac{2d^2 e^{-\rho}}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}. \tag{52,7}$$

Далее, так как площадь треугольника A_1MA_2 равна

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \xi = \frac{1}{2} (2d) \cdot y,$$

то (52,4) дает:

$$y = \frac{d \sin \xi}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}. \tag{52,8}$$

С другой стороны, дополняя треугольник A_1MA_2 до параллелограмма $A_1MA_2M_1$ (рис. 87) и замечая, что сумма квадратов диагоналей в этом последнем равна сумме квадратов сторон, найдем:

$$2(r_1^2 + r_2^2) = (2d)^2 + (2 \cdot OM)^2,$$

а так как из (52,6) и (52,7) следует, что

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{4d^2 \operatorname{ch} \rho}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi},$$

то

$$(OM)^2 = d^2 \frac{\operatorname{ch} \rho + \cos \xi}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}. \quad (52,9)$$

Это и (52,8) дают вместе:

$$x^2 = (OM)^2 - y^2 = \frac{d^2 \operatorname{sh}^2 \rho}{(\operatorname{ch} \rho - \cos \xi)^2},$$

так что

$$x = \frac{d \operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}. \quad (52,10)$$

При извлечении корня нужно было выбрать в этой формуле именно знак плюс, так как при $r_1 > r_2$, чему соответствует $\rho = \lg \frac{r_1}{r_2} > 0$, а стало быть, и $\operatorname{sh} \rho > 0$ должно быть в то же время $x > 0$, тогда как при $r_1 < r_2$, т. е. при $\rho < 0$, должна получаться левая полуплоскость ($x < 0$).

С другой стороны, нетрудно видеть, что введенное выше условие, что следует считать $\xi > 0$ в верхней полуплоскости, где $y > 0$, и $\xi < 0$ — в нижней, где $y < 0$, как раз дает нужные знаки у y , находимого по формуле (52,8). Итак, введенные нами в качестве координат параметры ρ и ξ вместе с условиями, что $-\infty \leq \rho \leq +\infty$ и $-\pi \leq \xi \leq +\pi$, однозначно определяют положение каждой точки на плоскости.

Заметим еще, что, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, формулы (52,8) и (52,10) могли бы быть получены разделением вещественной и мнимой части в соотношении

$$x + iy = id \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\xi + i\rho), \quad (52,11)$$

которое связывает две комплексные переменные $z = x + iy$ и $t = \xi + i\rho$. Из этого, в частности, следует, что кривые $\xi = \operatorname{const}$ и $\rho = \operatorname{const}$ образуют ортогональную сетку, причем линии $\xi = \operatorname{const}$ — это дуги кругов, проходящих через точки A_1 и A_2 (это ясно непосредственно из их геометрического смысла), а линии $\rho = \operatorname{const}$ образуют систему кругов, ортогональных к линиям $\xi = \operatorname{const}$ (рис. 88).¹

52.2. Применим биполярные координаты к рассмотренной выше задаче об инверсии поля некоторой системы зарядов, проводников и диэлектриков, потенциал которой в исходной картине известен. Будем считать, что потенциал этот выражен через полярные координаты (r, θ) в исходной плоскости и что центр C того круга, в котором происходит инверсия, не совпадает с началом O координат (рис. 88 bis).

¹ Отметим, кстати, что линии $\rho = \operatorname{const}$ совпадают с эквипотенциальными линиями, а линии $\xi = \operatorname{const}$ — с силовыми линиями системы, состоящей из двух перпендикулярных к плоскости чертежа равномерно заряженных по длине бесконечно-длинных линий, проходящих через точки A_1 и A_2 и обладающих равными по величине, но обратными по знаку зарядами (на единицу длины).

Обозначим полярные координаты точки C через (f, α) , примем $OC=f$ за радиус круга инверсии и обозначим отражение некоторой точки $M(r, \theta)$ в этом круге через $M'(r', \theta')$. Положение точки M'

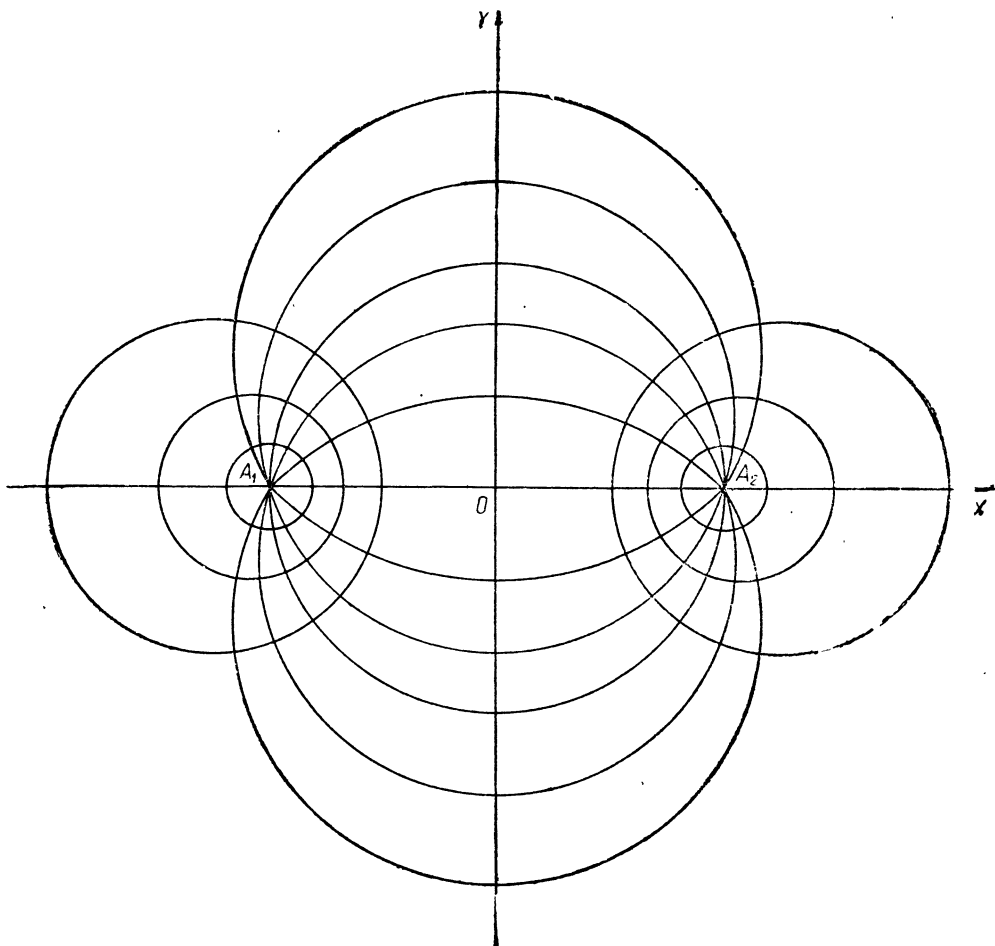


Рис. 88.

в отраженной системе будем характеризовать, кроме того, биполярными координатами $\rho = \lg \frac{CM'}{OM'}$ и $\xi = \angle OM'C'$ с полюсами в точках C и O , соответствующих, таким образом, точкам A_1 и A_2 на рис. 86. Полагая поэтому $d=f/2$, сможем непосредственно пользоваться всеми данными в п. 52.1 формулами.

Так как M' — это отражение точки M , то $CM \cdot CM' = f^2$, так что

$$\frac{CM}{f} = \frac{f}{CM'}, \quad (52,12)$$

откуда вытекает, что треугольники OCM и $M'CO$ подобны, так что и

$$\frac{CM'}{OM'} = \frac{f}{r} = e^{\rho},$$

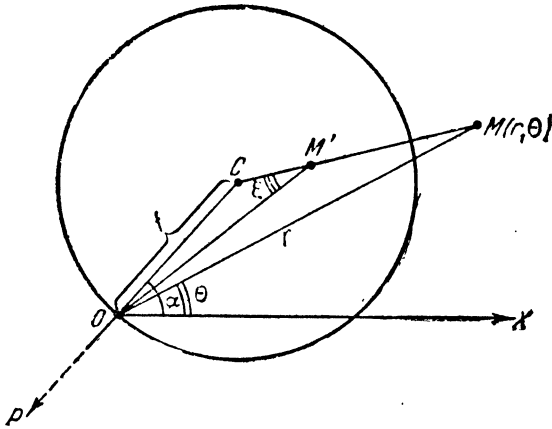


Рис. 88 bis.

т. е.

$$r = fe^{\rho}. \tag{52,13}$$

Далее, $\xi = \angle CM'O = \angle MOC = \alpha - \theta$, так что

$$\xi = \alpha - \theta, \tag{52,14}$$

и если будем считать, что θ может изменяться в пределах $-(\pi - \alpha) \leq \theta \leq (\pi + \alpha)$ (т. е. против часовой стрелки от продолжения OP прямой CO на угол 2π), то для ξ получаются как раз нужные пределы изменения, т. е. $-\pi \leq \xi \leq +\pi$.

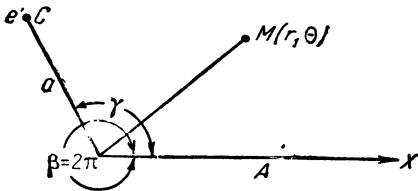


Рис. 89.

Если же, как это имело место в задачах о клиньях, угол θ изменяется в пределах от нуля до 2π , то, например, при $0 < \alpha < \pi$ надо положить

$$\xi = \xi_{\alpha\theta} = \begin{cases} \alpha - \theta & \text{при } 0 \leq \theta < \pi + \alpha, \\ \alpha - \theta + 2\pi & \text{при } \pi + \alpha < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \tag{52,15}$$

чтобы вправо от линии COP было $\xi > 0$ и были бы соблюдены пределы $(-\pi < \xi < +\pi)$.¹ Сходным образом нужно поступать и при $\alpha > \pi$.

Соотношения (52,13) и (52,14) или (52,13) и (52,15) дают выражения координат r и θ отражаемой точки M через биполярные координаты

¹ Это связано с тем, что в этих задачах потенциал в той форме, в какой он получается при решении их, не является периодической функцией от θ с периодом 2π , а потому надо точно соблюдать при вычислениях нужные пределы изменения угла θ .

наты ρ, ξ отраженной — M' . Вводя эти выражения в правую часть формулы (49,4), дающей выражение потенциала $\varphi_{M'}$ в точке M' отраженной системы через потенциал $\varphi_M = \varphi(r, \theta)$ исходной системы в точке M , найдем, что

$$\varphi'_{M'} = \varphi(fe^{-\rho}, \alpha - \xi) - 2Q\rho + \text{const}, \quad (52,16)$$

если $-(\pi - \alpha) \leq \theta \leq \pi + \alpha$, причем $-\pi \leq \xi \leq +\pi$.

Здесь Q , как раньше, полный свободный заряд исходной системы, и учтено то, что

$$\lg r' = \lg \frac{f^2}{r} = \lg fe^\rho = \rho + \lg f.$$

Если пределами изменения для θ являются $(0, 2\pi)$, то, согласно (52,15), получается:

$$\varphi'_{M'} = \begin{cases} \varphi(fe^{-\rho}, \alpha - \xi) - 2Q\rho + \text{const} & \text{при } 0 \leq \theta < \pi + \alpha, \\ & \text{т. е. при } \alpha > \xi \geq -\pi, \\ \varphi(fe^{-\rho}, \alpha - \xi + 2\pi) - 2Q\rho + \text{const} & \text{при } \pi + \alpha < \theta \leq 2\pi, \\ & \text{т. е. при } \pi \geq \xi > \alpha, \end{cases} \quad (52,17)$$

причем постоянные здесь имеют одинаковое значение в обоих выражениях и допустимо переходить к пределу $\xi = \alpha$.

Для преобразования комплексного потенциала воспользуемся формулой

$$\text{если } \left. \begin{aligned} z &= re^{i\theta} = fe^{i\alpha} \cdot e^{-(\rho + i\xi)} = z_c e^{-\zeta}, \\ -(\pi - \arg z_c) &\leq \theta \leq \pi + \arg z_c, \end{aligned} \right\} \quad (52,18)$$

где $z_c = fe^{i\alpha}$ — комплексная координата центра инверсии, а $\zeta = \rho + i\xi$, или формулами

$$z = \begin{cases} z_c e^{-\zeta} & \text{при } 0 \leq \theta < (\pi + \arg z_c), \\ z_c e^{2\pi i} e^{-\zeta} & \text{при } (\pi + \arg z_c) < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (52,19)$$

При этом в последней формуле нельзя, вообще говоря, полагать $e^{2\pi i} = 1$ до подстановки z в выражение первичного комплексного потенциала, так что, например, если этот последний содержит z в какой-либо нецелой степени z^m [ср., например, (42, 18), куда входит $z^{m/2}$], то должно быть

$$z^m = z_c^m e^{2\pi m i} e^{-m\zeta},$$

а не просто

$$z^m = z_c^m e^{-m\zeta}.$$

Таким образом, с помощью биполярных координат потенциал в M' непосредственно и просто выражается через первичный потенциал.

52.3. Рассмотрим, в качестве примера, поле, получаемое при инверсии полубесконечной проводящей пластинки OA (рис. 89), кото-

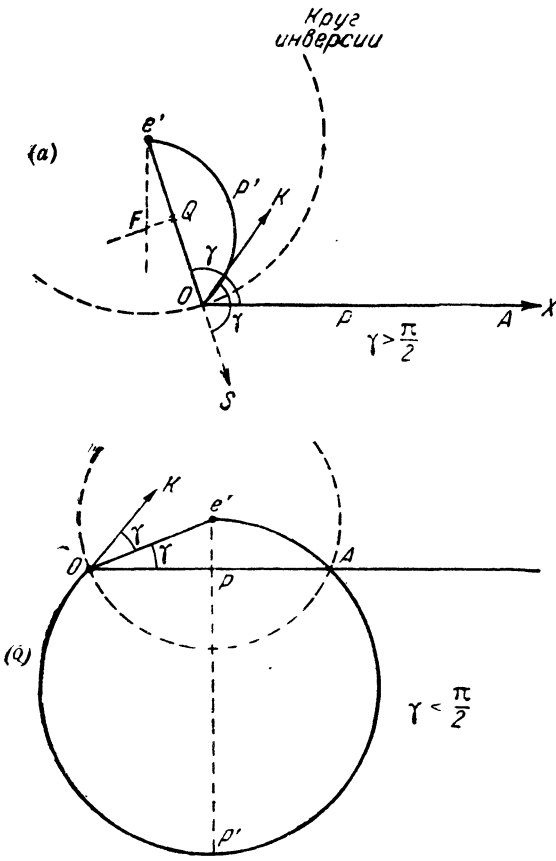


Рис. 90.

ругу можно рассматривать, как предельный случай проводящего клина с внешним углом β , равным 2π , находящейся в поле заряженной нити e' , проходящей через точку C .¹

Принимаем точку C , в которой находится заряд e' , за центр инверсии.

Пластинка OPA [рис. 90 (а, б)] переходит при этом в цилиндрический сегмент $OP'e'$, причем касательная к $OP'e'$ в точке e' параллельна OA , так что центр F дуги $e'P'O$ лежит на пересечении перпендикуляра, опущенного из e' на OA , с перпендикуляром к хорде $e'O$, проходящим через середину ее Q . Уравнение этой дуги будет $\xi = \gamma$ (так как она соответствует прямой $\theta = 0$).

Формула (42, 19) дает при $\beta = 2\pi$ следующее выражение для потенциала исходного поля в точке (r, θ) :²

$$\varphi = -e' \lg \frac{r - 2\sqrt{ra} \cos \frac{(\theta - \gamma)}{2} + a}{r - 2\sqrt{ra} \cos \frac{(\theta + \gamma)}{2} + a}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (52, 20)$$

и его нужно ввести в формулы (52, 17). Так как в данном случае $Q = 0$,³ $f = a$, $\alpha = \gamma$, $r = ae^{-\rho}$, то при $0 \leq \theta \leq \pi + \gamma$, т. е. при $\gamma \geq \xi \geq -\pi$, получится:

$$\begin{aligned} \varphi'_M = \varphi'_1 &= -e' \lg \frac{e^{-\rho} - 2e^{-\frac{\rho}{2}} \cos \frac{\xi}{2} + 1}{e^{-\rho} - 2e^{-\frac{\rho}{2}} \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2} \right) + 1} = \\ &= -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (52, 21)$$

¹ Ср. п. 42.4, где надо положить $\beta = 2\pi$.

² Потенциал пластинки принимаем при этом равным нулю.

³ См. примечание¹ на стр. 351.

тогда как при $\pi + \gamma \leq \theta \leq 2\pi$, т. е. при $\pi \geq \xi \geq \gamma$, будет:

$$\begin{aligned} \varphi'_{M'} = \varphi'_2 &= -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\pi - \frac{\xi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\pi + \gamma - \frac{\xi}{2} \right)} = \\ &= -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (52, 22)$$

Полученные выражения потенциалов соответствуют свободному распределению заряда $-e'^1$ (свободного) по поверхности рассматриваемого сегмента, причем формула (52, 22) дает потенциал внутри области $e'P'OQe'$ (см. рис. 90, а), тогда как (52, 21) — вне ее. При $\xi = \gamma$, т. е. на самой поверхности пластинки, оба выражения дают совпадающие значения, именно там $\varphi' = 0$.

На „основании“ $e'QO$ сегмента, которое в выражении (52, 21) соответствует значению $\xi = -\pi$, а в (52, 22) — значению $\xi = +\pi$, получается из обоих выражений общее значение:

$$\varphi' = -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \sin \gamma}, \quad (52, 23)$$

как и должно быть.

Дадим еще выражение для потенциала φ' на оси сегмента, т. е. при $\rho = 0$. Получается:

$$\varphi'_1 = -e' \lg \frac{\sin^2 \frac{\xi}{4}}{\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\xi}{4} \right)}, \quad (52, 24)$$

и

$$\varphi'_2 = -e' \lg \frac{\cos^2 \frac{\xi}{4}}{\cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\xi}{4} \right)}. \quad (52, 25)$$

52. 4. Если $\gamma = \pi$, что соответствует обращению сегмента в плоскую пластинку (рис. 91), то все формулы (52, 21) — (52, 25) упрощаются. В частности, остаются только выражения (52, 21) и (52, 24), которые принимают такой вид:

$$\varphi' = -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\xi}{2}}, \quad -\pi \leq \xi \leq +\pi, \quad (52, 26)$$

и

$$(\varphi')_{\rho=0} = -e' \lg \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{4}, \quad 0 < |\xi| \leq \pi. \quad (52, 27)$$

¹ Так как, согласно найденному выше общему правилу, свободный заряд проводника не изменяется при инверсии, то найденное здесь решение относится к сегменту с зарядом $-e'$ на единицу длины.

52.5. Пользуясь введенными в начале этого параграфа декартовыми координатами x, y в отраженной картине, начало которых O' (рис. 92)¹ совпадает с серединой отрезка Oe' , а ось y направлена по оси сегмента, можем потенциалы (52, 24), (52, 25) и (52, 27) на этой оси выразить прямо через y . Для этого полагаем в формуле (52, 8) $\rho = 0$, $d = \frac{a}{2}$ и находим:

$$y = \frac{a}{2} \cotg \frac{\xi}{2}. \quad (52, 28)$$

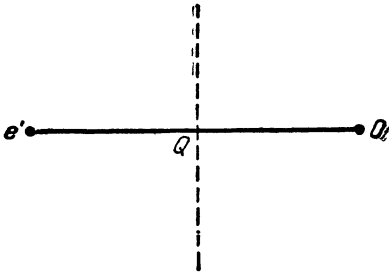


Рис. 91.

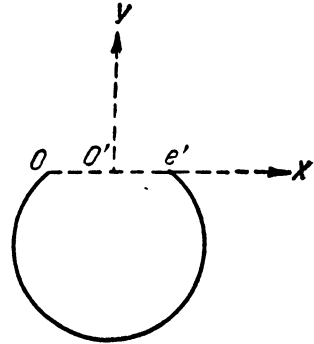


Рис. 92.

Исключая отсюда и из соотношений (52, 24), (52, 25), (52, 27) угол ξ , найдем в явной форме зависимость потенциалов на оси от y . Так, в случае плоской пластинки, получаем из (52, 27) при $0 \leq \xi \leq \pi$, т. е. при $0 \leq y \leq \infty$:

$$(\varphi')_{\rho=0} = +2e' \lg \left[\frac{2y}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{a}\right)^2} \right]. \quad (52, 29)$$

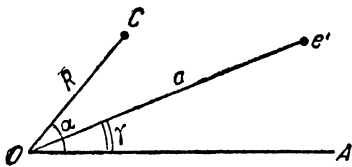


Рис. 93.

Отсюда, в частности, видно, что при $y \rightarrow \infty$ асимптотически верна формула

$$(\varphi')_{\rho=0} = +2e' \lg y + \text{const}, \quad (52, 30)$$

т. е. в достаточно удаленных точках рассматриваемая полоска дает такое поле, как нить с зарядом ($-e'$) на единицу длины, как и должно быть, согласно сказанному выше.

52.6. Заметим, в заключение, что входящий в решение угол γ имеет простое геометрическое значение также в отраженной картине. Именно, это угол между касательной OK к дуге OPe' (рис. 90) и хордой Oe' , причем при $\gamma > \frac{\pi}{2}$ это угол, составляемый с внешним продолжением OS этой хорды (рис. 90, а), а при $\gamma < \frac{\pi}{2}$ — с ней самой (рис. 90, б).

52.7. Если бы за центр инверсии было выбрано не местоположение заряда e' , а какая-нибудь иная точка C с координатами (R, α) (рис. 93), то при инверсии в круге радиуса R получился бы опять цилиндриче-

¹ O' на рис. 92 соответствует точке O на рис. 86.

ский сегмент со свободным зарядом ($-e'$), но уже находящийся в поле заряженной нити с зарядом ($+e'$) на единицу длины. При этом нить e' перешла бы при отражении в точку, определяемую такими биполярными координатами ρ_e и ξ_e , что ¹

$$\rho_e = -\lg \frac{a}{R}, \quad (52, 31)$$

тогда как ξ_e определяется соотношениями:²

$$\xi_e = \begin{cases} \alpha - \gamma & \text{при } 0 \leq \gamma < \pi + \alpha, \\ \alpha - \gamma + 2\pi & \text{при } \pi + \alpha < \gamma \leq 2\pi. \end{cases} \quad (52, 32)$$

Потенциал φ' находится опять из (52, 20) и (52, 17), именно:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= -e' \lg \frac{Re^{-\rho} - 2\sqrt{Rae}^{-\frac{\rho}{2}} \cos \frac{(\alpha - \gamma - \xi)}{2} + a}{Re^{-\rho} - 2\sqrt{Rae}^{-\frac{\rho}{2}} \cos \frac{(\alpha + \gamma - \xi)}{2} + a} = \\ &= -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\rho - \rho_e}{2} \right) - \cos \frac{(\alpha - \gamma - \xi)}{2}}{\operatorname{ch} \left(\frac{\rho - \rho_e}{2} \right) - \cos \frac{(\alpha + \gamma - \xi)}{2}}, \quad (\alpha \geq \xi \geq -\pi), \end{aligned} \quad (52, 33)$$

и

$$\varphi_2' = -e' \lg \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\rho - \rho_e}{2} \right) + \cos \frac{(\alpha - \gamma - \xi)}{2}}{\operatorname{ch} \left(\frac{\rho - \rho_e}{2} \right) + \cos \frac{(\alpha + \gamma - \xi)}{2}}, \quad (\pi \geq \xi \geq \alpha), \quad (52, 34)$$

причем α определяется углом между касательной к дуге сегмента в ее концевой точке с хордой, на которую сегмент опирается, а γ выражается через α и ξ_e при помощи (52, 32).

При $\rho = 0$, т. е. на оси системы, можем также, пользуясь формулой (52, 28), выразить найденные потенциалы через y , т. е. через расстояние рассматриваемой на оси точки до основания сегмента.

Полагая в найденном решении $\alpha = 0$, т. е. располагая центр инверсии на самой проводящей пластинке, получим решение для диафрагмы, имеющей форму неограниченной по длине щели OC , прорезанной в бесконечной проводящей пластине (рис. 94), причем диафрагма эта находится в поле произвольно расположенной по отношению к ней нити e' , и потенциал ее равен нулю, так же, как и потенциал на бесконечности. Заметим, что

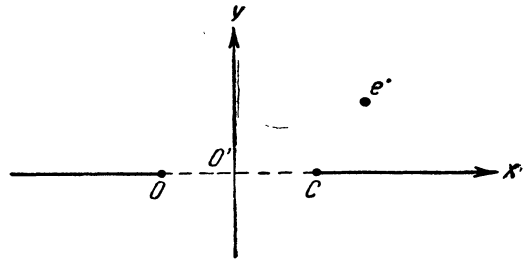


Рис. 94.

¹ См. (52, 13).

² Считаем, что $0 \leq \alpha \leq \pi$, что, очевидно, не ограничивает общности решения.

все линии сил, исходящие из нити, целиком связываются диафрагмой.

Зная поле диафрагмы в присутствии произвольно расположенной нити, нетрудно найти, обычным путем, и поле диафрагмы при внесении ее в любое внешнее поле. В частности, располагая заряд e' на оси $O'Y$ диафрагмы¹ (рис. 94), и уводя его на бесконечность при таком одновременном возрастании e' , чтобы поле от нити в центре O' щели диафрагмы оставалось неизменным, получим в пределе поле диафрагмы, внесенной в перпендикулярное к ее плоскости поле.

Заметим, кстати, что диафрагмы такого типа используются в качестве цилиндрических линз в электроннооптических устройствах.

52.8. В заключение дадим еще формулы для вычисления компонент E_ρ и E_ξ поля в биполярных координатах.

Составляем для этого, пользуясь формулой (52, 11), выражение для квадрата элемента длины в этих координатах, именно:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 &= |dx + idy|^2 = \frac{d^2}{4} \frac{|d\xi + id\rho|^2}{\left| \sin^2 \frac{(\xi + i\rho)}{2} \right|^4} = \\ &= \frac{1}{h^2} (d\xi^2 + d\rho^2), \end{aligned} \quad (52, 35)$$

где

$$h = \frac{1}{d} (\operatorname{ch} \rho - \cos \xi) = \frac{2}{d} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{2} - \cos^2 \frac{\xi}{2} \right). \quad (52, 36)$$

Получаем поэтому:

$$\left. \begin{aligned} E_\rho &= -h \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}{d} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \\ E_\xi &= -h \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}{d} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (52, 37)$$

Это и есть искомые формулы. С помощью второй из них легко, в частности, найти плотности поверхностных зарядов, сидящих на обеих сторонах рассмотренных выше цилиндрических сегментов. Так, например, для свободного распределения зарядов получается из (52, 21), (52, 22) и (52, 37), где надо положить $d = \frac{a}{2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{4\pi} (E_\xi^{(1)})_{\xi=\gamma} = \left(\frac{h}{4\pi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=\gamma} = -\frac{\left(\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right)}{\pi a} \frac{e' \sin \frac{\gamma}{2}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \right)} = \\ &= -e' \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\pi a} \left(\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right) \end{aligned} \quad (52, 38)$$

и²

¹ Заметим, что для этого должно быть $\rho_e = -\lg \frac{\rho}{R} = 0$, т. е. $a = R$, так что в первичной картине заряд e' должен лежать на круге радиуса R , описанном из точки O (края пластинки).

² $\sigma_1 = + \left(\frac{h}{4\pi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=\gamma}$, а не $\left(-\frac{h}{4\pi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=\gamma}$, потому что на этой стороне поверхности направление внешней нормали к ней соответствует не возрастанию, а убыванию ξ .

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi} (E_{\xi}^{(2)})_{\xi=\gamma} = - \left(\frac{h}{4\pi} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=\gamma} = - e' \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\pi a} \left(\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \right). \quad (52,39)$$

Эти формулы показывают, в частности, что разность $(\sigma_2 - \sigma_1)$, равная

$$\sigma_2 - \sigma_1 = e' \frac{\sin \gamma}{\pi a}, \quad (52,40)$$

постоянна по поверхности сегмента. Вспоминая, что a — это стягивающая сегмент хорда, а $\gamma' = \pi - \gamma$ — угол между этой хордой и касательной $e'K$ к сегменту в концевой его точке (рис. 95), видим, что

$$\frac{\sin \gamma}{a} = \frac{1}{2R}, \quad (52,41)$$

где R — радиус дуги сегмента. (52,40) приобретает поэтому такой вид:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{(-e')}{2\pi R}, \quad (52,42)$$

т. е. разность плотностей на выпуклой („внешней“) и вогнутой („внутренней“) сторонах сегмента равна полному заряду его $(-e')$, деленному на $2\pi \times$ (радиус сегмента). Мы увидим впоследствии, что это соотношение не имеет случайного характера, а является частным случаем общего закона, которым определяется разность плотностей на внутренней и внешней сторонах цилиндрического проводника, внесенного в произвольное внешнее электрическое поле.¹

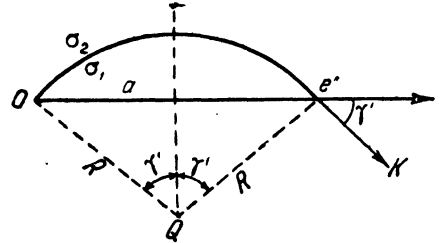


Рис. 95.

§ 53. Применение инверсии к нахождению поля пары произвольных, как угодно друг относительно друга расположенных цилиндров из разных диэлектриков, находящихся в однородной среде и внесенных в произвольное внешнее поле.

Соответствующая токовая задача

53.1. Решение этих задач непосредственно получается при помощи инверсии из данного в п. п. 18.1—18.2 решения для случая, когда имеется диэлектрический цилиндр ϵ_1 , окруженный concentрическим с ним цилиндрическим слоем из другого диэлектрика ϵ_2 , и когда вся эта система, окруженная неограниченно простирающейся во все стороны третьей средой ϵ_3 , находится в поле нити с зарядом e^2 на единицу длины (рис. 96).

¹ См. п. 65.8, форм. (65,33).

² Истинным.

Заметим, прежде всего, что если внешнее поле создается парой как угодно расположенных нитей с истинными зарядами e и $-e$, то полный свободный заряд Q всей системы равен нулю. Действительно, в какой бы среде ни находились обе нити, всегда поток вектора D

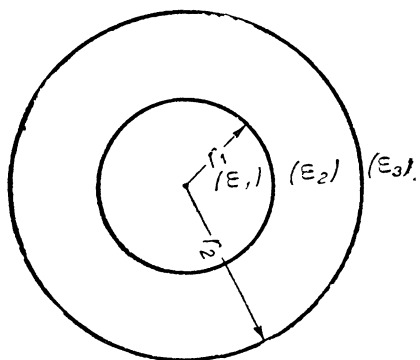


Рис. 96.

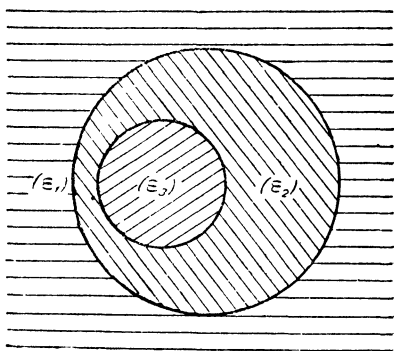


Рис. 97.

через любую поверхность (f), целиком лежащую во внешней среде и охватывающую обе нити, равен нулю, ибо равен нулю полный истинный заряд внутри этой поверхности. Но тогда равен нулю и поток сил через эту поверхность, равный

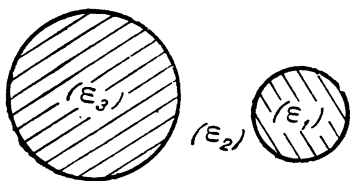


Рис. 98.

$$\int_{(f)} E_n df = \frac{1}{\epsilon_s} \int_{(f)} D_n df = 0,$$

пропорциональный полному свободному заряду Q системы. Следовательно, выбирая нить $-e$ за центр инверсии и замечая, что после инверсии в этой точке зарядов не будет ($Q=0!$), получим в результате

пару уже не коаксиальных цилиндров в однородной внешней среде, находящихся в поле нити с зарядом e , являющейся изображением соответствующей нити в первичной системе.

Возможны два случая:

1. Центр инверсии находится в первой среде. Тогда после инверсии получится картина, изображенная на рис. 97, т. е. будем иметь два эксцентрично расположенных цилиндра.

2. Центр инверсии находится во второй среде. Получится картина, изображенная на рис. 98.

Третий, казалось бы, возможный случай, когда центр инверсии лежит в третьей среде, сводится к первому, только распределение сред по областям будет иное, что, очевидно, не дает ничего нового.

В обоих случаях отраженная нить может находиться в любой из сред. Произвольными будут и радиусы и взаимное расположение ци-

линдров. В частности, один из цилиндров может иметь бесконечно-большой радиус, причем получится картина изображенного на рис. 99 типа.

53. 2. Если заменить в полученном решении ε_i через σ_i , — через проводимости, то согласно сказанному в п. 2.7, получим решение задачи о распределении стационарных токов, возникающих в соответствующей системе сред под действием линейного источника тока, расположенного в точке, где находится нить e .

Налагая друг на друга в желаемом количестве поля ряда таких нитей и полагая в общем решении $\sigma_1 = 0$, получим распределение токов в проводящем полупространстве с проводимостью σ_2 при наличии внутри него проводящего цилиндра с проводимостью σ_3 (рис. 100).

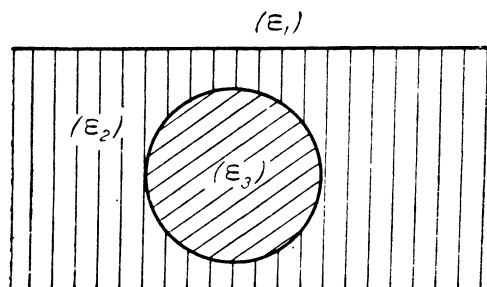


Рис. 99.

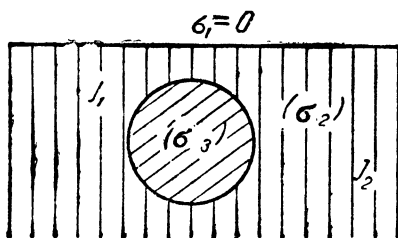


Рис. 100.

Система линейных электродов и заземлителей может быть при этом произвольной.

53. 3. Данными примерами на приложение инверсии здесь ограничимся. Напомним еще лишь, что каждому найденному выше решению электростатической задачи соответствует магнитный аналог, согласно общей теореме п. 46.1.

Глава XVIII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ СЕКТОРИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕД

§ 54. Постановка задачи

54. 1. В §§ 31—32 мы уже рассмотрели, исходя из основной формулы (30, 16), решение ряда пространственных электростатических задач. Рассмотрим теперь пространственную задачу в случае секториального распределения сред, подобного рассматривавшемуся в главе XIV (см. рис. 101, где $OA_k A_k' O'$ — это плоскость раздела k -ой и $k-1$ -ой сред с диэлектрическими постоянными ε_k и ε_{k-1}). Как уже указывалось выше, к этому случаю сводятся многие практически интересные задачи, как, например, вопрос о распределении магнитной

индукции вне и внутри полюсного башмака,¹ имеющего в сечении форму двугранного угла и внесенного в произвольное внешнее поле, вопрос о влиянии диэлектрической подкладки на поле электрода аналогичного сечения, находящегося в произвольном электрическом поле (в частности, краевой эффект), ряд проблем, касающихся распределения в земле токов от системы заземлителей при наличии в земле косых залеганий и т. д. Кроме того, применяя к получаемым решениям метод инверсии,² сможем из них получить решения ряда других задач, например, сможем найти поле диафрагмы, имеющей форму бесконечной проводящей пластинки с круглым отверстием,

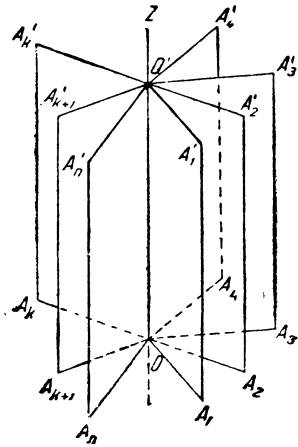


Рис. 101.

поле шара с круглой дыркой и т. д., из которых многие представляют заметный интерес, в частности, для электронной оптики. Решение получается при этом сразу для общего случая произвольного внешнего поля. В частности, на этом пути получается решение задачи о проводящем диске, внесенном в произвольное внешнее поле. При отсутствии внешнего поля получаем из него хорошо известное поле свободного распределения зарядов по диску, которое, впрочем, можно было бы найти проще другими способами.

В главе XIV было дано полное решение поставленной здесь задачи в том случае, когда внешнее поле не зависит от z (плоская задача).

Теперь мы дадим решение этой задачи также в случае произвольного трехмерного внешнего поля.³

В плоском случае получить решение задачи удавалось, составляя интегральные уравнения для плотностей „свободных“ зарядов, выделяющихся на поверхностях раздела различных сред, и решая их с помощью преобразования Лапласа. При этом, в первую очередь, определялись не сами искомые плотности зарядов, а их лапласовы преобразованные, из которых уже с помощью обычного преобразования Римана—Меллина получались сами плотности. Трехмерный случай представляет большие затруднения, но может быть тоже разрешен с помощью обобщения приема, использованного в плоском случае. При этом можно опять исходить из интегральных уравнений задачи, только нужно начать с разложения потенциала внешнего поля в направлении оси OZ (рис. 101) в интеграл Фурье и решать сперва задачу в предположении чисто синусоидального распределения его в этом направлении. При этом оказывается, что уравнения эти могут быть,

¹ Если считать, что внутри башмака $\mu = \text{const}$.

² Но уже в шаре, а не в круге. См. ниже, глава XIX.

³ Напомним, что принципиально пригодный путь для решения как этой, так и несколько более общих задач был указан выше в § 19.

путем умножения на соответствующим образом выбранный множитель и последующего интегрирования по параметру, приведены к виду, совершенно аналогичному тому, который встретился в плоской задаче, причем из них на этот раз определяются уже не лапласовы преобразованные искомым плотностей, а некоторые другие функции, получающиеся из этих плотностей с помощью некоторого другого интегрального преобразования. Это преобразование, введенное недавно М. Конторовичем и Н. Лебедевым при решении некоторых задач теории диффракции¹ и электростатических задач, относящихся к полям вращения, может быть в известном смысле рассматриваемо как обобщение преобразования Лапласа, которое является его частным случаем. Так как указанные авторы дали также обратное ему преобразование (при известных ограничительных условиях, см. § 56), то с помощью его можно найти искомые плотности по уже найденным их „преобразованным“ значениям. После этого остается еще лишь выполнить суммирование (интегрирование) по всем синусоидальным компонентам, из которых складывается внешнее поле в направлении оси z , чтобы получить полное решение рассматриваемой задачи.

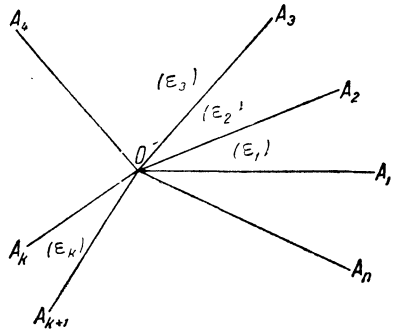


Рис. 102.

54. 2. Итак, пусть дано указанное на рис. 101 распределение различных диэлектриков в пространстве. Выбираем OO' за ось цилиндрической системы координат (r, θ, z) . Безграничные полуплоскости $OA_k A_k' O'$, соответствующие постоянным значениям $\theta = \theta_k$, линии OA_k пересечения которых с плоскостью $z=0$ показаны на рис. 102, делят все безграничное пространство на ряд секторов, внутри каждого из которых находится однородный изотропный диэлектрик, причем OA_k разграничивает среды с постоянными ϵ_{k-1} и ϵ_k .

На поверхностях раздела $OA_k A_k' O'$ выделяются, в силу воздействия заданного внешнего поля \mathbf{E}_a , свободные электрические заряды с поверхностными плотностями σ_k , нахождение которых равносильно полному решению задачи, и которое поэтому и будет являться нашей основной задачей.

Чтобы найти σ_k , разложим, прежде всего, как потенциал φ_a внешнего поля $\mathbf{E}_a = -\text{grad } \varphi_a$, так и плотности σ_k в спектр по оси z с помощью интеграла Фурье, т. е. положим

$$\varphi_a = \varphi_a(r, \theta, z) = \int_0^{\infty} [\varphi_a^{(m)} \cos mz + \psi_a^{(m)} \sin mz] dm, \quad (54, 1)$$

¹ Задачи о диффракции электромагнитной волны у края идеально проводящего угла (плоская задача).

причем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(m)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(r, \theta, \zeta) \cos m\zeta d\zeta, \\ \psi_a^{(m)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(r, \theta, \zeta) \sin m\zeta d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (54, 2)$$

и соответственно:

$$\sigma_k = \sigma_k(r, z) = \int_0^{\infty} [\sigma_k^{(m)} \cos mz + \sigma_k^{(m)'} \sin mz] dm. \quad (54, 3)$$

Чтобы избежать излишнего усложнения дальнейших вычислений, ограничимся случаем $\psi_a^{(m)} = 0$, что соответствует симметричному

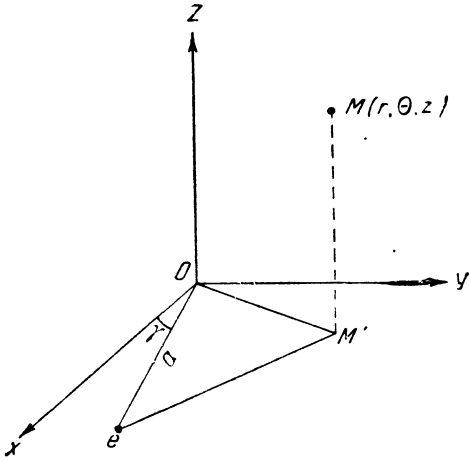


Рис. 103.

по отношению к плоскости $z=0$ распределению потенциала φ_a .¹ Что это не является на самом деле условием, ограничивающим общность решения задачи, видно из того, что поле E_a произвольного распределения зарядов можно представить в виде наложения полей элементарных точечных зарядов, получающихся при разбиении заданного распределения зарядов на бесконечно-малые элементы объема. При этом, очевидно, достаточно получить решение задачи для случая, когда внешнее поле E_a вызывается

одним единственным точечным зарядом e .² Если в этом последнем случае выбрать за координатную плоскость $z=0$ ту перпендикулярную к оси z плоскость, которая проходит через рассматриваемый точечный заряд, а через $r=a$ и $\theta=\gamma$ обозначить две другие его координаты, то φ_a оказывается в самом деле четной функцией от z , именно (см. рис. 103):

$$\varphi_a = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma). \quad (54, 4)$$

откуда получается, согласно (54, 1) и (54, 2):³

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a &= \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} \varphi_a^{(m)} \cos mzd m, \\ \varphi_a^{(m)} &= \frac{e}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos m\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \frac{2e}{\pi} K_0(m\rho); \end{aligned} \right\} \quad (54, 5)$$

¹ Т. е. $\varphi_a(r, \theta, z) = \varphi_a(r, \theta, -z)$.

² Такую задачу будем называть, подобно прежнему, ключевой.

³ См. (Дз 175). Ср. также¹ на стр. 370.

здесь $K_0(t)$ обозначает уже встречавшуюся нам раньше функцию Макдональда, связанную с ханкелевой функцией первого рода соотношением:¹

$$K_0(t) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(it). \tag{54, 6}$$

54.3. Итак, будем отныне полагать

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a &= \int_0^\infty \varphi_a^{(m)} \cos mz \, dm \equiv \int_0^\infty (\varphi_a)_m \, dm, \\ \sigma_k &= \int_0^\infty \sigma_k^{(m)} \cos mz \, dm \equiv \int_0^\infty (\sigma_k)_m \, dm, \end{aligned} \right\} \tag{54, 7}$$

где $\varphi_a^{(m)}$ и $\sigma_k^{(m)}$ — функции от m .

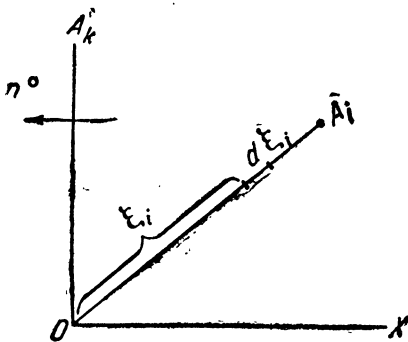


Рис. 104.

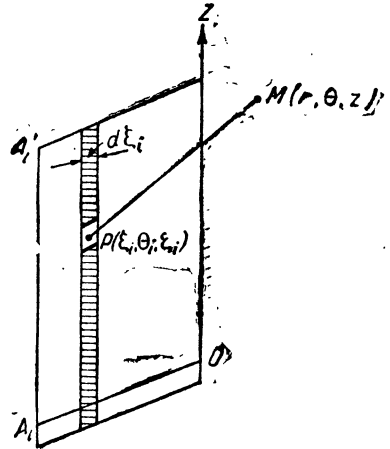


Рис. 105.

Начнем с рассмотрения случая, когда потенциал внешнего поля имеет форму

$$\varphi_a = (\varphi_a)_m = \varphi_a^{(m)} \cos mz, \quad \varphi_a^{(m)} = \varphi_a^{(m)}(r, \theta). \tag{54, 8}$$

Плотности σ_k принимают, соответственно этому, вид:

$$\sigma_k = (\sigma_k)_m = \sigma_k^{(m)} \cos mz. \tag{54, 9}$$

При этом, стало быть все распределение поля и плотностей является синусоидальной функцией координаты z с пространственным периодом $\lambda = \frac{2\pi}{m}$.

Чтобы составить интегральные уравнения, которым удовлетворяют σ_k , найдем сперва величину нормальной к поверхности раздела OA_k компоненты E_θ электрического поля (рис. 104).

С этой целью разделим, как показано на рис. 105, плоскости $OA_iA_i'O'$ на бесконечно-тонкие, параллельные оси z полоски ширины $d\xi_i$ и подсчитаем потенциал $d\varphi_i^{(m)}$, создаваемый подобной полоской в некоторой точке M с координатами (r, θ, z) .

¹ См. (Д₂ 58).

Получается:

$$d\varphi_i^{(m)} = \sigma_i^{(m)}(\xi_i) d\xi_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos m\zeta d\zeta}{\sqrt{\xi_i^2 + r^2 - 2r\xi_i \cos(\theta - \theta_i) + (z - \zeta)^2}} = \\ = \sigma_i^{(m)}(\xi_i) d\xi_i \cos mz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mu da}{\sqrt{\rho_i^2 + a^2}}, \quad (54, 10)$$

¹ Из этого выражения для потенциала бесконечно-узкой полоски сразу видно, что, действительно, имеет место формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos m\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = 2K_0(m\rho), \quad (A)$$

которой мы пользовались выше [уравнение (54, 5)] и которая дает (54, 11).

В самом деле, вычисляя потенциал (54, 10) полоски, мы рассматривали ее просто как нить с синусоидально-изменяющимся по ее длине зарядом с линейной плотностью

$$e = e_0 \cos mz, \quad (B)$$

где

$$e_0 = \sigma_i^{(m)} d\xi_i, \quad (B')$$

проходящую через точку с координатами ξ_i, θ_i .

Но так как потенциал φ такой нити должен, по симметрии, зависеть только от z и от

$$\rho = \sqrt{\xi_i^2 - 2r\xi_i \cos(\theta - \theta_i) + r^2},$$

где ρ — расстояние от нити до точки M , притом от z по закону косинуса, то должно быть

$$\varphi = F(\rho) \cos mz. \quad (Г)$$

Так как φ , кроме того, должен удовлетворять уравнению Лапласа, которое для полей вращения имеет в координатах (ρ, z) вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (Д)$$

то, подставляя сюда φ из (Г), получим для F :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dF}{d\rho} \right) - m^2 F = 0. \quad (E)$$

Это — уравнение Бесселя для функций от чисто мнимого аргумента ($im\rho$). Интеграл его имеет вид [ср. Дополнение II, § 4, особенно (Д₂ 60)]:

$$F = AK_0(m\rho) + BI_0(m\rho). \quad (Ж)$$

На бесконечности потенциал φ должен убывать [это видно из формулы (54, 10),

в которой $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mu da}{\sqrt{\rho_i^2 + a^2}}$ стремится к нулю при $\rho_i \rightarrow \infty$], так что второй член

в (Ж) надо отбросить. Стало быть,

$$\varphi = F \cos mz = AK_0(m\rho) \cos mz. \quad (З)$$

При $\rho \rightarrow 0$ будет [см. (Д₂ 64)]:

$$\varphi = -A \cos mz \lg \rho + \dots, \quad (И)$$

$$\text{т. е.} \quad d\varphi_i^{(m)} = 2K_0(m\rho_i) \sigma_i^{(m)}(\xi_i) d\xi_i \cos mz, \quad (54, 11)$$

$$\text{где} \quad \rho_i^2 = \xi_i^2 + r^2 - 2r\xi_i \cos(\theta - \theta_i). \quad (54, 12)$$

Отсюда следует, что компонента $dE_\theta^{(i)}$ поля, создаваемого полоской в точке M , равняется:

$$dE_\theta^{(i)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (d\varphi_i^{(m)}) = -\frac{2\sigma_i^{(m)}(\xi_i)}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) \right\} d\xi_i \cdot \cos mz, \quad (54, 13)$$

а интегрируя по ξ_i от нуля до бесконечности, найдем полную величину $E_\theta^{(i)}$ соответствующей компоненты поля, создаваемой зарядами, находящимися на i -той поверхности раздела, именно:

$$E_\theta^{(i)} = -\frac{2}{r} \int_0^\infty \sigma_i^{(m)}(\xi_i) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) \right\} d\xi_i \cdot \cos mz. \quad (54, 14)$$

Из граничных условий, которые должны удовлетворяться на поверхности OA_k , получается [см. (30, 16)]:¹

$$\begin{aligned} \sigma_k(s_k) &= \sigma_k^{(m)}(s_k) \cos mz = \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ (\mathbf{E}_a)_\theta + \right. \\ &\left. + \sum_{i \neq k} E_\theta^{(i)} \right\}_{\theta = \theta_k}, \quad \alpha_k = \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k}, \end{aligned} \quad (54, 15)$$

причем невыписанные члены и производная по ρ остаются конечными при $\rho \rightarrow 0$ (ср. Дополнение II, § 4). Отсюда видно, что радиальная компонента E_ρ электрического поля вблизи от нити должна определяться формулой

$$E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} A \cos mz + \dots, \quad (\text{K})$$

где невыписанные члены во всяком случае остаются конечными при $\rho \rightarrow 0$. Так как, наряду с этим, непосредственно ясно, что при неограниченном приближении к нити поле ее стремится к полю равномерно заряженной по длине нити с той линейной плотностью заряда, которая существует в соответствующей точке нити, то около точки, где $e = e_0 \cos mz$, должно быть также

$$E_\rho \approx \frac{2e_0 \cos mz}{\rho}. \quad (\text{Л})$$

Сравнение (K) и (Л) показывает, что $A = 2e_0$, т. е. что

$$\varphi = 2e_0 K_0(m\rho) \cos mz. \quad (\text{M})$$

Так как, при $e_0 = \sigma_i^{(m)} d\xi_i$ и $\rho = \rho_i$ должен получиться потенциал (54, 10), т. е. $d\varphi^{(m)}$, то (M) дает:

$$d\varphi_i^{(m)} = 2\sigma_i^{(m)} d\xi_i \cdot K_0(m\rho_i) \cdot \cos mz,$$

а это и есть формула (54, 11).

Тем самым доказана и формула (A).

¹ При этом принято, что истинных зарядов на поверхностях раздела нет. Если бы там такие заряды находились, то можно было бы совершенно аналогичным образом провести все решение, исходя из формулы (30, 15).

а с помощью (54, 14):

$$\sigma_k(s_k) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \left\{ (\mathbf{E}_a^{(m)})_{\theta_k} - \frac{2}{s_k} \sum_{i \neq k} \int_0^\infty \sigma_i^{(m)}(\xi_i) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) \right]_{\theta=\theta_k} d\xi_i \right\}, \quad (54, 16)$$

где

$$(\mathbf{E}_a^{(m)})_{\theta_k} = -\frac{1}{s_k} \left[\frac{\partial \varphi_a^{(m)}}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_k}. \quad (54, 17)$$

Уравнение (54, 16) является аналогом уравнения (33, 6) соответствующей плоской задачи и представляет собой его обобщение на случай чисто синусоидального в направлении оси z поля.

Уравнения типа (54, 16) имеют место на каждой из поверхностей раздела OA_k . Вместе они составляют систему совокупных интегральных уравнений, из которых должно найти величины $\sigma_k^{(m)}$. Коль скоро это сделано, то, согласно сказанному выше, немедленно находится общее решение задачи.

54. 4. Отметим еще, что в том частном случае, когда источником внешнего поля является точечный свободный заряд e' , расположенный в точке $r=a$, $\theta=\gamma$, $z=0$, потенциал φ_a внешнего поля в некоторой точке $M(r, \theta, z)$ имеет вид (54, 4), т. е.

$$\varphi_a = \frac{e'}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \rho^2 = a^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + r^2, \quad (54, 18)$$

причем, согласно (54, 5),

$$\varphi_a^{(m)} = \frac{2e'}{\pi} K_0(m\rho). \quad (54, 19)$$

Формула (54, 17) дает теперь:

$$(\mathbf{E}_a^{(m)})_{\theta_k} = -\frac{1}{s_k} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_a^{(m)} \right]_{\theta=\theta_k} = -\frac{2e'}{\pi s_k} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} K_0(m\rho) \right]_{\substack{\theta=\theta_k \\ \rho=s_k}} \quad (54, 19')$$

так что (54, 16) принимает такую форму:

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(m)}(s_k) = & -\frac{\alpha_k}{\pi s_k} \left\{ \frac{e'}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{i \neq k} \int_0^\infty \sigma_i^{(m)}(\xi_i) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) \right] d\xi_i \right\}_{\substack{\theta=\theta_k \\ \rho=s_k}}, \quad (54, 20) \\ & (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Проблема решения этой системы интегральных уравнений является в такой же мере „ключевой“ для решения рассматриваемой здесь общей пространственной задачи, в какой проблема решения уравнений (33, 10) являлась ключевой для соответствующей общей двухмерной задачи (33, 6), ибо любое внешнее пространственное поле можно свести к наложению полей отдельных точечных зарядов, подобно тому, как в случае плоской проблемы любое внешнее поле могло быть сведено к наложению полей элементарных заряженных нитей.

§ 55. Общее решение задачи

55.1. Чтобы получить решение системы (54, 16), применим метод, подобный методу, использованному нами для решения аналогичной системы (33, 6) в случае соответствующей плоской задачи. Именно, умножим (54, 16) на $K_\nu(as_k) ds_k$, где

$$K_\nu(t) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(it) -$$

функция Макдональда,¹ вообще говоря, комплексного порядка ν , и проинтегрируем по s_k от нуля до бесконечности. Принимаем при этом, что полученные интегралы имеют смысл и что в стоящих справа двойных интегралах порядок интегрирования может быть изменен.

Вводя обозначение:

$$\bar{f} = \int_0^\infty f(s_k) K_\nu(ms_k) ds_k \quad (55, 1)$$

и называя \bar{f} преобразованной функцией от f , получаем уравнение:

$$\bar{\sigma}_k^{(m)} = \frac{a_k}{2\pi} \left\{ (\bar{E}_a^{(m)})_{\theta_k} - 2 \sum_{i \neq k} \int_0^\infty \sigma_i^m(\xi_i) d\xi_i \int_0^\infty \frac{K_\nu(ms_k)}{s_k} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) \right]_{\theta=\theta_k} ds_k \right\} \quad (55, 2)$$

Входящий сюда интеграл

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \int_0^\infty \frac{K_\nu(ms_k)}{s_k} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) \right]_{\theta=\theta_k} ds_k, \\ \rho_i &= \sqrt{\xi_i^2 + s_k^2 - 2s_k\xi_i \cos(\theta - \theta_i)}, \end{aligned} \right\} \quad (55, 3)$$

можно преобразовать следующим образом: из известной формулы²

$$\left. \begin{aligned} &K_0(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \Phi}) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n(a) I_n(b) \cos n\Phi, \quad |be^{\pm i\Phi}| < |a|, \end{aligned} \right\} \quad (55, 4)$$

непосредственно следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \theta} K_0(m\rho_i) = \begin{cases} -2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(m\xi_i) I_n(ms_k) n \sin n(\theta - \theta_i) & \text{при } \xi_i > s_k, \\ -2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(ms_k) I_n(m\xi_i) n \sin n(\theta - \theta_i) & \text{при } \xi_i < s_k. \end{cases} \quad (55, 5)$$

Полагая, как раньше, γ

$$\theta_{ki} = \begin{cases} \theta_k - \theta_i & \text{при } \theta_k > \theta_i, \\ \theta_k - \theta_i + 2\pi & \text{при } \theta_k < \theta_i, \end{cases} \quad (0 < \theta_{ki} < 2\pi), \quad (55, 6)$$

¹ См. (Д₂ 57).

² См. (Д₂ 141).

можем представить A_i в следующей форме:

$$A_i = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n \theta_{ki} \left\{ K_n(m\xi_i) \int_0^{\xi_i} \frac{K_\nu(ms_k) I_n(ms_k) ds_k}{s_k} + \right. \\ \left. + I_n(m\xi_i) \int_{\xi_i}^{\infty} \frac{K_\nu(ms_k) K_n(ms_k) ds_k}{s_k} \right\}. \quad (55, 7)$$

Значения интегралов, входящих в (55, 7), известны,¹ именно:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\xi_i} \frac{K_\nu(ms_k) I_n(ms_k) ds_k}{s_k} &= \frac{m\xi_i}{n^2 - \nu^2} [K_\nu(m\xi_i) I_n'(m\xi_i) - I_n(m\xi_i) K_\nu'(m\xi_i)], \\ \int_{\xi_i}^{\infty} \frac{K_\nu(ms_k) K_n(ms_k) ds_k}{s_k} &= -\frac{m\xi_i}{n^2 - \nu^2} [K_\nu(m\xi_i) K_n'(m\xi_i) - K_n(m\xi_i) K_\nu'(m\xi_i)], \end{aligned} \right\} (55, 8)$$

и если еще воспользоваться соотношением²

$$K_n(x) I_n'(x) - I_n(x) K_n'(x) = \frac{1}{x}, \quad (55, 9)$$

то (55, 7) обращается в

$$A_i = -2K_\nu(m\xi_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta_{ki}}{n^2 - \nu^2}. \quad (55, 10)$$

Имеем:³

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta_{ki}}{n^2 - \nu^2} = \pi \frac{\sin \nu(\pi - \theta_{ki})}{\sin \nu\pi}, \quad (0 < \theta_{ki} < 2\pi), \quad (55, 11)$$

так что получается окончательно:

$$A_i = -\pi \frac{\sinh \nu(\pi - \theta_{ki})}{\sin \nu\pi} K_\nu(m\xi_i). \quad (55, 12)$$

Внося полученное значение A_i в (55, 2), находим:

$$\bar{\sigma}_k^{(m)} = \frac{a_k}{2\pi} \left\{ (\bar{\mathbf{E}}_a^{(m)})_{\theta_k} + \frac{2\pi}{\sin \nu\pi} \sum_{i \neq k} \sin \nu(\pi - \theta_{ki}) \bar{\sigma}_i^{(m)} \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (55, 13)$$

что полностью совпадает с формулой (34, 5), если только заменить в ней лапласовы преобразованные величинами, определяемыми уравнением (55, 1), т. е. преобразованными в новом смысле. Причиной подобного совпадения является то обстоятельство, что наша прежняя задача является просто частным случаем данной, соответствующей синусоидальному по оси z распределению поля, именно, она получается из этой последней, если предположить, что период поля по оси z бесконечно велик, т. е. $m=0$. Впоследствии мы несколько подробнее остановимся на этом обстоятельстве.

¹ См. (Д₂ 179).

² См. (Д₂ 150).

³ (55, 11) получается из формулы (21, 32) при $a = i\nu$ и $\gamma = \theta_{ki}$.

55. 2. Для ключевой задачи получается из (54, 2), (54, 19'), (55, 3) и (55, 12):

$$\bar{\sigma}_k^{(m)} = \frac{a_k}{\sin \pi \nu} \left\{ \frac{e' K_\nu(ma)}{\pi} \sin(\pi - \theta_{k\gamma}) \nu + \sum_{i \neq k} \bar{\sigma}_i^{(m)} \sin(\pi - \theta_{ki}) \nu \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ (k=1, 2, \dots, n), \end{array} \right\} \quad (55, 14)$$

что отличается от (34, 10) только тем, что в этой последней формуле величина $e'a^\nu$ заменилась через $\frac{e'}{\pi} K_\nu(ma)$, так что имеет место соотношение:

$$\bar{\sigma}_k^{(m)}(\nu) = \frac{K_\nu(ma) a^{-\nu}}{\pi} \sigma_k(\nu). \quad (55, 15)$$

Поэтому мы можем в дальнейшем не составлять заново формул для преобразованных плотностей $\sigma_k^{(m)}$, относящихся к уже ранее рассмотренным при решении плоской задачи типам границ (прямоугольная поверхность раздела двух сред, двугранная с произвольным углом β между составляющими ее полуплоскостями, три среды, рассмотренные в § 39 и т. д.), а просто получить их указанной заменой из соответствующих формул для σ_k .

55. 3. Уравнение (55, 13) показывает, что для преобразованных величин $\bar{\sigma}_k^{(m)}$ получается просто система совокупных линейных уравнений, из которых величины $\bar{\sigma}_k^{(m)}$ находятся как функции от ν . Остается, стало быть, определить сами величины $\sigma_k^{(m)}$ по их преобразованным значениям.

Аналогичная задача в случае рассмотренной выше плоской задачи, где речь шла о нахождении величин σ_k по их лапласовым преобразованным — $\bar{\sigma}_k = \int_0^\infty \sigma_k(s_k) s_k^\nu ds_k$ — решалась с помощью формулы обращения Римана — Меллина, именно:

$$s \sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{\sigma}_k s^{-\nu} d\nu. \quad (55, 16)$$

В данном случае аналогичную услугу оказывает нам уже упоминавшаяся выше и доказываемая в следующем параграфе формула обращения Конторовича и Лебедева,¹ которым принадлежит следующая теорема:

Пусть $k = |k| e^{-i\psi} = a - ib$, $0 < \psi < \pi$, $\nu = u + it$, а $\omega(\nu)$ — четная функция от ν , голоморфная внутри полосы $|Re(\nu)| \leq \delta$. Если произведение $|u + it| \cdot |\omega(u + it)| e^{\psi t + \frac{\pi}{2}(|t| - \delta)}$ при $|t| \rightarrow \infty$ равномерно стремится к нулю во всем интервале $-\delta \leq u \leq \delta$, а интеграл

¹ ЖЭТФ, 8, вып. 10 — 11, 1193 и 1198 (18), 1938.

$\int_{-\infty}^{\infty} |(u+it)\omega(u+it)| e^{\psi t + \frac{\pi}{2}(|t|-\delta)} dt$ — сходится в том же интервале изменения u , то, обозначая через $F(s)$, при любом $b > 0$, выражение

$$F(s) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mu \omega(\mu) J_{\nu}(ks) e^{\frac{i\pi\mu}{2}} d\mu, \quad (55, 17)$$

будем иметь для всякого ν , принадлежащего полосе $|Re(\nu)| < \delta$, обратную формулу:¹

$$\omega(\nu) = \int_0^{\infty} F(s) e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{H_{\nu}^{(2)}(ks)}{s} ds. \quad (55, 18)$$

Для нашей цели мы перепишем эти формулы в несколько другой форме. Именно, положим $|k| = m$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, т. е. $k = me^{-\frac{i\pi}{2}}$, и заметим, что²

$$K_{\nu}(ms) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} H_{\nu}^{(2)}(mse^{-\frac{i\pi}{2}}). \quad (55, 19)$$

Пользуясь соотношением (55, 19), можем переписать формулу (55, 1) следующим образом:

$$\bar{f} = \bar{f}(\nu) = \int_0^{\infty} \left[-\frac{\pi i}{2} sf(s) \right] e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{H_{\nu}^{(2)}(ks)}{s} ds \equiv \omega(\nu), \quad (55, 20)$$

причем здесь $-\frac{1}{2} \pi i s f(s)$ соответствует функции $F(s)$ в (55, 17) и (55, 18). Поэтому должно быть, если только допустить единственность решения:

$$-\frac{\pi i}{2} sf(s) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu \bar{f}(\nu) J_{\nu}(mse^{-\frac{i\pi}{2}}) e^{\frac{i\nu\pi}{2}} d\nu,$$

что, в силу соотношения

$$e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_{\nu}(ze^{-\frac{i\pi}{2}}) = I_{\nu}(z), \quad (55, 21)$$

принимает более простую форму:

$$sf(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu \bar{f}(\nu) I_{\nu}(ms) d\nu. \quad (55, 22)$$

Применяя (55, 1) и (55, 22) к функциям $\sigma_k^{(m)}$ и $\bar{\sigma}_k^{(m)}$, получаем следующую теорему: пусть

$$\bar{\sigma}_k^{(m)} = \int_0^{\infty} \sigma_k^{(m)}(s) K_{\nu}(ms) ds. \quad (55, 23)$$

¹ См. там же примечание на стр. 1198 о степени необходимости указанных выше ограничительных условий, при которых доказана формула (55, 18).

² См. (Д₂ 57) и (Д₂ 48).

Если $\overline{\sigma}_k^{(m)}(\nu)$, рассматриваемая как функция от ν , удовлетворяет всем указанным выше условиям,¹ и если предположить единственность обращения, то для $\sigma_k^{(m)}(s)$ получается формула:

$$s_k \sigma_k^{(m)}(s_k) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu \overline{\sigma}_k^{(m)}(\nu) I_\nu(ms_k) d\nu, \quad (55, 4)$$

которой поставленная задача и решается² в том случае, когда внешнее поле имеет потенциал типа (54, 8). Чтобы отсюда теперь получить полную плотность σ_k , соответствующую истинному внешнему полю с потенциалом

$$\varphi_a = \int_0^\infty \varphi_a^{(m)} \cos mz \, dm,$$

остается только выполнить квадратуру (54, 7), т. е. найти

$$\sigma_k = \int_0^\infty \sigma_k^{(m)} \cos mz \, dm, \quad (55, 25)$$

на чем решение задачи и заканчивается.

§ 56. Доказательство теоремы обращения Конторовича Лебедева

Доказательство теоремы опирается на некоторые оценки для функций Бесселя и Ханкеля, с вывода которых и начнем.

56.1. Из известной формулы³

$$H_\nu^{(2)}(ks) = -\frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iks \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta, \quad (56, 1)$$

верной при $I_m(ks) < 0$, следует, что при любом комплексном $\nu = u + it$

$$|H_\nu^{(2)}(ks)| < \frac{e^{-\frac{\pi t}{2}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bs \operatorname{ch} \eta - u\eta} d\eta = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi t}{2}} K_u(bs).^4 \quad (56, 2)$$

¹ По этому поводу см. § 57.

² Отметим еще то обстоятельство, что, хотя единственность решения здесь не доказывается, практически это не играет существенной роли, ибо если бы возникли какие-нибудь сомнения относительно верности полученного решения, то всегда возможно непосредственно проверить его справедливость путем подстановки его в исходные уравнения задачи. Ср. также по вопросу о единственности обращения статью Н. Н. Лебедева в ДАН ЛИ, № 8, 661 (1946).

³ См. (Д₃ 163).

⁴ См. (Д₂ 164).

Чтобы получить оценку для функции $J_\mu(ks)$, будем исходить из интегрального представления ее, данного Пуассоном, именно¹

$$J_\mu(ks) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{ks}{2}\right)^\mu}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ks \sin \varphi) \cos^{2\mu} \varphi d\varphi, \quad (56, 3)$$

которое пригодно при $Re(\mu) > -\frac{1}{2}$.

Полагая здесь $\mu = p + iq$ и считая, что $p > -\frac{1}{2}$, находим, учитывая, что $k = |k|e^{-i\psi}$:

$$\begin{aligned} |J_\mu(ks)| &< \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{|k|s}{2}\right)^p e^{\psi q}}{\left|\Gamma\left(p + \frac{1}{2} + iq\right)\right|} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}(bs \sin \varphi) \cos^{2p} \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\left(\frac{|k|}{b}\right)^p e^{\psi q} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(p + \frac{1}{2} + iq\right)\right|} I_p(bs), \end{aligned} \quad (56, 4)$$

причем использованы очевидное неравенство

$$|\cos(ks \sin \varphi)| < \operatorname{ch}(bs \sin \varphi)$$

и вытекающая из (Д₂ 25) и (Д₂ 53) формула:

$$I_p(x) = e^{-\frac{\pi p i}{2}} J_p(xe^{\frac{i\pi}{2}}) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}(x \sin \varphi) \cos^{2p} \varphi d\varphi. \quad (56, 5)$$

Нетрудно показать, что при $p \geq 0$ и при произвольном q имеет место неравенство:

$$\left\{ \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(p + \frac{1}{2} + iq\right)\right|} \right\} \leq e^{\frac{\pi |q|}{2}}. \quad (56, 6)$$

Действительно, из известного представления функции гамма в виде бесконечного произведения, именно,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{\prod_{k=0}^{n-1} (z+k)}, \quad (56, 7)$$

взяв при любом вещественном или комплексном z ,² получаем полагая $z = p + \frac{1}{2} + iq$:

$$\left| \Gamma\left(p + \frac{1}{2} + iq\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!) \cdot n^{\frac{2p+1}{2}}}{\sqrt{\prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(p + k + \frac{1}{2}\right)^2 + q^2\right]}}$$

¹ См. (Д₂ 25).

² Если z не нуль и не равно отрицательному целому числу.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n! n^{p+\frac{1}{2}}}{\prod_{k=0}^{k=n} \left(p + \frac{1}{2} + k \right)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=0}^{k=n} \left[1 + \frac{q^2}{\left(p + \frac{1}{2} + k \right)^2} \right]}} = \\
 &= \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\prod_{k=0}^{\infty} \left[1 + \frac{q^2}{\left(p + \frac{1}{2} + k \right)^2} \right]}}. \tag{56, 8}
 \end{aligned}$$

Отсюда, так как при $p \geq 0$

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left[1 + \frac{q^2}{\left(p + \frac{1}{2} + k \right)^2} \right] \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left[1 + \frac{q^2}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^2} \right] = \operatorname{ch} \pi q,^1$$

то

$$\frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\left| \Gamma\left(p + \frac{1}{2} + iq\right) \right|} \leq \sqrt{\operatorname{ch} \pi q}. \tag{56, 9}$$

Замечая, что

$$\operatorname{ch} \pi q = \frac{1}{2} (e^{\pi q} + e^{-\pi q}) \leq e^{\pi |q|},$$

находим, усиливая неравенство, как раз формулу (56, 6). (56, 4) дает теперь:

$$|J_{\mu}^{(ks)}| < \left(\frac{|k|}{b} \right)^p e^{\psi q + \frac{\pi}{2}|q|} I_p(bs), \tag{56, 10}$$

если только $p = \operatorname{Re}(\mu) \geq 0$. Это и есть нужная нам оценка.

56. 2. Переходим к доказательству утверждения, что при указанных в п. 55.3 условиях функция $F(s)$, определяемая формулой (55, 17), удовлетворяет соотношению (55, 18).

Заметим, прежде всего, что путь интегрирования в формуле (55, 17) можно сместить с мнимой оси на любую прямую $p = p_1 > 0$ в пределах рассматриваемой полосы $|\operatorname{Re}(\mu)| < \delta$, не изменяя при этом значения интеграла.

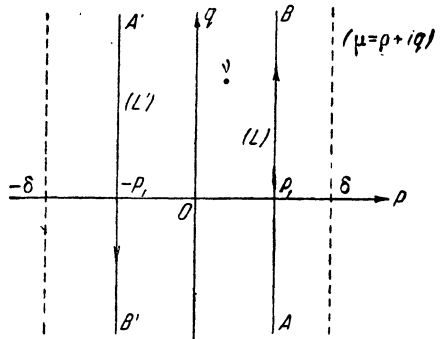


Рис. 106.

В самом деле, в силу неравенства (56, 10) и условия, что

$p + iq \cdot |\omega(p + iq)| e^{\psi q + \frac{\pi}{2}(|q| - q)} \rightarrow 0$ равномерно при $|q| \rightarrow \infty$ внутри этой полосы, интегралы, взятые по горизонтальным отрезкам $q = \pm q' = \text{const}$ между вертикальными прямыми $\operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $\operatorname{Re}(\mu) = p_1$, стремятся к нулю для всех $0 < \psi < \pi$, когда $q' \rightarrow \infty$, а так как

¹ И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм и произведений. ОГИЗ. Гостехиздат. 1943. М. — Л., стр. 282, п. в), № 3.

подинтегральная функция, по условию, голоморфна между прямыми $p=0$ и $p=p_1$, то интегралы по мнимой оси и по пути L (прямая AB на рис. 106) действительно одинаковы.

Подставим теперь в правую часть формулы (55,18), в которой пусть $\nu = u + it$ — некоторое фиксированное комплексное число внутри полосы $0 < \operatorname{Re}(\nu) < +\delta$, значение $F(s)$ из (55,17), причем только будем, в соответствии с только что сказанным, считать путь интегрирования в (55,17) смещенным с мнимой оси на прямую L , определяемую уравнением $\operatorname{Re}(\mu) = p_1 = \operatorname{const}$ и лежащую правее точки ν , так что $0 < u < p_1 < \delta$ (рис. 106).

Получается ($\mu = p_1 + iq$):

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int_0^{\infty} F(s) e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{H_{\nu}^{(2)}(ks)}{s} ds = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{(L)} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{H_{\nu}^{(2)}(ks)}{s} \mu \omega(\mu) J_{\mu}(ks) e^{\frac{i\pi\mu}{2}} d\mu \right\} ds = \\ &= -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{q=-\infty}^{q=\infty} e^{\frac{i\pi}{2}(\mu-\nu)} \mu \omega(\mu) \frac{H_{\nu}^{(2)}(ks) J_{\mu}(ks)}{s} dq \right\} ds. \end{aligned} \quad (56, 11)$$

Покажем теперь, что в этом интеграле можно изменить порядок интегрирования на обратный. Для этого заметим, что, если обозначить подинтегральное выражение в (56,11) через $\Phi(s, q)$, то, в силу неравенств (56,2) и (56,10), имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} |\Phi(s, q)| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{|k|}{b}\right)^{p_1} \left[\frac{K_u(bs) I_{p_1}(bs)}{s} \right] \times \\ &\times \left[|(p_1 + iq) \omega(p_1 + iq)| e^{\frac{\pi}{2}(1|q|-q)} \right], \end{aligned} \quad (56, 12)$$

где справа стоит постоянная

$$C = \frac{2}{\pi} \left(\frac{|k|}{b}\right)^{p_1},$$

умноженная на произведение двух функций, из которых одна зависит только от s , другая — только от q . Вводя обозначения

$$\Phi(s) = \frac{K_u(bs) I_{p_1}(bs)}{s}, \quad (56, 13)$$

$$\chi(q) = |(p_1 + iq) \omega(p_1 + iq)| e^{\frac{\pi}{2}(1|q|-q)}, \quad (56, 14)$$

видим поэтому, что

$$|Q| < \frac{C}{2} \left[\int_0^{\infty} \Phi(s) ds \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi(q) dq \right].$$

Первый интеграл в этой формуле легко вычисляется и равен¹

$$M = \int_0^{\infty} \Phi(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{K_u(bs) I_{p_1}(bs)}{s} ds = \frac{1}{p_1^2 - u^2}. \quad (56, 15)$$

¹ См. (Д₂ 176) и (Д₂ 179).

Что касается второго, —

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(q) dq = \int_{-\infty}^{\infty} |(p + iq) \omega(p + iq)| e^{\psi q + \frac{\pi}{2} |q|^{-q}} dq, \quad (56, 16)$$

то он, по условию, сходится.

Таким образом, двойной интеграл Q сходится абсолютно, и порядок интегрирований в нем может быть изменен на обратный. Можно, стало быть, написать

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} F(s) e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{H_\nu(ks)}{s} ds = \\ & = -\frac{1}{2} \int_{(L)} e^{\frac{i\pi(\mu-\nu)}{2}} \mu \omega(\mu) d\mu \int_0^{\infty} \frac{H_\nu^{(2)}(ks) J_\mu(ks)}{s} ds. \end{aligned} \quad (56, 17)$$

После того, как законность перемены порядка интегрирования показана, доказательство может быть легко закончено с помощью приема, аналогичного примененному в § 35, при доказательстве теоремы обращения Римана—Меллина. Именно, так как внутренний интеграл в формуле (56, 17) непосредственно вычисляется¹ и равен, поскольку $Re(\mu) > Re(\nu)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{H_\nu^{(2)}(ks) J_\mu(ks)}{s} ds = \frac{2i}{\pi} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(\mu-\nu)}}{\mu^2 - \nu^2}, \quad (56, 18)$$

то, принимая во внимание, что, по условию, $\omega(-\mu) = \omega(\mu)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} F(s) e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{H_\nu^{(2)}(ks)}{s} ds = \frac{1}{\pi i} \int_{(L)} \frac{\mu \omega(\mu) d\mu}{\mu^2 - \nu^2} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{(L)} \frac{\omega(\mu) d\mu}{\mu - \nu} + \int_{(L)} \frac{\omega(\mu) d\mu}{\mu + \nu} \right\}. \end{aligned} \quad (56, 19)$$

Заменяя в последнем интеграле справа μ на $-\mu$; причем путь интегрирования L перейдет в путь L' (рис. 106), лежащий слева от мнимой оси и проходимый сверху вниз, можем переписать (56, 19) так:

$$\int_0^{\infty} F(s) e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{H_\nu^{(2)}(ks)}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{(L)} \frac{\omega(\mu) d\mu}{\mu - \nu} + \int_{(L')} \frac{\omega(\mu) d\mu}{\mu - \nu} \right\}. \quad (56, 20)$$

На основании теоремы Коши, сумма последних двух интегралов равна $\omega(\nu)$, так как, в силу введенного в п. 55.3 условия, что

$$|(p + iq) \omega(p + iq)| e^{\psi q + \frac{\pi}{2} (|q| - q)}$$

¹ Это легко получается из (Д₂ 179).

стремится к нулю равномерно при $|q| \rightarrow \infty$ и $-\delta < p < +\delta$, интегралы по горизонтальным отрезкам, соединяющим прямые AB и $A'B'$, исчезают, когда $|q| \rightarrow \infty$.

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} F(s) e^{-\frac{i\pi v}{2}} \frac{H_v(ks)}{s} ds = \omega(v), \quad (56, 21)$$

что и требовалось доказать.

56.3. Формула (55, 17) может быть преобразована еще следующим образом. Так как $\omega(-\mu) = \omega(\mu)$, то

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^0 \mu \omega(\mu) e^{\frac{i\pi\mu}{2}} J_{\mu}(ks) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^{i\infty} \mu \omega(\mu) e^{\frac{i\pi\mu}{2}} J_{\mu}(ks) d\mu = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{i\infty} \mu \omega(\mu) \left[J_{\mu}(ks) e^{\frac{i\pi\mu}{2}} - J_{-\mu}(ks) e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \right] d\mu. \end{aligned} \quad (56, 22)$$

Принимая во внимание известное соотношение между функциями Бесселя и Ханкеля:¹

$$J_{\mu}(ks) e^{\frac{i\pi\mu}{2}} - J_{-\mu}(ks) e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} = ie^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \cdot \sin \mu\pi \cdot H_{\mu}^{(2)}(ks),$$

получим:

$$F(s) = \frac{1}{2i} \int_0^{i\infty} \mu \omega(\mu) e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \sin \pi\mu H_{\mu}^{(2)}(ks) d\mu,$$

или, так как²

$$H_{\mu}^{(2)}(ks) \cdot e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} = H_{-\mu}^{(2)}(ks) \cdot e^{\frac{i\pi\mu}{2}},$$

то

$$F(s) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \omega(\mu) e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \sin \pi\mu H_{\mu}^{(2)}(ks) d\mu. \quad (56, 28)$$

В такой форме обращение содержит только функции Ханкеля.

56.4. Если положить в формулах (55, 17), (55, 18) и (56, 23)

$$\omega(v) e^{\frac{i\pi v}{2}} = \tilde{F}(v).$$

то формулы обращения принимают вид:

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \tilde{F}(\mu) J_{\mu}(ks) d\mu = \\ &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \tilde{F}(\mu) e^{-i\pi\mu} \sin \pi\mu H_{\mu}^{(2)}(ks) d\mu \end{aligned} \quad (56, 24)$$

¹ Ср. (Д₂ 38).

² Ср. (Д₂ 47).

и

$$\tilde{F}(\nu) = \int_0^{\infty} F(s) \frac{H_{\nu}^{(2)}(ks)}{s} ds, \quad (56, 25)$$

причем

$$|\operatorname{Re}(\nu)| < \delta, \quad k = |k| e^{-i\psi}, \quad 0 < \psi < \pi.$$

56.5. Как отмечают авторы теоремы, есть все основания полагать, что, если несколько изменить путь интегрирования в (55, 17), именно, провести бесконечные ветви пути L так, чтобы они несколько уклонялись вправо от мнимой оси, то полученные выше формулы обращения будут справедливы при значительно более слабом убывании $\omega(\nu)$ при $|t| \rightarrow \infty$, чем то, которое диктуется условиями п. 55.3.

§ 57. Применение формулы обращения (55, 24) к решению ключевой задачи

57.1. Рассмотрим теперь более подробно вопрос о применимости формулы (55, 24) к решению интересующей нас электростатической задачи, для чего выясним, удовлетворяют ли функции $\sigma_k^{(m)}(\nu)$ тем условиям, при которых была выше доказана справедливость формулы обращения. Ограничиваясь ключевой задачей,¹ для которой функции $\sigma_k^{(m)}$ определяются системой уравнений (55, 14), сможем провести интересующее нас исследование совершенно подобно тому, как это было сделано в п. 36.3 для соответствующей плоской ключевой задачи. Именно, так как система (55, 14) для функций $\sigma_k^{(m)}$ отличается от исследованной в п. 36.3 системы уравнений (34, 10) для функций $\bar{\sigma}_k$ только тем, что в этой последней нужно заменить во всех формулах величину $e'a^\nu$ величиной $\frac{e'}{\pi} K_\nu(ma)$, чтобы получить систему (55, 14), то функции $\sigma_k^{(m)}$ непосредственно получаются из данных в § 36 формул (36, 4) и (36, 5) в виде²

$$\sigma_k^{(m)}(\nu) = \frac{e' K_\nu(ma)}{\pi} \cdot \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (57, 1)$$

Здесь $\Delta(\nu)$ и $M_k(\nu)$ — те же определители, как в (36, 4) и (36, 5), так что сравнение с (36, 4) дает:

$$\bar{\sigma}_k^{(m)} = \frac{K_\nu(ma)}{\pi a^\nu} \sigma_k(\nu), \quad (57, 2)$$

где $\bar{\sigma}_k(\nu)$ — соответствующая функция для плоской задачи.

Для того, чтобы показать, что функции $\sigma_k^{(m)}$ удовлетворяют всем необходимым для возможности пользования формулой обращения требованиям, достаточно, согласно сказанному в п. 55.3, проверить что выполнены следующие условия:

¹ Этого, как уже указывалось выше, вполне достаточно.

² Сохраняем обозначения § 36.

1) Все $\overline{\sigma}_k^{(m)}(\nu)$ — четные функции от ν , голоморфные внутри некоторой полосы $|Re(\nu)| \leq h$, где $h > 0$;

2) Все произведения

$$|(u+it)\overline{\sigma}_k^{(m)}(u+it)|e^{\frac{\pi}{2}|t|}, \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

при $|t| \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к нулю во всем интервале $-h \leq u \leq h$;¹

3) Все интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(u+it)\overline{\sigma}_k^{(m)}(u+it)|e^{\frac{\pi}{2}|t|} dt, \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

сходятся внутри полосы $-h \leq u \leq h$.

57.2. Докажем сперва, что выполняется первое из этих условий. В самом деле, четность функции $\overline{\sigma}_k^{(m)}(\nu)$ непосредственно вытекает из (57,1), если заметить, что

$$\Delta(-\nu) = (-1)^n \Delta(\nu) \quad \text{и} \quad M_k(-\nu) = (-1)^n M_k(\nu).²$$

Далее, так как (57,1) показывает, что особые точки функций $\overline{\sigma}_k^{(m)}(\nu)$ и $\overline{\sigma}_k(\nu)$ совпадают, а в п. 36.2 было показано, что все $\overline{\sigma}_k(\nu)$ голоморфны внутри полосы $|Re(\nu)| < \delta$, где $\delta > 0$ обозначает вещественную часть того из неравных нулю корней уравнения $\Delta(\nu) = 0$, у которого она наименьшая (или, по крайней мере, не большая, чем у всех остальных корней), то тем самым показано, что все $\overline{\sigma}_k^{(m)}(\nu)$ голоморфны внутри этой полосы, так что первое условие действительно всегда выполняется.

57.3. Переходим к условиям 2) и 3). Заметим, прежде всего, что, так как асимптотическое поведение функций $|\overline{\sigma}_k(u+it)|$ при $|t| \rightarrow \infty$ и $-\delta < u < \delta$ уже известно из проведенного в § 36 исследования, именно, было установлено, что они убывают при этом как $e^{-b|t|}$, где b — введенная в п. 36.2 постоянная, то из формулы (57,2) следует, что достаточно оценить еще величину $|K_{u+it}(ma)|_{|t| \rightarrow \infty}$, чтобы получить нужную оценку для $|\overline{\sigma}_k^{(m)}(u+it)|$.

Чтобы получить оценку для $|K_{u+it}(x)|$, $x = ma$, будем исходить из формулы

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} \{ I_{-\nu}(x) - I_\nu(x) \}. \quad (57,3)$$

¹ Это условие, как и условие 3), получается из соответствующих условий п. 55.3, так как в данном случае, как там указывалось, $\psi = \frac{\pi}{2}$.

² Это прямо видно из формул п. 36.2 для $\Delta(\nu)$ и $M_k(\nu)$ (см. стр. 285), поскольку при замене ν на $-\nu$ все синусы меняют знак и $K_{-\nu}(ma) = K_\nu(ma)$. Последнее соотношение непосредственно следует из формулы:

$$K_\nu(ma) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} [I_{-\nu}(ma) - I_\nu(ma)].$$

. Положим здесь $v = u + it$ и оценим, прежде всего, значения входящих сюда функций $I_+(x)$ и $I_-(x)$, исходя из формулы (56, 5), которая дает при $u > -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |I_{u+it}(x)| &< \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^u}{\sqrt{\pi} \left| \Gamma\left(u + \frac{1}{2} + it\right) \right|} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}(x \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\left| \Gamma\left(u + \frac{1}{2} + it\right) \right|} \left(\frac{x}{2}\right)^u I_0(x). \end{aligned} \quad (57, 4)$$

Пользуясь неравенством (56, 6), получаем теперь:

$$|I_{u+it}(x)| < \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^u I_0(x) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(u + \frac{1}{2}\right)} e^{\frac{\pi|t|}{2}}, \quad \left(u > -\frac{1}{2}\right). \quad (57, 5)$$

Отсюда видно, что, если ограничиться такими значениями u , что $|u| < h < \frac{1}{2}$, то внутри соответствующей полосы справедливо неравенство

$$|I_{u+it}(x)| < A e^{h|\lg x|} I_0(x) e^{\frac{\pi|t|}{2}}, \quad (57, 6)$$

где A — некоторая абсолютная постоянная.

Пользуясь этой формулой и очевидным неравенством

$$|\sin \pi(u + it)| \geq \operatorname{sh} \pi |t|,$$

находим из (57, 3):

$$\begin{aligned} |K_{u+it}(x)| &< \frac{\pi}{2|\sin \pi v|} \{|I_-(x)| + |I_+(x)|\} < \\ &< \pi A e^{h|\lg x|} I_0(x) \frac{e^{\frac{\pi|t|}{2}}}{\operatorname{sh} \pi |t|}. \end{aligned}$$

Это и дает при достаточно больших значениях $|t|$ искомую асимптотическую оценку:

$$|K_{u+it}(x)| < Q(x) e^{-\frac{\pi|t|}{2}}, \quad \left(|u| < h < \frac{1}{2}\right), \quad (57, 7)$$

где $Q(x)$ при значениях $|t|$, больших некоторой заданной величины T , зависит уже только от x , но не от u и не от t .

Из неравенства (57, 7) и из того, что было сказано выше о поведении $|\bar{\sigma}_k(u + it)|$ при $|t| \rightarrow \infty$ внутри полосы $|u| < \delta$, следует, что, если выбрать h так, чтобы было одновременно $h < \frac{1}{2}$ и $h < \delta$, то, как показывает (57, 2),

$$|u + it| \cdot |\bar{\sigma}_k^{(m)}(u + it)| e^{\frac{\pi}{2}|t|} < B |u + it| e^{-b|t|}, \quad (57, 8)$$

где B — величина, зависящая только от x (при $|t| > T$). Отсюда непосредственно вытекает как равномерность стремления к нулю при $|t| \rightarrow \infty$ функции, стоящей в левой части неравенства (57, 8) (при условии, что $|u| < h$), так и сходимость в этой полосе интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u + it| |\bar{\sigma}_k^{(m)}(u + it)| e^{\frac{\pi}{2}|t|} dt.$$

Тем самым показано в общем виде, что функции $\bar{\sigma}_k^{(m)}(u + it)$ удовлетворяют также и условиям 2) и 3), а отсюда следует и допустимость применения формулы (55, 24) для решения ключевой задачи.

57.4. Остановимся несколько подробнее на той аналогии, которая существует между формулой (55, 24), т. е.

$$\bar{\sigma}_k^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi i s} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \bar{\sigma}_k^{(m)}(\nu) I_\nu(ms) d\nu \quad (55, 24)$$

и соответствующей формулой обращения (36, 2) для плоской задачи, т. е.

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-\nu} \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{i\infty} s^\nu \bar{\sigma}_k(-\nu) d\nu. \quad (36, 2)$$

Чтобы особенно ясно выявить эту аналогию, покажем, ограничиваясь для простоты ключевой задачей, для которой связь между $\bar{\sigma}_k(\nu)$ и $\bar{\sigma}_k^{(m)}(\nu)$ дается соотношением (57, 2), что формула (36, 2) является просто предельным случаем формулы (55, 24) при $m=0$, причем соответствующий предельный переход имеет простой физический смысл. Для этого, заметим, прежде всего, что для ключевой задачи электрическое поле $\mathbf{E}_a^{(m)}$, под действием которого на поверхностях раздела выделяются поверхностные плотности $\sigma_k^{(m)}$ и которое является градиентом потенциала (54, 19), может быть просто интерпретировано как поле, создаваемое проходящей через точку $r=a$, $\theta=\gamma$ бесконечно-длинной нитью, параллельной оси z и обладающей на единицу длины зарядом

$$q = \frac{e'}{\pi} \cos mz. \quad (57, 9)$$

Если в (57, 9) положить $m=0$, то q обращается в постоянную, равную e'/π , т. е. рассматриваемая линия с периодически меняющимся по длине зарядом превращается просто в равномерно наэлектризованную. Мы приходим, таким образом, как раз к рассмотренной в главе XIV двухмерной задаче, причем для достижения полного совпадения нужно там заменить эффективный заряд e' на единицу длины через e'/π .

¹ Это особенно ясно из формул (54, 10) и (54, 11) для потенциала подобной линии. См. также сноску на стр. 370.

Заметим теперь, что для ключевой задачи формула (55, 24) может быть, из-за (57, 2), переписана следующим образом:

$$\sigma_k^{(m)}(s) = \frac{1}{\pi^2 i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu a^{-\nu} K_\nu(ma) I_\nu(ms) \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu, \quad (57, 10)$$

а если учесть, что $\bar{\sigma}_k^{(m)}(\nu) = \bar{\sigma}_k^{(m)}(-\nu)$ и $K_\nu(ma) = K_{-\nu}(ma)$, то еще и так:

$$\sigma_k^{(m)} = \frac{1}{\pi^2 i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu K_\nu(ma) I_\nu(ms) a^\nu \bar{\sigma}_k(-\nu) d\nu. \quad (57, 11)$$

Вместе с тем, так как легко убедиться в том, что при $m \rightarrow 0$ имеет место соотношение¹

$$\lim_{m=0} K_\nu(ma) I_\nu(ms) = \frac{1}{2\nu} \left(\frac{s}{a}\right)^\nu, \quad (57, 12)$$

то (57, 11) дает при $m = 0$:

$$\sigma_k^{(0)}(s) = \frac{1}{2\pi^2 i s} \int_{-i\infty}^{i\infty} s^\nu \bar{\sigma}_k(-\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi^2 i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-\nu} \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu = \frac{1}{\pi} \sigma_k(s), \quad (57, 13)$$

т. е. приходим как раз к формуле (36, 2), причем только плотность $\sigma_k^{(0)}(s)$ оказывается в π раз меньше, чем $\sigma_k(s)$ из (36, 2), как и должно быть, так как σ_k соответствуют полю первичной нити с зарядом e' на единицу длины, а $\sigma_k^{(0)}$ — нити с зарядом e'/π на единицу длины.

57. 5. В случае плоской ключевой задачи формулу (36, 2), т. е.

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-\nu} \bar{\sigma}_k(\nu) d\nu, \quad (36, 2)$$

можно, как мы уже видели, записать еще в такой форме:

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^\nu \sigma_k(-\nu) d\nu, \quad (57, 14)$$

причем эта формула получается из (36, 2) просто заменой ν на $-\nu$, и как нетрудно видеть, соответствует обмену местами величин s и a под знаком интеграла. Действительно, так как, согласно (36, 4),

$$\bar{\sigma}_k(\nu) = e' a^\nu \cdot \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)}, \quad (36, 4)$$

причем отношение $M_k(\nu)/\Delta(\nu)$ не меняет знака при замене ν на $-\nu$, то

$$\bar{\sigma}_k(-\nu) = e' a^{-\nu} \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)}, \quad (57, 15)$$

¹ Ср. (Д₃59) и (Д₃62)

388 Применение формулы обращения к решению пространств. ключевой задачи [Ч. III а подставляя (36, 4) и (57, 15) соответственно в (36, 2) и (57, 14), получим:

$$\sigma_k(s) = \frac{e'}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^\nu \cdot \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} d\nu = \frac{e'}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{s}{a}\right)^\nu \cdot \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} d\nu, \quad (57, 16)$$

что и доказывает наше утверждение.

Заметим еще, что из (57, 16) следует, что произведение $s\sigma_k(s)$ не изменяется, если поменять местами a и s , т. е. если обменять местами расстояние создающей первичное поле нити от общей вершины диэлектрических секторов и расстояние s до той же вершины от той точки на поверхности раздела, в которой рассматривается поляризационная плотность $\sigma_k^{(s)}$, — своеобразный закон взаимности.

Аналогичные соотношения имеют место и в пространственном случае. Именно, в формуле (55, 24) для ключевой задачи можно поменять местами a и s . Действительно, (55, 24) принимает при этом такой вид:¹

$$s\bar{\sigma}_k^{(m)}(s) = \frac{e'}{\pi^2 i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu K_\nu(ma) I_\nu(ms) \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} d\nu, \quad (57, 17)$$

а, подставляя сюда вместо $K_\nu(ma)$ его значение

$$K_\nu(ma) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} [I_{-\nu}(ma) - I_\nu(ma)] \quad (57, 18)$$

и заменяя в интеграле, содержащем $I_{-\nu}(ma)$, ν через $(-\nu)$, получим, из-за четности функции $M_k(\nu)/\Delta(\nu)$ и используя ту же формулу (57, 18), только для $K_\nu(ms)$, а не для $K_\nu(ma)$:

$$s\bar{\sigma}_k^{(m)}(s) = \frac{e'}{\pi^2 i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu K_\nu(ms) I_\nu(ma) \cdot \frac{M_k(\nu)}{\Delta(\nu)} d\nu. \quad (57, 19)$$

Итак, действительно, для ключевой задачи можно и в пространственном случае поменять местами в (57, 17) под знаком интеграла a и s , т. е. для $s\bar{\sigma}_k^{(m)}(s)$ имеет опять место найденная для плоской задачи взаимность.

57.6. Остановимся еще на вопросе о фактическом вычислении интегралов (57, 17) и (57, 19).

В случае плоской задачи соответствующие интегралы (57, 16) приводились к сумме вычетов подинтегральной функции в правой полуплоскости, т. е. при $Re(\nu) > 0$.²

Естественно ожидать, что аналогичное положение вещей будет иметь место и в случае интегралов (57, 17) и (57, 19). Чтобы выяснить, так ли это, мы поступим так же, как мы поступали в п. 36.3 в случае соответствующей плоской задачи. Именно, обозначим через

¹ См. (57, 2) и (36, 4).

² Первый из них — при $a < s$, а второй — при $a > s$.

$r_n, (n=1, 2, 3, \dots, \infty)$ модули корней уравнения $\Delta(v)=0$, расположенные в порядке их возрастания,¹ так что $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$, и выберем бесконечную последовательность таких не целых чисел $R_n, (n=1, 2, 3, \dots, \infty)$, что $r_n < R_n < r_{n+1}$.

Примем эти R_n за радиусы бесконечной серии дуг кругов, описанных из начала координат в правой полуплоскости v , и исследуем поведение функции $\nu K_\nu(ma) I_\nu(ms)$ на этих дугах при $R_n \rightarrow \infty$. Полагая на дуге $ABC \ v = R_n e^{i\theta} = u + it$ (рис. 107), будем иметь при любом фиксированном $x \geq 0$:

$$|I_\nu(x)| = |I_{u+it}(x)| < A \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{|\Gamma(\nu+1)|}, \tag{57, 20}$$

где A — величина, не зависящая от номера дуги и от ν .

Действительно, из формулы

$$I_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \varphi_\nu(x, \nu),$$

$$\text{где } \varphi(x, \nu) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s! \prod_{k=1}^s (\nu+k)}, \tag{57, 21}$$

видно, что при $Re(\nu) = u \geq 0$

$$|\varphi(x, \nu)| \leq 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{(s!)^2} = I_0(x),$$

что дает

$$|I_\nu(x)| < I_0(x) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{|\Gamma(\nu+1)|}, \tag{57, 22}$$

в соответствии с формулой (57, 20).

Наряду с этим, для $I_{-\nu}(x)$ получаем при том же условии $Re(\nu) \geq 0$:

$$|I_{-\nu}(x)| = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{|\Gamma(1-\nu)|} |\varphi(x, -\nu)|, \tag{57, 23}$$

причем

$$|\varphi(x, -\nu)| < 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s! \sqrt{\prod_{k=1}^s [(u-k)^2 + t^2]}}. \tag{57, 24}$$

Так как на дуге $ABC \ (u-k)^2 + t^2 = (R_n \cos \theta - k)^2 + R_n^2 \sin^2 \theta = (R_n - k)^2 + 4kR_n \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq (R_n - k)^2$ и так как, согласно условию, ни

¹ Они образуют дискретный ряд.

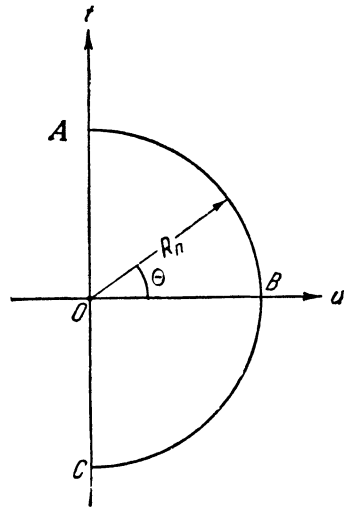


Рис. 107.

одно из чисел R_n не целое, то, обозначая через Δ минимальное значение разности $|R_n - k|$ при $k \geq 1$ и $n \geq 1$ ¹, получим из (57, 24):

$$|\varphi(x, -\nu)| < 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s! \Delta^s} = e^{\frac{x^2}{4\Delta}}. \quad (57, 25)$$

Формулы (57, 22) и (57, 23) — (57, 25) показывают справедливость оценки (57, 20).

(57, 20) и (57, 3) дают теперь для точек дуги ABC :

$$\begin{aligned} |\nu K_\nu(ma) I_\nu(ms)| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\pi\nu}{\sin \pi\nu} \right| \cdot |I_\nu(ms) [I_{-\nu}(ma) - I_\nu(ma)]| < \\ &< C \left| \frac{\pi\nu}{\sin \pi\nu} \right| \left\{ \frac{\left(\frac{s}{a}\right)^u}{|\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)|} + \frac{\left(\frac{m^2 a s}{4}\right)^u}{|\Gamma(\nu+1)|^2} \right\} = \\ &= C \left(\frac{s}{a}\right)^u \left\{ 1 + \frac{\pi|\nu|}{|\sin \pi\nu| |\Gamma(\nu+1)|^2} \left(\frac{ma}{2}\right)^{2u} \right\}, \end{aligned} \quad (57, 26)$$

где C — некоторая величина, зависящая только от m , a и s , но не от номера дуги и не от выбранной на ней точки ν .

Нетрудно видеть, что стоящая в последней скобке функция ограничена на всех дугах R_n . Действительно, замечая, что согласно (56, 9),

$$\frac{1}{|\Gamma(\nu+1)|^2} = \frac{1}{|\Gamma(u+1+it)|^2} < \frac{e^{\pi|t|}}{[\Gamma(u+1)]^2},$$

и что $|\sin \pi\nu|$ не обращается в нуль в точках пересечения $u = R_n$ этих дуг с вещественной осью, сможем убедиться в справедливости этого утверждения, а также в том, что максимум этой функции зависит только от произведения (ma) . Из неравенства (57, 26) вытекает поэтому справедливая на всех дугах R_n оценка

$$|\nu K_\nu(ma) I_\nu(ms)| < M \left(\frac{s}{a}\right)^u, \quad (57, 27)$$

где M может зависеть только от m , a и от s , но не от номера дуги и не от выбранной на ней точки ν . Тем самым показано, что на рассматриваемых нами бесконечно-удаленных дугах R_n , где $n \rightarrow \infty$, поведение подинтегральных функций в формулах (57, 16) и (56, 17) — (57, 19) для соответствующих плоской и пространственной задач совершенно одинаково. А так как в § 36 было доказано, что в ключевых плоских задачах интеграл по бесконечно-удаленной дуге равен

¹ Так как в реальных задачах разность последовательных модулей $(r_{n+1} - r_n)$ корней уравнения $\Delta(\nu) = 0$ всегда больше некоторого фиксированного числа $l > 0$, (ср., например, §§ 37—39), и так как значения R_n могут быть выбраны произвольно внутри соответствующих интервалов $(r_n < R_n < r_{n+1})$ при том лишь условии, что они не целые и не совпадают с концевыми точками интервала, то указанное в тексте число $\Delta > 0$ всегда существует.

нулю, при $\frac{a}{s} < 1$ в первой из формул (57, 16) и при $\frac{a}{s} > 1$ — во второй, так что интегралы в формулах (57, 16) равны взятой со знаком минус и умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов соответствующей подынтегральной функции в правой полуплоскости, то же самое справедливо и для интегралов (57, 19) и (57, 17) соответственно.

§ 58. Применение общей методики к случаю прямоугольной поверхности раздела

58.1. Для того, чтобы иллюстрировать на конкретном примере применение изложенной в § 54—57 общей методики и заодно проследить более подробно отмеченную там аналогию между решением какой-либо пространственной задачи рассматриваемого здесь класса и решением соответствующей ей плоской, разберем детально случай двух различных диэлектриков с прямоугольной поверхностью раздела (рис. 108), соответствующий рассмотренной в § 37 плоской задаче.

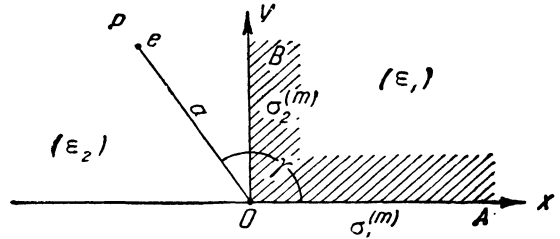


Рис. 108.

Источником внешнего поля пусть служит находящийся в точке $P(a, \gamma)$ точечный заряд e , которому соответствует эффективный заряд e' . Тогда, согласно данному выше общему правилу, уравнения для преобразованных плотностей $\overline{\sigma}_1^{(m)}$ и $\overline{\sigma}_2^{(m)}$ получатся из соответствующих уравнений (37, 4) и (37, 5), если в этих последних заменить $a\gamma$ через $\frac{K_v(ma)}{\pi}$. Это дает:

$$\overline{\sigma}_1^{(m)} = \frac{ae'K_v(ma) \left[\sin \lambda_1 \gamma \cdot \cos \frac{\pi \gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \lambda_2 \gamma \right]}{2\pi \sin \frac{\pi \gamma}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi \gamma}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]}, \quad (58, 1)$$

$$\overline{\sigma}_2^{(m)} = \frac{ae'K_v(ma) \left(\sin \lambda_2 \gamma \cdot \cos \frac{\pi \gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_1 \gamma \right)}{2\pi \sin \frac{\pi \gamma}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi \gamma}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]}, \quad (58, 2)$$

причем сохранены обозначения § 37, так что, в частности, $\alpha = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ и

$$\lambda_1 = \pi - \gamma, \quad \lambda_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \gamma & \text{при } \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{3\pi}{2} + \gamma & \text{при } \gamma > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (58, 3)$$

(55, 24) дает теперь:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(m)}(s) &= \frac{1}{\pi i s} \int_{-i\infty}^{i\infty} v \overline{\sigma_1^{(m)}}(v) I_\nu(ms) dv = \\ &= \frac{e'\alpha}{2\pi^2 i s} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu K_\nu(ma) I_\nu(ms) \frac{\left[\sin \lambda_1 \nu \cdot \cos \frac{\pi \nu}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_2 \nu \right]}{\sin \frac{\pi \nu}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi \nu}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]} dv = \\ &= \frac{e'\alpha}{2\pi^2 i s} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu K_\nu(ms) I_\nu(ma) \frac{\left[\sin \lambda_1 \nu \cdot \cos \frac{\pi \nu}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_2 \nu \right]}{\sin \frac{\pi \nu}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi \nu}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]} dv, \end{aligned} \quad (58, 4)$$

последнее потому, что, согласно доказанной выше общей теореме, можно в интеграле (58, 4) переставлять местами a и s .

Пользуясь данной в предыдущем параграфе общей теорией и полагая, например, $a/s < 1$, найдем, исходя из второго интеграла формулы (58, 4), что $\sigma_1^{(m)}(s)$ выражается через сумму вычетов подинтегральной функции в правой полуплоскости, именно

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(m)}(s) &= \frac{e'\alpha}{\pi^2 s \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} 4n K_{2n}(ms) I_{2n}(ma) \sin 2n\gamma + \\ &+ \frac{e'\alpha}{\pi^2 s \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n + \delta) K_{2n+\delta}(ms) I_{2n+\delta}(ma) \times \right. \\ &\times [\sin(2n + \delta)\lambda_1 + (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha) \sin(2n + \delta)\lambda_2] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (2n - \delta) K_{2n-\delta}(ms) I_{2n-\delta}(ma) \times \\ &\left. \times [\sin(2n - \delta)\lambda_1 + (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha) \sin(2n - \delta)\lambda_2] \right\}, \end{aligned} \quad (58, 5)$$

и аналогичное выражение получится для $\sigma_2^{(m)}(s)$.

58.2. Чтобы найти теперь полную плотность $\sigma_1 = \int_0^\infty \sigma_1^{(m)} \cos mzd m$, выделяющуюся в некоторой точке поверхности раздела OA под действием точечного заряда e , остается только выполнить соответствующее интегрирование по m . Появляющиеся при этом в отдельных членах ряда (58, 5) интегралы

$$M_\nu = \int_0^\infty K_\nu(ms) I_\nu(ma) \cos mzd m \quad (58, 6)$$

могут быть приведены к более простому виду, именно:

$$M_\nu = \frac{(sa)^\nu}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu} \theta \cdot d\theta}{[s^2 + a^2 + z^2 - 2sa \cos \theta]^\nu + 1/2}, \quad (58, 7)$$

$$M_\nu = \frac{x^{\nu+1/2}}{\sqrt{sa}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2\nu} \Phi d\Phi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \Phi}}, \quad x = \frac{2sa}{(s^2+a^2+z^2) + \sqrt{(s^2+a^2+z^2)^2-4s^2a^2}}, \quad (58,8)$$

или еще

$$\begin{aligned} M_{\nu+n} &= \frac{2^{2(\nu-1)} (sa)^\nu \Gamma(n+1) \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2\nu+n)} \int_0^\pi \frac{C_n^\nu(\cos \theta) \sin^{2\nu} \theta \cdot d\theta}{[s^2+a^2+z^2-2sac \cos \theta]^{\nu+1/2}} = \\ &= \frac{n! (sa)^\nu}{2(2\nu)(2\nu+1) \dots (2\nu+n-1)} \int_0^\pi \frac{C_n^\nu(\cos \theta) \cdot \sin^{2\nu} \theta \cdot d\theta}{[s^2+a^2+z^2-2sa \cos \theta]^{\nu+1/2}}, \quad (58,9) \end{aligned}$$

где $C_n^\nu(\cos \theta)$ — функция Гегенбауэра,¹ n — целое число.

Формулы (58, 7), (58, 8) могут быть использованы для суммирования получающихся из (58, 5) при нахождении плотности σ_1 рядов.

Чтобы доказать (58, 7) и (58, 9), поступаем следующим образом: пользуясь известным значением интеграла²

$$\int_0^\infty K_\nu(t) t^{\mu-1} dt = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right), \quad (58,10)$$

получим для произвольного $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_\nu(m\rho) m^\nu \cos mz dm &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty K_\nu(m\rho) m^{2n+\nu} dm = \\ &= \frac{2^{\nu-1} \sqrt{\pi}}{\rho^{\nu+1}} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(z/\rho)^{2n}}{n!} \Gamma(n+\nu+1/2) = \\ &= \frac{2^{\nu-1} \sqrt{\pi}}{\rho^{\nu+1}} \int_0^\infty \left\{ \sum_{m=0}^\infty \frac{(-z^2 t/\rho^2)^m}{m!} \right\} e^{-t} t^{\nu-1/2} dt = 2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \rho^\nu \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{(\rho^2+z^2)^{\nu+1/2}}. \quad (58,11) \end{aligned}$$

Далее, если положить здесь $\rho = \sqrt{s^2+a^2-2sa \cos \theta}$, $s > a$, то, в силу соотношения:³

$$\left(\frac{sa}{\rho}\right)^\nu K_\nu(m\rho) m^\nu = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^\infty (\nu+n) K_{\nu+n}(ms) I_{\nu+n}(ma) C_n^\nu(\cos \theta), \quad (58,12)$$

найдем из (58, 11):

$$\frac{\Gamma(\nu+1/2) \sqrt{\pi}}{2} \cdot (sa)^\nu \cdot \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{\nu+1/2}} = \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^\infty (\nu+n) C_n^\nu(\cos \theta) M_{\nu+n}. \quad (58,13)$$

Помножая (58, 13) на $\sin^{2\nu} \theta \cdot C_p^\nu(\cos \theta) d\theta$, интегрируя от нуля до π и учитывая соотношение ортогональности для функций C_n^ν , именно:⁴

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu} \theta \cdot C_n^\nu(\cos \theta) \cdot C_p^\nu(\cos \theta) d\theta = \begin{cases} 0, & (n \neq p), \\ \frac{\pi \Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-1} (\nu+n)! [\Gamma(\nu)]^2}, & (n = p), \end{cases} \quad (58,14)$$

¹ $C_m^\nu(t)$ — это коэффициент при x^m в разложении $(1-2tx+x^2)^{-\nu}$ по возрастающим степеням x . См. Дополнение II, § 5, п. 2.

² См. (Д₂228).

³ См. (Д₂136).

⁴ Ср. (Д₂81).

394 Применение общей методики к случаю прямоугольной поверхи. раздела [Ч. III
 получим как раз формулу (58, 9), из которой при $n=0$ получается
 (58, 7), причем нужно учесть, что ¹

$$2^{2\nu-1} \Gamma(\nu) \Gamma(\nu + 1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2\nu). \quad (58, 15)$$

Формула (58, 8) может быть теперь получена из (58, 7) путем введения новой переменной интегрирования посредством соотношения:

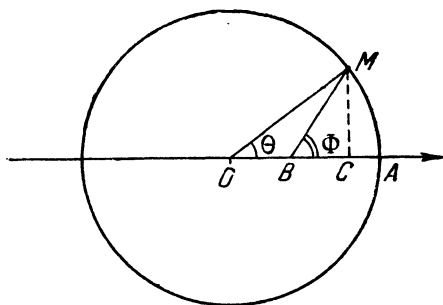


Рис. 109.

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}} = \sin \Phi, \quad (58, 16)$$

где x — введенная в (58, 8) величина.

Здесь Φ имеет простой геометрический смысл, ясный из рис. 109, именно, это угол ABM , причем M — точка на круге, радиус которого равен единице, $\angle AOM = \theta$, $OB = x < 1$ и $MC \perp OA$. В самом деле,

из чертежа видно, что $MB = \sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ и $MC = \sin \theta$, так что $\sin \Phi = \frac{MC}{MB} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}}$, в согласии с формулой (58, 16).

Для того, чтобы на самом деле осуществить переход от формулы (58, 7) к формуле (58, 8), заметим, что, если введем в рассмотрение величину $x < 1$ соотношением

$$x + \frac{1}{x} = \frac{s^2 + a^2 + z^2}{as}, \quad (58, 17)$$

[откуда как раз получается значение x , стоящее в формуле (58, 8)], то (58, 7) принимает вид:

$$M_\nu = \frac{x^{\nu+1/2}}{2 \sqrt{sa}} \int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu} \theta \cdot d\theta}{[1 - 2x \cos \theta + x^2]^{\nu+1/2}}. \quad (58, 18)$$

Далее (58, 16) дает:

$$1 - x^2 \sin^2 \Phi = \frac{(1 - x \cos \theta)^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2},$$

так что

$$\frac{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}}{1 - x \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (58, 19)$$

С другой стороны, из (58, 16) сразу получается, что

$$d\Phi = \frac{(1 - x \cos \theta) d\theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \quad (58, 20)$$

а перемножая (58, 19) и (58, 20), находим:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}} = \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (58, 21)$$

¹ См. (Д₁27).

Это и позволяет перейти от (58, 18) к (58, 8).

Формула (58, 8) может быть представлена еще в другой форме, если положить

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-\eta}, \quad \eta > 0, \\ \sin \Phi &= e^{\frac{\eta - \xi}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (58, 22)$$

где ξ — новая независимая переменная. Пределы интегрирования по ξ будут η и ∞ , так как $\Phi = 0$ соответствует значению $\xi = \infty$, а $\Phi = \pi/2$ — значению $\xi = \eta$; формула (58, 8) обращается при этом в такую:

$$M_\nu = \frac{1}{2\sqrt{2as}} \int_\eta^\infty \frac{e^{-\xi\nu} d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}}, \quad (58, 23)$$

где, стало быть,

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \frac{s^2 + a^2 + z^2}{2as} \quad \text{и} \quad \eta > 0. \quad (58, 24)$$

Заметим, что стоящий в правой части формулы (58, 23) интеграл представляет собой, вплоть до постоянного множителя, так называемую тороидальную функцию $Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \eta)$ второго рода (функцию Лежандра) от аргумента $\operatorname{ch} \eta$, определяемую обычно равенством:

$$Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\eta^\infty \frac{e^{-\nu\xi} d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}}, \quad (58, 25)$$

так что

$$M_\nu = \frac{1}{2\sqrt{as}} Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \eta). \quad (58, 26)$$

Кроме того, можно показать, что при целом $\nu = n$ интеграл (58, 7) может быть приведен к такому виду:¹

$$M_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\sqrt{s^2 + a^2 + z^2 - 2as \cos \theta}}. \quad (58, 27)$$

Из всех приведенных выше выражений для M_ν мы в дальнейшем будем пользоваться лишь формулой (58, 23). Пример использования других формул можно найти в совместной статье автора и И. Цуккермана² о поле проводящей полуплоскости в присутствии точечного заряда.

58.3. Применим формулу (58, 23) для суммирования рядов, получающихся при подстановке выражения (58, 5) в формулу (55, 25) для $\sigma_1(s)$, именно:

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= \frac{e^{\alpha}}{\pi^2 s \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} 4n M_{2n} \sin 2n\gamma + \\ &+ \frac{e^{\alpha}}{\pi^2 s \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n + \delta) M_{2n + \delta} [\sin(2n + \delta)\lambda_1 + \right. \end{aligned}$$

¹ С помощью преобразования Якоби (см.: Jacobi, Crelle's J., XV, 1).

² ЖТФ, XII, 36, 1942.

$$+ (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha) \sin(2n + \delta) \lambda_2] + \sum_{n=1}^{\infty} (2n - \delta) M_{2n - \delta} \times \\ \times [\sin(2n - \delta) \lambda_1 + (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha) \sin(2n - \delta) \lambda_2] \}. \quad (58, 28)$$

Вводим в рассмотрение функции

$$f_\varepsilon(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n + \varepsilon} \cos(2n + \varepsilon) \theta \quad (58, 29)$$

и

$$\psi_\varepsilon(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M_{2n + \varepsilon} \cos(2n + \varepsilon) \theta. \quad (58, 30)$$

(58, 23) дает:

$$f_\varepsilon(\theta) = - \frac{1}{2\sqrt{2as}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\varepsilon} d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\xi} \cos(2n + \varepsilon) \theta \right] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2as}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{[e^{-4\xi} \cos \varepsilon \theta - e^{-2\xi} \cos(2 + \varepsilon) \theta] e^{-\xi\varepsilon} d\xi}{[1 - 2e^{-2\xi} \cos 2\theta + e^{-4\xi}] \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}} = \\ = \frac{1}{4\sqrt{2as}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\varepsilon} [e^{-2\xi} \cos \varepsilon \theta - \cos(2 + \varepsilon) \theta]}{(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\theta) \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}} d\xi, \quad (58, 31)$$

и аналогично

$$\psi_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{2as}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\varepsilon} [e^{-2\xi} \cos \varepsilon \theta + \cos(2 + \varepsilon) \theta]}{(\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\theta) \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}} d\xi. \quad (58, 32)$$

Тогда полагая

$$P_\varepsilon(\theta) = \frac{\partial f_\varepsilon(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n + \varepsilon) M_{2n + \varepsilon} \sin(2n + \varepsilon) \theta \quad (58, 33)$$

и

$$Q_\varepsilon(\theta) = \frac{\partial \psi_\varepsilon(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n + \varepsilon) M_{2n + \varepsilon} \sin(2n + \varepsilon) \theta, \quad (58, 34)$$

сможем представить (58,28) в такой форме:

$$\sigma_1(s) = \frac{2e'\alpha}{\pi^2 s \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} P_0(\gamma) + \frac{e'\alpha}{\pi^2 s \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \{ \delta [\sin \delta \lambda_1 + \operatorname{sign}(\alpha) \sin \delta \lambda_2] M_\delta + \\ + [P_\delta(\lambda_1) + \operatorname{sign}(\alpha) Q_\delta(\lambda_2)] + [P_{-\delta}(\lambda_1) + \operatorname{sign}(\alpha) Q_{-\delta}(\lambda_2)] \}. \quad (58, 35)$$

Эта формула и дает окончательное решение задачи. Дальнейшим ее преобразованием и упрощением заниматься здесь не будем, так же как и разбором отдельных частных случаев, поскольку подобные преобразования не добавляют ничего принципиально нового к уже сказанному. Мы ограничимся также разобраным только что примером, поскольку на нем полностью иллюстрируется как та полная аналогия, которая существует между решением соответствующих пространственных

и плоских задач данного класса, так и те особенности решения пространственных задач, которые связаны с переходом от величин $\sigma_k^{(m)}(s)$ к самим поляризационным плотностям $\sigma_k(s) = \int_0^\infty \sigma_k^{(m)}(s) \cos mzd m$ и которые сводятся к суммированию получающихся при этом рядов с помощью данных выше формул (58, 23) или (58, 7) — (58, 9) для интегралов $M_\nu = \int_0^\infty K_\nu(ms) I_\nu(ma) \cos mzd m$.

Пользуясь аналогичными приемами, можно непосредственно использовать данные в §§ 38—39 результаты, относящиеся к клину с произвольным углом растворения, к трем разным средам и т. д., а также разобрать любой другой случай, подпадающий под действие излагаемого здесь метода.

58.4. До сих пор мы всегда говорили об определении плотностей σ_k , поскольку знание их определяло полное решение задачи. Так как, однако, нахождение поля по заданным σ_k требует, вообще говоря, длинных вычислений, то можно попытаться выразить прямо преобразованные компоненты поля $\mathbf{E}^{(m)}$, создаваемого плотностями $\sigma_k^{(m)}$, через преобразованные плотности, подобно тому, как это делалось в случае соответствующей плоской задачи.¹ Для $E_\theta^{(m)}$ это действительно удается сделать, причем получается:

$$\bar{E}_\theta^{(m)} = \int_0^\infty E_\theta^{(m)}(r) K_\nu(mr) dr = \frac{2\pi}{\sin \pi\nu} \sum_{(k)} \bar{\sigma}_k^{(m)} \sin(\pi - \chi_k) \cos mz, \quad (58, 36)$$

где

$$\chi_k = \begin{cases} \theta - \theta_k & \text{при } \theta > \theta_k, \\ \theta - \theta_k + 2\pi & \text{при } \theta < \theta_k, \end{cases} \quad (0 < \chi_k < 2\pi), \quad (58, 37)$$

и где под $\bar{\sigma}_k^{(m)}$ подразумеваются их значения из формул (55, 13), а сама величина $E_\theta^{(m)}$ находится с помощью (55, 24). Это точно отвечает формулам (41, 9) и (41, 7) соответствующей плоской задачи.

§ 59. Другой метод решения задачи в случае проводящего клина в однородной среде

59.1. В том частном случае, когда вся система сред приводится к одному проводящему клину, находящемуся в однородной среде, можно получить решение задачи значительно проще, именно, можно его непосредственно вывести из данного в п. 16.15 решения задачи о диффракции волн, исходящих от провода, питаемого переменным током, от идеально проводящего клина.

В самом деле, пусть OA и OB (рис. 110) изображают две проводящие полуплоскости, составляющие друг с другом угол δ и находящиеся при потенциале, равном нулю. Потенциал внешнего поля

¹ См. § 41.

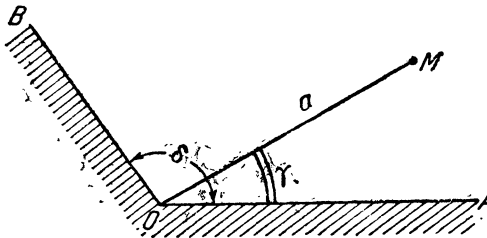
обозначим, как раньше, через $\varphi_a = \varphi_a(r, \theta, z)$,¹ потенциал, обусловленный зарядами, находящимися на сторонах клина, — через φ_k . Суммарный потенциал $\varphi_a + \varphi_k$ полного поля обозначим через φ .

В пространстве AOB должно выполняться уравнение

$$\Delta \varphi_k = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} = 0. \quad (59, 1)$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \delta$, φ_k должно удовлетворять граничному условию $\varphi_k + \varphi_a = 0$.

Полагаем, как раньше:



$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= \int_0^\infty \varphi_k^{(m)} \cos mzd m \\ \varphi_a &= \int_0^\infty \varphi_a^{(m)} \cos mzd m, \end{aligned} \right\} (59, 2)$$

Рис. 110.

$$\varphi = \varphi_k + \varphi_a = \int_0^\infty \varphi^{(m)} \cos mzd m,$$

где $\varphi^{(m)} = \varphi_k^{(m)} + \varphi_a^{(m)}$.

