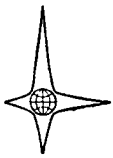
РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ЦЕЛОМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich
Series: Mathematisches Institut der Universität Bonn
Adviser: F. Hirzebruch

55

D. GROMOLL · W. KLINGENBERG · W. MEYER

RIEMANNSCHE GEOMETRIE IM GROßEN

SPRINGER-VERLAG BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK
1968

Д. ГРОМОЛ, В. КЛИНГЕНБЕРГ, В. МЕЙЕР

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ

Перевод с немецкого
Ю. Д. БУРАГО

Под редакцией и с добавлением
В. А. ТОПОНОГОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1971

УДК 513.813

Книга известного немецкого геометра В. Клингенберга и его учеников Д. Громола и В. Мейера посвящена основным вопросам римановой геометрии в целом.

Написаниаи на современном уровне, книга тем ие меиее читаетси легко и может служить учебным пособием по римаиовой геометрии, что особенно цеино ввиду отсутствии соответствующей литературы. Вместе с добавлеиием В. А. Топоногова она дает обзор последних достижений и проблем этой области математики. Большое число задач помогает глубже усвоить материал и облегчает самостоятельное изучение предмета.

Книга представляет интерес для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников математических специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

2-2-3
25-71

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Предлагаемая вниманию читателей книга представляет расширенное изложение лекций по римановой геометрии в целом, прочитанных выдающимся немецким геометром В. Клингенбергом; книга написана с помощью его учеников Д. Громола и В. Мейера.

Отличительными чертами книги является современность ее содержания и языка. Иначе говоря, авторы занимаются прежде всего задачами геометрии в целом и, в частности, связями между геометрией и топологией римановых многообразий, изложение же построено на инвариантном исчислении Кошуля. Первые три параграфа книги (а правильнее — три главы, так как параграфы очень длинны) представляют современный учебник римановой геометрии, не предполагающий предварительного знания предмета, их можно рекомендовать начинающему геометру для ознакомления с языком и методами, вошедшими в геометрию приблизительно с 1950 г. и, следовательно, ставшими уже классическими. Надо отметить, что в книге Клингенберга и соавторов „язык" развивается весьма умеренно, но зато на этом языке раскрываются действительно интересные вопросы. А именно, в конце книги доказываются два фундаментальных результата, стоящих в центре развития римановой геометрии за последние годы — „теорема сравнения" Топоногова и „теорема о сфере" Клингенберга.

При этом, как и во многих других случаях, выясняется замечательная связь всего наиболее содержательного в геометрии с „интегрирующими" синтетическими методами — древними „элементарными" и современными топологическими; здесь нетрудно увидеть продолжение традиции, идущей от Эйлера и Коши и представленной в наше время работами А. Д. Александрова. Своеобразную особенность книги составляют „замечания" в конце каждого раздела. Задачи в узком смысле (которые читателю рекомендуется решить и на которые дальше имеются ссылки в тексте) тщательно отделены при переводе от более трудных результатов, а именно, эти последние снабжены либо ссылками на литературу, либо словами „можно доказать".

При переводе исправлены некоторые мелкие погрешности, а разделы 2.4, 2.5, 3.4 переработаны, причем переводчик воспользовался неопубликованной работой, любезно предоставленной ему А. И. Фетом.

Добавление, написанное В. А. Топоноговым, содержит некоторые новые результаты глобальной римановой геометрии, в том числе исследование топологического строения некомпактных многообразий неотрицательной кривизны (Громол и Мейер) и структура многообразий, содержащих прямые (Топоногов). Вместе с добавлением книга подводит читателя вплотную к современной проблематике римановой геометрии в целом. В то же время она может служить и учебником, и своего рода сборником задач и примеров по этому предмету.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблемы дифференциальной геометрии в целом вызывают сейчас все возрастающий интерес. В римановой геометрии исследование связей между римановой и топологической структурами привело в последнее время к ряду интересных и неожиданных результатов. Мы имеем в виду прежде всего следующий круг вопросов: какие топологические инварианты можно охарактеризовать с помощью одного из важнейших изометрических инвариантов — кривизны? Цель этой книги состоит в изложении некоторых основных результатов в этой области.

В весеннем семестре 1961 г. В. Клингенберг прочел по приглашению Боннского университета курс лекций под тем же названием, что и книга. Слушатели этого курса Д. Громол и В. Мейер сделали его записи. Эти записи, изданные в 1962 г. Математическим институтом Боннского университета, вскоре разошлись. Предлагаемая книга представляет собой переработку этого издания. Первоначально было задумано значительно расширить его, но из-за недостатка времени это пока не удалось сделать. Мы надеемся, однако, что и в существующем виде книга будет полезна всем, кто хочет ознакомиться с актуальной и быстроразвивающейся областью римановой геометрии.

Для чтения этой книги предполагается лишь знание простейших сведений из анализа, линейной алгебры и топологии. В первых трех параграфах мы излагаем локальную теорию дифференцируемых и римановых многообразий с линейной связностью в объеме, необходимом для применения к глобальным задачам. В последние годы были заполнены многие пробелы в литературе, однако подходящего для наших целей изложения основ дифференциальной геометрии пока нет. Таким образом, эта часть книги может также служить введением в дифференциальную геометрию.

В следующих двух параграфах рассматриваются экстремальные свойства геодезических и естественная метрическая структура риманова многообразия. После этого мы обращаемся к глобальным задачам, которым посвящены § 6 и 7.

В приложении изложены некоторые вспомогательные результаты, используемые в основном тексте. Мы старались сделать изложение материала как можно более элементарным и по возможности избегали ссылок на другие книги; вычисления прово-

дятся везде простым инвариантным методом. С другой стороны, там, где это, на наш взгляд, необходимо, мы дополнили текст комментариями, содержащими дальнейшие результаты, а также рядом примеров и примечаний, предлагаемых в виде задач. Весь этот дополнительный материал помещается в конце каждого раздела в замечаниях.

Мы выражаем сердечную благодарность профессору П. Домбровскому (Кельн) за многочисленные указания, а также благодарим д-ра Х. Кархера (Берлин) за ценные замечания при корректировании первоначального текста.

Наконец, мы весьма обязаны издательству Шпрингера, принявшему нашу рукопись для издания в серии „Lecture Notes".

Детлеф Громол,
Вильгельм Клингенберг,
Вольфганг Мейер

Беркли — Принстон — Бонн,
сентябрь 1967 г.

§ 1. Дифференцируемые многообразия и отображения

1.1. Определение дифференцируемого многообразия

Пусть $\mathbb{R}^n$ — векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, состоящее из всех упорядоченных систем действительных чисел $(p_1, \ldots, p_n)$ [1]. Пространство $\mathbb{R}^1$ мы отождествим с векторным пространством поля $\mathbb{R}$ и будем также обозначать через $\mathbb{R}$.

Пусть G — открытое множество $\mathbb{R}^n$. Отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^k$ задается k действительными функциями — компонентами f. Если все компоненты f имеют частные производные всех порядков на G, то отображение f называется *дифференцируемым*. Отметим, что, если не оговорено противное, „дифференцируемость" в этой книге понимается в смысле существования производных любого порядка.

Хаусдорфово пространство M, обладающее счетной базой, называется n-мерным *топологическим многообразием*, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, т. е. каждая точка пространства M обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$ [2].

Пусть M — n-мерное топологическое многообразие. *Картой* или *системой координат* на M называется гомеоморфизм x некоторого открытого подмножества M на открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Множество карт $\mathfrak{A}$ называется *дифференцируемым атласом* на M, если выполнены следующие условия:

1) Каждая точка M принадлежит области определения некоторой карты $x \in \mathfrak{A}$.

2) Для любых двух карт x, $y \in \mathfrak{A}$ отображение $y \circ x^{-1}$ дифференцируемо [3].

Пусть $\mathfrak{A}$ — дифференцируемый атлас на M. Карта x на M называется согласованной с $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A} \cup \{x\}$ также составляет диф-

---

[1] Номера координат в этой книге, как правило, записываются в виде верхних индексов. Однако номера чисел p_i записываются снизу, поскольку эти числа представляют собой выделенные координаты в $\mathbb{R}^n$, служащие для определения пространства. — *Прим. перев.*

[2] Последнее свойство называется также *локальной евклидовостью* топологического пространства M. — *Прим. перев.*

[3] Композиция отображений имеет максимальную область определения, в которой она может быть построена; если x, y определены соответственно на U, V, то $y \circ x^{-1}$, таким образом, определена на $x(U \cap V)$. Это открытое множество может быть пустым, в таком случае $y \circ x^{-1}$ есть пустое отображение (естественно, рассматриваемое как дифференцируемое).

ференцируемый атлас на M. Если $\mathfrak{M}$ — множество карт, согласованных с $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{M}$ есть также дифференцируемый атлас на M.

$\mathfrak{A}$ называется *дифференциальной структурой* на M, если каждая согласованная с $\mathfrak{A}$ карта принадлежит $\mathfrak{A}$. Каждый дифференцируемый атлас однозначно определяет дифференциальную структуру, карты которой с ним согласованы, а именно множество всех согласованных с ним карт.

Дифференцируемое многообразие есть объект, состоящий из топологического многообразия и заданной на нем дифференциальной структуры. Если M — дифференцируемое многообразие, то картой на M называется карта дифференциальной структуры M.

В дальнейшем M всегда будет обозначать дифференцируемое многообразие размерности n. Под словом „карта" будет подразумеваться „карта дифференциальной структуры".

Замечания

(i) Пусть G — открытое подмножество дифференцируемого многообразия M с индуцированной топологией. Атлас из всех карт M, области определения которых принадлежат G, составляет дифференциальную структуру на G.

(ii) Если $M = \mathbb{R}^n$, то карта $x = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) составляет атлас $\{x\}$, определяющий дифференциальную структуру на G; эта дифференциальная структура называется канонической.

(iii) Пусть $\rho > 0$ и $M = S_\rho^n = \left\{ p\colon p \in \mathbb{R}^{n+1},\ \|p\| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 \right)^{1/2} = \rho \right\}$.

S_ρ^n с индуцированной из $\mathbb{R}^{n+1}$ топологией называется n-мерной сферой с центром 0 радиуса ρ; $S^n = S_1^n$ называется также стандартной n-мерной сферой, или просто n-мерной сферой. Мы укажем две карты x, y на S_ρ^n, составляющие дифференцируемый атлас и определяющие, тем самым, дифференциальную структуру. Обозначим через p_N северный полюс сферы $(0, \ldots, 0, \rho)$ и через p_S южный полюс $(0, 0, \ldots, -\rho)$; тогда на множествах $U = S_\rho^n \setminus \{p_N\}$, $V = S_\rho^n \setminus \{p_S\}$ определены стереографические проекции $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ из северного полюса и $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ из южного полюса:

$$x^i(p) = \frac{\rho p_i}{\rho - p_{n+1}},\quad y^i(p) = \frac{\rho p_i}{\rho + p_{n+1}},$$

$i = 1, \ldots, n$. Отображения x, y суть гомеоморфизмы, и „замена карт"

$$x \circ y^{-1} = y \circ x^{-1}\colon\ r \to \frac{\rho^2 r}{\|r\|^2} \qquad (r \in \mathbb{R}^n)$$

дифференцируема, поскольку $x(U \cap V) = y(U \cap V) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(iv) Поскольку топологическое многообразие локально линейно связно, то в этом случае понятия связности и линейной связности

совпадают; компоненты связности M открыты и замкнуты в M. Вместо требования существования счетного базиса можно было бы более общим образом предполагать многообразие паракомпактными (см. разд. 8.2). Это адекватное понятие, позволяющее производить основные построения, такие, как „разложение единицы“ (см. разд. 8.3). Примером связного, но не паракомпактного многообразия (а следовательно, и без счетного базиса) является „длинная прямая“ $\Omega \times [0, 1) \setminus \{\omega \times 0\}$, снабженная топологией упорядоченности по отношению к лексикографическому порядку, где Ω — вполне упорядоченное счетное множество с первым элементом ω, все отрезки которого не более чем счетны (например, так называемый второй порядковый класс Кантора). Известен также пример „поверхности Прюфера“ (см. Неванлинна Р., *Униформизация*, М., 1955). Локально евклидово, но не хаусдорфово пространство можно получить „удвоением точки“ в $\mathbb{R}^n$. Для этого берется точка $q \in \mathbb{R}^n$, и в топологической сумме $(R^n \times \{0\}) \cup (R^n \times \{1\})$ точки $(p, 0)$, $(\tilde{p}, 1)$ отождествляется в том и только том случае, если $p = \tilde{p} \neq q$. Полученное таким образом пространство локально гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, но точки $(q, 0)$, $(q, 1)$ неотделимы.

(v) Покажите, что подпространство $M = \{p\colon\ p \in \mathbb{R}^2,\ p_2 \geqslant 0,\ p_1(p_1^2 - p_2^3) = 0\}$ пространства $\mathbb{R}^2$ не локально евклидово, тогда как $M \setminus \{0\}$ и $\{p\colon\ p \in M,\ p_1 \geqslant 0\}$ локально евклидовы.

(vi) Пусть M, N — топологические многообразия равной размерности $\dim M = \dim N = n$. Тогда, как можно доказать, непрерывное инъективное отображение $f\colon\ M \to N$ открыто; в частности, $f(M)$ открыто в N и определенное на подпространстве $f(M)$ обратное отображение f^{-1} непрерывно; таким образом, f есть гомеоморфизм M на $f(M)$. Эта теорема вытекает (каким образом?) из соответствующего утверждения для частного случая $M = N = \mathbb{R}^n$, которое нетривиально („сохранение областей при инъективных отображениях $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$“). Отсюда следует, что топологические многообразия разных размерностей не могут быть гомеоморфны. Таким образом, размерность многообразия есть топологический инвариант.