Для $\varphi_k^{(m)}$ получается уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_k^{(m)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_k^{(m)}}{\partial \theta^2} - m^2 \varphi_k^{(m)} = 0 \quad (59, 3)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k^{(m)})_{\theta=0} &= -\varphi_a^{(m)}(r, 0) \\ (\varphi_k^{(m)})_{\theta=\delta} &= -\varphi_a^{(m)}(r, \delta) \end{aligned} \right\}. \quad (59, 4)$$

К этому должно быть еще добавлено требование, что $(\varphi^{(m)})_{r=\infty} = 0$.

Как нетрудно видеть, эта задача математически вполне эквивалентна рассмотренной в § 16 задаче о дифракции плоских волн, создаваемых некоторой системой линейных токов, от идеально проводящего клина с внешним углом δ . В самом деле, в этой последней задаче единственная отличная от нуля компонента A вектор-потенциала полного поля должна была удовлетворять уравнению (16, 58):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + k^2 A = -\frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)}, \quad (59, 5)$$

где k^2 — комплексное число, определяемое формулой (13, 7), $j^{(e)}$ — плотность первичных токов, являющихся источником волн, и условием что на стенках клина вектор-потенциал A должен обращаться в нуль.

Выделим из A вектор-потенциал $A^{(e)}$ первичных токов, вычисленный в предположении, что клин отсутствует и что все безграничное

¹ Ось z считаем направленной вдоль ребра клина.

² Если вся система зарядов лежит на конечном расстоянии от начала координат.

пространство заполнено средой, окружающей клин. Так как $A^{(e)} = A^{(e)}(r, \theta)$ тоже удовлетворяет уравнению (59, 5), то для разностного потенциала $A' = A - A^{(e)}$ получается уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A'}{\partial \theta^2} + k^2 A' = 0 \quad (59, 6)$$

и граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} (A')_{\theta=0} &= -A^{(e)}(r, 0) \\ (A')_{\theta=\delta} &= -A^{(e)}(r, \delta) \end{aligned} \right\}, \quad (59, 7)$$

причем должно также выполняться требование, что

$$(A')_{r=\infty} = 0. \quad (59, 8)$$

Сравнение уравнений (59, 3) и (59, 6) и граничных условий (59, 4) и (59, 7), а также условий на бесконечности, показывает, что, если $\varphi_a^{(m)}(r, \theta) = A^{(e)}(r, \theta)$, то решение уравнения (59, 3) должно отличаться от соответствующего решения уравнения (59, 6) лишь тем, что в это последнее следует подставить вместо k величину $(-im)$.¹

59.2. Применим эти общие соображения к ключевой задаче, причем будем считать, что в точке M с координатами $(a, \gamma, 0)$ находится свободный заряд e' . Тогда, согласно (54, 19) и (54, 18), будем иметь:

$$\varphi_a^{(m)} = \frac{2e'}{\pi} K_0(m\rho), \quad \rho = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma)}. \quad (59, 9)$$

С другой стороны, мы нашли в п. 16.15, что вектор-потенциал $A = A' + A^{(e)}$ полного поля, складывающегося из первичного поля и из поля, создаваемого идеально проводящим клином с внешним углом δ , при падении на него волн, испускаемых проходящим через точку (a, γ) проводом с переменным током I частоты ω , равен, при $r < a$:

$$A = -\frac{4\pi^2 \mu I}{c\delta} \sum_{n=1}^{\infty} H_{\frac{n\pi}{\delta}}^{(2)}(ka) J_{\frac{n\pi}{\delta}}(kr) \sin \frac{n\pi\gamma}{\delta} \sin \frac{n\pi\theta}{\delta}. \quad (16, 74)$$

Первичный вектор-потенциал (провода) равен при этом:

$$A^{(e)} = -\frac{\pi \mu I}{c} H_0^{(2)}(kr). \quad (13, 32)$$

Полагая в (13, 32) и в (16, 74) $k = -im = me^{-i\frac{\pi}{2}}$ и замечая, что²

$$H_0^{(2)}\left(me^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{2}{\pi i} K_0(mr), \quad (59, 10)$$

видим, что $\varphi_a^{(m)} = A^{(e)}$ при $\frac{I\mu}{c} = \frac{e'}{\pi}$, так что при этом значение A в формуле (16, 74) должно совпадать с искомым $\varphi^{(m)}$ [ср. (59, 2)]. Производя соответствующие подстановки в (16, 74) и замечая, что³

$$H_{\frac{n\pi}{\delta}}^{(2)}(kr) J_{\frac{n\pi}{\delta}}(kr) = H_{\frac{n\pi}{\delta}}^{(2)}\left(mae^{-i\frac{\pi}{2}}\right) J_{\frac{n\pi}{\delta}}\left(mre^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2i}{\pi} I_{\frac{n\pi}{\delta}}(mr) K_{\frac{n\pi}{\delta}}(ma),$$

¹ Именно $(-im)$, а не $(+im)$, так как в § 16 считалось, что $Im(k) < 0$.

² См. (55, 19).

³ Ср. (55, 19) и (55, 21).

находим:

$$\varphi^{(m)} = \frac{8e'}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} I_{n\pi} \left(\frac{mr}{\delta} \right) K_{n\pi} \left(\frac{ma}{\delta} \right) \sin \frac{n\pi\gamma}{\delta} \sin \frac{n\pi\theta}{\delta}, \quad r < a. \quad (59, 11)$$

Полагая

$$F_m(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n\pi} \left(\frac{mr}{\delta} \right) K_{n\pi} \left(\frac{ma}{\delta} \right) \cos \frac{n\pi\psi}{\delta}, \quad r < a, \quad (59, 12)$$

можем переписать (59, 11) следующим образом:

$$\varphi^{(m)} = \frac{4e'}{\delta} \{ F_m(\gamma - \theta) - F_m(\gamma + \theta) \}, \quad (59, 13)$$

а подставляя это в (59, 2), найдем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{\infty} \varphi^{(m)} \cos mzd m = \\ &= \frac{4e'}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} F_m(\gamma - \theta) \cos mzd m - \int_0^{\infty} F_m(\gamma + \theta) \cos mzd m \right\}. \end{aligned} \quad (59, 14)$$

(58, 6), (58, 23) и (59, 12) дают:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} F_m(\psi) \cos mzd m = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} K_{n\pi} \left(\frac{ma}{\delta} \right) I_{n\pi} \left(\frac{mr}{\delta} \right) \cos mzd m \right\} \cos \frac{n\pi\psi}{\delta} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{\delta} - \cos \frac{\pi\psi}{\delta}} - 1 \right] \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{ch} \eta}}, \end{aligned} \quad (59, 15)$$

где

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad \eta > 0. \quad (59, 16)$$

Таким образом, окончательная формула для суммарного потенциала φ будет:

$$\varphi = \frac{e'}{\delta\sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{\delta} - \cos \frac{\pi(\theta - \gamma)}{\delta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{\delta} - \cos \frac{\pi(\theta + \gamma)}{\delta}} \right\} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{ch} \eta}} \quad (59, 17)$$

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad \eta > 0.$$

Это выражение для потенциала точечного заряда, находящегося между двумя пересекающимися проводящими плоскостями, было дано впервые Макдональдом.¹ Тот же результат можно было бы получить и другими способами.²

¹ H. M. Macdonald, Proc. of the Lond. Math. Soc., **26**, 160, 1895.

² Г. А. Гринберг, ЖЭТФ, **10**, в. 9–10, § 4, 1940.

§ 60. Некоторые частные случаи задачи о клине

60.1. Пусть $\frac{\pi}{\delta} = p$, где p — целое число.

Тогда стоящие в (59, 17) под знаком интеграла дроби могут быть разложены на простейшие, именно,

$$\frac{\text{sh } p\xi}{\text{ch } p\xi - \cos p\psi} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{\text{sh } \xi}{\text{ch } \xi - \cos\left(\psi + \frac{2k\pi}{p}\right)}, \quad (\psi = \theta \pm \gamma). \quad (60,1)$$

Действительно, так как $(\text{ch } p\xi - \cos p\psi)$ — полином p -ой степени относительно $\text{ch } \xi$ и так как корни ξ_n уравнения

$$\text{ch } p\xi = \cos p\psi \quad (60,2)$$

суть

$$\xi_n = \left(\pm \psi + \frac{2n\pi}{p} \right) i, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (60,3)$$

то все различные значения $\text{ch } \xi_k$ получаются по формуле:

$$\text{ch } \xi_k = \cos\left(\psi + \frac{2k\pi}{p}\right), \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots, p-1). \quad (60,4)$$

Поэтому,

$$(\text{ch } p\xi - \cos p\psi) = 2^{p-1} \prod_{k=0}^{k=p-1} \left[\text{ch } \xi - \cos\left(\psi + \frac{2k\pi}{p}\right) \right], \quad (60,5)$$

а логарифмируя это равенство и дифференцируя его по ξ , как раз получим формулу (60, 1).

Далее, так как интегралы вида

$$I = \int_{\eta}^{\infty} \frac{\text{sh } \xi \, d\xi}{(\text{ch } \xi - \cos \alpha) \sqrt{\text{ch } \xi - \text{ch } \eta}} \quad (60,6)$$

непосредственно берутся с помощью подстановки $\sqrt{\text{ch } \xi - \text{ch } \eta} = t$, причем получается

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\text{ch } \eta - \cos \alpha}}, \quad (60,7)$$

то (59, 17) и (60, 1) дают:

$$\varphi = \frac{e'}{\sqrt{2ar}} \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\text{ch } \eta - \cos\left(\theta - \gamma + \frac{2k\pi}{p}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{\text{ch } \eta - \cos\left(\theta + \gamma + \frac{2k\pi}{p}\right)}} \right\}. \quad (60,8)$$

Подставляя сюда значение $\text{ch } \eta$ из (59, 17), находим:

$$\varphi = e' \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos\left(\theta - \gamma + \frac{2k\pi}{p}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos\left(\theta + \gamma + \frac{2k\pi}{p}\right)}} \right\}. \quad (60,9)$$

Это же выражение для потенциала может быть получено по методу изображений.

60.2. Пусть теперь $\delta = \frac{2\pi}{2p+1}$, где $p \geq 0$ — целое число.

Пользуясь формулой (60,1), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{\delta} - \cos \frac{\pi\Phi}{\delta}} &= \frac{2p+1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{sh} (2p+1) \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} (2p+1) \frac{\xi}{2} - \cos (2p+1) \frac{\Phi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{k=2p} \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} - \cos \left(\frac{\Phi}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}, \quad (\Phi = \theta \pm \gamma). \end{aligned} \quad (60,10)$$

Подставляя это в (59,17), приходим к интегралам вида

$$J = \int_{\eta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} - \cos \alpha} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}}, \quad (60,11)$$

которые можно взять, например, подстановкой вида

$$\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} = \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \cdot \operatorname{ch} t, \quad (60,12)$$

причем значениям $\xi = \eta$ и $\xi = \infty$ отвечают соответственно $t = 0$ и $t = \infty$. Именно, находим, вводя обозначение $a = \cos \alpha / \operatorname{ch} \frac{\eta}{2}$ и замечая, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta} &= \sqrt{2 \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\xi}{2} - \operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{2} \right)} = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \operatorname{sh} t \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} d\xi = 2 \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \operatorname{sh} t dt: \\ J &= \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t - a} = \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^t dt}{1 - 2ae^t + e^{2t}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{1 - 2ax + x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-a^2} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}. \end{aligned} \quad (60,13)$$

¹ Последнее соотношение вытекает из того, что если

$$\operatorname{tg} \psi = x, \quad \psi = \operatorname{arctg} x,$$

то

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{1}{x},$$

так что

$$\frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \quad (\text{A})$$

Подставляя в (60, 13) значение $a = \cos \alpha / \operatorname{ch} \frac{\eta}{2}$ и замечая, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \sqrt{1 - a^2} &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{2} - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} \eta - \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ra} - \cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos 2\alpha}}{2\sqrt{ar}}, \end{aligned}$$

находим:

$$I = \frac{4\sqrt{2ar}}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos 2\alpha}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \alpha}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \alpha}}, \quad (60, 14)$$

где

$$\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch} \eta}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + r^2 + z^2 + 2ar}{ar}}.$$

(59, 17), (60, 10), (60, 11) и (60, 14) дают теперь:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{2e'}{\pi} \sum_{k=0}^{k=2p} \left\{ \frac{1}{R_k} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \left(\frac{\theta - \gamma}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \left(\frac{\theta - \gamma}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R'_k} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \left(\frac{\theta + \gamma}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \left(\frac{\theta + \gamma}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}} \right\}, \quad (60, 15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_k &= \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \left(\theta - \gamma + \frac{4k\pi}{2p+1} \right)}, \\ R'_k &= \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \left(\theta + \gamma + \frac{4k\pi}{2p+1} \right)}. \end{aligned}$$

В частности, при $p=0$, т. е. при $\delta=2\pi$, получается проводящая полуплоскость в поле точечного заряда. Потенциал в некоторой точке пространства оказывается при этом равным:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{2e'}{\pi} \left\{ \frac{1}{R_0} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \frac{\theta - \gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \frac{\theta - \gamma}{2}}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R'_0} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \frac{\theta + \gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \frac{\theta + \gamma}{2}}} \right\}, \quad (60, 16) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos (\gamma - \theta)} \\ R'_0 &= \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos (\gamma + \theta)}. \end{aligned}$$

Формулы (60, 8), (60, 15) и (60, 16), повидимому, были впервые даны Макдональдом в его цитированной выше работе. Формула (60, 16) была также получена Зоммерфельдом с помощью его метода разветвленных потенциалов.¹

¹ В окончательном (исправленном) виде она дана в его статье в Proc. of the Lond. Math. Soc. 30, 163, 1899. См. также Proc. of the Lond. Math. Soc., 28, 417, 1897.

60.3. Можно было бы указать еще несколько случаев, когда интеграл в формуле (59,17) может быть выражен через известные функции. Так, Макдональдом было показано, что при $\delta = \frac{3\pi}{3p \pm 1}$ (p — целое, > 0) он сводится к полным эллиптическим интегралам первого и третьего рода.¹ Заметим, кстати, что к этому классу относится, в частности, случай прямого двугранного угла, заполненного проводником и находящегося в поле произвольно расположенного точечного заряда ($\delta = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{3 \cdot 1 - 1}$). Мы здесь на этом подробнее останавливаться не будем.

Глава XIX

ИНВЕРСИЯ В ШАРЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 61. Принципиальные основы метода инверсии в шаре

61.1. Геометрическая часть. Инверсия в шаре представляет собой геометрическое преобразование, с помощью которого точкам и фигурам некоторой пространственной картины сопоставляются их „отражения в шаре“ по закону, подобному закону инверсии в круге. Именно, если опишем вокруг произвольной точки O , которую назовем центром инверсии, сферу радиуса R , то изображением или отражением какой-либо другой точки A^3 в этой сфере будем называть такую точку A' , лежащую на прямой OA , для которой

$$OA \cdot OA' = R^2. \quad (61,1)$$

Отражая таким путем в шаре все точки какой-либо пространственной кривой или поверхности, получим соответствующую отраженную кривую или поверхность. Из этого следует, что, если уравнение некоторой поверхности в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в точке O имеет вид $f(r, \theta, \varphi) = 0$, то уравнение отраженной поверхности будет

$$f\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right) = 0.$$

При инверсии всякий шар переходит в шар (включая, как предельный случай его, плоскость). Это непосредственно следует из того, что в любой плоскости, проходящей через центр инверсии и центр отображаемого шара, имеем дело, по существу, с инверсией круга, получающегося при пересечении отображаемого шара с этой плоскостью, в круге радиуса R с центром в O , т. е. с уже рассмотрен-

¹ См. его цитированную выше статью.

² Точка A может лежать как вне сферы, в которой производится инверсия, так и внутри нее или на ее поверхности (в последнем случае она совпадает со своим отражением).

ной в § 48 задачей. Отражением первичного круга $PP'Q''Q$ (рис. 72) будет при этом тоже круг $T'P'Q'$, так что, вращая всю картину вокруг линии центров OC , получим в качестве отражения первичного шара тоже шар, образованный вращением круга $T'P'Q'$ вокруг OC .

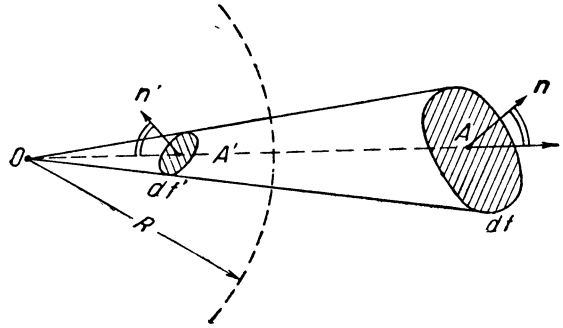


Рис. 111.

Совершенно аналогичным образом убедимся, вращая изображенную на рис. 73 картину вокруг оси OA' , в том, что изображением плоскости, описываемой при этом прямой $A'B'$, будет шар, описываемый кругом OBA , проходящий через центр инверсии.

Не представляет также никакого труда показать, так же, как это было сделано при рассмотрении инверсии в круге, что изображение, получаемое при инверсии в шаре, обладает свойством конформности,

т. е. что имеет место подобие исходной и отраженной фигур в бесконечно-малых частях. При этом нормали \vec{n} и \vec{n}' к первичному и отраженному элементам df и df' (рис. 111) составяют с лучем OA равные углы.

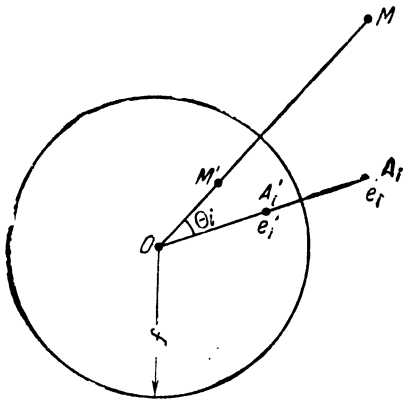


Рис. 112.

61.2. Электростатическая часть. Пусть в пространстве имеется n точечных зарядов¹ e_1, e_2, \dots, e_n , находящихся соответственно в точках A_1, A_2, \dots, A_n , и, кроме того, заряд e_0 в точке O . Примем O за центр сферы радиуса f и отразим в этой сфере все заряды $e_i, i=1, 2, \dots, n$. Введем

при этом еще правило „электрического отражения“ зарядов, именно, будем считать, что при отражении заряда e_i , находящегося в A_i , в отраженной точке A_i' будет находиться „отраженный“ заряд e_i' , равный:²

$$e_i' = e_i \frac{f}{OA_i}. \tag{61,2}$$

Потенциал $\bar{\varphi}_m$, создаваемый зарядами e_1, e_2, \dots, e_n в некоторой точке M (рис. 112), расположенной на расстоянии $OM=r$ от центра инверсии, равен

$$\bar{\varphi}_m = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{MA_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{\sqrt{a_i^2 + r^2 - 2a_i r \cos \theta_i}}, \tag{61,3}$$

причем положено $OA_i = a_i$ и $\angle MOA_i = \theta_i$.

¹ Свободных.

² Обычно принято полагать $e_i' = -e_i \frac{f}{OA_i}$. Мы примем определение (61,2), поскольку выбор знака никакой роли не играет.

Для потенциала $\varphi'_{M'}$ отраженных зарядов e_i' в M' найдем, полагая

$$\begin{aligned} OM' = r' = \frac{f^2}{r}, \quad OA_i' = a_i' = \frac{f^2}{a_i}: \\ \varphi'_{M'} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i'}{M'A_i'} = f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{a_i \sqrt{a_i'^2 + r'^2 - 2a_i'r' \cos \theta_i'}} = \\ = \frac{r}{f} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{\sqrt{a_i^2 + r^2 - 2a_i r \cos \theta_i}} = \frac{r}{f} \bar{\varphi}_M = \frac{f}{r'} \bar{\varphi}_M. \end{aligned} \quad (61,4)$$

Так как при вычислении потенциала $\bar{\varphi}_M$ первичного поля мы не учли заряда e_0 , то $\bar{\varphi}_M$ отличается от полного потенциала φ_M первичного поля на величину $\frac{e_0}{r}$, т. е.

$$\varphi_M = \bar{\varphi}_M + \frac{e_0}{r}, \quad (61,5)$$

так что (61,4) можно переписать так:

$$\varphi'_{M'} = \frac{r}{f} \left(\varphi_M - \frac{e_0}{r} \right) = -\frac{e_0}{f} + \frac{r}{f} \varphi_M = -\frac{e_0}{f} + \frac{f \varphi_M}{r'}. \quad (61,6)$$

Эта формула связывает полный потенциал φ_M всех первичных зарядов в точке M исходной картины с потенциалом $\varphi'_{M'}$ отраженных зарядов¹ в соответствующей отраженной точке M' .

Заметим, что на бесконечности (в отраженной картине) $(\varphi'_{M'})_{r' \rightarrow \infty}$ обращается в нуль. Действительно, так как, при $r' \rightarrow \infty$, $r = \frac{f^2}{r'} \rightarrow 0$, т. е. так как бесконечно-удаленной точке M' соответствует точка $r = 0$ в исходной картине, то правильность этого утверждения непосредственно следует из (61,4), если учесть, что $\bar{\varphi}_M$ сохраняет конечное значение при $r \rightarrow 0$. Этот результат остается, очевидно, верным не только в случае дискретной системы точечных зарядов e_i , но и тогда, когда эти заряды распределены в пространстве непрерывным образом (или частью дискретно, частью непрерывно), лишь бы их суммарный потенциал $\bar{\varphi}$ стремился к конечному значению при приближении к точке $r = 0$.

61.3. Предположим теперь, что M лежит на поверхности некоторого проводника и что заряды e_i (включая и e_0) частью находятся на поверхности этого проводника, частью же создают какое-либо внешнее поле, в которое этот проводник внесен. Тогда для всех точек M на поверхности проводника $\varphi_M = V$, где V — постоянный потенциал проводника, и (61,6) дает:

$$\varphi'_{M'} - \frac{fV}{r'} = -\frac{e_0}{f} = \text{const.} \quad (61,7)$$

Отсюда видно, что на поверхности отраженного проводника будет постоянной функция

$$\varphi''_{M'} = \varphi'_{M'} - \frac{fV}{r'}, \quad (61,8)$$

¹ Без учета заряда в центре инверсии.

т. е. сумма потенциалов всех отраженных зарядов (за исключением отбрасываемого заряда e_0), как сидящих на поверхности проводника, так и находящихся в окружающем его пространстве, и потенциала $(-\frac{fV}{r'})$ заряда помещенного в O .

$$\bar{e}^0 = -fV, \quad (61,9)$$

Это показывает, что при помощи инверсии мы получили из решения первичной задачи решение такой новой задачи, при которой на отраженном проводнике¹ имеет место равновесное распределение электрических зарядов при условии, что к полю отраженных, внешних по отношению к проводнику, зарядов добавлено в отраженной картине еще поле от заряда $\bar{e}^0 = -fV$, находящегося в центре инверсии. Потенциал соответствующего распределения зарядов дается при этом как раз функцией φ' .

В частности, если $V=0$, т. е. если проводник имел нулевой потенциал,² то из (61, 7) следует, что

$$\varphi'_{m'} = -\frac{e_0}{f}, \quad (61, 10)$$

и добавочный заряд \bar{e}^0 в центре инверсии выпадает.

В этом случае, стало быть, $\varphi'_{m'} = \text{const}$.

Если при этом потребовать, чтобы было $\varphi'_{m'} = V'$, где V' — некоторая заданная величина, то для этого должно быть

$$e_0 = -fV', \quad (61, 10')$$

и этим условием определяется первичный заряд e_0 в центре инверсии. (61, 6) дает при этом:

$$\varphi'_{m'} = V' + \frac{f}{r'} (\varphi_m)_{e_0 = -fV'}. \quad (61, 11)$$

В частности, если внешнее поле в отраженной системе проводников создается произвольно-расположенным точечным зарядом, равным единице, то полагая $V'=0$, найдем таким путем функцию Грина для отраженной картины. Тем самым получим для нее и общее решение электростатической задачи, соответствующей произвольным значениям потенциалов на составляющих ее проводниках и произвольному внешнему полю.

61. 4. Инверсия в шаре, в отличие от инверсии в круге, как правило, не может быть использована для получения новых решений из уже известных, если в окружающем проводники пространстве имеются различные диэлектрики, ибо при переходе к новому решению не удастся, вообще говоря, удовлетворить условию $\epsilon_i E_n^{(i)} = \epsilon_k E_n^{(k)}$.

¹ Или проводниках, ибо нетрудно видеть, что эта теорема остается справедливой и в том случае, если проводников несколько, но все они находятся при одинаковом потенциале.

² По отношению к бесконечности.

В связи с этим невозможно, например, получить с помощью инверсии решение электростатической задачи для диэлектрического шара из известного решения для диэлектрического полупространства, тогда как для диэлектрического цилиндра такой переход, как мы видели, возможен. В дальнейшем будем, поэтому, считать, что отражаемая система проводников и зарядов находится в пустоте, поскольку заполнение пространства однородным изотропным диэлектриком все равно не сказывается на характере поля, а влияет только на величину свободных зарядов.

61.5. Пример. Потенциал φ свободного распределения заряда e по поверхности проводящего шара радиуса a , находящегося в пустоте, равен вне его (см. рис. 79):

$$\varphi = \frac{e}{CM} = \frac{e}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta}}, \quad (61,12)$$

где $h = OC$ — расстояние центра рассматриваемого шара от начала O сферической системы координат с осью OC , причем θ — это угол $MOС$.

Принимая O за центр сферы инверсии с радиусом $f = OA = h - a$, так что эта сфера касается проводящего шара, получаем в результате инверсии новую сферу AB' , и, согласно сказанному выше, функция

$$\varphi''_{M'} = \frac{ef}{h} \cdot \frac{1}{C'M'} - \frac{fV}{r'} = \frac{ef}{f+a} \cdot \frac{1}{C'M'} - \frac{e}{r'} \quad (61,13)$$

дает решение электростатической задачи для отраженной сферы, находящейся под влиянием точечного заряда $e_0 = -e$ в O и имеющей потенциал, равный нулю [ср. (61,7)]. При этом, как было показано в п. 49.3, между радиусом $a' = AC$ отраженного круга и произведением $\bar{CO} \cdot \bar{CC}'$ расстояний зарядов \bar{e}_0 и отраженного центрального заряда $e' = e \frac{a}{h} = \frac{ea}{a+f}$ до центра отраженной сферы, существует соотношение (49,12),¹ т. е. $\bar{CO} \cdot \bar{CC}' = a'^2$, которое показывает, что \bar{e}_0 и e' находятся в точках, являющихся каждая отражением другой. Нетрудно видеть, что эти заряды являются также электрическими отражениями друг друга (кроме как в отношении знака), ибо $e' = e \frac{a}{a+f} = e \frac{a'}{OC}$, что непосредственно получается из (49,10) и (49,11) и соответствует закону (61,2) отражения зарядов.

§ 62. Потенциал и поле проводника, поверхность которого образована пересечением двух сфер

62.1. Применим инверсию к найденному выше решению задачи о поле неограниченного проводящего клина, находящегося в пустоте в присутствии точечного заряда e_0 . Обозначая, как раньше, через (a, γ)

¹ Геометрические соотношения в данном случае ничем не отличаются от тех, которые имели место в плоском случае.

полярные координаты заряда в плоскости, перпендикулярной к ребру клина и проходящей через заряд (рис. 113), и принимая местоположение заряда за центр сферы инверсии, а a — за ее радиус, получим в результате инверсии проводник $e_0P'OQ'e_0$, ограниченный частями двух сферических поверхностей, получаемых при инверсии полуплоскостей OPA и OQB и опирающихся на общий им граничный круг, в который переходит при инверсии ребро клина. Иными словами, проводник этот имеет форму фигуры, получающейся при вращении луночки $e_0P'OQ'e_0$, ограниченной двумя дугами кругов, вокруг перпендикуляра ST , восстановленного из середины хорды e_0O .

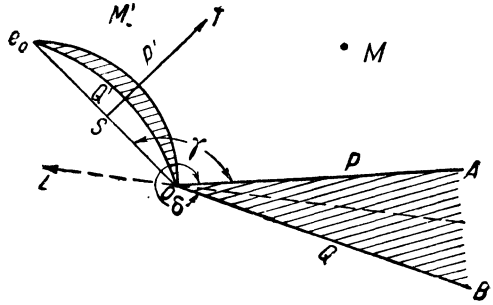


Рис. 113.

Предполагая, что клин находится при потенциале $V=0$, получаем для потенциала φ_m в любой точке M исходной картины значение (59, 17), где надо положить $e' = e_0$.

Для потенциала $\varphi'_{m'}$ отраженной системы зарядов в отраженной точке M' находим при этом, согласно общему соотношению (61, 6), где надо положить $f=a$:

$$\varphi'_{m'} = -\frac{e_0}{a} + \frac{a}{e_0 M'} \varphi_m. \tag{62, 1}$$

Если точка M лежит на одной из сторон клина, то $\varphi_m = 0$, и потенциал $\varphi'_{m'}$ в соответствующей точке поверхности отраженного проводника будет $\varphi'_{m'} = -\frac{e_0}{a}$. Обозначая этот потенциал через V' , так что $e_0 = -aV'$, получаем, используя формулу (59, 17):

$$\varphi'_{m'} = V' \left\{ 1 - \frac{a^{3/2}}{\delta(e_0 M')} \sqrt{2r} \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\text{sh} \frac{\pi z'}{\delta}}{\text{ch} \frac{\pi z'}{\delta} - \cos \frac{\pi(\theta - \gamma)}{\delta}} - \frac{\text{sh} \frac{\pi z'}{\delta}}{\text{ch} \frac{\pi z'}{\delta} - \cos \frac{\pi(\theta + \gamma)}{\delta}} \right] \frac{dz'}{\sqrt{\text{ch} \zeta - \text{ch} \eta}} \right\}, \tag{62, 2}$$

где

$$\text{ch} \eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar} \text{ и } \eta > 0. \tag{62, 3}$$

Эта формула дает потенциал свободного распределения зарядов по отраженному проводнику, причем только нужно в нее подставить выражения координат (r, θ, z) точки M через координаты отраженной точки M' .

Для того, чтобы это сделать, заметим, прежде всего, что, так как изучаемое поле обладает симметрией вращения относительно оси ST ,

то достаточно найти его потенциал в плоскости $z=0$, т. е. в плоскости чертежа на рис. 113. Более того, и в этой плоскости достаточно найти его лишь по одну сторону от неограниченно продолженной в обе стороны прямой ST —оси симметрии поля. Поэтому, будем, подобно тому, как мы это делали в § 52 при решении сходной плоской задачи, характеризовать положение точки M' в плоскости $z=0$ в отраженной картине при помощи биполярных координат, причем за их полюсы возьмем точки O и e_0 . Полагая, как в п. 52.2 ¹ $\rho = \lg \frac{e_0 M'}{OM'}$, $\xi = \angle OM'e_0$, получим по формулам (52, 13) и (52, 15) для связи координат (ρ, ξ) отраженной точки M' и координат (r, θ) соответствующей точки M первичной картины, во-первых, соотношение

$$r = ae^{-\rho}, \quad (62, 4)$$

и, далее, при $0 < \gamma < \frac{\delta}{2} \leq \pi$ (что, очевидно, не ограничивает общности решения, ибо, из-за симметрии картины, всегда можно считать заряд e_0 расположенным со стороны меньших углов θ от биссектрисы OL угла δ):

$$\xi = \begin{cases} \gamma - \theta & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \\ \gamma - \theta + 2\pi & \text{при } \pi + \gamma < \theta \leq \delta, \text{ если } \delta > \pi + \gamma. \end{cases} \quad (62, 5)$$

Выражая из этих соотношений θ через ξ , получаем:

$$\theta = \begin{cases} \gamma - \xi & \text{при } -\pi \leq \xi \leq \gamma, \text{ т. е. при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \\ \gamma - \xi + 2\pi & \text{при } \gamma - \delta + 2\pi \leq \xi < \pi, \text{ т. е.} \\ \text{при } \pi + \gamma < \theta \leq \delta, \text{ если } \delta > \pi + \gamma. \end{cases} \quad (62, 6)$$

Замечая теперь, что, согласно (59, 16), имеем при $z=0$:

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} + \frac{a}{r} \right), \quad (62, 7)$$

находим с помощью (62, 4):

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{1}{2} (e^\rho + e^{-\rho}) = \operatorname{ch} \rho. \quad (62, 8)$$

Из двух возможных решений $-\rho = \pm \eta$ — этого уравнения выбираем первое, т. е.

$$\eta = \rho, \quad (62, 9)$$

причем, так как, согласно (59, 17), $\eta > 0$, то должно также быть $\rho > 0$.

Это показывает, что должно быть $e_0 M' > OM'$, т. е. при этом нужно рассматривать лишь ту полуплоскость рис. 113, которая лежит вправо от неограниченно продолженной прямой ST . (62, 2) приобретает при этом такой вид:

$$\varphi'_{M'} = V' \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}}{\delta} \int_{\rho}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \rho}} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi \psi_1}{\delta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi \psi_2}{\delta}} \right) d\zeta, \right. \quad (62, 10)$$

¹ Точка e_0 соответствует здесь точке C на рис. 88 bis.

где

$$\psi_1 = \begin{cases} -\xi \text{ при } \gamma \geq \xi \geq -\pi, \text{ т. е. при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \\ -\xi + 2\pi \text{ при } \pi > \xi \geq \gamma - \delta + 2\pi, \text{ т. е. при } \pi + \gamma < \theta \leq \delta, \\ \text{если } \delta > \pi + \gamma \end{cases} \quad (62, 11)$$

$$\psi_2 = \begin{cases} 2\gamma - \xi \text{ при } \gamma \geq \xi \geq -\pi, \text{ т. е. при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \\ 2\gamma - \xi + 2\pi \text{ при } \pi > \xi \geq \gamma - \delta + 2\pi, \text{ т. е. при } \pi + \gamma < \theta \leq \delta, \\ \text{если } \delta > \pi + \gamma, \end{cases} \quad (62, 12)$$

причем использованы соотношения (62, 6) и (62, 4), а также формула (52, 6) для $r_1 = e_0 M'$,¹ в которой надо положить $d = a/2$.² Уравнения поверхностей, ограничивающих отраженный проводник, получаются из (62, 5) при $\theta = 0$ и $\theta = \delta$ и будут:

$$\xi_1 = (\xi)_{\theta=0} = \gamma; \xi_2 = (\xi)_{\theta=\delta} = \gamma - \delta \text{ при } \delta \leq \pi + \gamma, \quad (62, 13)$$

и

$$\xi_1 = (\xi)_{\theta=0} = \gamma; \xi_2 = (\xi)_{\theta=\delta} = \gamma - \delta + 2\pi \text{ при } 2\pi \geq \delta > \pi + \gamma. \quad (62, 14)$$

Здесь δ — угол между касательными к дугам $e_0 P'O$ и $e_0 Q'O$ в точках e_0 или O (рис. 113), который соответствует внешнему по отношению к клину пространству.³

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

62. 2. $\delta = \frac{\pi}{\rho}$; p — целое > 0 .

Так как, при $\pi/\delta =$ целому числу, различие в возможных значениях ψ_1 и ψ_2 в формуле (62, 10) не сказывается, то, пользуясь найденным в п. 60.1 решением (60, 8), сразу получаем с помощью (62, 4), (62, 5), (62, 9) и (52, 6):

$$\varphi'_{M'} = V' \left\{ 1 - \sqrt{\text{ch } \rho - \text{ch } \xi} \sum_{k=0}^{k=p-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \left(\xi + \frac{2k\pi}{\rho} \right)}} - \frac{1}{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \left(2\gamma - \xi + \frac{2k\pi}{\rho} \right)}} \right] \right\}, \quad (62, 15)$$

что совпадает с решением, данным для этого случая Максвеллом при помощи метода изображений.

62. 3. $\delta = \frac{2\pi}{2p+1}$.

(60, 15) дает:

$$\varphi'_{M'} = V' - \frac{2V'}{\pi} \sum_{k=0}^{k=2p} \left\{ \frac{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \left(\xi - \frac{4k\pi}{2p+1} \right)}} \arctg \sqrt{\frac{\text{ch } \frac{\rho}{2} + \cos \left(\frac{\psi_1}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}{\text{ch } \frac{\rho}{2} - \cos \left(\frac{\psi_1}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}} - \frac{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \left(2\gamma - \xi + \frac{4k\pi}{2p+1} \right)}} \arctg \sqrt{\frac{\text{ch } \frac{\rho}{2} + \cos \left(\frac{\psi_2}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}{\text{ch } \frac{\rho}{2} - \cos \left(\frac{\psi_2}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}} \right\}, \quad (62, 16)$$

¹ $e_0 M'$ соответствует именно r_1 , а не r_2 , так как при $\rho > 0$ (наш случай) (52, 5) показывает, что $r_1 > r_2$, а так как мы приняли, что $e_0 M' > OM'$, то $e_0 M' = r_1$, $OM' = r_2$.

² У Макдональда формула (62, 10) ошибочно дана со значениями $\psi_1 = -\xi$, $\psi_2 = 2\gamma - \xi$ для всех ξ , тогда как эти значения, согласно (62, 11) и (62, 12), верны лишь при $\gamma \geq \xi \geq -\pi$.

³ Ср. рис. 90, а и б, § 52, где геометрические соотношения такие же, как в данном случае.

причем из (62, 11) и (62, 12) следует, что при $p > 0$ будет просто $\psi_1 = -\xi$, $\psi_2 = 2\gamma - \xi$, так как тогда $\theta \leq \frac{2\pi}{3} < \pi$, и имеем первый из указанных в этих формулах случаев.

Если же положить здесь $p = 0$, что соответствует углу $\delta = 2\pi$, т. е. проводящей полуплоскости в исходной картине и сферическому сегменту с бесконечно-тонкими стенками в отраженной (кельвиновский случай), то получится

$$\begin{aligned} \varphi' = V' - \frac{2V'}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\psi_1}{2}}} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos (2\gamma - \xi)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\psi_2}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\psi_2}{2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (62,17)$$

причем уравнение поверхности сегмента имеет вид (см. (62,14)):

$$\xi = (\xi)_{\theta=0} = \gamma. \quad (62,18)$$

Формулы (62, 17), (62, 11) и (62, 12) показывают, что при $0 \leq \theta \leq \pi + \gamma$, т. е. при $\gamma \geq \xi \geq -\pi$

$$\begin{aligned} \varphi_1' = V' - \frac{2V'}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\xi}{2}}} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}{\operatorname{ch} \rho - \cos (2\gamma - \xi)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2}\right)}} \right\}, \end{aligned} \quad (62,19)$$

тогда как при $\pi + \gamma < \theta \leq 2\pi$, т. е. при $\pi > \xi \geq \gamma$:

$$\begin{aligned} \varphi_2' = V' - \frac{2V'}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\xi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\xi}{2}}} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}{\operatorname{ch} \rho - \cos (2\gamma - \xi)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \left(\gamma - \frac{\xi}{2}\right)}} \right\}. \end{aligned} \quad (62,20)$$

Эти выражения для потенциала свободного распределения зарядов по бесконечно-тонкому сферическому сегменту полностью соответствуют найденным в § 52 потенциалам (52, 21) и (52, 22) свободного распределения зарядов по цилиндрической пластинке, изображенной на рис. 90, а и б. Данное в § 52 геометрическое рассмотрение полностью относится и к данному случаю, причем только фигуры рис. 90, а и б должны теперь изображать сечения сферического сегмента плоскостью, проходящей через его ось вращения. В частности, видно, что (62, 20) дает

распределение потенциала внутри области $e'P'OQ$ (рис. 90, a'), тогда как (62, 19) — вне ее. При $\xi = \gamma$, т. е. на самой поверхности сегмента, оба выражения дают $\varphi' = V'$, как и должно быть.

62. 4. Рассмотрим еще тот частный случай, когда в этих формулах $\gamma = \pi$.

Тогда заряд e_0 , принимаемый в исходной картине за центр инверсии, лежит в той же плоскости, что и сама отображаемая полуплоскость, и эта последняя при инверсии переходит в плоскую круглую пластинку. Учитывая, что, при $\gamma = \pi$ нужно воспользоваться формулами (62, 19), получаем при этом:

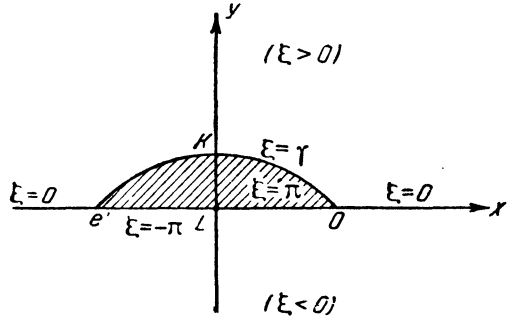


Рис. 114.

$$\begin{aligned} \varphi' = V' - \frac{2V'}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \rho/2 + \cos \xi/2}{\operatorname{ch} \rho/2 - \cos \xi/2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \rho/2 - \cos \xi/2}{\operatorname{ch} \rho/2 + \cos \xi/2}} \right\} = \\ = \frac{4V'}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \rho/2 - \cos \xi/2}{\operatorname{ch} \rho/2 + \cos \xi/2}}. \end{aligned} \quad (62,21)$$

62. 5. Рассмотрим, наконец, какой вид принимают формулы (62, 19) (62, 20) и (62, 21) на оси сегмента, т. е. при $\rho = 0$.

(62, 19) дает:

$$\begin{aligned} \varphi_1' = V' - \frac{2V'}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\left| \operatorname{ctg} \frac{\xi}{4} \right| \right) - \right. \\ \left. - \left| \frac{\sin \xi/2}{\sin(\gamma - \xi/2)} \right| \operatorname{arctg} \left(\left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\xi}{4} \right) \right| \right) \right\}. \end{aligned} \quad (62,22)$$

Это выражение верно при $\gamma > \xi > -\pi$ (незаштрихованная область на рис. 114).

Для заштрихованной области получаем из (62, 20):

$$\varphi_2' = V' - \frac{2V'}{\pi} \left\{ \frac{\xi}{4} - \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\left| \sin \left(\gamma - \frac{\xi}{2} \right) \right|} \operatorname{arctg} \left[\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\xi}{4} \right) \right| \right] \right\}. \quad (62,23)$$

Обозначая через y декартову координату вдоль оси сегмента, отсчитываемую от плоскости Oe' его основания, получим, как в § 52, для связи y и ξ на оси формулу (52, 28), именно:

$$y = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2}.$$

С ее помощью можем выразить потенциалы φ_1' и φ_2' на оси непосредственно через y . Выпишем в явной форме потенциал плоской пластинки, для которой $\gamma = \pi$. (62, 21) дает при $\rho = 0$:

$$\varphi' = \frac{V'}{\pi} |\xi|, \quad (62,24)$$

¹ Последнее с помощью формулы (A) сноски ¹ на стр. 402.

где ξ — угол, под которым виден диаметр a пластинки из рассматриваемой точки оси.

Так как (52, 28) показывает, что $\xi = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{2y}$, то при $\xi > 0$, получим:

$$\varphi' = \frac{2V'}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{2y}. \quad (62, 25)$$

62. 6. Полагая $\rho = 0$ в общей формуле (62, 10), получаем следующее выражение для потенциала на оси произвольного сегмента, образованного пересечением двух сфер произвольных радиусов:

$$\varphi' = V' \left\{ 1 - \frac{1}{\delta} \left[\sin \frac{\xi}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi \psi_1}{\delta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi \psi_2}{\delta}} \right] \frac{d\zeta}{\operatorname{sh} \frac{\zeta}{2}} \right] \right\}. \quad (62, 26)$$

Если $\pi/\delta = p/q$ — где p и q — целые числа, то, полагая $e^{-\zeta/2} = x$ и принимая x за новую переменную, нетрудно выразить этот интеграл через элементарные функции. Мы, однако, здесь на этом останавливаться не будем.

§ 63. Плотность зарядов на поверхности сферического сегмента

63. 1. Для нахождения поверхностной плотности σ на сторонах бесконечно-тонкого сферического сегмента можем воспользоваться выведенными в п. 52. 6 формулами (52, 37), которые дают, при учете (62, 19) и (62, 20):

$$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi} (E_{\xi}^{(1)})_{\xi=\gamma} = \left(\frac{h}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi_1'}{\partial \xi} \right)_{\xi=\gamma} = \frac{V' \sin \frac{\gamma}{2}}{\pi^2 a} \left\{ \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2}} + 2 \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}} \right\}, \quad (63, 1)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi} (E_{\xi}^{(2)})_{\xi=\gamma} = -\left(\frac{h}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi_2'}{\partial \xi} \right)_{\xi=\gamma} = \sigma_1 - \frac{V' \sin \gamma}{2\pi a}. \quad (63, 2)$$

Заменяя в (63, 2) $\left(\frac{\sin \gamma}{a}\right)$ через $\left(\frac{1}{2R}\right)$, где R — радиус кривизны сферического сегмента,¹ получим отсюда:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{V'}{4\pi R}, \quad (63, 3)$$

т. е. разность плотностей в противоположащих точках выпуклой и вогнутой сторон сегмента постоянна и равна потенциалу сегмента, делен-

¹ См. (52, 41).

ному на $4\pi \times$ (радиус кривизны сегмента). Это соотношение является частным случаем данного ниже в п. 65. 5 общего закона, которым определяется разность плотностей на внешней и внутренней поверхностях сферического сегмента, внесенного в произвольное внешнее поле.¹

63. 2. Для плоской круглой пластинки надо положить в найденных формулах $\gamma = \pi$, причем (63,1) и (63,2) дают:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{V'}{\pi^2 a} \operatorname{ch} \frac{\rho}{2}. \quad (63,4)$$

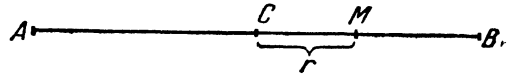


Рис. 115.

Этому соотношению легко придать более наглядную форму. В самом деле, для некоторой точки M пластинки (рис. 115) величина ρ , по своему определению, связана с расстояниями AM и BM этой точки до концов диаметра AB , на котором она лежит, соотношением:

$$e^\rho = \frac{AM}{BM}. \quad (63,5)$$

Обозначая через r расстояние CM точки M до центра пластинки, найдем:

$$e^\rho = \frac{R+r}{R-r}, \quad (63,6)$$

где $R = \frac{a}{2}$ — радиус пластинки. Это дает:

$$\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\rho}{2}} + e^{-\frac{\rho}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{R+r}{R-r}} + \sqrt{\frac{R-r}{R+r}} \right] = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

(63,4) принимает теперь такой вид:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{V'R}{\pi^2 a \sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{V'}{2\pi^2 \sqrt{R^2 - r^2}}, \quad (63,7)$$

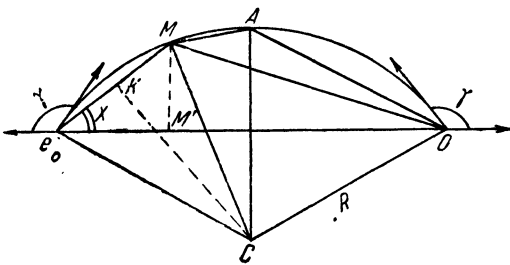


Рис. 116.

а это уже обычная формула для плотности на поверхности плоской круглой пластинки.

63. 3. Несколько сложнее, но тоже совершенно элементарно, можно выразить через геометрически наглядные величины и плотности σ_1, σ_2 в общем случае любого сферического сегмента. Именно, пусть OAe_0 (рис. 116) изображает, как раньше, сечение сегмента плоскостью, проходящей через его ось, причем C и A соответствуют центру сферы, частью которой является сегмент, и точке, в которой ось встречает сегмент.

Для некоторой точки M на дуге e_0AO сегмента будет

$$e^\rho = \frac{e_0M}{OM}. \quad (63,8)$$

¹ См. (65,20) и (65,21).

Замечая, что на дуге e_0AO $\angle e_0MO = \xi = \gamma^1$ и что $e_0O = a$, найдем из треугольника e_0MO , в котором угол Me_0O обозначим через χ :

$$\frac{OM}{\sin \chi} = \frac{e_0M}{\sin(\gamma + \chi)} = \frac{a}{\sin \gamma} = 2R = D. \quad (63,9)$$

причем через $D = 2R$ обозначаем диаметр сферы, частью которой является сегмент.

Положим $MA = u$ и выразим через u все входящие в (63,1) величины.

Заметим, прежде всего, что, так как касательные к дуге e_0AO в ее конечных точках e_0 и O составляют углы γ с хордой e_0O ,² то $\angle e_0CA = \pi - \gamma$. Далее, если $CK \perp e_0M$, то $\angle KCA = \angle Me_0O = \chi$, так что $\angle e_0CK = \pi - \gamma - \chi$ и $\angle ACM = \pi - \gamma - 2(\pi - \gamma - \chi) = 2\chi + \gamma - \pi$. Поэтому

$$u = MA = 2R \sin \frac{\angle ACM}{2} = -D \cos \left(\chi + \frac{\gamma}{2} \right). \quad (63,10)$$

Наряду с этим, (63,9) дает:

$$OM = D \sin \chi, \quad (63,11)$$

$$e_0M = D \sin(\chi + \gamma), \quad (63,12)$$

так что

$$e^{\rho} = \frac{\sin(\chi + \gamma)}{\sin \chi}. \quad (63,13)$$

Находим теперь:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\rho}{2} &= \frac{1}{2} (e^{\frac{\rho}{2}} + e^{-\frac{\rho}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \chi + \sin(\chi + \gamma)}{\sqrt{\sin \chi \cdot \sin(\chi + \gamma)}} = \\ &= \frac{\sin \left(\chi + \frac{\gamma}{2} \right)}{\sqrt{\sin \chi \cdot \sin(\chi + \gamma)}} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (63,14)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \sin \chi \cdot \sin \left(\chi + \frac{\gamma}{2} \right) &= \frac{1}{2} [\cos \gamma - \cos(2\chi + \gamma)] = \\ &= \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \cos^2 \left(\chi + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\left(D \cos \frac{\gamma}{2} \right)^2 - u^2}{D^2} = \frac{(AO)^2 - u^2}{D^2} \end{aligned} \quad (63,15)$$

и полагая

$$AO = D \cos \frac{\gamma}{2} = q, \quad (63,16)$$

получим, принимая еще во внимание вытекающее из (63,10) соотношение:

$$\sin \left(\chi + \frac{\gamma}{2} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{D} \right)^2}, \quad (63,17)$$

что

$$\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} = \frac{q \sqrt{D^2 - u^2}}{D \sqrt{q^2 - u^2}}. \quad (63,18)$$

¹ См. (62, 18).

² Ср. рис. 90,а.

Это и (63,16) дают теперь:

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{q}{D} \sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}}. \quad (63,19)$$

Далее, из равенства

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (63,20)$$

которое легко поверяется дифференцированием по x и сравнением правой и левой части при одном из значений $x=0$ или $x=a$, получим, полагая $a = \operatorname{ch} \frac{\rho}{2}$, $x = \cos \frac{\gamma}{2}$:¹

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2}}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}}, \end{aligned} \quad (63,21)$$

последнее с помощью (63,16) и (63,19).

(63,2) дает теперь, если еще учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{a} &= \frac{\sin \gamma}{a} \cdot \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{D} \cdot \frac{D}{2q} = \frac{1}{2q}; \\ \sigma_2 &= \frac{V'}{2\pi^2 D} \left\{ \sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (63,22)$$

к чему добавляется формула:

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \frac{V'}{2\pi D}. \quad (63,23)$$

Формулы (63,22) и (63,23) впервые были получены иным путем Кельвином.

63. 4. Заметим, в заключение, что наиболее наглядное геометрическое значение величины $\sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}}$, которой определяются плотности σ_1 и σ_2 в (63,22) и (63,23), может быть получено следующим образом: опустим из точки M перпендикуляр MM' на основание $e_0 O$ дуги сегмента. Так как $MM' = e_0 M \cdot \sin \chi = D \sin \chi \cdot \sin(\chi + \gamma)$, то сравнение с (63,15) дает:

$$MM' = \frac{q^2 - a^2}{D}. \quad (63,24)$$

Таким образом получается:

$$\sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{D^2 - q^2}{D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{MM'}}, \quad (63,25)$$

¹ Так как $\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} \geq 1$, а, при $0 < \gamma \leq \pi$, $0 \leq \cos \frac{\gamma}{2} < 1$, то условие $a = \operatorname{ch} \frac{\rho}{2} > x = \cos \frac{\gamma}{2} \geq 0$ — выполнено.

т. е. величина $\sqrt{\frac{D^2 - q^2}{q^2 - a^2}}$ обратно-пропорциональна корню квадратному из длины перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки сегмента на плоскость его основания.

63. 5. Найденные выше формулы для поля свободного распределения зарядов по проводнику, поверхность которого образована пересечением двух сфер, позволяют вычислить в общем виде емкость такого проводника. Чтобы ее найти, достаточно заметить, что, при удалении от проводника на бесконечность, его потенциал должен стремиться к виду $\varphi'_{M'} \rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0 M'} = \frac{Q}{r_1}$ (см. рис. 113 и сноску ¹ на стр. 411), где Q — полный заряд проводника, так что искомая емкость C , равная $\frac{Q}{V'}$, равна $\lim_{r_1=0} \frac{r_1 \varphi'_{M'}}{V'}$. Пользуясь, поэтому, формулой (62,10) для $\varphi'_{M'}$, которую можно с помощью (60,6) и (60,7) переписать в таком виде:

$$\frac{\varphi'_{M'}}{V'} = \frac{\sqrt{\text{ch } \rho - \cos \xi}}{\pi} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\text{ch } \zeta - \text{ch } \rho}} \left[\frac{\frac{\pi}{\delta} \text{sh } \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\text{ch } \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi \psi_2}{\delta}} - \frac{\pi}{\delta} \cdot \frac{\text{sh } \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\text{ch } \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi \psi_1}{\delta}} + \frac{\text{sh } \zeta}{\text{ch } \zeta - \cos \xi} \right], \quad (63,26)$$

и значением r_1 из (52,6), где следует положить $d = \frac{a}{2}$, —

$$r_1 = \frac{\frac{\rho}{ae^{\frac{\rho}{2}}}}{\sqrt{2(\text{ch } \rho - \cos \xi)}}, \quad (63,27)$$

получим, удаляя M' на бесконечность, чему соответствует $\rho \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 0$, а стало быть, согласно (62,11), (62,12), $\psi_1 \rightarrow -\xi \rightarrow 0$, $\psi_2 \rightarrow 2\gamma - \xi \rightarrow 2\gamma$:

$$C = \lim_{\substack{\rho=0 \\ \xi=0}} \frac{r_1 \varphi'_{M'}}{V'} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\text{sh } \frac{\zeta}{2}} \left\{ \frac{\frac{\pi}{\delta} \text{sh } \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\text{ch } \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{2\pi\gamma}{\delta}} - \frac{\frac{\pi}{\delta} \text{sh } \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\text{ch } \frac{\pi \zeta}{\delta} - 1} + \frac{\text{sh } \zeta}{\text{ch } \zeta - 1} \right\}. \quad (63,28)$$

К тому же результату пришел иным, несколько обходным путем Макдональд.

Если предположить, что $\frac{\pi}{\delta} = \pi \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, то этот интеграл легко берется с помощью подстановки $e^{-\zeta/2} = x$ и разложения подынтегральной функции на составляющие дроби, подобно тому, как это делалось в формулах (60,1) и (60,10). Отсылая за деталями этого вычисления к цитированной выше статье Макдональда, приведем здесь лишь его окончательные результаты:

1) $q = 2m + 1$ — нечетное число. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{C}{a} &= \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{k=m} (-1)^k \left\{ \frac{\sin \frac{2k\rho\pi}{q}}{\cos \frac{2p\gamma}{q} - \cos \frac{2k\rho\pi}{q}} - \operatorname{ctg} \frac{k\rho\pi}{q} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p-1} \left\{ \operatorname{cosec} \left(\gamma + \frac{k\pi q}{p} \right) - \operatorname{cosec} \frac{kq\pi}{p} \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \gamma = \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} (-1)^k \frac{\pi}{\delta} \left\{ \frac{\sin \frac{2\pi^2 k}{\delta}}{\cos \frac{2\pi\gamma}{\delta} - \cos \frac{2\pi^2 k}{\delta}} - \operatorname{ctg} \frac{k\pi^2}{\delta} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p-1} \left\{ \operatorname{cosec} (\gamma + k\delta) - \operatorname{cosec} k\delta \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \gamma. \quad (63,29) \end{aligned}$$

2) $q = 2m$ — четное число. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{C}{a} &= \frac{\pi}{\delta} \sum_{k=1}^{k=q-1} (-1)^k \left(1 - \frac{k}{q} \right) \left\{ \frac{\sin \frac{2k\pi^2}{\delta}}{\cos \frac{2\pi\gamma}{\delta} - \cos \frac{2k\pi^2}{\delta}} - \operatorname{ctg} \frac{k\pi^2}{\delta} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{1 - \frac{4}{\pi} \arctg \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{q} + \frac{k\pi}{p} \right) \right]}{\sin (\gamma + k\delta)} + \frac{1}{\pi q} - \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{1 - \frac{k}{p}}{\sin k\delta}. \quad (63,30) \end{aligned}$$

В частности, при $\delta = \pi$, т. е. при $p = q = 1$, что соответствует сфере, получается [см. (63,9)]:

$$C = \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \gamma = R = \text{радиусу сферы.}$$

При $\delta = 2\pi$ (сферический сегмент) $\frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{2}$, т. е. $p = 1$, $q = 2$ и (63,30) дает:

$$C = \frac{a}{2\pi} + \frac{(\pi - \gamma)a}{2\pi \sin \gamma}. \quad (63,31)$$

Эта формула была впервые дана Кельвином.

63. 6. Отметим, наконец, еще один изящный частный результат, найденный Макдональдом, именно, что емкость C сплошного проводящего полушара радиуса R равна:

$$C = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) R \approx 0.8453 R, \quad (63,32)$$

т. е. она составляет, примерно, $\frac{11}{13}$ емкости шара того же радиуса,

¹ Макдональд указывает, как приближение, $\frac{17}{20} = 0.85$. Значение $\frac{11}{13}$, получаемое из разложения $2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ в непрерывную дробь, дает, при почти вдвое меньшем знаменателе, примерно в шесть раз меньшую относительную погрешность.

§ 64. Проводник, поверхность которого образована пересечением двух произвольных сфер, находящийся во внешнем поле

64. 1. Для того, чтобы найти общее решение этой задачи, достаточно, как всегда, знать ее решение для случая, когда внешнее поле создается произвольно расположенным единичным точечным зарядом.¹ Решение же этой последней задачи может быть получено путем инверсии из данного в § 62 решения для свободного распределения зарядов по проводнику подобной формы, аналогично тому, как в п. 61. 5 из поля свободного распределения зарядов по сфере получалось поле сферы в присутствии точечного заряда. Таким образом может быть получено самое общее решение задачи о поле

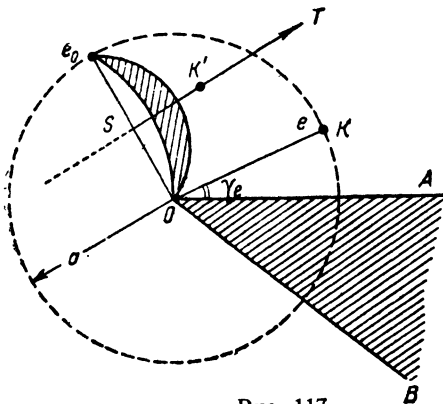


Рис. 117.

вне или внутри области, образованной пересечением двух сфер, причем внешнее поле создается любой системой зарядов, и на поверхности области задано любое распределение потенциала.

Поскольку процесс получения этого решения не представляет никаких принципиальных особенностей по сравнению с тем, что уже делалось выше, мы его здесь в общем виде проводить не будем, а ограничимся рассмотрением случая,

когда индуцирующий точечный заряд лежит на оси сегмента.

64. 2. Переходя к получению этого решения возвратимся, прежде всего, на минуту к рис. 113, где изображено сечение $e'_0P'OQ'$ плоскостью чертежа проводника, получающегося от инверсии клина AOB в сфере радиуса $a = e_0O$ с центром в точке e_0 .

Мы видели, что ось ST сегмента определяется уравнением $\rho = 0$, чему в исходной картине соответствует, согласно (62,4), круг $r = a$, описанный вокруг вершины O угла AOB и проходящий, стало быть, через центр инверсии e_0 .

Допустим теперь, что, в противоположность тому, что имело место в § 62, в точке e_0 , выбранной за центр инверсии, никакого первичного заряда нет, но что такой заряд, равный e , есть в некоторой другой точке $-K$, с координатами (a, γ_e) , лежащей на круге $r = a$ (рис. 117). Ее изображение попадает в соответствующую точку K' , расположенную на оси сегмента, и мы получаем сегмент, находящийся в поле отраженного заряда, равного

$$e' = e \frac{a}{e_0K} = \frac{e}{2 \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_e}{2} \right|} = e \frac{e_0K'}{a}. \quad (64,1)$$

¹ Это решение дает функцию Грина для данной задачи.

При этом, если отображаемый клин находится при потенциале $V=0$, то, согласно (61,9), заряд $\bar{e}^0 = -aV$ в точке e_0 в отраженной картине равен нулю.

Так как получающееся поле обладает симметрией вращения вокруг ST , то нам, так же как в § 62, достаточно найти его в плоскости чертежа, для чего выгодно опять использовать биполярные координаты с полюсами в точках e_0 и O . При этом можем прямо пользоваться данными там формулами (62,4), (62,5), (62,6) для связи координат.

Так как мы предполагаем, что $e_0=0$, то (61,10') показывает, что мы получим решение нашей задачи для того случая, когда получаемый в результате инверсии и подвергающийся воздействию заряда e' в K' проводник имеет потенциал $V'=0$. Найдя решение этой задачи, получим решение более общей, — когда индуцирующий заряд тот же, а потенциал проводника не равен нулю, — простым добавлением найденного в предыдущем параграфе решения задачи о свободном распределении заряда по такому проводнику, когда его потенциал равен V' .

Для решения будем исходить из общей формулы (61,11), которая при $V'=0$ и при $f=a$ дает:

$$\varphi'_{M'} = \varphi'(r', \theta') = \frac{a}{e_0 M'} \varphi_M(r, \theta). \quad (64,2)$$

Здесь $\varphi_M(r, \theta)$ — потенциал в точке M в первичной картине, а M' — отражение M .

Вспомня, что $e_0 M' = \frac{ae^{\frac{\rho}{2}}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \rho - \cos \xi)}}$, и пользуясь формулами (62,4) и (62,5), получим:

$$\varphi'_{M'} = e^{-\frac{\rho}{2}} \sqrt{2(\operatorname{ch} \rho - \cos \xi)} \cdot \varphi(ae^{-\rho}, \gamma - \xi) \text{ при } -\pi \leq \xi \leq \gamma, \\ \text{т. е. при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \quad (64,3)$$

и

$$\varphi'_{M'} = e^{-\frac{\rho}{2}} \sqrt{2(\operatorname{ch} \rho - \cos \xi)} \varphi(ae^{-\rho}, \gamma - \xi + 2\pi) \text{ при } \gamma - \delta + 2\pi \leq \xi < \pi, \\ \text{т. е. при } \pi + \gamma < \theta \leq \delta \leq 2\pi, \text{ если } \delta > \pi + \gamma. \quad (64,4)$$

Применяя эти формулы к потенциалу (59,17) клина, находящегося в поле первичного заряда e в точке (a, γ_e) , получим, поступая так же, как в § 62, используя (62,4) и (64,1), отбрасывая значок M' у $\varphi'_{M'}$ и полагая

$$e_0 K' = \frac{a^2}{e_0 K} = \frac{a}{2 \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_e}{2} \right|} = s, \quad (64,5)$$

что

$$\varphi' = \frac{e'}{s\delta} \sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi} \int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi a_1}{\delta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\delta} - \cos \frac{\pi a_2}{\delta}} \right] \times \\ \times \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \rho}}, \quad \rho \geq 0, \quad (64,6)$$

где

$$u_1 = \begin{cases} \gamma - \gamma_e - \xi & \text{при } -\pi \leq \xi \leq \gamma, \\ \gamma - \gamma_e + 2\pi - \xi & \text{при } \gamma - \delta + 2\pi \leq \xi < \pi, \\ \text{т. е. при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \gamma + \gamma_e - \xi & \text{при } -\pi \leq \xi \leq \gamma, \\ \gamma + \gamma_e + 2\pi - \xi & \text{при } \gamma - \delta + 2\pi \leq \xi < \pi, \\ \text{т. е. при } 0 \leq \theta \leq \pi + \gamma, \end{cases} \quad (64,6^*)$$

Эта формула и дает полное решение задачи о поле проводника, образованного пересечением двух сфер и внесенного в поле точечного заряда e' , расположенного на оси проводника на расстоянии $s = \frac{a}{2 \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_e}{2} \right|}$ от его краевой линии.

64. 3. Так как входящий в (64,6) интеграл не отличается от интеграла в формуле (62,10), то можно непосредственно перенести сюда найденные в § 62 результаты (62,15) и (62,16), относящиеся к случаям, когда этот интеграл выражается через элементарные функции. Получаем при этом:

1) $\frac{\pi}{\delta} = p$, p — целое > 0 :

$$\varphi' = \frac{e'}{s} \sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi} \sum_{k=0}^{k=p-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \left[\xi + \gamma_e - \gamma + \frac{2k\pi}{p} \right]}} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \left[\gamma + \gamma_e - \xi + \frac{2k\pi}{p} \right]}} \right\}. \quad (64,7)$$

2) $\delta = \frac{2\pi}{2p+1}$.

$$\varphi' = \frac{2e'}{\pi s} \sum_{k=0}^{k=2p} \left\{ \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \left(\xi + \gamma_e - \gamma - \frac{4k\pi}{2p+1} \right)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \left(\frac{u_1}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\frac{u_1}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}} - \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \left(\gamma + \gamma_e - \xi + \frac{4k\pi}{2p+1} \right)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \left(\frac{u_2}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \left(\frac{u_2}{2} + \frac{2k\pi}{2p+1} \right)}} \right\}. \quad (64,8)$$

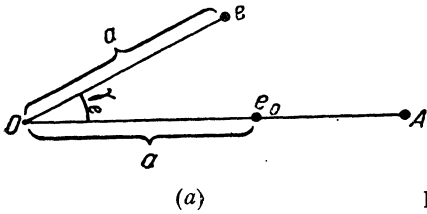
Полагая здесь, в частности, $p=0$, так что $\delta=2\pi$, получим случай бесконечно-тонкого сферического сегмента, внесенного в поле точечного заряда e' , лежащего на его оси, причем

$$\varphi' = \frac{2e'}{\pi s} \left\{ \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos (\xi + \gamma_e - \gamma)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{u_1}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{u_1}{2}}} - \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho - \cos (\gamma + \gamma_e - \xi)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} + \cos \frac{u_2}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho}{2} - \cos \frac{u_2}{2}}} \right\}. \quad (64,9)$$

Если, кроме того, еще $\gamma = \pi$, то сегмент превращается в круглую пластинку радиуса $R = \frac{a}{2}$, находящуюся в поле точечного заряда e' , лежащего на расстоянии $d = \sqrt{s^2 - R^2}$ от ее плоскости.

Полагая в (64,9) $\rho = 0$, сможем выразить с помощью (52,28) потенциал на оси сегмента через координату y , отсчитываемую вдоль его оси от плоскости его основания.

Если же $\gamma = 0$, т. е. если за центр инверсии принять точку e_0 , лежащую на самой пластинке,¹ то получится диафрагма в виде неограниченной проводящей плоскости с круглым отверстием Oe_0 радиуса $R = \frac{a}{2}$ [см. рис. 118 (а) и (б), где (а) изображает первичную картину, а (б) — отраженную].



(а)

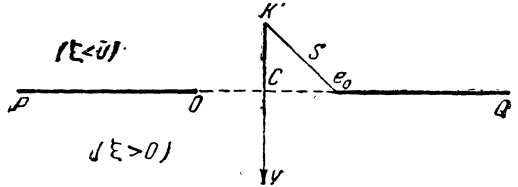


Рис. 118.

(б)

При этом заряд e , расположенный в (а) в точке K с координатами a, γ_e , попадает после инверсии в точку K' [см. рис. 118 (б)] на отрицательной оси y , причем, согласно (64,5),

$$e_0 K' = s = \frac{a}{2 \sin \frac{\gamma_e}{2}}. \quad (64,10)$$

Давая γ_e значения в интервале $\pi > \gamma_e > 0$, заставляем отраженный заряд e' перемещаться по всей отрицательной оси y от начала координат C в центре диафрагмы до бесконечности.

В частности, отодвигая заряд на бесконечность, но увеличивая его в то же время так, чтобы величина e'/s^2 оставалась равной некоторой постоянной E , сможем найти поле диафрагмы, помещенной в однородное поле E . Этот случай представляет существенный интерес для электронной оптики.

Полагая в (64,9) $\rho = 0$, сможем найти, с помощью (52,28), выражение потенциала на оси сегмента через координату y , отсчитываемую по оси сегмента от плоскости его основания.

Рассмотрим, например, потенциал на оси диафрагмы, получающейся при $\gamma = 0$ и внесенной во внешнее однородное поле. Положим в (64,9) $\gamma = 0$ и заметим, что, согласно сказанному выше, нужно, для получения однородного поля E , стремиться s к бесконечности, т. е., согласно (64,10), стремиться γ_e к нулю, соблюдая в то же время условие

$$\lim_{\gamma_e \rightarrow 0} \left(\frac{e'}{s^2} \right) = \lim_{\gamma_e \rightarrow 0} \frac{e' \gamma_e^2}{a^2} = E = \text{const.} \quad (\text{т. к. } \lim_{\gamma_e \rightarrow 0} s \gamma_e = a). \quad (64,11)$$

¹ При том на линии пересечения плоскости, проходящей через первичный заряд e и перпендикулярной к краевой линии пластинки, с самой пластинкой.

(64,9) дает тогда при $\rho=0$ и $\xi > 0$ (чему соответствует $y > 0$), когда, согласно (64,6*), $u_1 = 2\pi - \gamma_e - \xi$, $u_2 = 2\pi + \gamma_e - \xi$:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \lim_{\gamma_e \rightarrow 0} \left\{ \frac{2e'}{\pi s^2} \cdot s \cdot \left[\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\sin \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\gamma_e}{2} \right)} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\xi + \gamma_e}{4} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\sin \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\gamma_e}{2} \right)} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\xi - \gamma_e}{4} \right) \right] \right\} = \\ &= \lim_{\gamma_e \rightarrow 0} \left\{ \frac{Ea}{2\pi\gamma_e} \left[\frac{\xi + \gamma_e}{\cos \frac{\gamma_e}{2} + \sin \frac{\gamma_e}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2}} - \frac{\xi - \gamma_e}{\cos \frac{\gamma_e}{2} - \sin \frac{\gamma_e}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2}} \right] \right\} = \\ &= \frac{ER}{\pi} \left[2 - \xi \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \right], \end{aligned} \quad (64,12)$$

а так как $\xi = 2 \operatorname{arctg} \frac{R}{y}$ [см. (52,28)], то

$$\varphi' = \frac{2ER}{\pi} \left[1 - \frac{y}{R} \operatorname{arctg} \frac{R}{y} \right], \quad (y > 0). \quad (64,13)$$

При $\xi < 0$, т. е. при $y < 0$, получим аналогично:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{2ER}{\pi} \left[\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{R}{|y|} \right) \frac{|y|}{R} + 1 \right] = \\ &= \frac{2ER}{\pi} \left[1 - \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{R}{y} \right) \frac{y}{R} \right], \quad (y < 0). \end{aligned} \quad (64,14)$$

Таковы значения потенциала по обе стороны диафрагмы. При $y=0$ они дают общее значение

$$(\varphi')_{y=0} = \frac{2ER}{\pi}, \quad (64,15)$$

показывающее, насколько потенциал в центре диафрагмы отличается от потенциала $\varphi'=0$ на ней. Из (64,13) видно также, что при $y \rightarrow \infty$ потенциал φ' стремится к нулю, как оно и должно быть, ибо источник поля лежит по другую сторону диафрагмы, тогда как при $y \rightarrow -\infty$ (64,14) дает асимптотическое значение

$$\varphi' = -2Ey + \operatorname{const}. \quad (64,16)$$

Из (64,16) следует, что в этой области потенциал $\varphi_a = -Ey + \operatorname{const}$ первичного однородного поля удваивается. Это можно было предвидеть, поскольку на достаточно больших по сравнению с размерами отверстия диафрагмы расстояниях наличие отверстия вообще не должно сказываться и диафрагма должна влиять на поле просто как сплошная проводящая плоскость, в которой первичное поле отражается. Последнее и приводит к удвоению потенциала.

64.4. Заметим, в заключение, что если центр инверсии выбрать на одной из сторон клина, то в результате инверсии получится плоская

проводящая неограниченная поверхность с вмятиной или с выпуклостью, в виде части сферы (ось этой части будет перпендикулярна к плоской части поверхности, см. рис. 84). Подробное исследование этого случая проведено недавно В. А. Фоком.¹

Если выбрать центр инверсии внутри проводящего клина, то получится полость внутри проводника, ограниченная пересечением двух сфер произвольных радиусов [рис. 119,(а)].

В частности, если выбрать центр инверсии на продолжении одной из сторон клина, то получится изображенная на рис. 119,(б) полость в виде шарового сегмента с плоским доньшком. Такого рода полости встречаются в электронно-оптических приборах. Решение во всех этих случаях или дается непосредственно общими формулами (62,10) или (64,6) при надлежащем выборе входящих в них параметров (если внешнее

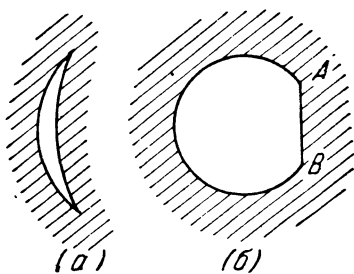


Рис. 119.

поле отсутствует или создается зарядами, расположенными на оси системы, а потенциал на боковой поверхности полости постоянен), или может быть из них получено при помощи еще одной инверсии, с помощью которой получается функция Грина для рассматриваемой области, дающая возможность найти решение и в том случае, когда заряды, создающие внешнее поле, лежат не только на оси системы, или когда отдельные части боковой поверхности полости имеют различные потенциалы.

Глава XX

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА ПРОВОДНИКАХ И НА ТОНКИХ НЕЗАМКНУТЫХ ПРОВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

§ 65. О распределении электричества на тонких незамкнутых проводящих поверхностях

65. 1. Точное решение задачи о распределении электрических зарядов по поверхности проводящих тел конечного размера известно в настоящее время лишь для очень ограниченного числа форм их. Даже в том простейшем случае, когда рассматриваемые проводники находятся в пустоте или в однородном изотропном диэлектрике, решены до конца в основном лишь задачи, относящиеся к плоским, цилиндрическим и шаровым формам проводящих поверхностей и некоторым их

¹ ДАН СССР, XL, № 9, 391, 1943.

комбинациям, задача о распределении заряда по поверхности трехосного эллипсоида и ее частные случаи (круглая и эллиптическая пластинки) и немногочисленные другие. К этим последним относится, в частности, рассмотренный выше вопрос о распределении заряда по поверхности весьма тонкого сферического сегмента (полый шар с круглым отверстием и крайне тонкими стенками) — единственный, как будто бы, случай, в котором до сих пор удалось дать полное решение трехмерной электростатической задачи для неплоской незамкнутой проводящей поверхности. Впрочем, даже для плоских пластинок конечного размера дело обстоит немногим лучше, поскольку известны лишь указанные выше решения для круглой и эллиптической пластинок и немногие другие.

В силу сказанного представляется небезынтересным то обстоятельство, что в целом ряде случаев, например, когда речь идет о распределении заряда по поверхности плоских пластинок с краевой линией сколь угодно сложного очертания, внесенных в произвольно сложное поле, или о распределении заряда по поверхности произвольной части

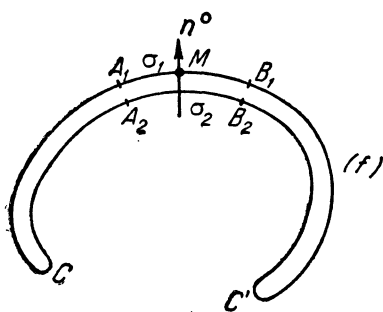


Рис. 120.

тонкой проводящей сферической оболочки, находящейся в любом внешнем поле, можно с помощью чрезвычайно простых соображений, подобных тем, которые легли в основу изложенного в § 30 общего метода решения электростатических и родственных им проблем, получить по крайней мере частичное решение задачи, именно, найти в каждой точке рассматриваемой поверхности разность плотностей зарядов, лежащих на обеих сторонах любого ее элемента.

Аналогичные результаты могут быть получены и для цилиндрических пластинок, находящихся в „плоском“ поле. Заметим также, что те же соображения дают возможность рассмотреть и те случаи, когда имеется налицо не одна пластинка или один кусок поверхности рассматриваемого типа, а несколько, если только они расположены определенным образом друг относительно друга. Не исключается также возможность наличия в пространстве кусков диэлектрика определенной формы.

Ниже мы даем изложение того метода, с помощью которого может быть исследован в общем случае вопрос о распределении зарядов по поверхности тонких незамкнутых проводников, и некоторые из получаемых с помощью его результатов.

65. 2. Переходим к изложению сущности метода. Рассмотрим проводящую поверхность (f) , толщина которой ничтожна по сравнению с остальными ее размерами (рис. 120) и которая находится в произвольном внешнем поле E^0 . Обозначим через σ_1 и σ_2 плотности

поверхностных зарядов, расположенных на обеих сторонах A_1B_1 и A_2B_2 элемента df проводника в смежности с некоторой точкой M .

Замечая, что полное поле \mathbf{E} в любой точке пространства складывается из внешнего поля $\mathbf{E}^0 = -\text{grad } \varphi^0$ и из полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , обязанных своим происхождением соответственно плотностям σ_1 и σ_2 , находим:¹

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (65,1)$$

В частности, внутри самого проводящего слоя поле \mathbf{E} равно нулю, так что равна нулю и его нормальная к поверхности проводника составляющая. (65,1) дает поэтому для любой точки внутри проводника:

$$E_n^0 + (\mathbf{E}_1)_n + (\mathbf{E}_2)_n = 0. \quad (65,2)$$

Замечая, что

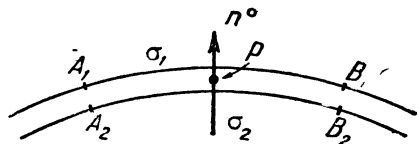


Рис. 121.

$$(\mathbf{E}_1)_n = -2\pi\sigma_1 + (\mathbf{E}'_1)_n; \quad (\mathbf{E}_2)_n = +2\pi\sigma_2 + (\mathbf{E}'_2)_n \quad (65,3)$$

где $(-2\pi\sigma_1)$ и $2\pi\sigma_2$ — те части поля, которые истекают от непосредственно прилегающих к точке P элементов поверхности A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 121), тогда как $(\mathbf{E}'_1)_n$ и $(\mathbf{E}'_2)_n$ обозначают части нормального к поверхности поля, получающиеся от зарядов, сидящих на более удаленных частях соответствующих сторон проводника, находим:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \{ E_n^0 + (\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2)_n \}. \quad (65,4)$$

Входящее сюда значение $(\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2)_n$ определяется формулой:

$$(\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2)_n = \int (f) \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot (\mathbf{n}_p^0, \mathbf{r})}{r^3} df, \quad (65,5)$$

причем σ_1 и σ_2 — плотности заряда на обеих сторонах элемента df , \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из местоположения элемента df в ту точку P , в которой вычисляется искомая нормальная компонента поля, а \mathbf{n}_p^0 — орт нормали в точке P .² Итак:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_n^0 + \int (f) \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot (\mathbf{n}_p^0, \mathbf{r})}{r^3} df \right\}. \quad (65,6)$$

¹ При конечной толщине пластинки пришлось бы еще учитывать заряды, сидящие на концевых участках CC' (рис. 120), соответствующих участкам краевой линии. Так как мы рассматриваем лишь предельный случай бесконечно-тонкого проводника, то в нашем случае эта часть поля равна нулю.

² Эта формула совершенно точна для бесконечно-тонких проводящих поверхностей, для которых мы здесь и проводим все решение. Строгое ее обоснование может быть легко получено на основе общих теорем, относящихся к нормальным производным потенциала простого слоя, физический же смысл непосредственно ясен, поскольку, как указывалось выше, этой формулой дается нормальная к поверхности компонента поля от „удаленных“ от точки P поверхностных зарядов.

Формула (65,6) является естественным обобщением формул (30,15) и (30,16), если в этих последних положить $\epsilon_i = 1$, $\epsilon_k = \infty$, в соответствии с тем, что мы в данном случае рассматриваем проводящее тело в пустоте. В частности, если мы будем рассматривать замкнутую поверхность, то на внутренней стороне ее плотность σ_2 будет везде равна нулю, так же как и создаваемое ею поле E_2 , и (65,4) перейдет в

$$\sigma_1 = \frac{1}{2\pi} \{E_n^0 + (E'_1)_n\},$$

что отличается только несколько измененными обозначениями от предельного вида формулы (30,16) при $\epsilon_k = \infty$, $\epsilon_i = 1$.

(65,6) показывает, что если бы было известно распределение по поверхности суммарной плотности ($\sigma_1 + \sigma_2$) зарядов, сидящих на обеих сторонах каждого элемента проводника, то из (65,6) определилась бы и разность ($\sigma_1 - \sigma_2$) этих плотностей, а стало быть, и сами σ_1 и σ_2 в отдельности.

Так как сумма $\sigma_1 + \sigma_2$, очевидно, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{(S)} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) df}{r} + \varphi^0 = V, \quad (65,7)$$

выражающему то обстоятельство, что сумма потенциалов, происходящих от сидящих на элементах проводящей поверхности зарядов и от внешнего поля, имеет во всех точках проводящей поверхности некоторое постоянное значение V , то полное решение задачи о распределении электричества по любой незамкнутой проводящей поверхности приводится, вообще говоря, к решению интегрального уравнения (65,7).

65.3. Формула (65,4) может быть, однако, в ряде случаев и непосредственно применена к нахождению разности $\sigma_1 - \sigma_2$, без знания закона распределения $\sigma_1 + \sigma_2$ по проводящей поверхности.

Покажем это, для начала, на примере плоской пластинки с произвольной краевой линией, причем будем считать, что пластинка находится в некотором внешнем поле E^0 . Так как в этом случае $(E'_1)_n$ и $(E'_2)_n$ просто равны нулю, как это непосредственно видно из формулы (65,5), в которой $(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}) = 0$, то (65,4) дает:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2\pi} E_n^0, \quad (65,8)$$

и мы получаем следующую теорему:

Разность плотностей поверхностного заряда, сидящего на обеих сторонах какого-либо элемента поверхности плоской проводящей пластинки, внесенной в заданное внешнее поле, не зависит от формы краевой линии этой пластинки и равна $E_n^0/2\pi$.

Из самого способа получения этого результата непосредственно видно, что он не изменится и в том случае, если мы вместо одной пла-

стинки будем иметь сколько угодно пластинок, если только все они лежат в одной плоскости [см. рис. 122, где заштрихованные области (1), (2), (3) обозначают различные пластинки]. Не играет, очевидно, роли и то, если в пластинках будут проделаны отверстия произвольной формы. В частности, наш результат относится к случаю конечной или неограниченной проводящей пластинки (ничтожной толщины), в которой проделаны одно или несколько отверстий любой формы (диафрагма). Для пластинки конечного размера сразу находим из (65,8) также разность зарядов q_1 и q_2 , сидящих на обеих ее сторонах, именно:

$$q_1 - q_2 = \int_{(f)} (\sigma_1 - \sigma_2) df = \frac{1}{2\pi} \int_{(f)} E_n^0 df, \quad (65,9)$$

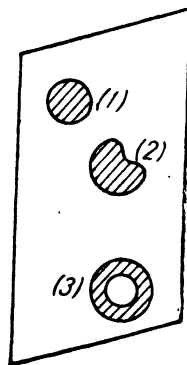


Рис. 122.

причем интегрирование производится по площади (f) пластинки. Заметим, что входящий сюда интеграл $\int_{(f)} E_n^0 df$ — это поток сил внешнего поля, пронизывающий площадь пластинки. Если, кроме того, известен полный заряд пластинки $q = q_1 + q_2$, то, с помощью (65, 9), получаем:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{2\pi} \int_{(f)} E_n^0 df \right), \\ q_2 &= \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{2\pi} \int_{(f)} E_n^0 df \right). \end{aligned} \right\} \quad (65, 10)$$

В частности, для незаряженной пластинки ($q = 0$) будет:

$$q_1 = -q_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(f)} E_n^0 df. \quad (65, 11)$$

Формулы (65,10) и (65,11) справедливы, согласно сказанному выше, не только для сплошных пластинок, но и для пластинок с отверстиями произвольной формы (диафрагмы конечных размеров). Справедливость их не зависит, кроме того, от присутствия в той же плоскости любых других пластинок произвольной формы.

65.4. Только что полученные результаты допускают непосредственное обобщение еще в одном направлении. Именно, допустим, что указанные на рис. 122 пластинки расположены не в пустоте, а лежат на внешней границе диэлектрического полупространства с диэлектрической постоянной ϵ , или даже, в еще более общем случае, зажаты в плоскости, разделяющей два диэлектрических полу-

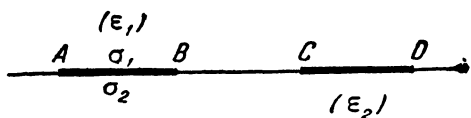


Рис. 123.

пространства с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 (см. рис. 123, где AB и CD — сечения плоскостью чертежа двух пластинок, лежащих на поверхности раздела).

Из сказанного выше непосредственно следует, что если понимать теперь под σ_1 и σ_2 плотности свободных зарядов, сидящих на поверхностях пластинок, то формула (65, 8) остается полностью в силе. Действительно, присутствие диэлектрических сред ϵ_1 и ϵ_2 скажется лишь на появлении в плоскости раздела их поверхностных поляризационных зарядов, поля которых также должны учитываться в формулах (65, 2) и (65, 4). Именно, должно быть:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \{E_n^0 + (E'_1 + E'_2)_n + E_n^{(\text{пол.})}\}, \quad (65, 12)$$

где $E^{(\text{пол.})}$ — поле тех поляризационных зарядов, которые выделяются на непокрытых пластинками частях поверхности раздела.¹ Так как, однако, это поле у поверхности пластинок параллельно поверхности раздела, то в данном случае $E_n^{(\text{пол.})} = 0$, и формула (65, 12) дает тот же результат, как (65, 4), т. е. формулу (65, 8). Вспоминная теперь, что плотность истинных зарядов — $\sigma_i^{(\text{ист.})}$ — связана с полем у поверхности пластинки соотношением:

$$\sigma_i^{(\text{ист.})} = \pm \frac{\epsilon_i E_n}{4\pi} = \epsilon_i \sigma_i, \quad (i = 1, 2), \quad (65, 13)$$

можем написать (65, 8) в такой форме:

$$\sigma_1^{(\text{ист.})}/\epsilon_1 - \sigma_2^{(\text{ист.})}/\epsilon_2 = \frac{1}{2\pi} E_n^0.$$

Для истинных зарядов $q_i^{(\text{ист.})} = \int_{(f)} \sigma_i^{(\text{ист.})} df$, сидящих на поверхностях пластинки (f) , находим теперь:

$$\frac{1}{\epsilon_1} q_1^{(\text{ист.})} - \frac{1}{\epsilon_2} q_2^{(\text{ист.})} = \frac{1}{2\pi} \int_{(f)} E_n^0 df. \quad (65, 14)$$

Если дан полный заряд пластинки $q = q_1^{(\text{ист.})} + q_2^{(\text{ист.})}$, то, с помощью (65, 14), получаем:

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(\text{ист.})} &= \frac{\epsilon_1 q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \int_{(f)} E_n^0 df, \\ q_2^{(\text{ист.})} &= \frac{\epsilon_2 q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \int_{(f)} E_n^0 df, \end{aligned} \right\} \quad (65, 15)$$

¹ Поляризационные заряды, выделяющиеся на поверхности самих пластинок, учитываются тем обстоятельством, что под σ_1 и σ_2 подразумеваются теперь плотности свободных, а не истинных зарядов на поверхности проводников.

и, таким образом, и в этом случае истинные заряды на поверхностях пластинок выражаются через потоки сил внешнего поля, пронизывающие площади пластинок.

65.5. Переходим теперь к рассмотрению распределения зарядов по поверхности проводника, имеющего форму части бесконечно-тонкого сферического слоя радиуса R , причем часть эта может иметь краевую линию произвольной формы и может содержать ряд вырезов любого вида (рис. 124).



Рис. 124.

Применяя формулу (65, 5) и замечая, что (рис. 125):

$$\frac{(n_p^0, r)}{r^3} = \frac{\cos(n_p^0, r)}{r^2} = \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{1}{2Rr}, \quad (65, 16)$$

находим, как в п. 31.6 [формула (31, 18)], что

$$(\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2)_n = \frac{1}{2R} \int_{(f)} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{r} df = \frac{\varphi^{(c)}}{2R}, \quad (65, 17)$$

причем интегрирование производится по всей поверхности проводника, а $\varphi^{(c)}$ обозначает потенциал, создаваемый в точке P всеми расположенными на нем зарядами. Но так как на поверхности проводника суммарный потенциал, создаваемый как этими зарядами, так и внешним полем, $-\varphi^0$ — должен быть постоянен, то, полагая его равным V , найдем:

$$\varphi^{(c)} = V - \varphi^0, \quad (65, 18)$$

и формула (65, 17) обращается в такую:

$$(\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2)_n = \frac{V - \varphi^0}{2R}. \quad (65, 19)$$

(65, 4) дает теперь, если вспомнить, что $E_n^0 = E_r^0$, где E_r^0 — проекция внешнего поля на направление радиуса сферы в точке P :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_r^0 + \frac{V - \varphi^0}{2R} \right\}. \quad (65, 20)$$

Эта формула показывает, что разность плотностей зарядов, сидящих на внешней стороне рассматриваемого проводника (σ_1) и на его внутренней поверхности (σ_2), зависит только от потенциала данного проводника и от того внешнего поля, в которое он внесен, но совершенно не зависит ни от формы его краевой линии, ни от числа и формы вырезов, если таковые в нем имеются.

В том частном случае, когда проводник обладает некоторым, отличным от нуля суммарным зарядом, а внешнее поле отсутствует, (65, 20) дает:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{V}{4\pi R}. \quad (65, 21)$$

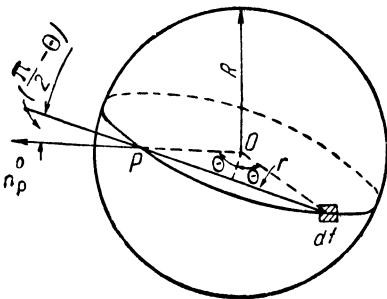


Рис. 125.

Это соотношение, которое, как мы видим, совершенно не зависит от специальной формы краевой линии рассматриваемого проводника, должно иметь место, в частности, и тогда, когда эта краевая линия имеет форму круга, а самый проводник — форму кругового сферического сегмента (рис. 126). В этом последнем случае оно и было найдено Кельвином в результате полного решения соответствующей электростатической задачи.¹ Данный нами вывод показывает, что соотношение (65, 21) не является характерным именно для кельвиновского случая кругового сферического сегмента, а имеет несравненно более общий характер.



Рис. 126.

Формула (65, 20) позволяет найти в общем случае любого сегмента разность зарядов q_1 и q_2 , сидящих на внешней и внутренней его сторонах. Разность эта равна:

$$q_1 - q_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\sigma} E_r^0 df + \frac{Vf}{2R} - \frac{1}{2R} \int_{\sigma} \varphi^0 df \right\}, \quad (65, 22)$$

причем интегрирование распространяется по поверхности той части сферы, которая покрывается данным проводником.

Если, кроме того, известен полный заряд $q = q_1 + q_2$ проводника, то (65, 22) дает:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{q}{2} + \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\sigma} E_r^0 df + \frac{Vf}{2R} - \frac{1}{2R} \int_{\sigma} \varphi^0 df \right], \\ q_2 &= \frac{q}{2} - \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\sigma} E_r^0 df + \frac{Vf}{2R} - \frac{1}{2R} \int_{\sigma} \varphi^0 df \right]. \end{aligned} \right\} \quad (65, 23)$$

В частности, при отсутствии внешнего поля, получается:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{q}{2} + \frac{Vf}{8\pi R}, \\ q_2 &= \frac{q}{2} - \frac{Vf}{8\pi R}. \end{aligned} \right\} \quad (65, 24)$$

Отсюда вытекает то интересное следствие, что если мы знаем собственную емкость C рассматриваемого сегмента, то из (65, 24) сразу получается распределение зарядов между внутренней и внешней поверхностями его, именно:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{4\pi RC - f}{4\pi RC + f}. \quad (65, 25)$$

Поэтому, если емкость C известна, например найдена опытным путем, то отсюда сразу находится распределение зарядов q_1 и q_2 , причем отношение q_2/q_1 содержит, кроме C , еще только f , т. е. полную величину занимаемой проводником поверхности сферы, и не зависит ни от каких иных параметров, характеризующих форму крае-

¹ См. п. 63. 1, формула (63, 3).

вой линии его и величину и форму дырок или вырезов, если таковые в нем имеются.

65.6. Легко видеть, что формула (65, 20) остается в силе не только в том случае, когда лишь одна связная часть (f) поверхности рассматриваемой сферы представляет собой проводящий слой, находящийся при определенном потенциале, но и тогда, когда заменяются проводящими слоями отдельные, не связанные между собой части поверхности сферы (рис. 127), причем части эти могут даже иметь различные потенциалы. Действительно, формула (65, 17) остается верной и в этом случае, если только подразумевать в ней под (f) сумму поверхностей всех отдельных проводящих участков (f_i) сферы, а под $\varphi^{(e)}$ — полный потенциал, создаваемый в рассматриваемой точке всеми зарядами, сидящими на всех этих участках. Формула (65, 18) тоже остается справедливой и теперь, если только в нее вместо V подставлять потенциал V_i того проводящего участка (f_i), на котором изучается распределение плотностей $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$.¹ (65, 20) заменяется теперь, стало быть, формулой:

$$\sigma_1^{(i)} - \sigma_2^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_r^0 + \frac{V_i - \varphi^0}{2R} \right\}, \quad (65, 26)$$

которая имеет место для разности плотностей заряда на обеих сторонах i -го проводящего участка и которая показывает, что разность эта не зависит не только от формы краевой линии и числа и формы вырезов данного i -го проводника, но и от соответствующих геометрических элементов, а также от потенциалов всех других участков.

65.7. Отметим, наконец, чтобы окончательно покончить с рассмотрением вопроса применительно к сферическим сегментам, что если бы даже все только что рассмотренные проводящие „листки“ (f_i) не просто представляли собой как бы материализовавшиеся и ставшие проводящими отдельные участки поверхности некоторой воображаемой сферы, а если бы они на самом деле лежали на поверхности диэлектрического шара того же радиуса R с диэлектрической постоянной ϵ , то и тогда соответствующая задача допускала бы аналогичное решение. Действительно, влияние подобного шара на электрическое поле свелось бы лишь к влиянию выделившихся на его поверхности поляризационных зарядов с плотностью $\sigma^{(пол.)}$ и к тому, что под σ_2 придется теперь понимать плотность свободных зарядов на соприкасающихся с шаром сторонах листков (f_i). Нам придется теперь, поэтому, применять для нахождения $(\sigma_1 - \sigma_2)$ не формулу (65, 4), а формулу

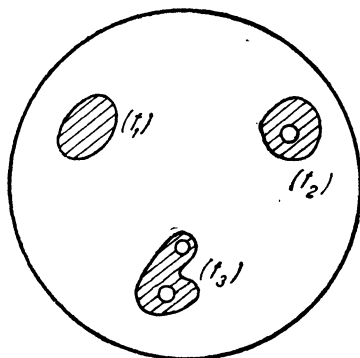


Рис. 127.

¹ Значение индексов у $\sigma_{1,2}$ очевидно.

(65, 12), подобно тому, как это имело место в п. 65. 4. Легко, однако, видеть, что это приведет только к замене формулы (65, 17) такой:

$$(\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 + \mathbf{E}^{(\text{пол.})})_n = \frac{1}{2R} \left\{ \int_{(f)} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{r} df + \int_{(f')} \frac{\sigma^{(\text{пол.})}}{r} df' \right\}, \quad (65, 27)$$

где f , как и раньше, обозначает сумму площадей всех проводящих участков, тогда как $f' = 4\pi R^2 - f$ соответствует свободной поверхности

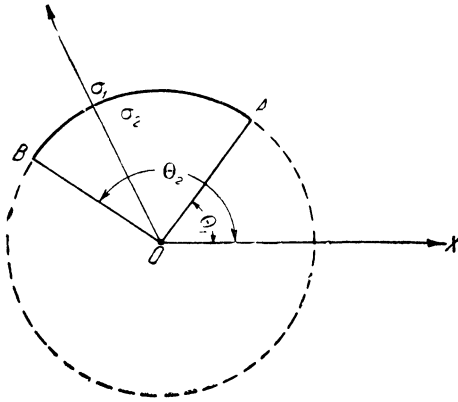


Рис. 128.

диэлектрика. При этом, так как здесь в фигурных скобках стоит опять суммарный потенциал, создаваемый в рассматриваемой точке всеми свободными зарядами, сидящими как на проводящих участках, так и на свободной поверхности диэлектрика, то, обозначая этот потенциал через $\varphi^{(c)}$ и замечая, что в формуле (65,12) фигурирует лишь значение выражения (65, 27) в точках проводящих участков, т. е. там, где $\varphi^{(c)} + \varphi^0 = V_i$, получаем, что и в этом случае

$$\sigma_1^{(i)} - \sigma_2^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_r^0 + \frac{V_i - \varphi^0}{2R} \right\}. \quad (65, 28)$$

Итак, присутствие диэлектрика не влияет на разность плотностей свободных зарядов. Замечая, что

$$(\sigma_1^{(i)})_{\text{ист.}} = \sigma_1^{(i)}, \quad (\sigma_2^{(i)})_{\text{ист.}} = \epsilon \sigma_2^{(i)},$$

приходим к окончательной формуле:

$$(\sigma_1^{(i)})_{\text{ист.}} - \frac{1}{\epsilon} (\sigma_2^{(i)})_{\text{ист.}} = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_r^0 + \frac{V_i - \varphi^0}{2R} \right\}, \quad (65, 29)$$

откуда еще

$$(q_1^{(i)})_{\text{ист.}} - \frac{1}{\epsilon} (q_2^{(i)})_{\text{ист.}} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{(f_i)} E_r^0 df_i + \frac{1}{2R} \left[V_i f_i - \int_{(f_i)} \varphi^0 df_i \right] \right\}, \quad (65, 30)$$

где $(q_1^{(i)})_{\text{ист.}}$ и $(q_2^{(i)})_{\text{ист.}}$ — полные истинные заряды, сидящие соответственно на свободной внешней и на прилегающей к диэлектрическому шару внутренней сторонах листка (f_i).

65. 8. Совершенно аналогичным образом может быть разобран и случай бесконечно-длинной цилиндрической пластинки постоянной ширины, внесенной в перпендикулярное к ее образующим „плоское“ поле (плоская задача, рис. 128). Именно, обозначая через R радиус той цилиндрической поверхности, на которой лежит рассматриваемая пластинка AB , получим, пользуясь теми же соображениями, как при выводе формулы (31, 10):¹

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_r^0 + \frac{e}{R} \right\}, \quad (65, 31)$$

¹ См. п. 31. 5.

где e — суммарный заряд, приходящийся на единицу длины оси рассматриваемой полоски AB . В частности, для незаряженной пластинки получается:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E_r^0}{2\pi}, \quad (65, 32)$$

тогда как для заряженной, но не внесенной во внешнее поле (свободное распределение заряда e по поверхности пластинки) будет:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{e}{2\pi R}. \quad (65, 33)$$

Эту формулу мы уже нашли раньше в § 52 [см. (52, 42)] при полном решении соответствующей задачи.

Обозначая через e_1 и e_2 заряды, сидящие на выпуклой и вогнутой сторонах пластинки (на единицу длины оси), получаем из (65, 31) (рис. 128):

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ R \int_{\theta_1}^{\theta_2} E_r^0 d\theta + e(\theta_2 - \theta_1) \right\}, \quad (65, 34)$$

а так как $e_1 + e_2 = e$, то

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{e}{2} \left[1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \right] + \frac{R}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} E_r^0 d\theta, \\ e_2 &= \frac{e}{2} \left[1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \right] - \frac{R}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} E_r^0 d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (65, 35)$$

Найденные формулы допускают такое же обобщение, как и в обоих предыдущих случаях — плоском и сферическом. Если бы, например, на цилиндрической поверхности, изображенной на рис. 128, было несколько проводящих полосок вместо одной, то формула (65, 31) для плотностей $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$, соответствующих i -й полоске, приобрела бы такой вид:

$$\sigma_1^{(i)} - \sigma_2^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ E_r^0 + \frac{\sum e_i^{(i)}}{R} \right\}, \quad (65, 36)$$

где $\sum_{(i)} e_i$ представляет собой сумму зарядов всех полосок.¹ Аналогичным образом найдется решение с помощью формулы (65, 12) и в том случае, когда все эти пластинки лежат на поверхности диэлектрического цилиндра, находящегося в пустоте или в какой-либо диэлектрической среде.

§ 66. Некоторые теоремы о потенциалах и зарядах, наводимых на проводниках, внесенных в произвольное внешнее электрическое поле

66.1. Прежде чем покончить с рассмотрением статических полей, изложим еще некоторые результаты, которые хотя и не имеют прямого

¹ На единицу длины оси.

отношения к нахождению полного решения задачи о распределении зарядов по поверхностям проводников, но которые, подобно результатам предыдущего параграфа, с одной стороны, дают частичную информацию о характере этого решения, не требуя для этого детального знания всего решения в целом, с другой же — тесно примыкают к изложенным выше исследованиям по методу их получения поскольку при этом из основного интегрального уравнения задачи удастся, путем умножения его на соответственно выбранный множитель и последующего интегрирования по поверхности проводника, получить интересующие нас величины. Тем самым, по существу, и здесь имеем дело, как будет более подробно видно ниже, с нахождением непосредственно из основного уравнения задачи некоторой своеобразной „преобразованной“ функции от потенциала внешнего поля [см., напр., (66, 2)]. Сверх того, эти теоремы и сами по себе представляют интерес, поскольку они могут быть полезны при вычислении потенциалов и зарядов, наводимых на проводниках, внесенных во внешнее электрическое поле.

Переходим к их изложению.

66.2. Теорема 1. *Потенциал V , наводимый на изолированном проводнике, внесенном во внешнее электрическое поле, может быть найден при помощи одной квадратуры, если известно распределение поверхностной плотности σ^0 на этом проводнике при отсутствии внешнего поля.*

Обозначим через φ_e потенциал заданного внешнего поля, а через φ^0 — потенциал поля, соответствующего свободному распределению σ_0 .

Пусть A и B будут две точки на поверхности (f) данного проводника и пусть $\sigma = \sigma(A)$ обозначает истинную поверхностную плотность в точке A в присутствии внешнего поля. Тогда имеет место соотношение:

$$\int_{(f)} \frac{\sigma(A) df_A}{r_{AB}} + \varphi_e = V = \text{const.}, \quad (66, 1)$$

где df_A обозначает элемент поверхности в точке A , а r_{AB} — расстояние от A до B .

Умножая (66, 1) на $\sigma^0(B) df_B$, интегрируя по поверхности $f_B = f$ проводника и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(f)} \sigma^0(B) df_B \cdot \int_{(f)} \frac{\sigma(A) df_A}{r_{AB}} &= \int_{(f)} \sigma(A) df_A \cdot \int_{(f)} \frac{\sigma^0(B) df_B}{r_{AB}} = \\ &= \int_{(f)} \varphi^0(A) \sigma(A) df_A = \varphi^0 e = \int_{(f)} (V - \varphi_e) \sigma^0(B) df_B, \end{aligned}$$

где $\varphi^0(A) = \varphi^0$ обозначает постоянный потенциал на поверхности проводника, происходящий от поверхностного распределения σ^0 , а

$e = \int_{(V)} \sigma(A) df_A$ обозначает полный заряд проводника в присутствии заданного внешнего поля. Выбирая σ^0 таким образом, чтобы было $\varphi^0 = 1$, находим:

$$e + \int_{(V)} \varphi_e \sigma^0(B) df_B = V \int_{(V)} \sigma^0(B) df_B = VC^0,$$

где $C^0 = \int_{(V)} \sigma^0(B) df_B$ обозначает емкость данного проводника при отсутствии в пространстве других проводников.

Отбрасывая ненужный индекс (B), получаем отсюда:

$$V = \frac{1}{C^0} (e + \int_{(V)} \sigma^0 \varphi_e df), \quad (66, 2)$$

и это и есть требуемый результат.

Следствие 1. Если проводник не заряжен, то уравнение (66, 2) упрощается и дает:

$$V = \frac{1}{C^0} \int_{(V)} \sigma^0 \varphi_e df. \quad (66, 3)$$

Следствие 2. Если проводник заземлен, т. е. если $V=0$, то для величины наведенного на нем заряда e получаем значение:

$$e = - \int_{(V)} \sigma^0 \varphi_e df. \quad (66, 4)$$

66. 3. Пример 1. Рассмотрим сферический проводник радиуса R . Тогда $\sigma^0 = C^0/4\pi R^2$, и (66, 3) дает:

$$V = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{(V)} \varphi_e df = \overline{\varphi_e}, \quad (66, 5)$$

где $\overline{\varphi_e}$ обозначает среднее значение потенциала заданного внешнего поля по поверхности данного проводника.

66. 4. Пример 2. Пусть проводник имеет форму длинного тонкого прямого провода, который мы будем трактовать, как очень вытянутый эллипсоид вращения с большой осью, равной приблизительно длине $2l$ провода. Свободное распределение заряда по такому эллипсоиду при отсутствии внешнего поля дает такое внешнее поле, как если бы весь находящийся на эллипсоиде заряд был распределен с равномерной линейной плотностью по прямой линии, соединяющей фокусы эллипсоида.¹ Формула (66, 3) дает поэтому приближенно:

$$V = \frac{1}{C^0} \int_{(V)} \sigma^0 \varphi_e df \approx \frac{1}{C^0} q^0 \int_{(s)} \varphi_e ds, \quad (66, 6)$$

причем интегрирование в последнем интеграле производится по прямой, соединяющей фокусы эллипсоида, а $q^0 \approx C^0/2l$ обозначает заряд, приходящийся на единицу длины этого отрезка (предполагается,

¹ См., напр.: Абрагам—Беккер, Теория электричества, т. I, § 27, ОНТИ, Л.—М., 1936 г.

что потенциал внешнего поля меняется достаточно медленно по поперечному сечению провода).

Вводя значение q^0 в (66, 6), получим:

$$V \approx \frac{1}{2l} \int_s \varphi_e ds = \overline{\varphi_e}, \quad (66, 7)$$

т. е. потенциал, наводимый на проводе, внесенном в произвольное внешнее поле, приближенно равен среднему значению потенциала этого внешнего поля по длине провода.

Этот результат может быть использован для частичного обоснования широко применяемого в радиотехнике, но в теоретическом отношении недостаточно убедительного, метода приближенного расчета емкостей систем параллельных или скрещенных проводов, предложенного Хауэ.

66. 5. Пример 3. Внешнее поле происходит от единичного точечного заряда, находящегося в некоторой точке P . Тогда $\varphi_e = \frac{1}{r}$, где r обозначает расстояние от P . Уравнение (66, 3) дает:

$$V = \frac{1}{C^0} \int_{(f)} \frac{\sigma^0 df}{r}. \quad (66, 8)$$

Это уравнение выражает хорошо известный закон взаимности, согласно которому потенциал, наводимый на незаряженном проводнике единичным зарядом в точке P , равен потенциалу, создаваемому в той же точке единичным зарядом, сообщенным этому проводнику.

66. 6. Теорема 2. *Если система, состоящая из n проводников, находится в заданном внешнем поле, то потенциал, наводимый на каком-либо из проводников системы, может быть найден с помощью квадратур, если известно распределение поверхностной плотности зарядов на проводниках системы при условии, что на рассматриваемом проводнике находится заряд, равный единице, все остальные проводники системы не заряжены и внешнее поле отсутствует.*¹

Чтобы доказать высказанное утверждение, будем исходить из гриновской теоремы взаимности, которая в форме, пригодной для наших целей, может быть сформулирована следующим образом: пусть имеются два различных распределения σ и σ' поверхностной плотности заряда на элементах поверхностей (f_i) проводников, входящих в систему, причем эти распределения зарядов вызывают соответственно потенциалы φ и φ' в точках поверхностей этих проводников. Тогда, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{(f_i)} \sigma_i \varphi_i' df_i = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(f_k)} \sigma_k' \varphi_k df_k = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(f_i)} \int_{(f_k)} \frac{\sigma_i \sigma_k' df_i df_k}{r_{ik}}, \quad (66, 9)$$

где индексы i, k относятся к соответственным проводникам, r_{ik} — расстояние между элементами поверхностей df_i и df_k , и суммирование распространяется на все проводники системы.

¹ Эта теорема является очевидным обобщением теоремы 1.

Рассмотрим теперь следующие два распределения заряда:

1. Система внесена в заданное внешнее поле с потенциалом φ_e причем потенциалы (постоянные!) проводников равны V_k , их заряды — e_k , а поверхностная плотность на k -ом проводнике равна σ_k .

2. Внешнего поля нет. На первом (произвольно выбранном) проводнике находится единичный заряд, тогда как остальные проводники не заряжены. Соответствующие поверхностные плотности назовем σ_i' .

Замечая, что в первом случае имеет место соотношение $\varphi_k + (\varphi_e)_k = V_k$, где $(\varphi_e)_k$ — значение φ_e в точке поверхности k -го проводника, и что во втором случае φ_i' постоянно по всей поверхности i -го проводника и равно потенциальному коэффициенту $p_{i1} = p_{1i}$, получаем из формулы (66,9):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i' \int_{(f_i)} \sigma_i df_i = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(f_k)} \sigma_k' [V_k - (\varphi_e)_k] df_k = V_1 - \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(f_k)} \sigma_k' (\varphi_e)_k df_k,$$

т. е.

$$V_1 = \sum_{i=1}^{i=n} p_{1i} e_i + \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(f_k)} \sigma_k' (\varphi_e)_k df_k, \quad (66, 10)$$

что и доказывает наше утверждение.¹ Легко видеть, что, при $n=1$, (66, 10) совпадает с формулой (66, 2).

В случае, если даны не заряды проводников, а их потенциалы, достаточно выбрать за σ' такую плотность σ'' , которая соответствует значениям $\varphi_1' = 1, \varphi_2' = \varphi_3' = \dots = \varphi_n' = 0$ потенциалов проводников при отсутствии внешнего поля. (66, 9) дает в этом случае:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{(f_i)} \sigma_i \varphi_i' df_i = \int_{(f_1)} \sigma_1 df_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(f_k)} \sigma_k'' [V_k - (\varphi_e)_k] df_k = e_1,$$

так что

$$e_1 = \sum_{(k)} V_k q_{1k} - \sum_{(k)} \int_{(f_k)} \sigma_k'' (\varphi_e)_k df_k, \quad (66, 11)$$

причем e_1 обозначает заряд на первом проводнике, когда последний находится во внешнем поле, а q_{1k} — индукционные коэффициенты первого проводника.

¹ Заметим, что если внешнее поле отсутствует, так что $\varphi_e = 0$, то (66,10) переходит в обычную формулу $V_1 = \sum_{i=1}^{i=n} p_{1i} e_i$, дающую связь между зарядами и

потенциалами в системе проводников. Если же все e_i равны нулю, то (66,10) дает наведенный на первом проводнике внешним полем потенциал.

Сходное замечание относится также к формуле (66, 11).

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Глава XXI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ (СЛОИСТЫХ) СРЕДАХ

§ 67. Распространение волн от вертикального излучателя в атмосфере с изменяющимися по высоте диэлектрической постоянной и проводимостью

67.1. Займемся теперь более детальным изучением волновых полей, создаваемых заданным распределением переменных токов, причем основное внимание уделим вопросу о распространении волн в неограниченных средах с изменяющимися, вообще говоря, от точки к точке свойствами. Рассмотрение начнем с относительно простейшего случая распространения волн от вертикального излучателя в атмосфере, свойства которой изменяются с высотой, причем землю будем считать плоской.¹

Частным случаем этой общей задачи является известная задача Зоммерфельда о распространении в однородной атмосфере волн от вертикального диполя, находящегося на поверхности неидеально проводящей земли.

67.2. Прежде чем перейти к решению данной конкретной задачи, начнем с рассмотрения более общего вопроса о распространении электромагнитных волн от произвольной системы излучателей в средах, свойства которых каким-либо непрерывным образом зависят от координат x , y , z , но не от времени.

Ограничиваясь случаем изотропных сред и чисто синусоидальных во времени процессов, характеризуемых зависимостью от времени вида $e^{i\omega t}$, и считая, что, вообще говоря, $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ и $\sigma = \sigma(x, y, z)$, а $\mu = \text{const.}$, будем иметь следующие уравнения поля:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H}, \\ \text{div } \varepsilon \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (67, 1)$$

¹ Об учете сферической формы земли см. ниже, глава XXIII.

где $j^{(e)}$ обозначает плотность тех первичных („сторонних“) токов, которыми поле вызывается¹ и которые считаем заданными.

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через скалярный потенциал φ и вектор-потенциал \mathbf{A} всегда верными соотношениями (1, 8) и (1, 9), которые в данном случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad}\varphi - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (67, 2)$$

Вводя эти значения \mathbf{E} и \mathbf{H} в уравнения (67, 1), непосредственно убеждаемся в том, что, если подчинить φ и \mathbf{A} такому же условию, как в случае однородных сред, т. е.²

$$\varphi = \frac{i\omega}{ck^2} \text{div } \mathbf{A}, \quad k^2 = -\frac{i\omega\mu(i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma)}{c^2}, \quad (67, 3)$$

то уравнения (67, 1) удовлетворяются, если только \mathbf{A} удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} - (\text{div } \mathbf{A}) \cdot \text{grad} (\lg k^2) = -\frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)}. \quad (67, 4)$$

При ε и σ , не зависящих от координат, (67, 4) переходит в обычное уравнение для \mathbf{A} . При переменном k^2 решение уравнения (67, 4) осложняется как тем, что его коэффициенты уже непостоянны, так, особенно, еще и потому, что, вообще говоря, уравнения для отдельных компонент вектор-потенциала непосредственно не разделяются из-за наличия члена, содержащего $\text{div } \mathbf{A}$. Однако, в ряде важных частных случаев это последнее обстоятельство может не играть роли. В частности, это будет тогда, когда ε и σ зависят только от одной из декартовых координат. скажем, от z ,³ а токи $j^{(e)}$ параллельны оси z , ибо тогда сможем удовлетворить уравнению (67, 4), считая, что имеется единственная, отличная от нуля компонента $\mathbf{A}_z = A$ вектор-потенциала, определяемая уравнением:

$$\Delta A + k^2 A - \frac{\partial(k^2)}{\partial z} \cdot \frac{1}{k^2} \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)}. \quad (67, 5)$$

Если найдем отсюда A , то φ получится из (67, 3), именно, $\varphi = \frac{i\omega}{ck^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial z}$, после чего \mathbf{E} и \mathbf{H} непосредственно находятся по формулам (67, 2).

Но это и есть как раз тот случай, изучением которого мы собирались заняться, и мы видим, что решение поставленной в первом пункте данного параграфа задачи сводится к вопросу об интегрировании уравнения (67, 5) при $k^2 = f(z)$.

67. 3. Переходим к интегрированию уравнения (67, 5) для случая вертикального (т. е. параллельного оси z) излучателя. Предполагая, что

¹ См. § 1.

² См. (3, 12).

³ Такие среды будем в дальнейшем называть слоистыми.

поле обладает симметрией вращения вокруг оси z , перепишем (67, 5) в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + k^2 A = - \frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)}. \quad (67, 6)$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + k^2 A = 0 \quad (67, 7)$$

допускает частное решение вида

$$A = u(r) \cdot v(z), \quad (67, 8)$$

причем, как нетрудно видеть, для u получается уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \rho^2 u = 0, \text{ где } \rho = \text{const.}, \quad (67, 9)$$

так что

$$u = Z_0(\rho r), \quad (67, 10)$$

где Z_0 — любая из бесселевых функций нулевого порядка от аргумента ρr . Поступая поэтому в духе общей теории, развитой в § 15, умножим уравнение (67, 6) на r и на то из частных решений вида (67, 10), которое остается конечным при $r=0$ и обращается в нуль при $r=\infty$,¹ т. е. на $r J_0(\rho r) dr$, где ρ — вещественное положительное число, и проинтегрируем по r от нуля до бесконечности. Вводя обозначение

$$f^* = \int_0^\infty r J_0(\rho r) f(r) dr \quad (67, 11)$$

и называя f^* преобразованной функцией от $f(r)$, находим:

$$\int_0^\infty J_0(\rho r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) dr = J_0(\rho r) \cdot r \frac{\partial A}{\partial r} \Big|_0^\infty - \rho r J_0'(\rho r) \cdot A \Big|_0^\infty - \rho^2 A^*,$$

причем использовано уравнение (67, 9), которому удовлетворяет $J_0(\rho r)$.

Замечая, что если токи $j^{(e)}$ распределены с конечной плотностью внутри некоторого ограниченного объема, то первые два члена этой формулы обращаются в нуль,² получаем поэтому из (67, 6):

$$k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{k^2} \frac{dA^*}{dz} \right) + (k^2 - \rho^2) A^* = - \frac{4\pi\mu}{c} j^{(e)*}, \quad (67, 12)$$

¹ Значения $r=0$ и $r=\infty$ — это концы интервала изменения переменной r . Ср. выбор частного решения здесь и частного решения $Q(t) = e^{-\rho t}$ при рассмотрении нестационарных процессов в § 22.

² По крайней мере, при наличии в среде хотя бы крайне малой проводимости, хотя это и необязательно, ибо достаточно, чтобы A и $\frac{\partial A}{\partial r}$ убывали при $r \rightarrow \infty$, как $\frac{1}{r}$, или даже просто быстрее, чем $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

что можно записать и так:

$$\frac{d}{dz} \left(f \frac{dA^*}{dz} \right) - (1 + fp^2) A^* = - \frac{4\pi j^{(e)*}}{c} \cdot f, \quad f = - \frac{1}{k^2}. \quad (67, 13)$$

Это — обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, относящееся к хорошо изученному типу. Если его интеграл найден, то для определения постоянных интегрирования служит условие, что на бесконечности A^* должно стремиться к нулю (или, по крайней мере, оставаться ограниченным), а в случае слоистой структуры среды, т. е. когда некоторые плоскости $z = z_s$ являются поверхностями раздела двух различных сред — s -ой и $(s + 1)$ -ой — еще и следующие легко проверяемые граничные условия:¹

$$\left(\frac{A^*_s}{\mu_s} \right)_{z=z_s} = \left(\frac{A^*_{s+1}}{\mu_{s+1}} \right)_{z=z_s}, \quad \left(\frac{1}{k_s^2} \cdot \frac{dA^*_s}{dz} \right)_{z=z_s} = \left(\frac{1}{k_{s+1}^2} \cdot \frac{dA^*_{s+1}}{dz} \right)_{z=z_s}, \quad (67, 14)$$

где значки у A^* и у k^2 показывают, к какой среде относятся значения этих величин.

Если, в частности, s -ая среда — идеальный проводник, то $1/k_s^2 = 0$, и второе из условий (67, 14) обращается просто в такое:

$$\left(\frac{dA^*_{s+1}}{dz} \right)_{z=z_s} = 0. \quad (67, 15)$$

После того как A^* найдено, A немедленно получается по формуле

$$A = A(r, z) = \int_0^\infty \rho J_0(\rho r) A^* d\rho, \quad (67, 16)$$

являющейся очевидным следствием интеграла Фурье — Бесселя:²

$$f(r) = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^\infty \xi f(\xi) J_0(\rho r) J_0(\rho \xi) d\xi.$$

67.4. С целью иллюстрации изложенной общей методики применим ее, прежде всего, к двум классическим задачам, именно:

I. К нахождению поля вертикального излучателя, стоящего на идеально проводящей земле и окруженного однородной атмосферой.

II. К такой же задаче, но для случая конечной проводимости земли (задача Зоммерфельда).

I. Принимаем поверхность земли за плоскость $z = 0$. Так как в данном случае $k^2 = \text{const.}$, то (67, 12) дает, при $\mu = 1$ (для воздуха):

$$\frac{d^2 A^*}{dz^2} - (\rho^2 - k^2) A^* = - \frac{4\pi}{c} j^{(e)*}. \quad (67, 17)$$

¹ Подробнее об этом см. ниже в п. 68.3.

² См.: Р. Кузмин, Б. Ф., стр. 154, (46).

Полагая $\rho^2 - k^2 = q^2$, найдем общий интеграл уравнения (67, 17):

$$A^* = -\frac{4\pi}{cq} \int_0^z j^{(e)*} \operatorname{sh} q(z - \zeta) d\zeta + Me^{qz} + Ne^{-qz}. \quad (67, 18)$$

При наличии хотя бы крайне малой проводимости среды q — комплексное число. Считая, что $\operatorname{Re}(q) > 0$, получаем из требования, чтобы A^* обращалось в нуль на бесконечности, что¹

$$M = \frac{2\pi}{cq} \int_0^\infty j^{(e)*} e^{-q\zeta} d\zeta. \quad (67, 19)$$

Кроме того, (67, 15) показывает, что $N = M$. (67, 18) дает поэтому:

$$A^* = \frac{4\pi}{cq} \left\{ e^{-qz} \cdot \int_0^z j^{(e)*} \cdot \operatorname{ch} q\zeta d\zeta + \operatorname{ch} qz \cdot \int_z^\infty j^{(e)*} \cdot e^{-q\zeta} d\zeta \right\}. \quad (67, 20)$$

Эта формула вместе с (67, 11) и (67, 16) и дает общее решение поставленной задачи. Применяя (67, 20) к случаю вертикальной антенны, имеющей форму кругового цилиндра радиуса a и высоты l , с равномерно распределенным по сечению током I , получим [см. (67, 11)]:

$$j^{(e)*} = \int_0^a r J_0(\rho r) j^{(e)} dr = \begin{cases} \frac{I}{\pi a \rho} J_1(\rho a) & \text{при } 0 \leq z \leq l, \\ 0 & \text{при } z > l. \end{cases} \quad (67, 21)$$

Если, в частности, антенну можно уподобить линейному току, т. е. если положить $a = 0$, то

$$j^{(e)*} = \begin{cases} \frac{I}{2\pi} & \text{при } 0 \leq z \leq l, \\ 0 & \text{при } z > l. \end{cases} \quad (67, 22)$$

Подставляя это в (67, 20) и выписывая значение A^* лишь для $z > l$, найдем:

$$A^* = \frac{2I}{cq} e^{-qz} \cdot \int_0^l \operatorname{ch} q\zeta d\zeta = \frac{2I}{cq^2} \operatorname{sh} ql \cdot e^{-qz}, \quad (z > l). \quad (67, 23)$$

¹ Это следует из того, что, при $z \rightarrow \infty$, получается:

$$\begin{aligned} \int_0^z j^{(e)*} \operatorname{sh} q(z - \zeta) d\zeta &= \frac{1}{2} e^{qz} \int_0^z j^{(e)*} e^{-q\zeta} d\zeta - \frac{1}{2} e^{-qz} \int_0^z j^{(e)*} e^{q\zeta} d\zeta \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} e^{qz} \int_0^\infty j^{(e)*} e^{-q\zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

если только предположить, что интегралы $\int_0^\infty j^{(e)*} e^{\pm q\zeta} d\zeta$ сходятся. Это условие будет, в частности, всегда выполнено, если токи $j^{(e)}$ либо имеются только ниже некоторого уровня $z = L$ (т. е. если $j^{(e)} = 0$ при $z > L$), либо же если их плотность убывает достаточно быстро с возрастанием z .