(vii) Пусть G — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, r — один из символов 0, 1, 2, ..., ∞, ω. Обозначим через $C^r(G, \mathbb{R}^k)$, $r = 1, 2, \ldots$ множество всех отображений $f\colon\ G \to \mathbb{R}^k$, для которых частные производные всех компонент до порядка r включительно существуют и непрерывны; обозначим через $C^\infty(G, \mathbb{R}^k)$ множество $\bigcap_{r=0}^{\infty} C^r(G, \mathbb{R}^k)$; наконец, обозначим через $C^\omega(G, \mathbb{R}^k)$ множество всех аналитических отображений G в $\mathbb{R}^k$, т. е. таких, компоненты которых локально могут быть представлены степенными рядами. Элементы $C^r(G, \mathbb{R}^k)$ называются также *C^r-отображениями*; при этом C^0-отображения суть непрерывные отображения.

Очевидно,

$$C^0(G, \mathbb{R}^k) \supset C^1(G, \mathbb{R}^k) \supset \ldots \supset C^r(G, \mathbb{R}^k) \supset C^{r+1}(G, \mathbb{R}^k) \supset \ldots$$
$$\ldots \supset C^\infty(G, \mathbb{R}^k) \supset C^\omega(G, \mathbb{R}^k).$$

Покажите, что ни одно включение в этой цепи не является равенством. Дифференциальная структура на топологическом многообразии M в определенном выше смысле называется также *C^∞-структурой* на M. Аналогично определяется *C^r-структура*, как максимальный атлас C^r-согласованных карт, а затем и *C^r-многообразие*. Заметим, что C^0-многообразия суть просто топологические многообразия; C^ω-многообразия называются также *аналитическими многообразиями*.

Уитни доказал, что если на топологическом многообразии существует C^1-структура, то на нем существует и C^ω-структура; более того, из максимального C^1-атласа можно выбрать податлас C^ω-согласованных карт (Whitney H., *Differentiable Manifolds*, Ann. of Math., 37 (1936), 645–680). Например, заданный в (iii) атлас на S^n_ρ есть (не максимальный) C^ω-атлас. Таким образом, можно, не теряя общности, рассматривать сразу C^∞-многообразия. Можно было бы рассматривать сразу аналитические многообразия, но делать это нецелесообразно, поскольку во многих рассуждениях и построениях требование аналитичности оказывается слишком жестким (поведение аналитической функции в целом, как известно, определяется ее поведением в сколь угодно малой окрестности одной точки!).

Для всех размерностей $n \geqslant 10$ существуют топологические многообразия, на которых нельзя ввести никакой дифференциальной структуры. Первый пример такого рода был построен Кервером в 1960 г. Напротив, если размерность топологического многообразия M не больше 4, то на M существует дифференциальная структура.

1.2. Определение дифференцируемого отображения

Пусть M, N – дифференцируемые многообразия размерностей n, k и G – открытое подмножество M. Отображение $f\colon G \to N$ называется *дифференцируемым*, если для любых карт x на M и y на N отображение $y \circ f \circ x^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо (при этом надо иметь в виду сказанное выше относительно области определения композиции отображений). При этом также говорят, что f „дифференцируемо в локальных координатах“. Если Q – другое дифференцируемое многообразие размерности l и $g\colon N \to Q$ дифференцируемо, то и $g \circ f\colon M \to Q$ дифференцируемо. Для произвольного подмножества $A \subset M$ отображение $f\colon A \to N$ называется дифференцируемым, если f можно продолжить до дифференцируемого

отображения, определенного на некотором открытом множестве $g \supset A$.

Отображение $f\colon M \to N$ называется *диффеоморфизмом* M на N, если f биективно и оба отображения f, f^{-1} дифференцируемы. При этом f^{-1} также является диффеоморфизмом и композиция двух диффеоморфизмов есть опять диффеоморфизм; диффеоморфизмы M на M образуют группу. Карта x с областью определения $U \subset M$ диффеоморфно отображает U на $x(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть A — подмножество M; обозначим через $\mathfrak{F}A$ множество определенных на A дифференцируемых функций с действительными значениями (если A не открыто, дифференцируемость на A означает, как было указано выше, существование дифференцируемого продолжения f на открытое множество $G \supset A$). Функции из $\mathfrak{F}A$ естественным образом складываются и умножаются на действительные числа: если $f, g \in \mathfrak{F}A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то для всех $p \in A$ имеем $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$ и $(\alpha f)(p) = \alpha f(p)$ по определению. Тем самым $\mathfrak{F}A$ превращается в векторное $\mathbb{R}$-пространство. Более того, обычное умножение $(fg)(p) = f(p)g(p)$ для всех $p \in A$ превращает $\mathfrak{F}A$ в алгебру над полем $\mathbb{R}$ (сокращенно в $\mathbb{R}$-алгебру) и, в частности, в кольцо. Если x — карта с областью определения U, то координатные функции x^i (i-е компоненты x) принадлежат, очевидно, $\mathfrak{F}U$.

Для открытого подмножества $G \subset M$ и точки $p \in G$ рассмотрим идеал $\mathfrak{F}_p^0 G$ всех функций из алгебры $\mathfrak{F}G$, которые обращаются в нуль в некоторой (зависящей от функции) окрестности p.

Рассмотрим факторалгебру $\mathfrak{F}_p G = \mathfrak{F}G / \mathfrak{F}_p^0 G$; ее элементы называются *ростками функций*, заданных в G, в точке p. Каждый такой росток есть класс функций из $\mathfrak{F}G$; при этом две функции из $\mathfrak{F}G$ считаются принадлежащими одному ростку в p, если существует такая окрестность точки p, в которой эти функции совпадают. Далее, ограничение функций из $\mathfrak{F}M$ на G канонически индуцирует изоморфизм $\varkappa\colon \mathfrak{F}_p M \to \mathfrak{F}_p G$; в самом деле, для каждой $f \in \mathfrak{F}G$ существует такая $g \in \mathfrak{F}M$, что g и f совпадают в некоторой окрестности p. Чтобы это доказать, возьмем, согласно разд. 8.3, функцию $\varphi \in \mathfrak{F}M$, равную 1 в некоторой окрестности p, носитель которой лежит в G; тогда можно положить $g(q) = \varphi(q) f(q)$ для $q \in G$ и $g(q) = 0$ вне G. Заметим, что на аналитические функции это утверждение не распространяется (см. замечание (i)).

Замечания

(i) Пусть M, N — C^s-многообразия, $s \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega\}$, и G — открытое подмножество M, тогда естественно рассматривать для $r \leqslant s$ класс $C^r(G, N)$ всех *C^r-отображений* $f\colon G \to N$, таких,

что $y \circ f \circ x^{-1}$ есть C^r-отображение евклидовых пространств при любых картах x, y из C^s-структур M, N. Таким образом, опять возникает цепь собственных включений $C^0(G, N) \supset C^1(G, N) \supset \ldots$ $\ldots \supset C^s(G, N)$.

Как уже было сказано, мы рассматриваем везде случай $r = s = \infty$, чтобы по возможности упростить формулировки.