Если еще считать, что $l \rightarrow 0$, а $l \rightarrow P$, то получаем предельный случай диполя на идеально проводящей плоскости, причем:

$$A^* = \frac{2P}{cq} e^{-qz} = \frac{2Pe^{-\sqrt{\rho^2 - k^2}z}}{c\sqrt{\rho^2 - k^2}}, \quad (z > 0). \quad (67, 24)$$

(67, 16) дает:

$$A = \frac{2P}{c} \int_0^\infty \frac{\rho e^{-\sqrt{\rho^2 - k^2}z} J_0(\rho r) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k^2}}. \quad (67, 25)$$

II. Случай Зоммерфельда трактуется совершенно аналогичным образом, только условие (67, 15) при $z=0$ заменится условиями (67, 14), и придется добавить решение для нижнего полупространства (первая среда, $z < 0$), имеющее вид

$$A_1^* = Ce^{q_1 z}, \quad q_1 = \sqrt{\rho^2 - k_1^2}, \quad \text{Re}(q_1) > 0,$$

где C — произвольная постоянная.

Находим при $a=0$, считая, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} A_1^* &= \frac{2Ik_1^2}{cq_2(k_2^2 q_1 + k_1^2 q_2)} (1 - e^{-q_2 l}) \cdot e^{q_1 z}, \quad (z < 0), \\ A_2^* &= \frac{2I}{cq_2(k_2^2 q_1 + k_1^2 q_2)} \left\{ k_2^2 \frac{q_1}{q_2} (\text{ch} q_2 l - 1) + k_1^2 \text{sh} q_2 l \right\} e^{-q_2 z}, \quad (z > l), \end{aligned} \right\} \quad (67, 26)$$

что при $l \rightarrow 0$, $l \rightarrow P$ обращается в

$$\left. \begin{aligned} A_1^* &= \frac{2Pk_1^2 e^{q_1 z}}{c(k_2^2 q_1 + k_1^2 q_2)}, \quad (z < 0), \\ A_2^* &= \frac{2Pk_1^2 e^{-q_2 z}}{c(k_2^2 q_1 + k_1^2 q_2)}, \quad (z > 0). \end{aligned} \right\} \quad (67, 27)$$

Отсюда и из (67, 16) следует, что

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2Pk_1^2}{c} \int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{\rho^2 - k_1^2}z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{k_2^2 \sqrt{\rho^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\rho^2 - k_2^2}} \quad \text{при } z < 0, \\ A &= \frac{2Pk_1^2}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k_2^2}z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{k_2^2 \sqrt{\rho^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\rho^2 - k_2^2}} \quad \text{при } z > 0. \end{aligned} \right\} \quad (67, 28)$$

Это и соответствует решению Зоммерфельда в наших обозначениях.

При $k_1 = k_2 = k$, т. е. если все пространство заполнено однородной средой, получаем отсюда:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k^2}z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} \quad \text{при } z > 0, \\ A &= \frac{P}{c} \int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{\rho^2 - k^2}z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} \quad \text{при } z < 0. \end{aligned} \right\} \quad (67, 29)$$

Но, как известно, для элементарного диполя с моментом P , находящегося в однородной среде, должно быть:

$$A = \frac{P}{c} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (67, 30)$$

так что сравнение с (67, 29) показывает, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k^2} z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} = \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \text{Im}(k) < 0. \quad (67, 31)$$

Это соотношение, найденное здесь с помощью физических соображений, может быть вполне строго выведено и чисто математическим путем.¹

При $|k_1| = \infty$, $k_2 = k$, т. е. в случае идеально проводящего нижнего полупространства, (67, 28) дает, если принять во внимание (67, 31):

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2P}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k^2} z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} = \\ &= \frac{2P}{c} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \text{при } z > 0, \\ A &= 0 \quad \text{при } z < 0, \end{aligned} \right\} \quad (67, 32)$$

т. е. в идеальном проводнике поле обращается в нуль, а над ним оно таково, как будто бы никакого идеального проводника при $z < 0$ нет,

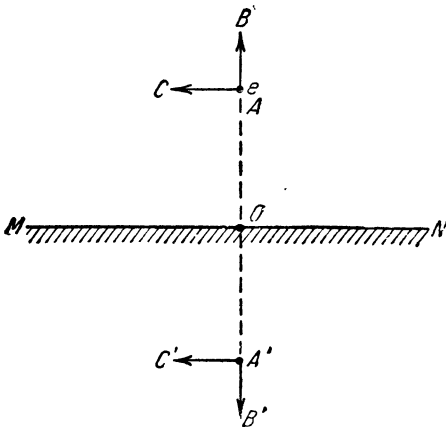


Рис. 129.

т. е. как будто все пространство заполнено однородной средой k , но момент излучающего диполя удвоился, не меняя своего направления.² Это частный случай так называемого закона отражения токов (переменных) в идеально проводящей плоскости.

Правило отражения зарядов и переменных токов в идеально проводящей плоскости легко получается с помощью соображений, аналогичных тем, которые приводят к правилу отражения в электростатическом случае (см. п. 31. 2). Действительно, так как не только статическое электрическое поле, создаваемое какими-либо покоящимися над идеальным проводником зарядами, но и любое переменное электромагнитное поле, создаваемое как угодно движущимися зарядами, не проникает внутрь идеального проводника, то это показывает, что выделяющийся на поверхности такого проводника

¹ См. Р. Кузьмин, Б. Ф., стр. 151, (32).

² Первая из формул (67, 32), естественно, совпадает, с ранее найденной формулой (67, 25).

под действием первичного поля слой поверхностных зарядов полностью связывает все силовые линии первичного электромагнитного поля, т. е. полностью нейтрализует его влияние. Иными словами, если первичное поле создается некоторым зарядом e , находящимся в какой-либо точке A на расстоянии $OA = h$ (рис. 129) от поверхности проводника, то этот слой создает в нижнем полупространстве (т. е. внутри проводника) такое электрическое поле, которое как бы исходит от заряда $-e$, совпадающего с e и перемещающегося вместе с ним.

Так как электрическое поле, создаваемое плоским слоем поверхностных зарядов, очевидно, симметрично в отношении верхнего и нижнего полупространств, то эти же заряды создают в верхнем полупространстве такое поле, как будто оно исходит от заряда $-e$ в отраженной точке A' ($OA' = h$). Закон отражения зарядов остается, стало быть, и в случае переменных электрических полей таким же, как для статических. Но так как теперь отраженный заряд непрерывно перемещается, следя за перемещением первичного заряда e , то мы сейчас же приходим и к правилу отражения токов в плоскости.

Действительно, пусть заряд e , который для определенности, будем считать положительным, перемещается перпендикулярно к поверхности проводника из A в B (см. рис. 129). Тогда отраженный заряд $-e$, одновременно с этим, перемещается из A' в B' , т. е. с той же скоростью, как и e , но в обратном направлении. Так как, однако, знак отраженного заряда обратен первичному, то создаваемый его движением ток имеет то же направление, как первичный. Если же, вместо этого, рассмотрим перемещение заряда e , параллельное плоскости, — в точку C , то увидим, что перемещение отраженного заряда будет ему параллельно и направлено в ту же сторону, — по $A'C$; создаваемый же им ток будет иметь направление, обратное первичному.

Так как в общем случае движение первичного заряда будет происходить под углом к плоскости, так что будут и перпендикулярная, и параллельная к поверхности компоненты перемещения, то только что найденные результаты приводят к правилу: в идеальной проводящей плоскости переменные токи как бы отражаются, причем перпендикулярные к поверхности составляющие токов при отражении не меняют своего направления, тогда как параллельные ей меняют его на обратное.

Мы не будем здесь заниматься исследованием общего решения (67, 28), которому посвящена обширная литература, и отсылаем по этому поводу к книге Франка и Мизеса: „Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики“, глава XXIII, §§ 1 и 2,¹ и к статье П. А. Рязина в трудах Физического института и П. Н. Лебедева, т. III, вып. 2, 1946 г., стр. 47, где приводится также перечень основной литературы по рассматриваемому вопросу.

67.5. В случае сред с переменным k^2 решение задачи приводится к квадратурам, если известно решение однородного уравнения (67, 13), т. е.

$$\frac{d}{dz} \left(f \frac{du}{dz} \right) - (1 + fp^2) u = 0. \quad (67, 33)$$

Укажем для некоторых частных типов изменения $\varepsilon(z)$ и $\sigma(z)$ соответствующие решения уравнения (67, 33).

а) Пусть $f = \alpha + \beta z$ (α и β — постоянные). Вводя новую переменную $= ip(\alpha + \beta z)/\beta$, найдем:

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} + \left(\xi + \frac{i}{p\beta} \right) u = 0. \quad (67, 34)$$

¹ Глава под редакцией и с исправлениями В. А. Фока.

Это уравнение интегрируется с помощью преобразования Лапласа¹ и подробно изучено Шарпом (Sharpe).²

б) $f = \alpha(z - h)^2$, $\alpha = \text{const.}$, $h = \text{const.}$, $z - h = \xi$.

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{du}{d\xi} - \left(\rho^2 + \frac{1}{\alpha \xi^2} \right) u = 0, \quad (67, 35)$$

откуда $u = Z \sqrt{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4}} (i\rho\xi / \sqrt{\rho\xi})$, где $Z \sqrt{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4}}$ обозначает бесселеву функцию порядка $n = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4}}$.

в) $f = \alpha + \beta e^{-mz}$, где α , β и m — постоянные.

Полагая $\sqrt{\frac{\rho^2}{m^2} + \frac{1}{4}} = \delta$, $n = \sqrt{\frac{\rho^2}{m^2} + \frac{1}{m^2 \alpha}}$, $\frac{\beta}{\alpha} e^{-mz} = -\xi$, $u = \xi^n v$, преобразуем (67, 33) к виду:

$$\xi(1 - \xi) \frac{d^2 v}{d\xi^2} + [2n + 1 - 2(n + 1)\xi] \frac{dv}{d\xi} - \left[n + \delta + \frac{1}{2} \right] \cdot \left[n - \delta + \frac{1}{2} \right] v = 0. \quad (67, 36)$$

Это — гипергеометрическое уравнение, которому удовлетворяет функция $F(a, b, c, \xi)$, причем $a = n + \delta + \frac{1}{2}$, $b = n - \delta + \frac{1}{2}$, $c = 2n + 1 = a + b$.

67.6. Ограничиваемся приведенными примерами, число которых можно было бы умножить. Заметим еще только, что, найдя по изложенному выше способу поле произвольно расположенного вертикального диполя, можем, путем наложения, получить и поле от любой системы вертикальных излучателей. Далее, если в выведенных выше формулах заменить $i\omega$ через p и рассматривать p как оператор производной, то, пользуясь изложенными в главе XI методами операционного исчисления, сможем изучить также протекание во времени нестационарных процессов, соответствующих произвольному начальному состоянию.

§ 68. Поле от произвольной системы излучателей

68.1. Остановимся теперь на нахождении поля от произвольной системы излучателей, как угодно расположенных в слоистой среде только что рассматривавшегося типа, причем будем опять считать, что границами отдельных сред с непрерывно меняющимися по вертикали свойствами являются плоскости $z = z_s$, у которых эти свойства меняются скачком. Предположим также для простоты, что $\mu = 1$.

В каждой из рассматриваемых сред со своим законом изменения $k^2 = k^2(z)$ попрежнему имеет место уравнение (67, 4)

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} - (\text{div } \mathbf{A}) \cdot \text{grad} (\lg k^2) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{(e)}$$

¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, стр. 540.

² Watson, Theory of Bessel Functions, p. 105.

для вектор-потенциала. Так как, согласно допущению $k^2 = k^2(z)$, то для трех компонент A_x , A_y , A_z вектор-потенциала в декартовых координатах получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_x + k^2 A_x &= -\frac{4\pi}{c} j_x^{(e)}, \\ \Delta A_y + k^2 A_y &= -\frac{4\pi}{c} j_y^{(e)}, \end{aligned} \right\} \quad (68, 1)$$

$$\Delta A_z + k^2 A_z - \frac{1}{k^2} \frac{d}{dz} (k^2) \cdot (\operatorname{div} \mathbf{A}) = -\frac{4\pi}{c} j_z^{(e)}, \quad (68, 2)$$

последнее из которых можно переписать и так:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + k^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z^{(e)} + \frac{1}{k^2} \frac{d(k^2)}{dz} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right). \quad (68, 3)$$

К уравнениям (68.1) и (68.3) нужно добавить условия на бесконечности, где вектор \mathbf{A} должен обращаться в нуль, если вся система первичных токов $\mathbf{j}^{(e)}$ лежит внутри некоторой конечной области или если их интенсивность достаточно быстро убывает, по мере удаления на бесконечность.

Далее, нужно еще добавить граничные условия на поверхностях раздела различных сред.

Если поверхностей разрыва, на которых свойства среды изменяются скачкообразно, нет, т. е., если все пространство заполнено изотропной средой с непрерывно изменяющимися по вертикали свойствами, то, интегрируя сперва уравнения (68, 1) при условии, что A_x и A_y обращаются в нуль на бесконечности, определим их значения в любой точке пространства. Подставляя найденные таким образом величины их в правую часть уравнения (68, 3), получим для определения A_z уравнение с уже известной правой частью, не заключающее других неизвестных функций, кроме A_z . Интегрируя его, при условии, что A_z должно обращаться в нуль на бесконечности, найдем последнюю — третью — компоненту вектор-потенциала, а тем самым и полное решение поставленной задачи.

68.2. Самое решение уравнений (68,1) и (68,3) будем производить так: умножим их на $e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$, где α и β — любые вещественные числа, и проинтегрируем по x и по y от нуля до бесконечности. Вводя обозначения

$$\chi = j_z^{(e)} - \frac{c}{4\pi k^2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \cdot \frac{d(k^2)}{dz} \quad (68, 4)$$

и

$$F\alpha\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} F dx dy, \quad (68, 5)$$

где $F = F(x, y)$ — какая-либо функция от x и y , могущая быть представленной в виде четырехкратного интеграла Фурье по переменным x и y , и замечая, что¹

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta y} \left\{ \frac{\partial A_m}{\partial x} e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\alpha A_m e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} A_m dx \right\} dy = -\alpha^2 A_m^{\alpha\beta}, \quad (m = x, y, z), \quad (68, 6)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} dx dy = -\beta^2 A_m^{\alpha\beta}, \quad (m = x, y, z), \quad (68, 7)$$

получим, при этом:

$$\frac{d^2 A_m^{\alpha\beta}}{dz^2} + (k^2 - \alpha^2 - \beta^2) A_m^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j_m^{(e)\alpha\beta}, \quad (m = x, y), \quad (68, 8)$$

$$k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{k^2} \frac{dA_z^{\alpha\beta}}{dz} \right) + (k^2 - \alpha^2 - \beta^2) A_z^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} \chi^{\alpha\beta}. \quad (68, 9)$$

Здесь, согласно (68, 4) и (68, 5),

$$\chi^{\alpha\beta} = j_z^{(e)\alpha\beta} + \frac{ci}{4\pi k^2} (\alpha A_x^{\alpha\beta} + \beta A_y^{\alpha\beta}) \frac{d(k^2)}{dz}. \quad (68, 10)$$

Решение задачи зависит, стало быть, от решения этих уравнений, из которых второе в точности совпадает по типу с уравнением (67, 12). Проинтегрировав их и определив постоянные интегрирования из условий на бесконечности, найдем все три функции $A_m^{\alpha\beta}$, $m = x, y, z$, а из них и сами A_m по формуле

$$A_m = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m^{\alpha\beta} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (68, 11)$$

являющейся непосредственным следствием интеграла Фурье для функции двух переменных. Таким образом, получим полное решение задачи в том случае, когда отсутствуют поверхности (плоскости) разрыва, на которых свойства среды меняются скачком.

68.3. Предположим теперь, что плоскость $z = z_s$ — это поверхность раздела двух различных сред, так что k имеет разные значения по обе стороны ее. Тогда, чтобы найти граничные условия, которым должны удовлетворять компоненты вектор-потенциала у этой поверх-

¹ При наличии в среде хотя бы крайне малого поглощения компоненты A_j , ($j = x, y, z$), будут убывать на бесконечности настолько быстро, что все интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |A_j| dx dy$ конечны, и величины $A_j^{\alpha\beta}$ действительно существуют. По той же причине в формуле (68, 6) обращаются в нуль выделившиеся при интегрировании по частям предельные члены при $x = \pm \infty$.

ности, проще всего заменить сначала поверхность разрыва некоторым переходным слоем, в котором свойства среды менялись бы, хотя и очень быстро, но непрерывно, а затем перейти к предельному случаю, когда толщина переходного слоя стремится к нулю.

Обозначим толщину слоя через h и будем предполагать, что поверхностных и линейных первичных токов нет, т. е. что все компоненты вектора $\mathbf{j}^{(e)}$ — ограниченные функции координат. Умножая уравнения (68, 1) на dz и интегрируя их по толщине слоя, который будем считать простирающимся от $(z_s - h/2)$ до $(z_s + h/2)$, получим:

$$\int_{z_s - h/2}^{z_s + h/2} \left(\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} \right) dz + \left[\left(\frac{\partial A_m}{\partial z} \right)_{z_s + h/2} - \left(\frac{\partial A_m}{\partial z} \right)_{z_s - h/2} \right] +$$

$$+ \int_{z_s - h/2}^{z_s + h/2} k^2 A_m dz = - \frac{4\pi}{c} \int_{z_s - h/2}^{z_s + h/2} j_m^{(e)} dz, \quad (m = x, y). \quad (68, 12)$$

Так как все подинтегральные функции здесь остаются, по самому своему физическому смыслу, ограниченными, вне зависимости от толщины h слоя,¹ то все входящие в (68,12) интегралы будут величинами порядка h и исчезают при $h \rightarrow 0$. В пределе получаем поэтому:

$$\left(\frac{\partial A_m}{\partial z} \right)_{z_s + 0} = \left(\frac{\partial A_m}{\partial z} \right)_{z_s - 0}, \quad (m = x, y). \quad (68, 13)$$

Аналогично найдем двукратным интегрированием уравнений (68, 1) по z :

$$\int_{z_s - h/2}^{z_s + h/2} dz \int_{z_s - h/2}^{z_s + h/2} \left[\left(\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} \right) + k^2 A_m + \frac{4\pi}{c} j_m^{(e)} \right] dz +$$

$$+ \left[(A_m)_{z_s + h/2} - (A_m)_{z_s - h/2} \right] - \left(\frac{\partial A_m}{\partial z} \right)_{z_s - h/2} \cdot h = 0, \quad (68, 14)$$

что дает при $h \rightarrow 0$:

$$(A_m)_{z_s + 0} = (A_m)_{z_s - 0}, \quad (m = x, y). \quad (68, 15)$$

Для того, чтобы получить соответствующие условия для A_z , перепишем сперва уравнение (68, 3) так:

$$\left\{ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + A_z + \frac{4\pi}{ck^2} j_z^{(e)} - \frac{1}{k^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \operatorname{div} \mathbf{A} \right) = 0. \quad (68, 16)$$

¹ В том числе и $\left(\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} \right)$, ибо сюда входят лишь производные в плоскости слоя, а не перпендикулярно к нему.

Принимая во внимание (68, 13) и замечая, что $|k^2| \neq 0$, видим, что стоящее в фигурных скобках выражение остается ограниченным при $h \rightarrow 0$.

Поэтому, интегрируя уравнение (68, 16) от $z_s - h/2$ до некоторого z , получим, обозначая через ψ выражение в фигурных скобках:

$$\int_{z_s - h/2}^z \psi dz + \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{k^2} - \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{k^2} \right)_{z_s - h/2} = 0. \quad (68, 17)$$

Полагая здесь $z = z_s + \frac{h}{2}$ и, далее, $h = 0$, получим:

$$\left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{k^2} \right)_{z_s + 0} = \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{k^2} \right)_{z_s - 0}, \quad (68, 18)$$

что, в силу уравнения (67, 3), может быть записано и так:

$$(\varphi)_{z_s + 0} = (\varphi)_{z_s - 0}. \quad (68, 19)$$

Умножая же (68, 17) на k^2 , интегрируя еще раз по z в пределах от $(z_s - h/2)$ до $(z_s + h/2)$ и полагая в полученном соотношении $h = 0$, найдем:

$$(A_z)_{z_s + 0} = (A_z)_{z_s - 0} \quad (68, 20)$$

(68, 13), (68, 15) и (68, 20) показывают, что как самый вектор \mathbf{A} , так и его касательная к поверхности раздела составляющая непрерывны при проходе через эту поверхность. Кроме того, (68, 19) показывает, что непрерывен при проходе через поверхность раздела и скалярный потенциал $\varphi = \frac{1}{k^2} \operatorname{div} \mathbf{A}$.

Уравнения (68, 13), (68, 15), (68, 18), (68, 19) и (68, 20) образуют вместе с условиями на бесконечности полную систему граничных условий для уравнений (68, 1) и (68, 3) для любой слоистой среды. Пользуясь ими и формулами (67, 2), сможем легко убедиться в том, что, при выполнении их, действительно выполнены и граничные условия для тангенциальных компонент поля у поверхности раздела, т. е. что

$$(E_m)_{z_s + 0} = (E_m)_{z_s - 0}, \quad (H_m)_{z_s + 0} = (H_m)_{z_s - 0},$$

где $m = x, y$.

Переводя граничные условия для компонент вектора \mathbf{A} в условия для преобразованных компонент $A_m^{\alpha\beta}$, для чего нужно только помножить каждое из уравнений (68, 13), (68, 15), (68, 18) и (68, 20) на $e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$ и проинтегрировать по x и y в пределах $(-\infty, +\infty)$, получим:

$$(A_m^{\alpha\beta})_{z_s + 0} = (A_m^{\alpha\beta})_{z_s - 0}, \quad (m = x, y, z), \quad (68, 21)$$

$$\left(\frac{dA_m^{\alpha\beta}}{dz} \right)_{z_s + 0} = \left(\frac{dA_m^{\alpha\beta}}{dz} \right)_{z_s - 0}, \quad (m = x, y) \quad (68, 22)$$

$$\left\{ \frac{1}{k^2} \left[-i(\alpha A_x^{\alpha\beta} + \beta A_y^{\alpha\beta}) + \frac{dA_z^{\alpha\beta}}{dz} \right] \right\}_{z_s+0} = \left\{ \frac{1}{k^2} \left[-i(\sigma A_x^{\alpha\beta} + \beta A_y^{\alpha\beta}) + \frac{dA_z^{\alpha\beta}}{dz} \right] \right\}_{z_s-0}. \tag{68, 23}$$

Находя теперь решения уравнений (68, 8) и (68, 9), удовлетворяющие граничным условиям (68,21), (68, 22) и (68, 23), получим полное решение задачи о поле, создаваемом в рассматриваемой слоистой среде любым распределением токов.

68.4. Для того, чтобы иллюстрировать изложенную общую методику, найдем с ее помощью поле горизонтальной антенны, помещенной над плоской поверхностью раздела двух различных однородных сред.

Направление антенны примем за направление оси x . Сечение ее будем, для простоты, считать квадратным со стороной квадрата, равной 2δ , токи в ней — равномерно распределенными по сечению с плотностью $j_x^{(e)} = j = \frac{I}{4\delta^2}$, где I — полный ток, циркулирующий в антенне, причем начало координат расположим на поверхности земли, а среднюю точку антенны поместим в точку $(0, 0, h)$ на высоте $h > \delta$ над поверхностью земли. Длину антенны положим равной $2l$.

В соответствии с развитой выше общей методикой, начинаем с интегрирования уравнений (68, 8).

Так как в данном случае $j_y^{(e)} = 0$, то и $j_y^{(e)\alpha\beta} = 0$, а так как k^2 в обеих средах имеет постоянные значения, то для $A_y^{\alpha\beta}$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_y^{\alpha\beta} &= M_1 e^{q_1 z} + N_1 e^{-q_1 z}, \quad q_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_1^2, \quad (z < 0), \\ A_y^{\alpha\beta} &= M_2 e^{q_2 z} + N_2 e^{-q_2 z}, \quad q_2^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_2^2, \quad (z > 0), \end{aligned} \right\} \tag{68, 24}$$

где M_i и N_i , ($i = 1, 2$) — постоянные.

Так как $A_y^{\alpha\beta}$ при $z = \pm \infty$ должно обращаться в нуль, то уравнения (68, 24) вместе с граничными условиями (68, 21) и (68, 22) показывают, что $A_y^{\alpha\beta} = 0$. Следовательно, и $A_y = 0$, что непосредственно вытекает из (68, 11).

Переходим далее к нахождению A_x . Имеем:

$$j_x^{(e)\alpha\beta} = \begin{cases} j \int_{-l}^l e^{i\alpha x} dx \int_{-\delta}^{+\delta} e^{i\beta y} dy = \frac{4j}{\alpha\beta} \sin \alpha l \cdot \sin \beta \delta \\ \text{при } h - \delta \leq z < h + \delta; \end{cases} \tag{68, 25}$$

0.....при всех остальных z .

Пусть $Re(q_1) > 0$ и $Re(q_2) > 0$. Интеграл уравнения (68, 8) для $A_x^{\alpha\beta}$ в верхней среде, удовлетворяющий условию $(A_x^{\alpha\beta})_{z=+\infty} = 0$, найдется из формул (67, 18), (67, 19), в которых только нужно заменить q через $q_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_2^2}$, а $j^{(e)*}$ — через $j_x^{(e)\alpha\beta}$.

Получается:

$$A_x^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{cq_2} \int_0^z j_x^{(e)\alpha\beta} \operatorname{sh} q_2(z - \zeta) d\zeta + Me^{q_2 z} + Ne^{-q_2 z}, \quad (z > 0) \quad (68, 26)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\pi}{cq_2} \int_0^\infty j_x^{(e)\alpha\beta} e^{-q_2 \zeta} d\zeta = \frac{8\pi j \sin \alpha l \sin \beta \delta}{cq_2 \alpha^2} \int_{h-\delta}^{h+\delta} e^{-q_2 \zeta} d\zeta = \\ &= \frac{16\pi j \sin \alpha l}{cq_2^2 \alpha^2} \operatorname{sh} \delta q_2 \sin \beta \delta \cdot e^{-hq_2}. \end{aligned} \quad (68, 27)$$

При $z < 0$ будет:

$$A_x^{\alpha\beta} = M_1 e^{q_1 z}, \quad (68, 28)$$

ибо член вида $N_1 e^{-q_1 z}$ следует отбросить в силу условия $(A_x^{\alpha\beta})_{z=-\infty} = 0$.

Применяем теперь граничные условия (68, 21) и (68, 22). Получается:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{2q_2}{q_1 + q_2} M, \\ N &= \frac{q_2 - q_1}{q_1 + q_2} M. \end{aligned} \right\} \quad (68, 29)$$

Подставляя эти значения постоянных в (68, 26) и (68, 28), найдем:

$$\left. \begin{aligned} A_x^{\alpha\beta} &= \frac{32\pi \sin \alpha l \cdot j \operatorname{sh} \delta q_2 \cdot \sin \beta \delta}{c\alpha\beta q_2^2 (q_1 + q_2)} [q_2 \operatorname{ch} q_2 z + q_1 \operatorname{sh} q_2 z] e^{-hq_2}, \\ &\quad \text{при } 0 \leq z < h - \delta; \\ A_x^{\alpha\beta} &= \frac{32\pi \sin \alpha l \cdot j \operatorname{sh} \delta q_2 \cdot \sin \beta \delta}{c\alpha\beta q_2^2 (q_1 + q_2)} [q_2 \operatorname{ch} (q_2 h) + q_1 \operatorname{sh} (q_2 h)] e^{-q_2 z} \\ &\quad \text{при } h + \delta < z \leq \infty, \end{aligned} \right\} \quad (68, 30)$$

тогда как при $z \leq 0$ будет:

$$A_x^{\alpha\beta} = \frac{32\pi \sin \alpha l \cdot j \operatorname{sh} \delta q_2 \cdot \sin \beta \delta}{c\alpha\beta q_2 (q_1 + q_2)} e^{-hq_2} e^{q_1 z}. \quad (68, 31)$$

Отсюда можно, пользуясь формулой (68, 11), найти A_x . Мы выпишем здесь окончательные формулы лишь для линейной антенны, когда $\delta \rightarrow 0$ и $(4\delta^2 j)_{\delta \rightarrow 0} = I$. Получается:

$$\left. \begin{aligned} A_x^{\alpha\beta} &= \frac{8\pi I \sin \alpha l}{ca (q_1 + q_2)} e^{-hq_2} e^{q_1 z}, \quad (z \leq 0), \\ A_x^{\alpha\beta} &= \frac{8\pi I \sin \alpha l}{ca q_2 (q_1 + q_2)} [q_2 \operatorname{ch} q_2 z + q_1 \operatorname{sh} q_2 z] e^{-hq_2}, \quad (0 \leq z < h), \\ A_x^{\alpha\beta} &= \frac{8\pi I \sin \alpha l}{ca q_2 (q_1 + q_2)} [q_2 \operatorname{ch} q_2 h + q_1 \operatorname{sh} q_2 h] e^{-q_2 z}, \quad (z > h). \end{aligned} \right\} \quad (68, 32)$$

Если, кроме того, допустить, что длина антенны стремится к нулю, т. е. что она превращается в элементарный диполь с моментом P , причем нужно только считать, что ток I в ней растет так, что произ-

ведение $(2U)_{z \rightarrow 0} = P = \text{const.}$, то формулы (68, 32) и (68, 33) принимают такой вид:

$$A_x^{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{4\pi P}{c(q_1 + q_2)} e^{-hq_2 + q_1 z}, & (z \leq 0), \\ \frac{4\pi P}{cq_2(q_1 + q_2)} [q_2 \operatorname{ch} q_2 z + q_1 \operatorname{sh} q_2 z] e^{-hq_2}, & (0 \leq z < h), \\ \frac{4\pi P}{cq_2(q_1 + q_2)} [q_2 \operatorname{ch} q_2 h + q_1 \operatorname{sh} q_2 h] e^{-q_2 z}, & (z > h). \end{cases} \quad (68, 33)$$

Если, наконец, считать, как это делают Гершельман и Зоммерфельд, что излучающий диполь расположен непосредственно над поверхностью земли, то надо еще в первой и третьей формулах (68, 33) положить $h \rightarrow 0$. Это дает:

$$A_x^{\alpha\beta} = \frac{4\pi P}{c(q_1 + q_2)} e^{q_1 z} \quad \text{при } z \leq 0, \quad (68, 34)$$

$$A_x^{\alpha\beta} = \frac{4\pi P}{c(q_1 + q_2)} e^{-q_2 z}, \quad (z > 0).$$

Подставляем в (68, 11):

$$A_x = \frac{P}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(q_2 z + i\alpha x + i\beta y)}}{q_1 + q_2} d\alpha d\beta, \quad (z > 0), \quad (68, 35)$$

$$A_x = \frac{P}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(q_1 z - i\alpha x - i\beta y)}}{q_1 + q_2} d\alpha d\beta, \quad (z \leq 0). \quad (68, 36)$$

68.5. Чтобы привести эти выражения к виду, данному Гершельманом и Зоммерфельдом, достаточно произвести в них под знаком интеграла некоторую замену переменных. Именно, рассматривая α и β как прямоугольные координаты на плоскости, причем интегрирование в (68, 35), (68, 36) распространяется на всю эту плоскость, заменим их полярными — ρ , ψ —, по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \rho \cos \psi, \\ \beta &= \rho \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (68, 37)$$

Заменяя в то же время x и y полярными координатами r , θ , так что

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (68, 38)$$

и замечая, что элемент площади в полярных координатах ρ , ψ имеет вид $\rho d\rho d\psi$, причем интегрированию по всей плоскости соответствуют

пределы ($0 \leq \rho \leq \infty$) и ($0 \leq \psi \leq 2\pi$), получим, учитывая, что $q_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_1^2} = \sqrt{\rho^2 - k_1^2}$ и $q_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_2^2} = \sqrt{\rho^2 - k_2^2}$:

$$A_x = \frac{P^0}{\pi c} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k_2^2} z} \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k_1^2} + \sqrt{\rho^2 - k_2^2}} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\psi - \theta)} d\psi =$$

$$= \frac{2P}{c} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k_2^2} z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k_1^2} + \sqrt{\rho^2 - k_2^2}} \text{ при } z \geq 0, \quad (68, 39)$$

и

$$A_x = \frac{2P}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\rho^2 - k_1^2} z} J_0(r\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - k_1^2} + \sqrt{\rho^2 - k_2^2}} \text{ при } z \leq 0, \quad (68, 40)$$

причем использована формула¹

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\psi - \theta)} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos t} dt = J_0(r\rho)$$

для бesselевой функции нулевого порядка.

Формулы (68, 39), (68, 40) и дают окончательную форму решения. 68.6. Остается еще найти A_z .

Проводя вычисления сразу для случая диполя с моментом $P,^2$ находим сперва из (68, 10) и (68, 34), учитывая, что $f_z^{(e)\alpha^3} = 0$ и $\frac{d(k^2)}{dz} = 0$:

$$\chi^{\alpha^3} = 0. \quad (63, 41)$$

Подставляем это значение χ^{α^3} в (68, 9). Получается:

$$\frac{d^2 A_z^{\alpha^3}}{dz^2} - q_1^2 A_z^{\alpha^3} = 0 \text{ при } z < 0, \quad (68, 42)$$

$$\frac{d^2 A_z^{\alpha^3}}{dz^2} - q_2^2 A_z^{\alpha^3} = 0 \text{ при } z > 0. \quad (68, 43)$$

Интегралы этих уравнений, обращающиеся в нуль при $z = \mp \infty$, соответственно, суть

$$A_z^{\alpha^3} = ae^{q_1 z} \text{ при } z < 0, \quad (68, 44)$$

$$A_z^{\alpha^3} = be^{-q_2 z} \text{ при } z > 0, \quad (68, 45)$$

где a и b — постоянные.

Подчиняя эти решения граничным условиям (68, 21) и (68, 23), из которых второе теперь принимает такой вид:

$$\frac{1}{k_2^2} \left(\frac{dA_z^{\alpha^3}}{dz} \right)_{(+0)} - \frac{1}{k_1^2} \left(\frac{dA_z^{\alpha^3}}{dz} \right)_{(-0)} = \frac{4\pi P a i}{c(q_1 + q_2)} \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right), \quad (68, 46)$$

¹ Ср. (Д₂ 206).

² Общий случай антенны длины $2l$ и конечной толщины трактуется совершенно аналогичным образом.

находим:

$$a = b = \frac{4\pi (k_2^2 - k_1^2) P i a}{c (q_1 + q_2) (q_1 k_2^2 + q_2 k_1^2)}. \quad (68, 47)$$

Подставляя это в (68, 11) и применяя те же преобразования, как в интегралах (68, 35) и (68, 36), получим окончательно:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{(k_2^2 - k_1^2) P i}{c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{q_1 z - i(ax + \beta y)} da dd \beta}{(q_1 + q_2) (q_1 k_2^2 + q_2 k_1^2)} = \\ &= \frac{(k_2^2 - k_1^2) P i}{c\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\rho^2 - k_1^2} z}}{N(\rho) N_1(\rho)} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i r \rho \cos(\psi - \theta)} \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{2(k_1^2 - k_2^2) P}{c} \cos \theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\rho^2 - k_1^2} z}}{N(\rho) N_1(\rho)} J_1(\rho r) \rho^2 d\rho, \text{ при } z \leq 0, \end{aligned} \quad (68, 48)$$

и

$$A_z = \frac{2(k_1^2 - k_2^2) P}{c} \cos \theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\rho^2 - k_2^2} z}}{N(\rho) N_1(\rho)} J_1(\rho r) \rho^2 d\rho, \text{ при } z \geq 0, \quad (68, 49)$$

причем введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} N(\rho) &= \sqrt{\rho^2 - k_1^2} + \sqrt{\rho^2 - k_2^2} \\ N_1(\rho) &= k_2^2 \sqrt{\rho^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\rho^2 - k_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (68, 50)$$

и использовано соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\psi - \theta)} \cos \psi d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{2\pi - \theta} e^{-ix \cos t} \cos(t + \theta) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cos \theta \int_{-\theta}^{2\pi - \theta} e^{-ix \cos t} \cos t dt - \frac{1}{2\pi} \sin \theta \int_{-\theta}^{2\pi - \theta} e^{-ix \cos t} \sin t dt = \\ &= i \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos t} dt \right] \cos \theta = i J_0'(x) \cos \theta = -i J_1(x) \cos \theta. \end{aligned}$$

Формулами (68, 39), (68, 40) и (68, 48), (68, 49) поставленная задача принципиально решается. Мы провели здесь все вычисления столь подробно потому, что в данном здесь виде они могут быть полностью перенесены, без каких-либо принципиальных изменений, на случай любых слоистых сред с переменными по высоте свойствами, когда другие приемы не ведут к цели. К тому же мы, по существу, проводили здесь все интегрирование для пространственного распределения первичных токов и только в пределе перешли к случаю излучающего бесконечно-короткого диполя.

Дискуссией полученного решения заниматься здесь не будем, отсылая за всеми подробностями и ссылками к указанной в п. 67.4 литературе. Заметим лишь, что при $z=0$, т. е. на самой поверх-

ности раздела сред, выражения (68, 39) и (68, 40) для горизонтальной составляющей A_x вектора-потенциала могут быть выражены через элементарные функции, именно:¹

$$(A_x)_{z=0} = \frac{2P}{c(k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ik_1 r}}{r} - \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \right). \quad (68, 51)$$

Так как нормальная к поверхности составляющая магнитного поля равна, при $z=0$,

$$(H_z)_{z=0} = - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial y} (A_x)_{z=0}, \quad (68, 52)$$

то и она выражается через элементарные функции.

§ 69. Поле кругового витка (катушки, рамки) с вертикальной осью, расположенного над земной поверхностью, принимаемой за плоскость (вертикальная магнитная антенна)

Остановимся еще на представляющем известный теоретический интерес случае горизонтальной рамки, в которой циркулирует переменный ток.

69.1. Рамку будем представлять себе в виде круглой цилиндрической катушки длины l , с внутренним и внешним радиусами обмотки, равными соответственно r_1 и r_2 , и с равномерным распределением тока по ее меридиональному сечению. Ось рамки примем за ось z , плоскость основания (торца) катушки будем считать совпадающей с поверхностью земли ($z=0$), а токи — текущими внутри ее по кольцам (кругам), охватывающим ось z и параллельным плоскости основания.

Так как в данном случае система первичных токов не имеет вертикальных составляющих, то можно было бы использовать для нахождения решения общие формулы предыдущего параграфа. Но, поскольку рассматриваемое распределение токов обладает симметрией вращения вокруг оси z , выгоднее сразу перейти к трактовке задачи в цилиндрических координатах. С этой целью умножаем, прежде всего, уравнения (68, 1), соответственно на x и на y и складываем их. Замечая, что

$$x \Delta A_x = x \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x A_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x A_x)}{\partial z^2} = \Delta (x A_x) - 2 \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

и

$$y \Delta A_y = \Delta (y A_y) - 2 \frac{\partial A_y}{\partial y},$$

получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \Delta (x A_x + y A_y) - 2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + k^2 (x A_x + y A_y) = \\ = - \frac{4\pi}{c} [x j_x^{(e)} + y j_y^{(e)}], \end{aligned}$$

¹ См. ниже п. п. 69. 4—69. 5, формулы (69, 18) и (69, 21).

$$\text{т. е.} \quad \Delta(rA_r) + k^2(rA_r) - \frac{2}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] = -\frac{4\pi}{c} r j_r^{(e)}, \quad (69, 1)$$

причем использовано известное выражение дивергенции в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (69, 2)$$

Помножая же те же исходные уравнения на y и x и вычитая первое из второго, получим, замечая, что $x A_y - y A_x = r A_\theta$:¹

$$(x \Delta A_y - y \Delta A_x) + k^2(x A_y - y A_x) = -\frac{4\pi}{c} [x j_y^{(e)} - y j_x^{(e)}],$$

а т. к.

$$\begin{aligned} x \Delta A_y - y \Delta A_x &= \Delta(x A_y - y A_x) - 2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \Delta(r A_\theta) - 2 \operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \Delta(r A_\theta) - \frac{2}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

то

$$\Delta(r A_\theta) + k^2(r A_\theta) - \frac{2}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{4\pi}{c} r j_\theta^{(e)}. \quad (69, 3)$$

К уравнениям (69, 1) и (69, 3) добавляется еще уравнение (68, 3), которое в цилиндрических координатах запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + k^2 A_z = \\ = -\frac{4\pi}{c} j_z^{(e)} + \frac{1}{r k^2} \cdot \frac{d(k^2)}{dz} \left[\frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (69, 4)$$

причем использованы выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \end{aligned}$$

двухмерных лапласиана и дивергенции в цилиндрических (полярных) координатах.

Уравнения (69, 1), (69, 3) и (69, 4), вообще говоря, менее удобны для решения, чем исходные уравнения в декартовых координатах, ибо в них уравнения для отдельных компонент вектора-потенциала не разделены. Но, так как в нашем случае из-за симметрии вращения $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ и так как теперь $j_r^{(e)} = j_z^{(e)} = 0$ и только $j_\theta^{(e)} = j \neq 0$, то (69, 1),

¹ Обозначая через r° , θ° , z° орты цилиндрической системы координат, а через $\mathbf{R} = r r^\circ + z z^\circ$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку (r, z) , будем иметь

$$\mathbf{A} = A_r r^\circ + A_\theta \theta^\circ + A_z z^\circ \quad \text{и} \quad x A_y - y A_x = [\mathbf{R}\mathbf{A}]_z = r A_\theta.$$

(69, 3), и (69, 4) удовлетворяются, если положить $A_r = A_z = 0$, причем для $A_\theta = A$ должно быть:

$$\Delta(rA) + k^2(rA) - \frac{2}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} rj,$$

что, как нетрудно видеть, может быть записано и так:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + r \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) A = -\frac{4\pi}{c} rj. \quad (69, 5)$$

Частные решения однородного уравнения, получающегося из (69,5) при отсутствии в нем правой части и удовлетворяющие требованию конечности при $r=0$ и при $r=\infty$, имеют вид $J_1(\lambda r)$, где J_1 обозначает бесселеву функцию первого порядка, а λ — любое вещественное число, которое, очевидно, можно считать положительным. Умножая поэтому (69,5) на $J_1(\lambda r) dr$, $\lambda > 0$, и интегрируя по r от некоторого $\alpha > 0$ до бесконечности, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} r J_1(\lambda r) A dr \right\} + J_1(\lambda r) r \frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{\alpha}^{\infty} - \lambda r J_1'(\lambda r) A \Big|_{\alpha}^{\infty} + \int_{\alpha}^{\infty} A \left\{ \frac{d}{dr} \left[r \frac{dJ_1(\lambda r)}{dr} \right] + \right. \\ \left. + r \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) J_1(\lambda r) \right\} dr = -\frac{4\pi}{c} \int_{\alpha}^{\infty} r J_1(\lambda r) j dr. \end{aligned} \quad (69, 6)$$

При использовании соотношения

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dJ_1(\lambda r)}{dr} \right] + r \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) J_1(\lambda r) = 0$$

и при учете того, что на бесконечности граничные члены обращаются в нуль, это дает при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\frac{d^2 A_1^*}{dz^2} - q^2 A_1^* = -\frac{4\pi}{c} j_1^*, \quad (69, 7)$$

причем положено:

$$q^2 = \lambda^2 - k^2 \quad (69, 8)$$

и¹

$$\left. \begin{aligned} A_1^* &= \int_0^{\infty} r J_1(\lambda r) A dr, \\ j_1^* &= \int_0^{\infty} r J_1(\lambda r) j dr. \end{aligned} \right\} \quad (69, 9)$$

69.2. Во всем предшествующем изложении k^2 рассматривалась как непрерывная² функция от z .

Если же на каких-либо плоскостях $z = z_{\xi}$ k^2 претерпевает разрывы, оставаясь конечным, то, как показывают ранее выведенные формулы

¹ Значок (1) у A_1^* и j_1^* введен для того, чтобы избежать смешения преобразованных типа (69,9) (по $J_1(\lambda r)$) с преобразованными вида (67, 11) (по $J_0(\lambda r)$).

² И дифференцируемая.

(68, 13) и (68, 15), на этих поверхностях как A , так и его нормальная к поверхности составляющая — непрерывны. В переводе на язык „преобразованных“ это дает:

$$\left. \begin{aligned} (A_1^*)_{z_s+0} &= (A_1^*)_{z_s-0}, \\ \left(\frac{dA_1^*}{dz}\right)_{z_s+0} &= \left(\frac{dA_1^*}{dz}\right)_{z_s-0}. \end{aligned} \right\}$$

что непосредственно получается, если умножить соответствующие соотношения для A и $\frac{\partial A}{\partial z}$ на $rJ_1(\lambda r) dr$ и проинтегрировать от нуля до бесконечности.

69. 3. Применим полученные результаты к нашей конкретной задаче. Находим последовательно:

$$j_1^* = \begin{cases} 0, & \text{при } z < 0, \\ j \int_{r_1}^{r_2} r J_1(\lambda r) dr, & \text{при } 0 \leq z \leq l, \\ 0, & \text{при } z > l. \end{cases} \quad (69, 10)$$

Считая обмотку бесконечно-тонкой, так что $(r_2 - r_1) \rightarrow 0$, причем, однако, полный ток $\bar{I} = j(r_2 - r_1)$, обтекающий катушку на единицу длины ее оси, будем считать конечным, получим, полагая в пределе $r_1 = r_2 = a$:

$$j_1^* = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \text{ и } z > l, \\ \bar{I} \cdot a \cdot J_1(\lambda a) & \text{при } 0 \leq z \leq l. \end{cases} \quad (69, 11)$$

Действуя совершенно таким же образом, как в § 68, при получении формул (68, 26)—(68, 32) для $A_x^{\alpha\beta}$, легко найдем:

$$A_1^* = \frac{4\pi \bar{I} a J_1(\lambda a)}{c q_2^2 (q_1 + q_2)} [q_1 \operatorname{ch} q_2 l + q_2 \operatorname{sh} q_2 l - q_1] e^{-q_2 z} \quad \text{при } z \geq l \quad (69, 12)$$

и

$$A_1^* = \frac{4\pi \bar{I} a J_1(\lambda a)}{c q_2 (q_1 + q_2)} (1 - e^{-q_2 l}) e^{q_1 z} \quad \text{при } z \leq 0.$$

Если перейти здесь к предельному случаю кольцевого тока (витка), для чего надо положить $l = 0$ и $\lim_{l=0} \bar{I} l = I$, то получится:

$$\left. \begin{aligned} A_1^* &= \frac{4\pi I a J_1(\lambda a)}{c (q_1 + q_2)} e^{-q_2 z} & \text{при } z \geq 0, \\ A_1^* &= \frac{4\pi I a J_1(\lambda a)}{c (q_1 + q_2)} e^{q_1 z} & \text{при } z \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (69, 13)$$

Если, наконец, пожелать рассмотреть поле магнитного диполя, то надо предположить, что радиус a витка стремится к нулю, причем магнитный момент витка, т. е. произведение из силы тока I в витке на охватываемую им площадь, остается конечным и равным $\lim_{a \rightarrow 0} I \pi a^2 = M$.

Формулы (69, 13) дают тогда:

$$\left. \begin{aligned} A_1^* &= \frac{2M\lambda}{c(q_1 + q_2)} e^{-q_2 z} \quad \text{при } z \geq 0, \\ A_1^* &= \frac{2M\lambda}{c(q_1 + q_2)} e^{q_1 z} \quad \text{при } z \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (69, 14)$$

69.4. Для того, чтобы, по известному уже A_1^* , найти A_1 , воспользуемся интегралом Фурье — Бесселя для функций $J_1(\lambda r)$, именно:¹

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \int_0^\infty \rho f(\rho) J_1(\lambda \rho) d\rho = \int_0^\infty \lambda f_1 J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (69, 15)$$

Этот интеграл является частным случаем такого, более общего:

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty \rho f(\rho) J_n(\lambda r) J_n(\lambda \rho) d\rho, \quad (69, 16)$$

причем $n > -1/2$, и функция $f(r)$ должна удовлетворять некоторым общим условиям,² которые в физических приложениях обычно выполняются.

(69, 14) и (69, 15) дают:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2M}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}, \quad \text{при } z > 0, \\ A &= \frac{2M}{c} \int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}, \quad \text{при } z < 0. \end{aligned} \right\} \quad (69, 17)$$

Этим выражениям можно придать еще другую форму, если ввести в рассмотрение новую функцию $\Pi = \Pi(r, z)$, определяемую соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}, \quad \text{при } z \geq 0, \\ \Pi &= \int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}, \quad \text{при } z \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (69, 18)$$

причем, как нетрудно проверить,

$$A = -\frac{2M}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \quad (69, 19)$$

¹ См. Р. Кузьмин. Б. Ф., стр. 154.

² См. там же.

Так как в данном случае $A = A_0$ — единственная отличная от нуля компонента вектор-потенциала, причем $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_0}{\partial \vartheta} = 0$, то формулы (67, 2) и (67, 3) дают:

$$\left. \begin{aligned} E_r = E_z = 0; E_\theta &= -\frac{i\omega}{c} A = \frac{2M\omega i}{c} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ H_r &= -\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{2M}{c} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}, H_\theta = 0, \\ H_z &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (rA)}{\partial r} = -\frac{2M}{c} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (69, 20)$$

Отметим, что в этом случае вектор \mathbf{A} просто пропорционален электрическому полю.

69.5. Можно показать, что, при $z=0$, т. е. на самой поверхности земли, A , а стало быть и $E = E_\theta$ и H_z , можно выразить через элементарные функции. Для этого достаточно убедиться в том, что, при $z=0$, входящий в выражение функции $\Pi(r, 0)$ интеграл берется и оказывается равным:

$$\Pi(r, 0) = \frac{i}{k_2^2 - k_1^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ik_1 r}}{r} - \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \right). \quad (69, 21)$$

Чтобы доказать формулу (69, 21), преобразуем первый интеграл (69, 18) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} = \\ &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} J_0(\lambda r) \lambda \left[\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \left[e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} - e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \right] \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right\}. \quad (69, 22) \end{aligned}$$

Но так как, согласно (67, 31),

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \sqrt{\lambda^2 - k^2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right), \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (69, 23)$$

¹ Этот результат впервые был получен ван-дер-Подем. См. Ztschr. f. Hochfr., 37, 152 (1931).

то (69, 22) может быть переписана так:

$$\Pi(r, z) = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{e^{-ik_2 R}}{R} - \frac{e^{-ik_1 R}}{R} \right] + \delta(r, z), \quad (69, 24)$$

где

$$\delta(r, z) = \int_0^\infty \left(e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} - e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \right) \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (69, 25)$$

При $z=0$ и $r > 0$, $\delta(r, 0)$ обращается в нуль¹ и (69, 24) дает:

$$\Pi(r, 0) = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{e^{-ik_2 R}}{R} - \frac{e^{-ik_1 R}}{R} \right] \right\}_{z=0}, \quad (69, 26)$$

а так как

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} \frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{z=0} = \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{R} \cdot \frac{d}{dR} \frac{e^{-ikR}}{R} \right] \right\}_{z=0} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right), \quad (69, 27)$$

от (69, 26) как раз дает формулу (69, 21).

¹ Это, собственно, требует доказательства, которое можно провести следующим образом: разбиваем интеграл (69, 25) на два — от нуля до некоторого такого a , чтобы было $a \gg |k_1|$ и $a \gg |k_2|$ и, далее, от a до бесконечности. Первый интеграл при $z=0$ обращается в нуль. Во втором будет

$$e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} = e^{-\lambda z} \left[1 - \frac{k^2}{2\lambda^2} + \dots \right] = e^{-\lambda z} \left[1 + \frac{k^2}{2\lambda} z + \frac{k^4}{8\lambda^2} z^2 + \dots \right],$$

причем невыписанные члены разложения содержат в знаменателе степени λ от третьей и выше. Таким образом,

$$\begin{aligned} \left[e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} - e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \right] \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} &= \frac{k_1^2 - k_2^2}{2} z e^{-\lambda z} + \\ &+ \frac{k_1^4 - k_2^4}{8\lambda} z^2 e^{-\lambda z} + z^0 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Если $r > 0$, то, пользуясь асимптотическим выражением

$$J_0(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \left[\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\lambda r} \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right],$$

получим:

$$\begin{aligned} &\int_a^\infty \left[e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} - e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \right] \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ (k_1^2 - k_2^2) \left[z \int_a^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{1/2} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{z}{8r} \int_a^\infty \frac{e^{-\lambda z} \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right] + \frac{k_1^4 - k_2^4}{4} z^2 \int_a^\infty \frac{e^{-\lambda z} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \\ &\left. + z \int_a^\infty o\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) d\lambda \right\}. \end{aligned}$$

§ 70. Непосредственное нахождение нормальных к плоскостям раздела составляющих поля в слоистой среде

70.1. В §§ 67—68 мы показали, каким образом найти в самом общем случае поле от любой системы излучателей, помещенных в слоистую среду с произвольным образом изменяющимися в зависимости от одной из координат — z — свойствами. При этом, вообще говоря, требовалось сперва проинтегрировать два уравнения (68, 8) для перпендикулярных к оси z составляющих вектор-потенциала и сверх того уравнение (68, 9) для параллельной ей составляющей.

Покажем теперь, что если основной интерес представляет нахождение перпендикулярной к поверхностям раздела сред составляющей электрического поля, как то имеет место, например, при изучении распространения волн вдоль земной поверхности, то можно ее нахождение произвести непосредственно из основных уравнений поля, без введения электромагнитных потенциалов, причем требуется решить только одно уравнение того же типа, как для A_z , совершенно не касаясь вопроса о решении остальных уравнений.

Здесь все интегралы, кроме первого, стремятся, при $z \rightarrow 0$, к конечным пределам, так что содержащие их члены при $z = 0$ пропадают.

Для оценки первого интеграла замечаем, что функция $e^{-\lambda z} \lambda^{1/2}$ достигает максимума, равного $\frac{1}{\sqrt{2ez}}$, при $\lambda = \frac{1}{2z}$, а полагая, что $\frac{1}{2z} > a$ (что, при стремлении z к нулю, всегда будет достигнуто), и разбивая интеграл на два — от a до $\frac{1}{2z}$ и от $\frac{1}{2z}$ до бесконечности — и применяя к каждому из них вторую теорему о среднем, получим:

$$\int_a^\infty e^{-\lambda z} \sqrt{\lambda} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda = \left[e^{-\lambda a} \sqrt{a} \int_a^\xi \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2ez}} \int_\xi^{\frac{1}{2z}} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda \right] + \frac{1}{\sqrt{2ez}} \int_{\frac{1}{2z}}^{\xi'} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda,$$

причем $a < \xi < \frac{1}{2z}$ и $\frac{1}{2z} < \xi'$. Отсюда следует, что

$$\left| \int_a^\infty e^{-\lambda z} \sqrt{\lambda} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda \right| < \frac{2}{r} \left(e^{-\lambda a} \sqrt{a} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ez}} \right),$$

так что

$$\left| z \int_a^\infty e^{-\lambda z} \sqrt{\lambda} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda \right|_{z=0} = 0.$$

Тем самым доказано, что при $r > 0$ действительно $\delta(r, 0) = 0$.

70.2. Будем исходить из уравнений (67, 1), которые перепишем таким образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{ck^2 i}{\omega \mu} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (70, 1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{i\omega \mu}{c} \mathbf{H}, \quad (70, 2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \quad (70, 3)$$

$$k^2 = -\frac{i\omega \mu (i\varepsilon \omega + 4\pi \sigma)}{c^2},$$

и будем, для простоты, считать компоненты вектора $\mathbf{j}^{(e)}$ дважды дифференцируемыми функциями координат (случай разрывности какой-либо из функций $j_r^{(e)}$, $j_\theta^{(e)}$, $j_z^{(e)}$ будем рассматривать как предельный случай такого непрерывного).

(70, 1) и (70, 2) дают:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} - \frac{4\pi \mu \omega i}{c^2} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (70, 4)$$

тогда как из (70, 1) получается, что

$$\operatorname{div} (k^2 \mathbf{E}) = \frac{4\pi \mu \omega i}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\frac{1}{k^2} (\operatorname{grad} k^2, \mathbf{E}) + \frac{4\pi \mu \omega i}{k^2 c^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)} = \\ &= -(\operatorname{grad} \psi, \mathbf{E}) + \frac{4\pi \mu \omega i}{k^2 c^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}, \end{aligned} \quad (70, 5)$$

причем положено:

$$\psi = \lg (k^2). \quad (70, 6)$$

Подставляя (70, 5) в (70, 4), находим:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \psi, \mathbf{E}) &= \\ = \frac{4\pi \mu \omega i}{c^2} \left\{ \mathbf{j}^{(e)} + \operatorname{grad} \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}}{k^2} \right) \right\} &= \frac{4\pi \mu \omega i}{c^2} \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (70, 7)$$

где

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{j}^{(e)} + \operatorname{grad} \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}}{k^2} \right) \right\} \quad (70, 8)$$

— известный вектор, поскольку заданы $\mathbf{j}^{(e)}$ и k^2 .

70.3. До сих пор наши вычисления носили совершенно общий характер. Учитывая теперь, что, согласно допущению, $k = k(z)$, так что и $\psi = \psi(z)$, находим, что $(\operatorname{grad} \psi, \mathbf{E}) = \frac{\partial \psi}{\partial z} E_z = \psi' E_z$, где ψ' — производная от ψ по z , а проектируя уравнение (70, 7) на ось z , получим:

$$\Delta E_z + k^2 E_z + \frac{\partial}{\partial z} (\psi' E_z) = \frac{4\pi \mu \omega i}{c^2} F_z. \quad (70, 9)$$

Это уравнение уже не содержит других компонент поля, кроме E_z . Введем в (70, 9) вместо E_z новую функцию

$$u = k^2 E_z. \quad (70, 10)$$

После элементарных преобразований, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + k^2 u = \frac{4\pi\mu\omega i k^2}{c} F_z. \quad (70, 11)$$

Левая часть этого уравнения в точности совпадает с левой частью уравнения (68, 3) для A_z , правая же часть, в отличие от уравнения (68, 3), является известной функцией координат.

70. 4. Чтобы решить уравнение (70, 11), умножим его на $e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$ и проинтегрируем по x и y от нуля до бесконечности.

Пользуясь обозначением (68, 5), получим:

$$k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{k^2} \frac{du^{\alpha\beta}}{dz} \right) + (k^2 - \alpha^2 - \beta^2) u^{\alpha\beta} = \frac{4\pi\mu\omega k^2 i}{c^2} F^{\alpha\beta}, \quad (70, 12)$$

где

$$F^{\alpha\beta} = J_z^{(e)\alpha\beta} - i \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{k^2} \left(\alpha J_x^{(e)\alpha\beta} + \beta J_y^{(e)\alpha\beta} + i \frac{d}{dz} J_z^{(e)\alpha\beta} \right) \right]. \quad (70, 13)$$

Это уравнение отличается только правой частью (известной!) от уравнения (68, 9) для функции $A_z^{\alpha\beta}$, или, что то же, от уравнения (67, 12) для A^* .

Решение общей задачи о вертикальной составляющей E_z поля любой системы излучателей, в среде с переменными по вертикали свойствами, приводится, стало быть, всегда к квадратурам, если известно решение того же однородного уравнения (67, 33), которым определялось решение более частной задачи о поле системы только вертикальных излучателей. В частности, оно приводится к квадратурам в перечисленных в п. 67. 5 случаях (а), (б) и (в).

70. 5. После того, как найдены общие интегралы уравнений (70, 12) для каждого отдельного слоя, причем эти интегралы содержат по две произвольные постоянные каждый, остается определить эти произвольные постоянные из граничных условий на поверхностях раздела различных сред и из условий на бесконечности.

Сформулируем граничные условия для функции $u = k^2 E_z$.

Предположим, для простоты, что все первичные токи лежат внутри некоторой конечной области. Тогда на бесконечности, т. е., в частности, при $z = \pm \infty$, E_z должна обращаться в нуль, причем, при наличии в среде хотя бы очень малого затухания, это убывание должно быть, соответственно, сильным. Пользуясь уравнениями (70, 10) и (68, 5), сможем найти отсюда соответствующие условия для $(u^{\alpha\beta})_{z = \pm \infty}$.

Что же касается граничных условий на плоскости $z = z_s$, разделяющей s -ую и $(s+1)$ -ую среды, то, из условия равенства тангенциальных составляющих магнитного поля по обе стороны поверхности раздела, т. е. из того, что

$$H_x^{(s)} = H_x^{(s+1)}, \quad H_y^{(s)} = H_y^{(s+1)},$$

вытекает, что

$$(\text{rot}_z \mathbf{H})^{(s)} = \frac{\partial H_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial H_x^{(s)}}{\partial y} = \frac{\partial H_y^{(s+1)}}{\partial x} - \frac{\partial H_x^{(s+1)}}{\partial y} = (\text{rot}_z \mathbf{H})^{(s+1)},$$

т. е., если подставить сюда значения

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{H} = \frac{ci}{\omega\mu} u + \frac{4\pi}{c} j_z^{(e)},$$

то:

$$\left[\frac{u}{\mu_s} - \frac{4\pi\omega\mu_s i}{c^2} j_z^{(e)} \right]_{z_s-0} = \left[\frac{u}{\mu_{s+1}} - \frac{4\pi\omega\mu_{s+1} i}{c^2} j_z^{(e)} \right]_{z_s+0}. \quad (70, 14)$$

В тех точках поверхности, к которым токи $\mathbf{j}^{(e)}$ не подтекают, условие (70, 14) заменяется более простым:

$$(u/\mu_s)_{z_s-0} = (u/\mu_{s+1})_{z_s+0}. \quad (70, 15)$$

Для получения второго граничного условия, будем исходить из уравнения (70, 5), которое при $\psi = \psi(z)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\psi' E_z + \frac{4\pi\mu\omega i}{c^2 k^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)} = \\ &= -\frac{1}{k^2} E_z \frac{d(k^2)}{dz} - \frac{4\pi\mu\omega i}{c^2 k^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)} \end{aligned}$$

и которое можно записать и так:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = -\frac{4\pi\mu\omega i}{c^2} \cdot \frac{1}{k^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}. \quad (70, 16)$$

Применяя это соотношение к двум бесконечно-близким точкам, лежащим по разные стороны поверхности раздела, вычитая одно из полученных уравнений из другого и замечая, что, в силу равенства тангенциальных составляющих электрического поля по обе стороны поверхности раздела, выражения

$$\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right]_{z_s-0} \quad \text{и} \quad \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right]_{z_s+0}$$

равны, а потому выпадают при вычитании, получим:

$$\left\{ \frac{1}{k^2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4\pi\mu\omega i}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)} \right] \right\}_{z_s-0} = \left\{ \frac{1}{k^2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4\pi\mu\omega i}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)} \right] \right\}_{z_s+0}. \quad (70, 17)$$

При отсутствии токов у самой поверхности это условие тоже упрощается и дает:

$$\left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z_s-0} = \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z_s+0}. \quad (70, 18)$$

Умножая уравнения (70, 14), (70, 15) и (70, 17), (70, 18) на $e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$ и интегрируя их по x и y в пределах $(-\infty, +\infty)$, найдем соответствующие условия для $u^{\alpha\beta}$.

В случае отсутствия токов у самой поверхности получается, например:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{u^{\alpha\beta}}{\mu_s} \right)_{z_s-0} &= \left(\frac{u^{\alpha\beta}}{\mu_{s+1}} \right)_{z_s+0}, \\ \left(\frac{1}{k^2} \frac{du^{\alpha\beta}}{dz} \right)_{z_s-0} &= \left(\frac{1}{k^2} \frac{du^{\alpha\beta}}{dz} \right)_{z_s+0} \end{aligned} \right\} \quad (70, 19)$$

Это условия совершенно того же типа, как условия (67, 14) для A^* . Вместе с условиями на бесконечности они полностью определяют все функции $u^{\alpha\beta}$ во всех средах, а из величин $u^{\alpha\beta}$, в свою очередь, получаются сами u по формуле:

$$u = u(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{\alpha\beta} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \quad (70, 20)$$

Тем самым получается полное решение задачи о нахождении E_z во всем пространстве.

70.6. Еще проще получается уравнение для H_z , для чего достаточно взять rot от уравнения (70, 1), воспользоваться уравнениями (70, 2) и (70, 3) и заметить, что, при $k^2 = k^2(z)$, $[\text{grad } k^2, \mathbf{E}]_z = 0$.

Получается:

$$\Delta H_z + k^2 H_z = -\frac{4\pi}{c} \text{rot}_z \mathbf{j}^{(e)} = -\frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial j_y^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial j_x^{(e)}}{\partial y} \right). \quad (70, 21)$$

Отсюда находится и уравнение для $H_z^{\alpha\beta}$, именно:

$$\frac{d^2 H_z^{\alpha\beta}}{dz^2} + (k^2 - \alpha^2 - \beta^2) H_z^{\alpha\beta} = \frac{4\pi i}{c} \left[\alpha j_y^{(e)\alpha\beta} - \beta j_x^{(e)\alpha\beta} \right], \quad (70, 22)$$

которое по типу вполне тождественно уравнениям (68, 8) для перпендикулярных к оси z составляющих вектор-потенциала.

Столь же легко получаются граничные условия для $H_z^{\alpha\beta}$ на поверхности разрыва $z = z_s$. Именно, из (70, 2) находим, учитывая, что тангенциальные компоненты E_x и E_y непрерывно проходят через поверхность:

$$\psi_s (H_z)_{z_s-0} = \psi_s + 1 (H_z)_{z_s+0}, \quad (70, 23)$$

тогда как из (70, 3) и из условия, что H_x и H_y непрерывны при проходе через поверхность, получим:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right)_{z_s-0} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right)_{z_s+0}. \quad (70, 24)$$

Из (70, 23) и (70, 24) находим, обычным образом, соотношения:

$$\psi_s (H_z^{\alpha\beta})_{z_s-0} = \psi_s + 1 (H_z^{\alpha\beta})_{z_s+0}. \quad (70, 25)$$

$$\left(\frac{dH_z^{\alpha\beta}}{dz} \right)_{z_s-0} = \left(\frac{dH_z^{\alpha\beta}}{dz} \right)_{z_s+0}. \quad (70, 26)$$

Уравнения (70, 22) для всех различных сред вместе с (70, 25) и (70, 26) и с условиями

$$(H_z^{\alpha\beta})_{z=\pm\infty} = 0 \quad (70, 27)$$

однозначно определяют $H_z^{\alpha\beta}$, а стало быть, и H_z во всем пространстве.

Глава XXII

ДИФФРАКЦИЯ ОТ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО КЛИНА

§ 71. Плоская задача о диффракции волн от идеально проводящего клина

71.1. В то время как вопрос о распространении электромагнитных волн от произвольной системы излучателей, при наличии в пространстве двух или более однородных изотропных сред с плоско-параллельными поверхностями раздела, может, согласно изложенному в предыдущей главе, считаться полностью решенным,¹ соответствующая задача, относящаяся к случаю двух или большего числа сред с плоскими же, но не параллельными поверхностями раздела, оказывается несравненно более сложной. До настоящего времени не удалось дать строгое решение даже простейшей из задач такого рода, — задачи о диффракции электромагнитных волн от клина из материала, обладающего конечной проводимостью, находящегося в пустоте или в однородной среде. Лишь в случае идеально проводящего клина такое решение удалось найти Зоммерфельду, как мы об этом уже говорили раньше.² Мы вернемся теперь к этой последней задаче и дадим здесь другое решение ее с помощью метода, предложенного М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым.³

Будем сперва, для простоты, предполагать, что электрический вектор $E^{(a)}$ первичного (вынуждающего) поля во всем пространстве параллелен ребру клина.

Примем ребро клина за ось z цилиндрической системы координат (r, θ, z) . Предполагаем, что окружающая клин среда характеризуется константами ε, μ, σ , причем σ будем считать отличной от нуля, хотя возможно, и сколь угодно малой величиной.⁴

Согласно сказанному ранее, при $\sigma \neq 0$, во всем свободном от излучателей пространстве, окружающем клин, должно выполняться условие $\operatorname{div} E^{(a)} = 0$, а так как, согласно допущению, $E^{(a)}$ имеет только одну компоненту $E_z^{(a)} = E^{(a)}$, то это показывает, что $\frac{\partial E^{(a)}}{\partial z} = 0$, т. е. что $E^{(a)}$ не зависит от z . В соответствии с этим не будет зависеть от z и $H^{(a)}$, а стало-быть также и вторичное поле, создаваемое клином и обязанное своим происхождением текущим по нему поверхностным токам, которые в данном случае, очевидно, будут иметь то же направление, как и вызывающее их первичное электрическое поле, т. е. которые будут параллельны оси z .

¹ По крайней мере, принципиально.

² См. п. п. 16. 11—16. 20.

³ ЖЭТФ, 8, выпуск 10—11, 1192, 1938.

⁴ Т. е. допускаем наличие хотя бы крайне малой проводимости среды.

Подобная система параллельных токов будет иметь вектор-потенциал того же направления. Обозначая этот вектор-потенциал через \mathbf{A} , следует, стало быть, положить:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_z A. \tag{71, 1}$$

Так как первичное поле рассматриваемого здесь типа обязано своим происхождением тоже системе параллельных оси z первичных токов, то и его вектор-потенциал $\mathbf{A}^{(a)}$ должен иметь то же направление, так что

$$\mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{i}_z A^{(a)}, \tag{71, 2}$$

причем обе функции A и $A^{(a)}$ зависят, вообще говоря, от r и θ , но не от z .

Уравнение (67, 4) дает теперь для $A_z = A$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + k^2 A = 0, \quad k^2 = - \frac{i\omega\mu (i\omega\epsilon + 4\pi\sigma)}{c^2}, \tag{71, 3}$$

причем, как всегда, будем выбирать то из двух возможных значений k , для которого $Im(k) < 0$. Уравнение (71, 3), естественно, совпадает с уравнением (16, 58), если в этом последнем положить $j^{(e)} = 0$.

Для компонент электрического и магнитного поля клина получаем:

$$\mu H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}, \quad \mu H_\theta = - \frac{\partial A}{\partial r}, \tag{71, 4}$$

$$E_r = E_\theta = 0, \quad E_z = - \frac{i\omega}{c} A. \tag{71, 5}$$

Аналогичные формулы получаются и для связи компонент первичных электрического и магнитного полей $\mathbf{E}^{(a)}$ и $\mathbf{H}^{(a)}$ с $A^{(a)}$. Так как при этом тангенциальная к поверхности клина составляющая полного электрического поля должна обращаться в нуль, то в каждой точке поверхности должно выполняться условие

$$E_z^{(a)} + E_z = 0, \tag{71, 6}$$

т. е. на поверхности должно быть

$$A = - A^{(a)}. \tag{71, 7}$$

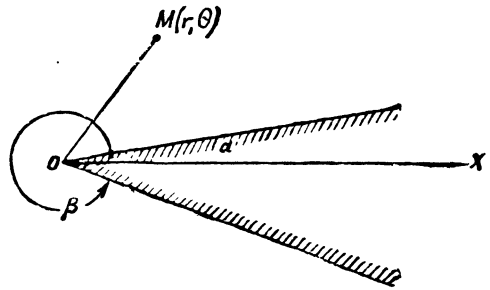


Рис. 130.

Это и есть граничное условие для A на поверхности клина. Вместе с уравнением (71, 3) и условием, что на бесконечности должно быть

$$A = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial r} = 0, \tag{71, 8}$$

оно вполне определяет искомую функцию A .

71.2. Переходим к решению уравнения (71, 3), причем будем считать, что клин ограничен плоскостями $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ и что область $\alpha < \theta < \beta$ является внешней по отношению к нему (рис. 130).

¹ Из-за экспоненциального затухания вторичных волн при $\sigma \neq 0$.

Так как уравнение (71, 3) допускает разделение переменных в полярных координатах, причем соответствующие частные решения этого уравнения имеют вид¹

$$A = (M \sin \nu\theta + N \cos \nu\theta) Z_\nu(kr),$$

где M , N и ν — произвольные постоянные, а $Z_\nu(kr)$ обозначает какую-либо бесселеву функцию порядка ν от указанного аргумента, то, в соответствии с общими принципами, изложенными в § 15, можно искать решение задачи одним из следующих двух способов:

1. Нужно найти все те функции (фундаментальные)

$$v(\theta) = M \sin \nu\theta + N \cos \nu\theta,$$

которые обращаются в нуль при $\theta = \alpha$ и при $\theta = \beta$, и умножая (71, 3) на одну из таких функций и интегрируя затем по θ в пределах от α до β , найти обычным способом коэффициенты разложения искомого решения A по этим функциям.

Это как раз тот прием, которым мы решали эту задачу в п. п. 16.11—16.17.

2. Умножить (71, 3) на соответствующим образом выбранную функцию $rZ_\nu(kr)$ и проинтегрировать по r от нуля до бесконечности (если, конечно, такая процедура допустима и не приводит к расходящимся интегралам). За функцию $Z_\nu(kr)$ следовало бы при этом выбрать ту из них, которая обращалась бы в нуль при $r \rightarrow \infty$ и оставалась бы ограниченной при $r = 0$, если бы такая, вообще, нашлась (ср. п. п. 16.1—16.2). Такой функции $Z_\nu(kr)$, однако, не существует, так как функция $Z_\nu(kr) = H_\nu^{(2)}(kr)$, удовлетворяющая первому из указанных условий, становится бесконечной при $r = 0$. Если все же пренебречь на минуту этим обстоятельством и, умножив уравнение (71, 3) на $rH_\nu^{(2)}(kr)dr$, проинтегрировать его в пределах $0 \leq r \leq \infty$, считая, что это допустимо, то для „преобразованной“ функции

$$\tilde{A} \equiv \tilde{A}(\theta) = \int_0^\infty A(r, \theta) \frac{H_\nu^{(2)}(kr)}{r} dr^2 \tag{71, 9}$$

получится, обычным образом, обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого ее можно было бы определить с помощью граничных условий для A при $\theta = \alpha$ и при $\theta = \beta$, если бы выделившиеся при интегрировании по частям добавочные члены обратились в нуль или выразились через известные конечные величины.

¹ Ср. п. 16.1.

² Она, очевидно, по существу эквивалентна преобразованной функции вида

$$\tilde{f} = \int_0^\infty f(s) K_\nu(as) ds, \text{ которой мы пользовались в главе XVIII [ср. (55, 1)].}$$

На самом деле интеграл (71, 9), как правило, расходится, поскольку, согласно (71, 7), $(A)_{r=0} = -(A^{(a)})_{r=0}$, а $(A^{(a)})_{r=0}$, вообще говоря, не равняется нулю. Чтобы обойти эту трудность, введем в рассмотрение, следуя Конторовичу и Лебедеву, новую функцию u соотношением

$$u = A - (A)_{r=0} e^{-ikr} = A + (A^{(a)})_{r=0} e^{-ikr}, \quad (71, 10)$$

причем (71, 3) дает:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 r u = -ik (A^{(a)})_{r=0} \cdot e^{-ikr}. \quad (71, 11)$$

Помножая это уравнение на $H_\nu^{(2)}(kr) dr$, где ν — чисто мнимая величина, и интегрируя по r от нуля до бесконечности, получим, используя уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dH_\nu^{(2)}(kr)}{dr} \right) + r \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) H_\nu^{(2)}(kr) = 0 \quad (71, 12)$$

и поступая обычным образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{d\theta^2} + \nu^2 \tilde{u} + \left\{ r H_\nu^{(2)}(kr) \frac{\partial u}{\partial r} - r \frac{dH_\nu^{(2)}(kr)}{dr} \cdot u \right\} \Big|_0^\infty = \\ = -ik (A^{(a)})_{r=0} \cdot \int_0^\infty e^{-ikr} H_\nu^{(2)}(kr) dr, \end{aligned} \quad (71, 13)$$

где положено, подобно (71, 9):

$$\tilde{u} = \int_0^\infty u \frac{H_\nu^{(2)}(kr)}{r} dr \quad (71, 14)$$

и где уже $(u)_{r=0} = 0$.

Входящий в формулу (71, 13) интеграл может быть легко вычислен.

Имея в виду некоторые дальнейшие приложения, мы сразу рассмотрим несколько более общий интеграл, именно

$$J_\alpha = \int_0^\infty e^{-ikr \cos \alpha} H_\nu^{(2)}(kr) dr, \quad -\pi < \alpha < +\pi, \quad (71, 15)$$

из которого интеграл (71, 13) получается при $\alpha = 0$.

Заменяя в (71, 15) $H_\nu^{(2)}(kr)$ ее интегральным представлением (56, 1) и изменяя порядок интегрирования, получим:

$$J_\alpha = \frac{ie^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu\eta} d\eta \int_0^\infty e^{-ik(\operatorname{ch} \eta + \cos \alpha)r} dr = \frac{e^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{k\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\nu\eta} d\eta}{\operatorname{ch} \eta + \cos \alpha}. \quad (71, 16)$$

Полагая здесь $e^{-\nu\eta} = t$ и пользуясь формулой (34, 4), найдем:

$$J_\alpha = \frac{2e^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{k\pi} \int_0^\infty \frac{t^\nu dt}{1 - 2t \cos(\pi - \alpha) + t^2} = \frac{2e^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{k \sin \pi\nu} \cdot \frac{\sin \alpha\nu}{\sin \alpha}, \quad (71, 17)$$

что при $\alpha=0$ дает:

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-ikr} H_v^{(2)}(kr) dr = \frac{2ve^{\frac{i\pi v}{2}}}{k \sin \pi v}. \quad (71, 18)$$

Далее, нетрудно видеть, что выражение в скобках в (71, 13) равно нулю. В самом деле, из (71, 10) и (71, 8) вытекает, что, при $r \rightarrow \infty$ $u \rightarrow 0$, и $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r} - (A^{(a)})_{r=0} ike^{-ikr} \rightarrow 0$, а так как, при $r \rightarrow \infty$, как $H_v^{(2)}(kr)$, так и $\frac{dH_v^{(2)}(kr)}{dr}$ стремятся к нулю экспоненциально, то стоящие в скобке члены на верхнем пределе обращаются в нуль.

Далее, при $r \rightarrow 0$ второй член в фигурной скобке стремится к нулю, так как при этом произведение $\left(r \frac{dH_v^{(2)}(kr)}{dr} \right)$ стремится к нулю или к постоянной величине, тогда как $(u)_{r=0} = 0$. Остается, поэтому рассмотреть член

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ rH_v^{(2)}(kr) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ rH_v^{(2)}(kr) \frac{\partial A}{\partial r} \right\}. \quad (71, 19)$$

(71, 4) показывает, что входящая сюда величина $\frac{\partial A}{\partial r}$ равна $(-\mu H_\theta)$, где (μH_θ) — не что иное, как нормальная к поверхности клина составляющая магнитной индукции, создаваемой токами на поверхности клина. Так как нормальная к поверхности идеально проводящего клина составляющая полной магнитной индукции должна быть равна нулю, так что на поверхности

$$\mu(H_\theta + H_\theta^{(a)}) = 0,$$

то получаем:

$$\left. \begin{aligned} (H_\theta)_{\theta=\alpha} &= -(H_\theta^{(a)})_{\theta=\alpha}, \\ (H_\theta)_{\theta=\beta} &= -(H_\theta^{(a)})_{\theta=\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (71, 20)$$

причем эти соотношения должны иметь место в любой точке боковой поверхности клина, т. е. при любом r . Это показывает, что и при $r=0$, т. е. на ребре клина, величина $-\mu H_\theta = \frac{\partial A}{\partial r}$ должна оставаться ограниченной, а так как при мнимом v произведение $rH_v^{(2)}(kr)$ при $r \rightarrow 0$ стремится к нулю, то $\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ rH_v^{(2)}(kr) \frac{\partial A}{\partial r} \right\} = 0$, и (71, 13) приобретает такой вид:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\theta^2} + v^2 \tilde{u} = -i(A^{(a)})_{r=0} \cdot \frac{2ve^{\frac{i\pi v}{2}}}{\sin \pi v}. \quad (71, 21)$$

Общий интеграл уравнения (71, 21) имеет вид:

$$\tilde{u} = M \cos v\theta + N \sin v\theta - i \frac{2e^{\frac{i\pi v}{2}}}{v \sin \pi v} (A^{(a)})_{r=0}, \quad (71, 22)$$

причем для определения постоянных интегрирования M и N служат получающиеся из (71, 7), (71, 10) и (71, 14) граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{u})_{\theta=\alpha} &= \int_0^{\infty} \frac{[(A^{(a)})_{r=0} e^{-ikr} - A^{(a)}]_{\theta=\alpha} H_{\nu}^{(2)}(kr) dr}{r}, \\ (\tilde{u})_{\theta=\beta} &= \int_0^{\infty} \frac{[(A^{(a)})_{r=0} e^{-ikr} - A^{(a)}]_{\theta=\beta} H_{\nu}^{(2)}(kr) dr}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (71, 23)$$

Найдя таким образом \tilde{u} и подставив его в формулу обращения (55, 17) (в том, конечно, случае, если \tilde{u} удовлетворяет всем условиям, при которых эта формула верна), получим решение задачи в виде комплексного интеграла.¹

71.3. В качестве примера рассмотрим приложение изложенного метода к решению задачи о дифракции плоской волны, падающей на идеально отражающую бесконечно-тонкую пластинку (полуплоскость), помещенную под некоторым углом α к направлению падающей волны (рис. 131).

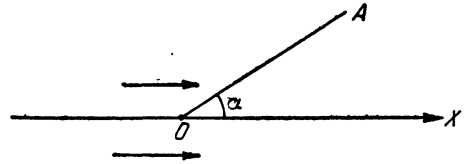


Рис. 131.

Примем направление падающей волны за ось x . Вектор-потенциал этой волны $A^{(a)}$ будет иметь вид

$$A^{(a)} = P e^{-ikx} = P e^{-ikr \cos \theta}, \quad (71, 24)$$

где P — амплитудная постоянная, которой входящие в решение величины A и u будут просто пропорциональны и которую в дальнейшем будем считать равной единице. Пластинка OA составляет с осью x угол α , причем можно считать, что $0 \leq \alpha < \pi$. Для точек окружающего пластинку пространства будем, для однозначности, считать угол θ изменяющимся в пределах $\alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$, причем $\theta = \alpha$ и $\theta = \alpha + 2\pi$ соответствуют обеим сторонам пластинки, так что во второй из формул (71, 23) надо теперь положить $\beta = \alpha + 2\pi$. При этом получается:

$$(\tilde{u})_{\theta=\alpha} = (\tilde{u})_{\theta=\alpha+2\pi} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikr} - e^{-ikr \cos \alpha}}{r} H_{\nu}^{(2)}(kr) dr. \quad (71, 25)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, продифференцируем его по α , причем получится, при использовании формулы (71, 17):

$$\frac{d}{d\alpha} [(\tilde{u})_{\theta=\alpha}] = -ik \sin \alpha \int_0^{\infty} e^{-ikr \cos \alpha} H_{\nu}^{(2)}(kr) dr = -\frac{2ie^{\frac{i\pi}{2}}}{\sin \pi \nu} \sin \alpha \nu. \quad (71, 26)$$

¹ Формула обращения (55, 17) дает возможность найти решение интегрального уравнения $\int_0^{\infty} a(r) \frac{H_{\nu}^{(2)}(kr) dr}{r} = \tilde{u}(\nu)$, причем вопрос о единственности найденного решения нуждается в особом рассмотрении.

Замечая, что $(\tilde{u})_{\theta=\alpha}$ при $\alpha=0$ обращается в нуль, и интегрируя (71, 26) по α от нуля до α , получим искомое значение $(\tilde{u})_{\theta=\alpha}$, именно:

$$(\tilde{u})_{\theta=\alpha} = \tilde{u}_{\theta=\alpha+2\pi} = \frac{2e^{\frac{i\sqrt{\pi}}{2}}(1-\cos \alpha\sqrt{\pi})}{i\sqrt{\pi} \sin \sqrt{\pi}\alpha}. \quad (71, 27)$$

Полагая теперь в общей формуле (71, 22) $\theta=\alpha$ и $\theta=\alpha+2\pi$ и пользуясь найденными значениями $(\tilde{u})_{\theta=\alpha}$ и $(\tilde{u})_{\theta=\alpha+2\pi}$, получим, замечая, что $(A^{(a)})_{r=0}=1$, и определяя постоянные M и N :

$$\tilde{u} = \frac{2e^{\frac{i\sqrt{\pi}}{2}}}{i\sqrt{\pi} \sin \sqrt{\pi}\nu} \left\{ 1 - \frac{\cos(\pi+2\alpha-\theta)\nu + \cos(\pi-\theta)\nu}{2 \cos \pi\nu} \right\}. \quad (71, 28)$$

Это и есть искомое значение преобразованной функции для нашей задачи.

71. 4. Определим теперь с помощью (56, 24) саму функцию u по ее преобразованной \tilde{u} . При этом удобно сперва предположить, что θ лежит в пределах $2\alpha < \theta < 2\pi$, причем все требования, которым должна удовлетворять преобразованная функция для того, чтобы можно было применять теорему обращения, выполнены. Для остальных θ в интервале $\alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$, справедливость получаемых из теоремы обращения при $2\alpha < \theta < 2\pi$ формул может быть легко доказана с помощью принципа аналитического продолжения.

Применяя (56, 24), находим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu \tilde{u} \sin \nu\pi \cdot e^{-i\nu y} H_{\nu}^{(2)}(kr) d\nu = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_{\nu}^{(2)}(kr) d\nu + \frac{1}{4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos \nu(\pi-\theta)}{\cos \pi\nu} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_{\nu}^{(2)}(kr) d\nu + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos(\pi+2\alpha-\theta)}{\cos \pi\nu} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_{\nu}^{(2)}(kr) d\nu = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3. \end{aligned} \quad (71, 29)$$

Все написанные интегралы сходятся, и уравнение (71, 29) дает, таким образом, решение поставленной задачи. Хорошо известная форма решения рассматриваемой проблемы, принадлежащая Зоммерфельду, может быть легко получена из (71, 29) простым преобразованием контурных интегралов. Для этого заметим, прежде всего, что интегрирование вдоль мнимой оси в интеграле

$$\bar{J}_1 = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_{\nu}^{(2)}(kr) d\nu \quad (71, 30)$$

может быть заменено интегрированием вдоль контура L (рис. 132), после чего можно, принимая во внимание соотношение, существующее



Рис. 132.

щее между функциями Бесселя и Ханкеля, представить \bar{J}_1 в такой форме:

$$\bar{J}_1 = -\frac{1}{2i} \int_{(L)} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \frac{J_\nu(kr)}{\sin \pi\nu} d\nu + \frac{1}{2i} \int_{(L)} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} \frac{J_{-\nu}(kr)}{\sin \pi\nu} d\nu. \quad (71, 31)$$

Нетрудно теперь показать, пользуясь данными в § 56 оценками для $J_\mu(kr)$, что первый из написанных интегралов можно дополнить дугой C_R большого круга радиуса R , расположенной справа от мнимой оси, а второй интеграл — дугой C_R^* того же круга, расположенной слева от мнимой оси, причем, если $R \neq n$, где n — целое число, то интегралы по дугам C_R и C_R^* стремятся к нулю, когда $R \rightarrow \infty$. Мы можем поэтому воспользоваться для вычисления написанных интегралов теоремой о вычетах, причем особыми точками в первом интеграле будут полюсы $\nu = n$, ($n = 1, 2, \dots, \infty$), а во втором — точки $\nu = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$).

Вычисляя соответствующие вычеты, найдем:

$$\bar{J}_1 = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i\pi n}{2}} J_n(kr) = e^{-ikr}. \quad (71, 32)$$

Первое слагаемое в (71, 29) как раз равно поэтому той функции, которая была вычтена из u , чтобы выполнялось условие $u(0) = 0$. Два других интеграла \bar{J}_2 и \bar{J}_3 являются частными случаями более общего интеграла вида

$$\bar{J} = \frac{1}{4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos \psi\nu}{\cos \pi\nu} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)}(k\nu) d\nu, \quad (-\pi < \psi < +\pi), \quad (71, 33)$$

который может быть вычислен следующим образом: заменим в нем функцию Ханкеля $H_\nu^{(2)}(k\nu)$ ее интегральным представлением (56, 1) и изменим порядок интегрирования. Получается:

$$\bar{J} = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikr \operatorname{ch} \eta} d\eta \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos \psi\nu}{\cos \pi\nu} e^{-\nu\eta} d\nu. \quad (71, 34)$$

Чтобы найти интеграл по ν , положим $e^{-i\nu\pi} = t$, что дает:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos \psi\nu}{\cos \pi\nu} e^{-\nu\eta} d\nu = -\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{\psi - i\eta}{\pi}} + t^{-\frac{\psi + i\eta}{\pi}}}{1 + t^2} dt,$$

а используя формулу (34, 4), где следует положить $\theta_{ki} = \frac{\pi}{2}$, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos \psi\nu}{\cos \pi\nu} e^{-\nu\eta} d\nu &= \frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi}{2} - \frac{i\eta}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi}{2} + \frac{i\eta}{2}\right)} \right\} = \\ &= 2i \frac{\cos\frac{\psi}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ch} \eta + \cos \psi}. \end{aligned} \quad (71, 35)$$

¹ Ср. (Д₂ 158), где надо положить $\theta = \pi$.

Поэтому:

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi} \cos \frac{\psi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ch} \eta + \cos \psi} e^{-ikr \operatorname{ch} \eta} d\eta. \quad (71, 35)$$

Запишем этот результат в такой форме:

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi} \cos \frac{\psi}{2} \cdot e^{ikr \cos \psi} \cdot F, \quad (71, 37)$$

где

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}}{\cos \psi + \operatorname{ch} \eta} e^{-ikr (\operatorname{ch} \eta + \cos \psi)} d\eta. \quad (71, 38)$$

Дифференцируя по r , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= -ik \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikr (\operatorname{ch} \eta + \cos \psi)} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} d\eta = -2ike^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ikr z^2} dz = \\ &= -2ike^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2ikr}}, \end{aligned}$$

а так как

$$(F)_{r=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}}{\cos \psi + \operatorname{ch} \eta} d\eta = \frac{\pi}{\cos \frac{\psi}{2}},$$

то

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi}{\cos \frac{\psi}{2}} - \sqrt{2k\pi i} \int_0^r e^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} \frac{dr}{\sqrt{r}} = \\ &= \frac{\pi}{\cos \frac{\psi}{2}} - \frac{2\sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} \int_0^r e^{-ir^2} dr. \end{aligned} \quad (71, 39)$$

Отсюда следует, что искомый интеграл равен

$$\bar{J} = e^{ikr \cos \psi} \left[-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-ir^2} dr \right]. \quad (71, 40)$$

Полагая в полученном результате $\psi = \pi - \theta$ и $\psi = \pi + 2\alpha - \theta$, найдем значения \bar{J}_2 и \bar{J}_3 , после чего (71, 29) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= e^{-ikr} + e^{-ikr \cos \theta} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{2kr} \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-ir^2} dr \right\} + \\ &+ e^{-ikr \cos (\theta - 2\alpha)} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{2kr} \sin \frac{\theta - 2\alpha}{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-ir^2} dr \right\}. \end{aligned} \quad (71, 41)$$

Вспоминая, каким образом функция u связана с вектор-потенциалом A вторичных токов, возникающих в пластинке под действием первичного поля, вектор-потенциал которого дается формулой (71, 24), находим для вектор-потенциала $A_{\text{полн.}}$ суммарного поля значение¹

$$\begin{aligned} A_{\text{полн.}} &= A + A^{(a)} = u - (A^{(a)})_{r=0} e^{-ikr} + A^{(a)} = u + e^{-ikr \cos \theta} - e^{-ikr} = \\ &= e^{-ikr \cos \theta} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2kr} \sin \frac{\theta}{2}} e^{-ir^2} dr \right\} + e^{-ikr \cos(\theta - 2\alpha)} \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2kr} \sin(\frac{\theta}{2} - \alpha)} e^{-ir^2} dr \right\}, \end{aligned} \quad (71, 42)$$

или, если учесть, что

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ir^2} dr = \frac{1}{2},$$

то

$$\begin{aligned} A_{\text{полн.}} &= e^{-ikr \cos \theta} + e^{-ikr \cos \theta} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\sqrt{2kr} \sin \frac{\theta}{2}} e^{-ir^2} dr + \\ &+ e^{-ikr \cos(\theta - 2\alpha)} \cdot \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\sqrt{2kr} \sin(\frac{\theta}{2} - \alpha)} e^{-ir^2} dr. \end{aligned} \quad (71, 43)$$

Это и есть полученная Зоммерфельдом формула.²

71.5. Не останавливаясь более подробно на анализе найденного решения,² отметим еще только, что полученная нами ранее в 16.16 форма решения той же проблемы в виде ряда по функциям Бесселя полуцелых номеров [см. (16, 80)] может быть также получена и из (71, 28), если для обращения воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} v \tilde{u} J_\nu(kr) dv = \\ &= -\frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left\{ 1 - \frac{\cos(\pi + 2\alpha - \theta) \nu + \cos(\pi - \theta) \nu}{2 \cos \pi \nu} \right\} \frac{e^{\frac{i\pi \nu}{2}} J_\nu(kr)}{\sin \pi \nu} d\nu. \end{aligned} \quad (71, 44)$$

В этом интеграле путь интегрирования можно дополнить вправо дугой C_R большого круга радиуса $R \neq \frac{n}{2}$, где n — целое число. Так как при $R \rightarrow \infty$, интеграл по добавленной дуге стремится к нулю,

¹ См. (71, 10).

² См. Франк — Мизес, стр. 878—880, где проводится также исследование этой формулы.

то написанный интеграл равен $-2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-1})_{\nu=\frac{n}{2}}$, где $(a_{-1})_{\nu=\frac{n}{2}}$ — вы-
 чет подинтегральной функции в точке $\nu=\frac{n}{2}$, ($n=1, 2, \dots, \infty$).

Таким образом, получаем:

$$u = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i n \pi} (-1)^n J_n(kr) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i n \pi}{4}} J_{\frac{n}{2}}(kr) \left\{ \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \right. \\ \left. + \cos \frac{n(\pi + 2\alpha - \theta)}{2} \right\},$$

или, принимая во внимание формулу (71, 32):

$$u = e^{-ikr} - J_0(kr) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i n \pi}{4}} J_{\frac{n}{2}}(kr) \left\{ \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \right. \\ \left. + \cos \frac{n(\pi + 2\alpha - \theta)}{2} \right\}. \tag{71, 45}$$

Это дает:

$$A = u - e^{-ikr} = -J_0(kr) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i n \pi}{4}} J_{\frac{n}{2}}(kr) \cdot \left\{ \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \right. \\ \left. + \cos \frac{n(\pi + 2\alpha - \theta)}{2} \right\}, \tag{71, 46}$$

и это и есть искомая форма решения для потенциала вторичного поля.¹

71.6. Для того, чтобы сравнить это решение с ранее найденным нами иным способом в § 16, необходимо еще получить из (71, 46) выражение для суммарного вектор-потенциала $A_{\text{полн.}}$ полного поля и представить его тоже в виде ряда по функциям Бесселя полуцелых номеров. Это можно сделать следующим образом: для суммарного вектор-потенциала $A_{\text{полн.}}$ полного поля находим:

$$A_{\text{полн.}} = u - e^{-ikr} + e^{-ikr \cos \theta} = [e^{-ikr \cos \theta} - J_0(kr)] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i n \pi}{4}} J_{\frac{n}{2}}(kr) \left\{ \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \cos \frac{n(\pi + 2\alpha - \theta)}{2} \right\}, \tag{71, 47}$$

т. е., если принять во внимание формулу²

$$e^{-ikr \cos \theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{i m \pi}{2}} J_m(kr) \cos m\theta, \tag{71, 48}$$

верную при любых значениях kr и θ , то

$$A_{\text{полн.}} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{i m \pi}{2}} J_m(kr) \cos m\theta - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i n \pi}{4}} J_{\frac{n}{2}}(kr) \cdot \left[\cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \right. \\ \left. + \cos \frac{n(\pi + 2\alpha - \theta)}{2} \right]. \tag{71, 49}$$

¹ В таком виде эта формула и дана у Конторовича и Лебедева.

² См. (Д₂ 158), где надо положить $x = -kr$ и учесть, что

$$J_n(-kr) = (-1)^n J_n(kr) = e^{-i n \pi} J_n(kr).$$

Разбивая последнюю сумму на две, соответствующие четным и нечетным значениям n , найдем, после элементарных преобразований:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{полн.}} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{im\pi}{2}} J_m(kr) \cos m\theta - \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{im\pi}{2}} J_m(kr) [\cos m(\pi - \theta) + \\
 &\quad + \cos m(\pi + 2\alpha - \theta)] + \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\frac{2m-1}{4}\pi} J_{\frac{2m-1}{2}}(kr) \times \\
 &\quad \times \left[\cos \frac{2m-1}{2}(\pi - \theta) + \cos \frac{2m-1}{2}(\pi + 2\alpha - \theta) \right] = \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{im\pi}{2}} J_m(kr) [\cos m\theta - \cos m(2\alpha - \theta)] + \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\frac{2m-1}{4}\pi} J_{\frac{2m-1}{2}}(kr) \left[\cos \frac{2m-1}{2}(\pi - \theta) + \cos \frac{2m-1}{2}(\pi + 2\alpha - \theta) \right] = \\
 &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{-\frac{im\pi}{2}} J_m(kr) \sin m\alpha \cdot \sin m(\theta - \alpha) + \\
 &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\frac{2m-1}{4}\pi} J_{\frac{2m-1}{2}}(kr) \cos \frac{2m-1}{2}(\pi - \theta + \alpha) \cos \frac{2m-1}{2}\alpha. \quad (71,50)
 \end{aligned}$$

Введем в это выражение вместо θ и α новые углы, а именно, $\gamma = \pi - \alpha$ и φ , где φ — угол AOM , составляемый радиусом-вектором, проведенным из начала координат в ту точку $M(r, \theta)$, в которой вычисляется значение $A_{\text{полн.}}$ (рис. 133). Тогда

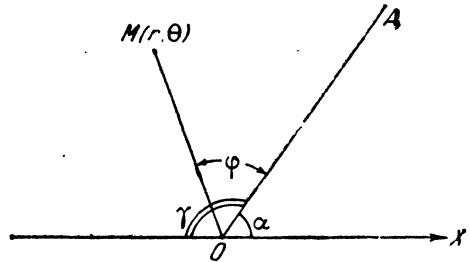


Рис. 133.

так что $\theta = \varphi + \alpha = \varphi + \pi - \gamma$, (71,51)

$$\sin m\alpha \sin m(\theta - \alpha) = (-1)^{m-1} \sin m\gamma \sin m\varphi, \quad (71,52)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\cos \frac{2m-1}{2}(\pi - \theta + \alpha) \cos \frac{2m-1}{2}\alpha = \\
 &= \cos \frac{2m-1}{2}(\pi - \varphi) \cos \frac{2m-1}{2}(\pi - \gamma) = \\
 &= \sin \frac{2m-1}{2}\varphi \cdot \sin \frac{2m-1}{2}\gamma,
 \end{aligned} \right\} \quad (71,53)$$

а подставляя это в (71,50), найдем, учитывая, что $(-1)^m = e^{im\pi}$:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{полн.}} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{im\pi}{2}} J_m(kr) \sin m\gamma \cdot \sin m\varphi + \\
 &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\frac{2m-1}{4}\pi} J_{\frac{2m-1}{2}}(kr) \sin \frac{2m-1}{2}\gamma \cdot \sin \frac{2m-1}{2}\varphi = \\
 &= 2 \sum_{s=1}^{\infty} e^{\frac{is\pi}{4}} J_s(kr) \sin \frac{s\gamma}{2} \cdot \sin \frac{s\varphi}{2}, \quad \text{Im}(\cdot) < 0. \quad (71,54)
 \end{aligned}$$

Это в точности совпадает с ранее найденной формулой (16,80).

Таким образом, мы видим, что обе формы решения — (71,43) и (71,54) — могут быть естественным образом получены из основной формы решения в виде контурного интеграла. В этом Конторович и Лебедев усматривают особое преимущество предлагаемого ими метода перед другими способами. Все же, как мы видели, получение решения по их методу значительно сложнее, чем получение его же указанным в § 16 способом.¹ А так как от данного там решения в виде ряда по бесселевым функциям полуцелых номеров нетрудно перейти с помощью приема, аналогичного использованному в п. 17.9, к представлению того же решения в виде комплексного интеграла, а отсюда и ко второй форме решения — (71,43), то нам представляется, что этот последний порядок проведения решения является более простым и естественным.

§ 72. О диффракции пространственных волн от идеально проводящего клина

72.1. В предыдущем параграфе мы рассмотрели случай, когда электрический вектор первичного поля параллелен ребру клина (оси z), т. е. когда первичный волновой процесс поляризован перпендикулярно оси z . В общем случае любого не зависящего от z волнового процесса можем также, пользуясь той же методикой, полностью решить задачу о диффракции электромагнитных волн от идеально проводящего клина, ребро которого параллельно оси z .

Для этого заметим, прежде всего, что уравнения Максвелла для вторичного поля, вызываемого возникающими на поверхности клина под действием первичного поля токами, будучи записаны в той же цилиндрической системе координат r, θ, z , которой мы пользовались выше, распадаются в этом случае на две независимые группы, именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} &= -\frac{i\omega\mu}{c} H_r, \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} &= \frac{i\omega\mu}{c} H_\theta, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} &= \frac{i\omega\epsilon + 4\pi\sigma}{c} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (72,1)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} &= \frac{i\omega\epsilon + 4\pi\sigma}{c} E_r, \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} &= -\frac{i\omega\epsilon + 4\pi\sigma}{c} E_\theta, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} &= -\frac{i\omega\mu}{c} H_z, \end{aligned} \right\} \quad (72,2)$$

¹ К тому же их метод требует применения искусственного приема — вычитания из искомого решения некоторой, принципиально чуждой природе задачи, функции, которая проходит через все вычисления, но, естественно, исключается из окончательного решения.

которые приводятся к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k^2 E_z &= 0, \\ H_r &= \frac{ic}{\mu \omega r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \theta}, & k^2 &= \frac{\omega \varepsilon - 4\pi i \sigma}{c^2} \omega \mu, \\ H_\theta &= -\frac{ic}{\mu \omega} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (72,3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + k^2 H_z &= 0, \\ E_r &= \frac{c}{(i\omega \varepsilon + 4\pi \sigma) r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \theta}, \\ E_\theta &= -\frac{c}{i\omega \varepsilon + 4\pi \sigma} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (72,4)$$

К этим уравнениям добавляются граничные условия, которые для группы (72,3) сводятся к требованию, чтобы на гранях клина, т. е. при $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, тангенциальная составляющая суммарного электрического поля обращалась в нуль. Это дает:¹

$$\left. \begin{aligned} (E_z)_{\theta=\alpha} &= - (E_z^{(a)})_{\theta=\alpha}, \\ (E_z)_{\theta=\beta} &= - (E_z^{(a)})_{\theta=\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (72,5)$$

Для группы (72,4) соответствующее граничное условие получается из требования, что должна обращаться в нуль на сторонах клина радиальная компонента полного электрического поля. Это дает, согласно (72,4):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} &= - \left(\frac{\partial H_z^{(a)}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha}, \\ \left(\frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right)_{\theta=\beta} &= - \left(\frac{\partial H_z^{(a)}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (72,6)$$

Группа (72,3) с граничными условиями (72,5) ничем не отличается от решенной в п.п. 71.1 — 71.2 задачи [ср. уравнения (71,3) и (71,7)]. Поэтому примененная там для ее решения методика полностью применима и здесь. Что же касается группы (72,4), то для нее основное уравнение для H_z тоже не отличается от уравнения (71,3). Различие имеется только в граничных условиях. Поэтому метод Конторовича—Лебедева может быть применен и здесь без всяких изменений, причем только нужно будет теперь перейти от граничных условий (72,6) к соответствующим условиям для „преобразованной“ функции, что выполняется совершенно подобно тому, как это делалось для граничных условий типа (71,7) в п. 71.2.

72.2. В предыдущих разделах мы показали, как получить методом Конторовича—Лебедева общее решение задачи о диффракции электро-

¹ Здесь, как раньше, $E^{(a)}$ и $H^{(a)}$ — векторы поля в первичной волне.

магнитных волн от идеально проводящего клина, если первичное внешнее поле не зависит от z , т. е. не зависит от координаты в направлении ребра клина.

Для того, чтобы показать, каким образом тот же метод может быть использован для решения проблемы диффракции от клина и в том случае, когда первичное поле зависит от всех трех координат r, θ, z , рассмотрим вопрос о нахождении параллельной ребру клина компоненты E_z вторичного электрического поля, вызванного наличием клина, когда внешнее поле создается произвольными источниками, так что z -овая компонента его $E_z^{(a)}$ — произвольная функция от r, θ, z .

Согласно (3,22), E_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0.$$

т. е. в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0, \quad (72,7)$$

и, кроме того, граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} (E_z)_{\theta=\alpha} &= -(E_z^{(a)})_{\theta=\alpha}, \\ (E_z)_{\theta=\beta} &= -(E_z^{(a)})_{\theta=\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (72,8)$$

Разлагаем как E_z , так и $E_z^{(a)}$ с помощью интеграла (или ряда) Фурье на синусоидальные составляющие по оси z , причем, например, в случае интеграла Фурье будет:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_z(r, \theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_m e^{imz} dm, \\ E_z^{(a)} &= E_z^{(a)}(r, \theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^{(a)} e^{imz} dm, \end{aligned} \right\} \quad (72,9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_m &= u_m(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(r, \theta, \zeta) e^{-im\zeta} d\zeta, \\ u_m^{(a)} &= u_m^{(a)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^{(a)}(r, \theta, \zeta) e^{-im\zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad 72,10$$

а в случае периодического по оси z поля интегралы заменяются соответствующими рядами.

Умножая (72,7) на $e^{-imz} dz$, интегрируя по z от минус бесконечности до плюс бесконечности и пользуясь первой формулой (72,10), убеждаемся, что u_m должно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \theta^2} + (k^2 - m^2) u_m = 0, \quad (72,11)$$

тогда как, умножая соотношения (72,8) на $e^{-imz} dz$ и интегрируя в тех же пределах, получим:

$$\left. \begin{aligned} (u_m)_{\theta=\alpha} &= - (u_m^{(\alpha)})_{\theta=\alpha}, \\ (u_m)_{\theta=\beta} &= - (u_m^{(\alpha)})_{\theta=\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (72,12)$$

Так как уравнение (72,11) отличается от уравнения (71,3) только тем, что в (72,11) стоит $s^2 = k^2 - m^2$ вместо k^2 в (71,3), и так как граничные условия (72,12) совершенно совпадают по типу с граничными условиями (71,7), то данный в п. 71.2 метод интегрирования уравнения (71,3) без всяких изменений переносится на уравнение (72,11), причем только нужно в общих формулах п. 71.2 заменить k через $\sqrt{k^2 - m^2}$. Найдя таким путем общее выражение u_m , получим затем, пользуясь первой формулой (72,9), искомую величину E_z .

Таким образом, видим, что и в случае общей пространственной диффракционной задачи E_z всегда может быть найдена в квадратурах.

Глава XXIII

О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ ПРИ УЧЕТЕ ЕЕ СФЕРИЧНОСТИ И НЕОДНОРОДНОСТИ АТМОСФЕРЫ

§ 73. Случай вертикального излучателя

73.1. Рассмотрим еще вкратце вопрос о распространении радиоволн над поверхностью земли, принимаемой за однородную проводящую сферу, и наметим общий путь для решения этой задачи при учете возможной неоднородности атмосферы.

Начнем с рассмотрения поля системы радиальных („вертикальных“) токов, распределение которых в пространстве обладает симметрией вращения вокруг некоторой оси,¹ которую примем за ось сферической системы координат r, θ, φ . Поскольку поле не будет при этом зависеть от φ ² и поскольку, очевидно, $j_\theta^{(e)} = j_\varphi^{(e)} = 0$, $H_r = H_\theta = 0$, $E_\varphi = 0$ то, обозначая через ϵ' величину

$$\epsilon' = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (73,1)$$

которую назовем комплексной диэлектрической постоянной среды, можем написать уравнения Максвелла в такой форме:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot H_\varphi) = \frac{i\omega\epsilon'}{c} E_r + \frac{4\pi}{c} j_r^{(e)}, \quad (73,2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \frac{i\omega\epsilon'}{c} r E_\theta, \quad (73,3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -\frac{i\omega\mu}{c} r H_\varphi. \quad (73,4)$$

¹ Оси излучателя.

² Если свойства среды не зависят от φ , что мы и будем предполагать.

Здесь $\mathbf{j}^{(e)}$ — как всегда, вектор плотности первичных (сторонних) токов, и все величины считаются зависящими от времени только через посредство множителя $e^{i\omega t}$.

Полагаем

$$rE_\theta = \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}, \quad (73,5)$$

где v — некоторая вспомогательная функция.

Заметим сразу же, что если известна какая-нибудь одна функция $v = v_1$, удовлетворяющая условию (73,5), то тому же условию будет удовлетворять и

$$v = v_1 + f(r) + \psi(\theta), \quad (73,6)$$

где $f(r)$ и $\psi(\theta)$ — произвольные функции своих аргументов.

Подставляя rE_θ из (73,5) в (73,3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{i\omega}{c} \frac{\partial v}{\partial \theta} + rH_\varphi \right) = 0,$$

т. е.

$$rH_\varphi = -\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + F(\theta), \quad (73,7)$$

где F — знак произвольной функции.

Не уменьшая общности решения, можно, очевидно, положить $F(\theta) = 0$, ибо если при каком-либо допустимом $v = v_1$ получилось бы $F(\theta) \neq 0$, то, вводя в (73,7), вместо $v = v_1$, функцию v из уравнения (73,6), найдем:

$$rH_\varphi = -\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + F(\theta) = -\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{i\omega}{c} \psi'(\theta) + F(\theta),$$

а полагая

$$\psi'(\theta) = \frac{ic}{\omega} F(\theta), \text{ т. е. } \psi(\theta) = \frac{ic}{\omega} \int F(\theta) d\theta + \text{const.}, \quad (73,8)$$

получим как раз соотношение:

$$rH_\varphi = -\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (73,9)$$

Заметим еще, что хотя функция $\psi(\theta)$ при этом уже определена, но функция $f(r)$ пока остается еще совершенно произвольной, — обстоятельство, которое мы используем ниже.

(73,4), (73,5) и (73,9) дают вместе:¹

$$E_r = \frac{\mu\omega^2}{c^2} v + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (73,10)$$

Подставляя это в оставшееся уравнение (73,2), получим:

$$\varepsilon' \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\mu\omega^2}{c^2} v \right\} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = -\frac{4\pi}{i\omega} j, \quad (73,11)$$

причем опускаем здесь и в дальнейшем значки у $j_r^{(e)}$.

¹ Считаем, что μ не зависит от координат.

Это и есть то основное дифференциальное уравнение, к которому сводится все решение задачи. С помощью его формула (73,10) для E_r может быть переписана в таком виде:

$$E_r = -\frac{1}{\varepsilon'} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{4\pi}{i\omega} j \right], \quad (73,12)$$

а если в рассматриваемой точке поверхности отсутствуют текущие сквозь поверхность токи (как это обычно и бывает), то просто

$$E_r = -\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (73,13)$$

К уравнению (73,11) должны быть еще добавлены граничные условия на поверхностях раздела различных сред (эти поверхности будем считать концентрическими сферами с общим центром в начале координат), сводящиеся к требованию непрерывности тангенциальных составляющих E_θ и H_φ при проходе через такие поверхности.

Обозначая радиус поверхности раздела через R , находим из (73,5) и (73,9), пользуясь теми же обозначениями, как выше в случае плоской задачи:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{R+0} = \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{R-0}, \quad \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right)_{R+0} = \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right)_{R-0} \quad (73,14)$$

Так как эти соотношения должны выполняться в любой точке поверхности раздела, то можно их проинтегрировать по θ .¹ Это дает:

$$\left. \begin{aligned} (v)_{R+0} &= (v)_{R-0} + C_1 \\ \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{R+0} &= \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{R-0} + C_2, \end{aligned} \right\} \quad (73,15)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые можно положить равными нулю, ибо, как уже подчеркивалось выше, в выражении каждой из функций v для каждой отдельной области оставалась произвольная функция от r , и этими функциями можно всегда так распорядиться, чтобы на границах области как сама функция v , так и ее производная по r , принимали любые заданные значения.

Итак, можно положить на поверхностях раздела $r=R$:

$$\left. \begin{aligned} (v)_{R+0} &= (v)_{R-0}, \\ \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{R+0} &= \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{R-0}. \end{aligned} \right\} \quad (73,16)$$

¹ Второе из них можно проинтегрировать по θ , вообще говоря, только в том случае, когда ε' не зависит от θ .

² Последнее условие, как уже указывалось, вообще говоря, верно лишь в том случае, когда ε' не зависит от θ . В случае наличия такой зависимости система (73,16) должна быть заменена такой:

$$(v)_{R+0} = (v)_{R-0}, \quad \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right)_{R+0} = \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right)_{R-0}.$$

К этому надо еще добавить условие на бесконечности, которое, если вся система излучателей лежит внутри конечной области и если имеется хотя бы сколь угодно малая, но все же конечная проводимость уходящей на бесконечность среды, запишется так:

$$(v)_{r=\infty} = 0, \quad (73,17)$$

а также условие конечности функции v при $r=0$.¹

Если одна из соприкасающихся сред — идеальный проводник, то для нее $|\epsilon'| = \infty$, и второе из уравнений (73.16) дает:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R} = 0. \quad (73,18)$$

73. 2. Во всем предыдущем изложении как ϵ , так и σ , могли быть какими угодно функциями от r и от θ .² Рассмотрим теперь вопрос о решении уравнения (73,11) в том случае, когда как ϵ , так и σ зависят только от r (т. е. только от высоты).

Полагая в (73,11) $\cos \theta = x$, можем переписать его в такой форме:

$$\epsilon' \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\epsilon'} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\mu \omega^2}{c^2} v \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -\frac{4\pi}{i\omega} j, \quad (73,19)$$

после чего умножим его на $P_n(x) dx$, где $P_n(x)$ — n -ый полином Лежандра, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1) P_n = 0, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

¹ Если считать землю идеально проводящей, то последнее условие отпадает.

² Уравнение (73,18) означает просто то, что на поверхности идеального проводника $E_\theta = 0$. Первое же условие (73,16), выведенное из требования, что тангенциальная составляющая H_φ магнитного поля непрерывна при проходе через поверхность раздела сред, теряет в данном случае смысл, ибо при бесконечно-большой проводимости одной из сред по поверхности ее (т. е. в бесконечно-тонком слое) текут конечные поверхностные токи, которые полностью экранируют внутренность идеального проводника от проникновения туда переменного магнитного поля. При таких условиях H_φ уже не непрерывна на поверхности, а может там претерпевать разрыв, величина которого связана с плотностью $j_{\text{пов.}}$ поверхностного тока в рассматриваемой точке соотношением:

$$H_\varphi = \frac{4\pi}{c} \times j_{\text{пов.}}. \quad (A)$$

Так как величина $j_{\text{пов.}}$ не задается заранее и может быть найдена только в результате решения рассматриваемой волновой задачи, то соотношение (A) не дает граничного условия для H_φ , а стало быть и для v , а является лишь формулой, из которой, по уже известному H_φ , можно найти $j_{\text{пов.}}$.

³ С указанной выше оговоркой относительно условий применимости второй из формул (73,16).

и проинтегрируем в пределах от -1 до $+1$.¹ Замечая, что интегрирование по частям дает, из-за обращения в нуль выделяющихся при этом на пределах членов:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_n \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx &= - \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} v \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] dx = -n(n+1) \int_{-1}^{+1} v P_n dx, \end{aligned}$$

и вводя обозначения

$$v_n = v_n(r) = \int_{-1}^{+1} v P_n(x) dx; \quad j_n = \int_{-1}^{+1} P_n(x) dx, \quad (73,20)$$

получим

$$\varepsilon' \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dv_n}{dr} \right) + \frac{\mu \omega^2}{c^2} v_n \right] - \frac{n(n+1)}{r^2} v_n = -\frac{4\pi}{i\omega} j_n. \quad (73,21)$$

Если мы знаем решение уравнения без правой части (однородного), то, пользуясь методом вариации произвольных постоянных, легко найдем и общее решение уравнения (73,21) при произвольной правой части. Для полного определения решения, в которое войдут две произвольные постоянные, будут служить граничные условия для функции v_n , которые легко получим из первичных граничных условий для функции v , помножая их на $P_n(x) dx$ и интегрируя от -1 до $+1$. Отметим, в частности, что условие $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$ на поверхности идеального проводника обращается при этом в

$$\frac{dv_n}{dr} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial v}{\partial r} P_n(x) dx = 0, \quad (n \geq 0). \quad (73,22)$$

Если, таким образом, получены величины v_n , которые представляют собой не что иное, как коэффициенты разложения искомой функции v

¹ То, что нужно умножать именно на $P_n(x) dx$, следует непосредственно из общих соображений § 15, ибо однородное уравнение

$$\varepsilon' \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\mu \omega^2}{c^2} v \right] + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0$$

имеет частные решения вида

$$v = f(r) \psi(x),$$

причем, для $\psi(x)$ получается уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\psi}{dx} \right] + \lambda \psi = 0, \quad \lambda = \text{const.},$$

имеющее ограниченные, отличные от нуля решения во всем интервале $(-1 \leq x \leq +1)$ только при $\lambda = n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ (ср. п. 20. 2).

по полиномам Лежандра, то сама функция v представляется, как известно, рядом

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) v_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) v_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (73,23)$$

на чем, собственно, формальное нахождение решения и заканчивается. Ввиду того, однако, что такие ряды, как правило, обладают настолько медленной сходимостью, что они практически непригодны для исследования характера полученного решения, их необходимо сперва преобразовать к более удобному для использования виду. В этом отношении часто оказывается весьма полезным прием, аналогичный примененному нами в п. 17.9, основанный на рассмотрении значения комплексного интеграла:¹

$$Q = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{tf(t) P_{t-1/2}[\cos(\pi - \theta)] dt}{\cos \pi t}, \quad (73,24)$$

в котором путь интегрирования (L) — это бесконечная петля, охватывающая вещественную положительную полуось (рис. 134), а $f(t)$ —

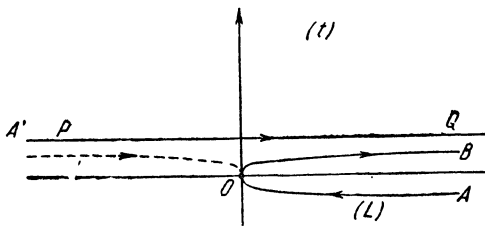


Рис. 134.

какая-нибудь функция, регулярная внутри контура (L) , или имеющая на вещественной оси конечное число полюсов в точках t_1, t_2, \dots, t_s . Для простоты будем считать, что ни один из этих полюсов не совпадает с корнями функции $\cos \pi t = 0$, т. е. с $t'_n = n + 1/2$, где n — целое ≥ 0 , и что точка $t = 0$ — тоже регулярная точка функции $f(t)$. Само собой разумеется, что интеграл (73,24) предполагается сходящимся.

Так как значение Q равно сумме вычетов подинтегральной функции в точках $t_k, k = 1, 2, \dots, s$ и в точках $t'_n = n + 1/2, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, то получается, если обозначить через $(a_{-1})_k$ вычеты функции $f(t)$ в точках t_k :

$$Q = \sum_{k=1}^{k=s} \frac{t_k P_{t_k-1/2}[\cos(\pi - \theta)]}{\cos \pi t_k} (a_{-1})_k - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1/2) f(n + 1/2) P_n[\cos(\pi - \theta)],$$

а так как

$$P_n[\cos(\pi - \theta)] = (-1)^n P_n(\cos \theta) = (-1)^n P_n(x),$$

¹ Этот прием в применении к задаче о распространении волны в однородной атмосфере, как неограниченной, так и в присутствии однородного по своим свойствам слоя Хевисайда, предложен Ватсоном. См. Proc. Roy. Soc. 95, 83, 1918.

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) f(n + 1/2) P_n(x) = -\pi Q + \pi \sum_{k=1}^{k=s} \frac{t_k P_{t_k - 1/2} [\cos(\pi - \theta)]}{\cos \pi t_k} (a_{-1})_k. \quad (73,25)$$

Сравнивая (73,23) и (73,25), видим, что если положить

$$f(n + 1/2) = v_n, \quad (73,26)$$

где $v_n = v_n(r)$ — находимые в результате решения уравнений (73,21), при соответствующих граничных условиях, величины

$$v_n = \int_{-1}^{+1} v P_n(x) dx; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad (73,27)$$

то (73,25) дает возможность свести исходный ряд (73,23) к комплексному интегралу Q , дополненному, вообще говоря, конечной суммой (она во многих случаях отсутствует).

С другой стороны, если функция $f(t)$ — четная — что, как мы сейчас покажем, в случае рассматриваемой здесь задачи всегда может быть достигнуто, — то интеграл по петле (L) может быть превращен в интеграл по бесконечной прямой, параллельной вещественной оси и лежащей непосредственно над ней. Действительно, так как, по известному свойству функций P_μ , имеет место соотношение

$$P_{t-1/2}(x) = P_{-t-1/2}(x),$$

т. е. $P_{t-1/2}(x)$ — четная функция от t , то, разбивая путь интегрирования (L) в интеграле Q на две части, — от бесконечности до нуля под вещественной осью (т. е. вдоль AO ; рис. 134) и от нуля до бесконечности над ней (путь OB) — и заменяя в первом из них t на $-t$, переведем этот последний интеграл в интеграл от той же функции по „отраженному в начале координат“ пути $A'O$, т. е. от минус бесконечности до нуля над отрицательной вещественной полуосью. Объединяя его, далее, с интегралом по OB , превратим исходный интеграл по (L) в интеграл от той же функции, но уже по пути, идущему из минус бесконечности до плюс бесконечности непосредственно над вещественной осью.¹ Этот же интеграл обычно может быть сведен к сумме вычетов подинтегральной функции в верхней полуплоскости или может быть вычислен каким-нибудь иным путем. Таким образом, исходный ряд (73,23) либо непосредственно вычисляется, либо преобразуется к новому виду, причем вновь полученный ряд зачастую схо-

¹ В качестве пути интегрирования может быть взят не только путь $A'OB$, но и любой другой путь, получаемый непрерывной деформацией пути $A'OB$, если только между обоими этими путями не лежит ни одна особая точка функции $f(t)$.

дится несравненно лучше исходного, давая тем самым возможность надлежащего количественного исследования решения.