(ii) Покажите, что карты $x_1 = \mathrm{id}$ и x_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой $x_2(t) = t^3$, определяют на $\mathbb{R}$ различные дифференциальные структуры, однако полученные дифференцируемые многообразия диффеоморфны. Вообще если на топологическом многообразии M существует хотя бы одна дифференциальная структура (см. 1.1, замечание (vii)), то их существует бесконечное множество, но соответствующие дифференцируемые многообразия большей частью диффеоморфны, как и в предыдущем примере. (Для любого гомеоморфного, но не диффеоморфного отображения φ: $M \to M$ и любого дифференцируемого атласа $\mathfrak{A}\{x\}$ на M можно построить атлас $\mathfrak{A}_1\{x \circ \varphi\}$, $x \in \mathfrak{A}$, определяющий новую дифференциальную структуру на M, но дифференцируемое многообразие диффеоморфно исходному.) Милнор впервые обнаружил, что существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные дифференцируемые многообразия. Например, как он показал, существует в точности 28 дифференцируемых многообразий, гомеоморфных S^7, но попарно не диффеоморфных друг другу (Milnor J., *Differentiable structures on spheres*, Am. J. Math., 81 (1959), 962–972). Однако если $\dim M = \dim N \leqslant 3$ и дифференцируемые многообразия M, N гомеоморфны, то они диффеоморфны.

(iii) Дифференцируема ли функция f: $S^n_{\rho} \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f(p) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i$? Покажите, что отображение h: $S^n_1 \to S^n_{\rho}$, заданное формулой $h(p) = -\rho p$, есть диффеоморфизм.

1.3. Касательные векторы и касательные пространства

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие и $p \in M$. *Касательным вектором* к M в точке p называется отображение v: $\mathfrak{F}M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

$$v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g), \tag{1}$$

$$v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g), \tag{2}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$, f, $g \in \mathfrak{F}M$.

Точка p называется *начальной точкой* вектора v. Таким образом, касательный вектор к M в точке p есть, согласно (1), линейный функционал на векторном $\mathbb{R}$-пространстве $\mathfrak{F}M$, обладающий свойством дифференцирования (2). Если определить для касательных векторов с начальной точкой p сложение по правилу

$(v+w)(f)=v(f)+w(f)$ и умножение на числа по правилу $(\alpha v)(f)=\alpha v(f)$, то множество всех таких касательных векторов M_p превращается в векторное $\mathbb{R}$-пространство, называемое *касательным пространством* к M в точке p.

Абстрактное определение касательного вектора можно мотивировать следующим образом. Каждому „классическому вектору" v в $\mathbb{R}^n$ соответствует функционал $v(f)$, удовлетворяющий (1), (2), который сопоставляет каждой дифференцируемой функции на $\mathbb{R}^n$ ее производную в начальной точке v в направлении v. Если $c\colon [0,1]\to\mathbb{R}^n$ дифференцируемое отображение, для которого $\dot{c}(0)=v$, то только что упомянутый функционал представим в виде $v(f)=D(f\circ c)|_0$, где $D|_0$ — обычная производная в точке 0. Таким образом, $D(f\circ c)$ не зависит от выбора c при фиксированном v. Назовем *дифференцируемым путем* на M дифференцируемое отображение $c\colon J\to M$, где J — невырожденный интервал $\mathbb{R}$. Назовем дифференцируемые пути $c_k\colon [0,1]\to M$ $(k=1,2)$ эквивалентными, если у них общая начальная точка $c_1(0)=c_2(0)=p$ и для некоторой (а следовательно, и для любой) карты x, область определения которой содержит p, имеет место $D(x^i\circ c_1)|_0=D(x^i\circ c_2)|_0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Пусть v — некоторый класс эквивалентности по этому отношению. Тогда, как мы покажем ниже (разд. 1.4), для эквивалентных c_1 c_2 справедливо $D(f\circ c_1)|_0=D(f\circ c_2)|_0$, и можно определить функционал v формулой $v(f)=D(f\circ c)|_0$, $c\in v$. Как мы увидим, полученный функционал обладает свойствами (1), (2), т. е. является касательным вектором к M в точке, и любой касательный вектор может быть получен таким образом.

Для функции $1\in\mathfrak{F}M$ (тождественной единицы) из (2) следует $v(1)=v(1\cdot 1)=v(1)+v(1)$, так что $v(1)=0$. Поскольку v линеен, для любой постоянной функции $a\in\mathfrak{F}M$ имеем $v(a)=0$.

Лемма 1

Усл. *f, g принадлежат одному ростку из $\mathfrak{F}_p(M)$, $v\in M_p$.*
Утв. $v(f)=v(g)$.
Док. Пусть f и g совпадают в некоторой окрестности U точки p, тогда $h=f-g$ обращается в нуль в U. Достаточно показать, что $v(h)=0$. Построим, как и в разд. 1.2, функцию $\varphi\in\mathfrak{F}M$, обращающуюся в 1 в некоторой окрестности V точки p, причем носитель φ лежит в U. Тогда $\varphi h=0\in\mathfrak{F}M$, откуда в силу (2) имеем $v(\varphi)h(p)+\varphi(p)v(h)=0$, или, что то же самое, $v(h)=0$.

В силу доказанной леммы функционал v принимает постоянное значение на каждом ростке $\mathfrak{F}_pM$, и его можно было бы сразу определить как функционал, заданный на $\mathfrak{F}_pM$, причем свойства (1) и (2) относились бы к росткам f, g. Если G — открытое подмножество M, содержащее p, то канонический изоморфизм

$\varkappa$: $\mathfrak{F}_pM \to \mathfrak{F}_pG$ (см. разд. 1.2) позволяет установить изоморфизм M_p и G_p (вектор $v \in M_p$ рассматривается как функционал на $\mathfrak{F}_pM$ и переносится на $\mathfrak{F}_pG$ с помощью формулы $v_G = v \circ \varkappa^{-1}$). Тем самым мы получаем некоторый касательный вектор v_G к дифференцируемому многообразию G (см. замечание (i) разд. 1.1) в точке p, который мы для краткости будем обозначать снова через v. Итак, можно определить действие векторов из M_p на функции f из $\mathfrak{F}G$, где G — любая окрестность p; в дальнейшем мы будем пользоваться записью $v(f)$ в этом смысле.

Пусть x — карта, определенная в окрестности p (т. е. такая, область определения которой содержит p). Определим касательные векторы $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ $(i = 1, \ldots, n)$ в точке p по формуле

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = D_i (f \circ x^{-1})|_{x(p)}\ ^{1)}.$$

Проверка свойств (1), (2) не представляет затруднений. Вместо $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f)$ мы будем писать также $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$.

Лемма 2

Усл. *$p \in M$, x — карта, определенная в окрестности p.*

Утв. *Каждый касательный вектор $v \in M_p$ однозначно представим в виде линейной комбинации*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \tag{3}$$

где $\alpha^i = v(x^i)$.

Таким образом, касательные векторы $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ составляют базис касательного пространства M_p. В частности,

$$\dim M_p = \dim M = n.$$

Док. Пусть U — открытый шар с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. Если $\varphi \in \mathfrak{F}U$ и $\varphi(0) = 0$, то существует n функций $\psi_i \in \mathfrak{F}U$, таких, что

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} u^i \psi_i(u). \tag{4}$$

Их можно построить по формуле $\psi_i(u) = \int_0^1 D_i\varphi(tu)\,dt$, тогда, очевидно, $D_i\varphi|_0 = \psi_i(0)$. При этом существенно, что наши функции — класса C^∞, иначе бы терялся один порядок дифференци-

---

[1]) D_i означает частную производную по x^i в $\mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ обычная производная обозначается большею частью через D.