В данном только что выводе существенную роль играло утверждение, что в нашем случае всегда можно найти четную функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям (73,26). Для доказательства этого утверждения заметим, прежде всего, что функция $F(t)$, получаемая из значения

$$v_n = \int_{-1}^{+1} v P_n(x) dx = \psi(n)$$

заменой n на $t - 1/2$, либо равна $\int_{-1}^{+1} v P_{t-1/2}(x) dx$, либо отличается от

него членом, обращающимся в нуль при $t = n + 1/2$, где n — целое число. Отсюда следует, что так как $P_{t-1/2}(x) = P_{-t-1/2}(x)$, то либо функция $F(t) = \psi(t - 1/2)$ сама по себе обладает свойством четности по отношению к t и может быть, следовательно, принята за $f(t)$, либо же она должна допускать дополнение до четной, причем добавляемая часть должна обращаться в нуль при значениях $t = n + 1/2$. В этом последнем случае следует подставлять в интеграл (73,24) вместо $f(t)$ именно эту, дополненную до четной, функцию, после чего изложенный выше метод может уже применяться обычным образом.¹

§ 74. Поле вертикального излучателя в предположении идеальной проводимости земли

74.1. В качестве примера рассмотрим применение изложенных в предыдущем параграфе общих соображений к нахождению поля элементарного вертикального излучателя (диполя) с моментом P , расположенного по радиусу на высоте h над поверхностью идеально проводящей сферы радиуса $r = a$, окруженной однородной атмосферой.

Излучатель будем считать расположенным по оси, т. е. при $\theta = 0$, и будем рассматривать его как предельный случай весьма короткой цилиндрической антенны длины l и весьма малого кругового сечения, основание которой находится на расстоянии $R = a + h$ от центра сферы и в которой сторонние токи \mathbf{j} распределены с равномерной плотностью по сечению и по длине.

Уравнение (73,21) принимает при этом такой вид:

$$\frac{d^2 v_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] v_n = -\frac{4\pi}{i\omega} j_n \quad (74,1)$$

где

$$j_n \begin{cases} \neq 0 & \text{при } R \leq r \leq R + l; \\ = 0 & \text{при всех остальных } r. \end{cases} \quad (74,2)$$

¹ Все это, конечно, лишь при том условии, что получающийся при этом интеграл (73,24) имеет смысл.

Считая радиус ρ сечения антенны малой высшего порядка по сравнению с ее длиной l , можем заменить нашу цилиндрическую антенну конической (рис. 135) с боковой поверхностью, определяемой уравнением $\theta = \frac{\rho}{R} = \text{const.}$, и основаниями при $r_1 = R$ и $r_2 = R + l$. При этом получается, при $R \leq r \leq R + l$, если принять во внимание, что l и ρ — бесконечно-малы:

$$j_n = j \int_{\theta = \frac{\rho}{R}}^{\theta = 0} P_n(x) dx = j \int_{\theta = 0}^{\theta = \frac{\rho}{R}} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx$$

$$\approx j P_n(0) \cdot \frac{\theta^2}{2} \Big|_0^{\rho/R} = j \frac{\rho^2}{2R} = \frac{I}{2\pi R}, \quad (74,3)$$

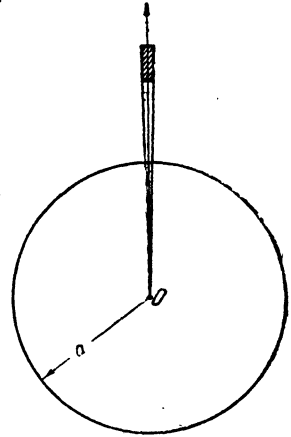


Рис. 135.

где $I = j\pi\rho^2$ — полный ток в антенне, и учтено, что $P_n(0) = 1$.

С уравнением (74,1) мы уже встречались в § 20,¹ причем было показано, что его общий интеграл имеет вид (20,103), именно:

$$v_n = M u_n^{(1)}(r) + N u_n^{(2)}(r) + \frac{\pi^2}{\omega} \int_a^r [u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)}(r) - u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)}(r)] j_n d\xi, \quad (74,4)$$

где M и N — постоянные и

$$u_n^{(1)}(r) = \sqrt{r} H_{n+1/2}^{(1)}(kr); \quad u_n^{(2)}(r) = \sqrt{r} H_{n+1/2}^{(2)}(kr). \quad (74,5)$$

Полагая, как всегда, $\text{Im}(k) < 0$ и учитывая (74,2) и (74,3), видим, что при $r \rightarrow \infty$ (74,4) дает:

$$(v_n)_{r \rightarrow \infty} = u_n^{(1)}(r) \left[M + \frac{\pi I}{2R\omega} \int_R^{R+l} u_n^{(2)}(\xi) d\xi \right] +$$

$$+ u_n^{(2)}(r) \left[N - \frac{\pi I}{2R\omega} \int_R^{R+l} u_n^{(1)}(\xi) d\xi \right] \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left\{ e^{-i \frac{(n+1)\pi}{2}} \cdot e^{ikr} \left[M + \frac{\pi I}{2\omega R} \int_R^{R+l} u_n^{(2)}(\xi) d\xi \right] + \right.$$

$$\left. + e^{i \frac{(n+1)\pi}{2}} \cdot e^{-ikr} \left[N - \frac{\pi I}{2\omega R} \int_R^{R+l} u_n^{(1)}(\xi) d\xi \right] \right\}, \quad (74,6)$$

а так как на бесконечности v_n должно обращаться в нуль, то должно быть

$$M = - \frac{\pi I}{2\omega R} \int_R^{R+l} u_n^{(2)}(\xi) d\xi. \quad (74,7)$$

¹ См. (20,97).

С другой стороны, на поверхности идеально проводящего шара должно быть, согласно (73,22):

$$\left(\frac{dv_n}{dr}\right)_{r=a} = 0, \quad (74,8)$$

т. е.

$$Mu_n^{(1)'}(a) + Nu_n^{(2)'}(a) = 0,$$

так что

$$N = -M \frac{u_n^{(1)'}(a)}{u_n^{(2)'}(a)}. \quad (74,9)$$

Переходя к предельному случаю бесконечно-короткой антенны и полагая при этом $\lim_{l=0} Il = P$, получим из (74,7), (74,9) и (74,5):

$$M = -\frac{\pi P}{2\omega R} u_n^{(2)}(R) = -\frac{\pi P}{2\omega \sqrt{R}} H_{n+1/2}^{(2)}(kR), \quad (74,10)$$

$$N = \frac{\pi P}{2\omega R} \frac{u_n^{(1)'}(a)}{u_n^{(2)'}(a)} u_n^{(2)}(R), \quad (74,11)$$

так что (74,4) принимает теперь такой вид:

$$\begin{aligned} v_n(r) = & \frac{\pi P u_n^{(2)}(R)}{2\omega R u_n^{(2)'}(a)} [u_n^{(2)}(r) u_n^{(1)'}(a) - u_n^{(1)}(r) u_n^{(2)'}(a)] + \\ & + \frac{\pi^3}{\omega} \lim_{l=0} \int_a^r [u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)}(r) - u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)}(r)] j_n d\xi. \end{aligned} \quad (74,12)$$

Так как здесь

$$\left. \begin{aligned} j_n &= \frac{I}{2\pi R} \text{ при } R \leq r \leq R + l, \\ j_n &= 0 \text{ при всех остальных значениях } r, \end{aligned} \right\} \quad (74,13)$$

то входящий в (74,12) интеграл, очевидно, равен нулю при $r < R$, тогда как при $r > R$ он имеет значение:

$$\begin{aligned} & \frac{I}{2\pi R} \lim_{l=0} \int_R^{R+l} [u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(1)}(r) - u_n^{(1)}(\xi) u_n^{(2)}(r)] d\xi = \\ & = \frac{P}{2\pi R} [u_n^{(2)}(R) u_n^{(1)}(r) - u_n^{(1)}(R) u_n^{(2)}(r)]. \end{aligned} \quad (74,14)$$

(74,12) дает поэтому:

$$v_n(r) = \frac{\pi P}{2\omega R u_n^{(2)'}(a)} \times \begin{cases} [u_n^{(2)}(r) u_n^{(1)'}(a) - u_n^{(1)}(r) u_n^{(2)'}(a)] u_n^{(2)}(R) & \text{при } r < R, \\ [u_n^{(2)}(R) u_n^{(1)'}(a) - u_n^{(1)}(R) u_n^{(2)'}(a)] u_n^{(2)}(r) & \text{при } r \geq R, \end{cases} \quad (74,15)$$

причем при $r = R$ оба выражения совпадают.

Если теперь предположить, что излучатель находится на самой поверхности земли, то надо положить в (74,15) $R = a$. Это дает, если принять во внимание, что $u_n^{(1)'}(a) u_n^{(2)}(a) - u_n^{(1)}(a) u_n^{(2)'}(a) = \frac{4i}{\pi}$ ¹:

$$[v_n(r)]_{R=a} = \frac{2Pi}{\omega a u_n^{(2)'}(a)} u_n^{(2)}(r), (r \geq a). \quad (74,16)$$

Подставляя в (73,23) выражения (74,15) или (74,16), получим иско-
мые функции v для элементарного излучателя, находящегося над
землей или на земле. В частности, в этом последнем случае найдем:

$$\left. \begin{aligned} v = v(r, \theta) &= \frac{Pi}{\omega a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{u_n^{(2)'}(a)} u_n^{(2)}(r) P_n(\cos \theta), \\ u_n^{(2)}(r) &= \sqrt{r} H_{n+1/2}^{(2)}(kr), \end{aligned} \right\} \quad (74,17)$$

и эта формула и дает решение задачи.

74.2. Нетрудно, однако, видеть, что полученное в такой форме решение совершенно непригодно для практических расчетов из-за чрезвычайно медленной сходимости ряда (74,17). В самом деле, пусть рассматриваются волны длиной от нескольких сотен метров и до нескольких километров.² Пренебрегая проводимостью воздуха, находим тогда для k при $\lambda = 10^5$ см:

$$k \cong \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot 10^{-5},$$

а так как аргумент ханкелевых функций в формуле (74,17) равен $kr \geq ka$, где $a \approx 6.3 \cdot 10^8$ см, то аргумент этот порядка $ka \approx 4 \cdot 10^4$. Поэтому, в тех членах ряда (74,17), номер которых мал по сравнению с ka , т. е. во всяком случае в первых нескольких сотнях, если не больше, членов можно пользоваться при оценке их величины обычными асимптотическими формулами

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(2)}(r) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i \frac{(n+1)\pi}{2}} e^{-ikr}, \\ u_n^{(2)'}(a) &\approx -iku_n^{(2)}(a) \approx -ik \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i \frac{(n+1)\pi}{2}} e^{-ika}, \end{aligned} \right\}$$

которые дают для n -ого члена ряда (74,17) при $n \ll ka$:

$$\frac{2n+1}{u_n^{(2)'}(a)} u_n^{(2)}(r) P_n(\cos \theta) \approx \frac{i}{k} e^{-ik(r-a)} (2n+1) P_n(\cos \theta).$$

¹ См. (20,104).

² Для более коротких волн следует уже учитывать конечную проводимость земли.

Отсюда видно, что члены ряда (74,17) сначала не убывают, а растут, что делает его совершенно непригодным для практических расчетов. Однако, этот ряд может быть суммирован с помощью указанного выше приема, т. е. путем превращения его в комплексный интеграл вида (73,24).

Для того, чтобы это сделать, нужно первым делом найти такую функцию $f(t)$, которая при значениях $t = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, совпадала бы с даваемыми формулой (74,16) значениями $[v_n(r)]_{R=a}$ и, кроме того, удовлетворяла бы условию четности.

Из первого требования вытекает, что должно быть

$$f(n + 1/2) = v_n = \frac{2Pi}{\omega a} \frac{u_n^{(2)}(r)}{u_n^{(2)'}(a)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (74,18)$$

Попытаемся удовлетворить этому условию с помощью допущения, что такая связь между значениями функций $f(n + 1/2)$ и v_n имеет место не только при целых положительных значениях n , а вообще при любых. Тогда, при произвольных вещественных или комплексных t , должно быть

$$f(t) = \frac{2Pi}{\omega a} \cdot \frac{u_{t-1/2}^{(2)}(r)}{u_{t-1/2}^{(2)'}(a)}, \quad (74,19)$$

и легко видеть, что так выбранная функция $f(t)$ удовлетворяет также условию четности.

Действительно, (74,5) показывает, что

$$u_{t-1/2}^{(2)}(r) = \sqrt{r} H_t^{(2)}(kr), \quad (74,20)$$

а заменяя здесь t на $(-t)$ и учитывая известное соотношение:¹

$$H_{-t}^{(2)}(z) = e^{-it\pi} H_t^{(2)}(z), \quad (74,21)$$

получим:

$$u_{-t-1/2}^{(2)}(r) = \sqrt{r} H_{-t}^{(2)}(kr) = e^{-it\pi} \sqrt{r} H_t^{(2)}(kr) = e^{-it\pi} u_{t-1/2}^{(2)}(r). \quad (74,22)$$

Дифференцируя далее это соотношение по r и заменяя в результате r через a , найдем:

$$u_{-t-1/2}^{(2)'}(a) = e^{-it\pi} u_{t-1/2}^{(2)'}(a). \quad (74,23)$$

Подставляя значения (74,22) и (74,23) в формулу (74,19), в которой заменяем t на $(-t)$, получаем:

$$f(-t) = \frac{2Pi}{\omega a} \cdot \frac{u_{-t-1/2}^{(2)}(r)}{u_{-t-1/2}^{(2)'}(a)} = \frac{2Pi}{\omega a} \cdot \frac{u_{t-1/2}^{(2)}(r)}{u_{t-1/2}^{(2)'}(a)} = f(t), \quad (74,24)$$

¹ См. (Д₂ 47).

т. е. $f(t)$ — действительно четная функция от t , притом мероморфная, поскольку $u_{t-1/2}^{(2)}(z)$ — голоморфная на всей плоскости функция от t .¹ Поэтому для суммирования ряда (74,17) можно непосредственно воспользоваться общей формулой (73,25), причем, так как нетрудно установить, что $f(t)$ не имеет полюсов на вещественной оси, то добавочная сумма в правой части этой формулы пропадает, и получается результат:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) v_n P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2i} \int_{(L)} \frac{tf(t) P_{t-1/2}[\cos(\pi - \theta)] dt}{\cos \pi t} = \\ &= \frac{P}{\omega a} \int_{(L)} \frac{tu_{t-1/2}^{(2)}(r) P_{t-1/2}[\cos(\pi - \theta)] dt}{u_{t-1/2}^{(2)}(a) \cos \pi t}. \end{aligned} \quad (74,25)$$

Путем интегрирования служит здесь прямая, идущая из минус бесконечности в плюс бесконечность параллельно вещественной оси на таком расстоянии $\delta > 0$ над ней, чтобы в полосе $0 \leq \text{Im}(t) \leq \delta$ функция $f(t)$ была голоморфной.

Исходя из формулы (74,25), можно уже получить удобные для практического использования выражения для функции v . Впервые пригодные в некоторых случаях формулы такого рода были получены Ватсоном,² от которого идет и самый метод сведения первичного ряда к комплексному интегралу, а затем, в совсем недавнее время, В. А. Фоком, рассмотревшим весь вопрос заново и давшим чрезвычайно изящное и совершенно общее решение его.³ Подробное изложение метода и результатов В. А. Фока содержится в его монографии „Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности“,⁴ к которой мы и отсылаем читателя.⁵

74.3. Ватсоном было исследовано аналогичным образом также распространение волн от вертикального излучателя в предположении, что на некоторой высоте над землей имеется концентрический с ней отражающий слой (слой Хевисайда). Найденное им решение имеет весьма сложный и мало наглядный вид, и мы его здесь воспроизводить не будем, отсылая за всеми подробностями к оригинальной статье Ватсона.⁶ Заметим только, что если, при рассмотрении вопроса о распространении волн между двумя концентрическими идеально проводящими сферами, отказаться от допущения об абсолютной однород-

¹ Это сразу видно из формулы (74,20) и из того, что $H_t^{(2)}(z)$ — голоморфная функция от t на всей плоскости t .

² Watson G. N., Proc. Roy. Soc., A, 95, 83, 1918. См. также: Франк—Мизес, гл. XXIII, § 4.

³ Притом не только в предположении идеальной проводимости земли, но и в том случае, когда эта проводимость конечна.

⁴ Изд. АН СССР, М.—Л., 1946. См. также: В. А. Фока, ЖЭТФ, 15, 479, 1945.

⁵ Подробный обзор истории вопроса до работ В. А. Фока можно найти в статье Б. А. Введенского в Изв. АН СССР, сер. физич., 4, № 3, стр. 415—433, 1940, где приводится и перечень соответствующей литературы.

⁶ Watson G. N., Proc. Roy. Soc., A, 95, 546, 1919.

ности атмосферы и принять, что диэлектрическая постоянная ϵ атмосферы изменяется с высотой по закону $\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2$, где r — расстояние от центра земли, a — радиус земли (ϵ_0 — значение ϵ на поверхности земли), то решение задачи чрезвычайно упрощается, поскольку бесселевы и ханкелевы функции из него устраняются и заменяются некоторыми степенями расстояния.¹ Физическая же сущность явления таким допущением, надо полагать, затрагивается лишь в слабой степени, поскольку при этом ϵ изменяется от поверхности земли до отражающего слоя лишь на несколько процентов (до 4—4,5% при высоте слоя около полутора километра), т. е. остается практически постоянной по высоте.

§ 75. Распространение над землей (сферой) радиоволн от произвольной системы излучателей

75.1. До сих пор мы ограничивались случаем наличия только вертикальных токов. Рассмотрим теперь произвольное распределение токов $\mathbf{j}^{(e)}$ в пространстве и покажем, что можно составить уравнение непосредственно для компоненты E_r , какова бы ни была зависимость ϵ и σ от r . Исходим из уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{i\omega\epsilon + 4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (75,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H}, \quad (75,2)$$

причем компоненты вектора $\mathbf{j}^{(e)}$ будем, для простоты, считать дважды дифференцируемыми функциями координат. (75,1) и (75,2) дают:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu (i\omega\epsilon + 4\pi\sigma)}{c^2} \mathbf{E} - \frac{4\pi i\omega\mu}{c^2} \mathbf{j}^{(e)}. \quad (75,3)$$

Полагая²

$$k^2 = -\frac{i\omega\mu (i\omega\epsilon + 4\pi\sigma)}{c^2}, \quad \operatorname{lg} k^2 = \psi \equiv \psi(r) \quad (75,4)$$

и замечая, что из (75,1) вытекает соотношение

$$\operatorname{div} (i\omega\epsilon + 4\pi\sigma) \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)},$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -(\operatorname{grad} \psi, \mathbf{E}) + \frac{4\pi i\omega\mu}{k^2 c^2} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (75,5)$$

получаем, подставляя это в (75,3):

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \psi, \mathbf{E}) = \frac{4\pi i\omega\mu}{c^2} \left\{ \mathbf{j}^{(e)} + \operatorname{grad} \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}}{k^2} \right) \right\} \equiv \mathbf{F}, \quad (75,6)$$

¹ Г. А. Гринберг, Изв. АН СССР, сер. физич., 7, № 4, стр. 104—110, 1943.

² Так как, вообще говоря, $\epsilon = \epsilon(r)$ и $\sigma = \sigma(r)$, то и $k^2 = k^2(r)$.

где

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi\mu\omega i}{c^2} \left\{ \mathbf{j}^{(e)} + \text{grad} \left(\frac{\text{div} \mathbf{j}^{(e)}}{k^2} \right) \right\} \quad (75,7)$$

— известный вектор, поскольку заданы $\mathbf{j}^{(e)}$ и k^2 .

Умножая уравнение (75,6) скалярно на \mathbf{r} и замечая, что $(\text{grad } \psi, \mathbf{E}) = \psi' E_r$, найдем:

$$(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{E}) + k^2 (\mathbf{r}, \mathbf{E}) + (\mathbf{r}, \text{grad} \{ \psi' E_r \}) = (\mathbf{r}, \mathbf{F}),$$

т. е.

$$(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{E}) + k^2 (r E_r) + r \frac{\partial}{\partial r} (\psi' E_r) = F_r. \quad (75,8)$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}, \Delta \mathbf{E}) &= (x \Delta E_x) + (y \Delta E_y) + (z \Delta E_z) = \left\{ \Delta (x E_x) - 2 \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\} + \\ &+ \left\{ \Delta (y E_y) - 2 \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} + \left\{ \Delta (z E_z) - 2 \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} = \Delta (r E_r) - 2 \text{div} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

так что уравнение (75,8) обращается в такое:

$$\Delta (r E_r) + k^2 (r E_r) + r \frac{\partial}{\partial r} (\psi' E_r) + 2 \psi' E_r = F_r + \frac{8\pi i \mu \omega}{k^2 c^2} \text{div} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (75,9)$$

причем использовано уравнение (75,5).

Так как в сферической системе для произвольной функции u

$$\Delta u = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial (ru)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad (75,10)$$

то найдем, умножая (75,9) на r , замечая, что

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\psi' E_r) + 2r \psi' E_r &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\psi'}{r^2} (r^2 E_r) \right] + \\ &+ \frac{2\psi'}{r} (r^2 E_r) = \psi'' (r^2 E_r) + \psi' \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r), \end{aligned}$$

и обозначая $r^2 E_r$ через W :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \psi' \frac{\partial W}{\partial r} + \\ + (k^2 + \psi'') W = \left\{ F_r + \frac{8\pi i \mu \omega}{k^2 c^2} \text{div} \mathbf{j}^{(e)} \right\} r = X, \end{aligned} \quad (75,11)$$

где X обозначает известную функцию от координат. Это и есть искоемое уравнение для радиальной компоненты, которое имеет, как видим, совершенно общий характер.

75.2. Интегрирование уравнения (75,11) может быть проведено методом, аналогичным примененному выше для решения уравнения (73,19). Именно, умножая сперва (75,11) на $e^{im\varphi} d\varphi$, где m — целое положительное или отрицательное число или нуль, и интегрируя по φ в пределах $(0, 2\pi)$, получим, вводя обозначение

$$f_m^* = \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} f d\varphi, \quad (75,12)$$

где f — какая-либо функция от φ :

$$\frac{\partial^2 W_m^*}{\partial r^2} + \psi' \frac{\partial W_m^*}{\partial r} + (k^2 + \psi'') W_m^* + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \right] - \frac{m^2 W_m^*}{1-x^2} \right\} = X_m^*, \quad (x = \cos \theta). \quad (75, 13)$$

Умножая теперь это уравнение на $P_n^m(x) dx$, где $P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right] + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} P_n^m = 0, \quad (75, 14)$$

интегрируя в пределах $(-1, +1)$ и полагая

$$W_n^m = \int_{-1}^{+1} W_m^* P_n^m(x) dx \quad (75, 15)$$

получим, после соответствующего интегрирования по частям:

$$\frac{d^2 W_n^m}{dr^2} + \psi' \frac{dW_n^m}{dr} + \left[k^2 + \psi'' - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] W_n^m = X_n^m, \quad (75, 16)$$

откуда (а также из соответствующих преобразованных граничных условий) найдутся все W_n^m , т. е. все коэффициенты разложения иско́мой функции W в ряд по сферическим функциям. Тем самым общее решение задачи о нахождении E_r в случае произвольного расположения излучателей и неоднородной по высоте атмосферы сведено к решению обыкновенного уравнения (75,16) с переменными, вообще говоря, коэффициентами.¹

§ 76. Интегрирование волнового уравнения в случае области, ограниченной одной или двумя коническими поверхностями

76.1. Мы уже рассмотрели в главе IX вопрос о решении граничных задач для уравнения $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ в случае области, ограниченной одной или двумя коническими поверхностями ($\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$, рис. 136), на которых функция u удовлетворяет граничным условиям первого, второго или третьего рода. При этом рассмотрении мы исходили из того обстоятельства, что соответствующее однородное уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ допускает разделение переменных в сферических координатах, т. е. допускает частные решения вида $u = L(r) M(\theta) N(\varphi)$,² и начинали решение задачи с разыскания тех

¹ В частности, при $k^2 = \text{const.}$ это уравнение очевидно решается

² Ср. п. 20. 1.

функций $M_m(\theta)$, которые удовлетворяли соответствующим однородным граничным условиям при $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$.¹ Умножая затем на $M_m(\theta) \sin \theta$ уравнение $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ и интегрируя по θ в пределах от $\theta = \theta_1$ до $\theta = \theta_2$, мы сводили, обычным образом, решение задачи к нахождению „преобразованных по θ “ функций² $u_m(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u M_m(\theta) \sin \theta d\theta$

из получившихся для них уравнений и из преобразованных граничных условий. Можно было бы, однако, поступить и иначе. Именно можно было начать с нахождения надлежащим образом выбранных функций $L(r)$, которые на границах $r = r_1$ и $r = r_2$ интервала изменения переменной r в рассматриваемой задаче удовлетворяли бы однородным граничным условиям,³ отвечающим характеру решаемой предельной задачи, и составить затем уравнения для соответствующих „преобразованных по r “ функций $\bar{u}(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} u L(r) dr$.

Легко при этом видеть, что если $r_1 \neq 0$ и $r_2 \neq \infty$, то такие функции $L(r)$ действительно существуют, притом в бесконечном количестве.⁴ Если же $r_1 = 0$ и $r_2 = \infty$, то отличных от нуля функций требуемого типа не существует, в связи с тем, что точки $r = 0$ и $r = \infty$ являются особыми для уравнения (20,5), которым определяется $L(r)$.

Можно было бы попытаться обойти возникшую трудность, решая сперва аналогичную задачу в предположении, что $r_1 \neq 0$ и $r_2 \neq \infty$, и переходя затем в полученном решении к предельному случаю $r_1 = 0$ и $r_2 = \infty$.⁵

Мы, однако, видели уже на целом ряде примеров, что подобная трудность, встречающаяся и во многих других случаях, препятствует только применению метода § 15 в его чистом виде, но что сплошь и рядом возможно, путем небольшого видоизменения, приспособить его и к решению соответствующих задач с бесконечным интервалом изменения переменной.⁶ Для того, чтобы это сделать, достаточно учесть, что, например, в предельной задаче первого рода обращение

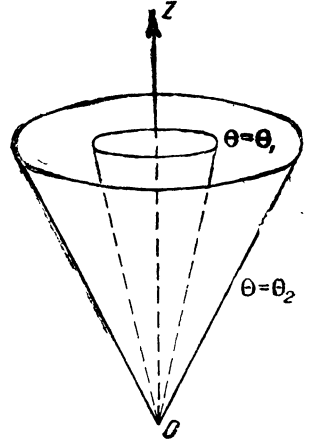


Рис. 136.

¹ При $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$. Ср. п.п. 20. 6, 20. 9 и 20. 18.

² Т. е. коэффициентов разложения u по функциям $M_m(\theta)$.

³ Например, условиям $L(r_1) = 0$ и $L(r_2) = 0$, если на поверхности заданы значения самой функции u .

⁴ Ср. п. 20. 1, формулу (20,10) для $L(r)$.

⁵ Ср. сноску ¹ на стр. 133.

⁶ Ср., например, п. п. 7. 7 и 71. 2, а также п. 22. 1.

в нуль на границах интервала той функции $Q_k(s)$, на которую умножалось и затем интегрировалось по s подлежащее решению уравнение $D[u] = f$,¹ требовалось лишь для того, чтобы в уравнении (15, 8) для „преобразованной“ u_k пропали граничные члены

$$-p \frac{\partial u}{\partial s} Q_k(s) \Big|_a^b,$$

содержащие неизвестные граничные значения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{s=a} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{s=b}.$$

Если же при одном из этих граничных значений, например, при $s = a$, обращается в нуль, притом достаточно сильно, коэффициент $p(s)$, то можно обойтись без обращения в нуль $Q_k(a)$, и достаточно, чтобы было $Q_k(b) = 0$.² Сходное положение вещей имеет место и в том случае, когда на соответствующей границе величина $\frac{\partial u}{\partial s}$ заведомо обращается в нуль достаточно сильно (например, в случае экспоненциального затухания функции u на бесконечности, если при этом соответствующее произведение $pQ_k(s)$ остается на бесконечности ограниченным или нарастает слабее, чем экспоненциально). Подобные же соображения могут в некоторых случаях помочь избавиться от необходимости подчинять функцию $Q_k(s)$ двум однородным граничным условиям и в предельных задачах второго и третьего рода.

Как раз с таким положением вещей мы и сталкиваемся в задаче об интегрировании уравнения $\Delta u + k^2 u = F$ для области, ограниченной двумя конусами $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$, если рассматривается вся область изменения r от нуля до бесконечности. В этом случае подлежащее интегрированию уравнение имеет в сферических координатах следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = F(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (76, 1)$$

Пусть требуется получить решение его u , непрерывное в области, ограниченной конусами $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$, обращающееся на бесконечности в нуль и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} (u)_{\theta = \theta_1} &= f(r, \varphi), \\ (u)_{\theta = \theta_2} &= \psi(r, \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (76, 2)$$

где f и ψ — некоторые заданные функции.

¹ См. § 15.

² Ср. п. 15. 6.

Разлагая u , F , f и ψ в ряды Фурье, именно, полагая

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m e^{im\varphi}, \\ F &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m e^{im\varphi}, \\ f &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e^{im\varphi}, \\ \psi &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m e^{im\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (76, 3)$$

сведем дело к решению уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \right) + \\ + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u_m = F_m(r, \theta), \end{aligned} \quad (76, 4)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, \infty$)

для функций u_m , причем граничные условия (76, 2) дают:

$$(u_m)_{\theta=0} = f_m(r); \quad (u_m)_{\theta=\theta_2} = \psi_m(r). \quad (76, 5)$$

Получающееся из (76, 4) при $F_m = 0$ однородное уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u_m = 0 \quad (76, 6)$$

допускает частные решения вида

$$u_m = L(r) M(\theta), \quad (76, 7)$$

причем уравнение (76, 6), при подстановке туда u_m из (76, 7), приводится к виду

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dM}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} M + \frac{1}{L} \left\{ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dL}{dr} \right) + k^2 r^2 L \right\} = 0. \quad (76, 8)$$

Для L и M получаются поэтому уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dL}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] L = 0 \quad (76, 9)$$

и

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dM}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] M = 0, \quad (76, 10)$$

где n — произвольная постоянная.

Эти уравнения совпадают с исследованными в § 20 уравнениями (20, 5) и (20, 6), так что, в частности, общий интеграл уравнения (76, 9) находится по формуле (20, 10), именно,

$$L = \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}, \quad (76, 11)$$

где $Z_{n+1/2}(kr)$ обозначает любую комбинацию из бесселевых или ханкелевых функций $n + 1/2$ -ого порядка от аргумента kr .

Обозначим теперь произвольную постоянную $n + 1/2$ в выражении L через ν , а соответствующее L — через L_ν , так что

$$L_\nu = \frac{Z_\nu(kr)}{\sqrt{r}}. \quad (76, 12)$$

Умножим уравнение (76, 4) на $r^2 L_\nu dr$ (не выбирая пока детальнее функцию Z_ν) и проинтегрируем получившееся выражение по r в пределах от некоторого $r=r_1$ до $r=r_2$.¹

Вводя обозначение

$$\bar{u}_m = \bar{u}_m(\nu) = \int_{r_1}^{r_2} L_\nu(r) u_m dr, \quad (76, 13)$$

получим при этом:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} L_\nu(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) dr + k^2 \int_{r_1}^{r_2} r^2 u_m L_\nu(r) dr + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d \bar{u}_m}{d\theta} \right] - \\ & - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \bar{u}_m = \int_{r_1}^{r_2} r^2 L_\nu(r) F_m(r, \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (76, 14)$$

¹ В § 15 было показано, что если подлежащее интегрированию уравнение

$$D(s_1, s_2, \dots, s_m) a = f(s_1, s_2, \dots, s_m) \quad (15, 1)$$

допускает решение вида

$$a = Q(s_1) F(s_2, \dots, s_m), \quad (15, 3)$$

причем соответствующее однородное уравнение $D[u] = 0$ при разделении переменных приобретает вид

$$\frac{D_1(s_2, s_3, \dots, s_m) F}{F} + \frac{1}{r(s_1)} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \left\{ \frac{d}{ds_1} \left[p(s_1) \frac{dQ}{ds_1} \right] + q(s_1) Q \right\} = 0, \quad (15, 4)$$

где оператор D_1 от s_1 не зависит, а r и p — некоторые функции только от s_1 , то, приводя уравнение (15, 1) к виду (15, 9), т. е. к виду

$$r(s_1) D_1 a + \frac{\partial}{\partial s_1} \left(p \frac{\partial a}{\partial s_1} \right) + qa = f.$$

умножая его затем на $Q(s_1) ds_1$ и интегрируя по s_1 в некоторых пределах (a, b), приходим к уравнению (15, 8) для функции

$$\bar{u} = \int_a^b r(s) Q(s) u ds,$$

которое и служило исходным пунктом для развитого там общего метода интегрирования уравнений вида (15, 1).

В разбираемом в тексте случае уравнение (15, 1) имеет вид (76, 1), а соответствующее однородное уравнение — это (20, 1). Сравнение (15, 4) с (76, 8) показывает, что так как в данном случае роль Q играет L , то $r(s_1)$ надо положить равной единице, а само уравнение (76, 4) умножить на r^2 для приведения к виду (15, 9). Получающееся при этом уравнение остается теперь умножить на $L_\nu dr$ и интегрировать от a до b , что и приводит к указанному в тексте ходу вычислений.

а преобразуя здесь первый член, как обычно, интегрированием по частям и используя уравнение (76, 9) для L_ν , в котором надо положить

$$n(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \nu^2 - \frac{1}{4},$$

найдем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\bar{u}_m}{d\theta} \right) + \left[\nu^2 - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \bar{u}_m = \\ & = r^2 \left[u_m \frac{dL_\nu}{dr} - L_\nu \frac{\partial u_m}{\partial r} \right] \Big|_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} r^2 L_\nu(r) F_m(r, \theta) dr. \end{aligned} \quad (76, 15)$$

76.2. Пусть теперь ν — чисто мнимое число (произвольное), а в качестве Z , выбрана ханкелева функция второго рода, так что

$$L_\nu(r) = \frac{H_\nu^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}}. \quad (76, 16)$$

Тогда, если считать, как обычно, что $Im(k) < 0$, то, при $r \rightarrow \infty$, как $L_\nu(r)$, так и $\frac{dL_\nu}{dr}$, стремятся к нулю пропорционально $\frac{e^{-ikr}}{r}$, и так как во всякой реальной физической задаче как u_m , так и $\frac{\partial u_m}{\partial r}$, стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$,¹ то, если положить в (76, 15) $r_2 = \infty$, входящие туда граничные члены, соответствующие верхнему пределу, пропадают. Сверх того, сразу видно, что хотя выбранная нами функция $L_\nu(r)$ и не обращается в нуль при $r=0$, — а она, вместо этого, становится там бесконечной, так же, как и ее производная $\frac{dL_\nu}{dr}$, — но если только u_m и $r \frac{\partial u_m}{\partial r}$ остаются ограниченными при $r \rightarrow 0$ (что тоже, как правило, выполняется в задачах физического характера), то в (76, 15) пропадают при $r_1 \rightarrow 0$ также граничные члены, соответствующие нижнему пределу. При этом получаем, стало быть:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\tilde{u}_m}{dr} \right) + \left(\nu^2 - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \tilde{u}_m = \\ & = \int_0^\infty r^{3/2} H_\nu^{(2)}(kr) F_m(r, \theta) dr \equiv \bar{F}_m(\theta), \end{aligned} \quad (76, 17)$$

где

$$\tilde{u}_m = \int_0^\infty \frac{u_m(r, \theta)}{\sqrt{r}} H_\nu^{(2)}(kr) dr. \quad (76, 18)$$

Уравнение (76, 17) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для функции \tilde{u}_m и дано Конторовичем и Лебедевым.²

¹ По крайней мере тогда, когда все источники поля лежат на конечном расстоянии от начала координат.

² ЖЭТФ, 9, 729, 1939.

Так как общий интеграл соответствующего однородного уравнения известен (ср. (20,15) и (20,19)) и равен

$$\tilde{u}_m = AP_{\nu-1/2}^m(\cos \theta) + BP_{\nu-1/2}^m(-\cos \theta), \quad (76, 19)$$

то, варьируя входящие сюда постоянные A и B , сможем найти и общий интеграл уравнения (76, 17). В него тоже войдут две произвольные постоянные, для определения которых будут служить получающиеся из (76, 5) условия:

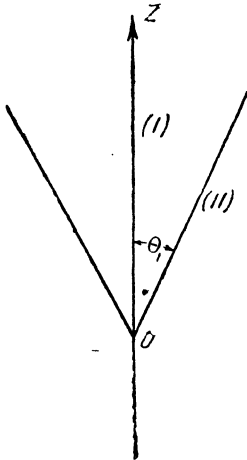


Рис. 137.

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{u}_m)_{\theta=\theta_1} &= \int_0^\infty \frac{f_m(r)}{\sqrt{r}} H_\nu^{(2)}(kr) dr, \\ (\tilde{u}_m)_{\theta=\theta_2} &= \int_0^\infty \frac{\psi_m(r)}{\sqrt{r}} H_\nu^{(2)}(kr) dr. \end{aligned} \right\} \quad (76, 20)$$

Если рассматриваемая область ограничена только одной конической поверхностью $\theta = \theta_1$ (рис. 137), то вместо двух граничных условий (76, 20) остается только первое. Для определения второй постоянной в общем интеграле уравнения (76, 17) должно служить условие конечности решения на принадлежащей рассматриваемой области части оси конуса, т. е. при $\theta = 0$ или при $\theta = \pi$.¹

После того, как таким образом будет определена функция $\tilde{u}_m = \tilde{u}_m(\nu, \theta)$, сможем из нее получить, с помощью формулы (56, 24) обращения Конторовича—Лебедева, сами функции u_m , именно:

$$\sqrt{r} u_m = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu \tilde{u}_m(\nu, \theta) J_\nu(kr) d\nu, \quad (76, 21)$$

а отсюда и искомое решение u по первой формуле (76, 3).

Относительно деталей дальнейших вычислений отсылаем читателя к указанной работе Конторовича—Лебедева, где в качестве примера рассмотрена решенная нами в § 20 иным путем задача об электромагнитном поле колеблющегося диполя, помещенного на оси идеально проводящего конического рефлектора. Получаемый ими результат совпадает с нашей формулой (20, 141), самые же вычисления сложнее, чем проведенные в § 20.

¹ См. по этому поводу замечания, относящиеся к выбору решения, в § 20 (особенно в п. 20.5).

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

О НАХОЖДЕНИИ ПОЛЕЙ, ТРЕБУЮЩИХСЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ ЗАДАННОГО ТИПА

Глава XXIV

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ФОКУСИРУЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ СТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

§ 77. Вводные замечания

77.1. До сих пор мы всегда занимались задачей о нахождении полей, создаваемых заданным распределением зарядов или токов.

С совсем другим классом задач мы встречаемся, если ставим перед собой вопрос о нахождении электрических и магнитных полей, способных вызвать некоторое заданное движение зарядов, т. е. вопрос о нахождении полей не по заданному распределению зарядов и токов в пространстве, а по характеру тех траекторий, которые должны описывать в этих полях внесенные в них извне заряды.

Насколько нам известно, до недавнего времени отсутствовали какие-либо общие исследования подобного рода.¹ Более того, не был даже исследован вопрос о том, заданием какого числа траекторий² полностью определяются те электрические и магнитные поля, которыми могло бы быть вызвано движение по этим траекториям, т. е., если речь идет о создании электронного пучка желаемого типа, то форму скольких траекторий в пучке можно задать по произволу, не впадая при этом в противоречие.

Между тем, представляется в высшей степени необходимым знание общих законов, управляющих образованием таких пучков и определяющих их характер. В частности, необходимо уметь направлять такие

¹ Обычные методы электронной оптики, — науки, специально занимающейся вопросами фокусировки электронных пучков, не приспособлены для решения таких вопросов и позволяют решать лишь задачи, относящиеся к фокусировке пучков в заданных внешних полях, притом, в основном, лишь для полей с симметрией вращения и для пучков, близких к оси системы и составляющих с ней малые углы, далее — для пучков, ось которых мало уклоняется от дуги круга в цилиндрическом или сферическом конденсаторе, или в постоянном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости движения (например, в масспектрографии), и для немногих других типов полей.

² Или элементов траекторий.

пучки по желательным путям и обеспечивать фокусировку их в конечной точке пути, при условии, что они вышли из некоторой общей начальной точки. Так, например, если речь идет о проектировании электронного умножителя (рис. 138), в котором первичные электроны, исходящие из точки A_1 первой пластинки, ускоряются электрическим полем, попадают на вторую пластинку, выбивают из нее вторичные электроны, ускоряющиеся в свою очередь и направляющиеся на третью пластинку и т. д., то естественно поставить вопрос о тех электрических и магнитных полях, которые требуются для того, чтобы первичный электронный поток, вышедший из A_1 , сфокусировался в точке A_2 второй пластинки, вышедший из A_2 вторичный поток сфокусировался бы в точке A_3 третьей пластинки и т. д.

Основным является при этом вопрос о совместности поставленных выше требований, т. е. о возможности удовлетворить одновременно требованию о фокусировке всех указанных пучков, а также о фактическом нахождении тех полей, которыми такая фокусировка могла бы быть обусловлена.¹ Приходится также считаться с тем, что во многих случаях на возможности, представляющиеся по началу для решения

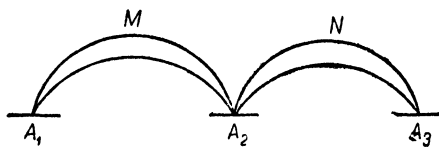


Рис. 138.

поставленной таким образом задачи, налагаются еще, по соображениям технического удобства или каким-либо иным, дополнительные ограничения, например, требование о желательности получения пучков потребного характера при помощи чисто

электростатических полей, без использования магнитных,² или, наоборот, с помощью чисто магнитных, но без электрических.

Основы общей теории фокусирующего действия электростатических и магнитных полей были даны, сколько нам известно, впервые в трех наших статьях, опубликованных в ДАН в 1942—1943 гг.³

Мы здесь придерживаемся в основном изложения, данного в нашей сводной статье в ЖТФ,⁴ в которой ставится и решается в общем виде вопрос о возможности получения пучков заданного вида, степени их произвольности и о тех полях — электрических и магнитных, которые требуются для их создания. Перечислим некоторые основные из полученных при этом результатов.

Выяснено, что если имеется пучок, состоящий из однотипных заряженных частиц, исходящих из одной точки с одинаковой скоростью, но по разным направлениям, то количество траекторий частиц в пучке.

¹ При этом самая форма пучков A_1MA_2 , A_2NA_3 и т. д. не столь существенна, при единственном условии, что они не выходят за пределы технически допустимых размеров прибора.

² Для портативности, малых габаритов и т. д.

³ ДАН, 37, № 5—6, 197, 1942; ДАН, 37, № 9, 295, 1942; ДАН, 38, № 2—3, 89, 1943.

⁴ XIII, в. 7—8, 1943, стр. 361.

которые можно задать по произволу, очень невелико и составляет, например, для цилиндрических полей¹ не более двух; для случая пространственных электростатических полей число это возрастает до „двух с половиной“, причем под заданием половины траектории подразумевается задание только одного из двух соотношений между координатами точки на кривой (см. ниже § 83); наконец, в самом общем случае одновременного наличия любых пространственных электростатических и магнитных полей число это может доходить до шести.

Показано, что при задании таких „допустимых“ траекторий соответствующие электрическое и магнитное поля либо определяются совершенно однозначно во всем пространстве (для цилиндрических линз), либо же в определении их остается некоторая степень произвола, которая может быть использована, например, для улучшения фокусировки высших порядков. Эти электрические и магнитные поля могут быть определены решением (аналитическим или графоаналитическим) некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений первого или второго порядка.

Подробно исследован вопрос о фокусировке узких пучков (фокусировка первого порядка), причем примененный метод дает возможность аналогичным образом исследовать и фокусировку высших порядков. Рассмотрен ряд важных частных случаев, в которых нахождение фокусирующих полей является особенно простым [случай, когда одна из траекторий пучка („ось“) плоская и лежит в плоскости симметрии или антисимметрии электрического или магнитного поля, когда рассматриваемые поля являются полями вращения и т. д.].

Полученные общие уравнения, связывающие характер траекторий в пучке с теми полями, в которых происходит движение частиц, могут быть использованы и в обратном направлении, т. е. для нахождения характера траекторий, близких к „осевой“ кривой пучка при заданном внешнем поле. Таким образом, получаются многие практически важные и весьма общие теоремы, например, теорема, что в цилиндрических полях всякий пучок, имеющий осью одну из эквипотенциальных линий поля, притом такую, что она на некотором, достаточно длинном участке обращена выпуклостью в одну и ту же сторону, как правило фокусируется в некоторой точке этой же осевой линии (см. п. 80. 1).

Найдя по заданному характеру пучка те поля, в которых такие пучки должны получаться, сможем, принимая любую пару эквипотенциальных поверхностей такого электрического поля за поверхности электродов, а для магнитного — соответственно за внешние поверхности полюсных башмаков,² найти конфигурацию электродов и магнитов, которыми такие поля могут создаваться. Соответствующее нахождение полей можно проводить либо аналитически, либо графоаналитическими методами. В случае цилиндрических линз оно чрезвычайно

¹ Цилиндрических линз.

² Последнее в том случае, если считать магнитную проницаемость полюсных башмаков бесконечно-большой.

упрощается, благодаря возможности использования теории функций комплексного переменного.

§ 78. Постановка задачи в случае цилиндрических полей

78.1. Рассмотрим плоское движение точечного заряда e в плоскости (x, y) , когда на этот заряд действует плоское же электростатическое поле, зависящее от координат x и y , и перпендикулярное к нему однородное магнитное поле \mathbf{H} .¹

Постараемся, прежде всего, установить, каким ограничениям должен удовлетворять некий пучок траекторий для того, чтобы он вообще мог получиться в каком-либо реальном электростатическом поле, потенциал которого удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

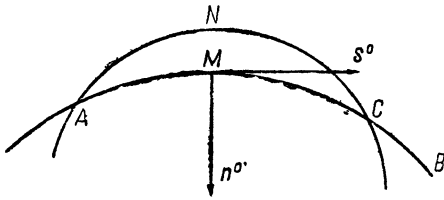


Рис. 139.

т. е. в какой мере произвольно могут быть заданы траектории отдель-

ных частиц в пучке, чтобы по ним возможно было определить то поле, в котором такой пучок мог бы получиться.

Ответ на этот вопрос оказывается неожиданно простым. Именно, мы сейчас покажем, что, вообще говоря, возможно задать по произволу (и то относительно, см. ниже) не более двух траекторий (вернее, элементов траекторий). заданием двух траекторий однозначно определяется характер поля во всем пространстве, если еще указать значение поля в какой-либо точке одной из траекторий.

Для доказательства предположим сперва, что дана одна траектория AB (рис. 139), принадлежащая пучку, и посмотрим, в какой степени задание такой траектории ограничивает дальнейшие возможности. Обозначая через e и m заряд и массу частицы, через v — ее скорость, через ρ — радиус кривизны траектории и через s^0 и n^0 — орты касательной и нормали³ к траектории в некоторой ее точке M , имеем соотношение:

$$\frac{mv^2}{\rho} = eE_n + \frac{e}{c} vH = -e \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{e}{c} vH. \quad (78, 1)$$

Заметим, что это соотношение верно и в теории относительности, если только под m подразумевается переменная масса частицы $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

¹ Общий случай произвольного неоднородного поля рассматривается ниже в § 85.

² Или Пуассона $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 4\pi f(x, y)$, что могло бы представить известный интеграл в определенных случаях (ионизация в газе и т. д.). Мы здесь на разборе этого случая не останавливаемся, поскольку метод исследования его ничем не отличается от данного в тексте для случая уравнения Лапласа.

³ Нормаль в сторону вогнутости траектории.

К уравнению (78, 1) присоединяется в классической механике уравнение, выражающее закон живых сил, именно:

$$\frac{1}{2} mv^2 + e\varphi = C = \text{const.}, \quad (78, 2)$$

а в теории относительности — соответствующее уравнение сохранения энергии:

$$m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\varphi = C = \text{const.} \quad (78, 3)$$

Полагая

$$C = e\bar{\varphi}_0, \quad \varphi - \varphi_0 = \bar{\varphi}$$

и исключая v из (78, 1) и (78, 2), или из (78, 1) и (78, 3), найдем:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = F(\bar{\varphi}, \rho), \quad (78, 4)$$

где в случае классической механики

$$F(\bar{\varphi}, \rho) = \frac{2\bar{\varphi}}{\rho} + \frac{H}{c} \sqrt{-\frac{2e}{m} \bar{\varphi}}, \quad (78, 5)$$

а в случае механики теории относительности

$$F(\bar{\varphi}, \rho) = \frac{\bar{\varphi}}{\rho} \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}^2} \right] + H \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}^2}}. \quad (78, 6)$$

Уравнение (78, 4) показывает, что на дуге AB нормальная к ней производная потенциала полностью определяется значением самого потенциала на дуге. Отсюда можно видеть, что если бы была дана, кроме AB , еще одна траектория ANC , исходящая из той же точки A и пересекающая AB в некоторой точке C (впервые после A), то мы имели бы замкнутый контур $ANСМА$, вдоль которого было бы задано соотношение вида (78, 4) (со своим значением ρ в каждой точке обеих дуг, составляющих контур), т. е. связь между $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$ и $\bar{\varphi}$. Поэтому, так как $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то можно было бы написать, исходя из теоремы Гаусса — Остроградского, интегральное уравнение (вообще говоря, нелинейное) для потенциала внутри этого контура, подобно тому, как это делается для задачи Дирихле, когда на контуре дано $\bar{\varphi}$, для задачи Неймана, когда дано $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$, или для задачи третьего рода, когда дано, что на контуре $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \alpha \bar{\varphi}$, где α зависит от координат точки на дуге [заметим, что в случае классической механики и отсутствия магнитного поля уравнения (78, 4), (78, 5) дают $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \frac{2}{\rho} \bar{\varphi}$, т. е. как раз задачу третьего рода].

Решением этого интегрального уравнения определилось бы $\bar{\varphi}$ внутри контура (в тех случаях, когда решение вообще возможно). Так как

решение задачи третьего рода при определенных условиях однозначно,¹ то это заставляет думать, что, вообще говоря, нельзя задать по произволу больше двух траекторий, ибо остальные траектории будут уже вполне определены этим заданием, поскольку определилось поле, в котором совершается движение зарядов.

Мы не будем здесь выписывать это интегральное уравнение, так как, помимо того, что решение его представило бы огромные трудности и было бы вообще возможно лишь в очень частных случаях, это даже в самом благоприятном случае не дало бы того, что нас здесь, прежде всего, интересует, именно, условий фокусировки пучка (из-за того, что задание двух траекторий определяет уже остальные, которые, вообще говоря, не будут при этом проходить через точку C , т. е. фокусировки не будет). Мы пойдем поэтому совсем другим путем и рассмотрим случай, когда ANC — очень близкая (теоретически — бесконечно-близкая) к AMC траектория, ибо сперва нужно изучить условия фокусировки узких пучков, без чего невозможно найти и условия фокусировки широких.

§ 79. Вывод дифференциального уравнения, которым определяются условия фокусировки

79.1. Начнем с нахождения значения потенциала в смежности с некоторой траекторией, если известно его значение на этой траектории. Пусть AB — некоторая траектория. Покажем, прежде всего, что если бы были известны значения потенциала $\bar{\varphi}$ на сколь угодно коротком, но конечном отрезке дуги AB , то этим были бы определены однозначно значения потенциала во всех точках окружающего пространства. Действительно, если дано, что на таком отрезке $\bar{\varphi} = f(s)$, где s — длина дуги этой кривой, отсчитываемая от произвольной точки ее, то из (78, 4) известна и величина

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = F(\bar{\varphi}, \rho) = F[f(s), \rho(s)] = \chi(s).^2$$

Так как $\bar{\varphi}$, как решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} = 0$, — обязательно вещественная часть некоторой функции ω комплексного переменного, мнимую часть которой обозначим через ψ , и так как, в силу одного из соотношений Коши — Римана, будет³

$$\pm \frac{\partial \psi}{\partial s} = - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = - \chi(s),$$

¹ С точностью до постоянного множителя и т. д.

² ρ , очевидно, известно вдоль дуги AB , так что $\rho = \rho(s)$.

³ Знак плюс слева в этой формуле соответствует такому взаимному расположению ортов s^0 и n^0 , когда n^0 переходит в s^0 при вращении его по часовой стрелке на 90° . В противном случае надо брать знак минус.

то отсюда

$$\psi = \mp \int \chi(s) ds + \text{const.},$$

т. е. на рассматриваемом отрезке дуги определяется и ψ . Поэтому на дуге известно значение самой функции w , а именно:

$$w = \bar{\varphi} + i\psi = f(s) \mp i \int \chi(s) ds + \text{const.} = w(s). \quad (79,1)$$

Этим, как известно, целиком определяются значения w на всей комплексной плоскости, т. е. при всех (x, y) .¹ Именно, так как на дуге известно, кроме того, и

$$z = x + iy = \chi(s) + iy(s) = z(s), \quad (79,2)$$

то уравнения (79,1) и (79,2) определяют в параметрической форме зависимость w от z . Исключая из (79,1) и (79,2) параметр s , найдем $w = w(z)$ на всей плоскости. Стало быть, зная значения $\bar{\varphi}$ в смежности с некоторой точкой O дуги AB , сможем его узнать в любой точке плоскости (x, y) . В частности, принимая O за начало декартовых координат (x, y) , причем x направлено по касательной к AB в точке O , а y — по нормали в сторону вогнутости кривой, т. е. $\parallel n''$, будем иметь в смежности с O :

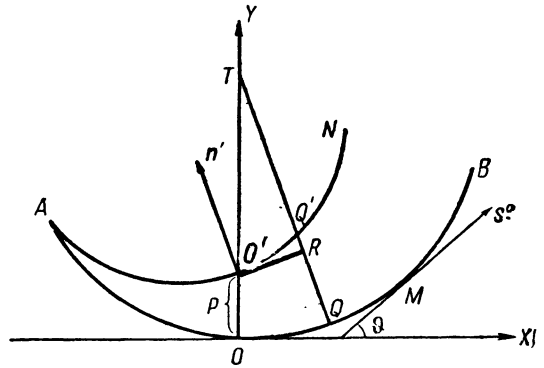


Рис. 140. $OO' = p, OT = \rho_0, O'T = RT = \rho_0 - p,$
 $RQ' = dp, OQ = ds, O'Q' = ds' =$
 $= \sqrt{(O'R)^2 + (Q'R)^2} = \sqrt{(1 - p/\rho_0)^2 ds^2 + dp^2} =$
 $= (1 - p/\rho_0) ds + \text{малые 2-го порядка.}$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + x \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)_0 + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right)_0 + xy \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} \right)_0 + \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right)_0 + \dots, \quad (79,3)$$

причем значок (0) показывает, что соответствующая величина относится к точке O .

Значения входящих в (79,3) коэффициентов легко выразить через $\bar{\varphi}_0$ и через производные $\left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0$ и $\left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2} \right)_0$ по дуге. Действительно, если касательная к AB составляет в некоторой точке M угол θ с осью X , то

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta;$$

$$\cos(\widehat{n, x}) = -\sin \theta; \quad \cos(\widehat{n, y}) = \cos \theta$$

¹ Так как w определяется на всей плоскости уже по значениям ее на одном отрезке дуги, то даже вдоль дуги AB значения $\bar{\varphi}$ не могут быть заданы произвольно, а определяются ее значениями на одном отрезке. Если зависимость $\bar{\varphi}$ от s на дуге будет аналитической, то задания на разных отрезках не будут противоречить друг другу.

[\mathbf{n} — нормаль в точке M (рис. 140)], так что

$$\frac{d\bar{\varphi}}{ds} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} \sin \theta, \quad (79,4)$$

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n} = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} \cos \theta = F(\bar{\varphi}, \rho). \quad (79,5)$$

В точке O $\theta = 0$, так что

$$\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}\right)_0 = F(\bar{\varphi}_0, \rho_0) \equiv F_0. \quad (79,6)$$

Дифференцируя (79,4) и (79,5) еще раз по s и учитывая, что $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$, получаем в точке O :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}\right)_0 \cdot \frac{1}{\rho_0}, \\ \left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial s\partial n}\right)_0 &= \left[\frac{d}{ds} F(\bar{\varphi}, \rho)\right]_0 \equiv \left(\frac{dF}{ds}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\right)_0 \cdot \frac{1}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (79,7)$$

Пользуясь уравнением Лапласа, которое дает

$$\left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2}\right)_0 = -\left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial y^2}\right)_0,$$

и значениями (79,6) первых производных, находим.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2}\right)_0 &= -\left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial y^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2}\right)_0 - \frac{F_0}{\rho_0}, \\ \left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x\partial y}\right)_0 &= \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds}\right)_0 \cdot \frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{dF}{ds}\right)_0 = \\ &= \left[\frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_0\right] \cdot \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 \cdot \left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (79,8)$$

Подставляя в (79,3), находим значение $\bar{\varphi}$ в смежности с O с точностью до величин второго порядка включительно. Можно было бы, продолжая вычисление, найти потенциал в смежности с O с точностью до членов сколь угодно высокого порядка. Сохраняя в выражении потенциала члены до второго порядка включительно, получаем результаты, относящиеся к фокусировке „первого порядка“, рассмотрим которой здесь и ограничимся.

79.2. Пусть AN — мало уклоняющаяся от AMB траектория. Тогда при условии, что начальная скорость движения в точке A одинакова для обеих траекторий, вдоль каждой из них выполняется условие (78,4). Пусть нормаль к AMB в точке O пересекает AN в O' , причем $OO' = \rho$. Задание ρ в функции от s , очевидно, полностью определяет кривую AN . Так как в любой точке O' этой кривой $(\bar{\varphi})_{O'}$ и $\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n}\right)_{O'}$ (\mathbf{n}' — направление нормали к AN в O') выражаются с помощью (79,3) — (79,8)

через $\bar{\varphi}_0$, $\left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2}\right)_0$, а радиус кривизны ρ' кривой AN в O' тоже известен, то требование, что должно быть

$$\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n'}\right)_{O'} = F [(\bar{\varphi})_{O'}, (\rho')_{O'}], \quad (79,8')$$

дает сразу дифференциальное уравнение для $\bar{\varphi}$. Именно, считая величины

$$p = p(s), \quad \gamma = \frac{dp}{ds} = p', \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d^2p}{ds^2} = p''$$

малыми первого порядка и отбрасывая члены высшего порядка малости, легко найдем из (79,3) — (79,8) для точки O' , для которой надо положить $x=0$, $y=p$:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n'}\right)_{O'} &= \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\right)_{O'} \cos(\widehat{n', x}) + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}\right)_{O'} \cos(\widehat{n', y}) = \\ &= -\left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds}\right)_0 \cdot \gamma + F_0 + \left[\frac{F_0}{\rho_0} - \left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2}\right)_0\right] p = \\ &= -p'(s) \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds}\right)_0 + F_0 \left[1 + \frac{p(s)}{\rho(s)}\right] - p(s) \left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2}\right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (79,9)$$

Далее,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\theta + d\gamma}{ds'} = \frac{d\theta + d\gamma}{\left(1 - \frac{p}{\rho}\right) ds} = \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} + \frac{d^2p}{ds^2}, \quad (79,10)$$

ибо $(d\theta + d\gamma)$ — угол смежности для дуги $O'Q' = ds'$, причем, как видно из рис. 140, ds' с точностью до величин второго порядка равно

$$\left(1 - \frac{p}{\rho}\right) ds.$$

Наконец,

$$\left. \begin{aligned} F [(\bar{\varphi})_{O'}, (\rho')_{O'}] &= \\ &= F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}}\right)_0 [(\bar{\varphi})_{O'} - (\bar{\varphi})_0] + \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 [(\rho')_{O'} - (\rho)_0] = \\ &= F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}}\right)_0 F_0 p(s) - \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 \cdot \left(\frac{p}{\rho^2} + \frac{d^2p}{ds^2}\right) \rho^2. \end{aligned} \right\} \quad (79,11)$$

Уравнения (78,4) и (79,8') дают, поэтому, при отбрасывании значка (0) соответствующего произвольной по существу точке O :

$$\frac{d}{ds} \left(p \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{1}{\rho} \right) F p - \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \left(p'' + \frac{p}{\rho^2} \right) = 0. \quad (79,12)$$

Это и есть основное дифференциальное уравнение нашей задачи. Оно включает в себе две функции, — $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(s)$ и $p = p(s)$. Задавая по произволу одну из них, можно из (79,12) определить вторую.

Если задаться распределением потенциала на основной траектории AOB , то этим полностью определятся смежные траектории, которые, вообще говоря, конечно, не обязаны пересекаться с основной (отсутствие фокусировки).

Если же задаться величиной $p = p(s)$, притом так, чтобы $p(s)$ обращалось в нуль при $s = a$ и при $s = b > a$, и определить по такому $p = p(s)$ потенциал $\bar{\varphi}$ вдоль AOM (причем он тогда, согласно п. 79.1 определится уже и во всем пространстве), то и $p_1(s) = \alpha p(s)$, где α — произвольная постоянная, тоже будет удовлетворять уравнению (79,12) с тем же значением $\bar{\varphi}$. Это показывает, что при одном и том же потенциале $\bar{\varphi}(s)$ будет иметься целый непрерывный пучок траекторий, исходящих из общей точки A под разными углами к „осевой“ кривой AOM и фокусирующихся в одной и той же точке B .

§ 80. Фокусировка пучков, ось которых совпадает с одной из эквипотенциальных линий электростатического поля

80.1. В случае классической механики и отсутствия магнитного поля уравнение (79,12) упрощается и получает вид:

$$\frac{d}{ds} \left[p(s) \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right] + 2 \left[p''(s) + \frac{2}{\rho^2} p(s) \right] \bar{\varphi} = 0. \quad (80,1)$$

Если, в частности, потребовать, чтобы на основной линии было $\bar{\varphi} = \text{const.}$, то (80,1) дает для p уравнение

$$p'' + \frac{2}{\rho^2} p = 0. \quad (80,2)$$

Применяя к уравнению (80,2) известную теорему Штурма о нулях интегралов линейных уравнений 2-го порядка,¹ находим следующий интересный и важный результат: в любом плоском электростатическом поле узкий пучок, имеющий осью одну из эквипотенциальных линий, всегда фокусируется в некоторой точке этой же линии, если на некотором достаточно длинном участке ее величина $\frac{2}{\rho^2}$ остается больше некоторой фиксированной постоянной. В частности, при $\rho = \text{const.}$ (дуга круга), уравнение (80,2) дает:

$$p = A \sin \frac{\sqrt{2}}{\rho} s + B \cos \frac{\sqrt{2}}{\rho} s. \quad (80,3)$$

Если принять начальную точку пути за начало отсчета дуг s , то при $s = 0$ должно быть $p = 0$. (80,3) дает поэтому

$$p = A \sin \frac{\sqrt{2}}{\rho} s. \quad (80,4)$$

¹ Достаточный для наших целей вариант теоремы Штурма может быть сформулирован следующим образом: если функция $p(s)$ удовлетворяет уравнению $p''(s) + F(s)p(s) = 0$, причем $F(s)$ постоянно больше, чем положительная постоянная d^2 , то во всяком интервале длиной $\frac{\pi}{d}$ имеется по крайней мере один корень функции $p(s)$.

Так как в нашем случае, по условию, $p = 0$ при $s = a$, то, если $\frac{2}{\rho^2} \geq d^2$, следующий корень функции $p(s)$ соответствует такому значению $s = b$, что $b \leq a + \frac{\pi}{d}$.

Так как ρ вновь обращается в нуль при

$$\frac{\sqrt{2}}{\rho} s = \pi,$$

что соответствует центральному углу

$$\theta = \frac{s}{\rho} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

то при

$$s = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \rho$$

пучок, вышедший из начальной точки $s=0$, вновь фокусируется, — хорошо известный результат.

80. 2. Легко, кстати, найти, руководствуясь принципами, изложенными в п. **79. 1**, потенциал того поля, в котором может происходить движение рассматриваемого типа. В самом деле, при $\bar{\varphi} = \text{const.}$ имеем, согласно ранее сказанному:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} &= \frac{2}{\rho} \bar{\varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \psi \equiv \psi(s) &= -\frac{2\bar{\varphi}}{\rho} s + \text{const.} \equiv -\frac{2\bar{\varphi}}{\rho} s + C, \end{aligned} \right\} \quad (80, 5)$$

так что на рассматриваемой дуге круга будет

$$w(s) = \bar{\varphi}(s) + i\psi(s) = \bar{\varphi} - \frac{2\bar{\varphi}}{\rho} si + iC. \quad (80, 6)$$

Далее, на той же дуге

$$z = x + iy = \rho \cos \delta + i\rho \sin \delta = \rho e^{i\delta} = \rho e^{i\frac{s}{\rho}}, \quad (80, 7)$$

где δ — полярный угол.

Исключая из (80, 6) и (80, 7) параметр s , найдем:

$$w(z) = \bar{\varphi} - 2\bar{\varphi} \lg \frac{z}{\rho} + iC,$$

так что $\varphi = \text{Re} \{ w(z) \}$ получается равным

$$\varphi = \bar{\varphi} \left[1 - 2 \lg \frac{r}{\rho} \right],$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус. Это и есть искомый потенциал, который, удовлетворяя уравнению Лапласа в окружающем траекторию пространстве, принимает на этой траектории постоянное значение, равное $\bar{\varphi}$.

80. 3. Заметим, в заключение, что нахождение значения потенциала в пространстве, окружающем основную траекторию, на которой задано значение потенциала, может быть произведено как аналитически

(см. п. 79.1), так и численными или графоаналитическими методами. Аналогичные соображения относятся к нахождению решения уравнения (80,2) или общих уравнений (79,12) или (80,1) относительно ρ по заданным на траектории значениям $\bar{\varphi}$ и т. д.

§ 81. Пространственные электростатические поля. Разложение потенциала в смежности с одной из траекторий пучка

81.1. До сих пор мы рассматривали только поведение электронных или ионных пучков в цилиндрических полях. Переходим теперь к общему случаю трехмерных полей и установим, прежде всего, в какой мере произвольно может быть задан пучок пространственных траекторий.

Начнем с рассмотрения одной из траекторий пучка которую зададим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где \mathbf{r} — радиус-вектор некоторой произвольной точки O траектории, а s — длина дуги ее, отсчитываемая от произвольной начальной точки. Обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 направления ортов касательной, главной нормали и бинормали в любой точке траектории. Принимаем O за начало локальной системы прямоугольных координат x, y, z , орты i_x, i_y, i_z которой совпадают соответственно с направлениями ξ_1, ξ_2, ξ_3 в данной точке.

То обстоятельство, что некоторая кривая AO является траекторией частицы в поле с потенциалом $\bar{\varphi}$,¹ налагает на $\bar{\varphi}$ два ограничения:²

1) в каждой точке кривой должно выполняться соотношение, аналогичное формуле (78,4), именно:

$$(\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_2) = F(\bar{\varphi}, \rho) = \frac{\psi(\bar{\varphi})}{\rho}, \quad (81,1)$$

где ρ — радиус кривизны в точке O , а $\psi(\bar{\varphi}) = 2\bar{\varphi}$ в случае классической механики и

$$\psi(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi} \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}^2} \right]$$

в случае механики теории относительности, и

2) так как внешняя сила, действующая на частицу, не имеет составляющей по бинормали, то

$$(\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_3) = 0. \quad (81,2)$$

Соотношения (81,1) и (81,2) показывают, что если бы было известно распределение $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(s)$ потенциала вдоль кривой, то тем самым было бы задано и распределение поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \bar{\varphi}$ вдоль всей кривой, поскольку компонента поля вдоль дуги равна

$$E_s = -\frac{d\bar{\varphi}}{ds},$$

а две другие получаются из (81,1) и (81,2).

¹ Обозначения здесь те же, как в § 78.

² См. Дополнение III.

Зная, таким образом, три величины $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}$ в функции от s , мы смогли бы, дифференцируя их по s , получить три соотношения между шестью вторыми производными от $\bar{\varphi}$ по координатам (в любой точке дуги). Еще одно соотношение вытекает из того, что $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:¹

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = 0.$$

Поэтому в выражении потенциала $\bar{\varphi}$ в смежности с O , т. е. в формуле

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + x \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)_0 + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right)_0 + \\ + \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \right)_0 + xy \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} \right)_0 + yz \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial z} \right)_0 + zx \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z \partial x} \right)_0 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (81,3)$$

остаются неизвестными,² если ограничиться членами второго порядка, только значения двух коэффициентов в квадратичных членах.

Вычислим те коэффициенты в (81,3), которые могут быть найдены при знании зависимости $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(s)$. В любой точке кривой имеем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_1) &= \frac{d\bar{\varphi}}{ds}, \\ (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_2) &= \frac{\psi}{\rho}, \quad (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_3) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (81,4)$$

В частности, в O

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)_0 &= \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)_0 = \frac{\psi_0}{\rho_0}, \\ \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right)_0 &= 0, \quad \psi_0 \equiv \psi(\bar{\varphi}_0). \end{aligned} \right\} \quad (81,5)$$

Дифференцируя (81,4) по s и пользуясь известными формулами Френе, именно³

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \frac{\xi_2}{\rho}, \quad \frac{d\xi_2}{ds} = -\frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau}, \quad \frac{d\xi_3}{ds} = -\frac{\xi_3}{\tau} \quad (81,6)$$

(τ — кручение кривой), найдем последовательно:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_1) = \left(\frac{d}{ds} \text{grad } \bar{\varphi}, \xi_1 \right) + \\ &+ (\text{grad } \bar{\varphi}, \frac{d\xi_1}{ds}) = \left(\mathbf{i}_x \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_y \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right) + \right. \\ &\left. + \mathbf{i}_z \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right), \xi_1 \right) + (\text{grad } \bar{\varphi}, \frac{\xi_2}{\rho}), \end{aligned}$$

¹ Или Пуассона — $\Delta \bar{\varphi} = -4\pi f(x, y, z)$. См. сноску² на стр. 510.

² При заданном $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(s)$.

³ См.: Б л а ж к е, Дифференциальная геометрия, т. I, стр. 36, ОНТИ, 1935.

а так как в O

$$\xi_1 = i_x, \quad \xi_2 = i_y, \quad \xi_3 = i_z,$$

то отсюда

$$\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) \right]_0 = \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right)_0 = \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} \right)_0 - \frac{\psi_0}{\rho_0^2}. \quad (81, 7)$$

Аналогичным образом, составляя

$$\left\{ \frac{d}{ds} (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_2) \right\}_0 = \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right]_0$$

и

$$\left\{ \frac{d}{ds} (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_3) \right\}_0 = 0,$$

найдем:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d \bar{\varphi}}{ds} \right)_0 + \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right]_0, \\ \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial z} \right)_0 &= \frac{\psi_0}{\rho_0 \tau_0}. \end{aligned} \right\} \quad (81, 8)$$

Кроме того, как уже указывалось, из уравнения $\Delta \varphi = 0$ вытекает соотношение:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \right)_0 = - \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right)_0 = - \left[\left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} \right)_0 - \frac{\psi_0}{\rho_0^2} \right]. \quad (81, 9)$$

Одна из стоящих слева вторых производных может быть задана по произволу, так же, как и не вошедшая в вычисления величина $\left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial z} \right)_0$. Мы положим

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = \mu(s), \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial z} = \nu(s) \quad (81, 10)$$

и получим тогда, в дополнение к (81, 8):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right)_0 &= - \left[\left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} \right)_0 - \frac{\psi_0}{\rho_0^2} + \mu_0 \right], \\ \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \right)_0 &= \mu_0; \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial z} \right)_0 = \nu_0. \end{aligned} \right\} \quad (81, 11)$$

Тем самым в выражении (81, 3) все коэффициенты определились через $\bar{\varphi}$ и его производные по s и через две произвольные постоянные μ_0, ν_0 .

§ 82. Вывод основных дифференциальных уравнений, связывающих распределение потенциала вдоль траектории с характером пучка.

82.1. Пусть теперь дана, наряду с AO , еще вторая, близкая к ней (собственно, бесконечно-близкая) траектория, исходящая тоже из точки A и соответствующая той же начальной скорости. Строя нор-

мальную плоскость основной кривой в точке O и задавая в функции от s величину $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ вектора, проведенного из O в точку O' пересечения этой нормальной плоскости с добавочной траекторией, полностью определим этим эту последнюю. Радиус-вектор \mathbf{R} точки O' равен

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{p} = \mathbf{r}(s) + \mathbf{p}(s), \quad (82, 1)$$

причем, так как \mathbf{p} лежит в нормальной плоскости кривой, то

$$\mathbf{p} = p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3,$$

где p_2 и p_3 — проекции \mathbf{p} на главную нормаль и на бинормаль кривой. Итак,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + p_2(s) \xi_2 + p_3(s) \xi_3. \quad (82, 2)$$

Так как вторая кривая — тоже траектория, то в точках ее должны выполняться соотношения типа (81, 1) и (81, 2). Вычисляя ρ , $\bar{\varphi}$ и направления ортов ξ_1' , ξ_2' , ξ_3' натурального трехгранника в точке O' этой кривой, можно найти условия, связывающие p_2 и p_3 с характером распределения потенциала $\bar{\varphi}$ вдоль основной кривой AO . Проще, однако, получить эти условия из уравнения движения рассматриваемой частицы, т. е. из

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \right] = -e \cdot \text{grad } \bar{\varphi}. \quad (82, 3)$$

Полагая

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{p}', \quad \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{p}''$$

и обозначая через ds' элемент дуги добавочной кривой, соответствующий перемещению ds вдоль дуги основной кривой, т. е. полагая

$$ds' = \left| \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right| \cdot ds,$$

получим, ограничиваясь здесь (и всегда в дальнейшем) малыми первого порядка относительно p_2 , p_3 и их производных:

$$ds' = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right)^2} ds = \sqrt{(\xi_1 + \mathbf{p}')^2} ds = [1 + (\mathbf{p}', \xi_1)] ds, \quad (82, 4)$$

а так как

$$\mathbf{p}' = \frac{d}{ds} [p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3] = -\frac{p_2}{\rho} \xi_1 + \left(p_2' - \frac{p_2}{\tau} \right) \xi_2 + \left(p_3' + \frac{p_2}{\tau} \right) \xi_3 \quad (82, 5)$$

[последнее с помощью (81, 6)], то

$$ds' = \left(1 - \frac{p_2}{\rho} \right) ds, \quad (82, 6)$$

т. е.

$$\frac{ds}{ds'} = 1 + \frac{p_2}{\rho}. \quad (82, 7)$$

Обозначая, далее, скорость движения по добавочной траектории через v' , причем $v' = \frac{ds'}{dt}$, а через $\bar{\varphi}'$ — потенциал в точках ее, и замечая, что $v'^2 = \Phi(\bar{\varphi}')$, где в случае классической механики

$$\Phi(\bar{\varphi}') = -\frac{2e}{m} \bar{\varphi}', \quad (82,8)$$

а в случае динамики теории относительности

$$\Phi(\bar{\varphi}') = c^2 \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}'^2} \right], \quad (82,9)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \right] &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[m \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) \frac{ds}{ds'} \cdot v' \right] \right\} \frac{ds}{ds'} \cdot v' = \\ &= \Phi(\bar{\varphi}') \left(1 + \frac{2p_2}{\rho} \right) \left\{ m [\mathbf{r}''(s) + \mathbf{p}''(s)] + \frac{dm}{ds} [\mathbf{r}'(s) + \mathbf{p}'(s)] \right\} + \\ &\quad + \frac{m}{2} [\mathbf{r}'(s) + \mathbf{p}'(s)] \times \frac{d}{ds} \left[\Phi(\bar{\varphi}') \left(1 + \frac{2p_2}{\rho} \right) \right] = \\ &= -e \{ \text{grad } \bar{\varphi}' \}_{O'}. \end{aligned} \quad (82,10)$$

Здесь m имеет в случае классической механики постоянное значение, а в случае динамики теории относительности выражается через $\bar{\varphi}'$ при помощи закона энергии, именно

$$m = -\frac{e\bar{\varphi}'}{c^2}. \quad (82,11)$$

Так как ?

$$\mathbf{r}''(s) = \frac{d\bar{\xi}_1}{ds} = \frac{\bar{\xi}_2}{\rho}, \quad (82,12)$$

тогда как $\mathbf{p}''(s)$ легко получается дифференцированием по s формулы (82, 5) с учетом (81, 6), именно:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}''(s) &= \left(-\frac{2p_2'}{\rho} + \frac{p_2 p_1'}{\rho^2} + \frac{p_2}{\rho \tau} \right) \bar{\xi}_1 + \\ &+ \left[p_2'' - \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} \right) p_2 - \frac{2p_2'}{\tau} + \frac{p_2 \tau'}{\tau^2} \right] \bar{\xi}_2 + \\ &+ \left(\frac{2p_2'}{\tau} - \frac{p_2 \tau'}{\tau^2} + p_3'' - \frac{p_2}{\tau^2} \right) \bar{\xi}_3, \end{aligned} \right\} \quad (82,13)$$

и так как в O' , где

$$\bar{\xi}_1 = \mathbf{i}_x, \quad \bar{\xi}_2 = \mathbf{i}_y, \quad \bar{\xi}_3 = \mathbf{i}_z, \quad x=0, \quad y=p_2, \quad z=p_3,$$

имеем значения

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \bar{\varphi}, \bar{\xi}_2)_{O'} &= \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)_{O'} = \\ &= \frac{\psi_0}{\rho_0} - p_2 \left[\left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} \right)_0 - \frac{\psi_0}{\rho_0^2} + \mu_0 \right] + p_3 \nu_0, \\ (\text{grad } \bar{\varphi}, \bar{\xi}_3)_{O'} &= p_2 \nu_0 + p_3 \mu_0. \end{aligned} \right\} \quad (82,14)$$

то скалярное умножение уравнения (82, 10) на $\bar{\xi}_2$ и $\bar{\xi}_3$ дает соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(p_2 \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right) - \frac{p_3}{\tau} \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + 2 \left[p_2'' + \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) p_2 - \frac{2p_3'}{\tau} + \right. \\ \left. + \frac{p_3\tau'}{\tau^2} \right] \bar{\varphi} + \mu p_2 - \nu p_3 = 0, \\ \left(p_3' + \frac{p_2}{\tau} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + 2 \left(p_3'' - \frac{p_2}{\tau^2} + \frac{2p_2'}{\tau} - \frac{p_3\tau'}{\tau^2} \right) \bar{\varphi} - \nu p_2 - \mu p_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (82, 15)$$

в случае классической механики и уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(p_2 \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right) - \frac{p_3}{\tau} \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + \bar{\varphi} \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}^2} \right) \left\{ p_2'' - \frac{2p_3'}{\tau} + \frac{p_3\tau'}{\tau^2} + \right. \\ \left. + p_2 \left[\frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}^2} \right) - \frac{1}{\tau^2} \right] \right\} + \mu p_2 - \nu p_3 = 0, \\ \left(p_3' + \frac{p_2}{\tau} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + \bar{\varphi} \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2 \bar{\varphi}^2} \right] \left\{ p_3'' - \frac{p_2}{\tau^2} + \right. \\ \left. + \frac{2p_2'}{\tau} - \frac{p_3\tau'}{\tau^2} \right\} - \nu p_2 - \mu p_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (82, 16)$$

в случае механики теории относительности. Значок (0) в (82, 15) и (82, 16) отброшен, поскольку эти соотношения должны выполняться в любой точке дуги. $\mu(s)$ и $\nu(s)$ — здесь произвольные пока функции дуги s .¹

Уравнения (82, 15) и (82, 16) являются основными для всего дальнейшего исследования.

§ 83. Исследование степени произвольности задания траекторий в пучке

83.1. (82, 15) и (82, 16) представляют собой системы из двух совокупных уравнений, линейных относительно p_2 и p_3 , причем первые из них линейны также относительно $\bar{\varphi}$. Они дают возможность решить поставленный в начале этой главы вопрос о том, в какой мере произвольным является задание пучка траекторий в общем случае трехмерных полей. Действительно, пусть, кроме основной траектории, дана еще одна, т. е. дан частный вид функций $p_2 = \bar{p}_2(s)$ и $p_3 = \bar{p}_3(s)$.

¹ В предельном случае малых скоростей уравнения (82, 16) переходят в уравнения (82, 15) [нужно только помнить, что $\bar{\varphi}$ имеет в (82, 15) и (82, 16) несколько разное значение, именно, в (82, 15) оно так нормировано, что $m\nu^2/2 = -e\bar{\varphi}$, а в (82, 16)

$$m^2 c^2 = (m - m_0) c^2 + m_0 c^2 = m\nu^2/2 + m_0 c^2 + \dots = -e\bar{\varphi},$$

т. е. во втором случае при $\nu \rightarrow 0$ будет $m\nu^2/2 = -e\bar{\varphi} - m_0 c^2$.

При нахождении (82, 15) и (82, 16) надо учесть зависимость Φ и m от $\bar{\varphi}$, так что, например,

$$\{\Phi(\bar{\varphi}')\}'_0 = \Phi(\bar{\varphi}_0) + \left(\frac{d\Phi}{d\bar{\varphi}} \right)_0 [\bar{\varphi}_0' - \bar{\varphi}_0] = \Phi(\bar{\varphi}_0) + \left(\frac{d\Phi}{d\bar{\varphi}} \right)_0 \cdot \frac{\psi_0}{\rho_0} p_2 \text{ и т. д.}$$

Тогда из (82, 15) или (82, 16) можно выразить обе оставшиеся пока произвольными функции $\mu(s)$ и $\nu(s)$ через \bar{p}_2, \bar{p}_3 и через

$$\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}' = \frac{d\bar{\varphi}}{ds}, \quad \bar{\varphi}'' = \frac{d^2\bar{\varphi}}{ds^2}, \quad 1$$

т. е. уже задание одной добавочной траектории полностью определяет μ и ν в функции от $\bar{\varphi}(s)$ и его первых двух производных. Подставляя найденные таким образом значения $\mu(s)$ и $\nu(s)$ в (82, 15) или (82, 16), соответственно, получим в обоих случаях по два уравнения вида

$$F_1(p_2, p_3, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}', \bar{\varphi}'') = 0 \quad (83, 1)$$

и

$$F_2(p_2, p_3, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}', \bar{\varphi}'') = 0, \quad (83, 2)$$

которыми для всякой другой возможной траектории определяется связь между p_2, p_3 и $\bar{\varphi}$. Так как таких уравнений два, а входящих в них функций три, то из них одну можно задать по произволу, тогда как остальные уже должны быть определены из (83, 1) и (83, 2). Это показывает, что при задании одной только траектории, сверх основной, возможно задать, вообще говоря, еще лишь одну из двух величин p_2 и p_3 для какой-либо третьей траектории, но не обе сразу. В этом смысле можно сказать, что, в то время, как в плоском случае можно задать по произволу две траектории, в пространственном можно задать их „две с половиной“. Отметим еще, что в то время, как в плоском случае задание двух траекторий (собственно, элементов траекторий) полностью определяет поле во всем пространстве, в пространственном случае это будет уже не совсем так. Действительно, хотя заданием двух с половиной траекторий полностью определяются как $\bar{\varphi}(s)$ и его производные по дуге, так и $\mu(s)$ и $\nu(s)$, т. е. вполне определяются все коэффициенты в выражении (81, 3) потенциала в смежности с основной траекторией, но коэффициенты дальнейших членов разложения $\bar{\varphi}$ в ряд по степеням координат определяются не полностью. Так, например, из десяти третьих производных

$$\left(\frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial x^3} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y^2} \right)_0$$

и т. д. могут быть определены, при знании на дуге значений

$$\bar{\varphi}, \quad \mu = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial u \partial z},$$

вообще говоря, только восемь. В производных более высокого порядка степень произвольности будет еще больше. Итак, в то время, как

Очевидно, нет опасности смешать здесь и в дальнейшем $\bar{\varphi}' = \frac{d\bar{\varphi}}{ds}$ с ранее использованным и в дальнейшем более не встречающимся значением $\bar{\varphi}'$ потенциала на добавочной траектории.

фокусирующие свойства поля для узких пучков полностью определяются заданием двух с половиной траекторий, — в определении самого поля остается известная степень произвола, которая может быть использована, например, для улучшения фокусировки более высокого порядка.

§ 84. Общие законы фокусировки пространственных пучков

84.1. Посмотрим теперь, в какой мере произвольность выбора двух с половиной траекторий может обеспечить фокусировку целого пучка траекторий, соответствующих частицам с одинаковой по величине начальной скоростью и исходящих из общей начальной точки A , лежащей на основной траектории. Пусть A соответствует $s = a$, и пусть, кроме основной линии, задана еще траектория $p_2 = \bar{p}_2(s)$, $p_3 = \bar{p}_3(s)$, причем $p_2(a) = p_3(a) = 0$. Пусть эта траектория пересекает основную линию в точке $s = b$ (точка B), так что $\bar{p}_2(b) = \bar{p}_3(b) = 0$.

Согласно сказанному выше, можно при этом задать по произволу еще $p_3 = \bar{p}_3(s)$ для какой-либо третьей траектории, притом так, чтобы было $\bar{p}_3(a) = \bar{p}_3(b) = 0$. Так как заданием этих величин значение $p_3 = \bar{p}_3(s)$ для третьей траектории уже в значительной степени определено (для \bar{p}_3 получается обыкновенное дифференциальное уравнение третьего или четвертого порядка¹), так же, как и $\bar{\varphi}(s)$, то можно

¹ Действительно, исключая из (83, 1) и (83, 2) $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}'$ и $\bar{\varphi}''$, получаем соотношение, связывающее p_2 , p_3 , \bar{p}_2 , \bar{p}_3 и их производные до третьего или четвертого порядка включительно (в зависимости от того, рассматривается ли нерелятивистский или релятивистский случай, соответственно). Из него по трем из этих величин должно, для полного определения третьей траектории, найти четвертую. В нерелятивистском случае соотношения (83, 1) и (83, 2), получающиеся исключением μ и ν из (82, 15), имеют вид

$$a_1 \bar{\varphi}'' + b_1 \bar{\varphi}' + c_1 \bar{\varphi} = 0, \quad (\alpha)$$

$$a_2 \bar{\varphi}'' + b_2 \bar{\varphi}' + c_2 \bar{\varphi} = 0, \quad (\beta)$$

где коэффициенты a_i , b_i ($i = 1, 2$) зависят только от p_2 , p_3 , \bar{p}_2 , \bar{p}_3 и от их производных до второго порядка включительно, но не от $\bar{\varphi}$. Исключая $\bar{\varphi}''$ из (α) и (β), получаем уравнение

$$\bar{\varphi}' = n \bar{\varphi}, \quad (\gamma)$$

где

$$n = \frac{\begin{vmatrix} a_2 a_1 \\ c_2 c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}}.$$

Отсюда

$$\bar{\varphi}'' = (n' + n^2) \bar{\varphi}, \quad (\delta)$$

и, вводя значения (γ), (δ), например, в (α), получим искомое условие, именно

$$a_1 (n' + n^2) + b_1 n + c_1 = 0. \quad (\epsilon)$$

Так как оно содержит n' , то это — уравнение третьего порядка относительно p_i , \bar{p}_i ($i = 2, 3$). Нетрудно доказать, что (ε) является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы уравнения (α) и (β) имели общее решение $\bar{\varphi}$, отличное от нуля.

его подчинить начальному условию $\bar{p}_3(a) = 0$, но нельзя быть вполне уверенным в том, что всегда можно так распорядиться произвольной постоянной в решении, чтобы было одновременно и $\bar{p}_3(b) = 0$.¹

Посмотрим, что можно сказать при таких условиях об остальных траекториях, исходящих из A , т. е. удовлетворяющих условию, что

$$p_2(a) = p_3(a) = 0, \quad (84,1)$$

если еще известно, что выбранные нами системы решений (\bar{p}_2, \bar{p}_3) и (\bar{p}_2, \bar{p}_3) линейно независимы, т. е. не получаются одна из другой просто пропорциональным изменением масштаба. Так как уравнения (82, 15) или (82, 16) линейны относительно p_2, p_3 и их производных, то самое общее решение их, удовлетворяющее условиям (84, 1), будет, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} p_2(s) &= \alpha \bar{p}_2(s) + \beta \bar{p}_2(s), \\ p_3(s) &= \alpha \bar{p}_3(s) + \beta \bar{p}_3(s), \end{aligned} \right\} \quad (84,2)$$

где α и β — произвольные постоянные.

Отсюда видно, что

$$p_2(b) = \alpha \bar{p}_2(b) + \beta \bar{p}_2(b) = 0,$$

тогда как

$$p_3(b) = \beta \bar{p}_3(b).$$

Это показывает, что все траектории нашего (узкого) пучка, вне зависимости от своего наклона к основной линии, пересекают нормальную к ней в точке B плоскость по прямой, параллельной бинормали ξ_3 в этой точке, причем, если решение удалось выбрать так, чтобы было $\bar{p}_3(b) = 0$, то весь пучок фокусируется в одной точке.

Итак, можно сказать, что если удалось сфокусировать в одной точке (B) две какие-либо траектории, исходящие из общей начальной точки A и имеющие начальные скорости, не лежащие в одной плоскости, то и все остальные траектории, исходящие из A , сфокусируются в B . Если же одна из таких траекторий пересекает основную линию в B , а вторая исходит тоже из A , но не пересекает нормальную плоскость основной кривой, проходящую через точку B , в другой точке — C , то все остальные траектории, исходящие из A , пересекают эту нормальную плоскость по прямой BC („полуфокусирующийся пучок“).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

¹ Представляется весьма вероятным, что это, вообще говоря, возможно сделать, поскольку в решение входит произвольный параметр (или даже два параметра). Все же практическое нахождение такого решения потребовало бы, вообще говоря, затраты большой вычислительной работы.

84.2. Осуществление фокусировки в случае, когда основная кривая — плоская и лежит в плоскости симметрии поля. Если основная кривая — плоская, то всегда легко указать фокусирующее поле. Именно, считая, что эта кривая лежит в плоскости симметрии поля, так что

$$\nu = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial z} = 0,$$

и замечая, что для плоской кривой $\frac{1}{r} = 0$, получаем, например, из (82, 15)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(p_2 \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right) + 2 \left[p_2'' + \frac{2}{\rho^2} p_2 \right] \bar{\varphi} + \mu p_2 &= 0, \\ p_3' \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + 2 p_3'' \bar{\varphi} - \mu p_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (84,3)$$

т. е. уравнения для p_2 и p_3 разделились. Выбирая, поэтому, одну из возможных траекторий так, чтобы было

$$p_2 = \bar{p}_2(s), \quad p_3 = \bar{p}_3(s) \equiv 0,$$

при условии, что

$$\bar{p}_2(a) = \bar{p}_2(b) = 0,$$

определяем из первого уравнения (84, 3) μ через $\bar{\varphi}$ и его производные. Подставляя это значение во второе уравнение (84, 3) и выбирая $p_3 = \bar{p}_3(s)$ произвольно, при единственном условии, что

$$\bar{p}_3(a) = \bar{p}_3(b) = 0$$

и что

$$p_2 = p_2(s) = 0,$$

получим дифференциальное уравнение второго порядка для $\bar{\varphi}$, из которого оно и определится полностью при задании поля в начальной точке. Тем самым найдем поле, при котором две взаимно перпендикулярные траектории, исходящие из точки $s = a$, фокусируются в точке $s = b$, а потому, согласно сказанному в § 84, будет фокусироваться и весь пучок, исходящий из $s = a$.

Если, в частности, пожелать, чтобы вдоль основной кривой было $\bar{\varphi} = \text{const.}$, то уравнения (84, 3) дают:

$$\left. \begin{aligned} p_2'' + \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{\mu}{2\bar{\varphi}} \right) p_2 &= 0, \\ p_3'' - \frac{\mu}{2\bar{\varphi}} p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (84,4)$$

Степень произвольности решения здесь еще очень велика. Потребуем, например, чтобы было $p_3 = p_2$. Для этого, очевидно, должно быть

$$\mu = -2\bar{\varphi}/\rho^2, \quad (84,5)$$

и это лишь одно из бесчисленного множества возможных решений.

Аналогичные результаты получаются, если исходить не из уравнений (82,15), а из (82,16).

84.3. **Случай полей враще н и я.** Рассмотрим еще применение полученного результата к полям вращения. Если основная траектория лежит в одной из плоскостей, проходящих через ось поля, то, очевидно, справедливы уравнения (84,3). Характерной для полей вращения является, однако, невозможность задания по произволу величины μ , ибо она, как можно показать, связана с распределением $\bar{\varphi}$ вдоль дуги основной кривой соотношением

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{1}{r} \left[\frac{\psi_0}{\rho_0} \cos \theta + \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0 \sin \theta \right], \quad (84,6)$$

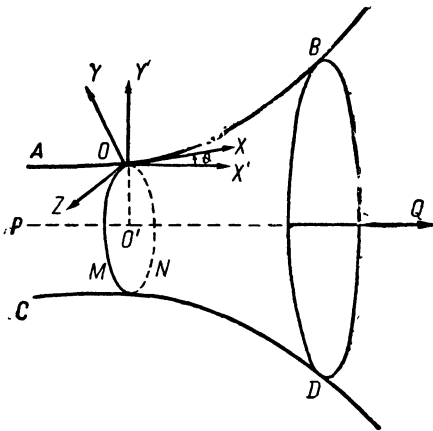


Рис. 141.

где r — расстояние точки O от оси вращения, а θ — угол, составляемый касательной к основной кривой в O [т. е. вектором $(\xi_1)_0 = \mathbf{i}_x$] с направлением оси вращения.

Действительно, пусть $ABCD$ (рис. 141) — поверхность, образованная вращением отрезка AB рассматриваемой траектории вокруг оси PQ симметрии поля. Проведем через точку O траектории плоскость, перпендикулярную к оси вращения, которая пересечет ось PQ в точке O' , а поверхность $ABCD$ — по кругу OMN . Введем в рассмотрение, наряду с системой координат X, Y, Z , еще вторую — X', Y', Z' с началом в той же точке O траектории, но повернутую относительно первой на угол θ^1 вокруг оси Z , которую принимаем в то же время за ось Z' новой системы. Ось X' новой системы параллельна при этом оси вращения PQ , тогда как ось Y' направлена вдоль радиуса OO' .

Замечая, что связь между штрихованными и нештрихованными координатами дается соотношениями

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y' = y \cos \theta + x \sin \theta, \quad z' = z, \quad (84,7)$$

обозначая далее, как указано было выше, OO' через r и учитывая, что уравнения дуги OMN круга, на которой потенциал $\bar{\varphi}$ постоянен и равен $\bar{\varphi}_0$, будут, в координатах x', y', z' :

$$x' = 0, \quad (y' + r)^2 + z'^2 = r^2, \quad (84,8)$$

¹ По часовой стрелке.

получим:

$$x = y \operatorname{tg} \theta, \quad y' = \frac{y}{\cos \theta}, \quad z^2 = z'^2 = -y'(2r + y') = -\frac{2ry}{\cos \theta} - \frac{y^2}{\cos^2 \theta}. \quad (84,9)$$

Подставляя эти значения x и z в формулу (81,3) и пользуясь формулами (81,5) и (81,11) и тем, что в данном случае $v_0 = 0$, найдем для потенциала $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0$ в точках рассматриваемой дуги, близких к O :

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + y \operatorname{tg} \theta \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0 + y \frac{\psi_0}{r_0} - \frac{ry}{\cos \theta} \mu_0 + \dots, \quad (84,10)$$

причем отброшены члены порядка $y^{3/2}$ и выше.

(84,10) дает:

$$\mu_0 = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\psi_0}{r_0} \cos \theta + \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0 \sin \theta \right\},$$

т. е., как раз формулу (84,6). При заданной форме траектории AB , все входящие в формулу (84,6) величины, в частности, r и θ — известные функции от s , т. е. известна в функции от s и величина μ .

В этом случае уже нельзя выбирать обе функции p_2 и p_3 вполне произвольно, ибо, при задании одной из них, вторая должна определиться из указанного выше дифференциального уравнения (см. п. 84.1). Определив при этом $\bar{\varphi}$ вдоль основной кривой, т. е., собственно, на поверхности, образованной вращением ее вокруг оси поля, тем самым уже однозначно определим его во всем пространстве.

Заметим еще, что если при решении задачи потенциал определен на дуге кривой AB , оба конца которой уходят в бесконечность, или такой, что AB пересекает ось вращения PQ , так что потенциал известен на уходящей в бесконечность или замкнутой поверхности, образованной вращением AB вокруг PQ , то потенциал в точках внутри этой поверхности можно найти, пользуясь известной формулой¹

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ \bar{\varphi} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial n} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right\} df, \quad (84,11)$$

где интегрирование распространено по всей рассматриваемой поверхности вращения, R обозначает расстояние от некоторой точки этой поверхности до той точки, в которой вычисляется $\bar{\varphi}$, а $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$ непосредственно известно, ибо, согласно формуле (81,1), $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \pm (\operatorname{grad} \bar{\varphi}, \bar{\xi}_2) = \pm \frac{\psi}{r}$. Тем самым узнаем значения потенциала $\bar{\varphi}$ и во всем окружающем пространстве.

84.4. Покажем еще, что из уравнений (84,3) вытекает в предельном случае параксиальных пучков и полей вращения обычное основное уравнение электронной оптики.

¹ Для бесконечной незамкнутой поверхности она верна лишь с некоторыми оговорками.

Действительно, так как при этом основная траектория совпадает с осью симметрии поля, так что для нее $\frac{1}{\rho} = 0$, и так как в точках этой основной траектории направления нормали Y и бинормали Z совершенно равноценны, то

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2},$$

и уравнение Лапласа дает

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial s^2} = 2\mu = -\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = -\frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2}, \quad (84,12)$$

последнее потому, что в данном случае x и s совпадают. Уравнения (84,3) переходят теперь в такие:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(p_2 \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right) + 2p_2'' \bar{\varphi} - \frac{1}{2} p_2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} &= 0, \\ p_3 \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + 2p_3' \bar{\varphi} + \frac{1}{2} p_3 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. для p_2 и p_3 получаются одинаковые уравнения вида:

$$p'' + \frac{1}{2} \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}} p' + \frac{1}{4} \frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}} p = 0, \quad (84,13)$$

где p — любая из величин p_2, p_3 , как оно и должно быть в силу полной равноценности обоих направлений y и z . Уравнение (84,13) и есть обычное основное уравнение электронной оптики, которым пользуются для нахождения траекторий электрона в заданном поле с симметрией вращения, причем $\bar{\varphi}$ задается с самого начала в функции от s , т. е. на оси вращения.

§ 85. Пространственные траектории при одновременном наличии электростатического и магнитного полей

85.1. Вывод основных уравнений, связывающих распределение электрического и магнитного потенциалов вдоль траектории с характером пучка. В §§ 81—84 мы рассмотрели вопрос о возможном характере пучков наэлектризованных частиц в произвольном пространственном электростатическом поле, но при отсутствии магнитного поля.

Рассмотрим теперь общий случай, когда в пространстве имеются одновременно электростатическое и магнитное поля.

При решении задачи будем исходить, как прежде, из уравнений движения наэлектризованной частицы, причем магнитное поле будем характеризовать магнитным потенциалом Ω .¹ Вводя, как раньше, локаль-

¹ Это допустимо, так как нас будут интересовать только значения магнитного поля \mathbf{H} в точках самого пучка, где посторонних токов нет, собственным же полем пучка пренебрегаем.

ную систему координат x, y, z с началом в некоторой точке O основной траектории и обозначая через ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 орты натурального трехгранника в точке O' добавочной кривой, имеющей координаты (O, p_2, p_3) , будем иметь (сохраняем прежние обозначения):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{dr}{dt} + \frac{dp}{dt} \right) \right] &= -e \cdot \text{grad } \bar{\varphi}' + \frac{e}{c} [\mathbf{v}', \mathbf{H}] = \\ &= -e \cdot \text{grad } \bar{\varphi}' - e \cdot \frac{v'}{c} [\xi'_1, \text{grad } \Omega'], \end{aligned} \right\} \quad (85,1)$$

последнее из-за $\mathbf{v}' = v' \xi'_1$, где $v' = \sqrt{\Phi(\bar{\varphi}')}$ — абсолютная величина скорости движения по добавочной траектории,¹ $\bar{\varphi}'$ и Ω' — значения электростатического и магнитного потенциалов в точках этой траектории.

Разложения $\bar{\varphi}$ и Ω в смежности с точкой O будут:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \frac{1}{2} x^2\varphi_{11} + xy\varphi_{12} + \dots + \frac{1}{2} z^2\varphi_{33} + \dots \quad (85,2)$$

и

$$\Omega = \Omega_0 + x\Omega_1 + y\Omega_2 + z\Omega_3 + \frac{1}{2} x^2\Omega_{11} + xy\Omega_{12} + \dots + \frac{1}{2} z^2\Omega_{33} + \dots, \quad (85,3)$$

причем введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)_0 &= \varphi_1, & \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)_0 &= \varphi_2, & \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right)_0 &= \varphi_3, \\ \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right)_0 &= \varphi_{11}, & \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \varphi_{12} \text{ и т. д.,} \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_0 &= \Omega_1, & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)_0 &= \Omega_2, & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)_0 &= \Omega_3, \\ \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right)_0 &= \Omega_{11}, & \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \Omega_{12}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (85,4)$$

Пользуясь элементарными соображениями дифференциальной геометрии, легко найдем:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= \xi_1 + \left(p'_2 - \frac{p_2}{\tau} \right) \xi_2 + \left(p'_3 + \frac{p_3}{\tau} \right) \xi_3, \\ \xi'_2 &= \xi_1 \left(\frac{p_3}{\tau} - p'_2 \right) + \xi_2 + \xi_3 \cdot \rho \cdot \left(p'_3 - \frac{p_3}{\tau^2} + \frac{2p'_2}{\tau} - \frac{p_2 \tau'}{\tau^2} \right), \\ \xi'_3 &= [\xi'_1, \xi'_2] = -\xi_1 \left(p'_3 + \frac{p_3}{\tau} \right) - \xi_2 \rho \left(p'_3 - \frac{p_3}{\tau^2} + \frac{2p'_2}{\tau} - \frac{p_2 \tau'}{\tau^2} \right) + \xi_3. \end{aligned} \right\} \quad (85,5)$$

В самом деле, согласно (82,1), уравнение добавочной кривой имеет вид:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{p},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ соответствует основной траектории.

Обозначая, как раньше, через ds' элемент дуги добавочной траектории, соответствующий элементу ds основной, и замечая, что, по определению,

$$\xi'_1 = \frac{d\mathbf{R}}{|d\mathbf{R}|} = \frac{d\mathbf{R}}{ds'} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds'} = \left(1 + \frac{p_2}{\rho} \right) [\mathbf{r}'(s) + \mathbf{p}'(s)],$$

¹ См. (82,8) и (82,9).

причем использована формула (82,7), получим, принимая во внимание данную там же формулу (82,5) для ρ' :

$$\xi'_1 = \xi_1 + \left(\rho'_2 - \frac{p_2}{\tau}\right) \xi_2 + \left(\rho'_3 + \frac{p_2}{\tau}\right) \xi_3 \quad (85,6)$$

(как всегда, сохраняем в результате лишь малые первого порядка).

Для нахождения ξ'_2 исходим из формулы Френе

$$\frac{d\xi'_1}{ds'} = \frac{\xi'_2}{\rho'}, \quad (85,7)$$

где ρ' обозначает радиус кривизны добавочной траектории. (85,7) дает:

$$\frac{1}{\rho'} = \sqrt{\left(\frac{d\xi'_1}{ds'}\right)^2} = \left(1 + \frac{p_2}{\rho}\right) \sqrt{\left(\frac{d\xi'_1}{ds}\right)^2}. \quad (85,8)$$

Дифференцируем по s найденную выше формулу для ξ'_1 , причем пользуемся формулами Френе. Подставляя найденный результат в (85,8) и ограничиваясь малыми первого порядка, получим:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + p''_2 - \frac{p'_3}{\tau} - \frac{d}{ds} \left(\frac{p_2}{\tau}\right) + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) p_2. \quad (85,9)$$

Подставляя же значения $\frac{d\xi'_1}{ds'} = \left(1 + \frac{p_2}{\rho}\right) \frac{d\xi'_1}{ds}$ и ρ' в (85,7), найдем для ξ'_2 значение

$$\xi'_2 = \left(\frac{p_2}{\tau} - p'_2\right) \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \cdot \rho \left(\frac{2p'_2}{\tau} - \frac{p_2 \tau'}{\tau^2} + p''_2 - \frac{p_2}{\tau^2}\right), \quad (85,10)$$

после чего легко находится и ξ'_3 из соотношения $\xi'_3 = [\xi'_1, \xi'_2]$, именно,

$$\xi'_3 = -\xi_1 \left(\rho'_3 + \frac{p_2}{\tau}\right) - \xi_2 \cdot \rho \left(\rho''_3 - \frac{p_2}{\tau^2} + \frac{2p'_2}{\tau} - \frac{p_2 \tau'}{\tau^2}\right) + \xi_3. \quad (85,11)$$

Заметим еще, что при $\frac{1}{\tau} = 0$, т. е. для плоской основной кривой, формула (85,9) переходит в уравнение (79,10).

Развертывая теперь левую сторону уравнения (85,1) совершенно так же, как это было сделано в уравнениях (82,3) и (82,10), и подставляя в правую часть его значения $\{\text{grad } \bar{\varphi}\}'$, $\{\text{grad } \Omega\}'$ и ξ'_1 , находимые из (85,2), (85,3) и (85,5), получим в результате скалярного умножения на ξ_2 и ξ_3 :

$$\left. \begin{aligned} & \left(\rho'_3 + \frac{p_2}{\tau}\right) \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + 2 \left[p''_3 - \frac{p_2}{\tau^2} + 2\frac{p'_2}{\tau} - \frac{p_2 \tau'}{\tau^2}\right] \bar{\varphi} = \\ & = p_2 \varphi_{23} + p_3 \varphi_{33} + \alpha \sqrt{\bar{\varphi}} \left\{ -\left(\rho'_2 - \frac{p_2}{\tau}\right) \Omega_1 + p_2 \Omega_{22} + \right. \\ & \quad \left. + p_3 \Omega_{23} + \frac{\Omega_2}{2\bar{\varphi}} (p_2 \varphi_2 + p_3 \varphi_3) \right\}, \\ & \left(\rho'_2 - \frac{p_2}{\tau}\right) \frac{d\bar{\varphi}}{ds} + 2 \left[p''_2 + p_2 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) - \frac{2p'_3}{\tau} + \frac{p_2 \tau'}{\tau^2}\right] \bar{\varphi} + \\ & \quad + p_2 \left(\frac{2}{\rho} \varphi_2 - \varphi_{22}\right) + p_3 \left(\frac{2}{\rho} \varphi_3 - \varphi_{23}\right) = \alpha \sqrt{\bar{\varphi}} \times \\ & \times \left\{ \left(\rho'_3 + \frac{p_2}{\tau}\right) \Omega_1 - (p_2 \Omega_{23} + p_3 \Omega_{33}) - \frac{\Omega_3}{2\bar{\varphi}} (p_2 \varphi_2 + p_3 \varphi_3) \right\}, \\ & \alpha = \frac{1}{c} \sqrt{-\frac{2e}{m}}, \end{aligned} \right\} \quad (85,12)$$

причем использованы соотношения:

$$\bar{\varphi}'_0 = \bar{\varphi}_0 \left(1 + p_2 \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_0} + p_3 \frac{\varphi_3}{\varphi_0} \right) + \dots, \quad (85,13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_2)'_0 &= \bar{\varphi}_2 + p_2 \varphi_{22} + p_3 \varphi_{23}; \\ (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_3)'_0 &= \varphi_3 + p_2 \varphi_{23} + p_3 \varphi_{33}; \end{aligned} \right\} \quad (85,14)$$

$$\left. \begin{aligned} (\xi_2, [\xi'_1, \text{grad } \Omega])'_0 &= (\text{grad } \Omega, [\xi_2, \xi'_1])'_0 = \\ &= -(\Omega_3 + p_2 \Omega_{23} + p_3 \Omega_{33}) + \left(p'_3 + \frac{p_2}{\tau} \right) \Omega_1; \\ (\xi_3, [(\xi'_1, \text{grad } \Omega)])'_0 &= (\text{grad } \Omega, \xi_2 - [p'_2 - \frac{p_3}{\tau}] \xi_1) = \\ &= (\Omega_2 + p_2 \Omega_{22} + p_3 \Omega_{23}) - \left(p'_2 - \frac{p_3}{\tau} \right) \Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (85,15)$$

и результат написан для нерелятивистского случая.¹ Уравнения (85,12) являются обобщением уравнений (82,15) на случай одновременного наличия электростатического и постоянного магнитного поля. При этом между величинами φ_i , φ_{ij} , Ω_m , Ω_{mn} существует десять соотношений, из которых четыре получаются из условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\psi(\bar{\varphi})}{\rho} &= (\text{grad } \bar{\varphi}, \xi_2) - \frac{1}{c} \sqrt{\Phi(\bar{\varphi})} \cdot (\text{grad } \Omega, \xi_3), \\ (\text{grad } \varphi, \xi_3) &= -\frac{1}{c} \sqrt{\Phi(\bar{\varphi})} \cdot (\text{grad } \Omega, \xi_2), \end{aligned} \right\} \quad (85,16)$$

являющихся обобщением условий (81,1) и (81,2), два вытекают из того, что $\bar{\varphi}$ и Ω удовлетворяют каждый уравнению Лапласа, и еще четыре получаются из того, что $\bar{\varphi}$ и Ω считаются известными вдоль дуги s основной кривой. Именно найдем, подобно тому, как это имело место при выводе формул (81,5), (81,7), (81,8), и (81,9):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0, \quad \varphi_{11} + \frac{1}{\rho_0} \varphi_2 = \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{ds^2} \right)_0, \\ \Omega_1 &= \left(\frac{d\Omega}{ds} \right)_0, \quad \Omega_{11} + \frac{1}{\rho_0} \Omega_2 = \left(\frac{d^2 \Omega}{ds^2} \right)_0, \\ \frac{\psi(\bar{\varphi}_0)}{\rho_0} &\equiv \frac{\psi_0}{\rho_0} = \varphi_2 - \frac{1}{c} \sqrt{\Phi_0} \Omega_3, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{c} \sqrt{\Phi_0} \Omega_2, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(\bar{\varphi}_0), \\ \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right]_0 &= \left(\varphi_{12} - \frac{1}{\rho_0} \varphi_1 + \frac{1}{\tau_0} \varphi_3 \right) - \\ &- \frac{1}{c} \left[\sqrt{\Phi_0} \left(\Omega_{31} - \frac{1}{\tau_0} \Omega_2 \right) + \frac{\Phi'(\bar{\varphi}_0)}{2\sqrt{\Phi_0}} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0 \cdot \Omega_3 \right], \\ \varphi_{31} - \frac{1}{\tau_0} \varphi_2 &= -\frac{1}{c} \left[\left(\Omega_{12} - \frac{1}{\rho_0} \Omega_1 + \frac{1}{\tau_0} \Omega_3 \right) \sqrt{\Phi_0} + \frac{\Phi'(\bar{\varphi}_0)}{2\sqrt{\Phi_0}} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{ds} \right)_0 \cdot \Omega_2 \right], \\ \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} &= 0, \\ \Omega_{11} + \Omega_{22} + \Omega_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (85,17)$$

¹ Для релятивистского случая аналогичные формулы получаются, очевидно, также без всяких затруднений.

Восемь из величин φ_i , φ_{ij} , Ω_m , Ω_{mn} остаются произвольными функциями от z . Отсюда вытекает, что в самом общем случае одновременного наличия электростатических и магнитных полей нельзя задать по произволу более шести траекторий, тогда как в случае только электростатического поля нельзя было их задать более двух с половиной.

85. 2. Антисимметричный магнитный случай. Мы не будем разбирать здесь более подробно общих уравнений (85,12), а ограничимся случаем наличия одного только магнитного поля, причем $\varphi = \text{const.} = \varphi^0$ во всем пространстве.

Если будем, сверх того, предполагать, что основная траектория — плоская и лежит в средней плоскости, между двумя одинаковыми по форме полюсными башмаками N и S , то уравнения (85,12) дают:

$$\left. \begin{aligned} p_2'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\varphi^0}} \Omega_{23} \right) p_2 &= 0, \\ p_3'' - \frac{\alpha}{2\sqrt{\varphi^0}} \Omega_{23} p_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (85,18)$$

ибо тогда, по симметрии,

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{12} = 0, \quad (85,19)$$

а из уравнения Лапласа вытекает, что и $\Omega_{33} = 0$. Уравнения для p_2 и p_3 , таким образом, разделяются, и фокусировка всегда может быть обеспечена (ср. п. 84. 2). Заметим еще, что для основной кривой всегда имеют место соотношения (85,16), первое из которых в данном случае обращается просто в

$$\frac{\sqrt{2\varphi^0}}{\rho} = -\alpha\Omega_3 = \alpha H_z, \quad (85,20)$$

тогда как второе удовлетворяется автоматически.

Если выбрать поле \mathbf{H} так, чтобы было $\frac{\alpha}{2\sqrt{\varphi^0}} \Omega_{23} = -\frac{1}{2\rho^2}$, то уравнения (85,18) упрощаются и дают

$$p_2'' + \frac{1}{2\rho^2} p_2 = 0, \quad p_3'' + \frac{1}{2\rho^2} p_3 = 0, \quad (85,21)$$

т. е. в этом случае $p_2 = p_3$.

85. 3. Подводя итоги, можем сказать, что изложенный метод позволяет изучить в самом общем виде все вопросы, связанные с получением электронных пучков любого желаемого типа, и дает возможность установить степень произвольности таких пучков и характер тех электростатических и магнитных полей, которые требуются для их получения.

При этом мы, как правило, предполагали, при выводе дифференциальных уравнений для распределения потенциала, что дано несколько близких друг к другу „основных“ траекторий,¹ исходящих из общей

¹ Две или больше.

точки A , и что начальные скорости всех частиц, составляющих пучок, равны по абсолютной величине („монохроматические“ пучки). Если бы это было не так, т. е. если бы начальные скорости различались по величине, то, очевидно, что для каждой из траекторий попрежнему осталось бы в силе уравнение типа (78,4) (в случае плоских полей), или типа (81,1) и т. д. (в случае пространственных полей). При этом только на каждой траектории $\bar{\varphi}$ имел бы свое специальное значение, скажем $\bar{\varphi}'$, зависящее от величины начальной скорости частицы, движущейся по этой траектории.

Если разброс скоростей в начальной точке мал по сравнению с средней величиной начальной скорости, то, полагая $\bar{\varphi}' = \bar{\varphi} + \delta\varphi = \bar{\varphi} \left(1 + \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}}\right)$, считая отношение $\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}}$ весьма малым на всем интересующем нас отрезке траектории¹ и сравнивая уравнения близких траекторий, подобно тому, как мы это делали выше, например, в п. 79. 2, сможем обобщить наши выводы и на такие случаи.² Полученные таким образом уравнения могли бы служить, в частности, для изучения влияния неодинаковости начальных скоростей частиц на степень дефокусировки пучка, т. е. для изучения „хроматической“ аберрации.

¹ Это допустимо, если только скорость частиц во всех точках траектории остается больше какой-либо фиксированной постоянной.

² Для этого нужно разложить получающиеся выражения в ряды по степеням отношения $\left(\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}}\right)$ и ограничиться первыми неисчезающими тождественно членами разложения.

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

ТЕРМОИОННЫЕ ТОКИ В ВАКУУМЕ

Глава XXV

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

§ 86. Прохождение тока через плоский диод

86. 1. В первых частях этой книги мы рассмотрели вопрос о нахождении электрических и магнитных полей, создаваемых заданным расположением или движением электрических зарядов, а в V части изучали поля, могущие обусловить заданное движение заряженных частиц, предполагая при этом, что как обратным действием самих движущихся частиц на первичное поле, так и их взаимодействием в пучке можно пренебречь.

Займемся теперь вопросом о нахождении поля в тех случаях, когда влиянием самих движущихся частиц на поле нельзя пренебречь и когда оно может даже играть решающую роль. В особенно резкой форме это обстоятельство проявляется, при известных условиях, в некоторых электронных и ионных приборах, где оно может приводить к ограничению проходящего тока объемным зарядом, возникающим при этом в пространстве между электродами. Мы ограничимся при этом рассмотрением явлений в двухэлектронных лампах (диодах) геометрически простейших конструкций — плоских и цилиндрических, причем начнем с рассмотрения стационарного режима.

86. 2. Одно из основных явлений, с которым встречаемся при экспериментальном изучении прохождения электронного тока¹ в пустоте между двумя электродами, анодом и катодом, из которых катод накален, состоит в том, что до тех пор, пока разность потенциалов между анодом и катодом не превысит некоторого значения, зависящего от геометрии и от размеров прибора, проходящий через него ток зависит

¹ Во всем этом разделе мы всегда называем движущиеся заряженные частицы электронами. Ясно, однако, что все полученные результаты в равной мере справедливы и тогда, когда носителями заряда являются какие-либо другие частицы, причем только нужно для них подставлять соответствующие значения отношения заряда к массе и изменить знак анодного напряжения на обратный.

от приложенного напряжения и растет с повышением этого последнего, пока не достигнет некоторого предельного значения — тока насыщения. После этого дальнейший рост тока прекращается, и он остается постоянным, несмотря на дальнейший рост анодного напряжения.

Объяснение этого явления, данное Чайльдом и Лангмюром, состоит, как известно, в том, что испускаемые накаленным катодом электроны, ускоряясь под действием приложенного внешнего поля, создают при своем движении объемный заряд в пространстве между катодом и анодом, причем этот объемный заряд, при прочих равных условиях, тем больше, чем медленнее они движутся, т. е. чем меньше приложенное анодное напряжение. Этот объемный заряд ослабляет первичное поле у катода, оказывая отталкивающее действие на вновь выходящие из катода электроны, и, при достаточной его величине, может вообще воспрепятствовать дальнейшему возрастанию проходящего через прибор тока.

Очевидно, при этом, что если бы испускаемые катодом электроны покидали его без начальных скоростей и если бы в приборе существовало в непосредственной близости от катода отличное от нуля и направленное в сторону его поле,¹ то каждый вышедший из катода электрон подхватывался бы этим полем и устремлялся бы к аноду. Иными словами, при этом шел бы ток насыщения, независимо от приложенного анодного напряжения.

С другой стороны, если бы у катода существовало отличное от нуля поле, направленное от него, то оно не давало бы выйти из катода ни одному электрону, и ток через прибор вообще не мог бы идти. Стало быть, если через прибор все же проходит ток, но не равный току насыщения, то это может быть лишь при условии, что поле у катода равно нулю.²

На самом деле, испускаемые катодом электроны обладают отличными от нуля тепловыми скоростями порядка сотых или десятых долей вольта. В силу этого они продолжают покидать катод и в том случае, когда поле у катода обращается в нуль, и для ограничения тока объемным зарядом нужно, чтобы оно стало там задерживающим. Иными словами, между электродами должен существовать минимум потенциала — $\varphi_m < 0$ — „потенциальный барьер“ для электронов, — че-

¹ Такое поле вытягивает электроны из катода, тогда как поле обратного направления не дает им выйти оттуда.

² Все сказанное относится, собственно, только к случаю геометрически простейших форм электродов — плоско-параллельных, коаксиальных цилиндров или концентрических сфер, когда все распределение потенциала зависит только от одной координаты. При произвольной же форме электродов можно представить себе и такие случаи, когда ток с одних частей катода ограничен объемным зарядом, а с других — нет, причем полный ток, проходящий через прибор, будет все же зависеть от приложенного анодного напряжения.

Все дальнейшие рассуждения конца п. 86. 2 относятся к случаям, когда все распределение потенциала зависит только от одной координаты.

рез который могут пройти лишь те электроны, начальная энергия которых больше $e\varphi_m$, где e — абсолютная величина заряда электрона (см. рис. 142, где изображена кривая распределения потенциала в плоском диоде).

Если бы все электроны обладали одинаковыми начальными энергиями $e\varphi_0$, то, очевидно, что для прохождения тока, меньшего тока насыщения, должно было бы быть $\varphi_m = \varphi_0$. Так как на самом деле испускаемые катодом электроны обладают некоторым распределением скоростей, то φ_m будет того же порядка, как средняя скорость φ_{cp} электронов, т. е., согласно сказанному, в практически важных случаях — порядка сотых или десятых долей вольта.

В точке минимума потенциала поле обращается в нуль. Мы видим поэтому, что если минимум потенциала находится достаточно близко от катода¹ и глубина его мала по сравнению с приложенным на аноде потенциалом, то можно приближенно считать, что местонахождение минимума совпадает с поверхностью катода и что, в соответствии с этим, поле обращается в нуль непосредственно на катоде.

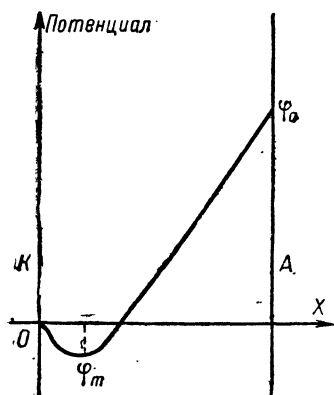


Рис. 142.

Более детальные расчеты, производимые с учетом начальных скоростей электронов, показывают, что это допущение законно с большой степенью точности, если анодный потенциал φ значительно больше чем средняя тепловая скорость φ_{cp} электронов.²

В дальнейшем мы всегда будем считать начальные скорости ничтожно малыми и полагать их равными нулю, оговаривая обратное, если это понадобится.

86.3. Исследуем, прежде всего, вопрос о прохождении термоионного тока между двумя плоскими электродами, поперечные размеры которых будем считать большими по сравнению с расстоянием a между ними.

Направим ось X от катода к аноду и обозначим через φ потенциал относительно катода некоторой точки междуэлектродного пространства, через j — абсолютную величину плотности проходящего через прибор электронного тока, через ρ — плотность создаваемого движущимися электронами объемного заряда и через v — скорость электронов в точке с потенциалом φ .

Если пренебречь влиянием краев пластинок и ограничиться рассмотрением прохождения тока в центральной части их, где электроны движутся параллельно оси X и где, стало быть, все явление зависит

¹ Относительно близко, т. е. на расстоянии, малом по сравнению с расстоянием от катода до анода.

² См.: К. Комптон и И. Лэнгмюр, Электрические разряды в газах, Успехи физических наук, 1931.

только от x , то можно написать следующие уравнения, связывающие указанные величины:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho, \quad (86,1)$$

$$j = -\rho v, \quad (86,2)$$

причем знак минус в уравнении (86,2) обусловлен тем, что ρ — отрицательная величина.

К этим уравнениям прибавляется, во-первых, уравнение живых сил для электронов, которое, в предположении отсутствия у них начальных скоростей, напишется так:¹

$$\frac{1}{2} m v^2 = e\varphi, \quad (86,3)$$

и, во-вторых, граничные условия:

$$(\varphi)_{x=0} = 0; \quad (\varphi)_{x=a} = \varphi_a \quad (86,4)$$

и

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad (86,5)$$

причем начало координат расположено на катоде.

Исключая v из уравнений (86,2) и (86,3), причем получается

$$\rho = -\frac{j}{\sqrt{\frac{2e}{m}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad (86,6)$$

и подставляя это в уравнение (86,1), найдем:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi j}{\sqrt{\frac{2e}{m}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}}. \quad (86,7)$$

Это уравнение требуется проинтегрировать при граничных условиях (86,4), (86,5).

Так как в стационарном режиме j — не зависящая от x величина, ибо через единицу поверхности любой перпендикулярной к оси x плоскости идет один и тот же ток, то уравнение (86,7) легко интегрируется. Именно, умножая его на $2\frac{d\varphi}{dx}$, интегрируя от нуля до x и учитывая (86,4) и (86,5), находим:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{16\pi j}{\sqrt{\frac{2e}{m}}} \varphi^{1/2}. \quad (86,8)$$

Извлекая квадратный корень и замечая, что потенциал растет с возрастанием x , так что $\frac{d\varphi}{dx} > 0$, и что, стало быть, при извлечении

¹ Предполагается, что скорость движения электронов достаточно мала для того, чтобы можно было пользоваться формулами классической механики.