руемости. Можно считать, что $x(p)=0$. Если $f\in\mathfrak{F}M$, то в шаре U можно представить $f\circ x^{-1}$, согласно (4), следующим образом:

$$f\circ x^{-1}(u)=\sum_{i=1}^{n}u^i\psi_i(u).$$

Тогда, обозначая координатные функции карты x через x^i, имеем

$$f|_{x^{-1}(U)}=\left(\sum_{i=1}^{n}x^i\psi_i\circ x\right)\Big|_{x^{-1}(U)}.$$

Из (1) и (2) теперь следует

$$v(f)=v\left(f|_{x^{-1}(U)}\right)=\sum_{i=1}^{n}v(x^i)\,\psi_i(0)=\sum_{i=1}^{n}v(x^i)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f).$$

Касательные векторы $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ линейно независимы, так как из $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(x^j)=\delta_i^j$ (символ Кронекера) получается однозначность представления. Тем самым лемма доказана.

Если x, y — карты, определенные в окрестности $p\in M$, то касательные векторы, вообще говоря, имеют различные представления относительно этих карт; докажем следующее правило преобразования базисных векторов:

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\Big|_p\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p,\qquad i=1,\ldots,n. \tag{5}$$

Для этого представим $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ в виде $\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$ и применим этот вектор к функции x^k $(k=1,\ldots,n)$; получаем $\alpha_i^k=\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\Big|_p$, и (5) доказано.

Замечания

(i) Покажите, что отображение $C^r(M,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, обладающее свойствами (1), (2), тождественно равно нулю при $r=0$, тогда как при $0<r<\infty$ соответствующее векторное $\mathbb{R}$-пространство бесконечномерно.

(ii) Чем отличается множество $\bigcup_{p\in M}M_p$ от множества всех отображений $\mathfrak{F}M\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (1), (2) при любой $p\in M$?

(iii) Рассмотрим на S^n_0 карту y (см. разд. 1.1, замечание (iii)). Отображение $x(p)=(p_1, \ldots, p_n)$ задает другую карту на верхней полусфере $H_+=\{p\colon p\in S^n_0,\ p_{n+1}>0\}$. Выразите для $p\in H_+$ касательные векторы $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ через $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ и обратно.

1.4. Индуцированные отображения

Фундаментальное свойство дифференцируемых отображений состоит в том, что локально они могут быть линеаризованы. Рассмотрим дифференцируемые многообразия M, N размерностей n, k. Пусть G — открытое подмножество M; $f\colon G\to N$ — дифференцируемое отображение. Для каждой точки $p\in G$ отображение f индуцирует линейное отображение f_{*p} касательного пространства M_p в касательное пространство $N_{f(p)}$ по формуле

$$(f_{*p}v)(\varphi)=v(\varphi\circ f), \tag{1}$$

$v\in M_p$, $\varphi\in\mathfrak{F}N$. В литературе вместо f_{*p} употребляются также обозначения f'_p, $Df|_p$ и T_pf.

Пусть x — карта, определенная в окрестности p; y — карта, определенная в окрестности $f(p)$. Согласно (3) разд. 1.3, имеем

$$f_{*p}v=\sum_{i=1}^{n} v(y^i\circ f)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)}. \tag{2}$$

Если $v=\sum_{j=1}^{n}\alpha^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$, то $v(y^i\circ f)=\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}\right|_p\cdot\alpha^j$. Это значит, что линейное отображение f_{*p} по отношению к выбранным базисам $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, соответственно $\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{f(p)}$, задается функциональной матрицей (матрицей Якоби) отображения $y\circ f\circ x^{-1}$ в точке $x(p)$.

Тождественное отображение $\mathrm{id}\colon M\to M$ индуцирует для каждой точки p тождественное отображение M_p, так как из (1) вытекает $(\mathrm{id}_{*p}v)(f)=v(f\circ\mathrm{id})=v(f)$:

$$\mathrm{id}_{*p}v=v. \tag{3}$$

Если Q — другое дифференцируемое многообразие размерности l и $g\colon N\to Q$ дифференцируемо, то из (1) следует цепное правило:

$$(g\circ f)_{*p}=g_{*f(p)}\circ f_{*p}. \tag{4}$$

Если $f\colon M\to N$ — диффеоморфизм, из (3) и (4) вытекает, что $f_{*p}\colon M_p\to N_{f(p)}$ биективно и $(f_{*p})^{-1}=(f^{-1})_{*f(p)}$. В частности, $\dim M_p=\dim N_{f(p)}$, откуда $\dim M=\dim N$.

Если A — произвольное подмножество M, $p \in A$, $f\colon A \to N$ дифференцируемо и все векторы $v \in M_p$ определены на $\mathfrak{F}A$ (см. разд. 1.3), то мы получаем индуцированное линейное отображение $f_{*p}\colon M_p \to N_{f(p)}$.

Каждое n-мерное действительное векторное пространство обладает естественной дифференциальной структурой, порождаемой атласом всех изоморфизмов векторных пространств $E \to \mathbb{R}^n$. Для каждого $v \in E$ можно и в этом случае рассматривать касательное пространство E_v к E в точке v. Мы построим *канонический изоморфизм*

$$I_v\colon E \to E_v \tag{5}$$

(„отождествление посредством параллельного сдвига"), который, естественно, будет также диффеоморфизмом. Для каждого вектора $w \in E$ рассмотрим прямую $\lambda\colon \mathbb{R} \to E$, заданную формулой $\lambda(t) = v + tw$, и положим $I_v w = \lambda_{*0} D\,|_0$, где $D\,|_t$ — базисный вектор касательного пространства $\mathbb{R}_t$ к $\mathbb{R}$ в точке t относительно карты id. Тогда для изоморфизма $x\colon E \to \mathbb{R}^n$ векторных пространств имеем, согласно (2),

$$I_v w = \lambda_{*0} D\,|_0 = \sum D(x^i \circ \lambda)\,|_0 \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_v = \sum D(x^i(v) + tx^i(w))\,|_0 \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_v = \sum x^i(w) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_v,$$

так что I_v инъективно и $\mathbb{R}$-линейно.

Если $E = \mathbb{R}^n$, то $I_v e_i = D_i\,|_v$, где e_i есть i-й вектор канонического базиса $\mathbb{R}^n$, а $D_i\,|_v = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_v$ соответствует карте $x = \mathrm{id}$, т. е. является i-й частной производной в точке $v \in \mathbb{R}^n$.

Если $c\colon [0, 1] \to M$ — дифференцируемый путь, и $c(0) = p$, то в силу (1) для $D_0 = D\,|_0$ имеем

$$(c_*\,|_0\, D_0) f = D(f \circ c)\,|_0.$$

Следовательно, для любого c формула $v(f) = D(f \circ c)\,|_0$ определяет вектор из M_p (см. разд. 1.3). Если c_1, c_2 — эквивалентные пути, то по определению эквивалентности имеем

$$(c_{1*}\,|_0\, D_0)\, x^i = (c_{2*}\,|_0\, D_0)\, x^i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и из (3) разд. 1.3 вытекает, что $c_{1*}\,|_0 D_0 = c_{2*}\,|_0 D_0$ или, что то же самое, $D(f \circ c_1)\,|_0 = D(f \circ c_2)\,|_0$. Наконец, любой вектор $v \in M_p$ может быть представлен в виде $v = c_*\,|_0 D_0$. Так как $x^{-1}\colon x(U) \to U$ — диффеоморфизм и для любого пути $\tilde{c}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ выполняется $(x^{-1} \circ \tilde{c})_* = (x^{-1})_* \tilde{c}_*$, достаточно рассмотреть случай $M = \mathbb{R}^n$. Если $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \sum \alpha^j \dfrac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p$, то путь $\tilde{c} = (p_1 + \alpha^1 t, \ldots, p_n + \alpha^n t)$ удовле-

творяет нашему требованию:

$$(\tilde{c}_* |_0 D_0)\, u^j = D(u^j \circ \tilde{c})|_0 = \alpha^j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, мы проверили корректность геометрической интерпретации касательного вектора, приведенной в разд. 1.3.

Замечания

(i) Зададим спираль c: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ при $\rho, \sigma > 0$ формулой $c(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t)$. Найдите c_{*t} и $I^{-1}_{c(t)} c_{*t}$ относительно канонической карты id.

(ii) Пусть G — открытое подмножество M, $p \in G$ и $f \in \mathfrak{F}G$. Линейная форма df_p на M_p, заданная формулой $(df_p)(v) = v(f)$ для $v \in M_p$, называется *дифференциалом* f в точке p. Покажите, что $df_p = I^{-1}_{f(p)} \circ f_{*p}$. Каков смысл в случае $M = \mathbb{R}$ записей f_{*p}, $Df|_p = f'(p)$, df_p?

(iii) Пусть $p \in M$, x — карта на M, содержащая p. Покажите, что отображение $\tilde{x}$: $M_p \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $\tilde{x}(v) = (v(x^1), \ldots, v(x^n))$, есть карта векторного пространства M_p, переводящая базисный вектор $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ в $e_i \in \mathbb{R}^n$, и что I_v: $M_p \to (M_p)_v$ отображает $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ в базисный вектор $\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_v$ пространства $(M_p)_v$ $(i = 1, \ldots, n)$.

1.5. Теоремы об отображениях

Согласно предыдущему разделу, дифференцируемое отображение может быть линеаризовано в окрестности любой точки. Из алгебраических свойств индуцированного отображения часто можно вывести свойства самого заданного отображения.

Пусть M, N — дифференцируемые многообразия размерностей n и k, G — открытое подмножество M, f: $G \to N$ — дифференцируемое отображение. *Рангом* f в точке p называется ранг линейного отображения f_{*p}: $M_p \to N_{f(p)}$, т. е. размерность образа f_{*p}.

Из элементарного анализа известна следующая

Теорема (Обращения)

Усл. *G — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$; f: $G \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Если f имеет максимальный ранг $(= n)$, то существует такая окрестность U точки p, что $f|_U$ есть диффеоморфизм U на некоторую окрестность точки $f(p)$.*

Напомним, что все отображения здесь принадлежат классу C^∞. Для дифференцируемых многообразий отсюда следует

Лемма 1 (Теорема обращения на многообразиях)

Усл. *M, N — дифференцируемые многообразия равной размерности n; G — открытое подмножество M; $f\colon G \to N$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Если f имеет в точке p максимальный ранг ($= n$), то существует такая окрестность U точки p, что $f|_U$ есть диффеоморфизм U на некоторую окрестность точки $f(p)$.*

Док. Достаточно рассмотреть карты x и y, определенные соответственно в окрестностях p и $f(p)$, применить теорему обращения к $y \circ f \circ x^{-1}$ и воспользоваться тем фактом, что x, y — диффеоморфизмы.

Лемма 2 (Теорема о неявных функциях)

Усл. *G — окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^n$; $f\colon G \to \mathbb{R}^k$ — дифференцируемое отображение $f(0) = 0$; $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ($n \leqslant k$) есть инъекция, т. е. отображение, заданное формулой $\iota(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0)$; $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ($n \geqslant k$) есть проекция, т. е. отображение, заданное формулой $\pi(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^k)$.*

Утв. (a) *Если $n \leqslant k$ и f имеет максимальный ранг ($= n$) в точке 0, то существует такая карта g в $\mathbb{R}^k$, содержащая 0 в области определения, что в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$*

$$g \circ f(u) = \iota(u).$$

(b) *Если $n \geqslant k$ и f имеет максимальный ранг ($= k$) в точке 0, то существует такая карта h в $\mathbb{R}^n$, содержащая 0 в области определения, что в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$*

$$f \circ h(u) = \pi(u).$$

Док. (a) По предположению $\operatorname{rang} \left(D_j f^i|_0\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = n$. Пусть $\det\left(D_j f^i|_0\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \neq 0$; продолжим f до дифференцируемого отображения $F\colon G \times \mathbb{R}^{k-n} \to \mathbb{R}^k$ по формуле

$$F(u^1, \ldots, u^k) = f(u^1, \ldots, u^n) + (0, \ldots, 0, u^{n+1}, \ldots, u^k).$$

Тогда $\det\left(D_j F^i|_0\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant k} = \det\left(D_j f^i|_0\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \neq 0$ и по теореме обращения локально существует обратное отображение g для F, причем

$$g \circ f(u) = g \circ F \circ \iota(u) = \iota(u).$$

(b) Предположим, что $\det\left(D_j f^i|_0\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant k} \neq 0$, и определим дифференцируемое отображение $F\colon G \to \mathbb{R}^n$ по формуле

$$F(u^1, \ldots, u^n) = (f^1(u), \ldots, f^k(u), u^{k+1}, \ldots, u^n).$$

Тогда $\det(D_j F^i|_0)_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} \neq 0$ и по теореме обращения локально существует обратное отображение h для F, причем

$$f \circ h(u) = \pi \circ F \circ h(u) = \pi(u).$$

1.6. Подмиогообразия

Часто дифференцируемые многообразия не задаются абстрактно, а лежат в других объемлющих многообразиях, например в евклидовых пространствах, как сфера S_ρ^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Это может быть существенно во многих вопросах. Рассмотрим дифференцируемые многообразия M, N размерностей n, k. Дифференцируемое отображение $f\colon M \to N$ называется *погружением*, или *иммерсией*, если при всех $p \in M$ индуцированное отображение $f_{*p}\colon M_p \to N_{f(p)}$ инъективно. Таким образом, f может быть погружением лишь при $n \leqslant k$. Дифференцируемое *вложение* M в N есть погружение, гомеоморфно отображающее M на некоторое подпространство N. Если M компактно („замкнуто" в старой терминологии; иногда некомпактные многообразия не очень удачно называют также „открытыми"), то каждое инъективное погружение есть вложение. Отображение $f\colon M \to N$ является диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда f есть сюръективное вложение, как это вытекает из лемм 1 и 2 разд. 1.5.