корня надо выбрать справа знак плюс, получим, разделяя переменные и интегрируя еще раз по x от нуля до x :

$$\varphi^{3/4} = 3 \left(\pi \sqrt{\frac{m}{2e}} j \right)^{1/2} x. \quad (86,9)$$

При $x = a$ (86,9) дает:

$$\varphi_a^{3/4} = 3 \left(\pi \sqrt{\frac{m}{2e}} j \right)^{1/2} a. \quad (86,10)$$

Разделяя (86,9) на (86,10) и возводя отношение в степень $4/3$, найдем:¹

$$\varphi = \left(\frac{x}{a} \right)^{4/3} \cdot \varphi_a, \quad (86,11)$$

тогда как, разрешая уравнение (86,10) относительно j , получим:

$$j = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \cdot \frac{\varphi_a^{3/2}}{a^2}. \quad (86,12)$$

Это и есть формула Чайльда—Лангмюра. Применимость ее ограничена, кроме уже сделанных выше допущений, еще, естественно, тем условием, что вычисляемая по формуле (86,12) плотность проходящего между электродами тока, очевидно, должна быть меньше той, которая соответствует току насыщения при данной температуре катода.

§ 87. Цилиндрический диод

87.1. Переходим к рассмотрению прохождения тока через цилиндрический диод, в котором внутренний электрод радиуса r_k является катодом, а внешний — радиуса r_a — анодом.

Основные уравнения (86,2), (86,3), (86,4), очевидно, сохраняют силу и в этом случае, так же, как и уравнения (86,6) и $\Delta\varphi = -4\pi j$. Переписывая последнее уравнение в цилиндрических координатах и замечая, что в нашем случае φ зависит только от r , получим, используя (86,6):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{4\pi j}{\sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \sqrt{\varphi}}. \quad (87,1)$$

Обозначая через I полный ток на единицу длины оси диода и учитывая, что $I = 2\pi r j$, получим:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \sqrt{\frac{2m}{e}} \cdot \frac{I}{\sqrt{\varphi}}. \quad (87,2)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left(\varphi \right)_{r=r_k} = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_k} = 0, \quad \left(\varphi \right)_{r=r_a} = \varphi_a. \quad (87,3)$$

¹ Заметим, что это же решение можно было бы получить прямо, если попытаться удовлетворить уравнению (86,7) подстановкой вида $\varphi = cx^n$, где c и n — некоторые, подлежащие определению, постоянные.

87.2. Можно легко найти некоторый частный интеграл уравнения (87,2), который может быть записан так:

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{9} \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \frac{\varphi^{3/2}}{r}. \quad (87,4)$$

Этот интеграл не является решением нашей задачи, ибо он не удовлетворяет первым двум граничным условиям (87,3).

Но, как заметил Лангмюр, впервые исследовавший этот вопрос, в предельном случае бесконечно-тонкого катода истинное решение уравнения (87,2), удовлетворяющее всем граничным условиям (87,3), стремится к виду (87,4). В связи с этим, Лангмюр предложил искать при всех обстоятельствах точное решение уравнения (87,2) в таком виде:

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{9} \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \cdot \frac{\varphi^{3/2}}{r\beta^2}, \quad (87,5)$$

где β^2 — некоторая новая функция, которая, при $r_k \rightarrow 0$ для всякого конечного r стремится к единице.

Вводя в (87,2), вместо φ , в качестве новой функции (β^2), а в качестве независимой переменной величину

$$\gamma = \lg(r/r_k), \quad (87,6)$$

легко приходим к следующему уравнению для β :

$$3\beta \frac{d^2\beta}{d\gamma^2} + \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + 4\beta \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right) + \beta^2 - 1 = 0, \quad (87,7)$$

к которому присоединяется получающееся из первого из уравнений (87,3) условие:

$$(\beta)_{\gamma=0} = 0.1 \quad (87,8)$$

Чтобы получить второе граничное условие в точке $\gamma=0$, нужно установить более точно характер поведения функции $\beta(\gamma)$ вблизи от нуля. Это можно сделать следующим образом: так как в непосредственной близости от катода, где разность $x=r-r_k$ очень мала (бесконечно мала) по сравнению с r_k , решение должно совпадать с решением для плоского диода,² то для таких x должно быть, согласно (86,9), если еще учесть, что там надо положить $j=1/2\pi r_k$:

$$\varphi^{3/4} = 3 \left(\pi \sqrt{\frac{m}{2e}} j \right)^{1/2} x = 3 \left(\frac{I}{2r_k} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{1/2} \cdot (r - r_k), \quad (87,9)$$

¹ Ибо из (87,5) следует, что $\beta^2 = \text{const.} \times \varphi^{3/2} \cdot e^{-\gamma}$, так что при $r=r_k$, когда $\gamma=0$ и $\varphi=0$, β также обращается в нуль.

² Ибо в бесконечно-узком зазоре между двумя бесконечно-близкими цилиндрическими эквипотенциальными поверхностями с радиусами $r=r_k$ и $r=r_k+x$ каждый элемент поверхности катода находится в тех же условиях, как и в плоском диоде, поскольку радиус кривизны электродов такого диода бесконечно-велик по сравнению с расстоянием между ними.

а так как из (87,5) получается, что

$$\beta = \left[\frac{2\sqrt{2}}{9I} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \cdot \varphi^{3/4} \cdot r^{-1/2}, \quad (87,10)$$

то вблизи от $r=r_k$, на основании (87,9), должно быть:

$$\beta = \frac{r-r_k}{(rr_k)^{1/2}}. \quad (87,11)$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{d\beta}{d\gamma} \right)_{\gamma=0} = \left(r \frac{d\beta}{dr} \right)_{r=r_k} = 1, \quad (87,12)$$

и это и дает, вместе с (87,8), нужную нам пару начальных условий для уравнения (87,7).¹

87.3. Так как уравнение (87,7) и начальные условия (87,8) и (87,12) содержат только численные коэффициенты, не зависящие ни от каких параметров, то β —численная функция от γ , которая может быть раз навсегда протабулирована. Такое табулирование было выполнено в работе Лангмюра и Блджетт,² откуда заимствованы приводимые здесь таблицы I и II значений функций β , β^2 и $\frac{d\beta}{d\gamma}$. Указанные авторы пользовались для нахождения β , в частности, разложением β в ряд по степеням γ . Первые члены этого ряда имеют следующий вид:³

$$\beta = \gamma - \left(\frac{2}{5} \right) \gamma^2 + \left(\frac{11}{120} \right) \gamma^3 - \left(\frac{47}{3300} \right) \gamma^4 + \dots \quad (87,13)$$

Как видно из таблицы I, β^2 сперва растет, начиная от нуля, затем проходит через значение $\beta^2=1$ при $r/r_k=11.2$,⁴ достигает максимума равного 1.0946, при $r/r_k=42$, убывает до минимального значения 0.9990 при $r/r_k=30\,000$, и обращается в единицу при $r/r_k=\infty$. Таким образом, входящая в уравнение (87,5) функция β^2 полностью изучена и табулирована и может, стало быть, рассматриваться в дальнейшем как известная. Уравнение (87,5) дает, следовательно, полное решение вопроса о прохождении стационарного тока через цилиндрический диод. Ниже (в § 93) мы все же вернемся еще раз к рассмотренной здесь задаче и покажем, что возможен еще другой способ подхода к ее решению, при котором решение это сводится к интегрированию уравнения (93,7) при условиях (93,8), что является с вычислительной точки зрения значительно более простой задачей, чем интегрирование уравнения (87,7) для β^2 .⁵

¹ Условие (87,12) можно было бы, конечно, получить и чисто аналитическим путем из первых двух условий (87,3), не пользуясь физическими соображениями.

² Phys. Rev. 22, 2^d ser., 347, 1923.

³ Аналогичное решение было дано в 1924 г. С. А. Богуславским. См. Труды Гос. Эксперим. эл.-техн. инст. (ГЭЭИ), вып. 3, 18.

⁴ Это значение r/r_k , более точное, чем непосредственно видно из таблицы I, дано Лангмюром, так же как значение $r/r_k=42$, при котором β^2 достигает максимума.

⁵ По этому поводу см., особенно, петит на стр. 597—598.

Таблица I

r/r_k	β^2	r/r_k	β^2	r/r_k	β^2	r/r_k	β^2
1.00	0.00000	2.6	0.4351	7.5	0.9074	180	1.0596
1.01	0.00010	2.7	0.4571	8.0	0.9253	200	1.0562
1.02	0.00039	2.8	0.4780	8.5	0.9410	250	1.0494
1.04	0.00149	2.9	0.4980	9.0	0.9548	300	1.0440
1.06	0.00324	3.0	0.5170	9.5	0.9672	350	1.0397
1.08	0.00557	3.2	0.5526	10.0	0.9782	400	1.0362
1.10	0.00842	3.4	0.5851	12.0	1.0122	500	1.0307
1.15	0.01747	3.6	0.6148	14.0	1.0352	600	1.0266
1.2	0.02875	3.8	0.6420	16.0	1.0513	800	1.0209
1.3	0.05589	4.0	0.6671	18.0	1.0630	1000	1.0171
1.4	0.08672	4.2	0.6902	20.0	1.0715	1500	1.0114
1.5	0.11934	4.4	0.7115	30.0	1.0908	2000	1.0082
1.6	0.1525	4.6	0.7313	40.0	1.0946	5000	1.0020
1.7	0.1854	4.8	0.7496	50.0	1.0936	10000	0.9999
1.8	0.2177	5.0	0.7666	60.0	1.0910	30000	0.9990
1.9	0.2491	5.2	0.7825	70.0	1.0878	∞	1.0000
2.0	0.2793	5.4	0.7973	80.0	1.0845		
2.1	0.3083	5.6	0.8111	90.0	1.0813		
2.2	0.3361	5.8	0.8241	100.0	1.0782		
2.3	0.3626	6.0	0.8362	120.0	1.0726		
2.4	0.3879	6.5	0.8635	140.0	1.0677		
2.5	0.4121	7.0	0.8870	160.0	1.0634		

Таблица II

γ	β	$d\beta/d\gamma$	γ	β	$d\beta/d\gamma$
3.0	1.03528	+ 0.03506	6.0	1.01782	- 0.01263
3.2	1.04098	+ 0.02239	6.3	1.01426	- 0.01107
3.4	1.04440	+ 0.01221	6.6	1.01118	- 0.00949
3.6	1.04600	+ 0.00415	6.9	1.00856	- 0.00797
3.8	1.04618	- 0.00211	7.2	1.00638	- 0.00656
4.0	1.04526	- 0.00686	7.5	1.00461	- 0.00530
4.2	1.04352	- 0.01035	8.0	1.00242	- 0.00352
4.5	1.03986	- 0.01369	8.5	1.00101	- 0.00221
4.8	1.03548	- 0.01527	9.0	1.00015	- 0.00126
5.1	1.03084	- 0.01562	9.5	0.99970	- 0.00061
5.4	1.02620	- 0.01509	10.0	0.99951	- 0.00020
5.7	1.02182	- 0.01402	10.5	0.99947	+ 0.00001

§ 88. Теория плоского магнетрона

88.1. Наряду с термоионными приборами, в которых прохождение электронного тока обусловлено только электрическими полями, в технике широко применяются так называемые магнетроны, в которых движение электронных потоков совершается при одновременном воздействии на них налагаемых извне электрических и магнитных полей.

Мы рассмотрим здесь два простейших типа таких приборов — плоский и цилиндрический.

88.2. Начнем с плоского магнетрона, который представляет собой просто плоский диод, рассмотренного в § 86 типа, но помещенный в

параллельное плоскостям его пластин однородное внешнее магнитное поле H .

Изучим движение электронов в таком магнетроне, причем будем пользоваться декартовой системой координат, начало которой расположим на катоде, ось X направим от катода к аноду, а ось Z — по направлению магнитного поля H .

Считая начальные скорости электронов равными нулю и замечая, что в данном случае потенциал φ и поле \mathbf{E} в пространстве между электродами можно считать зависящими только от x , можем написать уравнения движения электрона в таком виде

$$m\ddot{x} = -eE_x - \frac{e}{c} \dot{y}H = e \frac{d\varphi}{dx} - \frac{e}{c} \dot{y}H, \quad (88,1)$$

$$m\ddot{y} = \frac{e}{c} \dot{x}H, \quad (88,2)$$

где крайние члены справа представляют собой проекции на оси X и Y , действующей на электрон лорентцовой силы.

Вытекающее из (88,1) и (88,2) уравнение живых сил запишем в таком виде:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{2e}{m} \varphi. \quad (88,3)$$

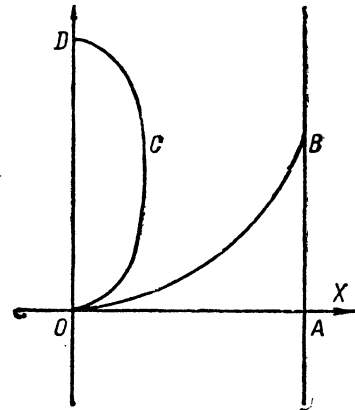


Рис. 143.

OB — траектория при $H < H_k$.

OD — траектория при $H > H_k$.

причем потенциал φ считается обращаемся в нуль на катоде.

Так как траектории всех электронов подобны, то достаточно рассмотреть одну из них, соответствующую электрону, выходящему из начала координат. Интегрируя тогда уравнение (88,2) и учитывая, что в момент вылета как начальная координата, так и начальная скорость равны нулю, найдем:

$$\dot{y} = \omega x, \quad \text{где } \omega = \frac{eH}{mc}. \quad (88,4)$$

Подстановка в (88,3) дает:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \frac{2e}{m} \varphi. \quad (88,5)$$

Здесь φ — неизвестная еще пока и подлежащая определению функция координаты x . Из уравнения (88,5) нетрудно, тем не менее, определить так называемое критическое поле H_k для нашего магнетрона, т. е. то поле, при котором электронные траектории касаются анода (рис. 143 и 147). Действительно, так как при этом на аноде, т. е. при $x = a$,¹ составляющая \dot{x} скорости электрона должна обра-

¹ Обозначения сохраняем здесь те же, как в § 86.

щаться в нуль, то, полагая в (88,5) $H = H_k$, $x = a$, $\dot{x} = 0$, $\varphi = \varphi_a$, получим:

$$\left(\frac{eH_k a}{mc}\right)^2 = \frac{2e}{m} \varphi_a,$$

т. е.

$$H_k = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{2m}{e} \varphi_a}. \quad (88,6)$$

Таким образом, критическое поле не зависит от распределения поля в пространстве между электродами и имеет одинаковое значение как при наличии объемного заряда, так и при отсутствии его.

88.3. Рассмотрим вопрос о прохождении через магнетрон тока, ограниченного объемным зарядом, причем будем считать, что $H < H_k$.¹

Начнем с изучения распределения поля в магнетроне. Будем исходить из уравнения Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho \quad (88,7)$$

в комбинации с уравнением (88,5) и соотношением

$$j = -\rho\dot{x}, \quad (88,8)$$

дающим связь плотности j проходящего через прибор тока с плотностью ρ объемного заряда. Получаем:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi j}{\sqrt{\frac{2e}{m}\varphi - \omega^2 x^2}}. \quad (88,9)$$

Это уравнение, которое является обобщением уравнения (86,7) на случай наличия магнитного поля, надлежит проинтегрировать при условиях:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi)_{x=0} &= 0, & (\varphi)_{x=a} &= \varphi_a, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (88,10)$$

из которых последнее характеризует режим, при котором ток ограничен объемным зарядом.

Чтобы выполнить интегрирование, вводим в (88,9) новую независимую переменную ξ уравнением

$$x = b\xi, \quad (88,11)$$

где

$$b = \frac{4\pi e}{m\omega^2} j, \quad (88,12)$$

и новую функцию ψ , такую, что

$$4b^2\omega^2\psi = \frac{2e}{m}\varphi - \omega^2 x^2. \quad (88,13)$$

¹ Решение этой задачи было впервые дано С. Я. Брауде в ЖЭТФ 5, 621 (1935) методом, несколько отличным от даваемого в тексте.

Заметим, что из сравнения (88,13) с (88,5) следует, что ψ связано с \dot{x}^2 соотношением

$$\psi = \frac{\dot{x}^2}{4b^2\omega^2}. \quad (88,14)$$

В этих переменных уравнение (88,9) приобретает вид:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{1}{4\sqrt{\psi}} - \frac{1}{2}, \quad (88,15)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} (\psi)_{\xi=0} &= 0, \\ \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_{\xi=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88,16)$$

Умножая (88,15) на $2\frac{d\psi}{d\xi}d\xi$ и интегрируя по ξ от нуля до ξ , получаем, учитывая (88,16):

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 = \sqrt{\psi} - \psi. \quad (88,17)$$

Отсюда :

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \pm \sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}, \quad (88,18)$$

причем вблизи от $\xi=0$ у корня должен быть выбран знак плюс, так как, при $\xi=0$, $\psi=0$, а с возрастанием ξ должно возрасть, согласно (88,14), также и ψ .

Это возрастание закончится, когда правая часть уравнения (88,18) вновь обратится в нуль, что произойдет при $\psi=1$. После этого ψ , а стало быть и пропорциональная ему величина \dot{x}^2 опять начнет убывать. Согласно (88,14), максимальное значение, которого достигает при этом \dot{x} , равно

$$\dot{x}_{\max.} = 2b\omega = \frac{8\pi e j}{m\omega^2}. \quad (88,19)$$

Итак, пока ψ лежит в интервале ($0 \leq \psi \leq 1$), оно удовлетворяет уравнению (88,18), в котором следует выбрать знак плюс. При этом находим, разделяя переменные и интегрируя:

$$\xi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}}, \quad (0 \leq \psi \leq 1). \quad (88,20)$$

Входящий сюда интеграл легко берется с помощью подстановки $u = \sqrt{\psi}$. При этом, как нетрудно проверить, когда ψ растет от нуля до единицы, то получается:¹

$$\xi = 2 \left[\arcsin \sqrt[4]{\psi} - \sqrt{\sqrt{\psi} - \psi} \right]. \quad (88,21)$$

¹ Формула (88,21) приобретает более изящный вид, если положить в ней $\sqrt[4]{\psi} = \sin \frac{z}{2}$ [это можно сделать и прямо в интеграле (88,20)], именно:

$$\xi = z - \sin z. \quad (A)$$

Вместе с уравнением

$$\psi = \sin^4 \frac{z}{2} \quad (B)$$

(A) определяет в параметрической форме зависимость ξ от ψ . Мы будем, однако, пользоваться непосредственно формулой (88,21). Аналогичные замечания относятся к формуле (88,23) и к вытекающим из нее формулам (88,36) и (88,39).

При $\psi = 1$ это дает:

$$(\xi)_{\psi=1} = \xi_1 = \pi. \quad (88,22)$$

После того, как ψ достигло значения, равного единице, а \dot{x} — своего максимального значения $\dot{x}_{\max.} = 2b\omega$, электрон продолжает двигаться вперед¹ (за счет инерции), причем ψ убывает от единицы до нуля. В этом периоде движения зависимость ξ от ψ дается также уравнением (88,18), в котором, однако, следует выбрать уже знак минус. Интегрируя его от $\psi = 1$ до какого-нибудь $\psi < 1$ и замечая, что значению $\psi = 1$ соответствует $\xi = \xi_1 = \pi$, найдем, поэтому, при убывании ψ от единицы до нуля:

$$\xi = \pi + \int_{\psi}^1 \frac{d\psi}{\sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}} = 2 \left[\pi - \arcsin \sqrt{\sqrt{\psi} + \sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}} \right]. \quad (88,23)$$

Чтобы выяснить, при каких обстоятельствах следует пользоваться формулами (88,20), (88,21) и когда — формулой (88,23), применим их к вопросу о зависимости тока j , проходящего через магнетрон, от налагаемого магнитного поля H , причем анодное напряжение φ_a будем считать неизменным, а магнитное поле H — возрастающим от нуля до критического значения $H = H_k$.

Нетрудно видеть, что, при достаточно малых H , следует пользоваться формулами (88,20), (88,21). Действительно, согласно (88,4) и (88,12), если $\dot{H} \rightarrow 0$, то $\omega \rightarrow 0$, а $(b\omega) \rightarrow \infty$, а так как для данного диода $x \leq a$ и $\varphi \leq \varphi_a$, то, в силу (88,13), максимальное возможное значение ψ , равное $\psi_{\max.} = \frac{\varphi_a}{2(b\omega)^2} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)$, тоже стремится к нулю. Так как в то же время на катоде $\psi = 0$, то в этом случае ψ растет от нуля на катоде до $\psi_{\max.} < 1$ на аноде, не достигая значения, равного единице. В силу этого, в таком режиме решение дается формулами (88,20), (88,21), а не (88,23).

При $H = 0$ даваемое этими формулами решение должно переходить в ранее найденную формулу (86,9) Лангмюра. Это нетрудно проверить, если заметить, что так как при этом, как только что указывалось, $\psi \rightarrow 0$, то интеграл в формуле (88,20) можно переписать так:

$$\left(\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}} \right)_{\psi \rightarrow 0} \rightarrow \int_0^{\psi} \psi^{-1/4} d\psi = \frac{4}{3} \psi^{3/4},$$

так что (88,20) принимает следующую форму:

$$\xi = \frac{4}{3} \psi^{3/4}. \quad (88,24)$$

Умножая это на b и пользуясь формулой (88,11) и тем, что при $H \rightarrow 0$, когда и $\omega \rightarrow 0$, (88,13) дает

$$b^2 \omega^2 \psi \rightarrow \frac{e\varphi}{2m}, \quad (88,25)$$

¹ Если только он не достиг анода раньше, чем ψ доросло до значения, равного единице.

получаем:

$$x = \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/4} \cdot \frac{\varphi^{3/4}}{3\sqrt{\pi j}},$$

а это и есть формула (86,9).

Итак, в предельном случае очень малых магнитных полей надо пользоваться формулой (88,21). С другой стороны, при $H = H_k$, ψ обращается в нуль на аноде, поскольку, согласно (88,14), $\psi = \dot{x}^2/4b^2\omega^3$, а $(\dot{x})_{x=a}$ при критическом поле обращается в нуль. В этом случае ψ , равное нулю на катоде, сперва растет, а затем проходит через максимум и вновь убывает до нуля. Так как в максимуме должно быть $\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = 0$, а это, согласно (88,17), может произойти между электродами лишь при $\psi = 1$, то отсюда следует, что, начиная от катода и до значения $x_1 = b\xi_1 = b\pi$, которое в этом случае соответствует точке внутри диода, ψ растет от нуля до единицы, и в этой области следует пользоваться решением (88,21). После этого ψ начинает вновь убывать и доходит до нуля на аноде, причем в этом интервале связь ξ и ψ дается формулой (88,23). Аналогичное положение будет иметь место и в том случае, когда поле H будет меньше критического, но все же настолько велико, что $x_1 = b\pi$ все еще будет соответствовать внутренней точке магнетрона, т. е. пока $x_1 = b\pi < a$.

При том значении $H = \bar{H}$ магнитного поля, при котором как раз $x_1 = b\pi = a$, т. е. при котором значение $\psi = 1$ достигается как раз на аноде, область применимости формулы (88,21) распространяется на все внутреннее пространство магнетрона, и при $H < \bar{H}$ решение уже будет даваться только этой формулой. Поле \bar{H} является, стало быть, тем, которое разделяет режимы, описываемые одной формулой (88,21) (при $0 \leq H \leq \bar{H}$), и те, которые требуют применения обеих формул, — (88,21) в области ($0 \leq x \leq x_1$) и (88,23) — в области ($x_1 \leq x \leq a$) при $H_k \geq H \geq \bar{H}$.¹

88.4. Найдем \bar{H} . Оно определяется, во-первых, тем условием, что, при $H = \bar{H}$, $x_1 = b\pi = a$, т. е.

$$b\pi = \frac{4\pi^2 e}{m\omega^3} \bar{j} = a, \quad (88,26)$$

где $\bar{\omega} = \frac{e\bar{H}}{mc}$, а \bar{j} — плотность того тока, который течет через прибор при рассматриваемых условиях, и, во-вторых, требованием, что потенциал на аноде имеет заданное значение, равное φ_a .

¹ Поле \bar{H} не имеет никакого специального физического значения (в отличие от критического поля H_k) и появляется здесь только вследствие выбора ψ за основную переменную, поскольку ξ зависит от ψ неоднозначным образом. Если бы вместо ψ ввести, как указывалось выше, вспомогательную переменную z соотношением $\sqrt[4]{\psi} = \sin \frac{z}{2}$ и рассматривать интервал изменения $0 \leq z \leq 2\pi$, то все формулы стали бы однозначными и поле \bar{H} вообще не вошло бы в рассмотрение. Однако, все дальнейшее изложение упростилось бы от этого лишь незначительно, почему мы и поступаем так, как указано в тексте.

Так как, как указывалось выше, при этом на аноде должно быть $\psi=1$, то (88,13) дает в качестве второго условия:

$$\frac{2e}{m} \varphi_a = (4b^2 + a^2) \bar{\omega}^2 = \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) a^2 \bar{\omega}^2, \quad (88,27)$$

откуда для \bar{H} получаем значение

$$\bar{H} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \cdot \frac{c}{a} \sqrt{\frac{2m}{e} \varphi_a} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} H_k \cong 0.8436 H_k. \quad (88,28)$$

В соответствии с тем, что говорилось выше, \bar{H} меньше H_k .

Из (88,26) определяется теперь и соответствующий ток \bar{j} , который оказывается равным:

$$\begin{aligned} \bar{j} &= \frac{a}{4\pi^2 c^3} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \bar{H}^3 = \frac{\pi}{\sqrt{2}(\pi^2 + 4)^{3/2}} \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \frac{\varphi_a^{3/2}}{a^2} = \\ &= \frac{9\pi^2}{2(\pi^2 + 4)^{3/2}} j_{\text{Ланг.}} \cong 0.860 j_{\text{Ланг.}}, \end{aligned} \quad (88,29)$$

где $j_{\text{Ланг.}}$ обозначает тот ток, который проходил бы через тот же диод при отсутствии магнитного поля.¹

Итак, если $H < \bar{H} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} H_k$, то следует пользоваться формулой (88,21); если же $H_k > H > \bar{H}$, то в области от катода и до $x = x_1 = b\pi$ следует пользоваться формулой (88,21), а при $x_1 < x \leq a$ — формулой (88,23).

В частности, при $H = H_k$ формула (88,23) дает, при $x = a$ и $\varphi = \varphi_a$, значение тока j_k , проходящего через прибор непосредственно перед „запиранием“ тока полем:²

$$(\xi)_{x=a} = \frac{a}{b} = 2\pi,$$

т. е., если подставить сюда значение b :

$$j_k = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \cdot \frac{\varphi_a^{3/2}}{a^2} = \frac{9}{4\pi} j_{\text{Ланг.}} \cong 0.716 j_{\text{Ланг.}} \quad (88,30)$$

Эта формула показывает, что перед самым запиранием сила проходящего через диод тока падает примерно на 28.4% по сравнению со значением, которое она имела бы при том же анодном напряжении в диоде при отсутствии критического магнитного поля.

88.5. Формулы (88,21) и (88,23) дают возможность решать все вопросы, относящиеся к прохождению тока, ограниченного объемным зарядом, через магнетрон рассматриваемого типа и к характеру движения электронов в нем.

¹ См. (86,12).

² Это, собственно, ток, который проходит через прибор, когда H на бесконечно-малую величину меньше, чем H_k , так что все электроны без начальных скоростей еще только-только доходят до анода. Ему соответствует значение $\psi = 0$.

Разберем, в первую очередь, вопрос о зависимости проходящего через прибор тока от магнитного поля при заданном анодном напряжении.

Придадим, прежде всего, уравнениям (88,21) и (88,23) более удобный для исследования вид, для чего введем в них, вместо φ , x , H и j , их относительные значения

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{\varphi_a}, \quad x^* = \frac{x}{a}, \quad H^* = \frac{H}{H_k} \quad \text{и} \quad j^* = \frac{j}{j_{\text{Ланг}}}, \quad (88,31)$$

выраженные, соответственно, в долях анодного напряжения, расстояния между электродами, критического поля и лангмюрова тока.

Как нетрудно убедиться, ξ и ψ выражаются через эти величины следующим образом:¹

$$\xi = \frac{9H^{*3}}{2j^*} \cdot x^*, \quad (88,32)$$

$$4\psi = \left(\frac{9H^{*3}}{2j^*} \cdot x^* \right)^2 \left[\frac{\varphi^*}{(x^*H^*)^2} - 1 \right] = \xi^2 \left[\frac{\varphi^*}{(x^*H^*)^2} - 1 \right]. \quad (88,33)$$

Эти значения и нужно вводить в формулы (88,21) и (88,23).

Чтобы построить зависимость от магнитного поля тока, проходящего через диод при данном анодном напряжении, но при изменяющемся от нуля до $H = H_k$ магнитном поле, поступаем так: так как выше было установлено, что при $H \leq \bar{H}$ распределение потенциала во всем диоде определяется формулой (88,21), то, применяя при таких H формулу (88,21) к точке на аноде и подставляя в нее, в соответствии с этим, значения $\xi = \xi_a$ и $\psi = \psi_a$, получающиеся из (88,32) и (88,33) при $x^* = 1$ и $\varphi^* = 1$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} 4\psi_a &= \left(\frac{9H^{*3}}{2j^*} \right)^2 \left[\frac{1}{H^{*2}} - 1 \right], \\ \xi_a &= \frac{9H^{*3}}{2j^*} = \frac{2H^*}{\sqrt{1 - H^{*2}}} \sqrt{\psi_a}, \end{aligned} \right\} \quad (88,34)$$

получаем уравнение:

$$\frac{H^*}{\sqrt{1 - H^{*2}}} = \frac{\arcsin \sqrt{\psi_a} - \sqrt{V\psi_a - \psi_a}}{\sqrt{\psi_a}}, \quad (88,35)$$

которое верно до тех пор, пока H^* меньше или равно

$$\frac{\bar{H}}{H_k} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \cong 0.844.$$

Для решения этого уравнения строим изображенную на рис. 144 кривую (часть OA):

$$y = \frac{\arcsin \sqrt{\psi} - \sqrt{V\psi - \psi}}{\sqrt{\psi}} = F_1(\psi), \quad (88,36)$$

¹ Для этого достаточно ввести величины со звездочками, вместо величин без звездочек, в уравнения (88,11) и (88,13), которые определяют ξ и ψ , и воспользоваться значениями (86,12) и (88,6) для $j_{\text{Ланг}}$ и H_k .

причем, согласно условиям пригодности формулы (88,21), ее достаточно построить для значений ψ в интервале ($0 \leq \psi \leq 1$). Желая найти значение тока, проходящего через прибор при каком-либо значении $H \leq \bar{H}$, вычисляем, прежде всего, соответствующее $H^* = H/H_k$, и по нему находим величину $p = \frac{H^*}{\sqrt{1-H^{*2}}}$. Пересечение прямой $y=p$ с кривой (88,36) дает нам как раз требуемое уравнением (88,35) значение $\psi = \psi_a$, после чего, пользуясь второй из формул (88,34), найдем:

$$j^* = \frac{9H^{*2} \sqrt{1-H^{*2}}}{4 \sqrt{\psi_a}}. \quad (88,37)$$

Искомое значение тока равно, стало быть:

$$\begin{aligned} j &= j^* j_{\text{Ланг.}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \frac{\varphi_a^{3/2}}{a^2} \cdot j^*. \quad (88,38) \end{aligned}$$

Совершенно аналогично следует поступать и в том случае, когда $H > \bar{H}$.¹ Так как тогда связь ξ_a и ψ_a на аноде дается уже формулой (88,23), то уравнение (88,35) замещается в этом случае таким:

$$\begin{aligned} \frac{H^*}{\sqrt{1-H^{*2}}} &= \\ &= \frac{\pi - \arcsin \sqrt{\psi_a} + \sqrt{\psi_a - \psi_a}}{\sqrt{\psi_a}} = \\ &\equiv F_2(\psi_a). \quad (88,39) \end{aligned}$$

Искомое значение ψ_a определяется в этом случае из точки пересечения прямой $y = \frac{H^*}{\sqrt{1-H^{*2}}}$ с кривой

$$y = F_2(\psi) = \frac{\pi}{\sqrt{\psi}} - F_1(\psi), \quad (88,40)$$

изображенной на том же рис. 144 [часть AB , являющаяся продолжением кривой OA для $F_1(\psi)$]. И здесь значения $F_2(\psi)$ требуется знать лишь в интервале ($1 > \psi > 0$). Так как, как ψ_a , так, стало быть, и связанное с ним формулой (88,37) j^* , зависят только от H^* , то, построив

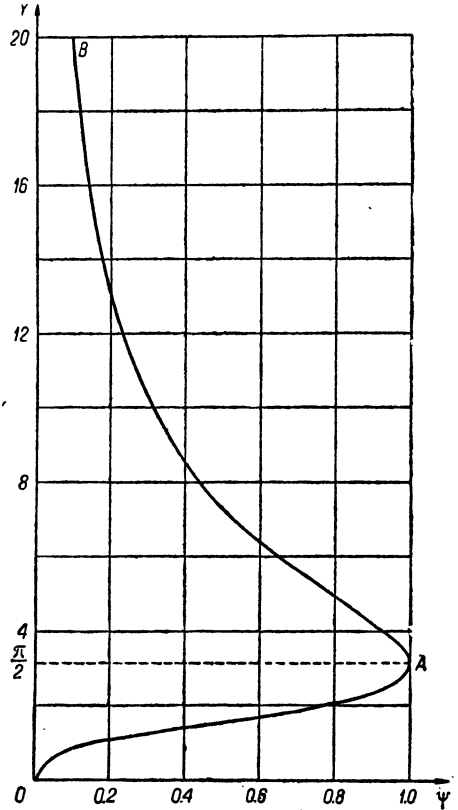


Рис. 144.

$$Y = \begin{cases} F_1(\psi) - \text{часть } OA. \\ F_2(\psi) - \text{часть } AB. \end{cases}$$

¹ Но $H < H_k$.

(по точкам) кривую $j^* = f(H^*)$ во всем интервале ($0 \leq H^* \leq 1$), получим „приведенную“ характеристику плоского магнетрона. Из нее истинная характеристика любого конкретного магнетрона получается в таком виде:

$$j = j_{\text{ланг.}} \cdot f\left(\frac{H}{H_k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \cdot \frac{\varphi_a^{3/2}}{a^2} \cdot f\left[\frac{Ha\sqrt{e}}{c\sqrt{2m\varphi_a}}\right]. \quad (88,41)$$

Приведенная характеристика изображена на рис. 145. Напомним, что она, а вместе с ней, конечно, и характеристика, даваемая формулой (88,41), относятся лишь к случаю прохождения тока, ограниченного объемным зарядом.

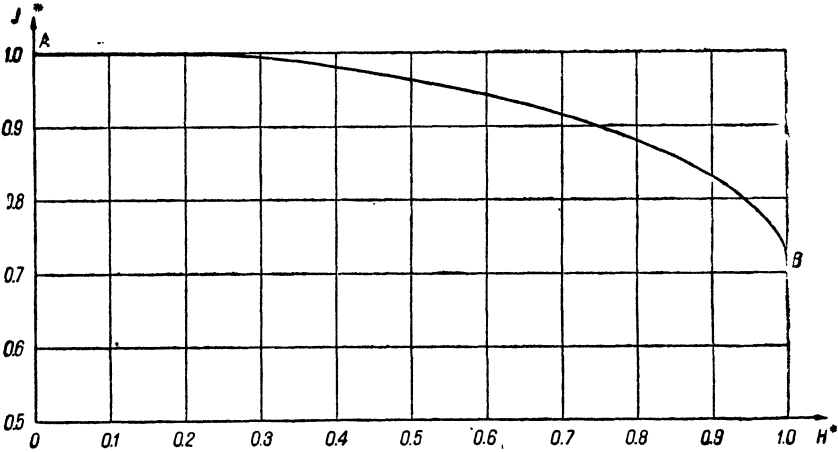


Рис. 145.

„Приведенная“ характеристика магнетрона $j^* = f(H^*)$.

88.6. После того, как найдено значение тока j , проходящего через прибор при определенных φ_a и H , нахождение распределения потенциала между электродами в соответствующем режиме может быть выполнено следующим образом: так как для этого режима H^* и j^* уже известны, то ξ зависит, согласно (88,32), только от x^* , тогда как ψ есть функция двух переменных — x^* и φ^* .

Так как ξ и ψ связаны друг с другом, в зависимости от режима и области, одной из формул (88,21) или (88,23), которые, каждая в своей области, однозначно сопоставляют каждому значению ψ некоторое значение ξ , то из такой пары значений (ξ , ψ) непосредственно находится соответствующая пара значений (x^* , φ^*), именно:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \left(\frac{2j^*}{9H^{*3}}\right)\xi, \\ \varphi^* &= (4\psi + \xi^2)\left(\frac{2j^*}{9H^{*2}}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (88,42)$$

дающая одну точку на кривой расположения потенциала между электродами. Таким путем можно найти любое число точек на этой кри-

вой, т. е. построить все распределение потенциала в магнетроне в рассматриваемом режиме. Практически это удобно делать с помощью кривой рис. 146, на котором дан график зависимости ψ от ξ , причем участок OA кривой соответствует зависимости, выражаемой формулой (88,21), а участок AB — формулой (88,23). При этом, если $H^* < \frac{\bar{H}}{H_k} \cong 0.844$, то приходится пользоваться только участком OA ; если же $H^* > \frac{\bar{H}}{H_k}$, то, при $\xi \leq \pi$, надо пользоваться частью OA кривой, тогда как, при $\xi \geq \pi$, надо, разумеется, брать точки на AB .

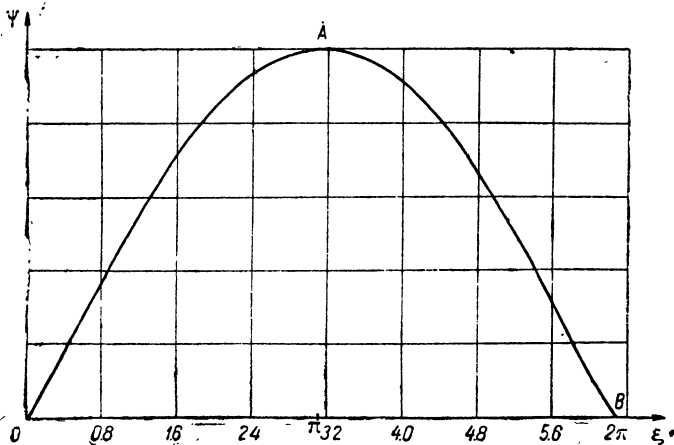


Рис. 146.

88.7. Рассмотрим еще, для полноты, вопрос о форме электронных траекторий в магнетроне. Для их определения исходим из уравнений (88,5) и (88,4), которые дают:¹

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2e}{m} \varphi - \omega^2 x^2} = 2b\omega \sqrt{\psi}, \quad (88,43)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x = b\omega \xi. \quad (88,44)$$

Для того, чтобы проинтегрировать уравнение (88,43), переписываем его в такой форме:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = b \frac{d\xi}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = 2b\omega \sqrt{\psi},$$

т. е.

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\omega \sqrt{\psi} \frac{d\psi}{d\xi},$$

а подставляя сюда значение $\frac{d\psi}{d\xi}$ из (88,18), находим:

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm 2\omega \sqrt{\psi} \sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}. \quad (88,45)$$

¹ В первом из них выбран у корня знак плюс, так как мы рассматриваем лишь такие режимы, при которых электроны не возвращаются на катод.

При этом в том периоде движения, когда ψ растёт от нуля до единицы, следует брать перед корнем знак плюс, в случае же, если ψ пройдет через единицу и вновь начнет убывать, надо в этом втором периоде движения брать знак минус.¹

В первом случае получаем:

$$2\omega t = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\psi} \sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}}. \quad (88,46)$$

Вводя в интеграл новую переменную²

$$\psi = \sin^4 \frac{z}{2}, \quad (0 \leq z \leq \pi), \quad (88,47)$$

находим, что

$$z = \omega t, \quad (0 \leq z \leq \pi). \quad (88,48)$$

Вводим значение ψ из (88,47) в (88,21), причем получается

$$\xi = z - \sin z, \quad (0 \leq z \leq \pi), \quad (88,49)$$

а подставляя это в (88,44) и пользуясь соотношением (88,48), найдем:

$$\frac{dy}{dz} = b(z - \sin z). \quad (88,50)$$

Интегрирование от $z=0$ дает:

$$y = b \left(\frac{z^2}{2} + \cos z - 1 \right). \quad (88,51)$$

Переписывая уравнение (88,49) в виде

$$x = b(z - \sin z) \quad (88,52)$$

и добавляя уравнение (88,48), видим, что группа уравнений (88,48), (88,51) и (88,52) полностью определяет как траекторию электрона, так и зависимость координат от времени.

Мы получили решение для случая, когда $H < \bar{H}$. Если же $H > \bar{H}$, то в первом периоде движения, т. е. от момента выхода электрона из катода и до тех пор, пока ψ не дойдет до единицы, траектория электрона также определяется уравнениями (88,51) и (88,52). С того же момента, когда ψ обратится в единицу [чему, согласно (88,47), соответствует значение $z = \pi$, т. е. $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}$, причем (88,52) дает, в соответствии с тем, что говорилось выше, значение $x = x_1 = b\pi$], в формуле (88,45) надо взять знак минус, а время отсчитывать от момента $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ окончания первого режима. Таким образом, получаем:

$$2\omega(t - t_1) = 2(\omega t - \pi) = + \int_\psi^1 \frac{d\psi}{\sqrt{\psi} \sqrt{\sqrt{\psi} - \psi}},$$

¹ Второй период наступает только в том случае, если $H > \bar{H}$.

² Это допустимо, так как $0 \leq \psi \leq 1$.

что, с помощью подстановки, аналогичной (88,47), именно

$$\psi = \sin^4 \frac{\bar{z}}{2}, \quad (0 \leq \bar{z} \leq \pi), \quad (88,53)$$

дает:

$$\omega t = 2\pi - \bar{z}. \quad (88,54)$$

Полагая здесь $2\pi - \bar{z} = z$, причем из (88,53) следует, что

$$\psi = \sin^4 \frac{z}{2}, \quad (\pi \leq z \leq 2\pi), \quad (88,55)$$

приведем формулу (88,54) к тому же виду, как (88,48), т. е.

$$\omega t = z, \quad (88,56)$$

только пределы изменения z расширяются теперь до $z = 2\pi$.

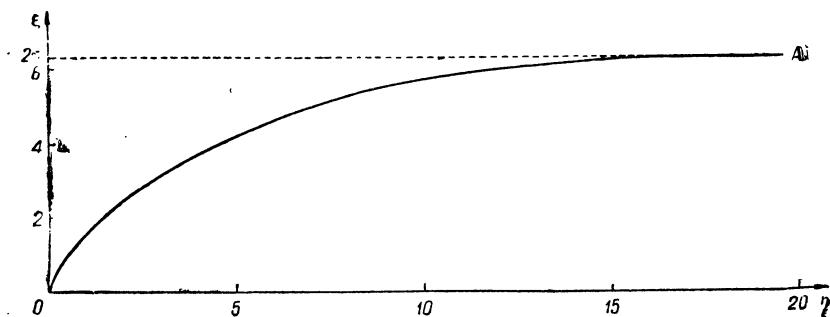


Рис. 147. Траектория в магнетроне.

Формула (88,23) получает теперь такой вид:

$$\xi = (2\pi - \bar{z}) + \sin \bar{z} = z - \sin z, \quad (\pi \leq z \leq 2\pi) \quad (88,57)$$

и тоже является распространением соответствующей формулы (88,49) на интервал $(0 \leq z \leq 2\pi)$. В силу этого, нахождение y совершается опять, исходя из (88,50), так что вновь получается формула (88,51).

Итак, формулами (88,48), (83,51) и (88,52) движение электрона описывается во все время его пребывания между пластинами магнетрона, причем z может изменяться в пределах от нуля до 2π .

На рис. 147 изображена форма траектории, определяемой уравнениями (88,51), (88,52), которая построена в относительных координатах $\xi = \frac{x}{b}$ и $\eta = \frac{y}{b}$. В прилагаемых таблицах I и II даются также полученные вычислением значения ξ и η в функции от z , выраженного в градусах, и значения функций $F_1(\psi)$ и $F_2(\psi)$ для $(0 \leq \psi \leq 1)$.

Таблица I

z^0	$\xi(z)$	$\eta(z)$
0	0	0
10	0.0009	0
20	0.0070	0.0006
30	0.0236	0.0031
40	0.0553	0.0097
50	0.1066	0.0236
60	0.1812	0.0483
70	0.2820	0.0883
80	0.4114	0.1484
90	0.5708	0.2337
100	0.7605	0.3494
110	0.9802	0.5009
120	1.2284	0.6933
130	1.5029	0.9312
140	1.8007	1.2192
150	2.1180	1.5609
160	2.4505	1.9594
170	2.7934	2.4169
180	3.1416	2.9348

Таблица II

ψ	$F_1(\psi)$	$F_2(\psi)$
0.0	0	∞
0.1	0.4181	9.5164
0.2	0.5262	6.4986
0.3	0.6165	5.1223
0.4	0.6915	4.2758
0.5	0.7691	3.6738
0.6	0.8498	3.2059
0.7	0.9384	2.8166
0.8	1.0427	2.4698
0.9	1.1823	2.1292
1.0	1.5708	1.5708
	часть (OA)	часть (AB)
	на рис. 144	на рис. 144

§ 8.8. Мы провели наше исследование для случая, когда ток в магнетроне ограничен объемным зарядом. Нетрудно было бы распространить исследование и на тот случай, когда это условие не соблюдается, а также на режимы, при которых поле H больше критического.¹ Мы, однако, здесь этим заниматься не будем.

Отметим еще, что в точке A , в которой траектория касается анода и в которой, стало быть, $x=0$, в нуль обращается не только нормальная к электродам составляющая скорости электронов, но и их ускорение, а, следовательно, и действующая на них сила. Действительно, из (88,2) непосредственно вытекает, что в A $\ddot{y}=0$, тогда как из (88,52) и (88,48) следует, что, поскольку $\dot{x} = \frac{dx}{dz} \cdot \omega = b\omega(1 - \cos z) = 0$, то там и $\ddot{x} = b\omega^2 \sin z = 0$. При введенном выше условии, что $H < H_k$, такое обстоятельство не может иметь места.

§ 89. Цилиндрический неразрезной магнетрон

89.1. Переходим к исследованию прохождения термоионного тока через цилиндрический конденсатор, вдоль оси которого приложено постоянное внешнее магнитное поле H .²

Вводим полярные координаты r, θ в перпендикулярной к оси цилиндра плоскости. Если опять пренебречь скоростями выхода электронов из катода

¹ См. С. Я. Брауде, ЖТФ 10, 217, (1940).

² См. Г. А. Гринберг и В. С. Волькенштейн, ЖТФ 8, 19 (1938).

и предположить, что магнитное поле H меньше критического поля H_k , при котором пути электронов при данном анодном напряжении как раз касаются анода,¹ то все вышедшие из катода электроны будут проходить через прибор насквозь, не возвращаясь обратно, и давать ток I . Для определения поля и путей электронов служат тогда следующие уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi\rho, \quad (89,1)$$

$$2\pi r \dot{r} \rho = -I, \quad (89,2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = e\varphi, \quad (89,3)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{eH}{c} \dot{r}, \quad (89,4)$$

$$(\dot{r})_{t=0} = (\dot{\theta})_{t=0} = 0, \quad (89,5)$$

$$\left. \begin{aligned} (\varphi)_{r=r_k} &= 0, \\ (\varphi)_{r=r_a} &= \varphi_a, \end{aligned} \right\} \quad (89,6)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_k} = 0, \quad (89,7)$$

причем последнее условие выражает то, что ток ограничен пространственным зарядом.

Уравнение (89,4) можно непосредственно проинтегрировать по времени, что дает:

$$r^2 \dot{\theta} = \omega (r^2 - r_k^2), \quad \omega = \frac{eH}{2mc}, \quad (89,8)$$

следовательно,

$$\dot{\theta} = \omega \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right). \quad (89,9)$$

Если подставить это в (89,3), то получится:

$$\frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right)^2 \right] = e\varphi,$$

следовательно,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m} - r^2 \omega^2 \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right)^2}. \quad (89,10)$$

Отсюда можно получить значение $H = H_k$ критического поля, если учесть, что при критическом поле радиальная составляющая скорости должна обращаться в нуль на аноде. Полагая поэтому в (89,10)

¹ Относительно величины этого критического поля см. ниже формулу (89,11).

² Отметим, что величина ω имеет здесь иное значение, чем в § 88 [ср. (88,4)].

$r = r_a$, $\varphi = \varphi_a$ и $\dot{r} = 0$ и замечаю, что в этом случае $\omega = \omega_k = \frac{eH_k}{2mc}$, получаем:

$$H_k = \sqrt{\frac{8m}{e} \varphi_a} \cdot \frac{c}{r_a \left(1 - \frac{r_k^2}{r_a^2}\right)}. \quad (89,11)$$

Так как обычно $r_k \ll r_a$, то, как правило, можно положить с достаточным приближением:

$$H_k \cong \frac{c}{r_a} \sqrt{\frac{8m}{e} \varphi_a}. \quad (89,12)$$

Формулы (89,11) и (89,12) соответствуют формуле (88,6) для плоского случая. В частности, (89,11) показывает, что значение критического поля зависит только от анодного напряжения и от размеров прибора, но не от распределения поля между электродами, т. е. что оно одинаково как при отсутствии объемного заряда, так и при наличии его.

(89,1), (89,2) и (89,10) вместе дают:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{2I}{\sqrt{\frac{2e\varphi}{m} - r^2 \omega^2 \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right)^2}} \quad (89,13)$$

Этим основным уравнением определяется распределение потенциала внутри конденсатора.

Если ввести в это уравнение в качестве новой независимой переменной заряд Q , находящийся внутри цилиндра радиуса r и приходящийся на единицу длины оси, именно

$$Q = -\frac{r}{2} \frac{d\varphi}{dr}, \quad (89,14)$$

и принять за новую функцию $u = \frac{r}{r_k}$, то получаем из (89,13), путем введения Q и u и возведения в квадрат:

$$\left(\frac{du}{dQ} \right)^2 = \frac{2e\varphi}{mr_k^2 I^2} - \frac{\omega^2 u^2}{I^2} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^2. \quad (89,15)$$

¹ Ибо теорема Гаусса, примененная к указанному цилиндру, дает:

$$2\pi r E = -2\pi r \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi Q;$$

следовательно,

$$Q = -\frac{r}{2} \frac{d\varphi}{dr},$$

что и требовалось доказать. При этом следует отметить, что $Q = 2\pi \int_{r_k}^r r \rho dr$, ибо поле у катода, а, следовательно, и поверхностный заряд на катоде равны нулю.

Дифференцируя это уравнение по Q и принимая во внимание уравнение (89,14), получаем:

$$\frac{d^2n}{dQ^2} = -\frac{2e}{mr_k^2 I^2} \cdot \frac{Q}{u} - \frac{\omega^2}{I^2} u \left(1 - \frac{1}{u^4}\right). \quad (89,16)$$

К этому уравнению присоединяются еще два начальных условия, а именно, из (89,7) и (89,14) следует, что $(Q)_{r=r_k} = 0$ и, следовательно,

$$(u)_{Q=0} = 1, \quad \left(\frac{dn}{dQ}\right)_{Q=0} = 0, \quad (89,17)$$

причем последнее непосредственно вытекает из (89,15) при $u=1$.

89.2. Уравнение (89,16) может быть приведено к однопараметрическому виду. Для этого вводим, вместо Q , пропорциональную ему величину q :

$$Q = \alpha q, \quad (89,18)$$

где α — неопределенная еще пока постоянная. Подставляя это в (89,16), получаем:

$$\frac{d^2n}{dq^2} = -\frac{2e\alpha^3}{mr_k^2 I^2} \cdot \frac{q}{u} - \frac{\omega^2 \alpha^2}{I^2} u \left(1 - \frac{1}{u^4}\right). \quad (89,19)$$

Пользуясь произвольностью величины α , можем придать одному из входящих сюда коэффициентов любое желаемое значение. Выберем α так, чтобы стало

$$-\frac{2e\alpha^3}{mr_k^2 I^2} = A = \frac{e}{9 \cdot 10^{12} m} \cong 5 \cdot 89 \cdot 10^4.$$

Следовательно,

$$\alpha = -\left(\frac{r_k^2 I^2 mA}{2}\right)^{1/3}, \quad (89,20)$$

причем I_{mA} обозначает величину тока в миллиамперах.

Если ввести параметр

$$\mu = \frac{H^2 r_k^{4/3}}{I_{mA}^2}, \quad (89,21)$$

то (89,19) переходит в

$$\frac{d^2n}{dq^2} = A \frac{q}{u} - B \mu u \left(1 - \frac{1}{u^4}\right), \quad (89,22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{9 \cdot 10^{12}} \left(\frac{e}{m}\right) \\ B &= \frac{10^{-32}}{4^{1/3} \cdot 3^4} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (89,23)$$

абсолютные постоянные.

Если найти серию решений уравнения (89,22), соответствующих различным μ и удовлетворяющих начальным условиям $(u)_{q=0} = 1$, $\left(\frac{dn}{dq}\right)_{q=0} = 0$, то с помощью их можно решить поставленную в начале данного параграфа задачу.

В таблицах I—V приведены вычисленные с помощью адамс-штёрмеровского метода численного интегрирования величины u для $\mu=0$; 4; 9; 15; 39.69.¹

Таблица I
 $\mu=0$

q	u	$\Phi_{\text{вольт}}/ \alpha $	$\lg \frac{\rho r_k^2}{\alpha}$	q	u	$\Phi_{\text{вольт}}/ \alpha $	$\lg \frac{\rho r_k^2}{\alpha}$
0	1.000	0	∞	0.18	17.88	148.7	5.7159
0.01	1.010	0.04	2.9749	0.19	19.62	159.0	5.6610
0.02	1.078	0.62	2.0870	0.20	21.42	169.2	5.6095
0.03	1.264	3.00	3.7043	0.21	23.27	179.4	5.5607
0.04	1.587	7.76	3.4069	0.22	25.18	189.6	5.5146
0.05	2.058	14.73	3.1510	0.23	27.14	199.7	5.4709
0.06	2.674	23.39	4.9388	0.24	29.15	209.8	5.4293
0.07	3.423	33.02	4.7581	0.25	31.20	219.8	5.3895
0.08	4.293	43.20	4.6023	0.26	33.31	229.8	5.3516
0.09	5.272	53.67	4.4664	0.27	35.46	239.7	5.3152
0.10	6.352	64.28	4.3467	0.28	37.65	249.6	5.2803
0.11	7.525	74.95	4.2399	0.29	39.89	259.5	5.2469
0.12	8.784	85.62	4.1441	0.30	42.17	269.3	5.2147
0.13	10.12	96.26	4.0570	0.31	44.49	279.2	5.1836
0.14	11.54	106.8	3.9776	0.32	46.86	288.9	5.1536
0.15	13.03	117.4	3.9046	0.33	49.26	298.7	5.1248
0.16	14.58	127.9	3.8372	0.34	51.70	308.4	5.0968
0.17	16.20	138.3	3.7745				

Рис. 148 изображает ход интегральных кривых для этих μ ($\mu=0$ соответствует отсутствию магнитного поля, т. е. лангмюровскому случаю).

Каждая кривая, за исключением $\mu=0$, строится лишь до такого $q=q_m$, при котором обращается в нуль $\frac{du}{dq}$, что соответствует обращению в нуль радиальной компоненты скорости электрона. При этом соответствующая величина $u_m(\mu)$ дает наибольшее возможное значение r/r_k , которое может достигаться при данном значении $\mu = \frac{H^2 r_k^{4/3}}{I_{mA}^2}$.

¹ Кажущийся несколько случайным выбор значений μ (особенно, значение $\mu=39.69$), связан с тем, что задача вначале решалась для определенных частных случаев, которые только позже были включены в общую схему. При этом для μ получились указанные значения.

Таблица II

$$\mu = 4$$

q	u	φ вольт/ $[\alpha]$	$\lg \frac{\rho r^2}{\alpha k}$	θ
0	1.000	0	∞	0
0.01	1.010	0.04	2.9749	0
0.02	1.078	0.62	2.0897	0°11'
0.03	1.264	3.00	3.7086	0°51'
0.04	1.584	7.71	3.4090	2°10'
0.05	2.050	14.65	3.1601	4°01'
0.06	2.655	23.19	4.9505	6°11'
0.07	3.388	32.69	4.7726	8°33'
0.08	4.236	42.73	4.6202	11°02'
0.09	5.186	53.05	4.4881	13°35'
0.10	6.227	63.46	4.3729	16°11'
0.11	7.349	73.90	4.2711	18°47'
0.12	8.543	84.28	4.1810	21°25'
0.13	9.802	94.59	4.1002	24°03'
0.14	11.12	104.8	4.0280	26°42'
0.15	12.48	114.9	5.9637	29°21'
0.16	13.89	124.9	5.9039	32° 0'
0.17	15.34	134.7	5.8501	34°39'
0.18	16.82	144.4	5.7993	37°19'
0.19	18.33	153.9	5.7559	39°59'
0.20	19.85	163.4	5.7160	42°38'
0.21	21.40	172.6	5.6812	45°18'
0.22	22.95	181.6	5.6532	47°58'
0.23	24.51	190.5	5.6128	50°38'
0.24	26.08	199.3	5.5911	53°18'
0.25	27.64	207.8	5.5682	55°58'
0.26	29.19	216.2	5.5411	58°38'
0.27	30.74	224.4	5.5315	61°18'
0.28	32.27	232.4	5.5051	63°58'
0.29	33.78	240.2	5.4914	66°38'
0.30	35.26	247.8	5.4900	69°18'
0.31	36.72	255.2	5.4771	71°58'
0.32	38.16	262.5	5.4624	74°38'
0.33	39.55	269.5	5.4610	77°19'
0.34	40.91	276.3	5.4600	79°58'
0.35	42.23	282.8	5.4600	82°39'
0.36	43.51	289.2	5.4600	85°18'
0.37	44.75	295.3	5.4600	87°59'
0.38	45.93	301.3	5.4771	90°39'
0.39	47.06	306.9	5.4771	93°19'
0.40	48.14	312.3	5.4914	95°59'

Таблица II
 $\mu = 4$

(Продолжение)

q	u	φ вольт/ а	$\lg \frac{\rho r^2}{\alpha k}$	θ
0.41	49.17	317.4	$\overline{5.5051}$	98°40'
0.42	50.13	322.2	$\overline{5.5315}$	101°20'
0.43	51.04	326.8	$\overline{5.5563}$	104° 0'
0.44	51.89	331.1	$\overline{5.5798}$	106°40'
0.45	52.67	335.1	$\overline{5.6021}$	109°20'
0.46	53.39	338.8	$\overline{5.6335}$	112° 0'
0.47	54.04	342.2	$\overline{5.6812}$	114°41'
0.48	54.63	345.3	$\overline{5.7243}$	117°21'
0.49	55.15	348.0	$\overline{5.7709}$	120°01'
0.50	55.60	350.5	$\overline{5.8325}$	122°41'
0.51	55.99	352.6	$\overline{5.9085}$	125°21'
0.52	56.31	354.3	$\overline{5.9956}$	128°02'
0.53	56.56	355.7	$\overline{4.1139}$	130°42'
0.54	56.74	356.8	$\overline{4.2742}$	133°22'
0.55	56.86	357.4	$\overline{4.4715}$	136°02'
0.56	56.91	357.7	$\overline{4.9340}$	138°39'
0.562	56.92	357.8	∞	139°10'

Таблица III
 $\mu = 9$

q	u	φ вольт/ а	$\lg \frac{\rho r^2}{\alpha k}$	θ
0	1.000	0	∞	0
0.01	1.010	0.04	$\overline{2.5966}$	0°01'
0.02	1.078	0.62	$\overline{2.0990}$	0°16'
0.03	1.263	3.00	$\overline{3.6971}$	1°17'
0.04	1.581	7.71	$\overline{3.4259}$	3°15'
0.05	2.031	14.42	$\overline{3.1779}$	6° 0'
0.06	2.617	22.73	$\overline{4.9711}$	9°14'
0.07	3.326	32.10	$\overline{4.7959}$	12°46'
0.08	4.143	41.94	$\overline{4.6470}$	16°28'
0.09	5.053	52.11	$\overline{4.5194}$	20°17'
0.10	6.043	62.26	$\overline{4.4089}$	24°09'
0.11	7.102	72.46	$\overline{4.3134}$	28°03'
0.12	8.217	82.43	$\overline{4.2302}$	31°59'
0.13	9.377	92.33	$\overline{4.1578}$	35°56'

Таблица III
 $\mu = 9$

(Продолжение)

q	u	Φ вольт/ $ a $	$\lg \frac{\rho r_k^2}{a}$	θ
0.14	10.57	102.1	4.0945	39°54'
0.15	11.80	111.6	4.0391	43°53'
0.16	13.04	120.9	5.9915	47°50'
0.17	14.28	130.0	5.9500	51°50'
0.18	15.53	138.8	5.9151	55°48'
0.19	16.77	147.3	5.8859	59°48'
0.20	18.00	155.5	5.8624	63°48'
0.21	19.20	163.5	5.8436	67°45'
0.22	20.37	171.1	5.8302	71°45'
0.23	21.51	178.4	5.8216	75°45'
0.24	22.60	185.4	5.8183	79°45'
0.25	23.64	192.0	5.8200	83°45'
0.26	24.64	198.2	5.8266	87°45'
0.27	25.57	204.2	5.8391	91°45'
0.28	26.44	209.7	5.8572	95°42'
0.29	27.24	214.9	5.8817	99°42'
0.30	27.97	219.5	5.9133	103°42'
0.31	28.63	223.8	5.9532	107°42'
0.32	29.21	227.6	4.0028	111°42'
0.33	29.71	230.9	4.0645	115°38'
0.34	30.13	233.7	4.1421	119°38'
0.35	30.47	236.0	4.2421	123°42'
0.36	30.73	237.8	4.3773	127°42'
0.37	30.91	239.1	4.5793	131°42'
0.38	31.00	239.8	4.9716	135°42'
0.387	31.07	240.0	∞	138°28'

89.3. Раз u найдено, как функция от q , то можно сейчас же найти r в зависимости от времени. С этой целью заметим, прежде всего, что если r обозначает координату в момент t электрона, вышедшего при $t=0$ из катода, то $Q = 2\pi \int_{r_k}^r r \rho dr$ является функцией от времени и притом функцией линейной, ибо если взять производную от Q по t , то, с помощью уравнения (89, 2), получаем:

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi r \rho \dot{r} = -I,$$

а так как $(Q)_{t=0} = 0$, то

$$Q = -It.$$

(89, 24)

Таблица IV

$\mu = 15$

q	a	φ вольт/ $ \alpha $	$\lg \frac{\rho r_k^2}{\alpha}$	θ
0	1.000	0	∞	0
0.01	1.010	0.04	$\overline{1.0017}$	0°01'
0.02	1.078	0.62	$\overline{2.0898}$	0°21'
0.03	1.261	2.96	$\overline{3.7171}$	1°39'
0.04	1.575	7.65	$\overline{3.4207}$	4°12'
0.05	2.028	14.45	$\overline{3.1807}$	7°45'
0.06	2.609	22.70	$\overline{4.9778}$	11°56'
0.07	3.305	31.92	$\overline{4.8093}$	16°32'
0.08	4.098	41.59	$\overline{4.6665}$	21°20'
0.09	4.973	51.44	$\overline{4.5460}$	26°16'
0.10	5.914	61.31	$\overline{4.4436}$	31°17'
0.11	6.906	71.08	$\overline{4.3570}$	36°21'
0.12	7.935	80.66	$\overline{4.2838}$	41°26'
0.13	8.988	90.01	$\overline{4.2223}$	46°34'
0.14	10.05	99.07	$\overline{4.1715}$	51°42'
0.15	11.12	107.8	$\overline{4.1302}$	56°49'
0.16	12.17	116.2	$\overline{4.0979}$	61°55'
0.17	13.20	124.3	$\overline{4.0742}$	67°10'
0.18	14.20	131.9	$\overline{4.0586}$	72°21'
0.19	15.16	139.2	$\overline{4.0513}$	77°28'
0.20	16.06	146.0	$\overline{4.0522}$	82°38'
0.21	16.91	152.3	$\overline{4.0617}$	87°48'
0.22	17.69	158.1	$\overline{4.0802}$	93°04'
0.23	18.40	163.4	$\overline{4.1088}$	98°10'
0.24	19.04	168.2	$\overline{4.1487}$	103°17'
0.25	19.59	172.4	$\overline{4.2024}$	108°28'
0.26	20.05	176.0	$\overline{4.2733}$	113°45'
0.27	20.43	179.0	$\overline{4.3678}$	118°52'
0.28	20.72	181.3	$\overline{4.4984}$	124°04'
0.29	20.92	182.9	$\overline{4.6948}$	129°14'
0.30	21.03	183.8	$\overline{3.0735}$	134°24'
0.308	21.12	184.0	∞	138°31'

Следовательно,

$$q = -\frac{l}{\alpha} t = 3 \sqrt[3]{2} \cdot 10^6 \left(\frac{l m A}{r_k^2} \right)^{1/3} t = 3 \sqrt[3]{2} \cdot 10^6 \left(\frac{H}{\sqrt{\mu}} \right) t. \quad (89, 25)$$

Таблица V

$$\mu = 39.69$$

q	n	φ вольт/ $ a $	$\lg \frac{\rho r_k^3}{\alpha}$	θ
0	1.000	0	∞	0
0.01	1.010	0.04	$\bar{2}.9672$	0°01'
0.02	1.077	0.61	$\bar{2}.0934$	0°34'
0.03	1.257	2.92	$\bar{3}.7349$	2°42'
0.04	1.559	7.42	$\bar{3}.4495$	6°47'
0.05	1.983	13.90	$\bar{3}.2227$	12°28'
0.06	2.516	21.71	$\bar{3}.0386$	19°12'
0.07	3.136	30.25	$\bar{4}.8876$	26°34'
0.08	3.820	39.10	$\bar{4}.7701$	34°18'
0.09	4.544	47.92	$\bar{4}.6758$	42°13'
0.10	5.288	56.58	$\bar{4}.6053$	50°21'
0.11	6.028	64.74	$\bar{4}.5563$	58°30'
0.12	6.745	72.54	$\bar{4}.5276$	66°45'
0.13	7.420	79.76	4.5185	75°0'
0.14	8.038	86.25	$\bar{4}.5289$	83°17'
0.15	8.585	91.97	4.5635	91°41'
0.16	9.048	96.88	$\bar{4}.6232$	100°04'
0.17	9.419	100.9	$\bar{4}.7168$	108°21'
0.18	9.693	103.9	$\bar{4}.8686$	116°41'
0.19	9.865	105.8	$\bar{3}.1357$	125°04'
0.20	9.937	106.7	$\bar{3}.8620$	133°28'
0.202	9.952	107.0	∞	135°54'

Из полученного решения, имеющего вид $u = \frac{r}{r_k} = F(q, \mu)$, находим, вместе с тем, зависимость радиальной координаты от времени, именно:

$$\frac{r}{r_k} = F \left[3 \sqrt[3]{2} \cdot 10^6 \frac{H}{\sqrt{\mu}} t, \mu \right]. \quad (89, 26)$$

89. 4. Несколько более сложным оказывается вычисление распределения потенциала в конденсаторе. Исходим для его нахождения из формулы:

$$Q = \alpha q = - \frac{r}{2} \frac{d\varphi}{dr} = - \frac{u}{2} \frac{d\varphi}{du}, \quad (89, 27)$$

откуда следует, что

$$\frac{\varphi}{\alpha} = - 2 \int_{u=1}^u \frac{q du}{u}, \quad (89, 28)$$

или

$$\frac{\varphi}{(\mathcal{L}^2 k^2 m A)^{2/3}} = \int_{u=1}^u \frac{q du}{u}. \quad (89, 29)$$

Ввиду того, что функция $u = u(q, \mu)$ уже нам известна, мы знаем также обратную функцию $q = q(u, \mu)$. Следовательно, нахождение φ с помощью этой функции приводится к простой квадратуре.

На рис. 149 даны величины $\frac{\varphi_{\text{вольт}}}{|\alpha|} = 6 \cdot 10^3 \int_1^u \frac{q du}{u}$ в функции от u для $\mu = 0; 4; 9; 15; 39.69$. Каждая кривая начинается при $u = 1$ и окан-

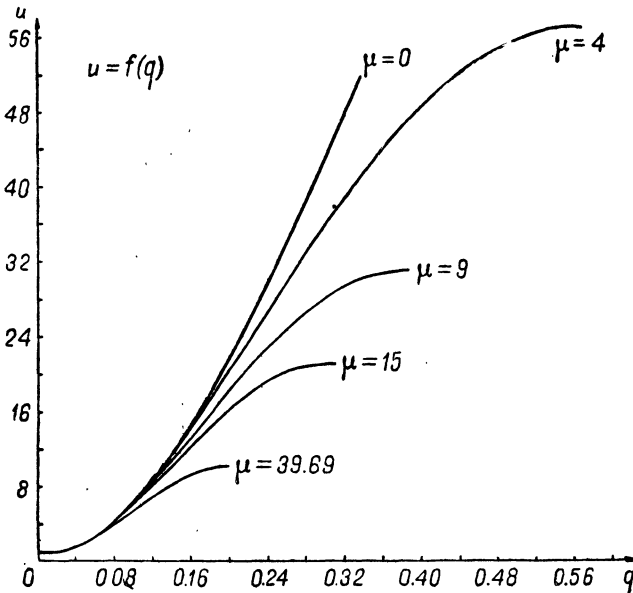


Рис. 148.

чивается при $u = u_m(\mu)$ (кроме как при $\mu = 0$). Как видно из чертежа, все кривые с $\mu \neq 0$ лежат выше, чем кривая $\mu = 0$, приближаясь, однако, к этой последней тем ближе, чем меньше μ .

Численные значения $\frac{\varphi_{\text{вольт}}}{|\alpha|}$ приведены в третьем столбце таблиц I—V и в седьмом столбце таблицы I.

Если выразить в (89, 29) ток I_{mA} через μ , что производится с помощью формулы (89, 21), то получим выражение для потенциала в следующей форме:

$$\varphi = 2^{2/3} \cdot \frac{H^2 r_k^2}{\mu} \int_{u=1}^u \frac{q du}{u}. \quad (89, 30)$$

Эта формула допускает непосредственную проверку в том частном случае, когда за верхний предел в интеграле принято $u = u_m(\mu)$, ибо тогда соответствующая величина φ может быть вычислена совершенно элементарно из уравнения (89, 15). Для этого следует лишь в (89, 15)

подставить $\frac{du}{dQ} = 0$ [что соответствует $u_m(\mu)$], чтобы найти оттуда соответствующее φ_m :

$$\varphi_m = \frac{eH^2 r_k^2}{8mc^2} [u_m(\mu)]^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{[u_m(\mu)]^2}\right)^3 = H^2 r_k^2 f_1(\mu), \quad (89, 31)$$

где $f_1(\mu)$ зависит только от μ .

Эта формула вполне точна. В то же время из (89, 30) получаем:

$$\frac{\varphi_m}{H^2 r_k^2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\mu} \int_1^{u_m(\mu)} \frac{q du}{u} = f_2(\mu). \quad (89, 32)$$

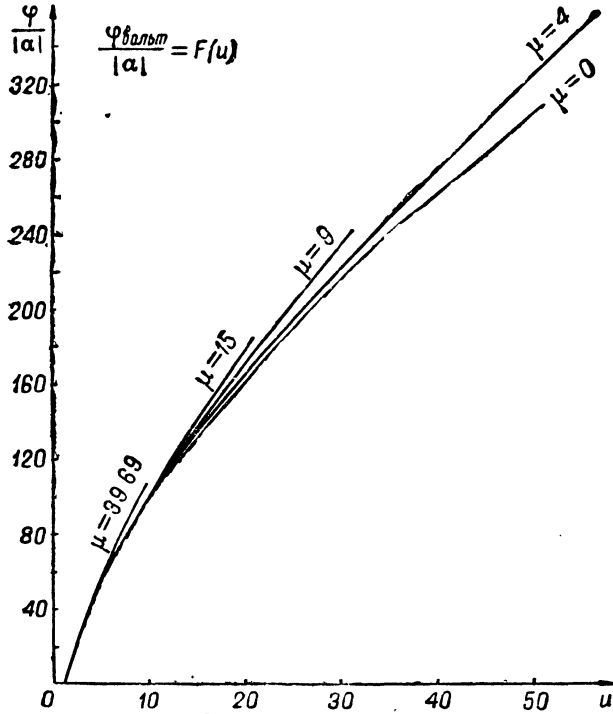


Рис. 149.

Так как функции $q(u)$ и $u_m(u)$ находятся численным интегрированием уравнения (89, 22) и вычисление интеграла в (89, 32) также производится путем применения численных методов, то сравнение обоих полученных результатов может служить для проверки точности вычисления. В таблице VI приведены величины $f_1(\mu)$ и $f_2(\mu)$:

Таблица VI

μ	4	9	15	39.69
$10^2 \cdot f_1(\mu)$	23.8	7.11	3.27	1.79
$10^2 \cdot f_2(\mu)$	23.8	7.09	3.25	1.79

Сравнение показывает, что разница нигде не превышает 0.6%, чего и следовало ожидать при той точности, с которой производились все вычисления.

89.5. Нетрудно также найти распределение плотности пространственного заряда. Именно, из уравнения (89, 2) следует:

$$\rho = -\frac{l}{2\pi r r'} = -\frac{a}{2\pi r_k^2 u} \frac{du}{dq} = -\frac{H^2}{2^{4/3} \pi \mu} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dq}. \quad (89, 33)$$

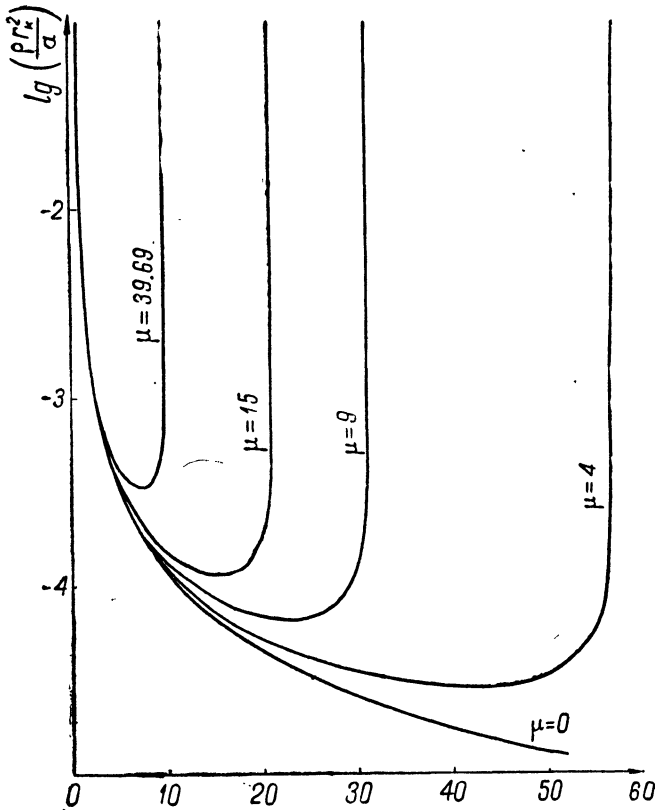


Рис. 150.

Пользуясь разностной схемой, можно вычислить $\frac{du}{dq}$ из величин u , а вместе с тем и ρ . В таблицах I—V приведены полученные таким путем величины $\lg_{10} \frac{pr_k^2}{a}$. Общий ход функций $\lg_{10} \left(\frac{pr_k^2}{a} \right)$ для различных μ дается кривыми, изображенными на рис. 150.

89.6. Для определения „характеристики“ трубки, т. е. зависимости анодного тока I от силы магнитного поля H , при постоянном анодном напряжении φ_a , следует поступать следующим образом: ввиду того, что для данной трубки известно отношение $u_a = r_a/r_k$, следует попросту взять из рис. 149 величины $\varphi/|a|$, отвечающие одной и той

же абсциссе $u_a = r_a/r_k$, но различным значениям μ .¹ Таким образом, находятся величины

$$\left[\frac{\varphi_a}{(r_k I_{mA})^{2/3}} \right]_{\mu = \mu_i} = \frac{\varphi_a}{(r_k I_{mA}^{(i)})^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[\frac{\varphi_a}{|a|} \right]_{\mu = \mu_i} = \psi_i,$$

а, следовательно, и ток $I_{mA}^{(i)}$:

$$I_{mA}^{(i)} = \frac{1}{r_k} \cdot \left(\frac{\varphi_a}{\psi_i} \right)^{3/2}. \quad (89, 34)$$

Здесь $I_{mA}^{(i)}$ — ток, соответствующий величине $\mu = \mu_i$, т. е. определенной величине магнитного поля $H^{(i)}$. Это поле может быть теперь тоже найдено, так как имеет место соотношение:

$$H^{(i)} = \frac{\sqrt[3]{\mu_i (I_{mA}^{(i)})^{1/3}}}{r_k^{2/3}}, \quad (89, 35)$$

где $I_{mA}^{(i)}$ уже известно из (89, 34).

Из (89, 34) и (89, 35) можно, следовательно, вычислить для каждого μ_i , дающего точку пересечения ψ_i , пару величин $(H^{(i)}, I_{mA}^{(i)})$, дающих точку искомой характеристики.

Если соединить все полученные таким образом точки плавной кривой и учесть, что для $H = H_k$ ток внезапно падает до нуля,² то получаем картину вроде изображенной на рис. 151, где по оси абсцисс отложены значения магнитного поля H (в эрстедтах), а по оси ординат — ток I_{mA} для $r_k = 0.1$ см, $r_a = 0.8$ см. Рядом с каждой кривой указано соответствующее ей анодное напряжение. Ток, естественно, уменьшается с увеличением поля H до тех пор, пока он для $H = H_k$ (собственно, для ничтожно-меньшего поля) не спадет до 84—86% его лангмюровской величины. Аналогичный ход показывает и другая кривая (рис. 152) с $r_a = 2.54$ см и $r_k = 0.085$ см, с той только разницей, что там $[I]_{H=H_k}$ составляет, приблизительно, 87% лангмюровского тока.

Для сравнения с опытными данными можно использовать результат, полученный Халлом, именно, что у одной из испытывавшихся им трубок ток при $H = 0.845 H_k$ составлял 91% от лангмюровской величины.³

К сожалению, точные размеры его трубки не приводятся, но все же можно полагать, что для всякого цилиндрического диода, у

¹ При этом само собой разумеется, что, для нахождения по меньшей мере двух точек искомой характеристики, необходимо наличие соответствующего значения $u_a = r_a/r_k$ на рис. 149, т. е. чтобы было $u \leq 56.9$.

Если требуется большая точность, то значения $\varphi/|a|$ могут быть получены прямо из таблиц I—V путем интерполяции.

² Из-за пренебрежения начальными скоростями электронов.

³ Ср. также данные у L. Tonks, Sow. Phys, 8, 572, 1935.

которого $r_k \ll r_a$, результат будет примерно такой же, с точностью, может быть, до нескольких процентов. В приведенной ниже таблице VII приводятся величины отношения $(I)_{H=0,845H_k} / I_{\text{Ланг.}}$ для некоторых частных случаев с различными $u_a = r_a / r_k$.

Таблица VII

$\frac{r_a}{r_k}$	10	20	30	56.9
$\frac{(I)_{0,845H_k}}{I_{\text{Ланг.}}}$	0.90	0.93	0.92	0.93

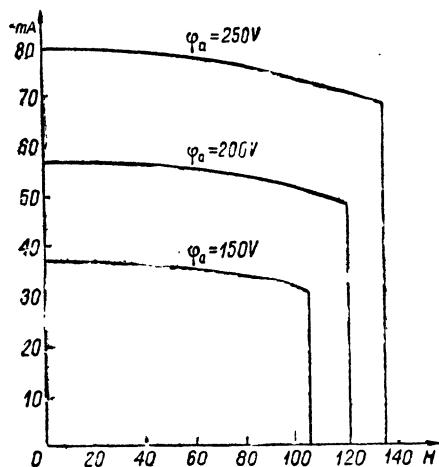


Рис. 151.

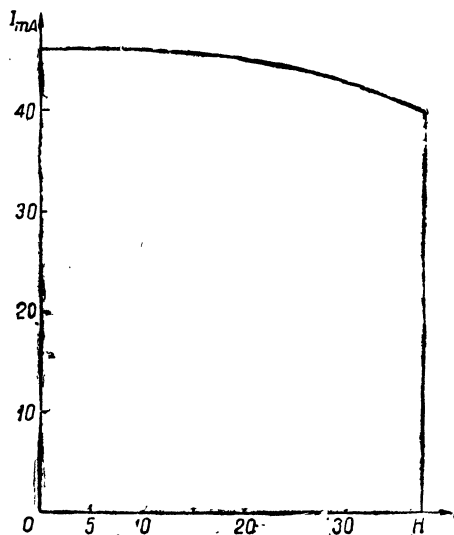


Рис. 152.

Из нее видно, что найденное отношение обеих величин тока мало зависит от r_a / r_k и находится в полном согласии с халловской величиной 0.91.

89.7. Мы можем также приложить наши формулы к вычислению длины волны пролетных колебаний, могущих возникать в нашей системе. Эта длина волны λ связана, как известно, с временем пролета T электронов от катода до анода, в случае наличия критического магнитного поля H_k , формулой Окабе

$$\lambda = 2cT. \quad (89,36)$$

Входящую сюда величину T мы можем вычислить непосредственно из уравнения (89,25), если только там подразумевать под q наибольшее его возможное значение q_m при том μ , которое соответствует рассматриваемому режиму (ибо q_m соответствует как раз изменению направления

радиального движения электрона, т. е. наличие критического магнитного поля). Следовательно,

$$T = \frac{q_m \sqrt{\mu}}{3\sqrt{2} \cdot 10^8} \cdot \frac{1}{H_k} \quad (89, 37)$$

и

$$\lambda = \frac{2^{2/3} \cdot 10^4 q_m \sqrt{\mu}}{H_k} = \frac{P(\mu)}{H_k}. \quad (89, 38)$$

Формула (89, 38) имеет предложенную Окабе¹ форму $\lambda = \frac{P}{H}$.

Вследствие того, что q_m зависит исключительно от μ , $P(\mu)$ в формуле (89, 38) также является функцией только от μ . Если вычислить $P(\mu)$ для тех μ , для которых q_m были найдены выше, то получится следующая таблица:

Таблица VIII

μ	4	9	15	39.69
q_m	0.562	0.387	0.308	0.202
$q_m \sqrt{\mu}$	1.124	1.161	1.193	1.273
$P(\mu)$	17840	18430	18930	20200

Из нее следует, что $P(\mu)$ не является постоянной величиной, а зависит существенным образом от μ , что обнаруживается и на опыте (ср., например, статью А. Слущкина и Д. Штейнберга,² где встречаются величины λH до 20100).

89.8. Переходя, наконец, к определению формы электронных траекторий, мы должны еще установить характер азимутального движения электрона. Для нахождения этого последнего мы исходим из уравнения (89, 9), которое переписываем так:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \left(1 - \frac{1}{u^2} \right). \quad (89, 39)$$

Если пренебречь в этом уравнении членом $1/u^2$ по сравнению с единицей, что при больших $u_a = r_a/r_k$ нигде, кроме как вблизи катода, заметной ошибки, казалось бы, вносить не должно, то это уравнение можно непосредственно проинтегрировать, причем получается формула:

$$\bar{\theta} = \omega t. \quad (89, 40)$$

Если сюда подставить $t = T$ из (89, 37), то, принимая во внимание значение ω , получим:

$$\bar{\theta}_m = (\bar{\theta})_{t=T} = \frac{e q_m \sqrt{\mu}}{6\sqrt{2} \cdot 10^8 m c}. \quad (89, 41)$$

¹ К. Окабе, P. J. R. E., 17, 652, 1929.

² Ann. d. Phys., I, 658—670, 1929.

³ Черточка над $\bar{\theta}$ поставлена здесь для отличия от точного значения θ в (89, 42).

Это и есть тот угол, на который поворачивается радиус-вектор электрона, в то время как этот последний движется от катода к аноду при наличии критического магнитного поля.

Так как мы видели, что $q_m \sqrt{\mu}$ не является величиной постоянной, а представляет собой функцию от μ , то и $\bar{\theta}_m$, согласно этому вычислению, неодинаково для разных трубок. Положение дела принципиально не меняется и в случае сохранения члена $1/u^2$, которым мы пренебрегли. В этом случае, однако, вычисление отклонения угла θ , как функции времени, становится сложнее. Для проведения этого вычисления мы используем, наряду с (89, 39), также соотношение (89, 25) и получаем:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{I}{a} \cdot \frac{d\theta}{dq} = \omega \left(1 - \frac{1}{u^2}\right),$$

откуда

$$\theta = -\frac{\omega}{I} \left[q - \int_0^q \frac{dq}{u^2} \right] = \frac{eV\sqrt{\mu}}{18\sqrt[3]{2} \cdot 10^{16}m} \left[q - \int_0^q \frac{dq}{u^2} \right], \quad (89, 42)$$

где в интеграле справа u является известной функцией от q .

В последних столбцах таблиц II—V приведены величины θ для различных q и μ .

Если подставить, вместо q , максимальную величину q_m , то получается угол θ_m , на который поворачивается радиус-вектор электрона, пока этот последний не доходит до анода, при наличии критического магнитного поля H_k . В приближенной теории, данной Халлом,¹ этот угол получается равным 135° . Мы видим, что он в действительности является функцией от μ . Однако, величины θ_m только не на много отличаются от халловской величины, как показывает таблица IX:

Таблица IX

μ	4	9	15	39.69
θ_m	139°10'	138°28'	138°31'	135°54'
$\bar{\theta}_m$	150°30'	155°30'	160	170°30'

На рис. 153 изображены, в целях сравнения, точный путь электрона, вычисленный с помощью точных формул для $\mu = 15$ (сплошная линия), и путь, построенный по халловской формуле:

$$r = r_{\max} \cdot \left(\sin \frac{2\theta}{3} \right)^{3/2},$$

(пунктиром) для некоторого определенного режима. θ_m равняется приблизительно $138^\circ 5'$, вместо 135° по Халлу. Мы видим, что халловская

¹ Phys. Rev., 18, 31, 1921.

кривая мало отличается от точной кривой. Мы видим также, что полученные в результате пренебрежения членом $1/u^2$ в (89, 39) вели-

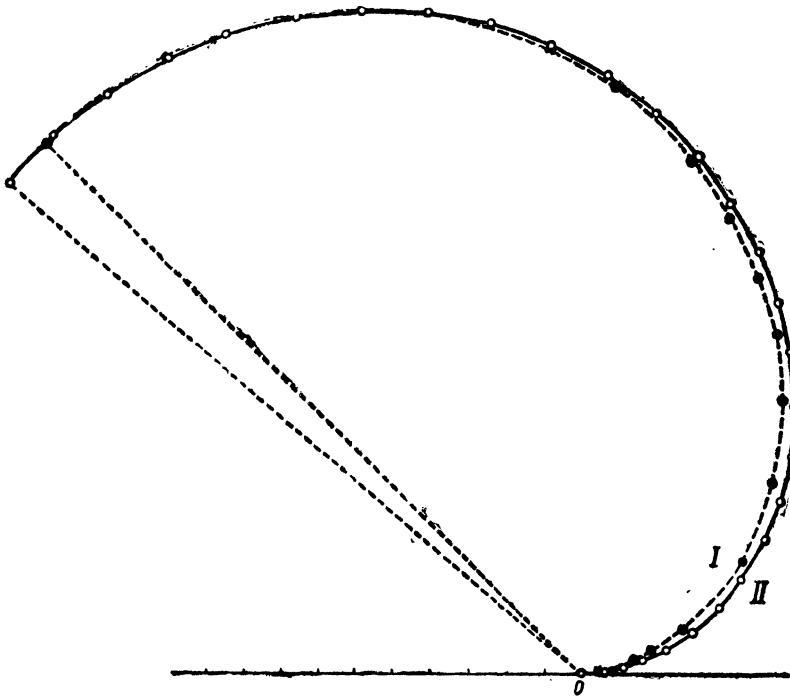


Рис. 153.

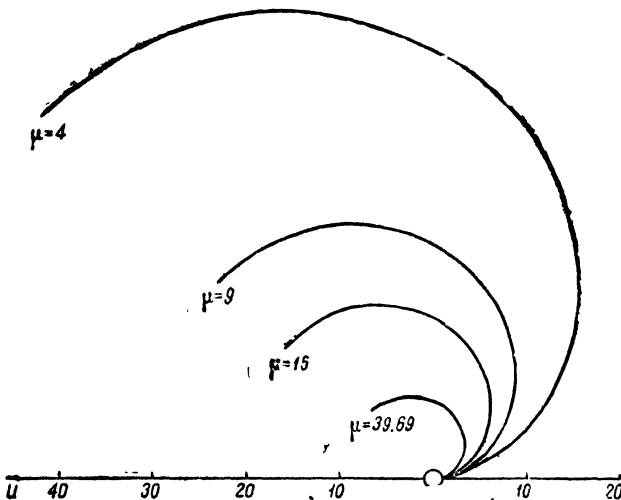


Рис. 154.

чины $\bar{\theta}_m$ значительно отличаются от действительных θ_m (до 25%, см. последнюю строку в таблице IX). На рис. 154 изображены формы электронных траекторий для различных μ .

89.9. Остановимся еще на вопросе о том, имеют ли электронные траектории при поле, равном или большем критического, петлеобразную форму, т. е. возвращаются ли электроны при этом на катод, или же они, дойдя до той точки $r=r_m$ траектории, в которой $\dot{r}=0$, имеют тенденцию продолжать вращаться дальше по кругу радиуса $r=r_m$.¹

Для того, чтобы это последнее обстоятельство могло иметь место, нужно, чтобы в рассматриваемой точке траектории обращалось в нуль также и радиальное ускорение \ddot{r} . При $r=r_m$ должны, стало быть, одновременно выполняться условия:

$$(\dot{r})_{r=r_m} = 0, \quad (\ddot{r})_{r=r_m} = 0, \quad (89, 43)$$

что, при учете (89, 24), может быть записано и так:

$$\left(\frac{du}{dQ}\right)_{q=q_m} = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dQ^2}\right)_{q=q_m} = 0. \quad (89, 44)$$

Вместе с (89, 15) и (89, 16) это дает:

$$\frac{2e\varphi_m}{mr_k^2} = \omega^2 u_m^2 \left(1 - \frac{1}{u_m^2}\right)^2, \quad (89, 45)$$

$$-\frac{2eQ_m}{mr_k^2} = \omega^2 u_m^2 \left(1 - \frac{1}{u_m^2}\right)^2, \quad (89, 46)$$

т. е., если одновременно выполняются оба условия (89,43), то имеет место соотношение

$$\varphi_m = -Q_m \frac{1 - \frac{1}{u_m^2}}{1 + \frac{1}{u_m^2}} \cong -Q_m, \quad (89, 47)$$

последнее, если $u_m^2 \ll 1$.

Делим на α и переписываем (89,47) таким образом:

$$q_m = \frac{Q_m}{\alpha} = \frac{(\varphi_m)_{\text{вольт}}}{300 |\alpha|} \cdot \frac{1 + \frac{1}{u_m^2}}{1 - \frac{1}{u_m^2}} \approx \frac{(\varphi_m)_{\text{вольт}}}{300 |\alpha|}. \quad (89, 48)$$

Поскольку в приведенных выше таблицах II—V имеются как значения q_m для $\mu=4, 9, 15$ и 39.69 , так и отвечающие им значения

¹ Напомним, что в плоском магнетроне в той его точке, в которой обращалась в нуль нормальная к пластинам магнетрона составляющая скорости электрона \dot{x} , обращалась в нуль также и его ускорение, т. е. также и действующая на него сила. Поэтому, дойдя до этой точки, электрон имеет тенденцию двигаться дальше с равномерной скоростью параллельно электродам, и его истинное дальнейшее движение зависит от неучитывавшейся нами начальной скорости его, от „соударений“ между электронами в потоке и от флуктуационных неоднородностей поля.

* $Q_m = \alpha q_m$.

$(\varphi_m)_{\text{вольт}}/|\alpha|$, получаем возможность проверить, в какой мере в этих случаях выполняется соотношение (89,48).

В приводимой ниже таблице X даются заимствованные из указанных таблиц значения q_m и $\bar{\varphi}_m = (\varphi_m)_{\text{вольт}}/300|\alpha|$, а также значения отношений $\bar{\varphi}_m/q_m$ и r_m/r_k . Из этой таблицы видно, что при соответ-

Таблица X

μ	q_m	$\bar{\varphi}_m = \frac{(\varphi_m)_{\text{вольт}}}{300 \alpha }$	$\bar{\varphi}_m/q_m$	r_m/r_k
4	0.562	1.193	2.12	56.92
9	0.387	0.800	2.07	31.07
15	0.308	0.613	1.99	21.12
39.69	0.202	0.357	1.77	9.952

ствующих значениях μ соотношения (89,47) и (89,48) совершенно не выполняются и что значение φ_m ближе к $2|Q_m|$, чем к $|Q_m|$.

Так как $Q_m = -\frac{r_m}{2} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_m}$, то из только что сказанного следует, что значение φ_m близко к значению $r_m \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_m}$, так что, грубо говоря,

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_m} \cong \frac{\varphi_m}{r_m}. \quad (89,49)$$

С другой стороны, для диода с тем же значением отношения r_m/r_k и при анодном напряжении φ_m , имеем, при отсутствии магнитного поля, следующую зависимость φ от r :¹

$$\varphi = A(r\beta^2)^{2/3}, \quad (89,50)$$

где A — не зависящая от r постоянная. Для поля в смежности с анодом найдем, поэтому, считая величину β^2 равной единице, ввиду того, что в тех случаях, для которых нашли оценку (89,49), $r_m/r_k \gg 1$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_m} \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{\varphi_m}{r_m}. \quad (89,51)$$

Сравнение (89,49) и (89,51) показывает, что, в случае рассчитанных нами режимов, поле $-\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_m}$ около анода отличается лишь на 30%—40% от поля в том же диоде при отсутствии магнитного поля. Настолько же отличаются и пропорциональные им полные количества объемного заряда внутри того же диода,² при наличии критического магнитного поля и без поля.

¹ См. (87,5).

² Ср. (89,14).

В то же время соотношение (89,47) эквивалентно, согласно (89,14), такому:

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_m} \cong \frac{2\varphi_m}{r_m}, \quad (89,52)$$

т. е. в этом случае количество объемного заряда внутри диода примерно в три раза больше, чем без магнитного поля, и раза в два больше, чем дают для соответствующих режимов наши расчеты.¹

Мы остановились так подробно на этом вопросе потому, что соображения, связанные с возможностью выхода электронов при их движении в цилиндрическом магнетроне с объемным зарядом на некоторый предельный круг, играют фундаментальную роль в предложенной Л. Бриллиуеном теории магнетрона,² основанной на представлении о спиральном, а не петлеобразном характере электронных траекторий, вырождающихся, в пределе, в круговые.

Из приведенных выше данных видно, что по крайней мере в случае режимов, рассчитанных нами выше, бриллиуеновские представления полностью противоречат результатам точного решения задачи,³ и что по крайней мере в этих случаях траектории имеют несомненно петлеобразный характер.

Глава XXVI

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 90. Плоский диод

90.1. До сих пор мы, при изучении прохождения термоионных токов через электронные приборы, предполагали, что приложенное напряжение не зависит от времени, а самые токи — стационарны.

Рассмотрение вопроса значительно усложняется, если анодное напряжение меняется со временем, притом настолько быстро, что оно успевает заметным образом измениться за время пролета электрона через прибор.⁴ При этом приходится учитывать как пульсации электронной плотности, возникающие под действием быстро-переменного

¹ Большому объемному заряду соответствует и больший запас электростатической энергии в магнетроне, т. е. энергетически менее выгодный режим.

² Сб. „Теория магнетрона“ (по Бриллиуену). Сборник переводов, изд. „Советское радио“, М., 1946.

³ Бриллиуен исходит из тех же основных уравнений (89,1) — (89,7), как и мы [см. указанный выше сборник, стр. 54, уравнения (21), (22), (22')], но ограничивается, вместо точного интегрирования уравнений, попыткой качественного подхода к нахождению характера их решения.

⁴ Если оно меняется весьма медленно по сравнению с временем пролета электрона через прибор, то можно пользоваться, с практически достаточной степенью точности, найденными ранее решениями для не зависящих от времени режимов. Так как обычно времена пробега электрона через приборы имеют порядок величины нескольких единиц, умноженных на 10^{-9} секунды, то, например, для периодически изме-

анодного напряжения в пространстве между электродами, так и создаваемые этими пульсациями, а также изменениями самого анодного напряжения, токи смещения, которые, при достаточно быстро-переменных процессах, могут играть не меньшую роль, чем токи конвекционные, а при особенно высоких частотах могут над ними преобладать.

Основы теории прохождения быстро-переменных токов через электронные приборы были заложены Бенэмом в двух статьях, опубликованных в 1928 и 1931 гг.¹

Ограничившись, с целью упрощения задачи, случаями, когда время распространения электромагнитных волн через прибор много меньше времени пробега электронов через него, т. е. когда скорости электронов много меньше скорости света, он исследовал прохождение тока, ограниченного объемным зарядом, через плоский диод под действием постоянного анодного напряжения, на которое наложено малое по сравнению с ним дополнительное высокочастотное. Поскольку такое малое дополнительное напряжение вызывает лишь соответственно малое искажение поля и движения электронов, по сравнению со стационарным режимом, можно применить к рассмотрению вопроса метод возмущений. Таким путем Бенэм вычислил импеданс плоского диода² в указанных условиях, в зависимости от частоты приложенного переменного напряжения, и дал некоторые приближенные результаты, относящиеся к цилиндрическому диоду с катодом исчезающе-малого радиуса.³ Он также положил начало изучению нелинейных эффектов, связанных с пульсациями электронной плотности. Некоторые вкравшиеся в его решение неточности, исказившие конечный результат, были впоследствии указаны и исправлены Теллегеном.⁴

После работ Бенэма вопрос о прохождении высокочастотных и нестационарных токов через электронные приборы рассматривался целым рядом авторов, частью получивших наново, притом более удобными методами, результаты Бенэма, частью продвинувших изучение этих процессов дальше.⁵ В нашем дальнейшем изложении мы будем пользоваться методами, развитыми нами в ряде статей 1935—1938 г.,⁶ дающими возможность полностью изучить как вопрос о прохождении высокочастотных токов через плоский и цилиндрический диоды, так

няющегося анодного напряжения это условие „медленности“ изменения означает лишь, что период его T должен быть при таких условиях заметно больше, чем 10^{-8} секунды, что соответствует длине волны в пустоте в 3 метра.

¹ W. E. Benham, *Phil. Mag.*, **5**, 641, 1928 и там же **11**, 457, 1931.

² См. ниже.

³ Во второй из цитированных выше работ.

⁴ См. цитированную выше вторую статью Бенэма в *Phil. Mag.*, **11**, 457, 1931.

⁵ См., в частности, статью Бенэма в *PIRE* **26**, 1093, 1938, в которой перечислена основная иностранная литература и часть советской, появившаяся до этого времени.

⁶ ЖЭТФ, **6**, в. 2, 126, 1936; ЖТФ, **8**, в. 9, 798, 1938 (совместно с А. М. Близиным); ЖТФ, **8**, в. 12, 1137, 1938, и др.

и рассмотреть ряд основных проблем, относящихся к прохождению через электронные приборы¹ импульсных и нестационарных токов.

90. 2. Переходим к рассмотрению прохождения тока, меняющегося во времени, через плоский диод, причем будем, во-первых, как и раньше, пренебрегать начальными скоростями электронов, считая их равными нулю, а, во-вторых, примем, подобно Бенэму, что временем распространения электромагнитных волн через прибор можно пренебречь.

Так как это последнее допущение эквивалентно, в отношении рассматриваемого процесса, утверждению, что скорость света бесконечно велика, то мы вправе принять, что электрическое поле E в приборе потенциально.² Полагаем, поэтому

$$E = -\text{grad } \varphi, \quad (90,1)$$

причем, однако, потенциал φ может в данном случае зависеть не только от координат, но и от времени t . Далее, будем считать эмиссию катода настолько большой, что при всех рассматриваемых ниже режимах она непрерывно поддерживает поле E у катода равным нулю.³

Вводим обозначения:

a — расстояние от анода до катода;

$x_{t,\tau}$ — координата в момент t электрона, вышедшего из катода в момент τ ;

$\tau(x, t)$ — время вылета из катода электрона, находящегося в точке с координатой x в момент t ;

v — скорость электрона;

$E = E(x, t)$ — электрическое поле в пространстве между электродами;

$E_{t,\tau}$ — электрическое поле, действующее в момент t на электроны, вылетевшие из катода в момент τ ;⁴

φ — потенциал по отношению к катоду;

φ_a — потенциал на аноде;

I — абсолютная величина плотности полного тока,

причем ось X -ов направлена перпендикулярно к плоскости пластин от катода к аноду, а начало координат помещено на катоде. Считаем,

¹ Или через схемы, содержащие такие приборы.

² Это вытекает непосредственно из уравнения $\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$, которое, при $c = \infty$, переходит в $\text{rot } E = 0$, что эквивалентно уравнению (90,1). Это же следует, при $c = \infty$ и из ур-ия $E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$, ибо A сохраняет конечное значение и при $c \rightarrow \infty$.

³ Т. е. что она практически мгновенно снижает до нуля возникающие у катода из-за изменения анодного напряжения поля, направленные в сторону катода. Ср., по этому поводу, п. 96. 5, особенно сноску на стр. 642.

⁴ Означением $E_{t,\tau}$ будем пользоваться лишь в тех случаях, когда может возникнуть сомнение относительно того, к каким t и τ относится поле E . В остальных случаях будем отбрасывать индексы t и τ у E .

что все величины зависят только от x и от t и что начальные скорости вылетающих из катода электронов равны нулю.

Тогда, предполагая, что в каждой точке находятся в любой момент только электроны одной определенной скорости, получаем для определения поля следующую группу уравнений:

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (90,2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho, \quad (90,3)$$

$$\frac{d^2 x_{t, \tau}}{dt^2} = -\frac{e}{m} E_{t, \tau}, \quad (90,4)$$

$$x_{\tau, \tau} = 0, \quad \left(\frac{dx_{t, \tau}}{dt}\right)_{t=\tau} = 0. \quad (90,5)$$

К ним должно быть еще добавлено уравнение

$$\rho v + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = -I = -I(t), \quad (90,6)$$

выражающее независимость полного тока — суммы тока конвекционного и тока смещения, — проходящего через единичную площадку, перпендикулярную оси X , от местоположения этой площадки внутри диода. Функция $I = I(t)$ может здесь зависеть только от времени, но не от x .¹

Для интегрирования этой системы поступаем следующим образом: будем рассматривать полную производную $\frac{dE}{dt}$ от электрического поля в диоде для наблюдателя, связанного с движущимся электроном. Получаем:

$$\frac{dE_{t, \tau}}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \rho v \right) = -4\pi I(t). \quad (90,7)$$

Отсюда видно, что для электрона, вылетевшего в момент τ , будет:

$$E_{t, \tau} = -4\pi \int_{\tau}^t I(\xi) d\xi. \quad (90,8)$$

Подставляя это в уравнение движения заряда, найдем следующие выражения для его скорости и координаты:

$$v_{t, \tau} = \frac{dx_{t, \tau}}{dt} = \frac{4\pi e}{m} \int_{\tau}^t (t - \xi) I(\xi) d\xi, \quad (90,9)$$

$$x_{t, \tau} = -\frac{e}{m} \int_{\tau}^t (t - \xi) E_{\xi, \tau} d\xi = \frac{2\pi e}{m} \int_{\tau}^t (t - \xi)^2 I(\xi) d\xi. \quad (90,10)$$

¹ Ибо в данном случае линии полного тока параллельны оси X , так что через единицу поверхности каждой плоскости, параллельной электродам, должен проходить один и тот же полный ток, который, стало быть, не зависит от x , но зависит, вообще говоря, от t .

² Ибо $E_{\tau, \tau} = 0$, согласно допущению (поле у катода).

90.3. Установим условия, при которых в каждой точке диода действительно находятся только электроны одной скорости, как было допущено выше. Для этого исследуем, при каких условиях $x_{t,\tau}$ будет монотонной функцией от τ . Берем производную от $x_{t,\tau}$ по τ :

$$\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} = -\frac{2\pi e}{m}(t-\tau)^2 I(\tau). \quad (90,11)$$

Отсюда видно, что, при $I(t) > 0$, эта производная всегда сохраняет постоянный знак, т. е. при этом условии электроны, вышедшие из катода в более поздние моменты, никогда не смогут нагнать ранее вышедшие. Из этого вытекает, что условие $I(t) \geq 0$ ¹ является единственным, ограничивающим применимость выведенных формул. Заметим, кстати, что при выполнении этого условия, очевидно, будет однозначно $\tau(0, t) = t$, ибо в точке $x = 0$ может при этом находиться в момент t лишь тот электрон, который в этот самый момент вышел из катода. Это замечание понадобится нам в дальнейшем.

90.4. Применим выведенные общие формулы к рассмотрению периодического режима с основной частотой ω . Задавая полный ток $I(t)$ в виде

$$I(t) = I_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \right], \quad (90,12)$$

где I_0 , α_n и ε_n не зависят от времени, можем переписать уравнение (90,10) таким образом:

$$x_{t,\tau} = \frac{2\pi e \alpha^3 I_0}{3m\omega^3} \times \left\{ 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n [A(n\alpha) \sin(n\omega t + \alpha_n) - B(n\alpha) \cos(n\omega t + \alpha_n)] \right\}, \quad (90,13)$$

причем введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega(t - \tau), \\ A(z) &= \frac{1}{z^3} \int_0^z u^3 \cos u du, \\ B(z) &= \frac{1}{z^3} \int_0^z u^3 \sin u du. \end{aligned} \right\} \quad (90,14)$$

Если задано выражение полного тока, т. е. если даны I_0 и все относительные амплитуды ε_n и фазы α_n , то это уравнение может быть тем или иным способом разрешено относительно $\alpha = \omega(t - \tau)$ при

¹ Формула (90,9) показывает, что и при $I(t)$, доходящем до нуля, но не становящемся отрицательным, все еще сохраняется единственное значение скорости в каждой точке.

заданном t . В частности, если амплитуды $I_0 \epsilon_n$ малы по сравнению с амплитудой I_0 постоянной составляющей тока, то вычисление может быть проведено по методу последовательных приближений, которые сходятся тем быстрее, чем эти отношения меньше.

Случай больших амплитуд мы рассмотрим ниже. Пока же остановимся на рассмотрении случая, когда все $\epsilon_n \ll 1$.

90. 5. Случай малых амплитуд. Для практических целей представляет бóльший интерес случай, когда задано непосредственно анодное напряжение, а не форма полного тока, проходящего через прибор. Чтобы исследовать этот случай, поступим следующим образом: зададимся для начала формой тока $I(t)$, причем будем считать все величины ϵ_n малыми количествами порядка ϵ . Составим, далее, выражение для потенциала на аноде в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= - \int_0^a E dx = - \int_{\tau=t}^{\tau(a,t)} E_{t,\tau} \frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \frac{8\pi^2 e}{m} \int_{\tau(a,t)}^t (t-u)^2 I(u) du \int_u^t I(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (90,15)$$

что допустимо, поскольку было доказано, что $x_{t,\tau}$ является монотонной функцией от τ .

Найдем теперь $\tau(a, t)$ из формулы (90,13), в которой надо положить $x_{t,\tau} = a$, причем воспользуемся методом последовательных приближений. Имеем:

а) нулевое приближение:

$$\alpha_0 = \left(\frac{3ma}{2\pi e I_0} \right)^{1/3} \omega, \quad (90,16)$$

б) следующее приближение:

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega [t - \tau(a, t)] = \\ &= \alpha_0 \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n [A(n\alpha_0) \sin \psi_n - B(n\alpha_0) \cos \psi_n] \right\}, \end{aligned} \quad (90,17)$$

где

$$\psi_n = n\omega t + \alpha_n. \quad (90,18)$$

Дальнейшие приближения отличаются от (90,17) лишь на величины второго порядка малости, а потому считаем приближение (90,17) окончательным. Далее, подставляя в (90,15), вместо тока $I(t)$, его

выражение через гармоники, т. е. $I(t) = I_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \sin \psi_n \right]$, отбра-

сывая при перемножении $I(u)$ и $\int_u^t I(\xi) d\xi$, члены, содержащие квадраты и произведения величин ϵ_n , пользуясь формулой (90,17) и, опять-

таки, отбрасывая в результате величины порядка ε^2 , найдем окончательное выражение для φ_a в функции от t :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi^2 e I_0^2 \alpha_0^4}{m \omega^4} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n [R(n\alpha_0) \cos \psi_n + S(n\alpha_0) \sin \psi_n] \right\} = \\ &= \varphi_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(\psi_n + \beta_n) \right\}, \end{aligned} \quad (90,19)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} z^4 R(z) &= 4 \left[4 \sin z - 2z \cos z - 2z - \frac{z^3}{3} \right], \\ z^4 S(z) &= 4 \left[4 - 4 \cos z - 2z \sin z \right] = 32 \sin \frac{z}{2} \left[\sin \frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2} \right) \cos \frac{z}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (90,20)$$

$$\text{и} \quad \varphi_0 = \frac{2\pi^2 e I_0^2 \alpha_0^4}{m \omega^4} = \left(\frac{3^4 \pi^2 I_0^2 a^4 m}{2e} \right)^{3/2},$$

откуда

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \frac{\varphi_0^{3/2}}{a^2}, \quad (90,21)$$

$$\delta_n = \varepsilon_n \sqrt{[R(n\alpha_0)]^2 + [S(n\alpha_0)]^2}, \quad \beta_n = \text{arc tg} \frac{R(n\alpha_0)}{S(n\alpha_0)}. \quad (90,22)$$

Формула (90,21) дает обычный закон Лангмюра для случая постоянного анодного напряжения. β_n дает угол отставания по фазе токовой компоненты с частотой ($n\omega$) от соответствующей компоненты потенциала.

Формулы (90,20) для величин $R(z)$ и $S(z)$, определяющих, соответственно, реактивную и активную компоненты импеданца, впервые даны Бенэмом.

Из всего изложенного видно, что если ограничиваться рассмотрением величин первого порядка малости, то рассматриваемый электронный прибор функционирует как линейная система, причем каждой гармонической составляющей в выражении потенциала соответствует только компонента тока той же частоты.

90.6. Рассмотрим некоторые предельные случаи.

а) $\omega \rightarrow 0$. В этом случае можно найти приближенное выражение для R и S непосредственно из формулы Лангмюра, поскольку, при достаточно медленно переменных процессах, можно считать ток в каждый данный момент как бы установившимся и соответствующим мгновенному значению анодного напряжения (время пролета электрона через прибор весьма мало по сравнению с периодом переменного напряжения). Получается:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{2}}{9\pi a^2} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \varphi_0^{3/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(\psi_n + \beta_n) \right\}^{3/2} = \\ &= I_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(\psi_n + \beta_n) \right\} + \dots = I_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin \psi_n \right\}, \end{aligned} \quad (90,23)$$

причем, как выше, отброшены величины порядка ϵ^2 . Отсюда видно, что $\delta_n = \frac{2}{3} \epsilon_n$ и $\beta_n = 0$. Нетрудно убедиться в том, что это выражение совпадает с тем, которое получается из общих формул (90,22) в предельном случае очень малых ϵ_n .

В самом деле, разлагая правые части формул (90,20) по степеням z , найдем:

$$R(z) = -\frac{z}{5} + \dots, \quad S(z) = \frac{2}{3} + \dots,$$

а из (90,22)

$$\delta_n = \epsilon_n \sqrt{R^2(z) + S^2(z)} \cong \frac{2}{3} \epsilon_n, \quad \beta_n = -\frac{3z}{10} \cong 0,$$

откуда и вытекает справедливость нашего утверждения.

б) Вторым предельным случаем, также допускающим непосредственную проверку, является случай чрезвычайно высоких частот, когда электронная инерция сказывается уже настолько сильно, что электроны не успевают реагировать на изменения поля. В силу этого, переменная компонента конвекционного тока стремится к нулю по сравнению с током смещения, который растет с частотой. Следует ожидать, поэтому, что, при чрезвычайно высоких частотах, импеданс может быть непосредственно вычислен из тока смещения. Проведем вычисление для этого случая, причем примем во внимание, что, согласно сказанному, для таких частот пространство между электродами — все равно, что пустое, так что высокочастотные компоненты поля могут быть получены из соответствующих компонент потенциала просто делением на a — на междуэлектродное расстояние. Это дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(\psi_n + \beta_n) \right] = -\frac{\varphi_0 \omega}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} n \delta_n \cos(\psi_n + \beta_n) = \\ &= -I(t) + I_0 = -I_0 \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \sin \psi_n, \quad \psi_n = n\omega t + \alpha_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\delta_n \cos \beta_n = 0, \quad \delta_n \sin \beta_n = -\frac{4\pi a I_0}{n \varphi_0 \omega} \epsilon_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\epsilon_n}{n \alpha_0} \quad (90,24)$$

[последнее получается, если воспользоваться формулами (90,21) и (90,16)]. С другой стороны, общие формулы (90,20) и (90,22) дают, при $z \rightarrow \infty$, если сохранить лишь члены порядка $1/z$:

$$R(n\alpha_0) = -\frac{4}{3n\alpha_0}, \quad S(n\alpha_0) = 0,$$

что полностью совпадает с только что полученным результатом.

90. 7. Нетрудно доказать, что $z^4 R(z)$ — непрерывно возрастающая по абсолютной величине функция своего аргумента,¹ в то время,

¹ Ибо $\frac{d^2}{dz^2} [z^4 R(z)] = -8z(1 - \cos z) \leq 0$ и $\left\{ \frac{d}{dz} [z^4 R(z)] \right\}_{z=0} = 0$, так что, при $z \geq 0$, $\frac{d}{dz} [z^4 R(z)] \leq 0$.

как $S(z)$ имеет „колебательный“ характер, обращаясь в нуль при значениях z , являющихся корнями одного из уравнений

$$\sin\left(\frac{z}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right). \quad (90,25')$$

Таким образом, активная компонента импеданца плоского диода становится отрицательной в определенных частотных интервалах.

Интересно отметить, что, при тех значениях $z = z_s$, которые удовлетворяют второму из указанных уравнений, $R(z)$ принимает значение $R(z_s) = -\frac{4}{3z_s}$, так что, как показывает сравнение с второй формулой (90,24), через прибор при этом идет полный ток, равный тому току смещения, который проходил бы через него при полном отсутствии в нем объемного заряда. Приводим пять первых корней уравнения $\operatorname{tg} u = u : u_0 = 0, u_1 = 4.4934, u_2 = 7.7253, u_3 = 10.9041, u_4 = 14.0662$. Дальнейшие идут, приблизительно, через π .

§ 91. Цилиндрический диод

Постановка задачи

91.1. Переходим теперь к рассмотрению явлений в цилиндрическом диоде.

Вводим обозначения:

r_k — радиус катода;

r_a — радиус анода;

r — расстояние некоторой точки внутри диода до его оси;

I — абсолютная величина полного тока (суммы тока смещения и тока проводимости) на единицу длины оси диода;

φ — потенциал в некоторой точке внутри его относительно катода;

$\tau(r, t)$ — время вылета из катода электронов, находящихся в точке с координатой r в момент t .

Тогда, пренебрегая временем распространения волны от одной обкладки до другой и предполагая, что в каждой точке находятся в любой момент только электроны одной скорости, получаем, подобно тому, как это было в плоском случае, следующие уравнения для определения поля:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} = 4\pi\rho, \quad (91,1)$$

$$2\pi r \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} + \rho v \right) = -I, \quad (91,2)$$

$$m\ddot{r} = -eE, \quad (91,3)$$

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad (91,4)$$

$$(E)_{r=r_k} = 0, \quad (91,5)$$

$$(\varphi)_{r=r_k} = 0. \quad (91,6)$$

Обозначая, как раньше, через $\frac{d}{dt}$ полную производную по времени, получаем:¹

$$\frac{d}{dt}(rE) = r \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial (rE)}{\partial r} = 4\pi r \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + v\rho \right) = -2I, \quad (91,7)$$

а интегрируя это от момента τ вылета электрона до t , находим, что

$$E = - \frac{2 \int_{\tau}^t I(u) du}{r}. \quad (91,8)$$

Это выражение для электрической силы можно написать еще в другой форме. Именно, интегрируя уравнение (91,1) по r от r_k до r и используя уравнение (91,5), получим:

$$E = \frac{4\pi}{r} \int_{r_k}^r \rho r dr = \frac{2Q}{r}, \quad (91,9)$$

где $Q = \int_{r_k}^r 2\pi r \rho dr$ — объемный заряд, находящийся в диоде внутри цилиндра радиуса r . Сравнение формул (91,8) и (91,9) показывает, что

$$Q_{t, \tau} = - \int_{\tau}^t I(u) du,$$

причем под $Q_{t, \tau}$ подразумевается заряд внутри того цилиндра, на поверхности которого находится в момент t электрон, вышедший из катода в момент τ . Отсюда видно, что, при условии, что полный ток I не меняет своего направления, всегда будет, при $\tau_2 > \tau_1$:

$$|Q_{t, \tau_1}| > |Q_{t, \tau_2}|,$$

т. е. для позднее вылетевшего электрона действующий на него заряд меньше (по абсолютной величине), чем для вылетевшего раньше. Но так как объемный заряд имеет повсеместно одинаковый знак, то меньшему заряду соответствует и меньшее расстояние до оси, т. е. тем самым показано, что, при $I(t) \geq 0$, ни один электрон не может обогнать ранее вышедшие, а потому при этом в каждой точке находятся электроны только одной скорости. Стало быть, при выполнении этого условия, все наши формулы будут справедливы.

¹ Ибо для всякой функции $f = f(r, t)$, где r — в свою очередь, функция от t , находим:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_r + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_t \frac{dr}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_r + v \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_t$$

(значок у производной, как всегда, показывает, которая из переменных считается постоянной при соответствующем дифференцировании).

Применяя эту формулу к функции $f(r, t) = rE = rE(r, t)$, получим (91,7).

В дальнейшем будем всегда предполагать, что это условие выполнено. Тогда (91,3) и (91,8) дают для электрона, вылетевшего из катода в момент $t = \tau$:

$$m\ddot{r} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = 2e \cdot \frac{\int_{\tau}^t I(u) du}{r}, \quad (91,10)$$

причем к этому уравнению должны быть присоединены начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} (r)_{t=\tau} &= r_k, \\ (\dot{r})_{t=\tau} &= \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=\tau} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (91,11)$$

Если бы было возможно проинтегрировать в общем виде уравнение (91,10) при условиях (91,11) и при произвольном виде функции $I(t)$, то можно было бы, действуя подобно тому, как делалось в п. п. 90.4 и 90.5, искать, исходя из такого решения, ту форму функции $I(t)$, которая соответствует некоторому заданному виду зависимости анодного напряжения $\varphi_a = \varphi_a(t)$ от времени. Но так как до настоящего времени не удалось проинтегрировать эти уравнения в конечном виде даже в том простейшем случае, когда I не зависит от времени (случай Лангмюра), то тем более трудно ожидать, чтобы это удалось сделать при изменяющемся со временем $I = I(t)$. Мы ограничимся, поэтому, исследованием случая, когда приложенное на аноде напряжение φ_a состоит из постоянной части φ_0 , на которую налагается малое по сравнению с ней добавочное переменное напряжение.

Поскольку вызываемые таким добавочным напряжением электрические поля в диоде будут малы по сравнению с основными, возникающими под действием постоянной составляющей φ_0 анодного напряжения, можно рассматривать их влияние на движение электронов в диоде как некоторое малое возмущение движения, вызываемого одним только постоянным напряжением φ_0 , и рассматривать координату электрона в некоторый момент t как сумму той координаты r^0 , которую этот же электрон имел бы в тот же момент при отсутствии переменной составляющей поля, и малой по сравнению с ней добавки u („возмущения“). Уравнение движения электрона может быть при этом разложено в ряд по степеням малых количеств и линеаризовано, причем задача о нахождении возмущенного движения сводится к решению одного или ряда линейных уравнений¹ с переменными коэффициентами.

Перед тем, как перейти к получению и интегрированию этих уравнений, рассмотрим в более общем виде вопрос о влиянии введения малых добавочных членов („возмущающих сил“) в дифференциальные

¹ Одного уравнения, если требуется найти лишь первое приближение, и больше одного — в остальных случаях.

уравнения на интегралы этих уравнений и докажем несколько теорем, которые окажутся нам полезными в дальнейшем. В частности, покажем, что возможно указать ряд классов случаев, в которых интегрирование уравнений возмущенного движения может быть сведено просто к квадратурам, если известно невозмущенное движение,¹ — результат, который допускает, очевидно, широкое использование как в высокочастотной электронике и в теории более общих нестационарных процессов, так и в различных других вопросах.

§ 92. Некоторые теоремы, касающиеся нахождения возмущенных движений

92.1. Основная задача теории возмущений, которой мы будем здесь заниматься, может быть сформулирована следующим образом: пусть известно движение материальной точки или системы точек под действием некоторой заданной системы сил, причем заданы начальные значения координат и скоростей составляющих систему точек. Требуется определить, как изменится это движение в том случае, если к первоначально действовавшим на систему силам прибавляются некоторые новые, малые по сравнению с первичными, причем движение под действием этих измененных сил начинается с того же начального состояния, как невозмущенное.

Добавленные силы будем называть возмущающими, а вызванное ими движение — возмущенным. Все величины, относящиеся к невозмущенному движению, будем, в отличие от соответствующих возмущенных, снабжать ноликом сверху справа, так что, например, ξ^0 и $\dot{\xi}^0$ будут обозначать координаты и скорости невозмущенного движения, а ξ и $\dot{\xi}$ — те же величины в возмущенном.

Заметим, что в теории возмущений приходится встречаться с двумя несколько различными типами проблем, из которых одни требуют определения возмущенного движения для неограниченных промежутков времени, тогда как другие — лишь для конечных. К первым относятся, например, вопросы устойчивости движения, ко вторым — очень многие вопросы технической физики, в частности, как раз те вопросы теории быстро-переменных процессов в электронных приборах, в которых приходится сталкиваться с движением электронов, подвергающихся воздействию поля в течение времени их пролета через прибор. В частности, если при этом напряжение, под действием которого они движутся, состоит из постоянной части и малой по сравнению с ней переменной, — как раз тот случай, который мы собирались исследовать выше, — то мы имеем типичную задачу второго рода. При этом совпадают и начальные условия для невозмущенного и воз-

¹ Г. А. Гринберг, ДАН, XXV, № 1, 22, 1939.

мушенного движений, и можно искать решение для координат (обобщенных) возмущенного движения в форме $\xi_i = \xi_i^0 + u_i$, где ξ_i^0 соответствуют невозмущенному движению, а u_i , при достаточной малости возмущающих сил, сколь угодно малы за все время (конечное) движения.

Ниже мы излагаем некоторые теоремы, относящиеся к решению, в основном, задач второго рода. Тем не менее, многое из сказанного там может быть перенесено почти без изменений и на проблемы первой группы.

92.2. Начнем с рассмотрения простейшего случая системы с одной степенью свободы, характеризуемой обобщенной координатой ξ .

Пусть уравнение невозмущенного движения имеет вид

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2} = \ddot{\xi}^0 = f(\xi^0, \dot{\xi}^0), \quad (92,1)$$

а возмущенного

$$\ddot{\xi} = f(\xi, \dot{\xi}) + \varepsilon\psi(\xi, \dot{\xi}, t), \quad (92,2)$$

причем функция $f(\xi, \dot{\xi})$ от времени явно не зависит, а ε — малый параметр.