Лемма 1

Усл. *$f\colon M \to N$ есть погружение (при этом, конечно, $n \leqslant k$), $p \in M$.*
Утв. *Существует такая окрестность U точки p и такая карта y на N с областью определения $V \ni f(p)$, что*

(1) $y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0$ *для всех* $q \in V \cap f(u)$,

(2) $f|_U$ *есть дифференцируемое вложение.*

Таким образом, каждое погружение локально является дифференцируемым вложением. Если M — топологическое многообразие, N — дифференцируемое многообразие и $f\colon M \to N$, то существует, как это следует из леммы 1, не более чем одна дифференциальная структура на M, для которой f является погружением.

Док. Пусть $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — инъекция и $\pi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — проекция, определенные в лемме 2 разд. 1.5. Построим карту x, определенную в окрестности p, на M, такую, что $x(p) = 0$, и карту $\tilde{y}$, определенную в окрестности $f(p)$, на N, такую, что $\tilde{y} \circ f(p) = 0$. Тогда $\tilde{y} \circ f \circ x^{-1}$ имеет в точке 0 максимальный ранг ($= n$); в самом деле, отображение $(\tilde{y} \circ f \circ x^{-1})_{*x(p)} = \tilde{y}_{*f(p)} \circ f_{*p} \circ x^{-1}_{*x(p)}$ инъективно, поскольку f_{*p} инъективно и x_{*p}, $\tilde{y}_{*f(p)}$ — изоморфизмы векторных

пространств. Согласно лемме 2 (а) разд. 1.5, существует такая карта g на $\mathbb{R}^k$, определенная в окрестности 0, и такая окрестность W точки $0\in\mathbb{R}^n$, что $g\circ\tilde{y}\circ f\circ x^{-1}|_W=\iota|_W$. Положим $U=x^{-1}(W)$. Карта $y=g\circ\tilde{y}$ определена в окрестности $V=f\circ x^{-1}(W)$ точки $f(p)\in\mathbb{R}^k$. Очевидно, выполнено (1), а (2) справедливо, так как $f|_U=y^{-1}\circ\iota\circ x|_U$.

Если множество точек M содержится во множестве точек N и включение ι: $M\subset N$ есть дифференцируемое вложение, то M называется *дифференцируемым подмногообразием* N. (M снабжено при этом топологией, индуцированной N. Часто отказываются от требования, чтобы подмногообразие имело индуцированную топологию, требуя лишь, чтобы включение было погружением, ср. замечание (iv) разд. 1.7.)

Если M — подмногообразие N, то для каждой точки $p\in M$ существует карта y на N с областью определения $V\ni p$, такая, что

$$y^{n+1}(q)=\ldots=y^k(q)=0 \text{ для всех } q\in V\cap M. \tag{3}$$

Это утверждение следует из (1). Так как M снабжено индуцированной из N топологией, то существует такая окрестность U точки p в M и такая окрестность V точки p в N, что $U=V\cap M$.

Пусть M — дифференцируемое подмногообразие N, Q — еще одно дифференцируемое многообразие и f: $N\to Q$ — дифференцируемое отображение. Тогда $f|_M$ дифференцируемо по отношению к дифференциальной структуре M, так как для вложения ι: $M\to N$ имеем $f|_M=f\circ\iota$.

Пусть f: $M\to N$ — дифференцируемое вложение. Множество $f(M)$, как подпространство N, является гомеоморфным образом M, т. е. топологическим многообразием. Обозначим через $\mathfrak{A}$ дифференциальную структуру на M, тогда $\{x\circ f^{-1}\colon x\in\mathfrak{A}\}$ есть дифференциальная структура на $f(M)$ и легко видеть, что $f(M)$ становится при этом дифференцируемым подмногообразием N.

Пусть f: $M\to N$ — дифференцируемое отображение. Точка $p\in M$ называется *регулярной точкой* f, если f_{*p}: $M_p\to N_{f(p)}$ сюръективно, в противном случае p называется *критической точкой* f. Отображение f может иметь регулярные точки лишь при $n\geqslant k$. Далее, $q\in N$ называется *регулярным значением* f, если каждая точка $p\in f^{-1}(\{q\})$ является регулярной точкой f, в противном случае q называется *критическим значением* f. Ясно, что каждая точка $q\in N$, не принадлежащая $f(M)$, является регулярным значением f (так как ее прообраз пуст).

Как мы видели в (3), каждое подмногообразие локально может быть представлено как множество нулевых точек некоторого отображения в евклидово пространство. Обратно, прообраз точки (подмногообразия) при дифференцируемом отображении есть снова

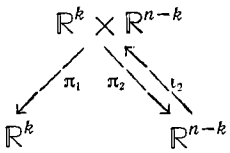
дифференцируемое подмногообразие, если наложить на отображения надлежащие требования регулярности. Заметим, что именно прообразы, а не образы дифференцируемых многообразий оказываются в предположениях регулярности опять дифференцируемыми многообразиями. Это не только важно для построения новых многообразий, но и часто облегчает доказательство того, что известные пространства имеют структуру многообразия. Для этой цели служит

Лемма 2

Усл. $f\colon M \to N$ — *дифференцируемое отображение*; $\dim M = n$, $\dim N = k$ *и* $q \in f(M)$ *есть регулярное значение* f (*так что* $n \geqslant k$).

Утв. *Множество* $f^{-1}(q)$ *с индуцированной из* M *топологией есть топологическое многообразие* A *размерности* $n-k$. *Далее, на* A *существует однозначно определенная дифференциальная структура, относительно которой* A *оказывается дифференцируемым подмногообразием* M.

Док. Возьмем карту y с областью определения $V \ni q$, такую, что $y(q) = 0$. Для произвольной точки $p \in A = f^{-1}(q)$ возьмем карту x с областью определения $U \ni p$, такую, что $x(p) = 0$. Отображение $y \circ f \circ x^{-1}$ имеет в точке 0 максимальный ранг ($=k$); в самом деле, отображение $(y \circ f \circ x^{-1})_{*x(p)} = y_{*f(p)} \circ f_{*p} \circ x^{-1}_{*x(p)}$ сюръективно, так как f_{*p} сюръективно и x_{*p}, $y_{*f(p)}$ — изоморфизмы векторных пространств. Рассмотрим естественные проекции и инъекции



заданные формулами

$$\pi_1(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^k), \quad \pi_2(u^1, \ldots, u^n) = (u^{k+1}, \ldots, u^n),$$
$$\iota_2(u^1, \ldots, u^{n-k}) = (0, \ldots, 0, u^1, \ldots, u^{n-k}).$$

Согласно лемме 2(b) разд.1.5, существует такая карта h на $\mathbb{R}^n$ с областью определения $W \ni 0$, что

$$y \circ f \circ x^{-1} \circ h|_W = \pi_1|_W.$$

Выберем окрестность $\tilde{W} \subset \pi_2(W)$ точки $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$; тогда

$$y \circ f \circ x^{-1} \circ h \circ \iota_2|_{\tilde{W}} = \pi_1 \circ \iota_2|_{\tilde{W}} = 0|_{\tilde{W}}.$$

Отображение $z\colon \tilde{W} \to M$, заданное формулой $z = x^{-1} \circ h \circ \iota_2|_{\tilde{W}}$, отображает $\tilde{W}$ гомеоморфно на некоторую открытую окрестность

точки p в A. Множество A с индуцированной топологией есть, таким образом, топологическое многообразие размерности $n-k$. Если построить подобную параметризацию z в окрестности каждой точки $p \in A$, то карты z^{-1} порождают на A дифференциальную структуру. При этом включение ι: $A \subset M$ становится дифференцируемым вложением.