Начальные условия для обоих движений считаем одинаковыми, именно

$$(\xi^0)_{t=0} = \xi_0^0; \quad (\dot{\xi}^0)_{t=0} = \dot{\xi}_0^0, \quad (92,3)$$

и

$$(\xi)_{t=0} = \xi_0^0; \quad (\dot{\xi})_{t=0} = \dot{\xi}_0^0. \quad (92,4)$$

Полагая

$$\xi = \xi^0 + u, \quad (92,5)$$

где u — малая величина порядка ε , и подставляя это в (92,1), получим:

$$\ddot{\xi}^0 + \ddot{u} = f(\xi^0 + u, \dot{\xi}^0 + \dot{u}) + \varepsilon\psi(\xi^0 + u, \dot{\xi}^0 + \dot{u}, t). \quad (92,6)$$

Разлагая справа по степеням малых величин u и \dot{u} и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно ε , найдем, учитывая (92,1):

$$\ddot{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 u + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{u} + \varepsilon\psi(\xi^0, \dot{\xi}^0, t), \quad (92,7)$$

причем значок (0) у производных означает, что, после выполнения дифференцирований, в них нужно положить $u=0$ и $\dot{u}=0$.

Начальные условия для u имеют вид

$$(u)_{t=0} = 0, \quad (\dot{u})_{t=0} = 0. \quad (92,8)$$

(92,7) — это неоднородное линейное уравнение с переменными коэффициентами. Тем не менее, оно сразу интегрируется в квадратурах, если известно решение уравнения (92,1) невозмущенного движения, ибо, как нетрудно видеть, величина $v = \dot{\xi}^0$ является частным решением соответствующего однородного уравнения, т. е.

$$\ddot{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{v} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 v. \quad (92,9)$$

Обстоятельство это, в котором можно убедиться и непосредственно, дифференцируя по времени уравнение (92,1), связано с тем, что уравнение это, в котором время не фигурирует в явной форме, допускает простую однопараметрическую группу преобразований, не изменяющих его формы. Именно, если $\xi^0 = \varphi(t)$ есть решение его, то и $\xi_1 = \varphi(t + \alpha)$, где α — произвольная постоянная, есть тоже решение его. Считая α бесконечно-малой и разлагая ξ_1 в ряд по степеням α , как раз и убеждаемся в том, что $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\alpha=0} = \dot{\xi}^0$ должно быть решением уравнения (92,9), ибо, подставляя значение

$$\xi_1 = \varphi(t + \alpha) = \varphi(t) + \alpha \varphi'(t) + O(\alpha^2) = \xi^0 + \alpha \dot{\xi}^0 + O(\alpha^2)$$

в уравнение

$$\ddot{\xi}_1 = f(\xi_1, \dot{\xi}_1),$$

которому удовлетворяет ξ_1 , получим, так же, как при выводе уравнения (92,7):

$$\ddot{\xi}^0 + \alpha \ddot{\xi}^0 + O(\alpha^2) = f(\xi^0, \dot{\xi}^0) + \alpha \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 \dot{\xi}^0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \ddot{\xi}^0 \right] + O(\alpha^2), \quad (92,10)$$

что, при учете уравнения (92,1), дает, при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\ddot{\xi}^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 \dot{\xi}^0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \ddot{\xi}^0,$$

т. е. действительно уравнение (92,9).

Поскольку известно частное решение $v_1 = \dot{\xi}^0$ уравнения (92,9), постольку находится, с помощью хорошо известных приемов, и его общий интеграл, а стало быть и общий интеграл неоднородного уравнения (92,7) (например, варьированием произвольных постоянных). Именно, обозначая через v_2 какое-нибудь второе частное решение уравнения (92,9), а через Δ — вронсиан, составленный из v_1 и v_2 , т. е.

$$\Delta = \Delta(t) = v_2 \dot{v}_1 - \dot{v}_2 v_1 = \Delta(0) \cdot \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 dt \right\}, \quad (92,11)$$

¹ Если v_1 и v_2 — два решения уравнения (92,9), так что

$$\ddot{v}_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{v}_1, \quad (a)$$

и

$$\ddot{v}_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 v_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{v}_2, \quad (б)$$

то, умножая (а) на v_2 , а (б) — на v_1 и вычитая второй результат из первого, найдем, пользуясь обозначением $\Delta = \dot{v}_1 v_2 - \dot{v}_2 v_1$:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \Delta,$$

откуда сразу получается (92,11). Из (92,11) можно выразить в явной форме и само v_2 через v_1 . Именно, переписываем (92,11) таким образом:

$$\frac{-\dot{v}_1 v_2 + \dot{v}_2 v_1}{v_1^2} = \frac{d(v_2/v_1)}{dt} = -\frac{\Delta(0)}{v_1^2} \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 dt \right\},$$

легко получим решение уравнения (92,7), удовлетворяющее нулевым начальным условиям (92,8):

$$u = \varepsilon \int_0^t [v_1(t) v_2(\tau) - v_2(t) v_1(\tau)] \frac{X(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau, \quad (92,12)$$

причем

$$X(\tau) = \{\psi(\xi^0, \dot{\xi}^0, t)\}_{t=\tau}.$$

92.3. Мы ограничились рассмотрением первого приближения. Нетрудно, однако, видеть, что если функции $f(\xi, \dot{\xi})$ и $\psi(\xi, \dot{\xi}, t)$ удовлетворяют известным условиям, при которых решение u — голоморфная функция от ε , то и более высокие приближения приводятся к квадратурам. В самом деле, задавая u в форме ряда по степеням ε , т. е. полагая

$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varepsilon^k$, и подставляя $\xi = \xi^0 + u = \xi^0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varepsilon^k$ в (92,2), найдем, приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени ε :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{u}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 u_1 + \psi(\xi^0, \dot{\xi}^0, t), \dots, \ddot{u}_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{u}_k + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 u_k + F_k, \dots, \end{aligned} \quad (92,13)$$

где в F_k входят лишь функции u_s при $s < k$. Поэтому, для всех u_k получается одно и то же линейное уравнение, только с различной правой частью, зависящей лишь от предыдущих приближений, а потому интегрирование его выполняется в квадратурах при любом k совершенно так же, как в п. 92.2.

Примечание. Из доказанной теоремы следует, что, если правая часть невозмущенного уравнения зависит только от самой координаты ξ^0 , но не от скорости $\dot{\xi}^0$, то уравнения для всех u_k интегрируются в квадратурах.

В самом деле, уравнение невозмущенного движения имеет при этом такой вид:

$$\ddot{\xi}^0 = f(\xi^0). \quad (92,14)$$

Умножая на $2\dot{\xi}^0 dt$ и интегрируя по времени, получим первый интеграл его, именно:

$$\dot{\xi}_0^2 = 2 \int f(\xi^0) d\xi^0 + C, \quad (92,15)$$

где C — постоянная. Извлекая квадратный корень и интегрируя второй раз по t , находим:

$$\pm \int \frac{d\xi^0}{\sqrt{2 \int f(\xi^0) d\xi^0 + C}} = t + C', \quad (92,16)$$

где C' — вторая постоянная.

откуда получается:

$$v_2 = -\Delta(0) v_1 \int \frac{\exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 dt \right\}}{v_1^2} dt. \quad (в)$$

Так как уравнения (92,15) и (92,16) вместе с начальными условиями полностью определяют зависимость ξ^0 от t , то известна при этом и величина $v = \dot{\xi}^0 = \frac{d\xi^0}{dt} = v(t)$, являющаяся частным интегралом уравнения (92,9). Но мы видели, что раз известно $v = \dot{\xi}^0$, то все уравнения для $u_k, k=1, 2, \dots$, интегрируются в квадратурах, что и утверждалось выше.

92.4. П р и м е р. Уравнение движения электрона в цилиндрическом диоде, под действием постоянного напряжения φ_0 и при условии, что можно пренебречь объемным зарядом, приводится к виду

$$\ddot{\xi}^0 = 1/\xi^0 \quad (92,17)$$

и интегрируется в квадратурах. Если на φ_0 наложено малое по сравнению с ним переменное, то уравнение движения обращается в

$$\ddot{\xi} = [1 + \varepsilon\psi(t)]/\xi, \quad (92,18)$$

где $|\varepsilon\psi(t)| \ll 1$. Уравнение (92,9) для v будет $\ddot{v} = -v/(\xi^0)^2$, и так как ему удовлетворяет $v = \dot{\xi}^0$, то возмущенное движение немедленно найдется в квадратурах.

92.5. Если дано более общее уравнение

$$\ddot{\xi} = f(\xi, \dot{\xi}, t) + \varepsilon\psi(\xi, \dot{\xi}, t), \quad (92,19)$$

где f уже зависит от времени явно, то интегрирование уравнений для возмущений u_k различных порядков, имеющих опять вид (92,13), может быть выполнено, если известна однопараметрическая группа преобра-

¹ При допущении, что временем распространения электромагнитных волн через диод можно пренебречь, поле E внутри диода находится просто по формуле

$$E = \frac{2Q}{r}, \quad (a)$$

где Q — заряд, приходящийся на единицу длины катода, связанный с мгновенным значением $\varphi_a = \varphi_a(t)$ анодного напряжения и со статической емкостью $C = \frac{1}{2lg} \frac{r_a}{r_k}$

диода (на единицу длины оси) соотношением:

$$Q = -\varphi_a C = -\frac{\varphi_a}{2lg} \frac{r_a}{r_k}. \quad (b)$$

Уравнение движения электрона в диоде приобретает, при этих условиях, такой вид:

$$\ddot{r} = -\frac{eE}{m} = \frac{e}{mg} \left(\frac{r_a}{r_k} \right) \cdot \frac{\varphi_a(t)}{r},$$

что, при $\varphi_a = \varphi_0$, или при $\varphi_a(t) = \varphi_0[1 + \varepsilon\psi(t)]$ и при замене r на $\xi = r/\alpha$, где $\alpha = \left[\frac{e}{mg r_a r_k} \right]^{1/2}$, переходит как раз в (92,17) и (92,18) соответственно.

зований, не изменяющих форму уравнения невозмущенного движения, т. е. уравнения

$$\ddot{\xi}^0 = \frac{d^2 \xi^0}{dt^2} = f\left(\xi^0, \frac{d\xi^0}{dt}, t\right). \quad (92,20)$$

Действительно, пусть $\xi' = \chi_1(\xi^0, t, \alpha)$ и $t' = \chi_2(\xi^0, t, \alpha)$, где χ_1 и χ_2 — некоторые функции, а α — параметр, — это другая пара принадлежащих группе переменных,² в которых уравнение (92,20) после преобразования сохраняет свой вид, так что выполняется соотношение:

$$\frac{d^2 \xi'}{dt'^2} = f\left(\xi', \frac{d\xi'}{dt'}, t'\right). \quad (92,21)$$

Тогда ясно, что если

$$\xi^0 = F(t) \quad (92,22)$$

— интеграл уравнения (92,20), то $\xi' = F(t')$ будет интегралом уравнения (92,21).

Если теперь в соотношение $\xi' = F(t')$ подставить, вместо ξ' и t' , их выражения через ξ^0 , t и α , то получившееся соотношение будет, очевидно, удовлетворять уравнению (92,20).

Разрешая это соотношение относительно ξ^0 , получим тот же интеграл уравнения (92,20) в такой форме:

$$\xi^0 = \Psi(t, \alpha), \quad (92,23)$$

причем этот интеграл, при некотором частном значении $\alpha = \alpha_0$ входящего в него параметра, вновь даст исходный интеграл (92,22), так что

$$\xi^0 = \Psi(t, \alpha_0) = F(t). \quad (92,24)$$

Полагая теперь в (92,24) $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$, где $\delta\alpha$ — бесконечно-мало, подставляя это значение $\xi^0 = \Psi(t, \alpha_0 + \delta\alpha)$ в (92,20), разлагая получившееся выражение по степеням $\delta\alpha$ и учитывая уравнение (92,24), непосредственно видим, что величина

$$v = \left(\frac{\partial \xi^0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} \quad (92,25)$$

¹ Наличие такой группы означает, что существуют две такие функциональные зависимости $F_1(\xi^0, t, \xi', t', \alpha) = 0$ и $F_2(\xi^0, t, \xi', t', \alpha) = 0$ между двумя парами величин (ξ^0, t) и (ξ', t') и параметром α , могущим непрерывно изменяться в некоторых пределах, что если в уравнении (92,20) произвести замену переменных ξ^0 и t соответственно на ξ' и t' , то преобразованное уравнение будет иметь в новых переменных тот же вид, как в исходных, т. е.

$$\frac{d^2 \xi'}{dt'^2} = f\left(\xi', \frac{d\xi'}{dt'}, t'\right).$$

² Для простоты, считаем уравнения связи между старыми и новыми переменными разрешенными относительно последних. Очевидно, что все наши рассуждения остаются в силе и в том случае, если этого предположения не делать.

является частным решением однородного уравнения

$$\ddot{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_0 \dot{v} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_0 v, \quad (92,26)$$

соответствующего уравнению возмущенного движения.¹

Тем самым порядок любого из линейных уравнений (92,13) может быть понижен на единицу, и интегрирование их выполняется в квадратурах.

Примечание. Если интеграл уравнения (92,20) дан не в форме (92,24), а в виде соотношения

$$M(\xi^0, t, \alpha) = 0, \quad (92,27)$$

определяющего ξ^0 как неявную функцию от t и α , то частное решение уравнения (92,26), имеющее вид (92,25), т. е.

$$v = \left(\frac{\partial \xi^0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha = \alpha_0},$$

получается из (92,27) в виде

$$v = - \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right) \\ \left(\frac{\partial M}{\partial \xi^0} \right) \end{array} \right\}_{\alpha = \alpha_0}. \quad (92,28)$$

92.6. Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\xi} = \frac{t + \varepsilon \psi(t)}{\xi^n}, \quad n = \text{const.}, \quad (92,29)$$

которым при $n=1$ определяется движение электронов в цилиндрическом, а при $n=2$ — в сферическом диоде, когда ток ограничен объемным зарядом,² а анодное напряжение состоит из постоянной части φ_0 и малой по сравнению с ней быстропеременной, причем функция $\psi(t)$ зависит от вида приложенного переменного напряжения.

¹ Это доказательство, очевидно, в точности аналогично данному в п. 92.2 доказательству справедливости того, что $\dot{\xi}^0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\alpha=0}$ является решением уравнения (92,9).

² Для цилиндрического диода это сразу получается из уравнения (91,10), в котором надо положить

$$I(t) = I_0 [1 + \varepsilon \chi(t)], \quad (a)$$

где $I_0 = \text{const.}$, и принять момент вылета τ за начальный, т. е. положить $\tau = 0$. Подставляя (a) в (91,10), найдем:

$$m\ddot{r} = 2eI_0 \cdot \frac{t + \varepsilon \int_0^t \chi(u) du}{r},$$

что, при введении вместо r новой функции $\xi = \left(\frac{m}{2eI_0} \right)^{1/2} r$, приводится к виду (92,29) с $n=1$.

Для сферического случая нетрудно вывести уравнение, аналогичное (91,10) [тем же способом как (91,10)], но с r^2 вместо r в знаменателе, и, таким образом, опять прийти к (92,29), но уже с $n=2$.

Уравнение невозмущенного движения, т. е.

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2} = \frac{t}{\xi^0 n}, \quad (92,30)$$

допускает однопараметрическую группу преобразований требуемого типа, именно

$$\left. \begin{aligned} \xi^0 &= \alpha \xi', \\ \alpha &\neq 0, \\ t &= \alpha^{\frac{n+1}{3}} t'. \end{aligned} \right\} \quad (92,32)$$

Действительно, вводя новые переменные в (92,30), убедимся в том, что преобразованное к ним уравнение имеет опять вид

$$\frac{d^2\xi'}{dt'^2} = \frac{t'}{\xi' n}, \quad (92,31)$$

не отличающийся от прежнего, и это при любых значениях параметра α .

Поэтому, если $\xi^0 = \varphi(t)$ — решение уравнения (92,30) невозмущенного движения, удовлетворяющее начальным условиям задачи, то и $\xi' = \varphi(t')$, т. е. $\xi^0 = \alpha \varphi \left[t \alpha^{-\frac{n+1}{3}} \right]$ — тоже решение уравнения (92,30) которое, при $\alpha = \alpha_0 = 1$, переходит в исходное. Стало быть, согласно сказанному выше, функция

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{\partial \xi^0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha \varphi \left(t \alpha^{-\frac{n+1}{3}} \right) \right] \right\}_{\alpha=1} = \varphi(t) - \frac{n+1}{3} t \varphi'(t) = \\ &= \xi^0 - \frac{n+1}{3} t \dot{\xi}^0 \end{aligned} \quad (92,33)$$

является решением однородного уравнения, соответствующего уравнению возмущенного движения, чем задача о сведении решения уравнений возмущенного движения к решению уравнения невозмущенного и решается.

92.7. Подчеркиваем, что в п. п. 92.2—92.3 и 92.5 речь идет об использовании для нахождения возмущенного движения *частных решений уравнений невозмущенного движения, соответствующих совершенно определенным начальным условиям и не заключающих каких-либо произвольных постоянных*. Поэтому здесь могут быть, например, использованы даже решения для невозмущенного движения, найденные численным интегрированием для одной пары начальных условий.

92.8. Теоремы п. п. 92.2—92.3 и 92.5 очевидным образом обобщаются на системы с любым числом степеней свободы, на чем мы здесь останавливаться не будем.

92.9. В предшествующих разделах речь шла везде лишь об использовании, для нахождения возмущенного движения, одного частного решения уравнений невозмущенного движения, и не предполагалось знание какого-либо интеграла их, заключающего произвольные постоянные. Если такой интеграл известен, то он, естественно может быть использован и для нахождения возмущенного движения, особенно в сое-

движении с методом п. п. 92.2 — 92.3 и 92.5. Именно, если уравнения движения приведены к виду $\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \varepsilon \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, ($k=1, 2, \dots, n$), и если имеется интеграл уравнений невозмущенного движения $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C$, не содержащий иных произвольных постоянных, кроме C , то величина

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial F}{\partial t}$$

обращается в нуль тождественно, если в нее подставить значения x_k из уравнений движения, в которых нужно при этом положить $\varepsilon = 0$. В случае же возмущенного движения получаем, с помощью тех же уравнений, но уже при $\varepsilon \neq 0$:

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \frac{\partial F}{\partial x_k}. \quad (92,34)$$

Если ограничиться первым приближением (распространение результатов на более высокие приближения не представляет труда), то отсюда получается, если принять во внимание, что начальные условия для возмущенного и невозмущенного движений одни и те же:

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C + \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^t \psi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, t) \frac{\partial F}{\partial x_k} dt, \quad (92,35)$$

причем C имеет прежнее значение. Пользуясь подобными соотношениями для каждого известного интеграла невозмущенного движения, можем исключить ряд переменных и дойти, при случае, до возможности использования результатов п. п. 92.2 — 92.5, даже если бы известных интегралов было недостаточно для полного решения задачи только с их помощью.

92. 10. В заключение отметим следующее. Если для системы уравнений *невозмущенного движения* п. 92. 9 известны n независимых интегралов рассмотренного там типа, т. е. $F_i(x_1, \dots, x_n, t) = C_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), то, составляя для них соотношения (92,35) и разлагая левые части в ряды по степеням u_k , найдем, например, для первого приближения n соотношений вида

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_0 u_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^t \psi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, t) \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dt, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

откуда найдутся все u_k , ибо определитель этой системы не равен нулю, как функциональный определитель системы независимых интегралов. Сходные соображения распространяются и на высшие приближения, которые находятся аналогичным способом.

§ 93. Цилиндрический диод

Нахождение возмущенного движения

93. 1. Пользуясь полученными в предыдущем параграфе результатами, можем теперь выразить решение уравнения (91,10) движения электрона в случае наличия, наряду с постоянной составляющей анодного напряжения, также малой переменной части, через стационарное решение, соответствующее отсутствию этой последней. Все решение может быть при этом выражено через функцию β^2 Лангмюра.

Чтобы это показать, рассмотрим решение уравнения (91,10) для стационарного режима, когда $I(t) = \text{const.} = I_0$.

Обозначая расстояние, пройденное при этом к моменту t электроном, вышедшим из катода в момент τ , через r^0 (невозмущенное движение!), получаем для него уравнение

$$mr^{\ddot{0}} = 2e \frac{\int_{\tau}^t I_0 d\xi}{r^0} = \frac{2e I_0 (t - \tau)}{r^0} \quad (93,1)$$

и начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} (r^0)_{t=\tau} &= r_k, \\ (\dot{r}^0)_{t=\tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (93,2)$$

Решение уравнения (93,1) может быть следующим образом выражено через введенную и изученную в § 87 функцию β^2 Лангмюра. Именно, вводя обозначение

$$r^0/r_k = \xi^0, \quad (93,3)$$

находим, прежде всего, из формулы (87,5), примененной к нашему случаю:

$$\varphi = \left[\frac{9 I_0 r_k}{2\sqrt{2}} \left(\frac{m}{e} \right)^{1/2} \right]^{2/3} \cdot (\xi^0 \beta^2)^{2/3}. \quad (93,4)$$

Так как, кроме того, имеем еще соотношения:

$$mr^{\ddot{0}} = \frac{2e I_0 (t - \tau)}{r^0} = e \frac{d\varphi}{dr} = \frac{e}{r_k} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi^0},$$

то отсюда и из (93,4) получаем:

$$\left(\frac{2e I_0}{mr_k^2} \right)^{1/3} (t - \tau) = \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\xi^0}{\beta} \right)^{2/3} \cdot \frac{d(\xi^0 \beta^2)}{d\xi^0} = z, \quad (93,5)$$

причем введено сокращенное обозначение:

$$z = \left(\frac{2e I_0}{mr_k^2} \right)^{1/3} \cdot (t - \tau). \quad (93,6)$$

Уравнение (93,1), будучи преобразовано к переменным (ξ^0, z) , приобретает простой вид:

$$\frac{d^2 \xi^0}{dz^2} = \frac{z}{\xi^0}, \quad (93,7)$$

а начальные условия (93,2) переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} (\xi^0)_{z=0} &= 1, \\ \left(\frac{d\xi^0}{dz} \right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (93,8)$$

Формула (93,5) и дает решение уравнения (93,7) при начальных условиях (93,8). С помощью ее можно построить кривую зависимости z от ξ . Для этого требуется, однако, знание не только функции $\beta^2 = \beta^2(\xi^0)$, но и $\frac{d(\beta^2)}{d\xi^0}$. В приведенной в § 87 таблице II даны значения $\frac{d\beta}{d\xi} = \xi^0 \frac{d\beta}{d\xi^0}$ для значений ($3 \leq \gamma \leq 10,5$), т. е. от $20 < \xi^0$ до $\xi^0 < 20\,000$. Для меньших ξ^0 значения $\frac{d\beta}{d\xi^0}$ могут быть вычислены с помощью указанного в § 87 ряда для β , или, если не требуется большой точности, то возможно непосредственно получить их значения из таблиц для β^2 , пользуясь разностями.

Можно также, — и этот путь для относительно небольших значений z является наиболее удобным, — находить искомые значения функции $\xi^0 = \xi^0(z)$ непосредственно численным интегрированием уравнения (93,7) при начальных условиях (93,8). Этот способ имеет еще то преимущество, что получаемые таким путем значения ξ^0 соответствуют равноотстоящим значениям независимой переменной z , чего не будет при использовании таблиц § 87 для β^2 .

Таким путем вычислены¹ даваемые ниже² в таблице I значения ξ^0 для значений z в интервале от $z=0$ до $z=7.5$. При этом от $z=0$ до $z=6$ значения ξ^0 даны через одну десятую, а в интервале от $z=6$ до $z=7.5$ — через $\Delta z=0.5$. Кривая рис. 155 иллюстрирует ход соответствующей зависимости. Сверх того, в таблице II даны, вычисленные из данных для β^2 , значения z в функции от ξ^0 (с несколько меньшей, однако, чем в таблице I, точностью) для $1 \leq \xi^0 \leq 10\,000$, чему соответствуют пределы $0 \leq z \leq 421$. Эти таблицы и кривая рис. 155 дают нам и зависимость r^0 от z , т. е., в конечном счете, от $(t-\tau)$.

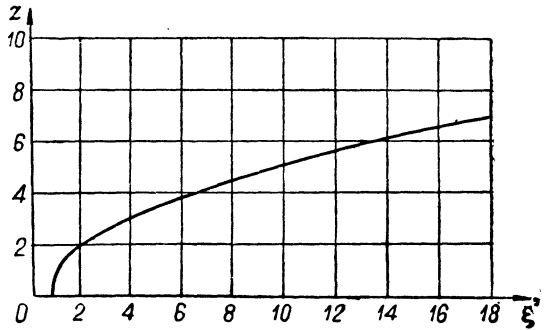


Рис. 155.

Задача о решении уравнения движения (93,7) электрона при начальных условиях (93,8) в цилиндрическом диоде при токе, ограниченном объемным зарядом, и решавшаяся в § 87 задача о нахождении распределения потенциала в таком диоде, сведенная там к решению уравнения (87,2) при условиях (87,3), или, что то же, к интегрированию уравнения (87,7) для функции β^2 при условиях (87,8) и (87,12), математически вполне друг другу эквивалентны.

В самом деле, как было только что показано, зная функцию β^2 в зависимости от ξ^0 , мы получаем, с помощью формулы (93,5), также зависимость z от ξ^0 , или, что то же, зависимость ξ^0 от z , т. е. как раз решение уравнений (93,7), (93,8).

Нетрудно показать, что и обратно, зная решение $\xi^0 = \xi^0(z)$, или $z = z(\xi^0)$ уравнений (93,7), (93,8), можно из него сразу найти простым дифференцированием

¹ По методу Адамса—Штёрмера.

² На стр. 602.

³ То же на стр. 602.

потенциал в любой точке диода, или, что сводится к тому же, функцию $\beta^2 = \beta^2(\xi^0)$. Действительно, из уравнения живых сил для движущегося в диоде электрона получаем:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = e\varphi, \quad (93, 9)$$

где φ — измеренный по отношению к катоду потенциал в точке r диода.

Так как, согласно (93, 3) и (93, 6), имеем:

$$\dot{r}^0 = \frac{dr^0}{dt} = \left(\frac{2eI_0 r_k}{m} \right)^{1/3} \frac{d\xi^0}{dz},$$

то

$$\varphi = \left(\frac{mI_0^2 r_k^2}{2e} \right)^{1/3} \left(\frac{d\xi^0}{dz} \right)^2 = \left(\frac{mI_0^2 r_k^2}{2e} \right)^{1/3} \cdot \frac{1}{|z'(\xi^0)|^2}, \quad (93, 10)$$

что и дает искомое соотношение. Если подставить это в формулу (87, 5), то получится:

$$\beta^2 = \frac{2}{9\xi^0} \left(\frac{d\xi^0}{dz} \right)^3 = \frac{2}{9\xi^0 [z'(\xi^0)]^3}. \quad (93, 11)$$

Таким образом, видим, что все решение задачи о прохождении через цилиндрический диод стационарного тока, ограниченного объемным зарядом, может быть сведено к решению относительно простого уравнения (93, 7) при условиях (93, 8), причем распределение потенциала в диоде весьма несложным образом выражается через это решение с помощью формулы (93, 10). Характер функции $\xi^0(z)$ проще, чем характер $\beta^2(\xi^0)$, поскольку $\xi^0(z)$ — монотонно растущая функция своего аргумента с монотонно же растущей производной, тогда как $\beta^2(\xi)$ имеет заметно более сложный ход (ср., например, таблицы I и II § 87 для β^2 и $\frac{d\beta}{d\xi} = \xi^0 \frac{d\beta}{d\xi^0}$). Это обстоятельство, а также то, что величины, которыми определяется прохождение нестационарных токов через цилиндрический диод, совершенно непосредственно связаны именно с функцией $\xi^0(z)$, и лишь относительно сложным образом — с $\beta^2(\xi^0)$, заставляет, при изучении нестационарных процессов, избрать за основную функцию именно $\xi^0(z)$, а не $\beta^2(\xi^0)$. В связи с этим, мы, несмотря на наличие данных выше таблиц для $\beta^2(\xi^0)$, вычислили и даем в тексте таблицы для $\xi^0(z)$, в частности, полученную численным интегрированием таблицу I на стр. 602.

93. 2. Будем теперь предполагать, что на постоянное напряжение φ_0 , приложенное на аноде, налагается весьма малое по сравнению с ним быстро-переменное любого вида, так что

$$\varphi = \varphi_0 [1 + \varepsilon\psi(t)], \quad (93, 12)$$

где $\psi(t)$ — какая-либо функция времени, ε — малый параметр и $|\varepsilon\psi(t)| \ll 1$ в течение всей изучаемой нами части процесса.

Соответственно этому, проходящий через прибор полный ток $I(t)$ можно тоже представить в аналогичной форме:

$$I(t) = I_0 [1 + \delta(t)], \quad (93, 13)$$

где I_0 — постоянная величина, а $\delta(t)$ — малая величина порядка ε .

Подставляя это значение $I(t)$ в уравнение (91, 10), получим:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = 2eI_0 \frac{\left[(t - \tau) + \int_{\tau}^t \delta(u) du \right]}{r}. \quad (93, 14)$$

Полагая здесь, по аналогии с (93, 3),

$$r/r_k = \xi \quad (93, 15)$$

и вводя, вместо t , в качестве независимой переменной величину z из уравнения (93, 6), приведем уравнение (93, 14) к такому виду:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{z + \frac{1}{\alpha} \int_{\tau}^{t=\alpha z + \tau} \delta(\eta) d\eta}{\xi}, \quad \alpha = \left(\frac{mr_k^2}{2el_0} \right)^{1/3}, \quad (93, 16)$$

что, при введении обозначения

$$f(t, \tau) = \frac{1}{\alpha} \int_{\tau}^t \delta(u) du, \quad (93, 17)$$

принимает вид:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{z + f(\alpha z + \tau, \tau)}{\xi}. \quad (93, 18)$$

Так как в момент выхода электрона из катода, т. е. при $t = \tau$, должно быть $r = r_k$ и $\frac{dr}{dt} = 0$, то начальные условия для уравнения (93, 18) будут

$$\left. \begin{aligned} (\xi)_{z=0} &= 1; \\ \left(\frac{d\xi}{dz} \right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (93, 19)$$

При $\delta(t) = 0$, т. е. для стационарного режима, это переходит в уравнение (93, 7) для ξ^0 . Если $\delta(t)$ не равно нулю, но является весьма малой величиной, то, полагая, в соответствии с изложенными в § 92 общими принципами,

$$\xi = \xi^0 + u, \quad (93, 20)$$

где u — малое возмущение, разлагая по степеням u и ограничиваясь первым приближением; получим:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{d^2\xi^0}{dz^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{z + f(\alpha z + \tau, \tau)}{\xi^0 \left(1 + \frac{u}{\xi^0} \right)} = \frac{z}{\xi^0} - \frac{zu}{\xi^0{}^2} + \frac{f(\alpha z + \tau, \tau)}{\xi^0},$$

т. е., учитывая (93, 7):

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{z}{\xi^0{}^2} u = \frac{f(\alpha z + \tau, \tau)}{\xi^0}. \quad (93, 21)$$

Это и есть уравнение (92, 13) для данной конкретной задачи. Его надо проинтегрировать при начальных условиях

$$(u)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{dz} \right)_{z=0} = 0, \quad (93, 22)$$

вытекающих из (93, 20) при учете уравнений (93, 19) и (93, 8).

93. 3. Начинаем с решения однородного уравнения, т. е.

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{z}{\xi^0{}^2} u = 0. \quad (93, 23)$$

Так как уравнение невозмущенного движения, т. е.

$$\frac{d^2 \xi^0}{dz^2} = \frac{z}{\xi^0},$$

относится к рассмотренному в п. 92.6 типу, именно, это уравнение вида (92, 30), допускающее однопараметрическую группу преобразований типа (92, 31), где надо положить $n=1$, то решение уравнения (93, 23), как было там показано, дается формулой (92, 33) при $n=1$, т. е.

$$u = \bar{u} = \xi^0 - \frac{2}{3} z \frac{d\xi^0}{dz}. \quad (93, 24)$$

Это дает один частный интеграл уравнения (93, 23), который, таким образом, выражается через уже изученную и табулированную функцию $\xi^0(z)$. Чтобы найти второй, линейно-независимый от него, частный интеграл того же уравнения, достаточно вспомнить, что всякое решение уравнения (93, 23) может быть найдено, если известно частное решение его \bar{u} . Именно, как известно:

$$u = \left[c_1 + c_2 \int_0^z \frac{dz}{u^2} \right] \bar{u}, \quad (93, 25)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. При $c_1=0$, $c_2=1$, получается, в частности:

$$u = \bar{u}(z) \cdot \int_0^z \frac{d\xi}{[\bar{u}(\xi)]^2}. \quad (93, 26)$$

Обозначим это решение через u_1 , а решение (93, 24) — через u_2 . Легко видеть, что они линейно-независимы, ибо u_2 удовлетворяет начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} (u_2)_{z=0} &= u_2(0) = 1, \\ \left(\frac{du_2}{dz} \right)_{z=0} &= u_2'(0) = \left(\frac{1}{3} \frac{d\xi^0}{dz} - \frac{2}{3} z \frac{d^2 \xi^0}{dz^2} \right)_{z=0} = -\frac{2}{3} \left(\frac{z^2}{\xi^0} \right)_{z=0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (93, 27)$$

причем использовано уравнение (93, 7), тогда как для u_1 получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_1(0) &= 0, \\ u_1'(0) &= \left(\frac{du_1}{dz} \right)_{z=0} = \frac{1}{u_2(0)} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (93, 28)$$

Итак, u_1 и u_2 образуют пару независимых частных решений уравнения (93, 23), и вронскиан $\Delta = u_1' u_2 - u_1 u_2'$ этой пары решений равен единице.¹

Пользуясь формулой (93, 11), можем переписать u_2 еще в такой форме:

$$u_2 = \xi^0 \left[1 - z \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{\beta}{\xi^0} \right)^{2/3} \right], \quad (93, 29)$$

¹ Ибо определитель этот равен постоянной [ср. (92, 11)], значение которой сразу определяется, если в Δ подставить из (93, 27) и (93, 28) значения u_1 и u_2 и их производных при $z=0$.

т. е., с помощью (93, 5):

$$u_2 = \xi^0 \left[1 - \frac{d(\xi^{0,93})}{d\xi^0} \right] = \xi^0 \left[1 - \beta^3 - \frac{d(\gamma^3)}{a_1} \right], \quad \gamma = \lg \xi^0. \quad (93, 30)$$

Итак, u_2 выражается непосредственно через функцию β^3 . Выражение u_1 через β^3 значительно сложнее, как показывает формула (93, 26).

Формулы (93, 24) и (93, 26) могут служить для вычисления функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$ по уже известным значениям функции $\xi^0(z)$. Можно также и непосредственно составлять таблицы значений $u_1(z)$ и $u_2(z)$ с помощью численного интегрирования уравнения (93, 23) при начальных условиях $u_1(0) = 0, u_1'(0) = 1$ для $u_1(z)$, и при начальных условиях $u_2(0) = 0, u_2'(0) = 0$ — для $u_2(z)$.

Необходимые значения $\xi^0 = \xi^0(z)$ при $0 \leq z \leq 7.5$ берутся при этом из второго столбца таблицы I на стр. 602. Вычисленные таким образом значения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ даны в третьем и четвертом столбцах таблицы I для $0 \leq z \leq 7.5$, через одну десятую в интервале $0 \leq z \leq 6$ и через $\Delta z = 0.5$ для $6 \leq z \leq 7.5$. В пятом и шестом столбцах той же таблицы приведены также значения функций

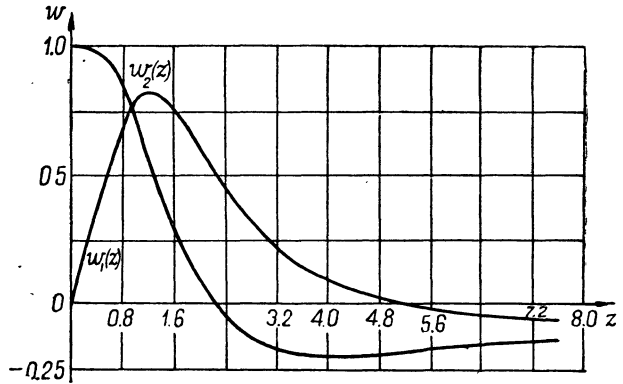


Рис. 156.

приведены также значения функций

$$w_1(z) = \frac{u_1(z)}{\xi^0}, \quad w_2(z) = \frac{u_2(z)}{\xi^0}, \quad (93, 31)$$

которые, как мы увидим ниже, играют фундаментальную роль в решении рассматриваемой здесь задачи. Зависимость w_1 и w_2 от z иллюстрируется графиками рис. 156.

Отметим еще, что для больших значений z уравнение (93, 23) приводится, с достаточной степенью точности, к более простому, интеграл которого выражается через элементарные функции, именно:

$$u = z^{1/2} \left[A \cos \left(\frac{\lg z}{\sqrt{2}} \right) + B \sin \left(\frac{\lg z}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (93, 32)$$

В самом деле, для больших значений ξ^0 , которым соответствуют большие значения z , функция β^3 практически обращается в единицу, а $\xi^0 \frac{d\beta^3}{d\xi^0} = \frac{d\beta^3}{d\gamma} = 0$ — в нуль.¹ Формула (93, 5) переходит поэтому в такую:

$$\left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \xi^{0,2/3} = z, \quad (93, 33)$$

¹ Ср. таблицу II на стр. 543.

Таблица I

z	ξ^0	$u_1(z)$	$u_2(z)$	$w_1(z)$	$w_2(z)$	z	ξ^0	$u_1(z)$	$u_2(z)$	$w_1(z)$	$w_2(z)$
0.0	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	3.1	4.22	1.01	-0.66	0.239	-0.156
0.1	1.0002	0.1000	0.9998	0.1000	0.9998	3.2	4.46	0.97	-0.74	0.217	-0.166
0.2	1.0013	0.1999	0.9987	0.1997	0.9977	3.3	4.70	0.93	-0.81	0.198	-0.172
0.3	1.0045	0.2993	0.9955	0.2978	0.9905	3.4	4.96	0.89	-0.88	0.179	-0.177
0.4	1.0107	0.3978	0.9893	0.3935	0.9785	3.5	5.22	0.85	-0.95	0.163	-0.182
0.5	1.0208	0.4947	0.9792	0.4845	0.9591	3.6	5.48	0.80	-1.01		
0.6	1.0358	0.5892	0.9644	0.5687	0.9309	3.7	5.76	0.76	-1.08		
0.7	1.0566	0.6804	0.9442	0.6437	0.8933	3.8	6.04	0.71	-1.15		
0.8	1.0840	0.7673	0.9180	0.7079	0.8469	3.9	6.33	0.66	-1.21		
0.9	1.1188	0.8490	0.8885	0.7587	0.7913	4.0	6.62	0.61	-1.27	0.092	-0.192
1.0	1.1617	0.9246	0.8467	0.7957	0.7287	4.1	6.92	0.57	-1.34		
1.1	1.2131	0.9934	0.802	0.8190	0.661	4.2	7.22	0.52	-1.40		
1.2	1.274	1.055	0.751	0.8281	0.589	4.3	7.53	0.47	-1.46		
1.3	1.344	1.109	0.694	0.8251	0.516	4.4	7.85	0.42	-1.52		
1.4	1.423	1.154	0.632	0.8110	0.444	4.5	8.17	0.37	-1.57	0.045	-0.192
1.5	1.513	1.192	0.566	0.7878	0.374	4.6	8.50	0.32	-1.63		
1.6	1.612	1.222	0.497	0.758	0.308	4.7	8.83	0.27	-1.69		
1.7	1.721	1.244	0.424	0.723	0.246	4.8	9.17	0.21	-1.74		
1.8	1.841	1.259	0.349	0.684	0.190	4.9	9.51	0.16	-1.79		
1.9	1.970	1.267	0.271	0.643	0.138	5.0	9.86	0.11	-1.84	0.011	-0.186
2.0	2.108	1.269	0.193	0.602	0.091	5.1	10.2	0.06	-1.90		
2.1	2.26	1.27	0.11	0.562	0.049	5.2	10.6	0.01	-1.95		
2.2	2.41	1.26	0.03	0.523	0.013	5.3	10.9	-0.04	-2.00		
2.3	2.58	1.24	-0.05	0.481	-0.019	5.4	11.3	-0.09	-2.05		
2.4	2.76	1.23	-0.13	0.446	-0.047	5.5	11.7	-0.14	-2.09	-0.012	-0.179
2.5	2.94	1.20	-0.20	0.408	-0.068	5.6	12.1				
2.6	3.13	1.18	-0.28	0.377	-0.089	5.7	12.4				
2.7	3.33	1.15	-0.36	0.345	-0.108	5.8	12.8				
2.8	3.54	1.12	-0.44	0.316	-0.124	5.9	13.2				
2.9	3.76	1.09	-0.51	0.290	-0.136	6.0	13.6	-0.40	-2.32	-0.029	-0.171
3.0	3.98	1.05	-0.59	0.264	-0.148	6.5	15.7	-0.65	-2.53	-0.041	-0.161
						7.0	17.8	-0.89	-2.72	-0.050	-0.153
						7.5	20.1	-1.14	-2.89	-0.057	-0.144

а уравнение (93, 23) — в $\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{3}{4z^2}u = 0$. Интеграл этого уравнения как раз и имеет вид (93, 32), где A и B — произвольные постоянные. Это позволяет ограничиться, при составлении таблиц значений u_1 и u_2

Таблица II

ξ^0	z	ξ^0	z
1.00	0.000	6.00	3.77
1.10	0.848	10.00	5.03
1.20	1.08	18.00	7.04
1.40	1.35	30.00	9.46
1.60	1.59	50.00	13.0
2.00	1.90	100.0	20.2
2.50	2.22	500.0	58.1
3.00	2.52	1000.00	91.5
4.00	3.00	10000.00	421.0

посредством численного интегрирования уравнения, умеренными значениями z . Для больших значений z можно исходить из формулы (93, 32), как из первого приближения, пользуясь для его улучшения в случае, если это требуется, обычным процессом последовательных приближений по методу Пикара.

93. 4. Переходим к интегрированию уравнения (93, 21). Общий интеграл его, получаемый из общего интеграла одно-

родного уравнения варьированием произвольных постоянных, выражается через функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ следующим образом:

$$u(z) = \int_{\xi=0}^{\xi=z} \left[u_1(z) u_2(\xi) - u_2(z) u_1(\xi) \right] \frac{f(\alpha\xi + \tau, \tau)}{\xi^0(\xi)} d\xi + c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z).$$

Легко видеть, что $c_1 = c_2 = 0$. Действительно, для $t = \tau$ имеем начальные условия: $u(0) = u'(0) = 0$, а так как наше решение дает $u(0) = c_2$, $u'(0) = c_1$, то отсюда и следует справедливость нашего утверждения.

Вводя в рассмотрение функцию

$$\theta(z) = \frac{u(z)}{\xi^0(z)} = \int_{\xi=0}^{\xi=z} [w_1(z) w_2(\xi) - w_2(z) w_1(\xi)] f(\alpha\xi + \tau, \tau) d\xi, \quad (93, 34)$$

причем использованы формулы (93, 31), можем написать, учитывая (93, 15) и (93, 20):

$$\begin{aligned} r &= r_k \xi^0 (1 + \theta) = \\ &= r_k \xi^0 \left[1 + \int_0^z [w_1(z) w_2(\xi) - w_2(z) w_1(\xi)] f(\alpha\xi + \tau, \tau) d\xi \right], \quad (93, 35) \end{aligned}$$

где, согласно (93, 17),

$$f(\alpha\xi + \tau, \tau) = \frac{1}{\alpha} \int_{\tau}^{\alpha\xi + \tau} \delta(u) du. \quad (93, 36)$$

Формула (93, 35) решает вопрос о нахождении возмущенного движения электрона.

93.5. От полученного решения для r нетрудно перейти к выражению для потенциала φ внутри диода. Для этого нужно воспользоваться формулой

$$\varphi = - \int_{r_k}^r E dr = \int_{\tau(r, t)}^t E \frac{\partial r}{\partial \tau} d\tau, \quad (93, 37)$$

подобно тому, как это делалось в плоском случае.¹ Отсюда, в свою очередь, может быть вычислено и комплексное сопротивление (импеданс) диода, определяющее амплитуду и фазу высокочастотного тока, проходящего через диод под действием относительно малого высокочастотного напряжения, налагающегося на большое по сравнению с ним постоянное.

Основная трудность заключается при этом в том, что решение нестационарной задачи выражается непосредственно не через приложенное анодное напряжение, а через проходящий через прибор пол-

¹ Замена независимой переменной r на τ под знаком интеграла в (93, 37) допустима, ибо, как было показано выше, r при $I(t) \geq 0$ является монотонной функцией от τ .

ный ток $I(t)$, который сперва неизвестен и который может быть найден лишь впоследствии путем сравнения выраженного через него анодного напряжения с приложенным в действительности.¹ Это вычисление, которое, вообще говоря,² оказывается весьма сложным, облегчается значительно в том случае, когда переменная компонента напряжения является синусоидальной функцией времени заданной частоты ω , ибо тогда, если только амплитуда переменного напряжения достаточно мала по сравнению с постоянной его частью, проходящий через прибор полный ток тоже состоит из независимой от времени части, на которую налагается переменная, чисто синусоидальная компонента той же частоты ω .³

Рассмотрением этого случая мы и займемся в следующем параграфе.

§ 94. Вычисление импеданца цилиндрического диода, ток в котором ограничен объемным зарядом

94.1. Переходим к вычислению импеданца цилиндрического диода. Обозначим через

$$I(t) = I_0(1 + \varepsilon \sin \omega t) \quad (94,1)$$

полный ток, протекающий через диод на единицу длины оси, и примем, что ε — столь малая величина, что всеми получаемыми в процессе вычисления количествами порядка ε^2 и выше можно пренебрегать.

Тогда можно прямо использовать полученные в предыдущем параграфе результаты, в частности, формулу (93,34) для $\theta(z)$, причем теперь следует положить, как показывает сравнение формул (93,13) и (94,1) и формула (93,17):

$$f(t, \tau) = \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{\tau}^t \sin \omega u du = \frac{\varepsilon}{\alpha \omega} (\cos \omega \tau - \cos \omega t). \quad (94,2)$$

Если ввести сокращенное обозначение:

$$\omega(z, \varsigma) = \omega_1(z) \omega_2(\varsigma) - \omega_1(\varsigma) \omega_2(z), \quad (94,3)$$

то выражение для θ можно переписать следующим образом:

$$\theta = \int_0^z \omega(z, \varsigma) f(\alpha \varsigma + \tau, \tau) d\varsigma, \quad (\tau = \text{const.}) \quad (94,4)$$

Кроме того, формула (91,8) приобретает, при введении в нее значения (94,1) тока $I(t)$ и при учете формул (93,5), (94,2) и значения α из (93,16), следующий вид:

$$-Er = 2\alpha I_0 [z + f(t, \tau)]. \quad (94,5)$$

¹ Это же имело место и в плоском случае. Ср. п. 90.5.

² Т. е. для произвольной формы приложенного напряжения.

³ Это справедливо лишь постольку, поскольку можно пренебречь членами, содержащими квадраты и высшие степени амплитуды переменного напряжения.

Формулы (94,4) и (94,5) служат исходным пунктом при вычислении импеданса.

94.2. Разность потенциалов φ_a между анодом и катодом равна:

$$\varphi_a = - \int_{r_k}^{r_a} E dr = \int_{r_k}^{r_a} (-Er) \frac{dr}{r}. \quad (94,6)$$

Здесь, как уже указывалось, в качестве переменной интегрирования можно, вместо r , ввести τ , ибо, при $\varepsilon < 1$ и при постоянном t , r является монотонной функцией от τ .

Пределам интегрирования $r=r_k$ и $r=r_a$ соответствуют при этом, очевидно, пределы $\tau(r_k, t)=t$ и $\tau(r_a, t)=t-T_a$, где T_a — время, затраченное на пробег от катода до анода электронов, достигающих анода в момент t ;¹ следовательно,

$$\varphi_a = \int_{\tau=t}^{\tau=t-T_a} (-Er) \frac{\partial(\lg r)}{\partial \tau} d\tau. \quad (94,7)$$

Величина $(-Er)$ определяется формулой (94,5). Что касается $\frac{\partial}{\partial \tau}(\lg r)$, то, в силу формулы (93,35), имеет место соотношение:²

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\lg r) = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \lg(1+\theta) = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau},$$

последнее в том случае, если отбросить члены, содержащие вторую и высшие степени ε^2 .

Подставляя это в (94,6), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= 2\alpha I_0 \int_t^{t-T_a} [z + f(t, \tau)] \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) d\tau = \\ &= 2\alpha I_0 \left\{ \int_t^{t-T_a} \frac{z}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} d\tau + \int_t^{t-T_a} \frac{f(t, \tau)}{\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tau} d\tau + \int_t^{t-T_a} z \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau \right\}, \quad (94,8) \end{aligned}$$

причем член порядка ε^2 вновь опускается.

Ввиду того, что ξ зависит только от $z = \frac{t-\tau}{a}$, находим при неизменном t :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{1}{a} \frac{d\xi}{dz} = -\frac{\xi'}{a}, \quad d\tau = -a dz,$$

а заменяя интегрирование по τ в (94,8) интегрированием по z , получаем:

$$\varphi_a = 2\alpha I_0 \left\{ \int_0^{z_a} \frac{z}{\xi} \xi' dz + \int_0^{z_a} f(t, t-\alpha z) \frac{\xi'}{\xi} dz + \int_{z=0}^{z=z_a} z d\theta \right\}, \quad (94,9)$$

где

$$z_a = T_a/a.$$

¹ T_a — функция времени.

² Мы отбрасываем при этом здесь и во всяком дальнейшем изложении значок (0) у ξ^0 , заменяя его просто через ξ , поскольку никакое иное ξ нам в этом параграфе больше не встретится.

Полагаем $T_a = T_a^0 + \Delta T_a$, причем T_a^0 означает время пробега электрона от катода до анода при отсутствии переменной компоненты напряжения (ΔT_a — величина порядка ε). Если ввести соответствующее обозначение $z_a = z_a^0 + \Delta z_a$, то получается, с точностью до величин порядка ε^2 :

$$\int_0^{z_a} z \frac{\xi'}{\xi} dz + \int_0^{z_a} z d\theta = \int_0^{z_a^0} z \frac{\xi'}{\xi} dz + \\ + \left\{ z_a \left(\frac{\xi'}{\xi} \right)_{z=z_a} \Delta z_a + z_a(\theta)_{z=z_a} \right\} - \int_0^{z_a^0} \theta dz. \quad (94,10)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение в фигурных скобках обращается в нуль. В самом деле, z_a находится из того условия, что, при данном t , должно быть $(r)_{z=z_a} = r_a$, что, вместе с формулой $r = r_k \xi (1 + \theta)$, дает:

$$[\xi (1 + \theta)]_{z=z_a} = \frac{r_a}{r_k} = (\xi)_{z=z_a^0},$$

откуда с требуемой степенью точности следует:

$$(\xi)_{z=z_a} - (\xi)_{z=z_a^0} = (\xi')_{z=z_a} \Delta z_a = -(\xi)_{z=z_a} (\theta)_{z=z_a},$$

т. е.

$$\left(\frac{\xi'}{\xi} \right)_{z=z_a} \Delta z_a + (\theta)_{z=z_a} = 0,$$

что и требовалось доказать. Если еще отметить, что первый интеграл из стоящих справа в формуле (94,10) непосредственно вычисляется с помощью формулы (93,7), именно:

$$\int_0^{z_a} z \frac{\xi'}{\xi} dz = \int_0^{z_a} \xi'' \xi' dz = \frac{1}{2} (\xi'^2)_{z=z_a^0}, \quad (94,11)$$

то (94,9) получает такой вид:

$$\varphi_a = \alpha I_0 (\xi'^2)_{z=z_a^0} + 2\alpha I_0 \left\{ \int_0^{z_a^0} f(t, t - az) \frac{\xi'}{\xi} dz - \int_0^{z_a^0} \theta dz \right\}. \quad (94,12)$$

Здесь $\alpha I_0 (\xi'^2)_{z=z_a^0} = \varphi_0$ это не зависящая от времени часть напряжения. Второй член в (94,12) дает, как будет видно ниже, синусоидальную часть его.

Вводя обозначение $\varphi_a - \varphi_0 = \delta\varphi$, получаем из (94,12), если воспользоваться значением θ из (94,4), куда для τ вновь следует подставить значение $\tau = t - az$:

$$\delta\varphi = 2\alpha I_0 \left\{ \int_0^{z_a^0} f(t, t - az) \frac{\xi'}{\xi} dz - \right. \\ \left. - \int_0^{z_a^0} dz \int_0^z w(z, \varsigma) f[t - a(z - \varsigma), t - az] d\varsigma \right\}. \quad (94,13)$$

Из легко доказуемого тождества¹

$$\frac{\xi'}{\xi} = \int_0^z w(z, \epsilon) d\epsilon \quad (94,14)$$

и формулы (94,13) следует:

$$\delta\varphi = 2\alpha I_0 \int_0^{z_a^0} dz \int_0^z w(z, \epsilon) \{f(t, t - \alpha z) - f[t - \alpha(z - \epsilon), t - \alpha z]\} d\epsilon. \quad (94,15)$$

Формула (94,2) дает:

$$\left. \begin{aligned} f(t, t - \alpha z) - f[t - \alpha(z - \epsilon), t - \alpha z] &= \frac{\epsilon}{t - \alpha(z - \epsilon)} \int_{t - \alpha(z - \epsilon)}^t \sin \omega \eta d\eta = \\ &= \epsilon \int_0^{z - \epsilon} \sin \omega(t - \alpha\psi) d\psi^2 = \epsilon \Pi(z - \epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (94,16)$$

где последнее обозначение введено для сокращения. (94,15) принимает теперь такой вид:

$$\delta\varphi = 2\alpha\epsilon I_0 \int_0^{z_a^0} dz \int_0^z w(z, \epsilon) \Pi(z - \epsilon) d\epsilon. \quad (94,17)$$

Область интегрирования в плоскости (z, ϵ) представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник OAB (рис. 157) с $OA = AB = z_a^0$.

¹ Всякое решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{zu}{\xi^2} = \psi(z)$$

[$\psi(z)$ — произвольная функция от z], соответствующее начальным условиям $(u)_z=0 = (u')_z=0 = 0$, может быть представлено в виде:

$$u = \int_0^z [u_1(z) u_2(\epsilon) - u_1(\epsilon) u_2(z)] \psi(\epsilon) d\epsilon$$

(ср. п. 93. 4).

С другой стороны, с помощью уравнения (93,7) непосредственно убеждаемся в том что, при $\psi(z) = 1/\xi(z)$, соответствующим решением является $u = \xi' = \frac{d\xi}{dz}$. Следовательно:

$$\xi' = \int_0^z [u_1(z) u_2(\epsilon) - u_1(\epsilon) u_2(z)] \frac{d\epsilon}{\xi(\epsilon)}.$$

Если разделить это на ξ и учесть, что $w_1 = \frac{u_1}{\xi}$, $w_2 = \frac{u_2}{\xi}$, то получается:

$$\frac{\xi'}{\xi} = \int_0^z [w_1(z) w_2(\epsilon) - w_1(\epsilon) w_2(z)] d\epsilon,$$

что и требовалось доказать.

² Здесь $\psi = \frac{t - \eta}{\alpha}$.

Если интегрирование производить в ином порядке, чем в формуле (94,17), а именно, сначала интегрировать вдоль полоски MN ширины $d\nu$, на которой функция $\Pi(z-\zeta) = \Pi(\nu)$ не меняется (рис. 157), причем получается значение:

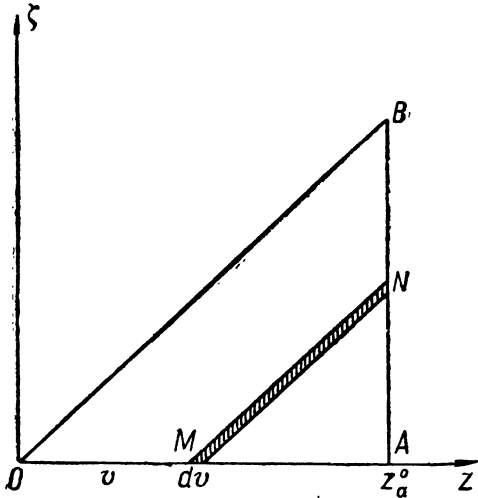


Рис. 157.

$$\begin{aligned} \Pi(\nu) \frac{d\nu}{\sqrt{2}} \int_0^{z_a^0 - \nu} w(\nu + \zeta, \zeta) (\sqrt{2} d\zeta) = \\ = \Pi(\nu) d\nu \int_0^{z_a^0 - \nu} w(\nu + \zeta, \zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

а потом суммировать полученные для отдельных полосок результаты, т. е. интегрировать по ν в пределах $(0, z_a^0)$, то выражение для $\delta\varphi$ принимает такой вид:

$$\delta\varphi = 2\alpha\epsilon I_0 \int_0^{z_a^0} \Pi(\nu) d\nu \int_0^{z_a^0 - \nu} w(\nu + \zeta, \zeta) d\zeta, \quad (94,18)$$

Но так как, согласно (94,16),

$$\Pi(\nu) = \int_0^\nu \sin \omega(t - \alpha\psi) d\psi = \sin \omega t \frac{\sin \alpha\omega\nu}{\alpha\omega} + \cos \omega t \frac{\cos \alpha\omega\nu - 1}{\alpha\omega},$$

то (94,18) приобретает, при введении обозначения

$$A(\nu, z) = \int_0^{z - \nu} w(\nu + \zeta, \zeta) d\zeta, \quad (94,19)$$

следующую окончательную форму:

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi = \frac{2\epsilon I_0}{\omega} \left[\sin \omega t \int_0^{z_a^0} A(\nu, z_a^0) \sin \alpha\omega\nu d\nu - \right. \\ \left. - \cos \omega t \int_0^{z_a^0} A(\nu, z_a^0) (1 - \cos \alpha\omega\nu) d\nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (94,20)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} M(z, p) &= \int_0^z A(\nu, z) \sin p\nu d\nu, \\ N(z, p) &= \int_0^z A(\nu, z) (1 - \cos p\nu) d\nu, \end{aligned} \right\} \quad (94,21)$$

можем переписать (94,20) в такой форме:

$$\delta\varphi = \frac{2\varepsilon I_0}{\omega} \left[M(z_a^0, \alpha\omega) \sin \omega t - N(z_a^0, \alpha\omega) \cos \omega t \right] = \frac{2\varepsilon I_0}{\omega} D \sin(\omega t - \beta), \quad (94,22)$$

где

$$D = \sqrt{M^2(z_a^0, \alpha\omega) + N^2(z_a^0, \alpha\omega)}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{N(z_a^0, \alpha\omega)}{M(z_a^0, \alpha\omega)}. \quad (94,23)$$

Следовательно, общее анодное напряжение равняется:

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 + \varepsilon \frac{2I_0 D}{\varphi_0 \omega} \sin(\omega t - \beta) \right\}. \quad (94,24)$$

Применяя полученное выше соотношение:

$$\varphi_0 = (\alpha \xi'^2)_{z=z_a^0} I_0 = R_{\text{ст.}} I_0, \quad (94,25)$$

где $R_{\text{ст.}}$ — статическое сопротивление диода, получаем из (94,24):

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 + \varepsilon \frac{2D}{\omega R_{\text{ст.}}} \sin(\omega t - \beta) \right\}. \quad (94,26)$$

Если представить переменные части тока и напряжения в комплексной форме, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} \delta I &= I_0 \varepsilon e^{i\omega t}, \\ \delta \varphi &= \frac{2\varepsilon I_0}{\omega} D e^{i(\omega t - \beta)}, \end{aligned} \right\} \quad (94,27)$$

то для комплексного сопротивления \bar{Z} диода получается значение:

$$\bar{Z} = \frac{\delta \varphi}{\delta I} = \frac{2D}{\omega} e^{-i\beta}, \quad (94,28)$$

или, что то же:

$$\bar{Z} = \frac{2D}{\omega} (\cos \beta - i \sin \beta) = \frac{2M}{\omega} - i \frac{2N}{\omega} = r + ix. \quad (94,29)$$

Это выражение и дает окончательное решение поставленной задачи.

94.3. Прежде чем перейти к более подробному исследованию формулы (94,29), разберем сначала ее предельный случай при $r_k/r_a \rightarrow 0$ (исчезающе-тонкий катод). При этом можно воспользоваться асимптотическим решением (93,32), (93,33), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2}{\sqrt{3}} z^{3/2}, \\ u_1 &= \sqrt[4]{2} z^{1/2} \sin\left(\frac{\lg z}{\sqrt{2}}\right), \quad u_2 = \sqrt[4]{2} z^{1/2} \cos\left(\frac{\lg z}{\sqrt{2}}\right), \\ w_1(z) &= \frac{u_1}{\xi} = \frac{3^{1/2}}{2^{3/4}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \sin\left(\frac{\lg z}{\sqrt{2}}\right), \\ w_2(z) &= \frac{u_2}{\xi} = \frac{3^{1/2}}{2^{3/4}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \cos\left(\frac{\lg z}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (94,30)$$

¹ Множитель $\sqrt[4]{2}$ введен для того, чтобы стало $\Delta = u_2 u_1' - u_1 u_2' = 1$, что необходимо для справедливости формулы (94,4), которая, как нетрудно видеть, верна вообще

Для нахождения импеданца, проще всего исходить непосредственно из формулы (94,13), в которой мы интеграл

$$\int_0^z w(z, \varsigma) f[t - \alpha(z - \varsigma), t - \alpha z] d\varsigma \quad (94,31)$$

преобразуем сперва путем интегрирования по частям. Именно, имеем:

$$w(z, \varsigma) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{z\varsigma} \cdot \sin \left[\frac{\lg \frac{z}{\varsigma}}{\sqrt{2}} \right]. \quad (94,32)$$

Следовательно,

$$\int w(z, \varsigma) d\varsigma = \frac{3}{2z} \cos \left[\frac{\lg \frac{z}{\varsigma}}{\sqrt{2}} \right], \quad (94,33)$$

так что

$$\begin{aligned} \int_0^z w(z, \varsigma) f[t - \alpha(z - \varsigma), t - \alpha z] d\varsigma &= \frac{3}{2z} f(t, t - \alpha z) - \\ &- \frac{3\alpha}{2z} \int_0^z \sin \omega [t - \alpha(z - \varsigma)] \cos \left[\frac{\lg \frac{z}{\varsigma}}{\sqrt{2}} \right] d\varsigma, \end{aligned} \quad (94,34)$$

причем использовано (94,2). Внося это в (94,13), получаем из-за $\frac{\xi'}{\xi} = \frac{3}{2z}$:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= 3\alpha\varepsilon I_0 \left\{ \sin \omega t \int_0^{z_0} \frac{dz}{z} \int_0^z \cos \left(\frac{\lg \frac{z}{\varsigma}}{\sqrt{2}} \right) \cos \alpha\omega(z - \varsigma) d\varsigma - \right. \\ &\left. - \cos \omega t \int_0^{z_0} \frac{dz}{z} \int_0^z \cos \left(\frac{\lg \frac{z}{\varsigma}}{\sqrt{2}} \right) \sin \alpha\omega(z - \varsigma) d\varsigma \right\}. \end{aligned} \quad (94,35)$$

Введем, вместо ς , новую независимую переменную соотношением:

$$\eta = \frac{\lg \frac{z}{\varsigma}}{\sqrt{2}}.$$

при любом выборе пары частных решений u_1 и u_2 , при том единственном условии, что $\Delta = 1$, а не только тогда, когда u_1 и u_2 удовлетворяют начальным условиям вида (93,27) и (93,28). Данное асимптотическое решение становится, правда, непригодным вблизи от $z = 0$. Однако, нетрудно убедиться, путем выполнения точного предельного перехода, что получаемая при посредстве его формула (94,38) строго верна в предельном случае бесконечно-тонкого катода.

Интегралы в (94,35) превращаются в такие:

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_a^0} \frac{dz}{z} \int_0^z \cos \left(\frac{\lg \frac{z}{\zeta}}{\sqrt{2}} \right) \cos \alpha \omega (z - \zeta) d\zeta = \\ & = \sqrt{2} \int_0^{z_a^0} dz \int_0^\infty e^{-V\sqrt{2}\eta} \cos \alpha \omega z (1 - e^{-V\sqrt{2}\eta}) \cos \eta d\eta = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \omega} \int_0^\infty \frac{\sin [\alpha \omega z_a^0 (1 - e^{-V\sqrt{2}\eta})] \cos \eta d\eta}{e^{V\sqrt{2}\eta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \omega} P(\alpha \omega z_a^0), \end{aligned} \quad (94,36)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_a^0} \frac{dz}{z} \int_0^z \cos \left(\frac{\lg \frac{z}{\zeta}}{\sqrt{2}} \right) \sin \alpha \omega (z - \zeta) d\zeta = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \omega} \int_0^\infty \frac{\{1 - \cos [\alpha \omega z_a^0 (1 - e^{-V\sqrt{2}\eta})]\} \cos \eta d\eta}{e^{V\sqrt{2}\eta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \omega} Q(\alpha \omega z_a^0), \end{aligned} \quad (94,37)$$

и (94,35) принимает окончательно такую форму:

$$\delta \varphi = \frac{3\sqrt{2}\epsilon I_0}{\omega} [P(\alpha \omega z_a^0) \sin \omega t - Q(\alpha \omega z_a^0) \cos \omega t], \quad (94,38)$$

где $P(\tau)$ и $Q(\tau)$ — определяемые формулами (94,36) и (94,37) однопараметрические функции. При этом $\alpha z_a^0 = T_a^0$, следовательно, $\alpha \omega z_a^0 = \omega T_a^0$.

Разлагая подинтегральные функции в формулах (94,36) и (94,37) в ряды по степеням $\alpha \omega z_a^0 = \omega T_a^0$, получаем:

$$P(\omega T_a^0) = \sqrt{2} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(\omega T_a^0)^{2s+1}}{(2s+1)!} \sum_{k=0}^{k=2s} (-1)^k (2s)_k \frac{(k+1)}{2(k+1)^2+1}, \quad (94,39)$$

$$Q(\omega T_a^0) = \sqrt{2} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(\omega T_a^0)^{2s}}{(2s)!} \sum_{k=0}^{k=2s-1} (-1)^k (2s-1)_k \frac{(k+1)}{2(k+1)^2+1}, \quad (94,40)$$

где $(r)_k = \frac{r!}{k!(r-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Если ωT_a^0 — весьма малая величина ($\omega T_a^0 \rightarrow 0$, квазистационарный режим), то из (94,39) и (94,40) вытекает, что

$$\left(\frac{P(\alpha \omega z_a^0)}{\alpha \omega z_a^0} \right)_{\omega T_a^0 \rightarrow 0} \rightarrow \int_0^\infty e^{-V\sqrt{2}\eta} \cos \eta d\eta = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

и

$$\left(\frac{Q(\alpha \omega z_a^0)}{\alpha \omega z_a^0} \right)_{\omega T_a^0 \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Получается, стало быть:

$$\delta \varphi = 2\epsilon \alpha z_a^0 I_0 \sin \omega t, \quad (94,41)$$

что, как нетрудно заметить, соответствует лангмюровскому решению для случая очень тонкого катода.

Для доказательства следует обратиться к справедливому и в данном случае соотношению (94,25):

$$\varphi_0 = \alpha (\xi'^3)_z - z_a^n I_0,$$

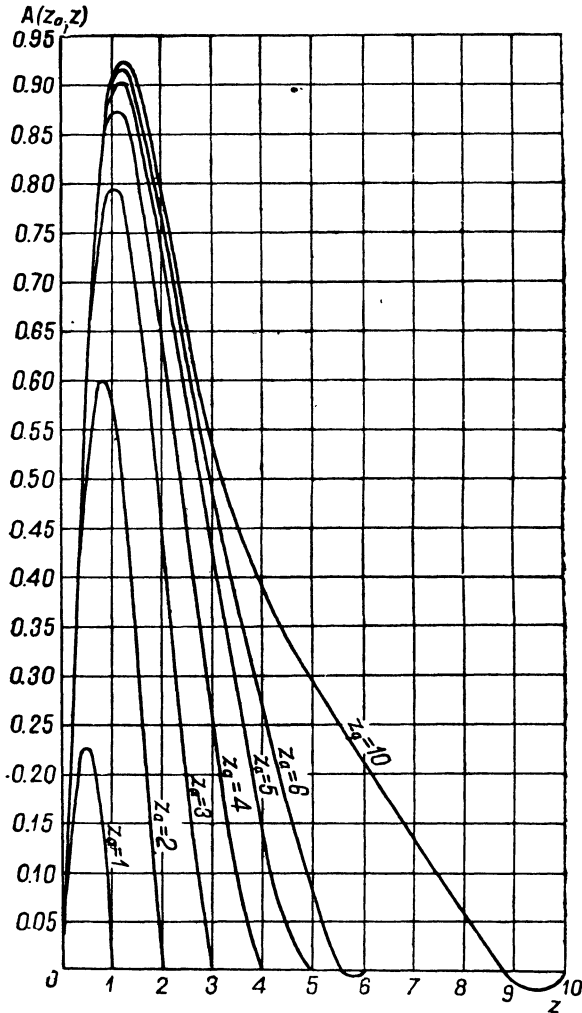


Рис. 158.

в которое, в соответствии с (94,30), следует подставить $(\xi'^3)_z - z_a^n = 3z_a^n$; получаем, таким образом,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{2}{3} \varepsilon \sin \omega t = \frac{2}{3} \frac{\delta I}{I_0}, \quad (94,42)$$

что и соответствует лангмюровскому закону:

$$\varphi = \text{const.} \cdot I^{2/3}. \quad (94,43)$$

94.4. Можно также показать, что общее решение уравнения (94,24) в случае достаточно малых частот ω (квасистационарный режим) при-

водит к тому же результату, как и соответствующая лангмюровская формула:

$$I = \text{const.} \cdot \frac{\varphi_0^{3/2}}{r^{3/2}},$$

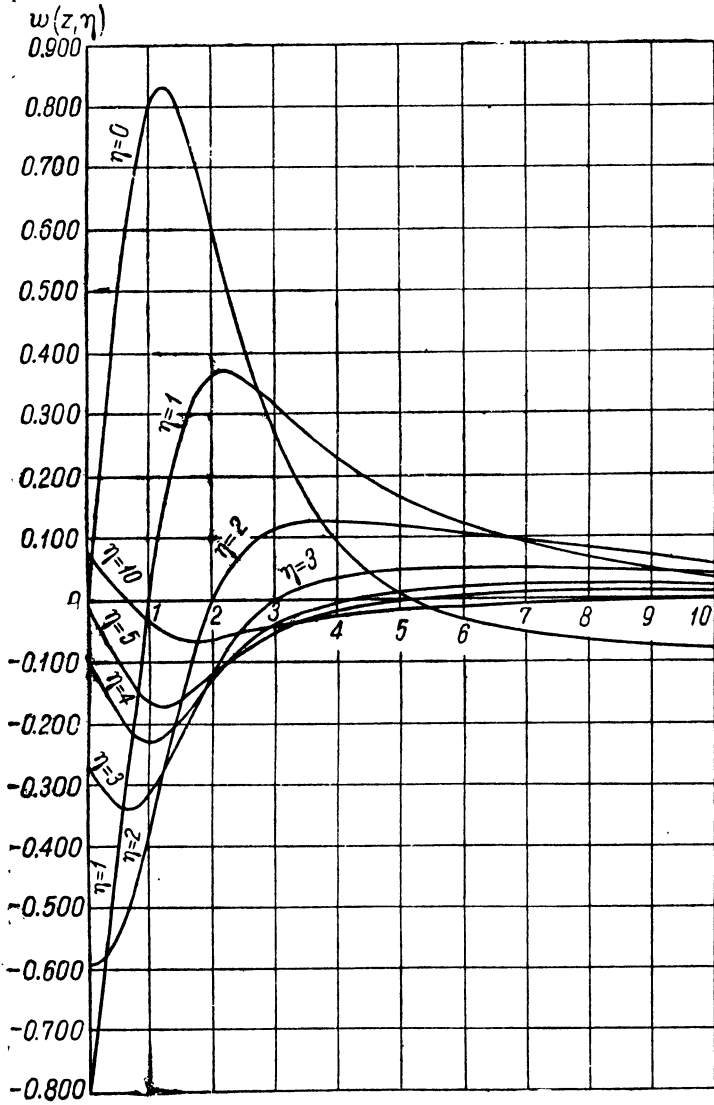


Рис. 159.

в частности, следовательно, к уравнению:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varphi_0}{I_0} = \frac{2}{3} R_{\text{ст.}} = r_0,$$

где $R_{\text{ст.}}$ обозначает статическое внутреннее сопротивление диода. Мы не станем, однако, останавливаться здесь на этом подробнее.

94.5. Для того, чтобы сделать возможным фактическое вычисление активной и реактивной компонент общего сопротивления по форму-

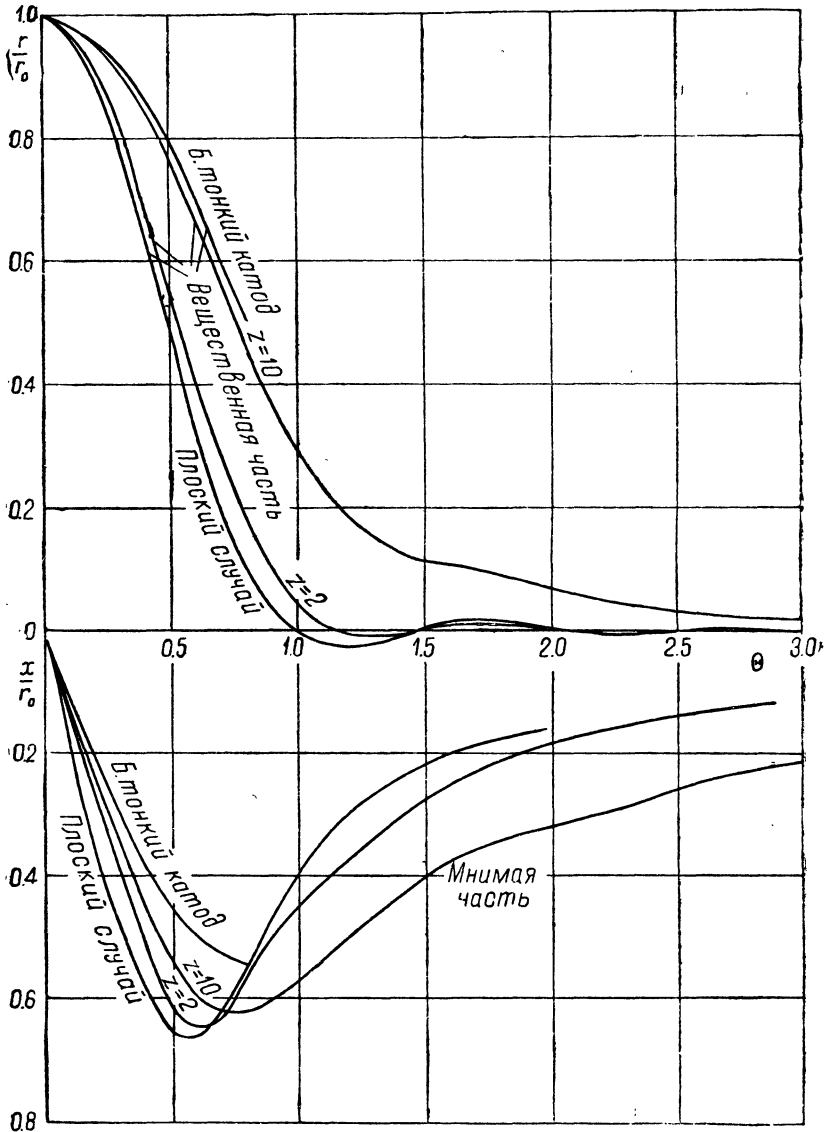


Рис. 160.

лам (94,21), были вычислены значения $A(z_a, z)$ для $0 \leq z \leq 10$ и для $0 \leq z_a \leq 10$.

Соответствующие данные сопоставлены в таблице II (см. вклейку на стр. 608) и иллюстрируются кривыми рис. 158, каждая из которых соответствует определенному z_a .

Необходимые для этого расчета значения $w(z, \eta)$ были вычислены частью (для $0 \leq z \leq 7.5$) на основании приведенных выше значений

функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$; частью же эти последние были вычислены еще для значений z в интервале ($7.5 < z \leq 10$). Найденные при посредстве их значения $w(z, \eta)$ сопоставлены в таблице I (см. вклейку на стр. 608). На рис. 159 изображен ход кривых $w(z, \eta)$ для различных η .

С помощью данных таблицы II была исследована зависимость компонент импеданца от параметра $\theta = \frac{T_a^0}{\tau} = \frac{\omega T_a^0}{2\pi}$ (τ обозначает здесь период анодного напряжения) и от отношения $\xi_a = r_a/r_k$ для $z_a = 2, 10$ и ∞ ,¹ что соответствует значениям $\xi_a \cong 2.1; 34; \infty$.

В таблице III даются полученные таким путем значения обеих компонент импеданца, деленные на величину сопротивления $r_0 = \frac{2}{3} R_{ст.}$ при весьма малых частотах.

Для сравнения дана также соответствующая величина для плоско-параллельного случая. На рис. 160 полученные результаты даются в наглядной форме.

Таблица III

θ	$z_a = 2$		$z_a = 10$		Бесконечно-тонкий катод		Плоский случай	
	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x}{r_0}$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x}{r_0}$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x}{r_0}$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x}{r_0}$
0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
0.1	0.97	-0.13	0.98	-0.14	0.978	-0.100	—	—
0.2	0.92	-0.26	0.95	-0.18	0.960	-0.204	0.90	-0.35
0.3	0.80	-0.38	0.91	-0.32	0.920	-0.300	—	—
0.4	0.68	-0.51	0.86	-0.45	0.872	-0.386	0.64	-0.58
0.5	0.53	-0.61	0.76	-0.54	0.800	-0.450	—	—
0.6	0.41	-0.65	0.66	-0.60	0.712	-0.496	0.32	-0.64
0.7	0.28	-0.63	0.56	-0.66	0.600	-0.526	—	—
0.8	0.18	-0.56	0.46	-0.62	0.516	-0.541	0.10	-0.56
0.9	0.10	-0.50	0.37	-0.60	—	—	—	—
1.0	0.04	-0.45	0.29	-0.57	—	—	0.00	-0.40
1.1	0.01	—	0.23	-0.54	—	—	—	—
1.2	-0.003	-0.37	0.19	-0.50	—	—	-0.02	-0.30
1.3	-0.006	-0.33	0.152	-0.47	—	—	—	—
1.4	-0.003	-0.30	0.13	-0.43	—	—	0.00	-0.22
1.5	0.003	—	0.11	-0.40	—	—	—	—
1.6	0.008	-0.25	0.11	-0.38	—	—	0.005	-0.20
1.7	0.010	-0.23	0.10	-0.36	—	—	—	—
1.8	0.011	-0.21	0.09	-0.35	—	—	0.001	-0.18
1.9	0.008	-0.20	0.08	-0.33	—	—	—	—
2.0	0.002	-0.19	0.07	-0.32	—	—	0.000	-0.16
2.1	-0.001	-0.18	0.06	-0.33	—	—	—	—
2.2	-0.002	-0.17	0.05	-0.30	—	—	—	—
2.3	-0.002	-0.16	0.05	-0.29	—	—	—	—
2.4	0.000	-0.15	—	-0.27	—	—	—	—
2.5	0.001	-0.14	0.03	-0.26	—	—	—	—
2.6	0.001	-0.14	—	-0.25	—	—	—	—
2.7	0.003	-0.13	0.03	-0.24	—	—	—	—
2.8	0.001	-0.13	—	-0.23	—	—	—	—
2.9	0.002	-0.12	0.02	-0.22	—	—	—	—
3.0	0.000	-0.12	—	-0.22	—	—	—	—

¹ Последнее по формулам (94,36) — (94,38).

Из приведенных кривых видно, что для малых значений $\xi_a = r_a/r_k$, так же, как и в плоско-параллельном случае, существуют области, в которых активная компонента сопротивления становится отрицательной (области отрицательного сопротивления). При увеличении отношения r_a/r_k , величина этого сопротивления быстро падает и вскоре становится незаметной.

Для $r_a/r_k = 2.1$ кривая для r/r_0 проходит в непосредственной близости от кривой, соответствующей плоско-параллельному случаю. Для $r_a/r_k = 34$ она уже вплотную приближается к кривой, соответствующей $r_a/r_k = \infty$ и лежащей выше других. Все остальные кривые лежат между ними, что соответствует непрерывному переходу от плоско-параллельного случая к „предельному“ цилиндрическому $r_a/r_k = \infty$.

§ 95. Нелинейные эффекты при прохождении через плоский диод высокочастотного тока, ограниченного объемным зарядом

95.1. В предыдущих параграфах мы показали, каким образом можно подойти к вопросу о прохождении через электронные приборы быстропеременных токов в режиме, когда ток ограничен объемным зарядом, и установили, что, при определенных условиях, гарантирующих наличие в каждой точке междуэлектродного пространства электронов только одной определенной скорости,¹ решение задачи для плоского или цилиндрического диодов может быть выполнено в том случае, если известен в функции от времени полный ток $I = I(t)$, проходящий через прибор. В плоском случае решение выражалось при этом в замкнутой форме, а в цилиндрическом — нахождение его было связано с необходимостью интегрирования дифференциального уравнения (91,10) при начальных условиях (91,11).

Выполнить это интегрирование в общем виде при любой форме входящей в уравнение (91,10) функции $I(t)$ не удастся. Однако, в каждом конкретном случае, т. е. если задана численно или графически функция $I(t)$, можно это интегрирование выполнить численными методами. Таким путем возможно найти $r = r(t, \tau)$ для электронов, вышедших в различные моменты из катода, после чего, пользуясь формулами (91,8) и (93,37), можно найти потенциал φ в любой точке внутри диода, а также анодное напряжение φ_a в функции от времени.

Итак, как в плоском, так и в цилиндрическом случае, мы имеем возможность решить задачу о нахождении формы того анодного напряжения, которое вызвало бы прохождение через прибор полного тока $I(t)$ заданного вида.

¹ При отсутствии начальных скоростей у электронов, таким условием являлось бы как в плоском, так и в цилиндрическом случае, сохранение за все время процессу одного направления проходящего через прибор полного тока $I(t)$.

Это мы и делали в п. 90.5 и в § 94, причем решение задачи облегчалось тем, что мы там ограничивались рассмотрением случаев, когда ток I состоит из постоянной составляющей, на которую налагается весьма малая по сравнению с ней переменная. Это позволяло пренебрегать в первом приближении нелинейными членами, содержащими квадраты и высшие члены этой малой величины.¹ Однако на практике, обычно гораздо важнее уметь решать обратную задачу, именно, требуется уметь находить ток, проходящий через прибор под действием некоторого заданного анодного напряжения. В наиболее часто встречающемся случае синусоидально-изменяющегося во времени анодного напряжения, или же когда напряжение это является периодической функцией времени, естественный путь для решения задачи заключается в том, что полный ток $I(t)$, который при этом в установившемся режиме тоже является периодической функцией времени с тем же периодом, задается в виде соответствующего ряда Фурье с неопределенными коэффициентами и подставляется в данные выше общие формулы для нахождения анодного напряжения по данному току $I(t)$. Сравнение амплитуд и фаз получаемых таким образом гармонических составляющих в выражении анодного потенциала с действительными дает систему уравнений для определения искомых амплитуд и фаз отдельных гармоник тока, из которых эти последние и могут быть последовательно определены.

Ниже мы даем пример приложения этого метода к нахождению нелинейных эффектов второго порядка (детектирование, вторая гармоника) в любой электрической цепи, включающей в себя, в качестве единственного нелинейного элемента, плоский диод. Мы ограничимся при этом, как и раньше, случаем, когда начальные скорости электронов могут считаться равными нулю, но рассмотрим, для общности, вынужденный режим, возникающий в цепи под действием введенной в нее переменной (периодической) э. д. с., налагающейся на достаточно большое по сравнению с ней постоянное напряжение. Считая, что амплитуда переменной э. д. с. пропорциональна некоторой (малой) величине ϵ и пользуясь общим решением задачи о прохождении нестационарного тока через плоский диод в той форме, в какой оно было дано в п. 90.5, сможем найти разложение этого решения в ряд по степеням ϵ . Тем самым придем к нахождению решений разных порядков малости.²

95.2. Переходим к осуществлению намеченного только что плана решения задачи. Пусть рассматриваемый диод включен в одну из

¹ Что такие члены неизбежно появляются при наличии объемных зарядов, особенно ясно видно, например, из формулы (90, 15), правая часть которой зависит от тока I квадратичным образом.

² Это тот же метод, которым мы пользовались уже в п. 90.5, только там мы ограничивались нахождением лишь членов первого порядка, т. е. только тех, которые определяют поведение прибора по отношению к нестационарным воздействиям столь малой амплитуды, что по отношению к ним он ведет себя еще как линейная система.

ветвей произвольной электрической цепи, могущей содержать как сосредоточенные, так и распределенные сопротивления, емкости и самоиндукции. Пусть, далее, в цепь введена некоторая сторонняя электродвижущая сила $E^{(ст.)} = E_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)$, где E_0 — ее постоянная составляющая, а ε — достаточно малая величина, определяющая амплитуду переменной компоненты, причем в дальнейшем мы рассматриваем ε как параметр, от которого зависит искомое решение. Требуется найти вынужденный режим с основной частотой ω , устанавливающийся в цепи, в частности, ток $I = I(t)$, текущий через диод.

Для того, чтобы это сделать, замечаем, прежде всего, что если представить токи в различных ветвях цепи в виде рядов Фурье именно:

$$I^{(s)}(t) = I_0^{(s)} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(s)} \sin(n\omega t + \alpha_n^{(s)}), \quad (95, 1)$$

где $I^{(s)}(t)$ — ток в s -ой ветви, то все величины $I_n^{(s)}$ и $\alpha_n^{(s)}$ являются здесь функциями от ε , причем первые из них — четными или нечетными, в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным, тогда как вторые — всегда четные. Действительно, если мы, не изменяя рассматриваемой системы, изменим лишь начало отсчета времен на величину $\Delta t = \pi/\omega$, т. е. будем, вместо времени t , пользоваться временем $t' = t - \pi/\omega$, то формулы

$$E^{(ст.)} = E_0(1 + \varepsilon \sin \omega t),$$

$$\left. \begin{aligned} I^{(s)} &= I_0^{(s)}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(s)}(\varepsilon) \sin[n\omega t + \alpha_n^{(s)}(\varepsilon)] = \\ &= I_0^{(s)}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(s)}(\varepsilon) \sin n\omega t + B_n^{(s)}(\varepsilon) \cos n\omega t], \end{aligned} \right\} \quad (95, 2)$$

$$A_n^{(s)}(\varepsilon) = I_n^{(s)}(\varepsilon) \cos \alpha_n^{(s)}(\varepsilon), \quad B_n^{(s)}(\varepsilon) = I_n^{(s)}(\varepsilon) \sin \alpha_n^{(s)}(\varepsilon), \quad (95, 3)$$

перейдут в такие:

$$E^{(ст.)} = E_0(1 - \varepsilon \sin \omega t'),$$

$$\left. \begin{aligned} I^{(s)} &= I_0^{(s)}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [A_n^{(s)}(\varepsilon) \sin \omega t' + B_n^{(s)}(\varepsilon) \cos \omega t'] = \\ &= I_0^{(s)}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^{(s)}(\varepsilon) \sin(n\omega t' + \alpha_n^{(s)}), \end{aligned} \right\} \quad (95, 4)$$

причем использованы уравнения (95, 3).

Но тот же самый ток, что и в формуле (95, 4), должен получаться и из (95, 2), если там заменить ε на $(-\varepsilon)$ и t на t' , т. е. должно быть:

$$\left. \begin{aligned} I^{(s)} &= I_0^{(s)}(-\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(s)}(-\varepsilon) \sin[n\omega t' + \alpha_n^{(s)}(-\varepsilon)] = \\ &= I_0^{(s)}(-\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(s)}(-\varepsilon) \sin n\omega t' + B_n^{(s)}(-\varepsilon) \cos n\omega t']. \end{aligned} \right\} \quad (95, 5)$$

Сравнение формул (95, 4) и (95, 5) дает:

$$A_n^{(s)}(-\varepsilon) = (-1)^n A_n^{(s)}(\varepsilon), \quad B_n^{(s)}(-\varepsilon) = (-1)^n B_n^{(s)}(\varepsilon),$$

и

$$I_n^{(s)}(-\varepsilon) = (-1)^n I_n^{(s)}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \alpha_n^{(s)}(-\varepsilon) = \alpha_n^{(s)}(\varepsilon), \quad (95, 6)$$

чем наше утверждение и доказывается.¹

В частности, в такой форме может быть представлен и ток $I(t)$, проходящий через диод.

Исходя из этого и пользуясь формулой (90, 10), которая для точки лежащей на аноде, выглядит так:

$$a = \frac{2\pi e}{m} \int_{\tau(a, t)}^t (t - \xi)^2 I(\xi) d\xi = - \frac{e}{m} \int_{\tau(a, t)}^t (t - \xi) E_{\xi, \tau(a, t)} d\xi, \quad (95, 7)$$

и формулой (90, 15) для анодного напряжения φ_a :

$$\varphi_a = \frac{8\pi^2 e}{m} \int_{\tau(a, t)}^t (t - \xi)^2 I(\xi) d\xi \int_{\xi}^t I(u) du = - \int_{\tau(a, t)}^t E_{t, \tau} \frac{\partial x_{t, \tau}}{\partial \tau} d\tau, \quad (95, 8)$$

можем найти разложение φ_a в ряд по степеням ε , причем коэффициенты этого разложения выразятся через величины, входящие в выражение для тока $I(t)$. Составляя затем для рассматриваемой цепи обычные уравнения, выражающие законы Кирхгофа,² и вводя туда, вместо падения напряжения на диоде, указанное его выражение в виде ряда, расположенного по степеням ε , перенося далее все члены в каждом уравнении в одну сторону и приравнивая нулю в отдельности коэффициенты при каждой степени ε и при каждом $\sin n\omega t$ и $\cos n\omega t$ при всех $n \geq 0$, найдем систему уравнений, из которых, вообще говоря, сможем найти все искомые амплитуды $I_n^{(s)}$ и фазы $\alpha_n^{(s)}$, т. е. сможем полностью решить поставленную задачу.

Мы подробно рассмотрим здесь два случая, на которых все особенности методики полностью выясняются, именно: 1) случай, когда задается непосредственно анодное напряжение на обкладках диода, притом в простейшей форме:

$$\varphi_a = \varphi_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t),$$

и 2) когда диод является частью изображенного на рис. 161 контура, состоящего из сосредоточенной самоиндукции L , сопротивления r и самого диода, причем в контур включена внешняя э. д. с. вида

$$E^{(ст.)} = E_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t).$$

¹ Это означает просто то, что как постоянные составляющие токов, так и отношения амплитуд отдельных гармонических составляющих токов и их относительные фазовые смещения не зависят от „абсолютной“ фазы синусоидальной части напряжения.

² Это в случае системы с сосредоточенными постоянными. Если в систему входят и элементы с распределенными постоянными, то уравнения задачи станут несколько сложнее, однако, никаких новых принципиальных трудностей по сравнению с случаем сосредоточенных постоянных это не внесет.

Уравнение процесса в цепи будет в этом случае:

$$L \frac{dI}{dt} + rI + \varphi_a = E_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t).$$

Прежде чем перейти к рассмотрению этих примеров, начнем с нахождения основного для решения всей задачи разложения потенциала φ_a в ряд по степеням ε , причем ограничимся здесь учетом линейных и квадратичных членов, т. е. проведем вычисление с точностью до членов порядка ε^2 включительно.

95.3. Разложение в ряд потенциала φ_a . а) Прежде чем перейти собственно к разложению φ_a в ряд по степеням ε , преобразуем предварительно некоторые необходимые нам в дальнейшем формулы. Именно, полагая, что постоянная составляющая I_0 тока I , текущего через диод, отлична от нуля и при отсутствии переменной компоненты действующей в цепи сторонней э. д. с. и обозначая эту составляющую в этом случае через \bar{I}_0 , можем, в соответствии с рассуждениями предыдущего параграфа, положить:

$$I = I(t) = I_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \right] = I_0 [1 + \delta(t)], \quad (95, 9)$$

где

$$\delta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad (95, 10)$$

$$I_0 = I_0(\varepsilon) = \bar{I}_0 \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \varepsilon^{2(k+1)} \right] = \bar{I}_0 (1 + \varepsilon^2 \rho), \quad (95, 11)$$

$$\varepsilon_{2s+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(2s+1)} \varepsilon^{2k+1}, \quad (95, 12)$$

$$\varepsilon_{2s} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(2s)} \varepsilon^{2k}. \quad (95, 13)$$

Вводя, далее, обозначения:

$$f(t, \tau) = \int_{\tau}^t \delta(\xi) d\xi, \quad (95, 14)$$

$$t - \tau = T,^1 \quad (95, 15)$$

можем записать выражение (90, 8) для $E_{i, \tau}$ в такой форме:

$$\begin{aligned} E_{i, \tau} &= -4\pi \int_{\tau}^t I(\xi) d\xi = -4\pi I_0 [(t - \tau) + f(t, \tau)] = \\ &= -4\pi I_0 [T + f(t, t - T)]. \end{aligned} \quad (95, 16)$$

Далее:

$$\begin{aligned} x_{i, \tau} &= -\frac{e}{m} \int_{\tau}^t (t - \xi) E_{i, \tau} d\xi = \frac{4\pi e I_0}{m} \int_{\tau}^t (t - \xi) [(\xi - \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi = \\ &= \frac{4\pi e I_0}{m} \int_0^T \eta [(T - \eta) + f(t - \eta, t - T)] d\eta, \end{aligned} \quad (95, 17)$$

¹ T — время, прошедшее с момента τ вылета электрона из катода.

последнее, если ввести вместо ξ новую переменную $\eta = t - \xi$, а τ заменить через $(t - T)$, согласно формуле (95, 15).

Первый интеграл здесь находится сразу:

$$\int_0^T \eta(T - \eta) d\eta = u(T) = \frac{T^2}{6}, \quad (95, 18)$$

а вводя обозначение

$$v(T, t) = \int_0^T \eta f(t - \eta, t - T) d\eta, \quad (95, 19)$$

можем переписать (95, 17) в таком виде:

$$x_{i, \tau} = \frac{4\pi e I_0}{m} \left[u(T) + v(T, t) \right]. \quad (95, 20)$$

Подставляя найденные значения $E_{i, \tau}$ и $x_{i, \tau}$ в формулу (95, 8), найдем:

$$\varphi_a = \frac{16\pi^2 e I_0^2}{m} \int_0^{T_a} \bar{E} \frac{\partial(u+v)}{\partial T} dT, \quad (95, 21)$$

где $T_a = t - \tau(a, t)$ — время, затраченное на пробег от катода до анода электроном, достигающим анода в момент t , и

$$\bar{E} = T + f(t, t - T). \quad (95, 22)$$

Напомним, что в формуле (95, 21) интегрирование по T совершается при постоянном t .

Имеем далее, обозначая через Q интеграл, входящий в формулу (95, 21):

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{T_a} \bar{E} \frac{\partial(u+v)}{\partial T} dT = \int_0^{T_a} \bar{E} \frac{\partial u}{\partial T} dT + \int_0^{T_a} \bar{E} \frac{\partial v}{\partial T} dT = \\ &= \int_0^{T_a} \bar{E} u'(T) dT + (\bar{E}v)_{T=T_a} - \int_0^{T_a} v(T, t) \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} dT. \end{aligned} \quad (95, 23)$$

Вводя время T_a^0 пробега электрона от катода до анода при отсутствии переменной компоненты напряжения (т. е. при $\epsilon = 0$), находим, полагая $\Delta T = T_a - T_a^0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_a^0 + \Delta T} \bar{E} u'(T) dT = \\ &= \int_0^{T_a^0} \bar{E} u'(T) dT + [\bar{E} u'(T)]_{T=T_a^0} \Delta T - \frac{(\Delta T)^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} [\bar{E} u'(T)] \right\}_{T=T_a^0} + O(\epsilon^3) = \\ &= \int_0^{T_a^0} \bar{E} u'(T) dT + [\bar{E} u'(T)]_{T=T_a^0} \Delta T - \frac{1}{2} (\bar{E})_{T=T_a^0} u''(T_a^0) (\Delta T)^2 - \\ & \quad - \frac{u'(T_a^0)}{2} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_{T=T_a^0} (\Delta T)^2 + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (95, 24)$$

ибо ΔT — малая величина порядка ε .¹ Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_a} v(T, t) \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} dt = \\ & = \int_0^{T_a^0} v(T, t) \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} dT + v(T_a, t) \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_{T=T_a} \Delta T + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (95, 25)$$

(95, 23), (95, 24) и (95, 25) дают вместе:

$$\begin{aligned} Q = & \int_0^{T_a^0} \bar{E} u'(T) dT - \int_0^{T_a^0} v(T, t) \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} dT + (\bar{E})_{T=T_a} [v(T_a, t) + \\ & + u'(T_a) \Delta T - \frac{1}{2} u''(T_a) (\Delta T)^2] - \left[\frac{u'(T_a^0)}{2} \Delta T + \right. \\ & \left. + v(T_a, t) \right] \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_{T=T_a^0} \Delta T + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (95, 26)$$

Чтобы упростить это выражение, замечаем, что из двойного равенства

$$a = \frac{4\pi e I_0}{m} [u(T_a) + v(T_a, t)] = \frac{4\pi e \bar{I}_0}{m} u(T_a^0) \quad (95, 27)$$

вытекает, что

$$u(T_a) + v(T_a, t) = \frac{\bar{I}_0}{I_0} u(T_a^0) = (1 - \varepsilon^2 \rho) u(T_a^0) + O(\varepsilon^4) \quad (95, 28)$$

[см. (95, 11)]. Это дает:

$$\begin{aligned} u(T_a) - u(T_a - \Delta T) + v(T_a, t) = & u'(T_a) \Delta T - \frac{u''(T_a)}{2} (\Delta T)^2 + \\ & + v(T_a, t) + O(\varepsilon^3) = -\varepsilon^2 \rho u(T_a^0) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (95, 29)$$

так что

$$\begin{aligned} (\bar{E})_{T=T_a} \left[v(T_a, t) + u'(T_a) \Delta T - \frac{1}{2} u''(T_a) (\Delta T)^2 \right] = \\ = -\varepsilon^2 \rho (\bar{E})_{T=T_a^0} u(T_a^0) + O(\varepsilon^3) = -\frac{\varepsilon^2 \rho T_a^{04}}{6} + O(\varepsilon^3); \end{aligned} \quad (95, 30)$$

¹ Имеем вообще для любой функции $\psi(T)$, дифференцируемой достаточное число раз:

$$\int_0^{T_a^0} \psi(T) dT = \int_0^{T_a - \Delta T} \psi(T) dT = \int_0^{T_a} \psi(T) dT - \psi(T_a) \Delta T + \frac{1}{2} \psi'(T_a) (\Delta T)^2 - \dots,$$

т. е.

$$\int_0^{T_a} \psi(T) dT = \int_0^{T_a^0} \psi(T) dT + \psi(T_a) \Delta T - \frac{(\Delta T)^2}{2} \psi'(T_a) + \dots,$$

что и дает формулу (95, 24) при $\psi(T) = \bar{E} u'(T)$.

последнее с помощью (95, 22), причем член, соответствующий слагаемому $f(t, t - T)$ в выражении для \bar{E} , отброшен, поскольку он дает величину третьего порядка малости.

Замечая, далее, что вторая квадратная скобка в формуле (95, 26) входит множителем в член второго порядка малости и заменяя в ней поэтому величину

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = 1 + \frac{\partial}{\partial T} [f(t, t - T)] = 1 + \delta(t - T) \quad (95, 31)$$

[см. (95, 14)] единицей, а $v(T_a, t)$, в соответствии с (95, 29), — через

$$-u'(T_a^0) \Delta T = -\frac{T_a^{02} \Delta T}{2},$$

получаем:

$$Q = \int_0^{T_a^0} \bar{E} u'(T) dT - \int_0^{T_a^0} v(T, t) \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} dT - \frac{1}{6} \varepsilon^2 \rho T_a^{04} + \\ + \frac{T_a^{02} (\Delta T)^2}{4} + O(\varepsilon^3). \quad (95, 32)$$

Входящая сюда величина $v(T, t)$, определяемая формулами (95, 19) и (95, 14), может быть преобразована к более простому виду, именно:

$$v(T, t) = \int_0^T \eta f(t - \eta, t - T) d\eta = \int_0^T \eta d\eta \int_{t-T}^{t-\eta} \delta(\xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2} \int_0^T \eta^2 \delta(t - \eta) d\eta. \quad (95, 33)$$

Действительно, беря производную по T от исходного выражения для $v(T, t)$, находим, что она равна:

$$\frac{\partial v(T, t)}{\partial T} = \int_0^T \eta \delta(t - T) d\eta = \frac{T^2}{2} \delta(t - T), \quad (95, 34)$$

а отсюда, если еще учесть то, что при $T=0$ должно быть $v(0, t)=0$, как раз и получается формула (95, 33). Так как, кроме того, из (95, 31), или (95, 22) следует, что

$$\bar{E} = T + \int_0^T \delta(t - \eta) d\eta, \quad (95, 35)$$

и так как $u'(T) = T^2/2$, то формула (95, 32) может быть переписана в таком виде:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{T_a^0} T^3 dT + \left[\int_0^{T_a^0} T^2 dT \int_0^T \delta(t-\eta) d\eta - \int_0^{T_a^0} dT \int_0^T \eta^2 \delta(t-\eta) d\eta \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{T_a^0} \delta(t-T) dT \int_0^T \eta^2 \delta(t-\eta) d\eta \right\} - \frac{1}{6} \varepsilon^2 \rho T_a^{04} + \frac{T_a^{02} (\Delta T)^2}{4} + O(\varepsilon^3) = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_a^{04}}{4} + 2 \int_0^{T_a^0} dT \int_0^T \xi d\xi \int_0^\xi \delta(t-\eta) d\eta - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{T_a^0} \delta(t-T) dT \int_0^T \eta^2 \delta(t-\eta) d\eta \right\} - \\
 &\quad - \frac{1}{6} \varepsilon^2 \rho_0 T_a^{04} + \frac{T_a^{02} (\Delta T)^2}{4} + O(\varepsilon^3), \quad (95, 36)
 \end{aligned}$$

причем последнее преобразование получается путем интегрирования по частям одного из интегралов, стоящих в квадратной скобке, именно:

$$\int_0^T \eta^2 \delta(t-\eta) d\eta = T^2 \int_0^T \delta(t-\eta) d\eta - 2 \int_0^T \xi d\xi \int_0^\xi \delta(t-\eta) d\eta,$$

так что

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{T_a^0} \left\{ T^2 \int_0^T \delta(t-\eta) d\eta - \int_0^T \eta^2 \delta(t-\eta) d\eta \right\} dT = \\
 &= 2 \int_0^{T_a^0} dT \int_0^T \xi d\xi \int_0^\xi \delta(t-\eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

В полученном выражении для Q остается вычислить входящие туда интегралы, к чему теперь и переходим.

б) Вычислим сперва значение интеграла

$$P_1 = \int_0^{T_a^0} dT \int_0^T \xi d\xi \int_0^\xi \delta(t-\eta) d\eta. \quad (95, 37)$$

Пользуясь обозначением (90, 18)

$$\psi_n = n\omega t + \alpha_n,$$

находим последовательно:

$$\delta(t-\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin[\psi_n - n\omega\eta] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \{ \sin \psi_n \cos n\omega\eta - \cos \psi_n \sin n\omega\eta \}, \quad (95, 38)$$

$$\int_0^\xi \delta(t-\eta) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n\omega} \{ \sin \psi_n \sin n\omega\xi - (1 - \cos n\omega\xi) \cos \psi_n \}, \quad (95, 39)$$

а выполнение остальных интегрирований дает:

$$P_1 = \frac{T_a^0}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n [S(n\omega T_a^0) \sin \psi_n + R(n\omega T_a^0) \cos \psi_n], \quad (95, 40)$$

где $R(z)$ и $S(z)$ — введенные в п. 90.5 функции, именно

$$\left. \begin{aligned} R(z) &= \frac{4}{z^3} \left[4 \sin z - 2z \cos z - 2z - \frac{z^3}{3} \right] = \\ &= -\frac{8}{z} \frac{d}{dz} \left[\frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^2} \right], \\ S(z) &= \frac{4}{z^3} [4 - 4 \cos z - 2z \sin z] = \frac{8}{z} \frac{d}{dz} \left[\frac{\cos z - 1}{z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (95, 41)$$

в) Переходим к вычислению второго интеграла:

$$P_2 = \int_0^{T_a^0} \delta(t - T) dT \int_0^T \eta^2 \delta(t - \eta) d\eta. \quad (95, 42)$$

Заметим, прежде всего, что из полученного в п. 90.5 результата, а именно, что рассматриваемый электронный прибор ведет себя в первом приближении¹ как линейная система, следует, что все ε_k при $k > 1$ могут быть лишь величинами порядка ε^2 , или еще более высокого. Поэтому, поскольку при нашей точности вычислений величины порядка ε^3 должны быть отброшены, достаточно в формуле (95, 42) заменить ряд (95, 10) для $\delta(\xi)$ его первым членом, т. е. положить:

$$\delta(\xi) = \varepsilon_1 \sin(\omega\xi + \alpha_1). \quad (95, 43)$$

Это дает все с той же точностью:

$$P_2 = \varepsilon_1^2 \int_0^{T_a^0} \sin(\psi_1 - \omega T) dT \int_0^T \eta^2 \sin(\psi_1 - \omega\eta) d\eta \quad (95, 44)$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} P_2/\varepsilon_1^2 &= \frac{\cos(\psi_1 - \omega T_a^0)}{\omega} \int_0^{T_a^0} \eta^2 \sin(\psi_1 - \omega\eta) d\eta - \\ &- \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_a^0} \eta^2 \sin 2(\psi_1 - \omega\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (95, 45)$$

Пользуясь введенными в п. 90.4 обозначениями:

$$\left. \begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{z^3} \int_0^z u^2 \cos u du = \frac{\sin z}{z} + \frac{2 \cos z}{z^2} - \frac{2 \sin z}{z^3}, \\ B(z) &= \frac{1}{z^3} \int_0^z u^2 \sin u du = -\frac{\cos z}{z} + \frac{2 \sin z}{z^2} + \frac{2(\cos z - 1)}{z^3}, \end{aligned} \right\} \quad (95, 46)$$

¹ Т. е. если ограничиться рассмотрением величин первого порядка малости относительно ε .

и полагая для краткости $\omega T_a^0 = p$, получаем далее:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{T_a^0} \eta^2 \sin(\psi_1 - \omega\eta) d\eta &= T_a^{03} [A(p) \sin \psi_1 - B(p) \cos \psi_1], \\ \int_0^{T_a^0} \eta^2 \sin 2(\psi_1 - \omega\eta) d\eta &= T_a^{03} [A(2p) \sin 2\psi_1 - B(2p) \cos 2\psi_1]. \end{aligned} \right\} (95, 47)$$

Подставляя это в (95, 45) и пользуясь соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\psi_1 - p) \sin \psi_1 &= \frac{1}{2} [\cos p \sin 2\psi_1 - \sin p \cos 2\psi_1 + \sin p] \\ \cos(\psi_1 - p) \cos \psi_1 &= \frac{1}{2} [\sin p \sin 2\psi_1 + \cos p \cos 2\psi_1 + \cos p] \end{aligned} \right\},$$

приходим к окончательной формуле:

$$P_2 = \frac{\varepsilon_1^2 T_a^{04}}{4} [M_1 + M_2 \cos 2\psi_1 + M_3 \sin 2\psi_1], \quad (95, 48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_1 = M_1(p) &= \frac{2}{p} [A(p) \sin p - B(p) \cos p] = \frac{2}{p^2} \frac{4(1 - \cos p)}{p^2}, \\ M_2 = M_2(p) &= \frac{2}{p} \{B(2p) - [A(p) \sin p + B(p) \cos p]\} = \\ &= \frac{\cos 2p}{p^2} - 3 \frac{\sin 2p}{p^3} - \frac{7 \cos 2p}{2 p^4} + \frac{4 \cos p}{p^4} + \frac{1}{2p^4}, \\ M_3 = M_3(p) &= \frac{2}{p} \{A(p) \cos p - B(p) \sin p - A(2p)\} = \\ &= \frac{\sin 2p}{p^2} + 3 \frac{\cos 2p}{p^3} - \frac{7 \sin 2p}{2 p^4} + \frac{4 \sin p}{p^4}. \end{aligned} \right\} (95, 49)$$

г) Остается еще вычислить с требуемой точностью $(\Delta T)^2$. Для того, чтобы это сделать, заметим, прежде всего, что если представить T_a в такой форме:

$$T_a = T_a^0 + \varepsilon (\partial T_a / \partial \varepsilon)_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} (\partial^2 T_a / \partial \varepsilon^2)_{\varepsilon=0} + \dots, \quad (95, 50)$$

то

$$(\Delta T)^2 = (T_a - T_a^0)^2 = \varepsilon^2 (\partial T_a / \partial \varepsilon)_{\varepsilon=0}^2 + O(\varepsilon^3), \quad (95, 51)$$

так что для наших целей достаточно знать $(\partial T_a / \partial \varepsilon)_{\varepsilon=0}$.

Для нахождения этой величины исходим из формулы (90,13), которая в наших теперешних обозначениях напишется, для $x_t, \tau = a$, так:

$$\frac{3ma}{2\pi e \bar{I}_0} = (1 + \varepsilon^2 p) T_a^3 \left\{ 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n [A(n\omega T_a) \sin \psi_n - B(n\omega T_a) \cos \psi_n] \right\}. \quad (95, 52)$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$, находим

$$\frac{3ma}{2\pi e \bar{I}_0} = T_a^{03},$$

а дифференцируя (95, 52) по ε , полагая там затем $\varepsilon=0$ и вспоминая, что, согласно сказанному выше, ε_1 — величина порядка ε , т. е.

$$\varepsilon_1 = \alpha_0^{(1)}\varepsilon + \alpha_1^{(1)}\varepsilon^3 + \dots, \quad (95, 54)$$

а все прочие ε_k , — по крайней мере, порядка ε^3 , получаем, решая получившееся уравнение относительно $(\partial T_a/\partial \varepsilon)_{\varepsilon=0}$ и полагая $\alpha_0^{(1)} = \alpha$:

$$(\partial T_a/\partial \varepsilon)_{\varepsilon=0} = -\alpha T_a^0 [A(p) \sin \psi_1 - B(p) \cos \psi_1]. \quad (95, 55)$$

(95, 51) и (95, 55) дают искомый результат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_a^{0^2} (\Delta T)^2}{4} &= \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 T_a^{0^4}}{4} [A(p) \sin \psi_1 - B(p) \cos \psi_1]^2 = \\ &= \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 T_a^{0^4}}{8} [A^2(p) + B^2(p) + \{B^2(p) - A^2(p)\} \cos 2\psi_1 - \\ &\quad - 2A(p)B(p) \sin 2\psi_1]. \end{aligned} \right\} \quad (95, 56)$$

д) Подставим теперь найденные в б), в) и г) величины в формулу (95, 36) и, далее, в (95, 21). Получается, если в P_2 заменить ε_1^2 через $\varepsilon^2 \alpha^2$ [ср. (95, 54)]:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \frac{16\pi^2 e I_0^2}{m} Q = \frac{2\pi^2 T_a^{0^4} e I_0^2}{m} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n [S(np) \sin \psi_n + R(np) \cos \psi_n] + \right. \\ &\quad + \varepsilon^2 \alpha^2 [A^2(p) + B^2(p) - M_1(p) + (B^2(p) - A^2(p) - M_2(p)) \cos 2\psi_1 - \\ &\quad \left. - (M_3(p) + 2A(p)B(p)) \sin 2\psi_1] - \frac{4}{3} \varepsilon^2 \rho_0 \right\}. \end{aligned} \quad (95, 57)$$

Полагаем для краткости:

$$\left. \begin{aligned} A(np) &= A_n, & B(np) &= B_n, \\ R(np) &= R_n, & S(np) &= S_n, \\ \alpha_2 - 2\alpha_1 &= \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (95, 58)$$

Пользуясь тем, что, согласно (95, 11), имеем с требуемой степенью точности:

$$I_0^2 = \bar{I}_0^2 (1 + 2\varepsilon^2 \rho_0),$$

заменяя далее T_a^0 через $(3ma/2\pi e \bar{I}_0)^{1/3}$, согласно (95, 53), и замечая, что $\psi_2 = 2\psi_1 + \gamma$, так что

$$\varepsilon_2 [S_2 \sin \psi_2 + R_2 \cos \psi_2] = \varepsilon_2 \theta_1 \cos 2\psi_1 + \varepsilon_2 \theta_2 \sin 2\psi_1,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= S_2 \sin \gamma + R_2 \cos \gamma = (R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1) \cos \alpha_2 + \\ &\quad + (R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1) \sin \alpha_2, \\ \theta_2 &= S_2 \cos \gamma - R_2 \sin \gamma = (R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1) \cos \alpha_2 - \\ &\quad - (R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1) \sin \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (95, 59)$$

находим окончательно:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha = \bar{\varphi}_0 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \varepsilon^3 \rho_0 + \varepsilon \alpha (R_1 \cos \psi_1 + S_1 \sin \psi_1) - \right. \\ \left. - \varepsilon^3 \alpha^2 [(M_1 - A_1^2 - B_1^2) + (M_2 + A_1^2 - B_1^2) \cos 2\psi_1 + \right. \\ \left. + (M_3 + 2A_1 B_1) \sin 2\psi_1] + \varepsilon_2 (\theta_1 \cos 2\psi_1 + \theta_2 \sin 2\psi_1) + \right. \\ \left. + \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n [R_n \cos \psi_n + S_n \sin \psi_n] \right\}, \end{aligned} \quad (95, 60)$$

где

$$\bar{\varphi}_0 = \left[\frac{9\pi}{V^2} \left(\frac{m}{e} \right)^{1/2} a^2 \bar{I}_0 \right]^{2/3} \quad (95, 61)$$

— то напряжение, которое соответствует по формуле Лангмюра стационарному току \bar{I}_0 , а под ε_2 подразумевается первый член разложения его в ряд (95, 13), т. е. $\varepsilon_2 = \beta_1^{(2)} \varepsilon^2 = \beta \varepsilon^2$ (если для краткости отбросить значки у β).

95.4. Применение найденных формул к частным случаям. а) Рассмотрим сперва простейший случай, когда к обкладкам диода непосредственно подводится напряжение вида

$$\varphi_\alpha = \varphi_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t).$$

Замечая, что $\sin \omega t = \sin(\psi_1 - \alpha_1)$, и приравнивая друг другу значения φ_α , выражаемые формулой (95, 60), и данное, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_0 [1 + \varepsilon (\cos \alpha_1 \sin \psi_1 - \sin \alpha_1 \cos \psi_1)] = \bar{\varphi}_0 \left\{ 1 + \varepsilon \alpha (S_1 \sin \psi_1 + \right. \\ \left. + R_1 \cos \psi_1) + \varepsilon^3 \left[\frac{2}{3} \rho_0 - \alpha^2 (M_1 - A_1^2 - B_1^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\beta \theta_1 - \alpha^2 [M_2 + A_1^2 - B_1^2]) \cos 2\psi_1 + (\beta \theta_2 - \alpha^2 [M_3 + 2A_1 B_1]) \sin 2\psi_1 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n [R_n \cos \psi_n + S_n \sin \psi_n] \right\}. \end{aligned} \quad (95, 62)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и при каждом синусе и косинусе в отдельности, найдем:

$$\bar{\varphi}_0 = \left[\frac{9\pi}{V^2} \left(\frac{m}{e} \right)^{1/2} a^2 \bar{I}_0 \right]^{2/3} = \varphi_0, \quad (95, 63)$$

$$\alpha^2 (M_1 - A_1^2 - B_1^2) = \frac{2}{3} \rho_0, \quad (95, 64)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \alpha S_1, \\ \sin \alpha_1 &= -\alpha R_1. \end{aligned} \right\} \quad (95, 65)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta \theta_1 &= (R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1) \beta \cos \alpha_2 + \\ + (R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1) \beta \sin \alpha_2 &= \alpha^2 (M_2 + A_1^2 - B_1^2), \\ \beta \theta_2 &= (R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1) \beta \cos \alpha_2 - \\ - (R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1) \beta \sin \alpha_2 &= \alpha^2 (M_3 + 2A_1 B_1), \end{aligned} \right\} \quad (95, 66)$$

$$\varepsilon_n = 0 \text{ при } n > 2. \quad (95, 67)$$

Последнее соотношение показывает, что амплитуды всех гармоник выше второй будут по крайней мере третьего порядка малости, т. е. порядка ε^3 , подобно тому, как это имеет место при низких частотах [квазистационарный режим, см. ниже п. б), (95, 85)].

Решая уравнения (95, 63) — (95, 65) относительно неизвестных величин, получим:

$$\bar{I}_0 = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \frac{\varphi_0^{3/2}}{a^2}, \quad (95, 68)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + S_1^2}}, \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= -\frac{R_1}{S_1}, \end{aligned} \right\} \quad (95, 69)$$

$$p_0 = \frac{3(M_1 - A_1^2 - B_1^2)}{2(R_1^2 + S_1^2)}. \quad (95, 70)$$

Так как из (95, 59) следует, что $\theta_1^2 + \theta_2^2 = R_2^2 + S_2^2$, то (95, 66) дает:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \beta \varepsilon^2 = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{(R_1^2 + S_1^2) \sqrt{R_2^2 + S_2^2}} \sqrt{(M_3 + 2A_1B_1)^2 + (M_2 + A_1^2 - B_1^2)^2}. \end{aligned} \quad (95, 71)$$

Умножая же первое из уравнений (95, 66) на $(R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1)$, а второе — на $(R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1)$ и складывая получившиеся выражения, найдем:

$$\begin{aligned} (R_2^2 + S_2^2) \varepsilon_2 \cos \alpha_2 &= \varepsilon^2 \alpha^2 \{ (M_3 + 2A_1B_1)(R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1) + \\ &+ (M_2 + A_1^2 - B_1^2)(R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1) \}, \end{aligned} \quad (95, 72)$$

тогда как, умножая уравнения (95, 66) на те же множители в обратном порядке и вычитая результаты, придем ко второй формуле:

$$\begin{aligned} (R_2^2 + S_2^2) \varepsilon_2 \sin \alpha_2 &= \varepsilon^2 \alpha^2 \{ (M_2 + A_1^2 - B_1^2)(R_2 \sin 2\alpha_1 + S_2 \cos 2\alpha_1) - \\ &- (M_3 + 2A_1B_1)(R_2 \cos 2\alpha_1 - S_2 \sin 2\alpha_1) \}. \end{aligned} \quad (95, 73)$$

По разделении на $(R_2^2 + S_2^2)$ и после замены $\alpha^2 \sin 2\alpha_1$ и $\alpha^2 \cos 2\alpha_1$ их выражениями, получаемыми с помощью формул (95, 65) и (95, 69), именно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 \sin 2\alpha_1 &= -\frac{2R_1S_1}{(R_1^2 + S_1^2)^2}, \\ \alpha^2 \cos 2\alpha_1 &= \frac{S_1^2 - R_1^2}{(R_1^2 + S_1^2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (95, 74)$$

соотношения эти принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 &= \frac{\varepsilon^2}{(R_1^2 + S_1^2)^2 (R_2^2 + S_2^2)} \{ (M_3 + 2A_1B_1)[S_2(S_1^2 - R_1^2) - \\ &- 2R_1S_1R_2] + (M_2 + A_1^2 - B_1^2)[R_2(S_1^2 - R_1^2) + 2R_1S_1S_2] \}, \\ \varepsilon_2 \sin \alpha_2 &= \frac{\varepsilon^2}{(R_1^2 + S_1^2)^2 (R_2^2 + S_2^2)} \{ (M_2 + A_1^2 - B_1^2)[S_2(S_1^2 - R_1^2) - \\ &- 2R_1S_1R_2] - (M_3 + 2A_1B_1)[R_2(S_1^2 - R_1^2) + 2R_1S_1S_2] \}. \end{aligned} \right\} \quad (95, 75)$$

Этими формулами полностью определяются амплитуда и фаза второй гармоники. Так как постоянная составляющая тока, а также амплитуда и фаза переменной составляющей основной частоты ω нами уже найдены раньше [формулы (95, 68) — (95, 70)], тогда как все высшие гармоники оказались малыми величинами неучитываемого нами порядка, то формулы (95, 68)—(95, 71) и (95, 75) решают полностью поставленную задачу. Заметим, что все вошедшие в решение функции зависят только от произведения $\omega T_a^0 = p$, которое и определяет характер процесса.

б) Остановимся несколько подробнее на том случае, когда в найденном сейчас решении $p = \omega T_a^0$ мало, т. е. когда мы имеем дело с процессом, приближающимся к квазистационарному. Разлагая при этом вошедшие в решение функции в ряды по степеням p и ограничиваясь первыми членами разложений, найдем:

$$\left. \begin{aligned} A(p) &= \frac{1}{p^3} \int_0^p u^2 \cos u du = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{p^{2k}}{(2k!) (2k+3)} = \frac{1}{3} - \frac{p^2}{10} + \frac{p^4}{168} - \dots, \\ B(p) &= \frac{1}{p^3} \int_0^p u^2 \sin u du = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{p^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+4)} = \frac{p}{4} - \frac{p^3}{36} + \frac{p^5}{960} - \dots, \end{aligned} \right\} (95, 76)$$

$$\left. \begin{aligned} R(p) &= -\frac{8}{p} \frac{d}{dp} \left[\frac{\sin p - p + \frac{p^3}{6}}{p^2} \right] = 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-)^k \frac{2k+1}{(2k+3)!} p^{2k-1} = -\frac{p}{5} + \frac{p^3}{126} - \dots, \\ S(p) &= \frac{8}{p} \frac{d}{dp} \left[\frac{\cos p - 1}{p^2} \right] = 16 \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{k+1}{(2k+4)!} p^{2k} = \frac{2}{3} - \frac{2p^2}{45} + \frac{p^4}{840} - \dots, \end{aligned} \right\} (95, 77)$$

так что формулы (95, 54), (95, 65) и (95, 69) дают с обычной здесь точностью, т. е. до $O(\varepsilon^3)$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 &= \varepsilon \alpha \sin \alpha_1 = \frac{9\varepsilon}{20} p + \dots, \\ \varepsilon_1 \cos \alpha_1 &= \varepsilon \alpha \cos \alpha_1 = \frac{3\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{7p^2}{300} + \dots \right), \end{aligned} \right\} (95, 78)$$

причем отброшены члены порядка p^3 и высшего. Из формул (95, 49) получается опять-таки с точностью до $O(p^3)$:

$$\left. \begin{aligned} M_1(p) &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{p^2}{30} + \dots \right), \\ M_2(p) &= -\frac{1}{6} \left(1 - \frac{31}{30} p^2 - \dots \right), \\ M_3(p) &= -\frac{7}{30} p + \dots, \end{aligned} \right\} (95, 79)$$

в силу чего формулы (95, 70) и (95, 75) приобретают теперь такой вид:

$$\rho_0 = \frac{3}{16} \left(1 + \frac{11}{600} p^2 + \dots \right), \quad (95, 80)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 &= -\frac{3\varepsilon^2}{16} \left(1 + \frac{3p^2}{40} + \dots \right), \\ \varepsilon_2 \cos \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (95, 81)$$

Здесь опять не учитываются лишь члены порядка p^3 или еще более высокого.