Замечания

(i) Лемниската c: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, определенная формулой $c(t) = (\sin t, \sin 2t)$, есть погружение, равно как и $c|_{(0, 2\pi)}$. Оба эти отображения не являются вложениями, хотя $c|_{(0, 2\pi)}$ инъективно; в противоположность этому $c|_{(0, \pi)}$ есть вложение.

(ii) Каждое открытое подмножество $G \subset M$ с индуцированной естественным образом дифференциальной структурой есть (см. замечание (i) разд. 1.1) дифференцируемое подмногообразие M. При $n \leqslant k$ отображение $(u^1, \ldots, u^n) \to (u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0)$ есть дифференцируемое вложение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

(iii) Сфера S^n_ρ есть дифференцируемое подмногообразие $\mathbb{R}^{n+1}$, так как 0 есть регулярное значение функции f: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, заданной формулой $f(a) = a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2 - \rho^2$, и $S^n_\rho = f^{-1}(0)$. Покажите, что полученная таким образом дифференциальная структура совпадает с ранее определенной. Покажите, что замечание (iii) разд. 1.2 тривиально следует из результатов этого раздела.

(iv) Пусть f: $M \to N$ — дифференцируемое отображение и Q — дифференцируемое подмногообразие N. Если ι: $Q \subset N$ — включение, то можно отождествить касательное пространство Q_q $(q \in Q)$ с линейным подпространством $\iota_{*q} Q_q \subset N_q$. Факторпространство N_q/Q_q называется трансверсальным к Q пространством в точке q; естественная проекция обозначается π_q: $N_q \to N_q/Q_q$. Отображение f называется трансверсально регулярным к Q в точке $p \in f^{-1}(Q)$, если продолженное отображение $\pi_{f(p)} \circ f_{*p}$ (в трансверсальное к Q пространство в точке $f(p)$) сюръективно или, что то же самое, $f_{*p} M_p$ и $Q_{f(p)}$ вместе порождают $N_{f(p)}$.

Докажите следующее обобщение леммы 2:

Если f трансверсально регулярно к Q во всех точках $p \in f^{-1}(Q)$, то $f^{-1}(Q)$ есть дифференцируемое подмногообразие M той же коразмерности, что Q в N, при $f^{-1}(Q) \neq \varnothing$.

(v) Пусть M, N — дифференцируемые многообразия, A — дифференцируемое подмногообразие M. Можно показать, что отображение f: $A \to N$ в том и только том случае дифференцируемо по отношению к дифференциальной структуре A, когда f дифференцируемо в смысле разд. 1.2, т. е. может быть продолжено до дифференцируемого отображения некоторого, содержащего A, открытого множества G (если при этом A замкнуто в M, то можно взять в качестве G все M). Докажите это утверждение

в случае $N=\mathbb{R}$, пользуясь (3) и надлежащим разложением единицы (см. разд. 8.3). Вместо определения, данного в разд. 1.2, можно использовать также следующее, более общее:

f называется дифференцируемым на произвольном множестве $A\subset M$, если для каждой точки $p\in A$ существует такая окрестность U и такая функция $g\in\mathfrak{F}U$, что $g|_{U\cap A}=f|_{U\cap A}$.

Оба определения равносильны в случае, когда A — дифференцируемое подмногообразие M. Заметим еще, что производные функций из $\mathfrak{F}A$ в направлениях, касательных к A, не зависят от способа продолжения на открытые в M множества.

Рассмотрим в заключение следующий случай. Пусть подмножество $G\subset\mathbb{R}^n$ содержится и открыто в полупространстве

$$\mathbb{R}^n_+=\{p:\ p\in\mathbb{R}^n,\ p_n\geqslant 0\}.$$

Легко видеть, что отображение $G\to\mathbb{R}^k$ дифференцируемо в смысле разд. 1.2, если все частные производные его компонент существуют и непрерывны в G, причем в граничных точках ($p_n=0$) надо брать всегда правосторонние производные по p_n. При этом мы получаем также критерий дифференцируемости отображения $G\to N$. Топологическое пространство называется n-мерным дифференцируемым многообразием W с краем ∂W, если оно локально гомеоморфно открытому подмножеству $\mathbb{R}^n_+$ вместе с заданным на нем полным атласом, карты которого согласованы друг с другом. Край ∂W есть однозначно определенное $(n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие без края, точки которого переводятся картами в точки $\mathbb{R}^{n-1}=\partial\mathbb{R}^n_+$. Если теперь A — подмногообразие с краем в M той же размерности, что и M, то каждое дифференцируемое отображение $f\colon A\to N$ можно продолжить на некоторое открытое в M множество, и дифференцирование по локальным координатам в точках A не зависит от способа продолжения.

Если A — множество более общего вида, то вопрос о дифференцировании в граничных точках должен рассматриваться в каждом случае особо.

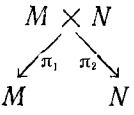
(vi) Уитни доказал в 1936 г., что каждое n-мерное дифференцируемое многообразие может быть вложено в $\mathbb{R}^{2n+1}$ как замкнутое подмногообразие. Тем самым класс „абстрактных“ дифференцируемых многообразий оказывается не шире класса дифференцируемых подмногообразий евклидовых пространств, и можно было бы ограничиться такими подмногообразиями. Это, однако, нецелесообразно. Многие внутренние задачи о многообразиях, т. е. такие, для формулировки которых не требуется объемлющее пространство, проще и лучше решаются внутренними методами, хотя иногда вложимость в другое многообразие может при этом оказаться полезной. Обратно, при решении относительных задач, в которых речь идет об отношениях между многообразием и

подмногообразием, иногда лучше забыть про объемлющее многообразие и рассматривать подмногообразие как абстрактное многообразие.

1.7. Произведение многообразий

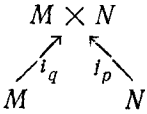
Пусть M, N — дифференцируемые многообразия размерностей n, k. Определим на прямом произведении пространств $M \times N$ дифференциальную структуру. Для этого рассмотрим сначала для карт x на M и y на N с областями определения $U \subset M$ и $V \subset N$ соответственно отображение $x \times y$: $U \times V \to \mathbb{R}^{n+k}$, заданное формулой $(x \times y)(p, q) = (x(p), y(q))$. Ясно, что $x \times y$ есть гомеоморфизм $U \times V$ на $x(U) \times y(V) \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Для двух карт x' и y' на M и N соответственно имеем $(x' \times