Из последних формул получается также, что

$$\varepsilon_2 = \frac{3\varepsilon^2}{16} \left[1 + \frac{3p^2}{40} + \dots \right], \quad (95, 82)$$

что можно получить и непосредственно из (95, 71).

Формула (95, 80) совпадает с исправленной Теллегеном формулой Бенэма ¹ и приводит, вместе с (95, 11), к следующему выражению для выпрямленного тока:

$$I_0 = \bar{I}_0 \left[1 + \frac{3\varepsilon^2}{16} \left(1 + \frac{11}{600} p^2 + \dots \right) \right]. \quad (95, 83)$$

(95, 9), (95, 78), (95, 81) и (95, 83) дают теперь, при $p \rightarrow 0$:

$$I(t) = \bar{I}_0 \left\{ 1 + \frac{3\varepsilon^2}{16} + \frac{3}{2} \varepsilon \sin \omega t - \frac{3\varepsilon^2}{16} \cos 2\omega t \right\}. \quad (95, 84)$$

Эта формула, соответствующая квазистационарному режиму, получается, конечно, и непосредственно из закона Лангмюра:

$$I = \bar{I}_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t)^{3/2} = \bar{I}_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \varepsilon \sin \omega t + \frac{3}{16} \varepsilon^2 (1 - \cos 2\omega t) + O(\varepsilon^3) \right\}, \quad (95, 85)$$

который должен при малых частотах давать приближенно верный результат. Заметим, что имеющее при этом место равенство амплитуды второй гармоники и дополнительной части выпрямленного тока — $3\bar{I}_0 \varepsilon^2/16$ — не имеет уже больше места при более высоких частотах, как то показывает сравнение формул (95, 82) и (95, 83).

в) В заключение, рассмотрим еще случай схемы, изображенной на рис. 161, т. е. когда диод включен в контур, в состав которого

входят еще сосредоточенное сопротивление r и самоиндукция L .² Рассматривается установившийся процесс, возникающий в указанной цепи под действием включенной туда э. д. с. вида $E = E_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t)$.

Уравнение процесса имеет вид:

$$L \frac{dI}{dt} + rI + \varphi_a = E_0 (1 + \varepsilon \sin \omega t). \quad (95, 86)$$

Подставляя сюда, вместо I , его обычное выражение (95, 9), в котором следует положить $I_0 = \bar{I}_0 (1 + \varepsilon^2 \rho_0)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon \alpha$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon^2 \beta$, и вводя вместо φ_a

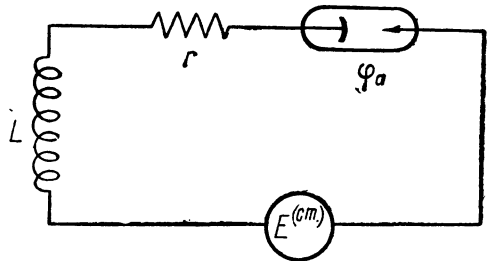


Рис. 161.

¹ См.: Phil. Mag., 11, 457, 1931, February.

² Предполагаем, конечно, что в изучаемом режиме параметры цепи можно рассматривать как сосредоточенные.

его выражение (95, 60), получим, совершенно подобно тому, как это было сделано в п. 95. 4 а):

$$E_0 = r\bar{I}_0 + \bar{\varphi}_0 = r\bar{I}_0 + \left[\frac{9\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{e} \right)^{1/2} a^2 \bar{I}_0 \right]^{2/3}, \quad (95, 87)$$

$$\rho_0 = \alpha^2 \frac{(M_1 - A_1^2 - B_1^2)}{\frac{2}{3} + \frac{\bar{I}_0 r}{\bar{\varphi}_0}}, \quad (95, 88)$$

$$\alpha [\bar{I}_0 r + \bar{\varphi}_0 S_1] = E_0 \cos \alpha_1, \quad \alpha [\bar{I}_0 L \omega + \bar{\varphi}_0 R_1] = -E_0 \sin \alpha_1. \quad (95, 89)$$

Из уравнения (95, 87) определяется ток \bar{I}_0 , соответствующий статическому режиму, а стало быть и статическое падение напряжения $\bar{\varphi}_0$ на диоде, равное $(E_0 - r\bar{I}_0)$. Вводя статическое сопротивление $r_{ст}$ диода, определяемое соотношением

$$\bar{\varphi}_0 = r_{ст} \bar{I}_0, \quad (95, 90)$$

и замечая, что активная — r_a — и реактивная — $r_{ем}$ — (емкостная) компоненты импеданса диода, соответствующие основной частоте, имеют вид

$$r_a = r_{ст} S_1, \quad r_{ем} = r_{ст} R_1, \quad (95, 91)$$

можем переписать формулы (95, 89) так:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{r_{ем} + L\omega}{r_a + r}, \quad (95, 92)$$

$$\alpha = \frac{E_0}{\bar{I}_0 \sqrt{(r_a + r)^2 + (r_{ем} + L\omega)^2}}. \quad (95, 93)$$

Выражение (95, 88) для ρ_0 обращается при этом в такое:

$$\rho_0 = \left(\frac{E_0}{\bar{I}_0} \right)^2 \frac{(M_1 - A_1^2 - B_1^2)}{\left(\frac{2}{3} + \frac{r}{r_{ст}} \right) [(r_a + r)^2 + (r_{ем} + L\omega)^2]}. \quad (95, 94)$$

Формула (95, 93) показывает, что так как $r_{ем}$ всегда отрицательно, тогда как r_a тоже может принимать отрицательные значения,¹ то, при определенном подборе параметров цепи, как активная, так и реактивная компонента полного сопротивления контура обращаются в нуль,² причем амплитуда колебания основной частоты должна была бы стать бесконечной, если бы формулы наши оставались справедливыми и в случае сколь угодно больших амплитуд. Интересно отметить, что при этом, как показывает формула (95, 94), постоянная составляющая тока, равная $\bar{I}_0 (1 + \varepsilon^2 \rho_0)$, должна была бы также стремиться к бесконечности, т. е. и выпрямленный ток должен был бы расти неограниченно. Вследствие того, однако, что формулы наши применимы лишь до тех пор, пока можно пренебрегать членами, содержащими третью и высшие

¹ Ср. п. 90. 7.

² Это соответствует резонансу. Этот эффект обнаружен теоретически Бензюмом Мюллером и др. и исследован экспериментально. См.: J. Müller, Hochfrequenz. und Elektroakustik, 43, 195, 1934.

степени ϵ ,¹ они, конечно, становятся непригодными, как только колебательный процесс в контуре достиг достаточного развития.

г) Мы ограничились здесь рассмотрением первой гармоники и выпрямленного тока. Можно было бы продолжить исследование и в отношении второй и высших гармоник. Однако, мы здесь на этом останавливаться не будем и заметим лишь, что соответствующие вычисления протекают полностью по указанной выше схеме, если только не имеет места резонанс на одной из высших гармоник, причем обе компоненты отвечающего ей комплексного сопротивления одновременно обращаются в нуль.

д) Поскольку все величины, входящие в выведенные выше формулы, выражаются несложным образом через функции $A(p)$ и $B(p)$, — прилагаем таблицы значений этих функций, охватывающие интервал $(0 \leq p \leq 5.6)$. Заодно прилагаем также таблицы функций $p^3 \cdot A(p)$ и $p^3 \cdot B(p)$, полезные в некоторых случаях.

Таблица значений вспомогательных функций

p	$A(p)$	$B(p)$	$p^3 A(p)$	$p^3 B(p)$
0	0.3333	0	0	0
0.2	0.3293	0.0498	0.0026	0.0004
0.4	0.3175	0.0982	0.0204	0.0063
0.6	0.2981	0.1441	0.0641	0.0311
0.8	0.2717	0.1861	0.1390	0.0953
1.0	0.2391	0.2232	0.2391	0.2232
1.2	0.2013	0.2545	0.3479	0.4398
1.4	0.1594	0.2792	0.4375	0.7661
1.6	0.1112	0.2966	0.4553	1.2150
1.8	0.06682	0.3065	0.3897	1.7876
2.0	0.01930	0.3087	0.1544	2.4695
2.2	-0.02769	0.30331	-0.2949	3.2297
2.4	-0.07232	0.29041	-0.9998	4.0147
2.6	-0.11389	0.27079	-2.0018	4.7594
2.8	-0.15123	0.24501	-3.3199	5.3785
3.0	-0.18341	0.21395	-4.9523	5.7766
3.2	-0.20965	0.17860	-6.8701	5.8523
3.4	-0.22928	0.13957	-9.0117	5.4857
3.6	-0.24235	0.09950	-11.307	4.6424
3.8	-0.24826	0.05813	-13.623	3.1895
4.0	-0.24725	0.01713	-15.824	1.0964
4.2	-0.23958	-0.02232	-17.750	-1.6535
4.4	-0.22568	-0.05915	-19.224	-5.0388
4.6	-0.20620	-0.09258	-20.071	-9.0111
4.8	-0.18193	-0.12120	-20.120	-13.404
5.0	-0.15375	-0.14490	-19.219	-18.113
5.2	-0.12267	-0.16300	-17.249	-22.920
5.4	-0.08976	-0.17518	-14.133	-27.584
5.6	-0.05607	-0.18131	-9.8478	-31.841

¹ И пока ток $I(t)$ сохраняет постоянное направление. Ср. п. 90. 3.

§ 96. О начальном токе, текущем через плоский диод при внезапном приложении к нему импульсного напряжения

96.1. Приложим еще развитую в § 90 общую методику изучения нестационарных процессов к исследованию прохождения через плоский диод начального тока, возникающего при внезапном приложении на аноде его импульсного напряжения.

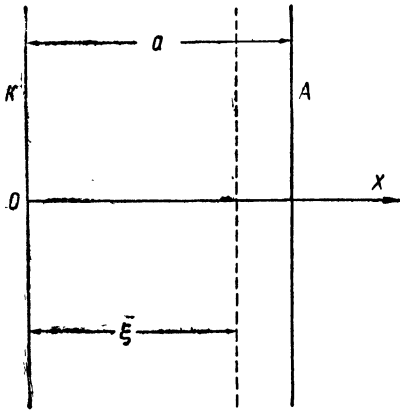


Рис. 162.

Мы здесь ограничимся рассмотрением лишь той стадии процесса установления тока, в течение которой первые электроны, устремившиеся от катода к аноду под действием приложенного напряжения („головные“), не достигнут анода. Как и раньше, будем при этом рассматривать лишь такие режимы, при которых в каждой точке междуэлектродного пространства имеются в каждый момент времени лишь электроны одной определенной скорости.¹

96.2. Переходим к формулировке уравнений задачи. Вводим следующие обозначения:

N — число испускаемых в единицу времени с единицы поверхности катода электронов ($Ne =$ току насыщения);

$x_{t,\tau}$ — координата в момент t электрона, вышедшего из катода в момент τ ;

$\xi = x_{t,0}$ — фронт зарядов в момент t ;

$E_{t,\tau}$ — электрическое поле в точке $x_{t,\tau}$ (т. е. поле, действующее в момент t на электрон с координатой $x_{t,\tau}$);

$E_\xi = E_{t,0}$ — электрическое поле в плоскости фронта зарядов (а стало быть, также в пространстве $\xi \leq x \leq a$) в момент t ;

$E_k(t) = E_{t,t}$ — электрическое поле у катода в момент t .

В остальном сохраняем прежние обозначения.

Тогда, если ось x направлена перпендикулярно к электродам (рис. 162) и $\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} > 0$, то имеют место следующие основные уравнения:²

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (96,1)$$

¹ Условия, при которых это требование соблюдается, будут установлены ниже.

² Формула (96, 3) верна лишь при условии, что в каждой точке между электродами имеются только электроны одной определенной скорости. Это условие выполняется в том, и только в том случае, если вышедшие из катода электроны не могут быть перегнаны вышедшими позднее их, т. е. если выполняется указанное в тексте условие, что $\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} > 0$.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho, \quad (96, 2)$$

$$\rho v + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial t} = -I(t) = -I = \frac{1}{4\pi} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dE_{t,\tau}}{dt}, \quad (96, 3)$$

$$\frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial t^2} = -\frac{e}{m} E_{t,\tau}, \quad (96, 4)$$

$$(x_{t,\tau})_{t=\tau} = \left(\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t} \right)_{t=\tau} = 0. \quad (96, 5)$$

К ним должно быть еще добавлено условие, что полный заряд Q_t , испущенный катодом с момента приложения поля и до момента t , должен равняться $-Net$,¹ если только поле около катода не обратится до этого в нуль.² Следовательно, если мы ограничимся такими временами, что фронт зарядов еще не достиг анода, то должно быть

$$4\pi Q_t = 4\pi \int_0^\xi \rho dx = -4\pi Net = \int_0^\xi \frac{\partial E}{\partial x} dx = E_\xi - E_k(t) = E_{t,0} - E_k(t), \quad (96, 6)$$

причем учтена формула (96, 2).

Далее, (96, 3) дает:

$$E_{t,\tau} - E_k(\tau) = -4\pi \int_\tau^t I(\eta) d\eta, \quad (96, 7)$$

откуда в частности получается при $\tau=0$:

$$E_{t,0} - E_k(0) = -4\pi \int_0^t I(\eta) d\eta. \quad (96, 8)$$

Уравнения (96, 8) и (96, 6) дают вместе:

$$E_k(t) = E_0 + 4\pi Net + u(t), \quad (96, 9)$$

причем введены обозначения:

$$u(t) = -4\pi \int_0^t I(\eta) d\eta, \quad E_0 = E_k(0). \quad (96, 10)$$

Из (96, 7), (96, 9) и (96, 10) находим:

$$E_{t,\tau} = E_0 + 4\pi Ne\tau + u(t). \quad (96, 11)$$

Сверх того, из (96, 1) получается:³

$$\begin{aligned} \varphi_\xi &= - \int_0^\xi E dx = \int_{\tau=0}^{\tau=t} E_{t,\tau} \frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} d\tau = E_{t,\tau} \cdot x_{t,\tau} \Big|_{r=0}^{r=\xi} - \\ &- \int_0^t x_{t,\tau} \frac{\partial E_{t,\tau}}{\partial \tau} d\tau = -\xi E_\xi - 4\pi Ne \int_0^t x_{t,\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (96, 12)$$

последнее с помощью (96, 11).

¹ На единицу поверхности.

² Вследствие образования сильного объемного заряда, если эмиссия катода достаточно велика.

³ Ибо, при $\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} > 0$, $x_{t,\tau}$ — монотонная функция от τ (при фиксированном t), и значению $x=0$ соответствует $\tau=t$ (электрон как раз выходит из катода в момент $\tau=t$), а значению $x=\xi$ — значение $\tau=0$.

Наряду с этим, имеем, если обозначить анодное напряжение через $V(t)$:

$$\varphi_{\xi} - E_{\xi}(a - \xi) = V(t), \quad (96, 13)$$

ибо в пространстве ($\xi \leq x \leq a$) электрическое поле постоянно и равно E_{ξ} .
Формулу (96, 12) можно поэтому переписать следующим образом:

$$V(t) = -4\pi Ne \int_0^t x_{t,\tau} d\tau - a [E_0 + u(t)], \quad (96, 14)$$

причем использовано уравнение (96, 8).

Для того, чтобы отсюда найти уравнение для $u(t)$, а стало быть и для $I(t)$, дифференцируем (96, 14) дважды по t , причем получаются уравнения:¹

$$V'(t) = -4\pi Ne \int_0^t \frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t} d\tau - au'(t), \quad (96, 15)$$

$$V''(t) = -4\pi Ne \int_0^t \frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial t^2} d\tau - au''(t). \quad (96, 16)$$

Подставляя значение $\frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial t^2}$ из (96, 4) в (96, 16), приходим, используя (96, 11), к желаемому соотношению, именно:

$$V''(t) = \frac{4\pi Ne^2}{m} \int_0^t E_{t,\tau} d\tau - au''(t) = \frac{4\pi Ne^2}{m} \{E_0 t + 2\pi Net^2 + tu(t)\} - au''(t).$$

Таким образом:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{4\pi Ne^2}{ma} tu = \frac{4\pi Ne^2}{ma} \{E_0 t + 2\pi Net^2\} - \frac{V''(t)}{a} = f(t), \quad (96, 17)$$

где $f(t)$ — известная функция от t .

Из (96, 10) и (96, 15) получаем начальные условия:

$$(u)_{t=0} = u(0) = 0, \quad u'(0) = -\frac{V'(0)}{a}, \quad (96, 18)$$

имеющие простой и очевидный физический смысл.

Введем вместо u новую функцию w с помощью соотношения

$$u = w - (E_0 + 2\pi Net). \quad (96, 19)$$

Уравнение для w будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{4\pi Ne^2}{ma} tw &= -\frac{V''(t)}{a}, \\ w(0) &= E_0 = -\frac{V(0)}{a}, \\ w'(0) &= 2\pi Ne - \frac{V'(0)}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (96, 20)$$

¹ При выводе их учтены соотношения (96, 5).

² Ибо E_0 — это поле у катода в момент $t_0 = 0$, а так как при этом еще нет объемных зарядов, то просто $E_0 = -\frac{V(0)}{a}$.

Формальный вывод этого соотношения получается из (96, 14) при $t = 0$.

Уравнение (96, 20) интегрируется в бесселевых функциях порядка одной трети от чисто мнимого аргумента. Именно, общий интеграл однородного уравнения

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} - \frac{4\pi N e^2}{ma} t w_0 = 0$$

имеет вид

$$w_0 = \sqrt{t} [A I_{1/3}(\alpha t^{3/2}) + B I_{-1/3}(\alpha t^{3/2})], \quad \alpha = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4\pi N}{ma}} e. \quad (96, 21)$$

Мы его будем писать в несколько иной форме, именно:¹

$$w_0 = A_1 Z_1(\beta t) + A_2 Z_2(\beta t), \quad \beta = \left(\frac{4\pi N e^2}{ma}\right)^{1/3}, \quad (96, 22)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\zeta) &= 3^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt{\zeta} I_{1/3}\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) = \zeta + \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4} + \frac{\zeta^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, \\ Z_2(\zeta) &= 3^{-1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\zeta} I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) = 1 + \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\zeta^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (96, 23)$$

Отсюда, с помощью варьирования произвольных постоянных, может быть обычным способом получено решение неоднородного уравнения (96, 20), именно:

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{a} \int_0^t [Z_2(\beta t) Z_1(\beta \eta) - Z_1(\beta t) Z_2(\beta \eta)] V''(\eta) d\eta + \\ + \left(2\pi N e - \frac{V'(0)}{a}\right) \frac{Z_1(\beta t)}{\beta} - \frac{V(0)}{a} Z_2(\beta t). \end{aligned} \quad (96, 24)$$

Будучи внесено в (96, 19), это дает:

$$\begin{aligned} u = -4\pi \int_0^t I(\eta) d\eta = \frac{1}{a} \int_0^t [Z_2(\beta t) Z_1(\beta \eta) - Z_1(\beta t) Z_2(\beta \eta)] V''(\eta) d\eta + \\ + \left(2\pi N e - \frac{V'(0)}{a}\right) \frac{Z_1(\beta t)}{\beta} - \frac{V(0)}{a} Z_2(\beta t) + \frac{V(0)}{a} - 2\pi N e t, \end{aligned} \quad (96, 25)$$

¹ Таблицы функций $I_{\pm 1/3}(x)$ опубликованы Динником (для $0 \leq x \leq 8$) [Arch. der Math. u. Phys., (3) XXII, 1914, стр. 226—227]. Для функции $K_{1/3}(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \{ I_{-1/3}(x) - I_{1/3}(x) \}$ имеются таблицы в книге Watson'a В. Ф. для значений в интервале $0 \leq x \leq 16$.

Очень подробные таблицы функций $u(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi \zeta}{3}} \left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) \right]$ и $v(\zeta) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi \zeta}{3}} \left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) - I_{1/3}\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) \right]$, а также их производных $u'(\zeta)$ и $v'(\zeta)$,

через которые наши $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$ непосредственно выражаются, даны академиком В. А. Фоком. См.: В. А. Фок. Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.

Ниже мы даем краткую таблицу значений функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$, а также производных и интегралов от них.

откуда можно дифференцированием найти ток $I(t)$. Далее, можно отсюда и из (96, 11) получить также значение $E_{i,\tau}$, а из него, при учете формул (96, 4), (96, 5), также $x_{i,\tau}$, в частности $x_{i,0} = \xi = \xi(t)$. Если при этом окажется, что $\frac{\partial x_{i,\tau}}{\partial \tau} > 0$ для всех t в некотором интервале $0 \leq t \leq t_1$, то полученное решение применимо либо до самого момента $t = t_1$, если к этому времени „головные“ электроны еще не долетели до анода, а поле $E_p(t)$ у катода не обратилось в некоторый более ранний момент в нуль, либо же, если одно из этих обстоятельств имело место, то лишь до более раннего — $t = T_1$ — из них.

Раз $I(t)$ и $x_{i,\tau}$ известны, то можно немедленно найти также распределение потенциала.¹ Мы, однако, здесь в это входить не будем.

96.3. Чтобы рассмотреть простой пример, возьмем случай не зависящего от времени анодного напряжения $V(t) = V_0$. При этом первый член в (96, 25) выпадает и получается:

$$u = 2\pi Ne \left[\frac{Z_1(\beta t)}{\beta} - t \right] - \frac{V_0}{a} \left[Z_2(\beta t) - 1 \right]. \quad (96, 26)$$

Отсюда с помощью дифференцирования можно найти $I(t)$.

Исследуем сперва случай $\beta T_1 \ll 1$.²

Вследствие малости величины βt , воспользуемся разложениями функций $Z_1(\beta t)$ и $Z_2(\beta t)$ в ряды, причем получим, используя значение β из (96, 22):

$$u(t) = -\frac{2\pi Ne^2 V_0}{3ma^2} t^3 + \frac{2\pi^2 N^2 e^3}{3ma} t^4 + \dots, \quad (96, 27)$$

откуда следует, что

$$I(t) = \frac{Ne^2 V_0}{2ma^2} t^2 - \dots \quad (96, 28)$$

При $t = 0$ получается, что $I(0) = 0$. Это объясняется тем, что мы пренебрегли временем установления электромагнитного поля, а стало быть и током смещения, пронизывающим диод в момент включения напряжения V_0 (теоретически, бесконечно-большим при таких условиях), и имеем дело лишь с тем полным током, который вызывается только движением электронов уже по окончании процесса установления.³ После этого ток нарастает приблизительно квадратично. Последнее обстоятельство можно было бы также проще и непосредственнее рассмотреть следующим образом: если электронная плотность мала, то

¹ Подобно тому, как это делалось, например, в п. 90.5.

² Это соответствует малым плотностям заряда и большим полям.

³ Если процесс установления совершается не мгновенно, а в течение некоторого конечного, хотя бы и очень короткого времени, то в $I(0)$ войдет и ток смещения. Ср. второе уравнение (96, 18), из которого получается значение $I(0) = \frac{V'(0)}{4\pi a}$, т. е. как раз начальное значение тока смещения.

в первом приближении можно пренебречь ее влиянием на распределение поля в диоде. Электроны движутся поэтому приблизительно так, как если бы на них действовало только первоначальное постоянное поле $E_0 = -\frac{V_0}{a}$. Поэтому для $x_{t,\tau}$ получаем формулу:

$$x_{t,\tau} = \frac{eV_0}{2ma} (t - \tau)^2. \quad (96,29)$$

Пользуясь ею, можно сосчитать в соответствующем приближении распределение плотности объемного заряда ρ . В самом деле, заряд $dq = -Ned\tau$, покинувший катод за время $d\tau$, достигает к моменту t , согласно уравнению (96,29), точки с координатой

$$x = \frac{eV_0}{2ma} (t - \tau)^2 \quad (96,30)$$

и распределяется в слое толщиной

$$|dx| = \frac{eV_0}{ma} (t - \tau) d\tau.$$

Отсюда получается:

$$\rho = \frac{dq}{|dx|} = -\frac{Nma}{V_0(t - \tau)} = -N \sqrt{\frac{ema}{2V_0}} x^{-1/2}. \quad (96,31)$$

Зная распределение объемной плотности ρ , можно найти в следующем приближении вызванное ею искажение поля. Именно, из уравнения Пуассона получаем:

$$E_x = E_0 + 4\pi \int_0^x \rho dx = E_0 - 4\pi N \sqrt{\frac{2ema}{V_0}} x^{1/2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (96,32)$$

$$\varphi = -E_0 x + \frac{8\pi N}{3} \sqrt{\frac{2ema}{V_0}} x^{3/2},$$

где E_x и E_0 — значения электрического поля соответственно в точке x и у катода.

Чтобы определить величину E_0 , следует учесть, что уравнение (96,32) справедливо лишь в области левее $x = \xi$, тогда как справа от этого места электрическое поле постоянно и равно E_ξ , даваемому формулой (96,32).¹ Для разности потенциалов между анодом и катодом получается поэтому значение

$$V_0 = \varphi_\xi - (a - \xi) E_\xi = -E_0 \xi + \frac{8\pi N}{3} \sqrt{\frac{2ema}{V_0}} \xi^{3/2} - (a - \xi) E_\xi =$$

$$= -\frac{4\pi N}{3} \sqrt{\frac{2ema}{V_0}} \xi^{3/2} - a E_\xi, \quad (96,33)$$

последнее опять с помощью (96,32). Замечая, что E_ξ — в то же время поле около анода, и, учитывая, что мы ограничиваемся рассмотрением

¹ Ибо, поскольку в плоскости $x = \xi$ нет никаких поверхностных зарядов, то электрическое поле E_x непрерывно в этой точке.

лишь столь малых времен, что электроны еще не достигли анода, видим, что полный ток в смежности с анодом состоит исключительно из тока смещения. Отсюда следует, что

$$I(t) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial E_{\xi}}{\partial t} = \frac{N}{2a} \sqrt{\frac{2ema}{V_0}} \xi^{1/2} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \frac{Ne^2 V_0}{2ma^2} t^2. \quad (96,34)$$

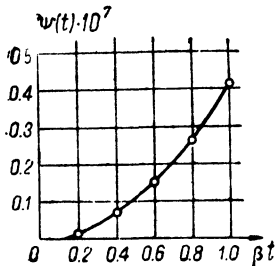


Рис. 163.

Таким образом значение тока, получаемое по формуле (96,34), в точности совпадает с первым членом формулы (96,28), что и желательно было показать.

96.4. Чтобы яснее представить себе порядки величин, разберем конкретный пример.

Пусть $a = 1$ см, $V_0 = 100$ вольт,

$Ne = 3 \cdot 10^6$ С.Г.С.Е. (вольфрам при 2000 К).

В абсолютных единицах при этом $V_0 = 1/3$ и $\beta \cong 2.71 \cdot 10^8$. Подставляя эти значения в формулу (96,26), находим:

$$u = 1.89 \cdot 10^7 \left[\frac{Z_1(2.71 \cdot 10^8 t)}{2.71 \cdot 10^8} - t \right] - \frac{1}{3} [Z_2(2.71 \cdot 10^8 t) - 1],$$

а для тока $I(t)$:

$$4\pi I(t) = 0.903 \cdot 10^8 Z_2'(2.71 \cdot 10^8 t) - 0.189 \cdot 10^8 [Z_1'(2.71 \cdot 10^8 t) - 1].$$

Время пробега электрона в данном случае наверное меньше, чем при отсутствии объемного заряда.¹ В этом последнем случае получаем для t из (96,29) значение $3.36 \cdot 10^{-9}$ сек. Стало быть, $\beta t < 0.91$, и ток можно рассчитывать с помощью прилагаемой таблицы I, в которой даны значения $Z_1(\zeta)$, $Z_2(\zeta)$, $Z_1'(\zeta)$ и $Z_2'(\zeta)$ для $0 \leq \zeta \leq 1.5$. Первые два столбца этой таблицы содержат значения самих функций $Z_1(\zeta)$ и $Z_2(\zeta)$, столбцы III и IV — их производные $Z_1'(\zeta)$ и $Z_2'(\zeta)$ и, наконец, столбцы

V и VI — интегралы $\int_0^{\zeta} Z_1(\zeta) d\zeta$ и $\int_0^{\zeta} Z_2(\zeta) d\zeta$. Из III и IV получаются

заодно и значения интегралов $\int_0^{\zeta} \zeta Z_1 d\zeta$ и $\int_0^{\zeta} \zeta Z_2 d\zeta$, поскольку имеют место соотношения

$$\frac{dZ_1}{d\zeta} = 1 + \int_0^{\zeta} \zeta Z_1 d\zeta, \quad \frac{dZ_2}{d\zeta} = 1 + \int_0^{\zeta} \zeta Z_2 d\zeta. \quad (96,35)$$

С помощью этой таблицы построена данная на рис. 163 кривая, изображающая ход функции $\psi(t) = u'(t)$. Само собой разумеется, что с помощью этой формулы или кривой можно вычислять значения тока только до того момента, пока головные электроны не достигли

¹ Так как, согласно (96,29), $\xi = \frac{eV_0}{2ma} t^2$.

² Ибо головные электроны подталкиваются идущими сзади и проходят поэтому расстояние до анода быстрее, чем если бы позади них электронов не было.

анода или пока электрическое поле около катода не обратится в нуль. Интересующее нас значение $t = T_1$ может быть при этом найдено из формул (96,4) и (96,11) или (96,9) и (96,26), с помощью таблицы I.

Т а б л и ц а I

ζ	I	II	III	IV	V	VI
	$Z_1(\zeta)$	$Z_2(\zeta)$	$Z'_1(\zeta)$	$Z'_2(\zeta)$	$\int_0^\zeta Z_1 d\zeta$	$\int_0^\zeta Z_2 d\zeta$
0.0	0.00000	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.10000	1.00017	1.00033	0.00500	0.00500	0.10000
0.2	0.20013	1.00133	1.00267	0.02001	0.02001	0.20007
0.3	0.30068	1.00450	1.00901	0.04508	0.04504	0.30034
0.4	0.40213	1.01069	1.02139	0.08034	0.08017	0.40107
0.5	0.50523	1.02092	1.04188	0.12604	0.12552	0.50261
0.6	0.61086	1.03626	1.07265	0.18260	0.18130	0.60542
0.7	0.72017	1.05782	1.11598	0.25064	0.24782	0.71007
0.8	0.83455	1.08680	1.17434	0.33104	0.32550	0.81723
0.9	0.95563	1.12448	1.25047	0.42498	0.41495	0.92772
1.0	1.08534	1.17230	1.34744	0.53404	0.51692	1.04247
1.1	1.22593	1.23185	1.46880	0.66020	0.63238	1.16258
1.2	1.38005	1.30499	1.61863	0.80598	0.76255	1.28929
1.3	1.55077	1.39381	1.80175	0.97454	0.90894	1.42408
1.4	1.74170	1.50078	2.02391	1.16981	1.07338	1.56866
1.5	1.95708	1.62883	2.29192	1.39655	1.25810	1.72496

96.5. Мы не проверяли, выполняется ли в данном случае условие $\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial \tau} > 0$ до момента достижения электронным фронтом анода или до момента, когда E_k обращается в нуль, ибо из физических соображений очевидно, что в подобном режиме, когда первичное поле создается мгновенно приложенным и далее уже неизменяющимся постоянным анодным напряжением, электроны друг друга обгонять не могут. Остановимся, однако, несколько подробнее на вопросе о том, при каких условиях поле E_k у катода вообще может обращаться в нуль в течение рассматриваемой стадии изучаемого процесса. Это, очевидно, неизбежно должно случиться, если эмиссия катода достаточно велика, а приложенное анодное напряжение относительно мало.

С целью выяснить вопрос, будем исходить из формулы (96,9) для $E_k(t)$, которая при постоянном анодном напряжении $V(t) = V_0$ принимает вид

$$E_k(t) = -\frac{V_0}{a} + 4\pi Net + u(t), \quad (96,36)$$

и введем в нее значение (96,26) $u(t)$, которое теперь запишем так:

$$u(t) = \frac{2\pi I_s}{\beta} [Z_1(\rho) - \rho] - \frac{V_0}{a} [Z_2(\rho) - 1], \quad \beta = \left(\frac{4\pi e I_s}{ma}\right)^{1/3}, \quad \rho = \beta t, \quad (96,37)$$

причем $I_s = Ne$ — абсолютная величина плотности исходящего из катода эмиссионного тока.

Будем теперь искать тот момент $t = T$, в который E_k обращается в нуль. Для его определения получаем из (96,36) уравнение:

$$4\pi I_s T + u(T) = \frac{V_0}{a},$$

которое можно записать и в такой форме:

$$F(\rho_0) = K, \quad (96,38)$$

где

$$F(\rho) = \frac{Z_1(\rho) + \rho}{Z_2(\rho)}, \quad K = \frac{V_0^3}{2\pi I_s a}, \quad \rho_0 = \beta T. \quad (96,39)$$

Исследуем ход функции $F(\rho)$. Значения ее даны в таблице II, причем рассматривается интервал изменения ρ от нуля до $\rho = 1.6$. Значение $\rho = 1.6$ приблизительно соответствует максимуму функции $F(\rho)$. Для больших значений ρ функция $F(\rho)$ постепенно убывает и достигает при $\rho = \infty$ предельного значения $F(\infty) = 3^{2/3} \Gamma(4/3) / \Gamma(2/3) = 1.371$.

Т а б л и ц а II

ρ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$F(\rho)$	0	0.2	0.4	0.60	0.79	0.98	1.17	1.34	1.50	1.65	1.78	1.89	1.98	2.04	2.10	2.12	2.14

Из этого видно, что обращение в нуль поля E_k может во всяком случае наступать только при таких условиях работы диода, когда величина K не превосходит значения $[F(\rho)]_{\max} \cong 2.14$.¹ Это соответствует „критическому“ анодному напряжению V_k , которое связано с эмиссионным током $I_s = Ne$ соотношением

$$\frac{V_k}{2\pi a I_s} \cdot \left(\frac{4\pi e I_s}{ma} \right)^{1/3} = [F(\rho)]_{\max}, \quad \text{т. е.} \quad I_s = \frac{0.226}{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \cdot \frac{V_k^{3/2}}{a^2}.$$

Интересно сравнить это анодное напряжение с тем напряжением, которое должно было бы вызвать по закону Лангмюра тот же ток I_s в случае, если бы закон Лангмюра был верен вплоть до такого значения тока. Это анодное напряжение V_L определяется уравнением

$$I_s = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^{1/2} \cdot \frac{V_L^{3/2}}{a^2}.$$

¹ Заметим, что так как при данных a и V_0 и при $I_s \rightarrow \infty$ K стремится к нулю, то при достаточно большой эмиссии катода K очень мало, а потому мало и ρ_0 . При этом $F(\rho_0) \cong 2\rho_0$ [ср. (96,23)], так что $T = \rho_0/\beta \cong K/2\beta = V_0/4\pi a I_s \rightarrow 0$. Из этого видно, что время T , в течение которого внезапно возникшее около катода поле $E^0 = V_0/a$ снижается до нуля, весьма мало при достаточно большой эмиссии I_s , что и оправдывает введенное в п. 90.2 допущение о том, что при достаточно большой эмиссии катода можно и при рассмотрении нестационарных явлений считать, при указанных там условиях, E_k равным нулю (практически) в любой момент.

Сравнение показывает, что $V_k = 0.79 V_L$. Таким образом, V_k составляет примерно 79% лангмюровского напряжения. Из этого следует, что обращение в нуль поля E_k может во всяком случае иметь место только при $V_k < 0.79 V_L$.

Собственно говоря, следовало бы еще установить, соответствует ли также каждому значению $K \leq [F(\rho)]_{\max.} \cong 2.14$ физически возможное решение, т. е. не могут ли при этом в некоторых случаях головные электроны достигнуть анода раньше, чем поле E_k обратится в нуль. Мы, однако, на этом здесь останавливаться не будем, ввиду малого интереса этого вопроса, хотя проведение соответствующего исследования на основе выведенных выше общих формул не представило бы никаких затруднений. Ограничимся лишь указанием, что для этого следовало бы прежде всего найти указанным выше способом общее выражение для $x_{i,0} = \xi(t)$ в функции от времени, после чего решить уравнение

$$\xi(t) = a. \quad (96,40)$$

Если бы наименьший положительный корень $t = t_{\min.}$ этого уравнения оказался для некоторого режима меньше находимого решением уравнения (96,38) значения $t = T$, соответствующего обращению в нуль поля у катода, то даваемое формулой (96,26) решение было бы пригодно до самого момента T_a достижения электронным фронтом анода, причем тогда $T_a = t_{\min.}$

Если бы получилось, что $t_{\min.} > T$, то решение (96,26) годилось бы лишь до момента $t = T$. после чего дальнейшее прохождение тока было бы уже ограничено объемным зарядом. Как мы покажем в следующем параграфе, решение может быть получено и для следующей за этим моментом стадии начального режима. К этому теперь и переходим.

§ 97. Вторая возможная стадия начального режима

в плоском диоде

97.1. Речь идет, стало быть, о нахождении движения электронов и распределения потенциала между двумя плоско-параллельными электродами при условии, что анодное напряжение $V(t)$ является заданной функцией времени, а поле у катода обратилось в нуль в момент $t = T$. Если $V(t)$ постоянно или изменяется достаточно медленно, то E_k остается равной нулю также еще в течение некоторого конечного времени после момента $t = T$, и задача заключается в том, чтобы изучить при этом условии соответствующее движение электронов и зависимость от времени проходящего через прибор тока $I(t)$.¹

¹ Если электроны долетают до анода раньше, чем поле E_k вновь становится отличным от нуля, то все нижеследующее верно до момента достижения электронами анода.

Мы примем, стало быть, в дальнейшем, что $E_b(\tau) = 0$ при $\tau \geq T$. Основные уравнения (96,1)–(96,5) сохраняют свою справедливость и при $t > T$,¹ а формула (96,7) приобретает теперь такой вид:

$$E_{t,\tau} = -4\pi \int_{\tau}^t I(\eta) d\eta, \quad (\tau \geq T). \quad (97,1)$$

Уравнение (97,1) дает при $\tau = T$:

$$E_{t,T} = -4\pi \int_T^t I(\eta) d\eta. \quad (97,2)$$

Уравнение движения электронов имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial \tau^2} = -\frac{e}{m} E_{t,\tau}, \quad (x_{t,\tau})_{t=\tau} = 0, \quad \left(\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t}\right)_{t=\tau} = 0, \quad (97,3)$$

что дает с помощью (97,1):

$$x_{t,\tau} = \frac{2\pi e}{m} \int_{\tau}^t (t-\xi)^2 I(\xi) d\xi, \quad (\tau \geq T). \quad (97,4)$$

Эта формула годится лишь для электронов, вышедших из катода после $\tau = T$. Что же касается электронов, для которых $\tau < T$, то для них $x_{t,\tau}$ определяется из того же уравнения движения, но при другом значении величины $E_{t,\tau}$. Это последнее находится из соотношения

$$\int_{x_{t,T}}^{x_{t,\tau}} \frac{\partial E}{\partial x} dx = E_{t,\tau} - E_{t,T} = 4\pi \int_{x_{t,T}}^{x_{t,\tau}} \rho dx = -4\pi Ne(T-\tau), \quad (97,5)$$

последнее потому, что между $x_{t,\tau}$ и $x_{t,T}$ находится заряд $-Ne(T-\tau)$, отданный катодом в межэлектродное пространство за время $(T-\tau)$.

(97,5) и (97,2) дают вместе:

$$E_{t,\tau} = -4\pi(T-\tau)Ne - 4\pi \int_T^t I(\eta) d\eta, \quad \begin{cases} \tau \leq T, \\ t \geq T \end{cases}. \quad (97,6)$$

Отсюда далее следует, что

$$x_{t,\tau} = x_{T,\tau} + \left(\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t}\right)_{t=T} (t-T) + \frac{2\pi Ne^2(T-\tau)}{m} (t-T)^2 + \\ + \frac{2\pi e}{m} \int_T^t (t-\eta)^2 I(\eta) d\eta, \quad \begin{cases} \tau \leq T, \\ t \geq T \end{cases}, \quad (97,7)$$

где $x_{T,\tau}$ и $\left(\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t}\right)_{t=T}$ обозначают координату и скорость соответствующего электрона в момент T .

¹ Уравнение (97,2) справедливо, как всегда, только при условии, что в каждой точке межэлектродного пространства имеются только электроны одной определенной скорости.

97.2. Переходим к нахождению распределения потенциала. Замечаем, прежде всего, что

$$V(t) = - \int_0^a E dx = - \int_0^{\xi} E dx - \int_{\xi}^a E dx = \varphi_{\xi} + \xi E_{\xi} - a E_{\xi}, \quad (97,8)$$

где ξ обозначает, как всегда, координату фронта зарядов. Имеем при этом:

$$\varphi_{\xi} = - \int_0^{\xi} E dx = - \int_{\tau=0}^{\tau=\xi} E_{t, \tau} \frac{\partial x_{t, \tau}}{\partial \tau} d\tau = - \xi E_{\xi} - \int_{\tau=0}^{\tau=\xi} x_{t, \tau} \frac{\partial E_{t, \tau}}{\partial \tau} d\tau, \quad (97,9)$$

последнее в результате интегрирования по частям. (97,6) и (97,1) показывают, что

$$\frac{\partial E_{t, \tau}}{\partial \tau} = 4\pi Ne \text{ при } \tau < T \quad (97,10)$$

и

$$\frac{\partial E_{t, \tau}}{\partial \tau} = 4\pi I(\tau) \text{ при } \tau > T, \quad (97,11)$$

а это дает вместе с (97,8), (97,9) и (97,6):

$$V(t) = 4\pi a \left[NeT + \int_T^t I(\eta) d\eta \right] - 4\pi \left\{ Ne \int_0^T x_{t, \tau} d\tau + \int_T^t x_{t, \eta} I(\eta) d\eta \right\}. \quad (97,12)$$

Чтобы определить отсюда ток $I(t)$, продифференцируем полученную формулу дважды по времени. Отдельные члены получившегося уравнения могут быть, при использовании формул (97,7) и (97,4), переписаны следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_0^T x_{t, \tau} d\tau \right\} = \frac{2\pi Ne^2 T^2}{m} + \frac{4\pi e T}{m} \int_T^t I(\eta) d\eta, \quad (97,13)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_T^t x_{t, \eta} I(\eta) d\eta \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{2\pi e}{m} \int_T^t I(\eta) d\eta \int_{\eta}^t (t - \zeta)^2 I(\zeta) d\zeta \right\} = \\ &= \frac{4\pi e}{m} \int_T^t I(\eta) d\eta \int_{\eta}^t I(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (97,14)$$

Этому выражению можно придать также следующую форму:

$$\frac{4\pi e}{m} \int_T^t I(\eta) d\eta \int_{\eta}^t I(\zeta) d\zeta = \frac{2\pi e}{m} \left[\int_T^t I(\eta) d\eta \right]^2, \quad (97,15)$$

в чем нетрудно убедиться дифференцированием, если еще учесть, что правая и левая сторона полученного равенства одновременно обращаются в нуль при $t = T$. Если еще ввести обозначение

$$\psi = \int_{\gamma}^t I(\eta) d\eta, \quad (97,16)$$

то дважды продифференцированная формула (97,12) дает уравнение

$$\begin{aligned} V''(t) &= 4\pi a \frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{16\pi^2 Ne^2 T}{m} \psi - \frac{8\pi^2 N^2 e^3 T^2}{m} - \frac{8\pi^2 e}{m} \psi^2 = \\ &= 4\pi a \left[\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{2\pi e}{ma} (\psi + NeT)^2 \right]. \end{aligned} \quad (97,17)$$

Это как раз и есть искомая зависимость, из которой можно также найти $I(t) = \frac{d\psi}{dt}$. В частности, если анодное напряжение не зависит от времени, то полученное уравнение второго порядка можно непосредственно проинтегрировать. Первый интеграл его имеет вид

$$\psi'^2 = \frac{4\pi e}{3ma} [(\psi + NeT)^3 - (NeT)^3] + [I(T)]^2. \quad (97,18)$$

Здесь следовало бы, собственно говоря, писать $I(T+0)$ вместо $I(T)$. Наряду с этим, формула (96,25) дает после дифференцирования значение $I(T-0)$. Но $I(T+0) = I(T-0)$, что становится непосредственно ясным, если сравнить формулу (96,15), в которой следует положить $t = T$, с продифференцированным по времени уравнением (97,12) (тоже при $t = T$). При этом получается, что

$$I(T) = I(T+0) = I(T-0) = Ne\chi(\rho_0), \quad \rho_0 = \beta T,$$

где

$$\chi(\rho_0) = \frac{Z_1(\rho_0)Z_2'(\rho_0) - Z_1'(\rho_0)Z_2(\rho_0) + \rho_0 Z_2'(\rho_0)}{2Z_2(\rho_0)} + \frac{1}{2} = \frac{\rho_0 Z_2'(\rho_0) - 1}{2Z_2(\rho_0)} + \frac{1}{2}. \quad (97,19)$$

В приводимой здесь таблице I даны значения функции $\chi(\rho)$ для $0 \leq \rho \leq 1.6$.

Таблица I

ρ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$\chi(\rho)$	0.000	0.000	0.003	0.009	0.022	0.041	0.067	0.110	0.161	0.225	0.300	0.39	0.49	0.60	0.71	0.84	1.0

Итак

$$\psi'^2 = \frac{4\pi e}{3ma} \left\{ (\psi + NeT)^3 - (NeT)^3 \left[1 - \frac{3\chi^2(\rho_0)}{\rho_0^3} \right] \right\}. \quad (97,20)$$

Второе интегрирование дает:

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{(\psi + NeT)^3 - (NeT)^3 \left[1 - \frac{3\chi^2(\rho_0)}{\rho_0^3} \right]}} = \sqrt{\frac{4\pi e}{3ma}} (t - T), \quad (97,21)$$

откуда видно, что ψ выражается в зависимости от времени через эллиптические функции. Если определить из (97,21) $\psi(t)$, то $I(t)$ найдется дифференцированием $\psi(t)$ по времени.

97.3. Чтобы привести стоящий слева интеграл к каноническому виду, введем новую переменную θ посредством соотношения:

$$\psi + NeT = NeT \left[1 - \frac{3\chi^2(\rho_0)}{\rho_0^3} \right]^{1/3} \cdot \left[1 + \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right]^1 \quad (97,22)$$

Приходим к формуле:

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{(\psi + NeT)^3 - (NeT)^3 \left[1 - \frac{3\chi^2(\rho_0)}{\rho_0^3} \right]}} = \frac{1}{3^{1/4} \sqrt{NeT} \left[1 - \frac{3\chi^2(\rho_0)}{\rho_0^3} \right]^{1/6}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \sin^2 \theta}}, \quad (97,23)$$

причем справа следует выбрать пределы интегрирования в соответствии с формулой (97,22). Таким образом, получаем полное решение задачи.

97.4. Добавим еще одно замечание насчет случая, когда рассматриваемый диод составляет часть контура (рис. 164), в который внезапно включается электродвижущая сила $E^{(ст.)} = E^{(ст.)}(t)$.

Если контур можно рассматривать как квазистационарный и если он содержит, кроме диода, еще самоиндукцию L , емкость C и сопротивление R , то, обозначая, как раньше, через V мгновенное значение анодного напряжения в диоде, получим соотношение:

$$L \frac{dI_n}{dt} + RI_n + \frac{1}{C} \int_0^t I_n(\xi) d\xi + V(t) = E^{(ст.)}(t). \quad (97,24)$$

Здесь I_n — полный ток, протекающий через всю цепь, а стало быть и через диод. Приближенно можно положить $I_n \cong IS$, где I имеет то же значение, как в (96,10) и (96,17), а S — поверхность пластин диода.²

¹ Функция $\pi(\rho) = 1 - \frac{3\chi^2(\rho)}{\rho^3}$ положительна при всех возможных входных значениях ρ .

² При этом пренебрегаем крайвым эффектом в диоде.

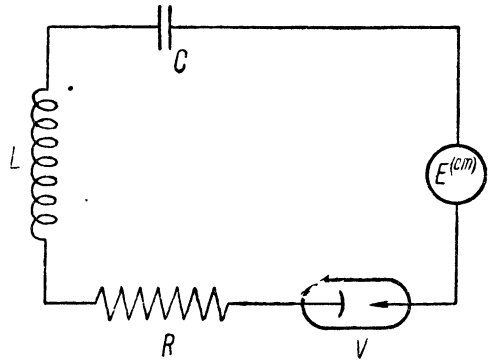


Рис. 164.

Поэтому, если процесс прохождения тока находится в разобранной в § 96 стадии (т. е. если $E_k \neq 0$), то из уравнений (96,17) и (97,24) можно исключить V , дифференцируя (97,24) дважды по t , вводя вместо I величину $-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{du}{dt}$ и подставляя получающееся при этом значение $V''(t)$ в (96,17). Таким путем придем к линейному уравнению четвертого порядка для u , из которого и надо будет определить искомый ток.

Если же процесс перешел уже во вторую стадию, когда $E_k = 0$, то, дифференцируя (97,24) дважды по t и подставляя в полученное уравнение значение $I = \frac{d\psi}{dt}$ из (97,16) и значение $V''(t)$ из (97,17), получим уравнение для ψ , которое тоже будет четвертого порядка, но уже нелинейное. Найдя из него ψ , найдем и искомое значение тока, поскольку $I(t) = \frac{d\psi}{dt}$.

97.5. Мы предположили, что рассматриваемая система может быть описана простым уравнением (97,24). Если это не так, и нужно ее рассматривать как систему с распределенными постоянными, то уравнение (97,24) заменится уравнением¹ с частными производными, причем падение напряжения V на диоде свяжется с проходящим через него током I_n некоторым граничным условием. Исключая напряжение V и ток $I_n \cong IS$, из этого условия и из описывающих поведение системы уравнений с помощью соотношений (96,10) и (96,17) или уравнений (97,16) и (97,17), в зависимости от стадии прохождения начального тока, получим уравнения в частных производных для u или для ψ , соответственно, из которых их и нужно будет определить.

§ 98. Начальный ток в плоском магнетроне

98.1. Перейдем теперь к случаю наличия постоянного магнитного поля и рассмотрим совсем коротко вопрос о начальном токе, проходящем через плоский диод при включении импульсного напряжения. Ограничимся при этом рассмотрением той стадии начального процесса, возникающего после включения напряжения, когда головные электроны еще не успели достигнуть анода, электрическое поле у катода не обратилось в нуль, а электроны еще не успели изменить направления своего движения от катода к аноду на обратное.

Сохраняем прежние обозначения и выбираем координатные оси так, что электрическое поле, направленное перпендикулярно к плоскостям пластин, направлено по положительной оси X . Перпендикулярное к нему постоянное магнитное поле будем считать направленным по оси Z , тогда как ось Y пусть составляет с первыми двумя осями обычный правый триедр.

¹ Или системой уравнений.

Будем считать, что покидающие катод электроны обладают некоторой начальной скоростью $v_x^0 = \alpha$ в направлении оси X . Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m} E_{t,\tau} - \omega \frac{\partial y_{t,\tau}}{\partial t}, \quad \omega = \frac{eH}{mc}, \\ \frac{\partial^2 y_{t,\tau}}{\partial t^2} &= \omega \frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t}, \\ (x_{t,\tau})_{t=\tau} &= 0, \\ \left(\frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t}\right)_{t=\tau} &= v_x^0 = \alpha, \quad \left(\frac{\partial y_{t,\tau}}{\partial t}\right)_{t=\tau} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (98,1)$$

Интегрирование второго из этих уравнений дает:

$$\frac{\partial y_{t,\tau}}{\partial t} = \omega x_{t,\tau}, \quad (98,2)$$

что, после подстановки в первое уравнение, переводит его в такое:

$$\frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial t^2} = -\frac{e}{m} E_{t,\tau} - \omega^2 x_{t,\tau}. \quad (98,3)$$

К этим двум уравнениям присоединяется уравнение (96,11) для поля, именно

$$E_{t,\tau} = E_0 + 4\pi Ne\tau + u(t). \quad (93,4)$$

Интегрируя уравнение (98,3) находим

$$x_{t,\tau} = \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega(t-\tau) - \frac{e}{mc} \int_{\tau}^t E_{\eta,\tau} \sin \omega(t-\eta) d\eta. \quad (98,5)$$

Теперь можем использовать, так же, как в случае отсутствия магнитного поля, формулу (96,14), т. е.

$$V(t) + a[E_0 + u(t)] = -4\pi Ne \int_0^t x_{t,\tau} d\tau. \quad (98,6)$$

Интеграл

$$J = \int_0^t x_{t,\tau} d\tau$$

удовлетворяет простому дифференциальному уравнению, именно:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + \omega^2 J = \alpha + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 x_{t,\tau}}{\partial t^2} + \omega^2 x_{t,\tau} \right) d\tau = \alpha - \frac{e}{m} \int_0^t E_{t,\tau} d\tau, \quad (98,7)$$

последнее из (98,3). Подстановка значения $E_{t,\tau}$ из (98,4) переводит это уравнение в такое:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + \omega^2 J = \alpha - \frac{e}{m} [E_0 t + 2\pi Ne t^2] - \frac{e}{m} t \cdot u(t). \quad (98,8)$$

¹ Это уравнение, как следует из его вывода, остается в силе и при наличии магнитного поля.

Подставляя сюда вместо J его значение из уравнения (98,6), приходим к искомому соотношению:

$$u''(t) + \left(\omega^2 - \frac{4\pi Ne^2}{ma} t \right) u(t) = -\frac{V'' + V\omega^2}{a} + \frac{4\pi Ne^2}{ma} [E_0 t + 2\pi N e t^2] - \omega^2 E_0 - \frac{4\pi Ne^2}{a}, \quad (98,9)$$

Это уравнение принадлежит к тому же типу, как (96,17),¹ и интеграл его выражается через бесселевы функции порядка одной трети.

§ 99. Теорема Шокли

99.1. В заключение приведем еще изящную теорему Шокли,² относящуюся к вычислению токов, наводимых на проводниках движущимися относительно них зарядами.

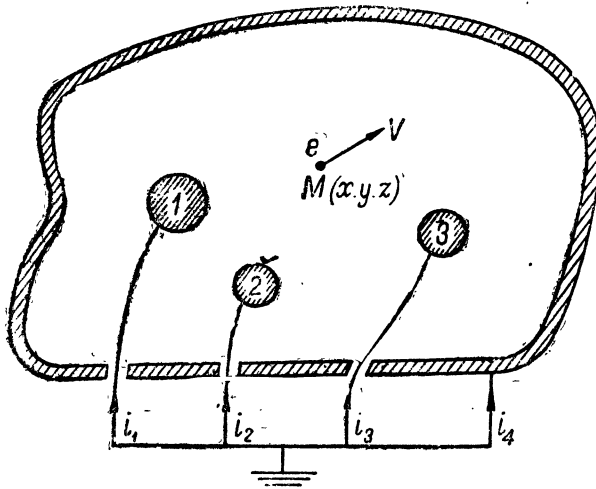


Рис. 165.

Сущность дела сводится к следующему: пусть в пространстве³ имеется n проводников, форма и взаимное расположение которых известны и которые считаем заземленными (рис. 165). Пусть, далее, между проводниками движется точечный заряд e со скоростью, которая мала по сравнению со скоростью света, так что можно пренебречь временем распро-

странения волн через систему и рассчитывать поле в каждой точке системы на основе чисто электростатических соображений.

Тогда, обозначая через q_k мгновенное значение заряда, наводимого на k -ом проводнике зарядом e в момент t , найдем для тока i_k , подтекающего извне к этому проводнику в результате движения заряда e :

$$i_k = \frac{dq_k}{dt}. \quad (99,1)$$

Этот результат можно представить в другой форме, если заметить, что заряд q_k , о котором идет речь, удовлетворяет соотношению

$$q_k = -e\varphi_k(M), \quad (99,2)$$

¹ Если ввести в уравнение (98,9) новую независимую переменную $t_1 = t - \frac{m a \omega^2}{4\pi N e^2}$, то оно переходит в уже проинтегрированное уравнение типа (96,17)—(96,20).

² W. Shockley, Journ. of Appl. Physics, 3, 635, 1938.

³ В пустоте.

где $\varphi_k(M) = \varphi_k(x, y, z)$ — тот потенциал в точке $M(x, y, z)$, где в момент t находится заряд e , который получается в предположении, что заряд e вообще отсутствует, k -ый проводник имеет потенциал, равный единице, а остальные проводники имеют потенциалы, равные нулю.

Чтобы это доказать, исходим из гриновской теоремы взаимности,¹ которая, если обозначить заряды и потенциалы проводников в одном состоянии системы через (q'_i, V_i) , а во втором — через (q''_i, V''_i) , записывается так:

$$\sum_{(i)} (q'_i V''_i - q''_i V_i) = 0, \quad (99,3)$$

причем суммирование распространяется на все проводники системы.

Чтобы применить эту теорему к доказательству соотношения (99,2), добавим к нашей системе проводников еще исчезающе-малый проводник в точке M , которому присвоим нулевой индекс, и сравним два состояния такой расширенной системы, а именно:

1) Нулевой проводник не заряжен, k -ый имеет потенциал, равный единице, 2-ой, 3-ий, ..., n -ый имеют потенциалы, равные нулю.

Заряды q'_i и потенциалы V'_i удовлетворяют, стало быть, условиям:

$$V'_0 = \varphi_k(M), \quad V'_1 = V'_2 = V'_3 = \dots = V'_{k-1} = 0, \quad V'_k = 1, \quad V'_{k+1} = V'_{k+2} = \dots = V'_n = 0, \quad q'_0 = 0.$$

2) На нулевом проводнике находится заряд e . Все остальные проводники заземлены.

Тогда $q''_0 = e$, $q''_k = q_k$ ² и $V''_1 = V''_2 = \dots = V''_n = 0$. (99,3) дает теперь:

$$0 = \sum_{i=0}^{i=n} (q''_i V'_i - q'_i V''_i) = e\varphi_k(M) + q_k,$$

а это и есть (99,2).

Подставляя (99,2) в (99,1), находим:

$$i_k = -e \frac{d\varphi_k(x, y, z)}{dt} = -e \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \dot{z} \right\} = \\ = -e(\text{grad } \varphi_k, \mathbf{v}) = e(\mathbf{E}_k, \mathbf{v}),$$

т. е.

$$i_k = e(\mathbf{E}_k, \mathbf{v}), \quad (99,4)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости заряда e в момент t , а \mathbf{E}_k — электрическое поле, вызываемое в точке M потенциалом, равным единице на k -ом проводнике, когда все остальные проводники заземлены.

Формула (99,4) и дает значение тока, подтекающего к k -ому проводнику в результате перемещения заряда e .

¹ Ср. п. 63. 6.

² Согласно данному выше определению заряда q_k .

99.2. Дадим несколько приложений формулы (99,4).

Пример 1. Пусть точечный заряд e движется между пластинами бесконечного плоского конденсатора от катода к аноду. Требуется вычислить создаваемый его движением ток через конденсатор.

Обозначим расстояние между пластинами конденсатора через a .

Так как в данном случае поле E равно $\frac{1}{a}$ и направлено от анода к катоду, то подтекающий извне к анодной пластине ток i равен, согласно (99,4):

$$i = -\frac{ev}{a}, \quad (99,5)$$

где v — обозначает перпендикулярную к пластинам и направленную в сторону анода составляющую скорости движения заряда e .

Пример 2. Пусть рассматривается ток i , возникающий при движении заряда e в цилиндрическом конденсаторе с внутренним и внешним радиусами a и b .

Так как поле в цилиндрическом конденсаторе радиально и при анодном напряжении, равном единице, имеет в точке, отстоящей на расстоянии r от оси, значение

$$E_r = -\frac{1}{\lg\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{r}, \quad (99,6)$$

то ток i , создаваемый находящимся в этой точке зарядом e , имеющим радиальную скорость v , равен, согласно (99,4):

$$i = -\frac{ev}{\lg\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{r}. \quad (99,7)$$

99.3. Применим теперь формулу (99,5) к уже рассматривавшемуся выше иным способом вопросу о приближенном расчете величины импульсного тока, текущего через плоский конденсатор в первые моменты после мгновенного включения постоянного напряжения V_0 .¹

Приближенный расчет велся в п. 96.3 на основе допущения, что искажением первичного однородного поля $E_0 = \frac{V_0}{a}$ электронами, вышедшими из катода до рассматриваемого момента, можно пренебречь. В этом предположении координата $x_{t,\tau}$ электрона, вышедшего в момент τ из катода, дается формулой

$$x_{t,\tau} = \frac{eV_0}{2ma} (t - \tau)^2, \quad (96,29)$$

а скорость его —

$$v = \frac{\partial x_{t,\tau}}{\partial t} = \frac{eV_0}{ma} (t - \tau). \quad (99,8)$$

¹ Прежде, чем первые электроны достигают анода; см. п. 96.3.

Согласно (99,5), ток, создаваемый зарядами $de = \rho dx$, находящимися в слое толщиной dx , равен:

$$di = -\frac{de}{a} v = -\frac{\rho v}{a} dx. \quad (99,9)$$

Так как для ρ имели формулу (96,31), именно:

$$\rho = -\frac{Nm\tau}{V_0(t-\tau)},$$

то, подставляя это и (99,8) в (99,9), получим:

$$di = \frac{eN}{a} dx, \quad (99,10)$$

а для полного тока i от всех вышедших из катода электронов:

$$i = \int_{x=0}^{x=\xi} di = \frac{eN}{a} \xi. \quad (99,11)$$

С помощью получаемой из (96,29) при $\tau=0$ формулы для ξ , именно:

$$\xi = x_{t,0} = \frac{eV_0}{2ma} t^2,$$

можно переписать (99,11) в такой форме:

$$i = \frac{e^2NV_0}{2ma^2} t^2, \quad (99,12)$$

что полностью совпадает с (96,34), как оно, конечно, и должно быть.

Многочисленные примеры приложений формулы (99,5) и ей подобных можно найти в литературе по прохождению нестационарных токов через триоды и многосеточные лампы.¹

¹ См., например: Ф. Б. Левелин, Инерция электронов, стр. 27 и т. д., Гостехиздат, М.—Л., 1946.

Дополнение 1

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ГАММА

1. Функция гамма, обозначаемая $\Gamma(z)$, может быть определена для вещественных $z > 0$ формулой Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (D_1 1)$$

причем, в частности, для целых $z = n$ получается значение

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (D_1 2)$$

легко находимое из (D₁ 1) интегрированием по частям.¹

Формула (D₁ 1) годится и для таких комплексных z , что $Re(z) > 0$, причем из нее видно, что для таких z $\Gamma(z)$ — регулярная функция от z .

Исходя из формулы (D₁ 1), Эйлер дал представление гамма-функции в виде отношения двух бесконечных произведений, именно:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (z+k)} n^z, \quad (D_1 3)$$

причем это отношение сходится уже не только при $Re(z) > 0$, но и при любых вещественных или комплексных значениях z , кроме как при $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, и дает, в соответствии с этим, согласно принципу аналитического продолжения, возможность определения функции гамма уже на всей плоскости комплексной переменной z .

2. Функции гамма обладают следующими основными свойствами:

Первое свойство

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (D_1 4)$$

Доказательство. Формула (D₁ 4) может быть получена, либо путем сравнения выражений типа (D₁ 3) для $\Gamma(z)$ и для $\Gamma(z+1)$, или

¹ См. также ниже, формула (D₁ 4).

ее можно получить интегрированием по частям интеграла (Д₁ 1). Последнее дает при $Re(z) > 0$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

т. е. формулу (Д₁ 4), причем хотя при выводе этой формулы считалось, что $Re(z) > 0$, но она, по принципу аналитического продолжения, верна для любых вещественных или комплексных z , кроме как когда z обращается в отрицательное целое число.

Формула (Д₁ 4) показывает, что при любом целом n и произвольном z имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+n) &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = \dots = \\ &= (z+n-1)(z+n-2) \dots z\Gamma(z) = \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} (z+k) \right\} \Gamma(z), \end{aligned}$$

так что

$$(z+n-1)(z+n-2) \dots (z+1)z = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \quad (\text{Д}_1 5)$$

При $z=1$ и замене n на $n-1$ эта формула переходит в (Д₁ 2).

Второе свойство

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (\text{Д}_1 6)$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что полагая в (Д₁ 1) $t=y^2$, можем написать:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2z-1} dy, \quad (\text{Д}_1 7)$$

а для $\Gamma(1-z)$ — аналогично:

$$\Gamma(1-z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{-(2z-1)} dx. \quad (\text{Д}_1 8)$$

причем обе формулы (Д₁ 7) и (Д₁ 8) верны одновременно, если $0 < Re(z) < 1$, поскольку при этом условии входящие в них интегралы сходятся.

Перемножая (Д₁ 7) и (Д₁ 8), найдем:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{y}{x}\right)^{2z-1} dx dy. \quad (\text{Д}_1 9)$$

Будем здесь рассматривать x и y как декартовы координаты на плоскости, причем в (Д₁ 9) интегрирование распространяется на всю

площадь первого квадранта плоскости (x, y) . Если то же интегрирование производить не в декартовых, а в полярных координатах (r, θ) , то так как

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta, \quad (D_1 10)$$

и так как элемент поверхности в полярных координатах равен $rdrd\theta$, причем пределы изменения r и θ в первом квадранте будут соответственно $(0, \infty)$ и $(0, \frac{\pi}{2})$, то можем переписать интеграл $(D_1 9)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{y}{x}\right)^{2z-1} dx dy &= \Gamma(z) \Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2z-1} \theta d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2z-1} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (D_1 11)$$

Полагая здесь $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{u}$, получим:

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1} du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (D_1 12)$$

причем использовано известное значение входящего сюда интеграла,¹ и формула эта, по принципу аналитического продолжения, верна на всей плоскости z .

Третье свойство

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\pi}}. \quad (D_1 13)$$

Доказательство этой формулы будет дано ниже.²

3. Заменяя в $(D_1 5)$ z на $z+1$, найдем:

$$\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\Gamma(z+1) \sin \pi z}. \quad (D_1 14)$$

Полагая здесь $z = n + \varepsilon$, где n — целое положительное число, а $\varepsilon \rightarrow 0$, можем отсюда сразу усмотреть характер тех особенностей, которые гамма-функция имеет в точках $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, именно, что это полюса первого порядка.⁴ Других особых точек гамма-функция не имеет.

¹ Оно проще всего находится интегрированием функции $\frac{u^{2z-1}}{1+u}$ по соответствующим образом выбранному контуру в комплексной плоскости u . См., напр.: Уиттекер — Ватсон, ч. I, стр. 159, пример 1.

² Так называемая формула удвоения гамма-функции.

³ См. ниже п. 4, следствие.

⁴ Ибо $\Gamma(n+1) = n!$

4. Полагая в (Д₁6) $z = \frac{1}{2}$, получим:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (\text{Д}_1 15)$$

что, вместе с (Д₁5), дает:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (\text{Д}_1 16)$$

Через гамма-функцию выражаются также многие важные интегралы, например, так называемая бэта-функция $B(p, q)$, определяемая равенством

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0, \quad (\text{Д}_1 17)$$

для которой получается, как будет сейчас показано, общее выражение:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (\text{Д}_1 18)$$

Отсюда нетрудно также получить значение интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} t \sin^{n-1} t dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}, \quad (\text{Д}_1 19)$$

для чего достаточно положить здесь $\cos^2 t = x$ и применить формулу (Д₁18). Эта формула верна при любых m и n при условии, что их вещественные части положительны.

Доказательство формул (Д₁18) и (Д₁19).

Согласно (Д₁7), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(p) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx, \\ \Gamma(q) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д}_1 20)$$

откуда

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy. \quad (\text{Д}_1 21)$$

Поступая, как при доказательстве формулы (Д₁ 6), т. е. подразумевая под x и y прямоугольные координаты на плоскости и полагая, в соответствии с этим,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д}_1 22)$$

где r и θ — полярные координаты в этой же плоскости, получим из (Д₁ 21):

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \left\{ \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right\} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \right\}.$$

Пользуясь опять формулой (Д₁ 7), найдем отсюда:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}, \quad (\text{Д}_1 23)$$

что только обозначениями отличается от формулы (Д₁ 19). Тем самым доказана как эта формула, так и эквивалентная ей пара формул (Д₁ 17), (Д₁ 18), из которых (Д₁ 19) была получена.

С л е д с т в и е. Из формулы (Д₁ 19) можно получить указанную выше формулу (Д₁ 13) удвоения гамма-функции следующим образом: рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1} 2\varphi d\varphi, \quad (\text{Д}_1 24)$$

который можно представить в двух формах, именно:

1) полагая в (Д₁ 24) $2\varphi = \theta$, найдем, применяя (Д₁ 23) и (Д₁ 15):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^{2s-1}\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1}\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}{2\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}; \end{aligned} \quad (\text{Д}_1 25)$$

2) заменяя в (Д₁ 24) $\sin 2\varphi$ через $2 \sin \varphi \cos \varphi$, будем иметь по той же формуле (Д₁ 23):

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1} 2\varphi d\varphi = 2^{2s-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2s-1}\varphi \sin^{2s-1}\varphi d\varphi = 2^{2s-2} \frac{[\Gamma(s)]^2}{\Gamma(2s)}. \quad (\text{Д}_1 26)$$

Приравнявая оба результата (Д₁ 25) и (Д₁ 26), получим:

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{Д}_1 27)$$

т. е. как раз формулу (Д₁ 13).

5. Логарифмируя и дифференцируя по z формулу (Д₁5), в которой заменим n на $n - 1$, найдем:

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z + n - 1) = \frac{\Gamma'(z + n - 1)}{\Gamma(z + n - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z + 1} + \frac{1}{z + 2} + \dots + \frac{1}{z + n - 2} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad (\text{Д}_1 28)$$

что при $z = 1$ дает:

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}. \quad (\text{Д}_1 29)$$

Если обозначить, как это принято, $\Gamma'(1)$ через $-\gamma$ (это так называемая постоянная Эйлера), причем

$$\Gamma'(1) = -\gamma = -0,5772157 \dots, \quad (\text{Д}_1 30)$$

то (Д₁29) принимает вид:

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma, \quad (\text{Д}_1 31)$$

где n — целое число, большее единицы.

Дополнение 2

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

§ 1. Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$

1. Бесселевым уравнением называется уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0, \quad (\text{Д}_2 1)$$

где ν — вещественное или комплексное число, играющее роль параметра.

Уравнение это имеет при любом ν два частных решения u_1 и u_2 , которые принято обозначать через $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ и которые имеют вид

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s! \Gamma(\nu+s+1)} \quad (\text{Д}_2 2)$$

и

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2s}}{s! \Gamma(-\nu+s+1)}, \quad (\text{Д}_2 3)$$

из которых второе отличается от первого просто заменой ν на $-\nu$.¹ Эти функции носят название бесселевых функций первого рода и ν -ого, соответственно, $(-\nu)$ -ого, порядков.

¹ То, что изображаемые рядами (Д₂2) и (Д₂3) функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ удовлетворяют уравнению (Д₂1), нетрудно проверить непосредственной подстановкой их в это уравнение.

Получающиеся из (Д₂2) и (Д₂3) умножением на $\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}$, соответственно на $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$, ряды для функций $\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x)$ и $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu J_{-\nu}(x)$ сходятся при любых конечных значениях x (вещественных или комплексных) и представляют собой голоморфные на всей комплексной плоскости x функции от x . При $|x| = \infty$ они имеют существенно особую точку. Кроме бесконечности, особой точкой для функции $J_\nu(x)$ может быть только точка $x=0$, причем в случае, когда $\nu = n$, где n — целое положительное число или нуль, $x=0$ является для $J_n(x)$ обыкновенной точкой. Заметим, кроме того, что функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, рассматриваемые не как функции от x , а как функции от ν , являются голоморфными, при любых вещественных или комплексных значениях ν , функциями от этого параметра.

Легко видеть, что при ν , не равном целому числу, функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения (Д₂1). Это ясно из характера их поведения при $x \rightarrow 0$, причем

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad J_{-\nu}(x) \rightarrow \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}, \quad (\text{Д}_2 4)$$

так что, считая для определенности, что $\text{Re}(\nu) > 0$, видим, что первая функция стремится к нулю, тогда как вторая неограниченно возрастает по модулю. Поэтому всякое решение уравнения (Д₂1), отличное от $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, должно, как известно, представляться в виде

$$u = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \quad (\text{Д}_2 5)$$

где A и B — какие-либо постоянные.

Заметим, кстати, что при $\nu = \frac{1}{2}$ ряды (Д₂2) и (Д₂3) суммируются, причем $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ выражаются через элементарные функции. Действительно, подставляя, например, в (Д₂2) значение $\nu = \frac{1}{2}$ и пользуясь значением (Д₁16) для $\Gamma(\nu + s + 1) = \Gamma\left(s + 1 + \frac{1}{2}\right)$, именно

$$\Gamma\left(s + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2s+1)}{2^{s+1}} \sqrt{\pi} = \frac{(2s+1)!}{2^{2s+1} s!} \sqrt{\pi},$$

получим:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+\frac{1}{2}}}{(2s+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (\text{Д}_2 6)$$

Аналогичным образом найдем, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (\text{Д}_2 7)$$

2. Иначе обстоит дело при $\nu = n$, где n — целое число. Именно, считая для определенности, что $n \geq 0$, видим, что все те члены ряда

(D₂3), в которых аргумент $-\nu + s + 1 = s + 1 - n$ входящей в знаменатель функции $\Gamma(-\nu + s + 1)$ отрицателен или равен нулю, обращаются в нуль, ибо при таких значениях аргумента эта функция становится бесконечной. Поэтому в (D₂3) остаются только члены с $s \geq n$, и (D₂3) дает:

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}}{s! \Gamma(-n+s+1)}.$$

Полагая здесь $s = n + k$ и заменяя суммирование по s суммированием по k , получим:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)! \Gamma(k+1)} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = (-1)^n J_n(x), \end{aligned} \quad (D_2 8)$$

последнее из сравнения с (D₂2). Таким образом, при целом n функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ перестают быть линейно-независимыми, так что у нас остается, по существу, только одно решение уравнения (D₂1).

Чтобы получить и в этом случае второе частное решение уравнения (D₂1), независимое от первого, можно поступить таким образом: так как функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ (которые в дальнейшем будем обозначать просто J_ν и $J_{-\nu}$) при любых значениях ν удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 J_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu = 0, \quad (D_2 9)$$

$$\frac{d^2 J_{-\nu}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_{-\nu}}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_{-\nu} = 0, \quad (D_2 10)$$

то считая здесь ν пока произвольным и дифференцируя эти уравнения по ν , получим:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right) = \frac{2\nu}{x^2} J_\nu \quad (D_2 11)$$

и

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right) = \frac{2\nu}{x^2} J_{-\nu}. \quad (D_2 12)$$

Если положить здесь теперь $\nu = n$, где n — целое число, то видно, что каждая из функций

$$\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \text{ и } \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n}$$

в отдельности не удовлетворяет уравнению (D₂1). Но, так как мы видели, что при целом n $J_{-n} = (-1)^n J_n$, так что

$$J_n + (-1)^{n+1} J_{-n} = 0, \quad (D_2 13)$$

то, умножая (Д₂12), где надо положить $\nu = n$, на $(-1)^{n+1}$ и складывая с (Д₂11), где надо произвести аналогичную замену, найдем, что функция

$$u = \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} \quad (\text{Д}_2 14)$$

есть решение уравнения (Д₂1), притом, как нетрудно убедиться, независимое от $J_n(x)$. Обычно принято принимать за стандартное второе решение уравнения (Д₂1) не саму функцию (Д₂14), а функцию, отличающуюся от нее множителем $1/\pi$, т. е.

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} \right], \quad (\text{Д}_2 15)$$

— так называемую функцию Вебера.

Выполняя указанные в формуле (Д₂15) дифференцирования рядов (Д₂2) и (Д₂3) по ν , подставляя затем в получившийся результат $\nu = n$ и пользуясь формулами (Д₁2) и (Д₁29), а также формулой (Д₁14), которая дает

$$\frac{1}{1(-z)} = -\frac{\Gamma(z+1) \sin \pi z}{\pi},$$

откуда

$$\left\{ \frac{d}{dz} \frac{1}{1(-z)} \right\}_{z=n} = -\Gamma(n+1) \cdot \cos n\pi = (-1)^{n+1} n!, \quad (\text{Д}_2 16)$$

сможем найти развернутое выражение для $Y_n(x)$. При этом получится:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\lg \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(n-k-1)!}{(k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(\sum_{s=1}^{s=n+k} \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{s=k} \frac{1}{s} \right), \quad n \geq 0, \quad (\text{Д}_2 17)$$

где γ определяется формулой (Д₁30), а суммы нужно при верхнем пределе, меньшем нижнего, считать равными нулю. В частности будет:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\lg \frac{x}{2} + \gamma \right) - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2k}}{(k!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right]. \quad (\text{Д}_2 18)$$

Наличие в формулах (Д₂17) и (Д₂18) логарифмических членов и членов, содержащих отрицательные степени x при $n \geq 1$, и доказывает наше утверждение о линейной независимости функции $Y_n(x)$ от $J_n(x)$, в выражении которой таких членов нет. В силу этого, всякое решение уравнения (Д₂1) при $\nu = n$ может быть выражено в виде

$$u = AJ_n(x) + BY_n(x), \quad (\text{Д}_2 19)$$

где A и B — некоторые постоянные.

§ 2. Асимптотическая форма решений уравнения Бесселя при $|x| \rightarrow \infty$ и интеграл Пуассона для $J_\nu(x)$

1. Если преобразовать уравнение (Д₂1), принимая за новую функцию величину

$$v = \sqrt{x} u, \quad (\text{Д}_2 20)$$

то для v получится уравнение

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) v = 0. \quad (\text{Д}_2 21)$$

При $|x| \rightarrow \infty$ коэффициент при v сколь угодно мало отличается от единицы, так что уравнение (Д₂21) принимает при этом приближенно вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + v = 0. \quad (\text{Д}_2 22)$$

Так как общий интеграл этого последнего уравнения может быть записан в виде

$$v = A \sin x + B \cos x, \quad (\text{Д}_2 23)$$

где A и B — постоянные, то является естественным предположение что при $|x| \rightarrow \infty$ все интегралы уравнения (Д₂21) стремятся к виду (Д₂23), а выражающиеся через v по формуле (Д₂20) интегралы уравнения (Д₂1), — соответственно к виду

$$u = \frac{v}{\sqrt{x}} \sim \frac{A \sin x + B \cos x}{\sqrt{x}}, \quad (\text{Д}_2 24)$$

причем знак \sim обозначает асимптотическое равенство при $|x| \rightarrow \infty$.

Это предположение можно проверить и подтвердить строгим анализом решений уравнения (Д₂21). Таким образом, (Д₂24) действительно дает асимптотическую форму всех интегралов уравнения (Д₂1).

Мы выше видели, что при $\nu = \pm \frac{1}{2}$, решения уравнения (Д₂1) даже вполне точно выражаются в форме (Д₂24) при любых значениях x , а не только при $|x| \rightarrow \infty$.¹

2. Для того, чтобы найти на самом деле асимптотическое разложение $J_\nu(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, можно воспользоваться тем, что эта функция может быть выражена через определенные интегралы. Например, имеет место формула:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) \cos^{2\nu} \varphi d\varphi, \quad (\text{Д}_2 25)$$

причем для сходимости интеграла должно быть $Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, тогда как x может иметь любое вещественное или комплексное значение. Это интегральное представление функции $J_\nu(x)$ дано Пуассоном.

¹ Это видно и прямо из (Д₂21).

Формулу (Д₂ 25) легко доказать, разлагая под знаком интеграла $\cos(x \sin \varphi)$ в степенной ряд, производя почленное интегрирование получающегося при этом выражения

$$\cos(x \sin \varphi) \cos^{2\nu} \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \sin^{2s} \varphi \cos^{2\nu} \varphi$$

и пользуясь для вычисления интегралов

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2s} \varphi \cos^{2\nu} \varphi d\varphi$$

формулой (Д₁ 19). Правая часть формулы (Д₂ 25) перейдет при этом в ряд (Д₂ 2), чем и докажется справедливость нашего утверждения.

Формула (Д₂ 25) может быть переписана еще в другой форме, если ввести в нее новую переменную с помощью подстановки $\sin \varphi = t$, причем получится:

$$J_{\nu}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt. \quad (\text{Д}_2 26)$$

При $\nu = \frac{1}{2}$ интегрирование сразу выполняется, и получается (Д₂ 6).

Если $\nu = n + \frac{1}{2}$, где n — целое число, то $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = (1-t^2)^n$ — полином относительно t^2 , а потому, производя при этом в формуле (Д₂ 26) нужное число раз интегрирование по частям, получим выражение интеграла в виде конечной суммы. Таким путем получается, после некоторых преобразований, если обозначить $n + \frac{1}{2}$ через m :

$$J_m(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\cos\left(x - \frac{1}{2} m\pi - \frac{\pi}{4}\right) \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \sum_{r=1}^m (-1)^r \frac{(4m^2-1^2)(4m^2-3^2) \dots [4m^2-(4r-1)^2]}{(2r)! 2^{2r} x^{2r}} \right\} + \right. \\ \left. + \sin\left(x - \frac{1}{2} m\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{r=1}^m (-1)^r \frac{(4m^2-1^2)(4m^2-3^2) \dots [4m^2-(4r-3)^2]}{(2r-1)! 2^{2r-2} x^{2r-1}} \right], \quad (\text{Д}_2 27)$$

причем суммирование по r распространяется на все необращающиеся тождественно в нуль члены рядов. Таким образом, функции полуцелых номеров выражаются в конечном виде через элементарные функции, причем, хотя мы это доказали лишь для $n \geq 0$, это верно и при $n < 0$.

При значениях ν , иных, чем $n + \frac{1}{2}$, интеграл (Д₂ 26) не может быть выражен в конечном виде через элементарные функции, но может быть использован для получения асимптотического выражения $J_{\nu}(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Так, например, если $\nu = 0$, а x — вещественное положительное число, то (Д₂ 26) дает, если учесть (Д₁ 15):

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{ixt} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (\text{Д}_2 28)$$

Так как, при $x \rightarrow \infty$, $\cos xt$ — бесконечно часто переменная функция, то главным участком интегрирования будет окрестность точки $t=1$.¹ Полагая, поэтому, $t=1-u$, причем (Д₁28) приобретает вид

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \cos x \int_0^1 \frac{\cos xudu}{\sqrt{2-u} \sqrt{u}} + \sin x \int_0^1 \frac{\sin xudu}{\sqrt{2-u} \sqrt{u}} \right\}, \quad (\text{Д}_229)$$

и замечая, что на главном участке интегрирования, т. е. вблизи от $u=0$, можно приближенно заменить медленно меняющуюся функцию $1/\sqrt{2-u}$ ее значением в точке $u=0$, т. е. просто через $1/\sqrt{2}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 \frac{\cos xudu}{\sqrt{2-u} \sqrt{u}} \right\}_{x \rightarrow \infty} &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\cos xudu}{\sqrt{u}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^x \frac{\cos tdt}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^\infty \frac{\cos tdt}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad (\text{Д}_229)$$

и аналогично

$$\left\{ \int_0^1 \frac{\sin xudu}{\sqrt{2-u} \sqrt{u}} \right\}_{x \rightarrow \infty} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}. \quad (\text{Д}_231)$$

Подставляя эти значения в (Д₂29), получим:

$$\{J_0(x)\}_{x \rightarrow \infty} \sim \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\pi x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{Д}_232)$$

Это и есть искомое асимптотическое выражение для $J_0(x)$. Несколько более сложными приемами можно найти и общее асимптотическое выражение для $J(x)$, притом не только для вещественных, но и для комплексных x . При этом в первом приближении получается:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad (\text{Д}_233)$$

где $O\left(\frac{1}{x}\right)$ обозначает, как принято, величину порядка $\frac{1}{x}$. Это асимптотическое выражение для $J_\nu(x)$ справедливо при любом ν , если только $|\nu| \ll |x|$ и если $-\pi < \arg x < +\pi$. Подобная же формула может быть получена и для $Y_n(x)$, именно,² имеем при $|x| \rightarrow \infty$ и $-\pi < \arg x < +\pi$:

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \quad (\text{Д}_234)$$

¹ Ибо в смежности с $t=1$ функция $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ достигает бесконечно-больших значений и меняется чрезвычайно быстро.

² См., например, вывод формулы (Д₂214).

§ 3. Функции Ханкеля

1. Наряду с решениями $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, которые при $|x| \rightarrow \infty$ пропорциональны косинусу или синусу от аргументов $\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, соответственно $\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, весьма существенную роль в приложениях к физическим вопросам играют еще те решения уравнения (Д₂1), которые при $|x| \rightarrow \infty$ пропорциональны e^{ix} и e^{-ix} .¹

Чтобы найти такие решения, заметим, прежде всего, что предполагая пока ν произвольным, не целым числом, можем любое решение уравнения (Д₂1), а стало быть и искомое наше решение представить, в соответствии с (Д₂5), в виде

$$u = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \quad (\text{Д}_25)$$

где A и B — соответствующим образом выбранные постоянные. Стало быть, задача о нахождении решения, которое было бы на бесконечности пропорционально, например e^{ix} , сводится к тому, чтобы так выбрать соотношение постоянных A и B , чтобы линейная комбинация (Д₂5) была при $|x| \rightarrow \infty$ пропорциональна e^{ix} . Это нетрудно сделать, если заметить, что, согласно (Д₂33), имеем асимптотические равенства

$$\left. \begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right], \\ J_{-\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[e^{i\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д}_235)$$

Умножая первое из них на $e^{-i\nu\pi}$ и вычитая его из второго, получим:

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} (e^{i\nu\pi} - e^{-i\nu\pi}) = \\ &= 2i \sin \nu\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \end{aligned}$$

откуда видно, что функция

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{i \sin \nu\pi}, \quad (\text{Д}_236)$$

которая асимптотически ведет себя в соответствии с формулой

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (-\pi < \arg x < +\pi), \quad (\text{Д}_237)$$

может быть принята за решение искомого типа.

¹ Первые из названных решений, т. е. $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, соответствуют, в вопросах о распространении цилиндрических волн, стоячим волнам, тогда как последние отвечают бегущим волнам, уходящим на бесконечность, или идущим из бесконечности.

Аналогичным образом найдем, что функция

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{i\nu\pi} J_{\nu}(x)}{-i \sin \pi\nu} \quad (\text{Д}_238)$$

асимптотически удовлетворяет соотношению

$$H_{\nu}^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad (-\pi < \arg x < +\pi), \quad (\text{Д}_239)$$

т. е. представляет собой искомое решение второго типа.¹

Функции $H_{\nu}^{(1)}(x)$ и $H_{\nu}^{(2)}(x)$, определяемые формулами (Д₂36) и (Д₂38), называются ханкелевыми функциями соответственно первого и второго рода и ν -го порядка.

Если разрешить соотношения (Д₂36) и (Д₂38) относительно $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, то получим формулы:

$$J_{\nu}(x) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(1)}(x) + H_{\nu}^{(2)}(x)], \quad (\text{Д}_240)$$

$$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2} [e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(x) + e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(x)]. \quad (\text{Д}_241)$$

Выведенные в этом разделе формулы справедливы при любых ν , причем для пригодности асимптотических формул (Д₂37) и (Д₂39) должно быть еще выполнено условие, что $|x| \rightarrow \infty$ при фиксированном значении ν , так что во всяком случае $|\nu| \ll x$, причем $|\arg x| < \pi$.

2. До сих пор мы предполагали, что ν — не целое число. Переходя теперь в формулах (Д₂36) и (Д₂38) к пределу $\nu = n$, где n — целое, видим, что правые части их приобретают при этом неопределенный вид, поскольку и числители и знаменатели их обращаются в нуль. Раскрывая по правилу Лопиталья получающиеся неопределенности, найдем:

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} H_{\nu}^{(1)}(x) = J_n(x) + i \cdot \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_{\nu}(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} + (-1)^n + i \left(\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right]$$

откуда, сравнивая с (Д₂15), получаем:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x). \quad (\text{Д}_242)$$

Аналогично найдем [непосредственно из (Д₂38) или заменяя в (Д₂42) i на $(-i)$, что, согласно сказанному выше, должно дать тот же результат]:

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x). \quad (\text{Д}_243)$$

Обратные формулы имеют вид:

$$J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)], \quad (\text{Д}_244)$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{2i} [H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)]. \quad (\text{Д}_245)$$

¹ Формулы (Д₂38) и (Д₂39) могут быть также прямо получены из (Д₂36) и (Д₂37), если в этих последних заменить i на $(-i)$.

Асимптотические выражения функций $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, очевидно, просто получаются из (Д₂37) и (Д₂39) при подстановке туда $\nu = n$.

Формулы (Д₂42), (Д₂43) и (Д₂44), (Д₂45) еще раз подчеркивают аналогию, существующую между функциями $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ и e^{ix} , e^{-ix} с одной стороны и функциями $J_n(x)$, $Y_n(x)$ и $\cos x$, $\sin x$ — с другой, поскольку они вполне аналогичны формулам Эйлера, выражающим связь между показательными и тригонометрическими функциями.

3. Так как уравнению (Д₂1) должны удовлетворять как функции $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, так и функции, получающиеся из них заменой ν на $(-\nu)$,¹ т. е. $H_{-\nu}^{(1)}(x)$ и $H_{-\nu}^{(2)}(x)$, то эти последние функции должны линейным образом выражаться через первые. Соответствующие соотношения имеют вид:

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x) \quad (\text{Д}_246)$$

и

$$H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x). \quad (\text{Д}_247)$$

Они легко получаются из (Д₂36) и (Д₂38). Действительно, (Д₂36) дает, например:

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = \frac{J_\nu(x) - e^{i\nu\pi} J_{-\nu}(x)}{-i \sin \pi\nu} = e^{i\nu\pi} \cdot \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{i \sin \pi\nu} = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x),$$

т. е. (Д₂46). Аналогично доказывается и (Д₂47), исходя из (Д₂38).

4. Так как уравнение (Д₂1) не изменяет своей формы при замене x на $(-x)$, то ему должны удовлетворять, наряду с функциями $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, также и функции $H_\nu^{(1)}(-x)$ и $H_\nu^{(2)}(-x)$, которые, стало быть, должны выражаться через первые две. Действительно, как нетрудно показать, имеют место следующие соотношения:²

$$H_\nu^{(1)}(\rho e^{i\pi}) = e^{-(\nu+1)\pi i} H_\nu^{(2)}(\rho), \quad (\text{Д}_248)$$

$$H_\nu^{(2)}(\rho e^{i\pi}) = 2 \cos \nu\pi H_\nu^{(2)}(\rho) + e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(\rho), \quad (\text{Д}_249)$$

где ρ — любое вещественное или комплексное число.

Чтобы доказать эти формулы, достаточно подставить в (Д₂36) и (Д₂38) $x = \rho e^{i\pi}$ и учесть вытекающее из формулы (Д₂2) соотношение

$$J_\nu(\rho e^{i\pi}) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{\rho e^{i\pi}}{2}\right)^{\nu+2s}}{s! \Gamma(\nu+s+1)} = e^{i\nu\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\nu+2s}}{s! \Gamma(\nu+s+1)} = e^{i\nu\pi} J_\nu(\rho), \quad (\text{Д}_250)$$

которое, при замене ν на $(-\nu)$, дает также:

$$J_{-\nu}(\rho e^{i\pi}) = e^{-i\nu\pi} J_{-\nu}(\rho). \quad (\text{Д}_251)$$

¹ Ибо уравнение (Д₂1) не изменяется при замене ν на $-\nu$.

² Они носят название соотношений обхода.

В самом деле, из (Д₂36) следует, например, что

$$i \sin \pi \nu \cdot H_{\nu}^{(1)}(\rho e^{i\pi}) = J_{-\nu}(\rho e^{i\pi}) - e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(\rho e^{i\pi}) = e^{-i\nu\pi} J_{-\nu}(\rho) - J_{\nu}(\rho),$$

откуда
$$H_{\nu}^{(1)}(\rho e^{i\pi}) = -e^{-i\nu\pi} \cdot \frac{[J_{-\nu}(\rho) - e^{i\nu\pi} J_{\nu}(\rho)]}{(-i \sin \pi \nu)} = e^{-i\pi(\nu+1)} H_{\nu}^{(2)}(\rho),$$

последнее с помощью (Д₂38). Это и есть формула (Д₂48). (Д₂49) доказывается вполне аналогично, исходя из (Д₂38).

§ 4. Бесселевы функции мнимого аргумента

1. В приложениях часто приходится встречаться с бесселевыми функциями чисто мнимого аргумента, удовлетворяющими уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0, \quad (\text{Д}_252)$$

получающимся из (Д₂1) путем замены x на ix .¹ При этом за основные решения уравнения (Д₂52) принято выбирать не сами функции $J_{\nu}(ix)$ и $J_{-\nu}(ix)$, которые при вещественном x имеют мнимые значения, а величины

$$I_{\nu}(x) = e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} J_{\nu}(ix) = e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} J_{\nu}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right), \quad (\text{Д}_253)$$

и соответствующее $I_{-\nu}(x)$, которые при вещественном x имеют вещественные значения. Действительно, (Д₂2) дает:

$$I_{\nu}(x) = e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\nu+2s}}{s! \Gamma(\nu+s+1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s! \Gamma(\nu+s+1)}, \quad (\text{Д}_254)$$

и аналогичную формулу для $I_{-\nu}(x)$. В частности, при $\nu=0$ будет:

$$I_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{(s!)^2}. \quad (\text{Д}_255)$$

При $x \rightarrow \infty$ получаем из (Д₂35):

$$I_{\nu}(x) = e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} J_{\nu}(ix) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (x > 0), \quad (\text{Д}_256)$$

причем, как явствует из пределов применимости формулы (Д₂35), формула (Д₂56) верна и в том случае, если x — такое комплексное число, что $-\frac{\pi}{2} < \arg x < +\frac{\pi}{2}$, так что $Re(x) > 0$.

¹ Вообще, заменяя в (Д₂1) x через $a\zeta$, получим уравнение:

$$\frac{d^2 a}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{da}{d\zeta} + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{\zeta^2}\right) a = 0,$$

которому удовлетворяет любая $u = Z_{\nu}(a\zeta)$, где $Z_{\nu}(t)$ обозначает какую-нибудь из бесселевых функций порядка ν от аргумента t .

2. Из функций мнимого аргумента, удовлетворяющих уравнению (Д₂52), кроме функции $I_\nu(x)$ приходится часто встречаться еще с так называемой функцией Макдональда, обозначаемой через $K_\nu(x)$ и определяемой соотношением:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi \nu i}{2}} H_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi \nu i}{2}} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (\text{Д}_257)$$

В частности, при $\nu = 0$ получаем:

$$K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix). \quad (\text{Д}_258)$$

Подставляя в (Д₂57) значение $H_\nu^{(1)}(ix)$ из (Д₂36) и пользуясь формулой (Д₂53), находим:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\left[e^{\frac{\pi \nu i}{2}} J_{-\nu}(ix) - e^{-\frac{i \nu \pi}{2}} J_\nu(ix) \right]}{\sin \pi \nu} = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)], \quad (\text{Д}_259)$$

откуда видно, что при вещественном x $K_\nu(x)$ — вещественная функция.

Общий интеграл уравнения (Д₂52) может быть представлен в виде

$$u = AI_\nu(x) + BK_\nu(x), \quad (\text{Д}_260)$$

где A и B — произвольные постоянные.

(Д₂57) и (Д₂37) дают асимптотическую формулу для $K_\nu(x)$, именно:

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \left(-\frac{3\pi}{2} < \arg x < +\frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{Д}_261)$$

Формулы (Д₂56) и (Д₂61) показывают, что $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ представляют собой те решения уравнения (Д₂52), первое из которых при вещественных положительных x стремится к бесконечности, когда $x \rightarrow \infty$, тогда как $K_\nu(x)$ при тех же условиях стремится к нулю, т. е. дает исчезающее на бесконечности решение уравнения (Д₂52).

При $x \rightarrow 0$ имеем:

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad (\text{Д}_262)$$

что при $Re(\nu) > 0$, стремится к нулю, при $\nu = 0$ обращается в единицу, а при $Re(\nu) < 0$, стремится к бесконечности.

Что касается поведения $K_\nu(x)$ при $|x| \rightarrow 0$, то оно определяется, согласно (Д₂57), поведением пропорциональной ей функции $H_\nu^{(1)}(ix)$. Эта последняя, согласно (Д₂36), обращается при $|x| \rightarrow 0$ и при $\nu \neq 0$ в бесконечность, так как при этом обращается в бесконечность одна из функций $J_\nu(ix)$ или $J_{-\nu}(ix)$ (первая при $Re(\nu) < 0$, вторая — при $Re(\nu) > 0$). Если же $\nu = 0$, то (Д₂42) дает:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x),$$

Отсюда с помощью (Д₂18) находим при $|x| \rightarrow 0$, если еще учесть, что $J_0(0) = 1$:

$$H_0^{(1)}(x) \rightarrow \frac{2i}{\pi} \left[\lg \frac{x}{2} + \gamma \right] + 1 + O(x^2), \quad (\text{Д}_263)$$

так что

$$K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix) \rightarrow - \left(\lg \frac{x}{2} + \gamma \right), \quad |x| \rightarrow 0. \quad (\text{Д}_264)$$

Итак, при $|x| \rightarrow 0$ $K_\nu(x)$ становится бесконечно-большой по модулю при любом ν и представляет собой обращающееся в бесконечность при $x=0$ решение уравнения (Д₂52).

§ 5. Теоремы сложения бesselевых функций

1. Во многих вопросах, связанных с применением бesselевых функций к задачам математической физики, играют существенную роль так называемые теоремы сложения бesselевых функций, дающие выражение функций от аргумента $\rho = \sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}$ через функции от аргументов a и r .¹

Это, например, формулы вида

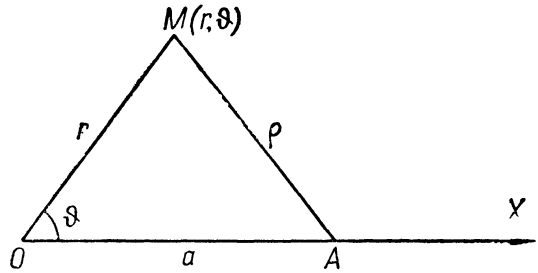


Рис. 166.

$$J_0(\rho) = J_0(a)J_0(r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(a)J_m(r) \cos m\theta, \quad (\text{Д}_265)$$

(формула Неймана) и

$$K_0(\rho) = \begin{cases} K_0(a)I_0(r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(a)I_m(r) \cos m\theta & \text{при } r < a, \\ K_0(r)I_0(a) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(r)I_m(a) \cos m\theta & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (\text{Д}_266)$$

¹ В качестве физического примера, приводящего к постановке такого рода задачи, можно, например, указать задачу о диффракции электромагнитных волн, исходящих от линейного источника (бесконечно-тонкий прямолинейный провод, питаемый переменным током), от цилиндра, ось которого параллельна источнику поля. Если при этом ось цилиндра совпадает с осью цилиндрической системы координат (r, θ, z) , тогда как создающий первичное поле провод проходит через точку A (рис. 166), лежащую на оси Ox на расстоянии a от начала координат O , то при решении задачи по методу частных решений возникает вопрос о разложении волнового потенциала источника, который в точке $M(r, \theta)$ пропорционален $H_0^{(2)}(kr)$ [ср. п. 13.8, (13.32), причем $k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2 - 4\pi\rho\sigma i}{c^2}$ и $\text{Im}(k) < 0$], по частным решениям уравнения $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ в цилиндрических координатах, т. е. по функциям вида $H_m^{(1)}(kr)$ и $H_m^{(2)}(kr)$ где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ См. также п. п. 55.1 и 58.2.

а также более общие, из которых здесь укажем формулу:

$$\frac{K_\nu(\rho)}{\rho^\nu} = \begin{cases} 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \cdot \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(\cos \theta) & \text{при } r < a, \\ 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} \cdot \frac{I_{\nu+m}(a)}{a^\nu} C_m^\nu(\cos \theta) & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (\text{Д}_267)$$

где ν — произвольное число, а $C_m^\nu(\cos \theta)$ — коэффициент при x^m в разложении

$$(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^\nu(\cos \theta) \cdot x^m. \quad (\text{Д}_268)$$

Функции $C_m^\nu(\cos \theta)$ — очевидно, полиномы относительно $\cos \theta$ [см. (Д₂75)], носящие название полиномов Гегенбауэра. При $\nu = \frac{1}{2}$ получается, в частности:

$$C_m^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) = P_m(\cos \theta), \quad (\text{Д}_269)$$

где $P_m(\cos \theta)$ — m -ый полином Лежандра.

Формулы (Д₂65) — (Д₂67) могут быть строго доказаны, если исходить из интегральных представлений разлагаемых в соответствующие ряды функций. Мы дадим здесь не очень строгое доказательство формул (Д₂67) и являющихся их частным случаем формул (Д₂66), причем будем пользоваться способом, непосредственно связанным в идейном отношении с изложенным в главах VII—X методом интегрирования уравнений в частных производных. Предварительно рассмотрим, однако, некоторые свойства функций $C_m^\nu(\cos \theta)$.

2. Функции $C_m^\nu(\cos \theta)$.

Полагая $\cos \theta = t$, и вводя обозначение

$$u = (1 - 2xt + x^2)^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m C_m^\nu(t), \quad t = \cos \theta, \quad (\text{Д}_270)$$

легко убедимся непосредственной проверкой, что u удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{2\nu+1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + x^{2\nu-1} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - t^2)^\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0, \quad (\text{Д}_271)$$

которое может быть записано еще так:

$$(1 - t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (2\nu + 1)t \frac{\partial u}{\partial t} + (2\nu + 1)x \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{Д}_272)$$

Подставляя в уравнение (Д₂71) разложение u в ряд (Д₂70), собирая вместе получающиеся при этом члены с одинаковыми степенями x

и приравнявая коэффициенты при них в отдельности нулю,¹ найдем, что $C_m^\nu(t) \equiv C_m^\nu$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2)^\nu + \frac{1}{2} \frac{dC_m^\nu}{dt} \right] + (2\nu + m) m (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu = 0, \quad (D_{273})$$

которое можно записать и так:

$$\frac{d^2 C_m^\nu}{dt^2} - \frac{2\nu+1}{1-t^2} t \frac{dC_m^\nu}{dt} + \frac{(2\nu+m)m}{(1-t^2)} C_m^\nu = 0. \quad (D_{274})$$

Разлагая непосредственно $(1-2xt+x^2)^{-\nu}$ в ряд по биномиальной формуле, найдем:

$$\begin{aligned} (1-2xt+x^2)^{-\nu} &= [1-(2xt-t^2)]^{-\nu} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)}{\Gamma(\nu) \cdot s!} (2xt-x^2)^s = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)}{s! \Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{k=s} (-1)^k 2^{s-k} x^{s+k} \cdot \frac{s!}{k!(s-k)!} t^{s-k}, \end{aligned}$$

а собирая члены, содержащие x^m , получим из сравнения с (D₂70):

$$C_0^\nu(t) = 1, \quad C_m^\nu(t) = \sum_{k=\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}^{k=\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{m-2k} \frac{\Gamma(\nu+m-k)}{\Gamma(\nu) k! (m-2k)!} t^{m-2k} \quad \text{при } m > 0. \quad (D_{275})$$

Это, как нетрудно проверить, может быть записано и в такой форме:

$$\begin{aligned} C_m^\nu(t) &= \frac{(-2)^m \nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m-1)}{m!(2m+2\nu-1)(2m+2\nu-2)\dots(m+2\nu)} \times \\ &\times (1-t^2)^{\frac{1}{2}-\nu} \frac{d^m}{dt^m} \left[(1-t^2)^{m+\nu-\frac{1}{2}} \right]. \quad (D_{276}) \end{aligned}$$

Заметим еще, что так как при $t=1$ (D₂70) дает:

$$\begin{aligned} \{(1-2xt+x^2)^{-\nu}\}_{t=1} &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^\nu(1) x^m = (1-x)^{-2\nu} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(-2\nu)(-2\nu-1)\dots(-2\nu-m+1)}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m! \Gamma(2\nu)} x^m, \end{aligned}$$

последнее с помощью (D₁5), то сравнение различных форм коэффициентов при x^m приводит к соотношению:

$$C_m^\nu(1) = \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m! \Gamma(2\nu)}. \quad (D_{277})$$

¹ Ибо степенной ряд вида $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ может тождественно равняться нулю только

тогда, когда все a_m в отдельности равны нулю.

² Здесь $\left[\frac{m-1}{2} \right]$ — целая часть от $\left(\frac{m-1}{2} \right)$.

Аналогично получим из (Д₂70) при $t = -1$:

$$\begin{aligned} \{(1 - 2xt + x^2)^{-\nu}\}_{t=-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^\nu(-1) x^m = (1 - x)^{-2\nu} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(2\nu + m)}{m! \Gamma(2\nu)}, \end{aligned}$$

откуда

$$C_m^\nu(-1) = (-1)^m \frac{\Gamma(2\nu + m)}{m! \Gamma(2\nu)} = (-1)^m C_m^\nu(1). \quad (\text{Д}_278)$$

Дифференцируя (Д₂70) по t , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (1 - 2xt + x^2)^{-\nu} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} C_m^\nu(t) \right] x^m = 2\nu x (1 - 2xt + x^2)^{-\nu-1} = \\ &= 2\nu x \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\nu+1}(t) x^k = 2\nu \sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^{\nu+1}(t) \cdot x^m, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{d}{dt} C_m^\nu(t) = C_m^{\nu'}(t) = \begin{cases} 2\nu C_{m-1}^{\nu+1}(t) & \text{при } m \geq 1, \\ 0 & \text{при } m = 0. \end{cases} \quad (\text{Д}_279)$$

При $t = \pm 1$ получаем отсюда и из (Д₂77) и (Д₂78):

$$C_m^{\nu'}(1) = (-1)^{m-1} C_m^{\nu'}(-1) = 2\nu C_{m-1}^{\nu+1}(1) = 2\nu \frac{\Gamma(2\nu + m + 1)}{(m-1)! \Gamma(2\nu + 2)}. \quad (\text{Д}_280)$$

Покажем еще, что полиномы $C_m^\nu(t)$ обладают свойством обобщенной ортогональности, причем имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_m^\nu(t) C_p^\nu(t) dt = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq p \\ \pi \frac{\Gamma(2\nu + m)}{2^{2\nu-1} m! (\nu + m) \{\Gamma(\nu)\}^2} & \text{при } p = m, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{Д}_281) \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений непосредственно вытекает из дифференциальных уравнений типа (Д₂73), которым удовлетворяют C_m^ν и C_p^ν , т. е.

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{dC_m^\nu}{dt} \right] + (2\nu + m) m (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_m^\nu = 0,$$

и

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{dC_p^\nu}{dt} \right] + (2\nu + p) p (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_p^\nu = 0.$$

Именно, умножая первое из них на C_p^ν , а второе — на C_m^ν , и вычитая второй результат из первого, получим:

$$\begin{aligned} C_p^\nu \frac{d}{dt} \left[(1 - t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{dC_m^\nu}{dt} \right] - C_m^\nu \frac{d}{dt} \left[(1 - t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{dC_p^\nu}{dt} \right] &= \\ &= \frac{d}{dt} \left[(1 - t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \{C_p^\nu C_m^{\nu'} - C_m^\nu C_p^{\nu'}\} \right] = \\ &= -(m - p)(2\nu + m + p)(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_m^\nu C_p^\nu, \end{aligned}$$

а умножая это на dt и интегрируя в пределах $-1 \leq t \leq +1$, найдем:

$$\begin{aligned} (m-p)(2\nu+m+p) \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu C_p^\nu dt = \\ = (1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \{C_m^\nu C_p^\nu - C_m^\nu C_p^\nu\} \Big|_{-1}^{+1}. \end{aligned} \quad (D_2 82)$$

Так как здесь правая часть при $Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ обращается в нуль,¹ то при $m \neq p$ это и дает первое уравнение (D₂ 81).

Чтобы доказать второе уравнение (D₂ 81), умножим (D₂ 73) на $C_m^\nu dt$ и проинтегрируем в пределах $(-1, +1)$. Получится:

$$\begin{aligned} (2\nu+m)m \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} [C_m^\nu]^2 dt = - \int_{-1}^{+1} C_m^\nu \frac{d}{dt} \left[(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{dC_m^\nu}{dt} \right] dt = \\ = -(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} C_m^\nu \frac{dC_m^\nu}{dt} \Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \left[\frac{dC_m^\nu}{dt} \right]^2 dt, \end{aligned}$$

т. е., так как первый член при $Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ обращается в нуль, а $[C_m^\nu]^2 = (2\nu)^2 [C_{m-1}^{\nu+1}]^2$ [см. (D₂ 79)]:

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [C_m^\nu]^2 dt = \frac{2^{2\nu^2}}{(2\nu+m)m} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [C_{m-1}^{\nu+1}]^2 dt. \quad (D_2 83)$$

Вводя обозначение

$$I_m^\nu = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} [C_m^\nu]^2 dt, \quad (D_2 84)$$

можем переписать (D₂ 83) так:

$$I_m^\nu = \frac{2^{2\nu^2}}{(2\nu+m)m} I_{m-1}^{\nu+1}. \quad (D_2 85)$$

Мы, таким образом, получили формулу приведения для I_m^ν , позволяющую выразить его через аналогичный интеграл, но с уменьшенным на единицу значением m .

Применяя эту же формулу приведения к интегралу $I_{m-1}^{\nu+1}$ в правой части формулы (D₂ 85) и продолжая эту процедуру до тех пор, пока не дойдем до интеграла:

$$I_0^{\nu+m} = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu+m-\frac{1}{2}} [C_0^{\nu+m}]^2 dt = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu+m-\frac{1}{2}} dt,$$

сможем этот последний сразу вычислить с помощью подстановки $t = \cos \varphi$, которая дает:

$$I_0^{\nu+m} = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu+m-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\pi \sin^{2(\nu+m)\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(\nu+m+1)}. \quad (D_2 86)$$

¹ Ср. (D₂ 77), (D₂ 78) и (D₂ 80).

² См. (D₁ 25).

Таким путем найдем:

$$\begin{aligned} I_m^\nu &= \frac{2^{2\nu} \nu^2}{(2\nu+m)m} I_{m-1}^{\nu+1} = \frac{2^4 [\nu(\nu+1)]^2}{[m(m-1)](2\nu+m)(2\nu+m+1)} I_{m-2}^{\nu+2} = \\ &= \dots = \frac{2^{2m} [\nu(\nu+1)\dots(\nu+m-1)]^2}{m!(2\nu+m)(2\nu+m+1)\dots(2\nu+2m-1)} I_0^{\nu+m} = \\ &= \frac{2^{2m} [\Gamma(\nu+m)]^2}{m! [\Gamma(\nu)]^2} \cdot \frac{\Gamma(2\nu+m)}{\Gamma[2(\nu+m)]} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+m+1)}, \end{aligned}$$

причем использована формула (Д₂ 5). Заменяя здесь $\Gamma[2(\nu+m)]$ ее значением из (Д₁ 13), получим окончательно:

$$I_m^\nu = \pi \frac{\Gamma(2\nu+m)}{2^{2\nu-1}(\nu+m)m! \{\Gamma(\nu)\}^2}, \quad (\text{Д}_2 87)$$

т. е. как раз вторую формулу (Д₂ 81).

Полагая здесь, в частности, $\nu = \frac{1}{2}$, и учитывая (Д₂ 69) и (Д₁ 15), найдем еще:

$$I_m^{\frac{1}{2}} = \int_{-1}^{+1} [C_m^{\frac{1}{2}}(t)]^2 dt = \int_{-1}^{+1} [P_m(t)]^2 dt = \frac{2}{2m+1}, \quad (\text{Д}_2 88)$$

где $P_m(t)$ — m -ый полином Лежандра.

3. Переходим теперь к доказательству формул (Д₂ 67), причем покажем, прежде всего, что входящие в правую часть этой формулы произведения

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(\cos \theta) = \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(t), \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (\text{Д}_2 89)$$

и

$$\varphi_m^{(2)} = \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(\cos \theta) = \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(t), \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (\text{Д}_2 90)$$

удовлетворяют при любом целом $m \geq 0$ некоторому дифференциальному уравнению в частных производных, именно уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{(1-t^2)}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\nu+1}{r^2} t \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi = 0. \quad (\text{Д}_2 91)$$

Чтобы это доказать, заметим, прежде всего, что функции $I_{\nu+m}(r)$ и $K_{\nu+m}(r)$ удовлетворяют уравнению, получаемому из (Д₂ 52) путем замены ν на $\nu+m$ и x на r , т. е. уравнению

$$\frac{du_m^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_m}{dr} - \left[1 + \frac{(\nu+m)^2}{r^2} \right] u_m = 0. \quad (\text{Д}_2 92)$$

Соответствующее уравнение для функций $I_{\nu+m}(r)/r^\nu$ и $K_{\nu+m}(r)/r^\nu$ можно получить из (Д₂ 92), полагая там

$$u_m = r^\nu v_m. \quad (\text{Д}_2 93)$$

Для v_m получается при этом, как нетрудно проверить, уравнение

$$\frac{dv_m^2}{dr^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{dv_m}{dr} - \left[1 + \frac{(2\nu+m)m}{r^2} \right] v_m = 0. \quad (\text{Д}_2 94)$$

Сравнивая это с уравнениями (D₂73) или (D₂74) для $C_m^\nu(t)$, можем написать:

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{v_m} \left[\frac{d^2 v_m}{dr^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{dv_m}{dr} - v_m \right] = (2\nu+m)m = \\ & = - \frac{1}{(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{C_m^\nu(t)} \frac{d}{dt} \left[(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{dC_m^\nu(t)}{dt} \right] = \\ & = - \frac{(1-t^2)}{C_m^\nu(t)} \left\{ \frac{d^2 C_m^\nu(t)}{dt^2} - \frac{2\nu+1}{1-t^2} t \frac{dC_m^\nu(t)}{dt} \right\}. \end{aligned} \quad (D_2 95)$$

Умножая это на произведение $v_m C_m^\nu(t)$, которое обозначим через φ , и деля на r^2 , получим для φ уравнение:

$$\frac{r^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi + \frac{1}{r^2 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \equiv D(\varphi) = 0, \quad (D_2 96)$$

которое можно записать и в такой форме:

$$D(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-t^2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\nu+1}{r^2} t \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi = 0. \quad (D_2 97)$$

Это и есть формула (D₂91).

Так как при этом под v_m подразумевалось любое решение уравнения (D₂94), которое, согласно (D₂93) и (D₂60), всегда может быть представлено в виде

$$v_m = A \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} + B \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu}, \quad (D_2 98)$$

то найденный нами результат показывает, что все функции $\varphi_m^{(1)}$ и $\varphi_m^{(2)}$, определяемые формулами (D₂89) и (D₂90), удовлетворяют уравнениям (D₂96) или (D₂97) при любом $m=0, 1, 2, \dots$

Обратно, если мы будем искать частные решения уравнений (D₂96) или (D₂97) в виде произведения двух функций $R(r)$ и $\vartheta(\theta)$, зависящих соответственно только от r и от θ , то для R и ϑ получатся, обычным образом, уравнения:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{dR}{dr} - \left[1 + \frac{\lambda}{r^2} \right] R = 0, \quad (D_2 99)$$

и

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{d\vartheta}{dt} \right] + \lambda (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \vartheta = 0, \quad (D_2 100)$$

где λ обозначает произвольное вещественное или комплексное число. Можно было бы показать, что уравнение (D₂100) имеет конечные и однозначные решения в интервале $-1 \leq t \leq +1$ тогда и только тогда, когда λ принимает значения $\lambda = (2\nu+m)m$, где $m=0, 1, 2, \dots$, причем соответствующее такому λ решение ϑ может отличаться только постоян-

ным множителем от полинома $C_m^\nu(t)$.¹ Поэтому, получаемое по методу частных решений общее решение уравнения (Д₂97), пригодное во всем интервале $-1 \leq t \leq +1$, т. е. обладающее периодичностью с периодом 2π по углу θ , должно иметь вид

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m I_{\nu+m}(r) + B_m K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(t), \quad (\text{Д}_2 101)$$

где A_m и B_m — произвольные постоянные.

Мы видим, таким образом, что правая сторона формул (Д₂67), подходящих под тип (Д₂101), удовлетворяет уравнению (Д₂97). Если формулы (Д₂67) верны, то должна удовлетворять этому уравнению и левая часть их, т. е. функция $K_\nu(\rho)/\rho^\nu$. Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что это так. Для этого достаточно подставить в левую часть уравнения (Д₂97) функцию

$$\varphi = F(\rho), \quad \rho = \sqrt{a^2 - 2art + r^2}, \quad (\text{Д}_2 102)$$

где F — знак некоторой неизвестной еще пока функции, выразить входящие в (Д₂97) частные производные от φ по r и t через производные по ρ , например,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{dF}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{(r-at)}{\rho} \frac{dF}{d\rho}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{d^2 F}{d\rho^2} \cdot \frac{(r-at)^2}{\rho^2} + \frac{dF}{d\rho} \frac{(1-t^2)}{\rho^3} a^2$$

и т. д., и подставить их в (Д₂97), с целью убедиться, возможно ли вообще решение такого вида. При этом получается:

$$D(\varphi) = \frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{2\nu+1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} - F, \quad (\text{Д}_2 103)$$

а приравнявая это выражение нулю, видим, что решение искомого вида возможно в том случае, если функция $F(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{2\nu+1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} - F = 0, \quad (\text{Д}_2 104)$$

которое в точности совпадает с уравнением (Д₂94), если в этом последнем положить $m=0$ и заменить r через ρ . Так как при этом соответствующая функция v_0 имеет, согласно (Д₂98), вид

$$v_0 = A \frac{I_\nu(r)}{r^\nu} + B \frac{K_\nu(r)}{r^\nu},$$

¹ Доказательство этого утверждения может быть проведено аналогично тому, как это сделано у Куранта—Гильберта в отношении уравнения $\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{du}{dt} \right] + \lambda u = 0$, которое является частным случаем нашего уравнения (Д₂100) при $\nu = \frac{1}{2}$ и относительно которого доказывается, что оно имеет конечные и однозначные решения в интервале $-1 \leq t \leq +1$ только при $\lambda = (m+1)m$, причем решения эти могут отличаться только постоянным множителем от полиномов Лежандра $P_m(t)$. Так как $P_m(t) = C_m^{\frac{1}{2}}(t)$, а $(2\nu+m)m$ при $\nu = \frac{1}{2}$ обращается в $(m+1)m$, то это просто частный случай высказанной в тексте теоремы. См.: Курант—Гильберт, I, стр. 307.

то уравнение (D₂104) удовлетворится, если будет

$$F(\rho) = A \frac{I_\nu(\rho)}{\rho^\nu} + B \frac{K_\nu(\rho)}{\rho^\nu}, \quad (D_2 105)$$

где A и B — произвольные постоянные. При $A=0$, $B=1$ это выражение как раз переходит в $K_\nu(\rho)/\rho^\nu$, откуда следует, что не только правая, но и левая сторона формул (D₂67) удовлетворяет уравнению (D₂97). В силу этого должно существовать соотношение вида

$$\frac{K_\nu(\rho)}{\rho^\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[A_m I_{\nu+m}(r) + B_m K_{\nu+m}(r)]}{r^\nu} C_m^\nu(t) \quad (D_2 106)$$

между обеими найденными формами (D₂101) и (D₂105) решения,¹ и вопрос сводится к определению постоянных A_m и B_m .

4. Для того, чтобы определить эти постоянные, будем исходить из того, что стоящая слева в (D₂106) функция $K_\nu(\rho)/\rho^\nu$ представляет собой, как мы видели, исчезающее на бесконечности решение уравнения (D₂91), которое при стремлении ρ к нулю стремится к бесконечности, как $\frac{1}{\rho^{2\nu}}$ ² и в точке $\rho=0$ терпит разрыв. Это решение соответствует, стало быть, наличию точечной особенности („точечного источника“) в точке $\rho=0$, подобно тому, как решение

$$\varphi = \frac{H_{1/2}^{(2)}(ik\rho)}{\rho^{1/2}} = \frac{2}{\pi} e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{K_{1/2}(-k\rho)}{\rho^{1/2}}, \quad \text{Im}(k) < 0, \quad (D_2 107)$$

волнового уравнения

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + k^2\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + k^2\varphi = \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{(1-t^2)}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{2t}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + k^2\varphi = 0, \end{aligned} \quad (D_2 108)$$

являющегося частным случаем уравнения (D₂91) при $\nu = \frac{1}{2}$,³ соответствует наличию точечного источника в точке $\rho=0$, испускающего затухающие на бесконечности волны, или в еще более частном случае, решение

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar + r^2}} \quad (D_2 109)$$

уравнения Лапласа, т. е. уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{(1-t^2)}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{2t}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad (D_2 110)$$

¹ (D₂105) при $A=0$ и $B=1$.

² Ср. (D₂59) и (D₂62).

³ Для полного совпадения обоих уравнений надо при этом еще заменить в (D₂91) r на ikr .

соответствует наличию точечного источника электростатического поля (единичного заряда) в точке $r=a$, $\theta=0$ ($\rho=0$) при условии, что на бесконечности φ обращается в нуль.

В обоих последних случаях решения вида (Д₂ 107) или (Д₂ 109) могут быть, как известно, получены, как предельные случаи решений соответствующих неоднородных уравнений, т. е. уравнения

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{(1-t^2)}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{2t}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + k^2\varphi = -4\pi f \quad (\text{Д}_3 111)$$

для волновой задачи, и уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{(1-t^2)}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{2t}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -4\pi f, \quad (\text{Д}_2 112)$$

для статической, причем f — некоторая функция координат, дающая пространственное распределение объемной плотности источников соответствующего поля. Именно, при интегрировании уравнений (Д₂ 111) или (Д₂ 112) нужно при этом считать, что источники находятся лишь внутри исчезающе-малой области, скажем (v), — охватывающей точку $\rho=0$, тогда как вне этой области функция f равна нулю, и следует, получив требуемое решение, устремить размеры области к нулю, считая в то же время, что полное количество источников внутри (v) остается при этом неизменным, так что выполняется условие

$$\int_{(v)} f d\nu = \text{const.}, \quad (\text{Д}_2 113)$$

причем интеграл берется по области (v).

Как явствует из физических соображений и как может быть показано вполне строго математическим путем, получаемое таким образом решение не зависит от того, для какой первоначальной области (v) и для какого начального распределения плотности f внутри ее было найдено первоначальное решение, от которого затем переходят к предельному случаю стремления области (v) к нулю при соблюдении условия (Д₂ 113).¹

¹ Так, например, решение уравнения Пуассона (Д₂ 112), исчезающее на бесконечности, имеет при любой форме области (v), внутри которой плотность f отлична от нуля, такой вид:

$$\varphi = \int_{(v)} \frac{f d\nu}{R}, \quad (\text{А})$$

где R — расстояние от элемента $d\nu$ внутри области до точки M , в которой вычисляется потенциал φ . Если область (v) сжимается в точку, расстояние которой от точки M равно ρ , то вычисляемый по формуле (А) потенциал стремится к значению $\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \int_{(v)} f d\nu \right\}$, которое действительно зависит только от величины $\int_{(v)} f d\nu$.

Сходное положение вещей имеет место и для уравнений (Д₂ 111) и (Д₂ 91). Заметим, что из полученного только что результата видно, что для того, чтобы получить решение вида $1/\rho$ уравнения (Д₂ 112), надо положить $\int_{(v)} f d\nu = 1$. Аналогичную (но не обязательно такую же) нормировку постоянной в (Д₂ 113) приходится делать и в других случаях, чтобы притти к некоторому, наперед заданному решению.

Аналогичным образом можно поступить и в случае уравнения (D₂91), рассматривая решение его $K_\nu(\rho)/\rho^\nu$, соответствующее точечному источнику, как предельный случай решения уравнения

$$D(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\nu + 1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{(1-t^2)}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\nu + 1}{r^2} t \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi = -4\pi f, \quad (D_2 114)$$

причем функцию f будем считать отличной от нуля лишь в исчезающе-малой области, окружающей точку $r = a$, $t = 1$, (т. е. $\theta = 0$), в которой $\rho = \sqrt{a^2 - 2art + r^2}$ обращается в нуль. К этому теперь и переходим.

5. Займемся, прежде всего, интегрированием уравнения (D₂114) при произвольной правой части $f = f(r, t)$, для чего применим общий метод, изложенный в пятнадцатом параграфе. С этой целью перепишем это уравнение так [ср. (D₂96)]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\nu + 1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{1}{(1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = -4\pi f(r, t),$$

а затем умножим его на $(1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_m^\nu(t) dt$ и проинтегрируем по t в пределах $-1 \leq t \leq +1$. Вводя обозначения

$$\varphi_m = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_m^\nu(t) \varphi(r, t) dt = \varphi_m(r), \quad (D_2 115)$$

$$f_m = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} C_m^\nu(t) f(r, t) dt = f_m(r), \quad (D_2 116)$$

получим при этом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_m}{dr^2} + \frac{2\nu + 1}{r} \frac{d\varphi_m}{dr} - \varphi_m + \frac{1}{r^2} \int_{-1}^{+1} C_m^\nu(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] dt = \\ = -4\pi f_m(r), \end{aligned} \quad (D_2 117)$$

а интегрируя дважды по частям и пользуясь, как обычно¹ уравнением (D₂73), которому удовлетворяет $C_m^\nu(t)$, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} C_m^\nu(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] dt = (1-t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} C_m^\nu(t) \Big|_{-1}^{+1} - \\ - \varphi (1-t^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \frac{dC_m^\nu(t)}{dt} \Big|_{-1}^{+1} - (2\nu + m) m \varphi_m. \end{aligned} \quad (D_2 118)$$

Допуская, что выделившиеся на пределах члены обращаются в нуль,² можем теперь переписать (D₂117) так:

$$\frac{d^2 \varphi_m}{dr^2} + \frac{2\nu + 1}{r} \frac{d\varphi_m}{dr} - \left[1 + \frac{(2\nu + m)n}{r^2} \right] \varphi_m = 4\pi f_m(r). \quad (D_2 119)$$

¹ См. § 15, вывод формулы (15,8).

² Это во всяком случае верно при $Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ для всякой функции φ , ограниченной, вместе со своей производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, при $t = \pm 1$.

Так как общий интеграл соответствующего однородного уравнения нам известен и равен [см. (Д₂ 94) и (Д₂ 98)]

$$\varphi_m = A \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} + B \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu},$$

то варьируя произвольные постоянные A и B , легко найдем, обычным образом, интеграл неоднородного уравнения (Д₂ 119), который можно при $Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ записать так:¹

$$\varphi_m = \frac{1}{r^\nu} \left\{ I_{\nu+m}(r) \left[M + 4\pi \int_0^{\infty} u^{\nu+1} K_{\nu+m}(u) f_m(u) du \right] + \right. \\ \left. + K_{\nu+m}(r) \left[N - 4\pi \int_0^r u^{\nu+1} I_{\nu+m}(u) f_m(u) du \right] \right\}, \quad (\text{Д}_2 \text{ 120})$$

где M и N — новые произвольные постоянные.

Для определения этих постоянных должны служить условия, получающиеся для φ_m из требования конечности исходной функции φ при $r=0$ и из обращения ее в нуль при $r=\infty$. Формула (Д₂ 115) показывает при этом, что и φ_m должна себя вести аналогичным образом, т. е. оставаться конечной при $r=0$ и обращаться в нуль при $r=\infty$. Поэтому видим, принимая во внимание характер поведения функций $I_{\nu+m}(r)/r^\nu$ и $K_{\nu+m}(r)/r^\nu$ при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$, что для того, чтобы

¹ При этом требуется знание определителя Вронского для функций $y_1 = K_{\nu+m}(r)/r^\nu$ и $y_2 = I_{\nu+m}(r)/r^\nu$, т. е. величины $\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Величина эта может быть получена из уравнений

$$y_1'' + \frac{2\nu+1}{r} y_1' - \left[1 + \frac{(2\nu+m)m}{r^2} \right] y_1 = 0, \quad (\text{а})$$

$$y_2'' + \frac{2\nu+1}{r} y_2' - \left[1 + \frac{(2\nu+m)m}{r^2} \right] y_2 = 0, \quad (\text{б})$$

для чего нужно уравнение (а) умножить на y_2 , уравнение (б) — на y_1 , и вычесть первый результат из второго. Это дает соотношение:

$$\frac{d\Delta}{dr} + \frac{2\nu+1}{r} \Delta = 0,$$

откуда $\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \text{const} \times r^{-(2\nu+1)}$. Значение входящей сюда постоянной трудно определить, если в выражении

$$\text{const.} = \Delta \cdot r^{2\nu+1} = (y_1 y_2' - y_1' y_2) r^{2\nu+1} \quad (\text{в})$$

стремить r к нулю, подставив при этом в выражения y_1 и y_2 вместо $K_{\nu+m}(r)$ и $I_{\nu+m}(r)$ их значения при $r \rightarrow 0$ из формул (Д₂ 59) и (Д₂ 62). Таким путем найдем, используя (Д₁ 6), что искомая постоянная равна единице, так что (в) приобретает следующий окончательный вид:

$$\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{1}{r^{2\nu+1}}. \quad (\text{г})$$

Это значение Δ и использовано при выводе формулы (Д₂ 120).

функция φ_m , определяемая уравнением (D₂120), удовлетворяла этим условиям, должно быть $M=N=0$, и (D₂120) принимает такой вид:

$$\varphi_m = \frac{4\pi}{r^\nu} \left\{ I_{\nu+m}(r) \int_r^\infty u^{\nu+1} K_{\nu+m}(u) f_m(u) du - K_{\nu+m}(r) \int_0^r u^{\nu+1} I_{\nu+m}(u) f_m(u) du \right\}. \quad (D_2 121)$$

Эта формула пока еще справедлива при произвольном виде функции $f(r, t)$, которая определяется распределением источников поля.¹ Перейдем теперь к интересующему нас здесь случаю, когда эти источники находятся лишь внутри исчезающе-малой области (v), охватывающей точку $r=a, t=1$.

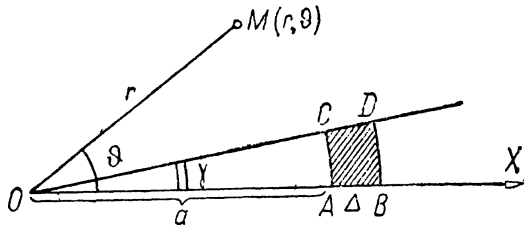


Рис. 167.

Пользуясь тем, что было сказано выше о произвольности выбора формы области (v) перед устремлением размеров ее к нулю, положим для удобства расчета, что

$$f(r, t) = \begin{cases} A = \text{const. при } a \leq r \leq a + \Delta \text{ и } 1 - \varepsilon \leq t < 1, \\ 0 \text{ при всех остальных значениях } r \text{ и } t, \end{cases} \quad (D_2 122)$$

(см. рис. 167), т. е. что $f(r, t)$ отлична от нуля лишь внутри области $ABCD$, ограниченной дугами AC и ED кругов радиусов a и $a + \Delta$ и отрезками AB и CD радиусов, из которых OC составляет с осью X такой угол γ , что $\cos \gamma = 1 - \varepsilon$; причем внутри этой области она имеет некоторое постоянное значение A , пока ближе не определяемое. Δ и ε будем считать весьма малыми величинами, которые будем впоследствии стремиться к нулю.

Вводя это значение $f(r, t)$ сперва в (D₂116), причем получится

$$f_m = \begin{cases} A \int_{1-\varepsilon}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu(t) dt \text{ при } a \leq r \leq a + \Delta, \\ 0 \text{ при всех остальных } r, \end{cases} \quad (D_2 123)$$

и замечая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно в интеграле заменить $C_m^\nu(t)$ через $C_m^\nu(1) = \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m! \Gamma(2\nu)}$ [см. (D₂77)] и вынести его из-под знака интеграла,

¹ Разумеется, $f(r, t)$ должна быть такова, чтобы сходились входящие в (D₂121) интегралы.

тогда как $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = (1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}} \cong 2^{\nu-\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}$, найдем при $a \leq r \leq a + \Delta$:

$$\begin{aligned} f_m &\cong A \frac{2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(2\nu+m)}{m! \Gamma(2\nu)} \int_{1-\varepsilon}^1 (1-t)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}} A}{(2\nu+1)\Gamma(2\nu)} \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} \varepsilon^{\nu+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (D_2 124)$$

причем отброшены малые высшего порядка относительно ε . Подставляя это теперь в (D₂ 121) и полагая для краткости

$$\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}} A \varepsilon^{\nu+\frac{1}{2}}}{(2\nu+1)\Gamma(2\nu)} = B_\varepsilon, \quad (D_2 125)$$

получим, учитывая, что при всех остальных r $f_m = 0$:

$$\int_0^r u^{\nu+1} I_{\nu+m}(u) f_m(u) du = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a, \\ B_\varepsilon \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} \int_a^{a+\Delta} u^{\nu+1} I_{\nu+m}(u) du & \text{при } r > a + \Delta. \end{cases}$$

Последний результат можно при $\Delta \rightarrow 0$ записать и так:

$$\int_0^r u^{\nu+1} I_{\nu+m}(u) f_m(u) du \rightarrow B_\varepsilon \Delta \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} a^{\nu+1} I_{\nu+m}(a) \quad \text{при } r > a + \Delta. \quad (D_2 126)$$

Устремляя ε и Δ к нулю и полагая, что произведение $B_\varepsilon \Delta$ сохраняет при этом постоянное конечное значение, которое обозначим через C ,¹ получим в пределе вполне точно:

$$\begin{aligned} &\int_0^r u^{\nu+1} I_{\nu+m}(u) f_m(u) du = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } r < a, \\ C \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} a^{\nu+1} I_{\nu+m}(a) & \text{при } r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (D_2 127)$$

Аналогично получим в том же предельном случае:

$$\begin{aligned} &\int_r^\infty u^{\nu+1} K_{\nu+m}(u) f_m(u) du = \\ &= \begin{cases} C \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} a^{\nu+1} K_{\nu+m}(a) & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (D_2 128)$$

¹ Заметим, что C от m не зависит.

В силу этого, если еще положить

$$4\pi Ca^{2\nu+1} = D, \quad (\text{Д}_2 129)$$

то (Д₂121) дает теперь:

$$\varphi_m = \begin{cases} D \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} \cdot \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} & \text{при } r < a, \\ D \frac{\Gamma(2\nu+m)}{m!} \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} \cdot \frac{I_{\nu+m}(a)}{a^\nu} & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (\text{Д}_2 130)$$

Пользуясь этим результатом, можем теперь найти и саму функцию φ . Для этого разложим ее в ряд по полиномам $C_m^\nu(t)$, образующим ортогональную по отношению к $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ в интервале $-1 \leq t \leq +1$ систему функций,¹ причем должно быть:

$$\varphi = \varphi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n C_n^\nu(t), \quad (\text{Д}_2 131)$$

где $\alpha_n = \alpha_n(r)$ — коэффициенты разложения. Чтобы их определить, умножим (Д₂131) на $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu(t) dt$ и проинтегрируем по t от -1 до $+1$. Это дает при учете формул (Д₂81):

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu(t) \varphi dt = \varphi_m = \alpha_m \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} [C_m^\nu(t)]^2 dt =$$

$$= \frac{\pi \Gamma(2\nu+m)}{2^{2\nu-1} m! (\nu+m) \{\Gamma(\nu)\}^2} \alpha_m,$$

откуда

$$\alpha_m = \frac{2^{2\nu-1} m! (\nu+m) \{\Gamma(\nu)\}^2}{\pi \Gamma(2\nu+m)} \varphi_m. \quad (\text{Д}_2 132)$$

Подставляя сюда значения φ_m из (Д₂130) и вводя получившиеся выражения в (Д₂131), найдем:

$$\varphi = \begin{cases} D' \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(t) & \text{при } r < a, \\ D' \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} \frac{I_{\nu+m}(a)}{a^\nu} C_m^\nu(t) & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (\text{Д}_2 133)$$

где $D' = \frac{2^{2\nu-1}}{\pi} [\Gamma(\nu)]^2 D$ — новая постоянная.

¹ Собственно ортогональны функции $\psi_m^\nu = (1-t^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} C_m^\nu(t)$, ибо, согласно (Д₂81),

$$\int_{-1}^{+1} \psi_m^\nu \psi_n^\nu dt = 0 \text{ при } m \neq n.$$

В соответствии с тем, что было сказано выше, эти формулы должны, при соответствующем выборе D' , представлять функцию $K_\nu(\rho)/\rho^\nu$, т. е. должно быть

$$\frac{K_\nu(\rho)}{\rho^\nu} = \begin{cases} D' \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(t) & \text{при } r < a, \\ D' \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} \frac{I_{\nu+m}(a)}{a^\nu} C_m^\nu(t) & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (\text{Д}_2 134)$$

$\rho = \sqrt{a^2 - 2art + r^2}$

Остается найти D' . Для этого положим в первой из этих формул $r=0$, причем справа остается лишь член с $m=0$, а ρ обращается в a . Таким образом, получается, если учесть еще (Д₂ 62):

$$\frac{K_\nu(a)}{a^\nu} = D' \nu \frac{K_\nu(a)}{a^\nu} \frac{K_\nu(a)}{a^\nu} \cdot \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

откуда

$$D' = 2^\nu \Gamma(\nu). \quad (\text{Д}_2 135)$$

Таким образом, окончательно получается:

$$\frac{K_\nu(\rho)}{\rho^\nu} = \begin{cases} 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(t) & \text{при } r < a, \\ 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(r)}{r^\nu} \frac{I_{\nu+m}(a)}{a^\nu} C_m^\nu(t) & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (\text{Д}_2 136)$$

т. е. как раз формулы (Д₂ 67).

Мы доказали (Д₂ 136) в предположении, что a , r и t — вещественные числа. Более детальное рассмотрение показывает, что формула

$$\begin{aligned} & \frac{K_\nu(\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2})}{(a^2 - 2ar \cos \theta + r^2)^{\nu/2}} = \\ & = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \frac{I_{\nu+m}(r)}{r^\nu} C_m^\nu(\cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{Д}_2 137)$$

верна и при комплексных a , r и θ , если только соблюдается неравенство¹

$$|re^{\pm i\theta}| < a. \quad (\text{Д}_2 138)$$

6. В приложениях встречается в частности разложение вида (Д₂ 136) для функции $K_0(\rho)$, причем, однако, (Д₂ 136) приобретает неопределенный вид, поскольку $\Gamma(\nu)$ становится при $\nu=0$ бесконечной, а

$$C_m^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0 \\ 0 & \text{при } m>0. \end{cases}$$

¹ Watson, B. F., 365, (8).

Все же эта неопределенность лишь кажущаяся и может быть легко раскрыта, поскольку $\lim_{\nu=0} \Gamma(\nu) C_m^\nu(t)$ существует и может быть без труда найден. Действительно, так как

$$\Gamma(\nu) C_m^\nu(t) = \Gamma(\nu + 1) \cdot \frac{C_m^\nu(t)}{\nu},$$

то по обычному правилу Лопиталья

$$\lim_{\nu=0} \Gamma(\nu) C_m^\nu(t) = \lim_{\nu=0} \frac{C_m^\nu(t)}{\nu} = \left[\frac{d}{d\nu} C_m^\nu(t) \right]_{\nu=0}. \quad (D_2 139)$$

С другой стороны, дифференцируя по ν ряд

$$(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^\nu(\cos \theta) \cdot x^m$$

и полагая в получающемся результате $\nu=0$, найдем:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\nu} (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-\nu} \right]_{\nu=0} &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[\frac{d}{d\nu} C_m^\nu(\cos \theta) \right]_{\nu=0} = \\ &= -\lg(1 - 2x \cos \theta + x^2) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\cos m\theta}{m}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\left[\frac{d}{d\nu} C_m^\nu(\cos \theta) \right]_{\nu=0} = \left[\frac{d}{d\nu} C_m^\nu(t) \right]_{\nu=0} = \frac{2 \cos m\theta}{m} \text{ при } m \geq 1. \quad (D_2 140)$$

(D₂136) дает поэтому при $\nu=0$, если еще учесть, что при $m=0$ $\lim_{\nu=0} [2^\nu \Gamma(\nu) \nu C_0^\nu(t)] = \lim_{\nu=0} 2^\nu \Gamma(\nu + 1) C_0^\nu(t) = 1$, тогда как при $m > 0$ (D₂140) показывает, что $\lim_{\nu=0} 2^\nu \Gamma(\nu) (\nu + m) C_m^\nu(t) = 2 \cos m\theta$:

$$\begin{aligned} &K_0(\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}) = \\ &= \begin{cases} K_0(a) I_0(r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(a) I_m(r) \cos m\theta & \text{при } r < a, \\ K_0(r) I_0(a) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(r) I_m(a) \cos m\theta & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (D_2 141) \end{aligned}$$

Это и есть формулы (D₂66).

§ 6. Вронскиан функций Бесселя

1. В приложениях бесселевых функций часто приходится встречаться с так называемым вронскианом их, т. е. с определителем вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = u_1(x) u_2'(x) - u_2(x) u_1'(x), \quad (D_2 142)$$

где u_1 и u_2 — любые два частных решения уравнения (D₂1).

Значение Δ легко найти, исходя из дифференциальных уравнений

$$u_1'' + \frac{1}{x} u_1' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u_1 = 0, \quad (D_2 143)$$

$$u_2'' + \frac{1}{x} u_2' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u_2 = 0, \quad (D_2 144)$$

которым удовлетворяют оба решения. Именно, умножая (D₂ 143) на u_2 , а (D₂ 144) — на u_1 , и вычитая первый результат из второго, найдем:

$$(u_1 u_2'' - u_2 u_1'') + \frac{1}{x} (u_1 u_2' - u_2 u_1') = 0, \quad (D_2 145)$$

что можно записать и в такой форме:

$$\frac{d\Delta}{dx} + \frac{1}{x} \Delta = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение по x , получим:

$$\lg \Delta + \lg x = \text{const.},$$

т. е.

$$\Delta = u_1 u_2' - u_1' u_2 = \frac{C}{x}, \quad C = \text{const.} \quad (D_2 146)$$

Значение постоянной C зависит от выбора частных решений u_1 и u_2 . Для каждой данной пары их оно может быть определено, если написать (D₂ 146) в таком виде:

$$x [u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x)] = C$$

и перейти к пределу $x \rightarrow 0$, подставив при этом вместо u_1 и u_2 их выражения при $x \rightarrow 0$, получающиеся соответственно из (D₂ 2), (D₂ 3), (D₂ 17'), (D₂ 36), (D₂ 38) и т. д. в зависимости от выбранных за u_1 и u_2 функций. Таким путем найдем, например, пользуясь верными при $x \rightarrow 0$ соотношениями:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad J_\nu'(x) = \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

$$J_{-\nu}(x) = \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(1 - \nu)}, \quad J_{-\nu}'(x) = -\frac{\nu x^{-\nu-1}}{2^{-\nu} \Gamma(1 - \nu)},$$

что для этой пары функций

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} x \{J_\nu(x) J_{-\nu}'(x) - J_{-\nu}(x) J_\nu'(x)\} = -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(1 - \nu)} =$$

$$= -\frac{2}{\Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu)} = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi},$$

причем использованы (D₁ 4) и (D₁ 6). Поэтому получается:

$$J_\nu'(x) J_{-\nu}(x) - J_{-\nu}'(x) J_\nu(x) = \frac{2 \sin \pi \nu}{\pi x}. \quad (D_2 147)$$

Подобным же образом найдем, что:

$$H_v^{(1)}(x) [H_v^{(2)}(x)]' - H_v^{(2)}(x) [H_v^{(1)}(x)]' = -\frac{4i}{\pi x} \quad (\text{Д}_2 148)$$

и т. д.

Заменяя в (Д₂ 146) x на ix и замечая, что форма этого соотношения от этого не меняется, а изменяется только значение постоянной C , сможем найти также значение вронскиана и для функций от мнимого аргумента, причем опять будет

$$u_1(ix) u_2'(ix) - u_2(ix) u_1'(ix) = \frac{C'}{x}. \quad (\text{Д}_2 149)$$

Постоянная C' определяется так же, как выше. Таким образом найдем, например, пользуясь формулами (Д₂ 53), (Д₂ 54) и (Д₂ 57) — (Д₂ 59):

$$K_v(x) I_v'(x) - K_v'(x) I_v(x) = \frac{1}{x}. \quad (\text{Д}_2 150)$$

§ 7. Некоторые интегральные представления функций Бесселя

1. Функции Бесселя допускают весьма разнообразные, практически весьма важные во многих случаях, представления в виде определенных интегралов, из которых мы уже выше познакомились с интегралом Пуассона (Д₂ 25). Другого типа представление, пригодное, однако, только для функций $J_n(x)$ целого номера, может быть получено следующим образом.

Рассмотрим функцию

$$e^{\frac{x}{2}} x \left(t - \frac{1}{t}\right) = e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2t}}. \quad (\text{Д}_2 151)$$

Перемножая ряды

$$e^{\frac{xt}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^s}{s!} t^s, \quad e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} t^{-k}, \quad (\text{Д}_2 152)$$

которые при $|t| > 0$ сходятся абсолютно, так что перемножение законно, и группируя результат по степеням t , получим:

$$e^{\frac{x}{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n t^n, \quad (\text{Д}_2 153)$$

причем a_n при $n \geq 0$ получается равным

$$a_n = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!(n+s)!} = J_n(x), \quad (\text{Д}_2 154)$$

тогда как при $n < 0$ будет, если положить $-n = m$:

$$\begin{aligned} a_n = a_{-m} &= \sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-m}}{r!(r-m)!} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s}}{(m+s)! s!} = (-1)^m J_m(x) = J_{-m}(x) = J_n(x), \end{aligned} \quad (\text{Д}_2 155)$$

последнее в полном согласии с (Д₂8).

(Д₂153) можно теперь переписать так:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x) t^n, \quad (\text{Д}_2 156)$$

т. е. при целом n функции $J_n(x)$ — это коэффициенты разложения в ряд по степеням t функции $e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$. Такая функция носит название производящей для $J_n(x)$. Заметим, что (Д₂156) можно, в силу соотношения $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, переписать еще так:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \left[t^n + (-1)^n \frac{1}{t^n} \right]. \quad (\text{Д}_2 157)$$

Полагая здесь $t = ie^{i\theta}$, получим:

$$\begin{aligned} e^{ix \cos \theta} &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \left[i^n e^{in\theta} + (-1)^n \frac{e^{-in\theta}}{i^n} \right] = \\ &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos n\theta. \end{aligned} \quad (\text{Д}_2 158)$$

Это не что иное, как ряд Фурье для функции $e^{ix \cos \theta}$. Аналогично получили бы, полагая в (Д₂157) $t = e^{i\theta}$:

$$e^{ix \sin \theta} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) [e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}]. \quad (\text{Д}_2 159)$$

Умножаем это соотношение на $e^{-im\theta} d\theta$, где m — некоторое положительное целое число, и интегрируем в пределах $-\pi \leq \theta \leq +\pi$. Так как

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ 2\pi & \text{при } n = m, \end{cases} \quad (\text{Д}_2 160)$$

то при этом получается:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta, \quad (\text{Д}_2 161)$$

что можно записать еще так:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta - \int_0^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta \right\},$$

т. е., заменяя во втором интеграле θ на $-\theta$:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta + \int_0^{\pi} e^{-i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - m\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (\text{Д}_2 162)$$

(D₂161) и (D₂162) и дают искомое интегральное представление функций $J_m(x)$.

2. Из других интегральных представлений укажем следующую формулу для ханкелевых функций:

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{e^{\frac{i\pi\nu}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta, \quad \operatorname{Im}(x) < 0, \quad (D_2 163)$$

из которой, благодаря связям (D₂48), (D₂49) и (D₂57), существующим между $H_\nu^{(2)}(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ и $K_\nu(x)$, могут быть получены и соответствующие формулы для этих последних. Таким образом, найдем, например:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i \nu}{2}} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta \quad \text{при } |\arg x| < \frac{\pi}{2}. \quad (D_2 164)$$

Поскольку формулы (D₂163) и (D₂164) друг другу эквивалентны, достаточно доказать одну из них, скажем, (D₂164). Для доказательства обозначим через u входящий в правую часть формулы (D₂164) интеграл и проинтегрируем его дважды по частям. Получается:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta = -\frac{1}{2\nu} e^{-x \operatorname{ch} \eta} \times \\ &\times e^{-\nu \eta} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\eta} (e^{-x \operatorname{ch} \eta}) d(e^{-\nu \eta}) = \\ &= \frac{x}{2\nu^2} e^{-x \operatorname{ch} \eta} \operatorname{sh} \eta e^{-\nu \eta} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu \eta} \frac{d^2}{d\eta^2} (e^{-x \operatorname{ch} \eta}) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\nu^2} \left\{ x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} \operatorname{sh}^2 \eta d\eta - x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} \operatorname{ch} \eta d\eta \right\}, \quad (D_2 165) \end{aligned}$$

поскольку выделяющиеся при интегрировании по частям члены обращаются в нуль.

Замечая теперь, что

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} \operatorname{ch} \eta d\eta = -\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta \right\} = -\frac{du}{dx}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} \operatorname{sh}^2 \eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} \operatorname{ch}^2 \eta d\eta - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta = \frac{d^2 u}{dx^2} - u, \end{aligned}$$

и подставляя эти значения в (Д₂ 165), получим, перенося все члены в одну часть:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - (x^2 + \nu^2) u = 0, \quad (\text{Д}_2 \text{ 166})$$

что совпадает с уравнением (Д₂ 52), общий интеграл которого равен:

$$u = AK_\nu(x) + BI_\nu(x). \quad (\text{Д}_2 \text{ 167})$$

Так как при $x \rightarrow \infty$ функция u , определяемая интегралом (Д₂ 165), обращается очевидно в нуль, то должно быть, во всяком случае, $B=0$, так что

$$u = AK_\nu(x), \quad (\text{Д}_2 \text{ 168})$$

и остается показать, что $A=1$.

Для того, чтобы это сделать, заметим, что можно написать

$$u = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu \eta} d\eta = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta} \operatorname{ch} \nu \eta d\eta \quad (\text{Д}_2 \text{ 169})$$

и что при $x \rightarrow \infty$ экспоненциальная функция под знаком интеграла убывает настолько быстро, что сколько-нибудь заметную долю вносит в значение интеграла лишь непосредственно примыкающий к точке $\eta=0$ участок интервала интегрирования, причем на этом участке можно положить $\operatorname{ch} \nu \eta \cong (\operatorname{ch} \nu \eta)_{\eta=0} = 1$. Таким образом, получается:

$$(u)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta} d\eta = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt} dt}{\sqrt{t^2 - 1}}, \quad (t = \operatorname{ch} \eta), \quad (\text{Д}_2 \text{ 170})$$

и здесь можно, в свою очередь, по аналогичным соображениям, положить

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-1}} \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$

Подставляя это в (Д₂ 170) и полагая $t-1 = \psi$, находим, что

$$(u)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-x\psi} \psi^{-1/2} d\psi = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad (\text{Д}_2 \text{ 171})$$

причем использована формула (Д₁ 15).

Сравнивая (Д₂ 171) и асимптотическое выражение (Д₂ 61) функции $K_\nu(x)$, убеждаемся, что они полностью совпадают, так что, действительно, $u = K_\nu(x)$, что и требовалось доказать. Тем самым доказана и формула (Д₂ 163) для $H_\nu^{(2)}(x)$.

Из формулы (Д₂ 164) получается в частности при $\nu=0$:

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta} d\eta, \quad |\arg x| < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Д}_2 \text{ 172})$$

Полагая $\operatorname{ch} \tau = t$, можем записать это еще так:

$$K_0(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt} dt}{\sqrt{t^2 - 1}}. \quad (D_2 173)$$

Стоящий здесь справа интеграл может быть выражен еще в другой форме. Именно, можно показать, что он равен

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t dt}{\sqrt{x^2 + t^2}}, \quad (D_2 174)$$

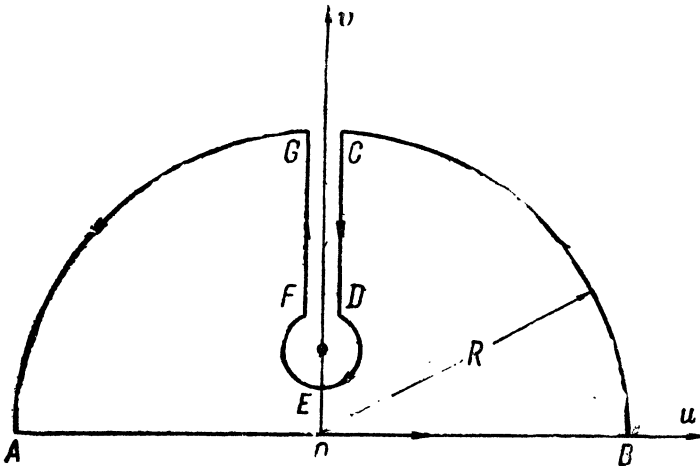


Рис. 168.

так что будет также¹

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t dt}{\sqrt{x^2 + t^2}}, \quad (D_2 175)$$

Ниже мы увидим, каким путем могут быть получены еще некоторые другие интегральные представления различных бесселевых функций.

¹ Этот результат проще всего получить, интегрируя функцию

$$\frac{e^{it}}{2\sqrt{x^2 + t^2}}, \quad (t = u + iv),$$

где x будем пока предполагать вещественным положительным числом, по контуру изображенного на рис. 168 вида, где AG и CB — дуги круга радиуса $R \rightarrow \infty$, описанного из начала координат O плоскости t , DEF — бесконечно-малый кружок, охватывающий точку разветвления $t = ix$, а пути CD и FG в пределе идут по мнимой оси. При этом интегралы по бесконечно-удаленным дугам и по бесконечно-малому кружку в пределе пропадают, интеграл по AB переходит в (D₂ 174), а интегралы по CD и FG дают интеграл (D₂ 173). Так как интеграл по всему контуру $ABCDEFGA$ равен нулю по теореме Коши, то отсюда и вытекает указанный в тексте результат, который, в силу принципа аналитического продолжения, распространяется и на комплексные значения x .

§ 8. Значения некоторых неопределенных и определенных интегралов, содержащих функции Бесселя

1. Вычислим неопределенный интеграл вида

$$\int \frac{Z_\mu(\alpha x) \bar{Z}_\nu(\alpha x)}{x} dx, \quad (D_2 176)$$

где $Z_\mu(\alpha)$ и $\bar{Z}_\nu(\alpha x)$ обозначают любые бесселевы функции μ -ого и ν -ого порядков от указанных аргументов, т. е. любые частные решения уравнений

$$\frac{d^2 Z_\mu}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_\mu}{dx} + \left(\alpha^2 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) Z_\mu = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dZ_\mu}{dx} \right) + \left(\alpha^2 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) Z_\mu = 0 \quad (D_2 177)$$

и

$$\frac{d^2 \bar{Z}_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\bar{Z}_\nu}{dx} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \bar{Z}_\nu = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\bar{Z}_\nu}{dx} \right) + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \bar{Z}_\nu = 0. \quad (D_2 178)$$

Для получения значения искомого интеграла, умножим (D₂ 177) на \bar{Z}_ν , а (D₂ 178) — на Z_μ , и вычтем результаты друг из друга. Получим по умножению на x :

$$\bar{Z}_\nu \frac{d}{dx} \left(x \frac{dZ_\mu}{dx} \right) - Z_\mu \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\bar{Z}_\nu}{dx} \right) = (\mu^2 - \nu^2) \frac{Z_\mu \bar{Z}_\nu}{x},$$

что может быть переписано и так:

$$(\mu^2 - \nu^2) \frac{Z_\mu \bar{Z}_\nu}{x} = \frac{d}{dx} \left\{ x \left[\bar{Z}_\nu \frac{dZ_\mu}{dx} - Z_\mu \frac{d\bar{Z}_\nu}{dx} \right] \right\}.$$

Умножая это на dx и интегрируя в произвольных пределах, получим:

$$\int \frac{Z_\mu \bar{Z}_\nu}{x} dx = \int \frac{Z_\mu(\alpha x) \bar{Z}_\nu(\alpha x)}{x} dx = \\ = \frac{x}{\mu^2 - \nu^2} \left[\bar{Z}_\nu(\alpha x) \frac{dZ_\mu(\alpha x)}{dx} - Z_\mu(\alpha x) \frac{d\bar{Z}_\nu(\alpha x)}{dx} \right], \quad (D_2 179)$$

и это и есть искомая формула.

2. Аналогичным образом можно из уравнений

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dZ_\mu(\alpha x)}{dx} \right] + x \left(\alpha^2 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) Z_\mu(\alpha x) = 0, \quad (D_2 180)$$

и

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dZ_\mu(\beta x)}{dx} \right] + x \left(\beta^2 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) Z_\mu(\beta x) = 0 \quad (D_2 181)$$

получить значение интеграла:

$$\int x Z_\mu(\alpha x) Z_\mu(\beta x) dx.$$

Действительно, умножая (D₂180) на $Z_\mu(\beta x)$, а (D₂181) — на $Z_\mu(\alpha x)$, и вычитая второй результат из первого, найдем:

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left[Z_\mu(\beta x) \frac{dZ_\mu(\alpha x)}{dx} - Z_\mu(\alpha x) \frac{dZ_\mu(\beta x)}{dx} \right] \right\} + (\alpha^2 - \beta^2) x Z_\mu(\alpha x) Z_\mu(\beta x) = 0, \quad (D_2 182)$$

откуда, по интегрировании:

$$\int x Z_\mu(\alpha x) Z_\mu(\beta x) dx = \frac{x [\alpha Z_\mu(\beta x) Z'_\mu(\alpha x) - \beta Z_\mu(\alpha x) Z'_\mu(\beta x)]}{\beta^2 - \alpha^2} \quad (D_2 183)$$

Переходя здесь к пределу $\beta = \alpha$ и раскрывая получающуюся справа неопределенность, найдем:

$$\begin{aligned} \int x [Z_\mu(\alpha x)]^2 dx &= \frac{x^2}{2} \left\{ [Z'_\mu(\alpha x)]^2 - \left[Z''_\mu(\alpha x) + \frac{1}{\alpha x} Z'_\mu(\alpha x) \right] Z_\mu(\alpha x) \right\} = \\ &= \frac{(x\alpha)^2 [Z'_\mu(\alpha x)]^2 + [(x\alpha)^2 - \mu^2] [Z_\mu(\alpha x)]^2}{2\alpha^2}, \end{aligned} \quad (D_2 184)$$

последнее с помощью уравнения

$$Z''_\mu(\alpha x) + \frac{1}{\alpha x} Z'_\mu(\alpha x) + \left[1 - \frac{\mu^2}{(\alpha x)^2} \right] Z_\mu(\alpha x) = 0.$$

3. Займемся теперь рассмотрением интегралов

$$\int_{x_0}^x e^{-a\xi} \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) d\xi, \quad (D_2 185)$$

где a , b , x_0 и m — постоянные, а $Z_n(x)$ обозначает какую-нибудь бесселеву функцию порядка n .

Будем исходить из дифференциального уравнения для функций $Z_{\frac{m-1}{2}}(bx) \equiv Z$:

$$Z'' + \frac{1}{x} Z' + \left[b^2 - \frac{(m-1)^2}{4x^2} \right] Z = 0, \quad (D_2 186)$$

которое переходит, при введении новой функции $w = x^{-\frac{m-1}{2}} z$, в такое:

$$w'' + \frac{m}{x} w' + b^2 w = 0. \quad (D_2 187)$$

Полагаем здесь $w = e^{ax} u$, так что $u = e^{-ax} w$, причем для u получается уравнение:

$$x u'' + (2ax + m) u' + [(a^2 + b^2)x + am] u = 0,$$

которое можно записать и в таком виде:

$$(a^2 + b^2) xu + a(m-2)u = -\frac{d}{dx} [xu' + (m-1)u + 2axu]. \quad (Д_2 188)$$

Интегрируя это уравнение в произвольных пределах (x_0, x) , найдем:

$$(a^2 + b^2) \int_{x_0}^x \xi u d\xi + a(m-2) \int_{x_0}^x u d\xi = - \left[\xi u' + (m-1)u + 2a\xi u \right]_{x_0}^x,$$

а заменяя здесь u его значением $u = e^{-ax} x^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(bx)$, получим:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \int_{x_0}^x e^{-a\xi} \xi^{-\frac{m-3}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) d\xi + a(m-2) \int_{x_0}^x e^{-a\xi} \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) d\xi = \\ = - \left\{ e^{-a\xi} \left[(m-1) + 2a\xi \right] \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) + \right. \\ \left. + \xi \frac{d}{d\xi} \left[e^{-a\xi} \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) \right] \right\} \Big|_{x_0}^x. \end{aligned} \quad (Д_2 189)$$

В частности, при $a = \pm ib$ первый член слева обращается тождественно в нуль, и (Д₂ 189) дает:

$$\begin{aligned} \pm ib(m-2) \int_{x_0}^x e^{\mp ib\xi} \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) d\xi = \\ = - \left\{ e^{\mp ib\xi} \left[(m-1) \pm 2ib\xi \right] \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) + \right. \\ \left. + \xi \frac{d}{d\xi} \left[e^{\mp ib\xi} \xi^{-\frac{m-1}{2}} Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) \right] \right\} \Big|_{x_0}^x. \end{aligned} \quad (Д_2 190)$$

Полагая здесь $m=1$, найдем, выполняя дифференцирование справа:

$$\int_{x_0}^x e^{\mp ib\xi} Z_0(b\xi) d\xi = e^{\mp ib\xi} \xi \left[Z_0(b\xi) \mp iZ_0'(b\xi) \right] \Big|_{x_0}^x. \quad (Д_2 191)$$

Эта формула верна для любой из функций Z_0 .

Полагая в частности $Z_0 = H_0^{(1)}$ и $x_0 = 0$ получим, вычисляя значение стоящего в скобках выражения при $x_0 \rightarrow 0$ и заменяя $H_0^{(1)}$ через $-H_1^{(1)}$:¹

$$\int_0^x e^{\mp ib\xi} H_0^{(1)}(b\xi) d\xi = \mp \frac{2}{\pi b} + x e^{\mp ibx} [H_0^{(1)}(bx) \pm iH_1^{(1)}(bx)]. \quad (Д_2 192)$$

¹ Справедливость такой замены вытекает, например, из формулы (Д₂ 164), которая при $\nu=0$ и $ix=t$ дает:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{ch} \eta} d\eta, \quad \frac{dH_0^{(1)}}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{ch} \eta} \operatorname{ch} \eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{ch} \eta + \eta} d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{ch} \eta - \eta} d\eta \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{ch} \eta - \eta} d\eta, \end{aligned} \quad (A)$$

Отсюда следует также, что

$$\int_0^{\infty} e^{ib\xi} H_0^{(1)}(b\xi) d\xi = \frac{2}{\pi b}, \quad (D_2 193)$$

тогда как $\int_0^x e^{-ib\xi} H_0^{(1)}(b\xi) d\xi$ расходится при $x \rightarrow \infty$. Итак, при $a = \pm ib$ формула (D₂ 189) дает возможность весьма просто вычислить неопределенные интегралы

$$\int e^{\pm ib\xi} \xi^{-n} Z_n(b\xi) d\xi.$$

При $a \neq ib$ можно также весьма просто вычислить определенные интегралы

$$M_n = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \xi^{-n} Z_n(q\xi) d\xi$$

и

$$N_n = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \xi^{-n+1} Z_n(q\xi) d\xi = -\frac{dM_n}{dp} \quad (D_2 194)$$

для тех значений p, q, n , при которых они одновременно существуют. Заметим, что эти интегралы представляют собой не что иное, как лапласовы преобразованные¹ от функций $\xi^{-n} Z_n(q\xi)$ и $\xi^{-n+1} Z_n(q\xi)$, т.е. те величины, которые мы в § 22 обозначали через $[\xi^{-n} Z_n(q\xi)]$ и $[\xi^{-n+1} Z_n(q\xi)]$. Так как в § 23 была доказана формула обращения (23,5), пользуясь которой можно по преобразованной функции получить саму функцию в виде некоторого комплексного интеграла, то отсюда видно, что если мы сумеем вычислить M_n и N_n , то, подставляя их значения в (23,5), получим некоторые интегральные представления соответствующих функций.

Ограничимся здесь для простоты случаем, когда $n=0$, хотя тот же прием может быть без всяких изменений применен и к общему случаю произвольного n . Полагая в (D₂ 189) $m=1, x_0=0, x=\infty, a=p, b=q$, получим:

$$(p^2 + q^2) \frac{dM_0}{dp} + pM_0 = [pZ_0(q\xi) + qZ_0'(q\xi)] \xi e^{-p\xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty},$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dp} [\sqrt{p^2 + q^2} M_0] = \\ & = \left[Z_0(q\xi) \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} + Z_0'(q\xi) \cdot q \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right] \xi e^{-p\xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}. \end{aligned} \quad (D_2 195)$$

тогда как, согласно (D₂ 164), имеем при $\nu=1$:

$$H_1^{(1)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{ch} \eta - \eta} d\eta. \quad (B)$$

Сравнение (A) и (B) и дает указанную в тексте формулу, причем хотя результат этот доказан нами лишь при условии сходимости интегралов (A) и (B), т. е. лишь при $\operatorname{Re}(it) < 0$, но он верен, по принципу аналитического продолжения, для любых t .

¹ Ср. п. 22.1, формула (22,11).

Примем сперва, что $Z_0(x) = J_0(x)$, причем обозначим соответствующее значение M_0 через $M_0^{(1)}$, т. е.

$$M_0^{(1)} = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} J_0(q\xi) d\xi. \quad (D_2 196)$$

(D₂ 195) дает тогда, если $Re(p \pm iq) > 0$:

$$\frac{d}{dp} [V p^2 + q^2 M_0^{(1)}] = 0,$$

откуда

$$M_0^{(1)} = \frac{C}{V p^2 + q^2}. \quad (D_2 197)$$

Здесь C от p не зависит и сразу находится из того условия, что при вещественном p , стремящемся к бесконечности, должно быть

$$(M_0^{(1)})_{p \rightarrow \infty} = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} d\xi + o\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p^3}\right),^1$$

тогда как (D₂ 197) дает:

$$M_0^{(1)} = \frac{C}{p} + o\left(\frac{1}{p^3}\right).$$

Сравнение показывает, что $C = 1$, т. е. что

$$M_0^{(1)} = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} J_0(q\xi) d\xi = \frac{1}{V p^2 + q^2}. \quad (D_2 198)$$

Пусть теперь $Z_0(x) = Y_0(x)$. Вводя обозначение

$$M_0^{(2)} = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} Y_0(q\xi) d\xi \quad (D_2 199)$$

и пользуясь тем, что $\lim_{z \rightarrow 0} zY'(z) = \frac{2}{\pi}$, получим из (D₂ 195):

$$\frac{d}{dp} [V p^2 + q^2 M_0^{(2)}] = -\frac{2}{\pi V p^2 + q^2},$$

что по интегрировании дает:

$$M_0^{(2)} = -\frac{2}{\pi} \frac{[\lg(p + V p^2 + q^2) + C]}{V p^2 + q^2}, \quad (D_2 200)$$

где C от p не зависит.

Для нахождения C пользуемся тем, что

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} (\lg x + \gamma - \lg 2) + o(x^2 \lg x),$$

где γ — постоянная Эйлера.²

¹ Это непосредственно видно, если подставить в (D₂196) вместо $J_0(b\xi)$ ее разложение в степенной ряд и интегрировать почленно получившееся выражение.

² См. (D₁30).

Это дает при $p \rightarrow \infty$:

$$M_0^{(2)} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \lg \xi d\xi + \frac{\gamma - \lg 2}{p} \right\} + O\left(\frac{\lg p}{p^3}\right) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lg 2p}{p} + \frac{2 \lg q}{\pi p} + O\left(\frac{\lg p}{p^3}\right), \quad (\text{Д}_2 \text{ 201})$$

ибо

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi} \lg \xi d\xi = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-u} \lg u du - \frac{\lg p}{p} = -\frac{\lg p + \gamma}{p},$$

так как

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \lg u du = \left[\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du \right]_{z=1} = \Gamma'(1) = -\gamma.$$

Сравнивая (Д₂ 201) с (Д₂ 200) при $p \rightarrow \infty$, находим, что $C = -\lg q$, так что окончательно получается:

$$M_0^{(2)} = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} Y_0(q\xi) d\xi = -\frac{2}{\pi} \frac{\log\left(\frac{p}{q} + \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1}\right)}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \quad (\text{Д}_2 \text{ 202})$$

Так как $H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x)$, то (Д₂ 198) и (Д₂ 202) дают теперь также:

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi} H_0^{(1)}(q\xi) d\xi = -\frac{1 - \frac{2i}{\pi} \lg\left(\frac{p}{q} + \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1}\right)}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \quad (\text{Д}_2 \text{ 203})$$

Из самого вывода ясно, что в формулах (Д₂ 198), (Д₂ 202), (Д₂ 203) фигурируют те значения корня квадратного и логарифма, которые при вещественных положительных p и q тоже вещественны и положительны.

Если подставить значения (Д₂ 198) и (Д₂ 202) в формулу (23,5) Римана—Меллина и учесть, что путь интегрирования должен проходить при этом правее мнимой оси, то получим для $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$, полагая в (Д₂ 198) и (Д₂ 202) $q=1$:

$$J_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{p\xi} d\xi}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad c > 0, \quad (\text{Д}_2 \text{ 204})$$

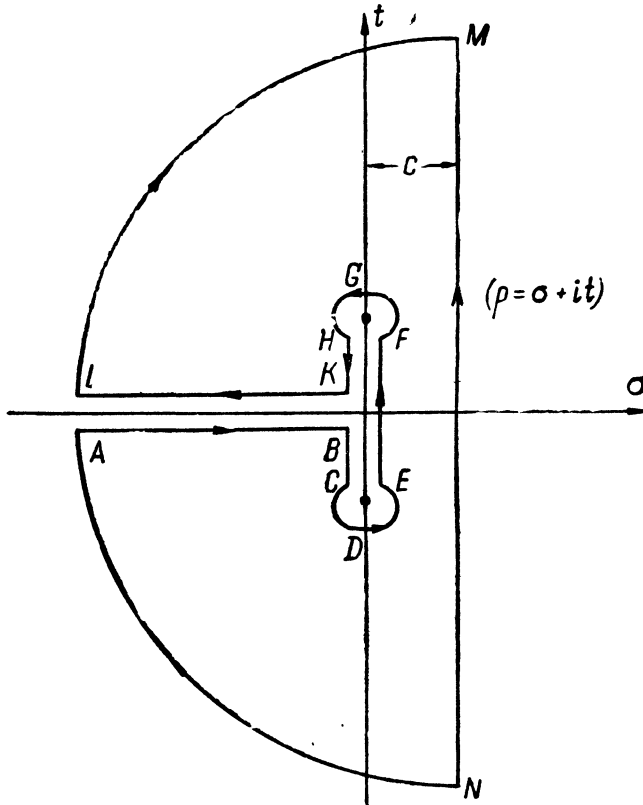
и

$$-\frac{\pi}{2} Y_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{p\xi} \lg(p + \sqrt{p^2 + 1})}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad c > 0, \quad (\text{Д}_2 \text{ 205})$$

что и дает искомые интегральные представления.

Деформируем путь интегрирования так, как показано на рис. 169, причем новый путь состоит из двух дуг NA и LM бесконечно-большого радиуса, из двух бесконечно-малых кружков CDE и FGH , охватывающих точки разветвления $\pm i$, и из прямолинейных отрезков, охватывающих разрезы, проведенные из $+i$ в $-i$ и от нуля до минус бесконечности.

Интегралы по бесконечно-удаленным дугам равны нулю,¹ так же, как и интегралы по кружкам. Заметим теперь, что в силу указанного выше выбора значений корня и логарифма, мы правильно учтем их значения на пути интегрирования, если положим, что вдоль петли $BCDEFGHK$ $p = i \sin \theta$, $\sqrt{p^2 + 1} = \cos \theta$, $\lg(p + \sqrt{p^2 + 1}) = \lg(\cos \theta + i \sin \theta) = i\theta$, причем θ изменяется при обходе от $-\pi$ до $+\pi$, а на



169.

$AB \lg(p + \sqrt{p^2 + 1}) = \lg(p + \sqrt{p^2 + 1}) - i\pi$, где $p = |p|$, и на $KL \lg(p + \sqrt{p^2 + 1}) = \lg(p + \sqrt{p^2 + 1}) + i\pi$, причем $\lg(p + \sqrt{p^2 + 1})$ обозначает здесь вещественную величину.²

¹ По лемме Жордана. Ср. п. 24.1, примечание ² на стр. 222.

² То, что выбор значений величин $\sqrt{p^2 + 1}$ и $\lg(p + \sqrt{p^2 + 1})$ на охватывающих линии разрезом отрезках должен быть произведен именно так, видно особенно ясно, если ввести вместо p новую комплексную переменную w соотношением

$$w = p + \sqrt{p^2 + 1}, \quad (a)$$

причем получается:

$$p = \frac{1}{2} \left(w - \frac{1}{w} \right), \quad \sqrt{p^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right). \quad (б)$$

С помощью преобразования (а), (б), надрезанная вдоль отрезка $(+i, -i)$ плоскость p отображается, как известно, конформно на внешность единичного круга с центром в начале координат в плоскости w .

Пользуясь этими значениями и замечая, что $\sqrt{p^2+1}$ после обхода по всей петле $BDEFGHK$, охватывающей обе точки разветвления $\pm i$, возвращается к своему первоначальному значению, видим, что первый интеграл, т. е. (D₂204), сводится к интегралу по петле $BDEFGHK$, т. е. к интегралу по дважды проходимому (вперед и назад) отрезку мнимой оси от $-i$ до $+i$, причем, согласно сказанному, получается:

$$J_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{BDEFGHK} \frac{e^{p\xi} d\xi}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi \sin \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\xi \sin \theta) d\theta. \quad (D_2 206).$$

Это совпадает с (D₂162) при $m=0$ и дает, таким образом, новый вывод этой формулы.

Поступая аналогичным образом с (D₂205) и пользуясь указанными выше значениями $\sqrt{p^2+1}$ и $\lg(p + \sqrt{p^2+1})$ вдоль отдельных отрезков, составляющих путь $ABDEFGHKL$, найдем, обозначая этот путь через (AL) и пользуясь очевидным упрощением записи:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} Y_0(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(AL)} \frac{e^{p\xi} \lg(p + \sqrt{p^2+1})}{\sqrt{p^2+1}} dp = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{AB} + \int_{BDEFGHK} + \int_{KL} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_0^0 \frac{e^{-\xi p} [\lg(p + \sqrt{p^2+1}) - i\pi]}{\sqrt{p^2+1}} dp - \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho\xi} [\lg(\rho + \sqrt{\rho^2+1}) + i\pi]}{\sqrt{\rho^2+1}} d\rho \right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho\xi} d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta. \quad (D_2 207) \end{aligned}$$

Последний интеграл можно упростить, если разложить его на два, именно:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta = \int_0^{\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta + \int_{-\pi}^0 e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta, \quad (D_2 208)$$

и заметить, что при введении $\psi = \pi - \theta$ получается:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta + \\ &+ \int_0^{\pi/2} e^{i\xi \sin \psi} (\pi - \psi) d\psi = \pi \int_0^{\pi/2} e^{i\xi \sin \psi} d\psi, \quad (D_2 209) \end{aligned}$$

Полагая $w = e^{r+it}$, $r \geq 0$, находим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(p) &= \operatorname{sh} r \cos \theta, & \operatorname{Re}(\sqrt{p^2+1}) &= \operatorname{ch} r \cos \theta, \\ \operatorname{Im}(p) &= \operatorname{ch} r \sin \theta, & \operatorname{Im}(\sqrt{p^2+1}) &= \operatorname{sh} r \sin \theta, \\ \lg(p + \sqrt{p^2+1}) &= \lg w = r + i\theta, \\ p &= \operatorname{sh}(r + i\theta), & \sqrt{p^2+1} &= \operatorname{ch}(r + i\theta). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

На $BCDEFGHK$ будет $r=0$, а на AB и на KL — $r \geq 0$ и $\theta = \mp \pi$ соответственно. Подставляя эти значения в формулы (в), как раз и найдем указанные в тексте значения величин.

и аналогично

$$\int_{-\pi}^0 e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta = - \int_0^{\pi} e^{-i\xi \sin \theta} \theta d\theta = -\pi \int_0^{\pi/2} e^{-i\xi \sin \psi} d\psi. \quad (D_2 210)$$

Подставляя (D₂ 209) и (D₂ 210) в (D₂ 208), найдем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi \sin \theta} \theta d\theta = 2\pi i \int_0^{\pi/2} \sin(\xi \sin \psi) d\psi = 2\pi i \int_0^1 \frac{\sin \xi t dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (D_2 211)$$

а вводя это в (D₂ 207), получим:

$$Y_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{\sin \xi t dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi \rho} d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} \right\}. \quad (D_2 212)$$

Из этой формулы, в частности, можно при вещественном $\xi \rightarrow \infty$ получить асимптотическое выражение для $Y_0(\xi)$. Именно, найдем, в этом случае:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi \rho} d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} &\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\xi \rho} d\rho = \frac{1}{\xi}, & \int_0^1 \frac{\sin \xi t dt}{\sqrt{1-t^2}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\sin \xi t dt}{\sqrt{1-t}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\sin \xi (1-u) du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sin \xi \int_0^1 \frac{\cos \xi u du}{\sqrt{u}} - \cos \xi \int_0^1 \frac{\sin \xi u du}{\sqrt{u}} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \left\{ \sin \xi \int_0^{\infty} \frac{\cos \sqrt{v} dv}{\sqrt{v}} - \cos \xi \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{v} dv}{\sqrt{v}} \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \frac{\sin \xi - \cos \xi}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sin \left(\xi - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (D_2 213)$$

так что (D₂ 212) дает:

$$Y_0(\xi) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sin \left(\xi - \frac{\pi}{4} \right). \quad (D_2 214)$$

Это совпадает с тем, что получается из (D₂ 34) при $n=0$.

Мы провели все вычисления для $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$. Сходным образом можно было бы найти преобразованные функции $[\xi^{-n} Z_n(\xi)]$ и $[\xi^{-n+1} Z_n(\xi)]$ и в случае произвольного n , а затем по ним и сами эти функции.

4. Отметим еще, в заключение, что совершенно аналогичный метод может быть применен и для вычисления (вернее, преобразования) интегралов рассматриваемого типа в конечных пределах. В самом деле, если положить

$$P_m = \int_{x_0}^x e^{-a\xi} \xi^{-\frac{m-1}{2}} \cdot Z_{\frac{m-1}{2}}(b\xi) d\xi, \quad (D_2 215)$$

то левая часть формулы (Д₂ 189) получает вид:

$$-\left\{ (a^2 + b^2) \frac{dP_m}{da} - a(m-2)P_m \right\} = -(a^2 + b^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d}{da} \left[(a^2 + b^2)^{1-\frac{m}{2}} P_m \right],$$

и тогда как справа стоит известная функция от a и от ξ . При делении на $(a^2 + b^2)^{\frac{m}{2}}$ и интегрировании по a справа войдут интегралы вида:

$$Q_1 = \int \frac{e^{-a\xi} da}{(a^2 + b^2)^{m/2}}, \quad Q_2 = \int \frac{e^{-a\xi} ada}{(a^2 + b^2)^{m/2}} = -\frac{dQ_1}{d\xi}, \quad (\text{Д}_2 \text{ 216})$$

тогда как бесселевы функции останутся вне знака интегралов. Так, при $m=1$ и верхнем пределе, равном бесконечности, получается для

$$P_1 = \int_x^\infty e^{-a\xi} Z_0(b\xi) d\xi \text{ при } \operatorname{Re}(a \pm bi) > 0 \text{ уравнение:}$$

$$\frac{d}{da} \left[\sqrt{a^2 + b^2} P_1 \right] = x \left[bZ_1(bx) \frac{e^{-ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} - Z_0(bx) \frac{e^{-ax} a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right],$$

так что

$$\sqrt{a^2 + b^2} P_1 \Big|_a^\infty = x \left[bZ_1(bx) Q(x) + Z_0(bx) \frac{dQ(x)}{dx} \right], \quad (\text{Д}_2 \text{ 217})$$

где

$$Q(x) = \int_a^\infty \frac{e^{-ax} da}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (\text{Д}_2 \text{ 218})$$

При вещественных a и b $Q(x)$ — монотонно убывающая функция от x , в свойства которой мы здесь ближе входить не будем, так же, как и в свойства более общих интегралов (Д₂ 216). Отметим лишь, что вид этих функций не зависит от рода бесселевых функций $Z_n(x)$, входящих в вычисляемые нами интегралы P_m .

5. Рассмотрим теперь интеграл

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(\eta \sin \theta + \sqrt{\rho^2 + \eta^2})}}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} d\eta = \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{e^{ik\sqrt{\eta^2 + \rho^2}}}{\sqrt{\eta^2 + \rho^2}} \cos(\eta k \sin \theta) d\eta, \quad \rho > 0, \quad k > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (\text{Д}_2 \text{ 219})$$

Полагая $\eta = \rho \operatorname{sht} t$, получим:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho [\operatorname{sht} \sin \theta + \operatorname{cht}]} dt. \quad (\text{Д}_2 \text{ 220})$$

Если ввести вспомогательный угол ψ с помощью соотношения $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\psi$ и положить $z = e^t$, то $\operatorname{sht} \sin \theta + \operatorname{cht} = z \cos^2 \psi + \sin^2 \psi / z$, и

эта величина достигает минимума при $z = \operatorname{tg} \psi \equiv e^{t_0}$. Разбивая поэтому интеграл (Д₂ 220) на два, — от $-\infty$ до t_0 и от t_0 до $+\infty$, и вводя новую независимую переменную u с помощью соотношения

$$u \sin 2\psi = \operatorname{sht} \sin \theta + \operatorname{cht}, \quad (\text{Д}_2 \text{ 221})$$

найдем, что

$$dt = \mp \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}},$$

причем верхний знак относится к первому из указанных интегралов, а нижний — ко второму. Окончательно получается:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{t_0} e^{ik\rho [\operatorname{sht} \sin \theta + \operatorname{cht}]} dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{ik\rho [\operatorname{sht} \sin \theta + \operatorname{cht}]} dt = - \int_{\infty}^1 \frac{e^{ik\rho \sin 2\psi \cdot u} du}{\sqrt{u^2 - 1}} + \\ &+ \int_1^{\infty} \frac{e^{ik\rho u \sin 2\psi}}{\sqrt{u^2 - 1}} du = 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{ik\rho u \cos \theta}}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{ik\rho \cos \theta \operatorname{ch} \xi} d\xi = i\pi H_0^{(1)}(k\rho \cos \theta), \quad (\text{Д}_2 \text{ 222}) \end{aligned}$$

и это и есть искомая формула.

Мы доказали эту формулу лишь для вещественных k и θ , но, согласно принципу аналитического продолжения, она будет справедлива и в других случаях, если только вычисляемый интеграл сходится.

6. Найдем теперь значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} K_\nu(t) t^{\mu-1} dt, \quad (\text{Д}_2 \text{ 223})$$

который сходится при $\operatorname{Re}(\mu \pm \nu) > 0$.

Будем исходить из формулы (Д₂ 164), которая дает:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} K_\nu(t) t^{\mu-1} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu\eta} d\eta \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{ch} \eta \cdot t} t^{\mu-1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\nu\eta} d\eta}{\operatorname{ch}^\mu \eta}, \quad (\text{Д}_2 \text{ 224}) \end{aligned}$$

причем использована формула

$$\int_0^{\infty} e^{-at} t^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

Полагая в (Д₂ 224) $e^{-2\eta} = u$, причем получается:

$$\frac{e^{-\nu\eta}}{\operatorname{ch}^\mu \eta} = 2^\mu \frac{e^{-(\mu+\nu)\eta}}{(1+e^{-2\eta})^\mu} = 2^\mu \frac{u^{\frac{\mu+\nu}{2}}}{(1+u)^\mu},$$

¹ Ср. (Д₂ 164), где надо положить $\nu = 0$ и $x = -ik\rho \cos \theta$.

можем переписать (D₂ 224) следующим образом:

$$I = 2^{\mu-2} \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{(1+u)^{\mu}} du. \quad (D_2 225)$$

Полагаем здесь

$$\frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u} = x \quad (D_2 226)$$

и замечаем, что пределы интегрирования по x будут $(x)_{u=\infty} = 1$ и $(x)_{u=0} = 0$. (D₁ 17) и (D₁ 18) дают теперь:

$$\begin{aligned} I &= 2^{\mu-2} \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} x^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} (1-x)^{\frac{\mu-\nu}{2}-1} dx = \\ &= 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right). \end{aligned} \quad (D_2 227)$$

Итак, получаем результат:

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(t) t^{\mu-1} dt = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right). \quad (D_2 228)$$

7. В заключение укажем еще две формулы неопределенного интегрирования:

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x) dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) \quad (D_2 229)$$

и

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x). \quad (D_2 230)$$

Справедливость этих формул вытекает из легко доказываемых дифференциальных соотношений вида:

$$\frac{d}{dx} x^{\nu} J_{\nu}(x) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \quad (D_2 231)$$

и

$$\frac{d}{dx} x^{-\nu} J_{\nu}(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad (D_2 232)$$

которые могут быть непосредственно проверены путем подстановки в них рядов вида (D₂ 2) для $J_{\nu}(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$.

Сходные формулы имеют место и для других типов бесселевых функций. Так, например, нетрудно доказать, что при целом $\nu = k$ формулы (D₂ 229) — (D₂ 232) справедливы и в том случае, если в них функции $J_k(x)$ заменить везде через соответствующие $Y_k(x)$. Подобные же формулы можно получить и для функций $I_{\nu}(x)$ и $K_{\nu}(x)$.¹ Отметим также, что при $\nu = 0$ (D₂ 232) дает:

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = J'_0(x) = -J_1(x), \quad (D_2 233)$$

¹ См. Р. Кузьмиц, Б. Ф., стр. 57.

и такая же формула получается для $Y_0(x)$:

$$Y'_0(x) = -Y_1(x). \quad (Д_2 234)$$

Для $K_0(x)$ будет тоже

$$K'_0(x) = -K_1(x), \quad (Д_2 235)$$

тогда как для $I'_0(x)$ получается, что

$$I'_0(x) = I_1(x). \quad (Д_2 236)$$

Дополнение 3

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В НАТУРАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Релятивистское уравнение движения точечного заряда имеет вид

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \quad (Д_3 1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ F &= eE + \frac{e}{c} [vH]. \end{aligned} \right\} \quad (Д_3 2)$$

Так как $\mathbf{v} = v \cdot \xi_1$, то можно переписать (Д₃ 1) так:

$$\frac{d}{dt}(mv\xi_1) = v \frac{d}{ds}(mv\xi_1) = v \left\{ \frac{d(mv)}{ds} \xi_1 + (mv) \frac{d\xi_1}{ds} \right\} = F,$$

т. е.

$$v \frac{d(mv)}{ds} \xi_1 + \frac{mv^2}{\rho} \cdot \xi_2 = \sum_{i=1}^{i=3} F_i \xi_i, \quad (Д_3 3)$$

причем использована первая формула (81,6) и $F_i = (F, \xi_i)$. Отсюда получают три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} v \frac{d(mv)}{ds} &= F_1 = e(E, \xi_1) = -e \frac{d\varphi}{ds}, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= (F, \xi_2), (F, \xi_3) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (Д_3 4)$$

Первое из них дает уравнение энергии, именно:

$$\begin{aligned} v \frac{d}{ds}(mv) &= m_0 c^2 \beta \frac{d}{ds} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{m_0 c^2 \beta^3}{(1-\beta^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\beta}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \\ &= \frac{d}{ds}(mc^2) = -e \frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 = -e\varphi + \text{const.}, \quad (Д_3 5)$$

что в комбинации с двумя другими уравнениями (Д₃ 4) приводит к уравнениям (81,1) и (81,2).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

ЧАСТЬ I ВВЕДЕНИЕ

Глава I. Общие законы электромагнитного поля и постановка основных задач о нахождении поля по заданным источникам его (7—32)

§ 1. Основные уравнения электромагнитного поля (7—11).

Уравнения Максвелла (7). Электромагнитные потенциалы (8). Интегральная форма законов электромагнитного поля (8). Граничные условия на поверхности раздела различных сред (9).

§ 2. Постановка основных задач о нахождении статических электрических и магнитных полей по заданным источникам их (11—26)

А. Непроводящие среды. Основная электростатическая задача для неограниченной однородной изотропной среды (12). „Плоская“ задача электростатики (13). Случай разнородных сред (14). Допустимость трактовки проводника при решении электростатической задачи как диэлектрика с бесконечно-большой диэлектрической постоянной (16). Пространственная и плоская магнитостатические задачи для неограниченных однородных изотропных сред (17). Случай разнородных сред (19). Разделение поля на первичное и вторичное и сведение к основной электростатической задаче (20).

Б. Проводящие среды. Основная токовая задача и ее сведение к электростатической (23). Сторонние электродвижущие силы (24).

§ 3. Основные задачи в случае переменных полей (26—30)

Уравнения для скалярного и векторного потенциалов в случае однородных изотропных сред (27). Уравнения для компонент электрического и магнитного полей (29)

§ 4. Некоторые проблемы математической физики, решение которых эквивалентно решению одной из основных задач теории электромагнитного поля (30—32)

Основные уравнения акустики, теории теплопроводности, диффузии, колебания мембран, колебаний струн, уравнение безвихревого движения несжимаемой жидкости, телеграфное уравнение, уравнение, которым определяются процессы в безиндукционном кабеле (30).

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава II. Метод частных решений и его применение к решению однородных уравнений (33—54)

§ 5. Общие принципы метода (33—34)

Разделение переменных и нахождение частных решений. Удовлетворение граничным условиям (33).

§ 6. Приложение метода частных решений к решению первой предельной задачи (задачи Дирихле) для уравнения Лапласа для прямоугольной области (34—41)

Общая задача Дирихле для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для прямоугольной области (34). Нахождение частных решений (34). Сведение решения общей задачи к решению двух задач с частично нулевыми граничными значениями искомой функции (35). Окончательная форма решения, получаемого по методу частных решений (39). Применение общей теории к простому частному случаю (39). Сложность и неестественность получающегося таким способом решения (40). Причины этого (40).

§ 7. Другой способ получения того же решения первой предельной задачи для прямоугольника (41—54)

Другой метод подхода к получению решения той же задачи для прямоугольника (42). П р и м е р ы к §§ 6—7. Случай, когда на трех сторонах прямоугольника потенциал равен нулю, а на четвертой — отличен от нуля и постоянен (44). Преобразование решения к другому виду (46). Предельные случаи: решение задачи для бесконечной полуполосы и для прямого угла (квадранта) (47). Представление решения в различных формах (48). Непосредственное решение задачи для полуполосы с помощью интеграла Фурье (52).

Глава III. Применение второго способа использования частных решений для решения уравнения Пуассона (54—63)

§ 8. Первая предельная задача для прямоугольника для уравнения Пуассона (54—63)

Общая задача Дирихле для прямоугольника (54). Сведение к случаю нулевых граничных условий (54). Общее решение задачи (55). Другой способ получения общего решения (56). П р и м е р: заряженная нить внутри прямоугольника (57). Преобразование полученного решения к другому виду (59). Предельные случаи: решения для полуполосы, для нити, находящейся между двумя безграничными параллельными пластинами, нить над проводящей плоскостью, поле одиночной нити (61).

Глава IV. Третий метод решения первой предельной задачи и его распространение на граничные задачи иных типов (63—92)

§ 9. Третий метод подхода к решению первой предельной задачи для прямоугольника (63—70)

Сущность метода (63). Два различные формы решения (64). Принципиальное отличие получающихся по этому способу решений от решений, находимых по методу Фурье—Ламе (65). Характер сходимости получающихся рядов (65). Общий метод улучшения их сходимости (66). П р и м е р 1: решение этим способом рассматривавшейся

в п. 7.2 задачи о прямоугольнике, на трех сторонах которого потенциалы равны нулю, а на четвертой — отличен от нуля (67). Пример 2: решение таким способом задачи, решавшейся в п. 6.4. (68). Естественность получаемой в обоих случаях формы решения и отсутствие необходимости приведения к нулевым граничным условиям (68). Общие замечания по поводу третьего метода (69).

§ 10. Вторая предельная задача для прямоугольника (задача Неймана) (70—78)

Общая задача Неймана для прямоугольника и ее решение третьим методом (70). Две формы решения задачи (74). Характер сходимости рядов (74). О невозможности решения общей задачи Неймана путем разложения ее на две задачи с частично однородными граничными условиями (74). Улучшение сходимости (76). Пример решения „плоской“ токовой задачи (77).

§ 11. Распространение метода на другие предельные задачи для прямоугольника (78—87)

Более общие типы граничных условий (78). Решение задачи в случае, когда на сторонах прямоугольника заданы значения линейных комбинаций из искомой функции и ее нормальной производной (79). Соответствующие фундаментальные функции и характеристические числа (82). Ортогональность фундаментальных функций (84). Разложение функций в ряды по фундаментальным функциям (85).

§ 12. Примеры на приложение развитых выше методов (87—92)

Пример 1. Плоская задача электростатики для случая, когда потенциал и поле требуется найти внутри бесконечной полуполосы, на одной из бесконечно-длинных сторон которой потенциал отличен от нуля, а на двух других сторонах равен нулю (87). Пример 2. Растекание тока от провода (заземлителя), помещенного внутрь бесконечного однородного плоского проводящего слоя и параллельного ограничивающим этот слой плоскостям (89).

Глава V. Внутренние предельные задачи для двухмерного волнового уравнения и прямоугольной области (92—102)

§ 13. Общие соображения и их применение к нахождению электромагнитного поля провода, питаемого переменным током и помещенного в идеально проводящую трубу прямоугольного сечения (92—103)

Общий метод решения предельных задач первого, второго и третьего рода для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = -4\pi\gamma(x, y)$ и прямоугольной области (92). Пример: поле, создаваемое внутри бесконечно-длинной трубы прямоугольного сечения с идеально-проводящими стенками проводом, питаемым переменным током и расположенным параллельно ее оси (94). Предельные случаи: провод, питаемый переменным током, находящийся между двумя безграничными параллельными идеально-проводящими пластинами (97). Провод над пластиной (98). Одиночный провод в безграничном пространстве. Другая форма решения задачи о поле провода, находящегося между двумя параллельными пластинами (100).

Глава VI. Задача об интегрировании трехмерных уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца для цилиндрических или призматических областей (103—122)

§ 14. Общий метод. Примеры (103—122)

Задача об интегрировании уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = -4\pi\gamma(x, y, z)$ для цилиндрической или призматической области (103). Случай, когда при двух значениях

$z = z_1$ и $z = z_2$ искомая функция должна удовлетворять граничным условиям первого, второго или третьего рода (104). Сведение к двухмерному волновому уравнению (104). Пример 1: потенциал и поле внутри прямоугольного параллелепипеда с проводящими стенками при наличии зарядов внутри его (106). Случай точечного заряда (функция Грина для задачи Дирихле для прямоугольного параллелепипеда) (108). Связь с методом отражения (108). Различные формы решения (109). Предельные случаи: 1) точечный заряд внутри полубесконечной трубы прямоугольного сечения (109); 2) точечный заряд внутри бесконечной трубы (110); 3) точечный заряд между двумя бесконечными параллельными проводящими плоскостями (110). Точечный заряд против бесконечной проводящей плоскости (111). Вторая форма решения задачи о поле точечного заряда, находящегося между двумя параллельными проводящими плоскостями (112). Пример 2: задача о нахождении поля внутри цилиндрической коробки, оба основания которой заземлены, а боковая поверхность находится при отличном от нуля потенциале (113). Предельные случаи: поле внутри полубесконечной трубы, торец которой находится при другом потенциале, чем боковая поверхность (115). Потенциал и поле на оси трубы (115). Сравнение с соответствующим плоским случаем (116). Пример 3: решение электростатической задачи для такой же цилиндрической коробки, но при наличии внутри нее какого-либо аксиально-симметричного распределения объемных зарядов (116). Случай точечного заряда, находящегося на оси системы (117). Предельные случаи: 1) точечный заряд между двумя параллельными бесконечными проводящими плоскостями (119); 2) точечный заряд внутри полубесконечной проводящей круглой трубы (120); 3) потенциал точечного заряда, находящегося на оси бесконечной круглой трубы с проводящими стенками (120). Пример 4: распределение стационарного тока внутри однородного проводящего цилиндра, в который ток вводится через круглый электрод, наложенный на его торец, и отводится через кольцевой электрод, лежащий на его боковой поверхности (121).

Глава VII. Общий метод решения некоторых краевых задач для определенного класса уравнений с разделяющимися переменными (123—135)

§ 15. Принципы метода и доказательство основной теоремы (123—135)

Общее неоднородное линейное уравнение второго порядка для функции от m независимых переменных (123). Понятие отделяющейся переменной (123). Основная теорема (123). Ее применение к решению задач с граничными условиями первого, второго или третьего рода (125). Фундаментальные или собственные функции, соответствующие отделяющимся переменным (126). Характеристические числа (126). Теорема разложения (127). Преобразование граничных условий (129). Характер сходимости рядов, представляющих решение (130). Способы улучшения сходимости этих рядов (130). Случай полного разделения (132). Принципиальное отличие решений, получаемых с помощью метода этого параграфа, от решений, получаемых по методу Фурье—Ламе (132). Метод Фурье—Ламе, как частный случай этого общего метода в случае однородных граничных условий (132). О различных формах решения одной и той же задачи в зависимости от порядка, в котором применяется к отдельным переменным предписываемый методом процесс (132). Некоторые особые виды граничных условий (132). Случай, когда на одном из концов интервала граничное условие заменяется требованием конечности решения (132). Случай, когда граничные условия заменяются условиями периодичности решения по соответствующей координате (133).

Глава VIII. Приложение общего метода к решению уравнений, допускающих разделение переменных в цилиндрических координатах (135—182)

§ 16. Решение уравнений $\Delta\varphi = -4\pi f$ и $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi f$ в цилиндрических координатах (135—153)

Разделение переменных в уравнении $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ в цилиндрических координатах (135). Типы радиальных функций при $k \neq 0$ и при $k = 0$ (136). Пример 1: решение плоской электростатической задачи (общей предельной задачи первого рода) для кругового прямоугольника, ограниченного двумя дугами концентрических кругов и двумя отрезками радиусов, исходящих из общего центра этих дуг (136). Два способа решения этой задачи (137). Предельный случай: решение для области, имеющей форму кругового сектора (138). Частные случаи. Пример 2: первая предельная задача для двухмерного уравнения Пуассона для секториальной или неполной секториальной области при произвольном распределении объемных зарядов внутри нее (140). Случай, когда внутри области находится заряженная нить (141). Предельные случаи: 1) решение для клина с острым ребром (143); 2) тонкая проводящая пластинка в поле заряженной нити (143); 3) решение для проводящего клина с цилиндрическим закруглением на конце, находящегося в поле заряженной нити (144); 4) плоскость с полуцилиндрической выпуклостью на ней в присутствии заряженной нити (144). Пример 3: решение первой предельной задачи (плоской) для уравнения $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ для секториальной или неполной секториальной области (144). Задача Зоммерфельда о дифракции плоской электромагнитной волны от идеально-проводящего клина как частный случай этой общей задачи (144). Общее решение первой предельной задачи для нулевых граничных условий (145). Частный случай: линейный провод с переменным током внутри идеально-проводящей трубы секториального или неполного секториального сечения (146). Предельные случаи: 1) дифракция волн, исходящих от бесконечно-длинного провода с переменным током, от бесконечного идеально-проводящего клина с цилиндрическим закруглением на конце (147); 2) дифракция от клина с острым ребром (148); 3) случай плоской волны, набегающей на клин из бесконечности (задача Зоммерфельда) (148). Сходимость получаемых рядов и возможность их суммирования с помощью комплексных интегралов (149). Интегрирование однородного уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ при отличных от нуля значениях искомой функции на контуре (149). Общее решение этой задачи, а вместе с тем и общей предельной задачи первого рода для неоднородного уравнения $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ для рассматриваемой области (150). Замечание о трудностях, к которым приводит попытка решения той же задачи с помощью обычного метода частных решений и о практической невозможности решения ее на этом пути, кроме как в отдельных частных случаях (150). Пример 4: решение общей первой предельной задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = -4\pi f(r, \theta, z)$ для области, имеющей вид шестигранника, ограниченного координатными поверхностями $r = r_1$, $r = r_2$, $\theta = 0$, $\theta = \alpha$, $z = 0$, $z = c$ (151). Задача о поле бесконечного идеально-проводящего клина в произвольном трехмерном внешнем поле (волновом или статическом), как предельный частный случай этой общей задачи (152).

§ 17. Поле внутри или вне цилиндра (153—166)

Общее решение предельных задач всех трех родов для уравнений $\Delta u = -4\pi\rho(r, \theta, z)$ и $\Delta u + k^2 u = -4\pi f(r, \theta, z)$ для сплошного или полого цилиндра конечной длины или для пространства внутри или вне бесконечного цилиндра (153). Пример 1: распределение стационарного тока в тонкой проводящей пластинке, к которой приложены два точечных электрода (155). Случай пластинки конечной толщины (159). Пример 2: распределение стационарного тока в цилиндре, когда один из электродов имеет форму маленького круглого диска, наложенного на один из торцов цилиндра, а второй электрод

имеет форму кольца, паложенного на его боковую поверхность (160). Отличие получаемого решения этой задачи от того, которое было дано в п. 14. 18 (161). П р и м е р 3: нахождение электростатического поля, создаваемого внутри цилиндрической полости аксиально-симметричным распределением зарядов, причем распределение потенциала на поверхности, ограничивающей область, считается заданным и тоже обладающим симметрией вращения. Общее решение задачи (161). Частный случай: поле внутри цилиндрической полости, когда на ее боковой поверхности и на одном из торцов потенциал равен нулю, а на втором торце — отличен от нуля (163). Предельный случай бесконечно-длинного полуцилиндра (164). Сравнение полученного решения с ранее найденным в п. 14. 12 решением той же задачи. Непосредственное преобразование одной формы решения в другую (164).

§ 18. Несколько различных однородных сред. Граничные поверхности в виде коаксиальных круговых цилиндров (166—174)

Общая электростатическая задача для случая, когда в пространстве имеется ряд коаксиальных цилиндрических слоев из различных диэлектриков (166). П р и м е р 1: плоская электростатическая задача в случае трех сред и произвольного распределения зарядов в них (168). Случай внешнего поля, создаваемого заряженной нитью (168). Частные случаи: 1) нить в однородной среде (171); 2) две различные среды. Закон отражения (172); 3) заряженная нить внутри или вне проводящей трубы (173). П р и м е р 2: случай, когда цилиндрические диэлектрические слои не уходят концами в бесконечность, а ограничены двумя проводящими плоскостями, перпендикулярными к оси системы и находящимися на конечном расстоянии друг от друга (173). Частные и предельные случаи: бесконечный диэлектрический или проводящий цилиндр в произвольном пространственном поле (174). Связь с теорией каротажа. Решение общей токовой задачи для аналогичной системы проводящих сред (174).

§ 19. Плоская и пространственная задачи для секториального распределения сред (175—182)

Общий метод решения плоской электростатической задачи для случая, когда в пространстве имеется произвольное число однородных изотропных сред, распределенных секториальным образом между двумя коаксиальными цилиндрами, причем между цилиндрами имеется произвольное распределение объемных зарядов, а на поверхностях их задано какое-либо распределение потенциала (175). П р и м е р: нахождение электростатического поля в пространстве между двумя проводящими заземленными цилиндрами, когда одна половина этого пространства занята средой с диэлектрической постоянной ϵ_1 , а вторая — с ϵ_2 . и когда внутри этого пространства находится параллельная оси системы заряженная нить или, в более общем случае, произвольное плоское распределение объемных зарядов (176). Случай, когда внутренний цилиндр отсутствует, так что среды ϵ_1 и ϵ_2 сплошь заполняют внутренность второго цилиндра (178). Истолкование полученного решения в смысле теории отражения зарядов. Случай, когда отсутствует внешний цилиндр, и среды ϵ_1 и ϵ_2 простираются до бесконечности (181). Пространственная электростатическая задача в случае произвольного числа секториально-распределенных сред и общий метод ее решения (182).

Глава IX. Приложение общего метода к решению уравнений, допускающих разделение переменных в сферических координатах (182—207)

§ 20. Решение уравнений $\Delta u = -4\pi f$ и $\Delta u + k^2 u = -4\pi f$ в сферических координатах (182—207)

Разделение переменных в уравнении $\Delta u + k^2 u = 0$ в сферических координатах. Получающиеся при этом радиальные и угловые функции (182). Присоединенные функции

Лежандра $P_n^m(x)$ и некоторые их свойства (184). Вид функций $P_n^m(x)$ при четных m и n (185). Полиномы Лежандра (185). Функции второго рода — $Q_n^m(x)$ (185). Правила выбора пригодных частных решений в зависимости от вида области, для которой требуется провести решение задачи (187). П р и м е р 1: диэлектрическая сфера в поле произвольного распределения зарядов (188). Частный случай: сфера в поле точечного заряда (191). П р и м е р 2: задача о распределении электричества по поверхности бесконечного проводящего кругового конуса, находящегося в пустоте под действием расположенного на его оси точечного заряда, или в более общем случае в поле любого аксиально-симметричного распределения объемных зарядов (192). Общее решение электростатической задачи для области, ограниченной двумя концентрическими сферами и исходящим из их общего центра конусом произвольного раствора α (193). Связь решения этой задачи с решением уравнения $P_n(\cos \alpha) = 0$ относительно номера n функции $P_n(\cos \alpha)$ (193). Общий вид решения при произвольном аксиально-симметричном распределении объемных зарядов внутри рассматриваемой области (195). Случай точечного заряда, лежащего на оси системы (195). Предельные случаи: 1) решение для бесконечного конуса (196); 2) решение для бесконечного конуса с шаровым закруглением на конце (196). Частный случай: заряд против плоскости (конус с углом раствора $\alpha = \frac{\pi}{2}$) (196); 3) решение в случае плоскости с полусферовой выпуклостью на ней (197); 4) решение в случае области, образованной пересечением конуса с шаровой поверхностью (197). П р и м е р 3: нахождение электромагнитного поля колеблющегося диполя, помещенного на оси идеально-проводящего конического рефлектора (197). Постановка задачи. Решение более общей задачи о поле внутри области, ограниченной двумя концентрическими идеально-проводящими сферами и идеально-проводящим конусом с вершиной в их общем центре, причем внутри области имеется произвольное распределение радиальных сторонних токов (197). Переход к излучателю в виде элементарного диполя (201). Предельный случай: дифракция электромагнитных волн, исходящих от излучающего диполя, находящегося на оси бесконечного конуса с шаровым закруглением на конце (203). Частные случаи: колеблющийся диполь над идеально-проводящей плоскостью с полусферовой выпуклостью на ней (203); 3) дифракция волн от диполя в случае конуса без закругления (203). Преобразование полученного решения к другому виду (205). Заключительные замечания о задачах, разрешимых в сферических координатах (207).

Глава X. Применение общего метода к решению нестационарных проблем (первый способ) (207—215)

§ 21. Общие принципы. Примеры (207—215)

Общие соображения. Их иллюстрация на примере задачи теплопроводности для пластинки, на поверхности которой температура изменяется со временем заданным образом (207). П р и м е р 1: случай начальной температуры равной нулю и линейного роста температуры на границе (209). П р и м е р 2: двухмерная тепловая задача для прямоугольника, на сторонах которого температура изменяется заданным образом со временем (210). П р и м е р 3: разогрев или охлаждение однородного сплошного цилиндра (213). П р и м е р 4: решение одномерного волнового уравнения для ограниченной области при заданных начальных и граничных условиях (214).

Глава XI. Второй способ решения нестационарных проблем (215—231)

§ 22. Общие принципы (215—218)

Общие соображения (215). Их иллюстрация на примере некоторого общего уравнения (215). Лапласова преобразованная от какой-либо функции (217). Уравнение и граничные условия для нее (217).

§ 23. Теорема обращения Римана—Меллина (первая) (218—220)

Интеграл Фурье и его применение к получению формулы обращения Римана—Меллина (218).

§ 24. Примеры на приложение второго способа (220—231)

Пример 1: установление стационарного режима в безиндукционном кабеле, один конец которого заземлен, а другой приключен к источнику постоянного напряжения (220). Формулировка задачи и нахождение преобразованного потенциала (221). Первый способ вычисления интеграла Римана—Меллина, — сведение его к сумме вычетов подинтегральной функции в левой полуплоскости (222). Лемма Жордана (222). Характер сходимости получающегося ряда (224). Предельный случай бесконечного кабеля (224). Непосредственное решение задачи для бесконечного кабеля (224). Выражение решения через интеграл вероятности (226). Второй способ вычисления интеграла Римана—Меллина для кабеля конечной длины (227). Связь с решением для бесконечного кабеля (227). Хорошая сходимость полученного ряда для малых времен (227). Пример 2: интеграл одномерного волнового уравнения для безграничного промежутка при заданных начальных условиях (228).

Глава XII. Улучшение сходимости рядов, получаемых при применении метода пятнадцатого параграфа и заключительные замечания о пределах применимости этого метода (232—254)

§ 25. Функция Грина обыкновенного дифференциального уравнения и ее основные свойства (232—239)

Функция Грина для уравнения Штурма—Лиувилля и ее основные свойства в случае, когда ни одно из характеристических чисел не равно нулю (232). Билинейная формула (235). Другое представление функции Грина (235). Пример: функция Грина для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ и граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ (236). Характер сходимости билинейного ряда и его производной (237). Асимптотическое выражение характеристических чисел и фундаментальных функций (237).

§ 26. Улучшение сходимости рядов, когда ни одно из характеристических чисел не равно нулю (239—244)

Улучшение сходимости рядов, к которым приводится решение задачи с предельными условиями первого рода (239). Выражение „улучшающей“ функции через функцию Грина (241). Примеры (241). Улучшение сходимости в общем случае предельных условий третьего рода (242). Частный случай (244).

§ 27. Функция Грина (обобщенная) в том случае, когда $\lambda = 0$ — характеристическое число. Ее применение к улучшению сходимости рядов (244—248)

Построение обобщенной функции Грина в том случае, когда $\lambda = 0$ — характеристическое число (244). Билинейная формула для нее (246). Пример: обобщенная функция Грина для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ в случае граничных условий $y'(0) = y'(l) = 0$ (246). Использование обобщенной функции Грина для улучшения сходимости соответствующих рядов по фундаментальным функциям (247). Пример (248).

§ 28. Случай, когда $p(x)$ обращается в нуль на одном из концов промежутка (a, b) (249—252)

Нахождение функции Грина в этом случае и ее применение к улучшению сходимости рядов по фундаментальным функциям (249). Примеры (249).

§ 29. Заключительные замечания о решении уравнений с разделяющимися переменными (252—254)

Область применения метода (252). О рассмотрении областей бесконечного размера, как предела областей конечных размеров (253). Непосредственное рассмотрение бесконечных областей и возможные в этом случае осложнения (253). О степени пригодности метода § 15 в случае, когда искомая функция или ее первая производная разрывны внутри области (254).

ЧАСТЬ III

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Глава XIII. Основная задача электростатики в случае наличия в пространстве нескольких различных сред (255—272)

§ 30. Постановка задачи. „Свободные“ заряды на поверхностях различных сред и уравнения для нахождения их распределения (255—260)

Поляризационные и свободные заряды на поверхностях раздела различных сред (255). Сведение решения основной задачи электростатики к нахождению плотностей свободных зарядов (257). Уравнения для этих плотностей (258). Случай магнитостатической, токовой и других сходных задач (259).

§ 31. Разбор на основе общего метода ряда элементарных случаев (260—269)

Два диэлектрика с плоской поверхностью раздела (260). Решение в случае поля, создаваемого одним точечным зарядом (261). Правило отражения в случае, когда одна из сред — проводящая (261). Распространение правила отражения на случай двух диэлектрических сред (261). Однородный диэлектрический цилиндр с диэлектрической постоянной ϵ_1 , помещенный в неограниченный однородный диэлектрик ϵ_2 (262). Общее решение задачи (263). Частные случаи: 1) проводящий цилиндр в однородной диэлектрической среде (264). Правило отражения для него (264); 2) распространение правила отражения на случай диэлектрического цилиндра (266); 3) поле внутри проводящего цилиндра (266). Проводящий шар в однородной среде (266). Общее решение задачи в случае, когда шар находится в произвольном внешнем поле и когда дан его потенциал или находящийся на нем суммарный заряд (267).

§ 32. Разбор ряда случаев с более сложными (комбинированными) формами поверхности раздела (269—272)

Диэлектрический полуцилиндр на проводящей плоскости (269). Предельный случай: проводящая плоскость с выпуклостью в форме полуцилиндра (270). Поле над проводящей плоскостью с выпуклостью в виде полшара (270). Электростатическая задача в случае, когда требуется найти поле в пространстве над проводящей плоскостью, над которой расположены два диэлектрика с перпендикулярной к ней плоской поверхностью раздела (272).

Глава XIV. Специальный класс „плоских“ задач электростатики (секториальное расположение сред) (272—320)

§ 33. Формулировка задачи (272—276)

Постановка задачи (272). Составление основных уравнений для плотностей свободного заряда (274). „Ключевая“ задача (276).

§ 34. Первый этап решения задачи. „Преобразованные“ плотности и уравнения для них (277—283)

Введение в рассмотрение „преобразованных“ плотностей (277). Связь с преобразованием Лапласа (277). Переход к уравнениям для преобразованных плотностей (278). Общее решение задачи о нахождении преобразованных плотностей (278).

§ 35. Вторая теорема обращения Римана—Меллика (280—233)

Формулировка и доказательство теоремы (280). Пример (232).

§ 36. Применение второй теоремы обращения Римана—Меллика к нахождению плотностей $\sigma(s)$ по их преобразованным значениям $\bar{\sigma}(v)$ (282—288)

Общие соображения о возможности применения теоремы обращения к нахождению плотностей σ_k по их преобразованным значениям $\bar{\sigma}_k$ (283). Случай „ключевой“ задачи (284). Общие приемы вычисления встречающихся в ходе решения задачи комплексных интегралов (286).

§ 37. Две среды с прямоугольной поверхностью раздела (288—294)

Ключевая задача для случая двух различных сред ϵ_1 и ϵ_2 с прямоугольной поверхностью раздела (288). Нахождение свободных плотностей в общем виде (290). Предельный случай, когда одна из сред — проводящая (293).

§ 38. Две диэлектрические среды с плоскостями раздела, составляющими произвольный угол (294—303)

Ключевая задача в случае, когда плоскости раздела обеих сред ϵ_1 и ϵ_2 составляют друг с другом произвольный угол (294). Исследование исходного интеграла и нахождение искомых плотностей (295). Предельный случай проводящего клина (299). Получение решения для случая двух различных диэлектриков, когда составленный плоскостями раздела угол равен $\pi \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно-простые целые числа (300). Случай, когда решение может быть выражено в явном (буквенном) виде через параметры задачи (302).

§ 39. Три разнородных среды (303—306).

Решение ключевой задачи в случае трех различных диэлектрических сред, из которых одна заполняет целое полупространство, а две другие — по квадранту каждая (304).

§ 40. Дополнительные замечания о нахождении плотностей в том случае, когда одна из сред — проводник, заполняющий целое полупространство (306)

§ 41. Нахождение электростатического поля и потенциала в любой точке пространства в случае секториального распределения сред (306—313)

Вычислительные трудности, возникающие при непосредственном применении метода плотностей для нахождения поля, создаваемого в пространстве известным распределением истинных зарядов (306). Возможность устранения этой трудности (307). Нахождение преобразованных компонент поля (308). Их выражения через преобразованные плотности (309). Комплексный потенциал и его связь с полем (311). Нахождение поля и комплексного потенциала по значениям преобразованных компонент поля (312). Комплексный потенциал полного поля (313).

§ 42. Поле и потенциал в случае двух различных сред (314—320)

Нахождение поля и потенциала в случае наличия двух сред — одной, заполняющей угол β , и второй, заполняющей угол $(2\pi - \beta)$ (ключевая задача) (314). Общий вид решения (314). Частные случаи: 1) $\beta = \pi$ (каждая среда заполняет целое полупространство (314); 2) β — произвольный угол, а вторая среда — проводящая (316). Случай прямоугольной поверхности раздела (313). Общее решение в случае произвольных сред и углов (319).

Глава XV. Плоская электростатическая задача для многослойного диэлектрика с плоско-параллельными поверхностями раздела сред (321—327)

§ 43. Нахождение плотностей поляризационных зарядов, выделяющихся на поверхностях раздела (321—324)

Составление интегральных уравнений для поляризационных плотностей (321). Введение в рассмотрение „преобразованных по Фурье“ и их применение к решению интегральных уравнений для плотностей (322). Общее решение задачи (322). П р и м е р: случай трех различных сред. Предельные случаи (324).

§ 44. Нахождение компонент поля (324—326)

Общие выражения для компонент поля, создаваемого поляризационными зарядами (324). Преобразованные по Фурье от компонент поля и их выражение через преобразованные плотности (325).

§ 45. Нахождение комплексного потенциала поля (326—326)

Глава XVI. Плоская магнитостатическая задача (327—335)

§ 46. Связь между решениями плоских электростатических и магнитостатических задач при одинаковой форме разграничивающих различные среды поверхностей (327—330)

Сравнение двух задач: 1) электростатической, когда различные среды это диэлектрики с диэлектрическими постоянными $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, а внешнее (первичное) поле создается зарядами с объемной плотностью $\rho = f(x, y)$; 2) магнитостатической, отвечающей тем же очертаниям сред (магнетиков), обладающих соответственно магнитными проницаемостями $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, тогда как первичное магнитное поле создается бесконечно-длинными токовыми нитями, параллельными оси Z , причем Z -овая составляющая j_z плотности этих токов равна объемной плотности ρ электрических зарядов в первой задаче, т. е. $j_z = f(x, y)$ (328). Сведение одной из этих задач к другой (328). Связь между электростатическим потенциалом первой из них с вектором-потенциалом второй (330). Правило перехода для соответствующих ключевых задач (330).

§ 47. Примеры решения магнитоэлектростатических задач при помощи теоремы § 46 (330—335)

Линейный ток в неограниченной среде с магнитной проницаемостью μ (330). Две различные среды μ_1 и μ_2 с плоской поверхностью раздела (331). Цилиндр из намагничивающегося материала во внешнем поле (332). Распределение магнитной индукции вне и внутри неограниченного двугранного угла, заполненного идеальным железом с бесконечно-большой проницаемостью (ключевая задача) (332). Случай прямоугольного полюсного башмака (335).

Глава XVII. Инверсия в круге и ее применение к решению плоской электростатической задачи (336—365)

§ 48. Геометрическая часть (336—338)

Инверсия в круге и основные свойства осуществляемого ею преобразования (336).

§ 49. Электростатическая часть (338—346)

Применение инверсии к решению электростатических задач (338). Случай произвольного расположения зарядов в пустоте или на поверхностях проводников (338). Пример (340). Случай наличия в пространстве ряда однородных изотропных диэлектриков (342). Необходимость специальных оговорок при применении общего метода в случае наличия уходящих на бесконечность поверхностей раздела сред, а также тогда, когда центр инверсии лежит на поверхности раздела (344). Пример: получение решения задачи о диэлектрическом цилиндре, находящемся в плоском внешнем поле, из решения электростатической задачи, соответствующей плоской поверхности раздела (344).

§ 50. Связь комплексных потенциалов первичной и „отраженной“ задач (346—347)

§ 51. Применение инверсии к диэлектрическим клиньям (347—352)

Применение инверсии к случаю неограниченного диэлектрического клина с постоянной ϵ_1 , окруженного средой с постоянной ϵ_2 и находящегося в произвольном плоском внешнем поле (347). Решение для диэлектрического цилиндра с сечением в форме луночки, ограниченной двумя дугами кругов (348). Различные частные случаи (348). Более общая задача, соответствующая инверсии в случае нескольких диэлектрических клиньев (352).

§ 52. Биполярные координаты и их приложение к решению задач с помощью инверсии (352—363)

Биполярные координаты их связь с декартовыми (352). Применение биполярных координат к задаче об инверсии поля некоторой системы зарядов, проводников и диэлектриков, потенциал которой в исходной картине известен (354). Формулы, дающие связь потенциалов в основной и отраженной картинах (357). Пример: поле, получаемое при инверсии полубесконечной проводящей пластинки (поле цилиндрического сегмента) (357). Частный случай, когда цилиндрический сегмент переходит в плоскую пластинку конечной ширины (359). Цилиндрический сегмент в произвольном плоском поле (360). Щелевая диафрагма (361). Общие формулы для вычисления компонент поля в биполярных координатах (362). Их применение к нахождению плотностей заряда на выпуклой и вогнутой сторонах сегмента (362).

§ 53. Применение инверсии к нахождению поля пары произвольных, как угодно друг относительно друга расположенных цилиндров из разных диэлектриков, находящихся в однородной среде и внесенных в произвольное внешнее поле. Соответствующая токовая задача (363—365)

Получение искомого решения при помощи инверсии из данного в п. п. 18.1—18.2 решения для случая наличия в пространстве ряда концентрических диэлектрических цилиндров (363). Различные местоположения центра инверсии (364). Нахождение распределения токов в проводящем полупространстве при наличии внутри него проводящего цилиндра другой проводимости (365).

Глава XVIII. Пространственная электростатическая задача в случае секториального распределения сред (365—404)

§ 54. Постановка задачи (365—372)

Общий метод подхода к решению задачи (366). Разложение поля и потенциала в интеграл Фурье в направлении оси секториального распределения (367). Преобразование Конторовича—Лебедева и его применение к данной задаче (367). Получение уравнений для плотностей свободных зарядов (368). Ключевая задача (372).

§ 55. Общее решение задачи (373—377)

Получение уравнений для преобразованных плотностей (373). Аналогия с соответствующей плоской задачей (375). Теорема обращения Конторовича-Лебедева и ее применение к нахождению плотностей по их преобразованным значениям (375).

§ 56. Доказательство теоремы обращения Конторовича—Лебедева (377—383)

Доказательство теоремы обращения (377). Различные формы, в которых может быть представлена формула обращения (382).

§ 57. Применение формулы обращения к решению ключевой задачи (383—391)

Общее исследование решения ключевой задачи (383). Аналогия между решениями соответствующих плоской и пространственной задач (386). Плоская задача как предельный случай пространственной (386). Различные формы, в которых может быть представлено решение (387). Приемы фактического вычисления встречающихся при применении метода комплексных интегралов (388).

§ 58. Применение общей методики к случаю прямоугольной поверхности раздела (391—397)

Ключевая задача для прямоугольной поверхности раздела (391). Получение и преобразование выражений для плотностей (391). Суммирование бесконечных рядов (395). Возможность непосредственного вычисления угловой компоненты поля (397).

§ 59. Другой метод решения задачи в случае проводящего клина в однородной среде (397—400)

Связь рассматриваемой задачи с задачей о дифракции волн от идеально-проводящего клина (397). Переход от данного в § 16 решения задачи о дифракции плоских волн от идеально-проводящего клина к решению электростатической задачи для клина (397). Общая формула для потенциала соответствующей ключевой задачи (399).

§ 60. Некоторые частные случаи задачи о клине (401—404)

Рассмотрение ряда частных случаев, в которых возможно выполнить квадратуры в общем решении § 59 (401). Полубесконечная проводящая пластинка и др. (403). Прямой двугранный угол, заполненный проводником, находящийся в поле произвольно расположенного точечного заряда (404).

Глава XIX. Инверсия в шаре и ее применение к решению электростатических задач (404—425)

§ 61. Принципиальные основы метода инверсии в шаре (404—408)

Геометрическая часть (404). Электростатическая часть (405). Применение инверсии к решению пространственной электростатической задачи (406). Пример (408).

§ 62. Потенциал и поле проводника, поверхность которого образована пересечением двух сфер (408—414)

Применение инверсии к задаче о поле неограниченного проводящего клина, находящегося в поле точечного заряда (408). Общие выражения для потенциала свободного распределения зарядов по поверхности проводника, образованного пересечением двух сфер (410). Частные случаи: бесконечно-тонкий сферический сегмент (случай Кельвина) и др. (411). Поле и потенциал свободного распределения зарядов по плоской круглой пластинке (413). Потенциал на оси сегмента, образованного пересечением двух сфер произвольных радиусов (414).

§ 63. Плотность зарядов на поверхности сферического сегмента (414—419)

Нахождение плотностей на выпуклой и вогнутой стороне сегмента (414). Случай плоской круглой пластинки (415). Выражение плотностей заряда на внешней и внутренней сторонах любого сферического сегмента через геометрически наглядные элементы (415). Формулы Кельвина (417). Особенно наглядная геометрическая интерпретация основной величины, от которой зависят рассматриваемые плотности (417). Емкость проводника, образованного пересечением двух сфер (418). Формулы Макдональда (418). Частные случаи (419). Емкость проводящего полушара (419).

§ 64. Проводник, поверхность которого образована пересечением двух произвольных сфер, находящихся во внешнем поле (420—425)

Получение общего решения задачи с помощью инверсии (420). Частные случаи (423). Круглая пластинка, находящаяся в поле точечного заряда (423). Диафрагма в виде неограниченной проводящей плоскости с круглым отверстием, находящаяся в поле точечного заряда (423). Диафрагма в однородном поле (423). Различные другие частные случаи (424).

Глава XX. Некоторые общие теоремы, относящиеся к распределению электричества на проводниках и на тонких незамкнутых проводящих поверхностях (425—439)

§ 65. О распределении электричества на тонких незамкнутых проводящих поверхностях (425—435)

Постановка задачи (426). Выражение разности плотностей зарядов на обеих сторонах поверхности через суммарную плотность (427). Сведение решения задачи к интегральному уравнению для суммы плотностей зарядов, сидящих на элементе поверхности (428). Применение общей теории к частным случаям (428). Теорема, связывающая разность плотностей поверхностного заряда на обеих сторонах какого-либо

элемента поверхности плоской проводящей пластинки, внесенной в заданное внешнее поле, с нормальной компонентой внешнего поля (при произвольной форме краевой линии пластинки) (429). Распределение зарядов на сторонах пластинки (429). Некоторые обобщения полученного результата (429). Общая теорема о разности плотностей заряда на внешней и внутренней поверхностях проводящего сферического сегмента с краевой линией любого очертания (431). Соответствующие формулы для цилиндрического случая (434). Некоторые обобщения полученных результатов (434).

§ 66. Некоторые теоремы о потенциалах и зарядах, наводимых на проводниках внесенных в произвольное внешнее электрическое поле (435—439)

Т е о р е м а: потенциал, наводимый на изолированном проводнике, внесенном во внешнее электрическое поле, может быть найден при помощи одной квадратуры, если известно распределение поверхностной плотности по этому проводнику при отсутствии внешнего поля (436). Следствия и примеры (437). Обобщение предыдущей теоремы на случай наличия в пространстве нескольких проводников (438).

Ч А С Т Ь IV

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Глава XXI. Электромагнитные волны в неоднородных (слоистых) средах (440—469)

§ 67. Распространение волн от вертикального излучателя в атмосфере с изменяющимися по высоте диэлектрической постоянной и проводимостью (440—448)

Уравнения электромагнитного поля в неоднородных средах (440). Общее уравнение для вектора-потенциала и его упрощение в случае слоистых сред и вертикальных токов (441). Вектор-потенциал вертикального излучателя в случае атмосферы, свойства которой зависят от высоты (441). Применение преобразования Фурье — Бесселя к решению уравнения для вектора-потенциала (442). Граничные условия на поверхности раздела различных сред (443): П р и м е р 1: нахождение поля вертикального излучателя, помещенного над идеально-проводящей землей и окруженного однородной атмосферой (443). П р и м е р 2: аналогичная задача в случае конечной проводимости земли (задача Зоммерфельда) (445). Правило отражения зарядов и переменных токов в идеально-проводящей плоскости (446). Некоторые случаи разрешимости задачи в известных функциях в случае зависимости свойств атмосферы от высоты (447).

§ 68. Поле произвольной системы излучателей (448—458)

Уравнения для компонент вектора-потенциала в случае зависимости свойств атмосферы от высоты и произвольного расположения излучателей (449). Граничные условия на поверхностях раздела сред (450). Общий метод решения задачи и его иллюстрация на примере нахождения поля от горизонтального излучателя, расположенного в однородной атмосфере над плоской неидеально-проводящей землей (453). Получение формул Гершельмана и Зоммерфельда (455). Выражение горизонтальной составляющей вектора-потенциала на самой поверхности земли через элементарные функции (457).

§ 69. Поле кругового витка (рамки) с вертикальной осью, расположенного над земной поверхностью, принимаемой за плоскость (вертикальная магнитная антенна) (458—464)

Основные уравнения задачи и их преобразование (458). Нахождение решения (460). Значение вектора-потенциала на поверхности земли (463).

§ 70. Непосредственное нахождение нормальных к плоскостям раздела составляющих поля в слоистой среде (465—469)

Составление уравнения для нормальной к поверхностям раздела сред компоненты электрического вектора (465). Граничные условия (467). Интегрирование полученных уравнений (469). Составление уравнений и граничных условий для нормальной к поверхностям раздела сред компоненты магнитного вектора (469).

Глава XXII. Диффракция от идеально-проводящего клина (470—485)

§ 71. Плоская задача о диффракции от идеально-проводящего клина (470—482)

Метод Конторовича — Лебедева для решения этой задачи (470). Пример: диффракция плоской волны от идеально-отражающей бесконечно-тонкой пластинки (475). Различные формы решения (479).

§ 72. О диффракции пространственных волн от идеально-проводящего клина (482—485)

Применение метода Конторовича — Лебедева к решению пространственной диффракционной задачи для клина (483).

Глава XXIII. О распространении радиоволн над поверхностью земли при учете ее сферичности и неоднородности атмосферы (485—506)

§ 73. Случай вертикального излучателя (485—492)

Общие уравнения задачи (485). Сведение решения в случае атмосферы, свойства которой зависят от высоты, к нахождению некоторой вспомогательной функции, определяемой обыкновенным линейным уравнением второго порядка (488). Возможность преобразования представляющих решение рядов (490).

§ 74. Поле вертикального излучателя в предположении идеальной проводимости земли (492—498)

Применение общей теории к нахождению поля вертикального излучателя, стоящего на идеально-проводящей земле и окруженного однородной атмосферой (492). Случай наличия над землей отражающего слоя (497).

§ 75. Распространение над землей (сферой) радиоволн от произвольной системы излучателей (498—500)

Нахождение уравнения для радиальной компоненты электрического поля в случае произвольной системы излучателей и зависимости свойств атмосферы от высоты (498). Замечания о решении этого уравнения (499).

§ 76. Интегрирование волнового уравнения в случае области, ограниченной одной или двумя коническими поверхностями (500—506)

Общие соображения о методах решения подобных задач (500). Метод Конторовича — Лебедева (505).

ЧАСТЬ V

О НАХОЖДЕНИИ ПОЛЕЙ, ТРЕБУЮЩИХСЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ ЗАДАННОГО ТИПА**Глава XXIV. Основы общей теории фокусирующего действия статических электрических и магнитных полей (507—535)****§ 77. Вводные замечания (507—510)****§ 78. Постановка задачи в случае цилиндрических полей (510—512)****§ 79. Вывод дифференциального уравнения, которым определяются условия фокусировки (512—516)****§ 80. Фокусировка пучков, ось которых совпадает с одной из эквипотенциальных линий электростатического поля (516—518)****§ 81. Пространственные электростатические поля. Разложение потенциала в смежности с одной из траекторий пучка (518—520)****§ 82. Вывод основных дифференциальных уравнений, связывающих распределение потенциала вдоль траектории с характером пучка (520—523)****§ 83. Исследование степени произвольности задания траекторий в пучке (523—525)****§ 84. Общие законы фокусировки пространственных пучков (525—530)**

Различные возможные случаи (525). Осуществление фокусировки в случае, когда основная кривая — плоская и лежит в плоскости симметрии поля (527). Случай полей вращения (528). Предельный случай параксиальных пучков и обычное уравнение электронной оптики (529).

§ 85. Пространственные траектории при одновременном наличии электростатического и магнитного полей (530—535)

Вывод основных дифференциальных уравнений, связывающих распределение электрического и магнитного потенциалов вдоль траектории с характером пучка (530). Антисимметричный магнитный случай (534). Возможность учета влияния разброса начальных скоростей (535).

ЧАСТЬ VI

ТЕРМОИОННЫЕ ТОКИ В ВАКУУМЕ**Глава XXV. Установившиеся процессы (536—576)****§ 86. Прохождение тока через плоский диод (536—540)**

Постановка задачи и нахождение решения в предположении отсутствия начальных скоростей у электронов (538).

§ 87. Цилиндрический диод (540—543)

Решение задачи в случае отсутствия начальных скоростей (540),

§ 88. Теория плоского магнетрона (543—556)

Уравнения движения электрона в плоском магнетроне при полях, меньших критического (543). Нахождение распределения потенциала (545). Зависимость проходящего тока от магнитного поля (550). Траектории частиц (553).

§ 89. Цилиндрический неразрезной магнетрон (556—576)

Основные уравнения задачи и их преобразование (557). Сведение решения задачи к интегрированию одного однопараметрического обыкновенного уравнения (559). Результаты численного интегрирования его для ряда значений параметра (560). Распределение потенциала и плотности внутри прибора (565). Время пробега электрона (570). Замечания о форме электронных траекторий при полях, больших критического (574).

Глава XXVI. Нестационарные процессы (576—653)

§ 90. Плоский диод (576—584)

Вводные замечания (576). Основные уравнения задачи и их решение (579). Пределы справедливости полученного решения (580).

§ 91. Цилиндрический диод (584—587)

Постановка задачи и основное уравнение (584). Связь вопроса о прохождении нестационарных токов через электронные приборы с теорией возмущений (586).

§ 92. Некоторые теоремы, касающиеся нахождения возмущенных движений (587—595)

Два типа задач теории возмущений (587). Задачи второго рода и их связь с теорией нестационарных токов в электронных приборах (587). Постановка задачи о нахождении возмущенного движения (587). Случай системы с одной степенью свободы (588). Основная теорема о возможности нахождения решения возмущенной задачи, если известна однопараметрическая группа преобразований, не изменяющих форму уравнений невозмущенного движения (591). Пример (593). Обобщение на случай нескольких степеней свободы (594).

§ 93. Цилиндрический диод. Нахождение возмущенного движения (595—604)

Применение общей теории § 92 к решению задачи о прохождении нестационарного тока через цилиндрический диод (595). Введение вспомогательных функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$ и выражение через них возмущенного движения электрона (599). Нахождение распределения потенциала в цилиндрическом диоде (603).

§ 94. Вычисление импеданса цилиндрического диода, ток в котором ограничен объемным зарядом (604—616)

Связь между током и напряжением в случае произвольного отношения анодного радиуса к катодному (604). Предельные случаи: 1) исчезающе-тонкий катод (609); 2) плоский случай (615).

§ 95. Нелинейные эффекты при прохождении через плоский диод высокочастотного тока, ограниченного объемным зарядом (616—633)

Постановка задачи о нахождении эффектов второго и высшего порядков (616). Вычисление второй гармоники и выпрямленного тока (620). Общие замечания о работе диода в схеме (631).

§ 96. О начальном токе, текущем через плоский диод при внезапном приложении к нему импульсного напряжения (634—643)

Уравнения задачи и границы их применимости (634). Интегрирование их для начальной стадии процесса (635). Применение к случаю включения постоянного анодного напряжения (638.) Зависимость от времени проходящего через диод тока (638.) Приближенный вывод того же результата на основе более элементарной теории (639).

§ 97. Вторая возможная стадия начального режима в плоском диоде (643—648)

Случай, когда поле у катода обращается в нуль раньше, чем „головные“ электроны успевают долететь до анода (643.) Решение задачи для этой стадии прохождения тока (644).

§ 98. Начальный ток в плоском магнетроне (648—650)

Рассмотрение начальной стадии прохождения тока через плоский диод при наличии магнитного поля (648).

§ 99. Теорема Шокли (650—653)

Доказательство теоремы Шокли, относящейся к вычислению токов, наводимых на проводниках движущимися относительно них зарядами (650). П р и м е р ы применения этой теоремы (652).

ДОПОЛНЕНИЕ 1

Основные соотношения теории функций гамма (654—659)

Представление гамма-функции через определённые интегралы и в виде бесконечного произведения (654). Три основных свойства функции гамма (654). Функции гамма от целого и полужелого аргумента (657). Бета-функция и ее выражение через гамма-функцию (657). Производная от функции гамма (659).

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Бесселевы функции (659—706)

§ 1. Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ (659—662)

Уравнение Бесселя $a'' + \frac{1}{x} a' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) a = 0$ и его интегралы (659). Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ при нецелом номере (660). Случай целого номера (660). Функция $Y_\nu(x)$ (662).

§ 2. Асимптотическая форма решения уравнения Бесселя при $|x| \rightarrow \infty$ и интеграл Пуассона для $J_\nu(x)$ (663—665)

Общие соображения об асимптотическом поведении решения уравнения Бесселя при $|x| \rightarrow \infty$, следующие из вида этого уравнения (663). Функции с номерами $\nu = \pm \frac{1}{2}$ (663). Интеграл Пуассона и получающиеся из него общие представления

функций полуцелого номера (663). Асимптотические выражения функций $J_0(x)$, $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ (664).

§ 3. Функции Ханкеля (666—669)

Функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ и их связь с функциями $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ (666). Их асимптотические выражения (666). Формулы $H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(x)$. (668). Соотношения обхода (668).

§ 4. Бесселевы функции мнимого аргумента (669—671)

Функция $I_\nu(x)$ и ее поведение при $|x| \rightarrow \infty$ и при $|x| \rightarrow 0$ (669). Функция $K_\nu(x)$ (функция Макдональда), ее выражение через $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$, асимптотическое поведение и поведение при $|x| \rightarrow 0$ (670).

§ 5. Теоремы сложения бесселевых функций (671—687)

Теоремы сложения, их сущность, различные типы (671). Полиномы $C_m^\nu(\cos \theta)$ Гегенбауэра (672). Связь полиномов Лежандра с ними (672). Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $C_m^\nu(t)$ (672). Явные выражения для функций $C_m^\nu(t)$ (673). Различные формулы, относящиеся к полиномам $C_m^\nu(t)$ и их производным (673). Обобщенная ортогональность полиномов Гегенбауэра (674). Доказательство теорем сложения для функций Макдональда (676).

§ 6. Вронскиан функций Бесселя (687—689)

Общая формула для вронскиана функций Бесселя (687). Вычисление значений, входящих в выражение вронскиана постоянных для некоторых пар бесселевых функций отшестественного и мнимого аргумента (688).

§ 7. Некоторые интегральные представления функций Бесселя (689—693)

Производящая функция для бесселевых функций целого номера и получающееся из нее интегральное представление этих функций (689). Интегральное представление функций $H_\nu^{(2)}(x)$ и $K_\nu(x)$.

§ 8. Значения некоторых неопределенных и определенных интегралов, содержащих функции Бесселя (694—706)

Вычисление неопределенных интегралов вида $\int \frac{Z_\mu(ax) Z_\nu(ax)}{x} dx$, где $Z_\mu(ax)$ и $Z_\nu(ax)$ — две любые бесселевы функции указанного аргумента, а a — постоянная (694). Вычисление интегралов $\int x Z_\mu(ax) Z_\nu(\beta x) dx$, где α и β — какие-либо постоянные (694). Интегралы вида $\int e^{-a\xi} \xi^{-n} Z_n(b\xi) d\xi$ (695). Их значения при $a = \pm ib$ (696).

Случай $n = 0$ (696). Определенные интегралы $M_n = \int_0^\infty e^{-p\xi} \xi^{-n} Z_n(q\xi) d\xi$ и $N_n = \int_0^\infty e^{-p\xi} \xi^{-n+1} Z_n(q\xi) d\xi$ (697). Частные случаи: M_0 при $Z_0(x) = J_0(x)$ и при $Z_0(x) = Y_0(x)$ (697).

Применение полученных результатов к нахождению интегральных представлений для $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ (699). Формула для $Y_0(x)$ (702). Ее приложение к получению асимптотического выражения функции $Y_0(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ (702). Преобразование общего интеграла

$\int_{x_0}^x e^{-a\xi} \xi^{-n} Z_n(b\xi) d\xi$ (702). Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(\eta \sin \theta + \sqrt{\rho^2 + \eta^2})}}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} d\eta$ (703). Доказатель-

ство формулы $\int_0^{\infty} K_\nu(t) t^{\mu-1} dt = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)$. Формулы $\int_0^{\infty} x^\nu J_{\nu-1}(x) dx =$

$= x^\nu J_\nu(x)$ и $\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} J_\nu(x)$ и соответствующие им дифференциальные (705).

Связь между производными от функций нулевого порядка и функциями первого порядка (705).

ДОПОЛНЕНИЕ 3

Релятивистские уравнения движения точечного заряда в натуральных координатах (706)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

*

РИСО АН СССР № 2836. Подписано к печати
6/III 1948 г. М-00881. Печ. л. 45¹/₂ + 1 вкл.
Уч. изд. л. 56¹/₂. Тираж 2500. Зак. 997.

*

2-я типография „Печатный Двор“ им. А. М.
Горького треста „Полиграфкнига“ ОГИЗа при
Совете Министров СССР. Ленинград,
Гатчинская, 26.

**Отпечатано с готовых матриц в 1-й типо-
графии издательства Академии Наук СССР
Зак. 1286. Ленинград, В. О., 9 лин., 12.**

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
12	10 сн.	$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}$	$\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}^{(e)}$
19	9 и 11 св.	I	I
49	7 св.	$\int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1+\alpha^2} > \int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1+\alpha^2} =$	$\frac{\alpha^3}{3} > \int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1+\xi^2} > \int_0^{\alpha} \frac{\xi^2 d\xi}{1+\alpha^2} =$
95	В форм. (13, 10) и в сноске ² следует везде заменить H на B и \mathbf{H} на \mathbf{B} .		
100	2 св.	течениях	сечениях
121	между 3 и 2 сн.		т. е.
123	1 сн.	S_j	S_k
126	17 св.	$Q_k(s_1)$	$Q_k(s_1)$
163	4 сн.	$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{z=0}$	$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=0}$
217	Перенести знак сноски ¹ с 4-й строки на 8-ю [после интеграла в форм. (22, 10)]		
220	11 сн.	$\equiv a^2$	$\equiv a^{-2}$
223—227	Заменить везде CR на $(CR)^{-1}$		
222	8 сн.	Дробь в правой части равенства следует умножить на $\left(1 - \frac{x}{l}\right)$	
222	17 св.	к нулю. Если	к нулю. То же имеет место и при $\pi + \varepsilon < \arg(p) \leq \frac{3\pi}{2}$; и на конечных отрезках дуги, соединяющих ее с прямой $Re(p) = c$. Если
223	9 сн.	$\left \int_{(c)} e^{pt} F(p) dp \right = \int_{\theta=+\frac{\pi}{2}}^{+\pi/2}$	$\left \int_{(c)} e^{pt} F(p) dp \right \leq \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}$
228	11 св.	или, по крайней мере, такими,	Вычеркнуть
238	16 сн.	$\sqrt[4]{pr}$	\sqrt{pr}
249	5 "	$L(y) + \lambda y =$	$L(y) + \lambda y =$
282	2 "	обращение	обращение (35, 2) для
335	15 св.	$f'_{\text{полн.}}(z)$	$f'_{\text{полн.}}(z)$
339	23 "	$e'_i = e_i$	$e'_i = e_i^4$
340	1 "	$\sum_{i=1}^{i=n}$	$\sum_{i=0}^{i=n}$
340	19 сн.	$+ 2Q \lg r$	$+ 2Q \lg r'$
343	В (49, 20)	$- 4\pi\eta$	$- 4\pi\eta'$
344	13 сн.	кроме того, который находится в центре инверсии.	Вычеркнуть
346	5 св.	$+ e'$	$- e'$
372	2 св.	$\sigma_k(s_k)$	$\sigma_k^{(m)}(s_k)$
375	8 и 15 св.	σ_k	$\bar{\sigma}_k$
375	10 св.	$\sigma_k^{(m)}$	$\bar{\sigma}_k^{(m)}$

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
381	В (56, 18)	$\frac{\pi}{2} (\mu - \nu)$	$\frac{\pi}{2} (\nu - \mu)$
383	6—23 сн.	$\sigma_k^{(m)}$	$\bar{\sigma}_k^{(m)}$
385		Заменить строки 4—12 такими: $ I_{u+it}(x) < \frac{\Gamma(u + \frac{1}{2})}{ \Gamma(u + \frac{1}{2} + it) } I_u(x) <$ $< \left[1 + \frac{t^2}{(u + \frac{1}{2})^2} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{\text{sh } \pi t}{\pi t}} I_u(x)$, причем использовано равенство (56, 8).	
385		Строку 11 сн. заменить такой: $<$ $< \frac{\pi}{2 \text{sh } \pi t } \left[1 + \frac{t^2}{(\frac{1}{2} - h)^2} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{\text{sh } \pi t}{\pi t}} [I_u(x) + I_{-u}(x)]$, причем считается, что $ u < h < \frac{1}{2}$.	
385		В правых частях неравенств (57, 7) и (57, 8) добавить множитель $\sqrt{ t }$.	
388	В (57, 17) и (57, 19)	$\bar{\sigma}_k^{(m)}(s)$	$\sigma_k^{(m)}(s)$
388	13 сн.	$s \bar{\sigma}_k^{(m)}(v)$	$s \sigma_k^{(m)}(s)$
408	12 св.	рис. 79	рис. 77
408	16 сн.	$a' = AC$	$a' = A\bar{C}$
409	Рис. 113	Точка M' должна лежать ниже — на прямой $e_0 M$.	
461	2 св.	составляющая	производная
513	В (79, 2)	$\chi(s)$	$x(s)$
538	В строках	1—7 (св.) везде имеется в виду начальная энергия движения в направлении, перпендикулярном к электродам.	
551	Рис. 144	Числа от 4 до 20 по оси OY должны быть заменены половинными, т. е. от 2 до 10.	
587	18 сн.	ξ	ξ^0
588	9 сн.	$u = 0$ и $u = 0$	$u = 0$ и $\dot{u} = 0$
592	15 сн.	(92, 24)	(92, 23)
593	8 св.	(92, 24)	(92, 23)
656	1 сн.	$\Gamma(n+1) = n$	$\Gamma(n+1) = n!$
662	В (Д ₂ 15)	$+ (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n}$	$+ (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n}$
667	В (Д ₂ 41)	$H_2^{(\nu)}$	$H_2^{(2)}$
669	В (Д ₂ 54)	$\left(x e^{\frac{\pi}{2}} \right)^{\nu+2s}$	$\left(\frac{x}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \right)^{\nu+2s}$
681	В (Д ₂ 119)	$= 4\pi f_m(r)$	$= -4\pi f_m(r)$.
686	10 св.	$D'_\nu \frac{K_\nu(a)}{a^\nu} \frac{K_\nu(a)}{a^\nu} \cdot \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$	$D'_\nu \frac{K_\nu(a)}{a^\nu} \cdot \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$
688	6 сн.	$J'_\nu(x) =$	$J'_{-\nu}(x)$
699	В (Д ₂ 204)	$d\xi$	dp
699	В (Д ₂ 205)	Вставить дифференциал dp под знак интеграла	
701	В (Д ₂ 206)	$d\xi$	dp
727	5 св.	$\int_0^\infty x^\nu J_{\nu-1}(x) dx =$	$\int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx =$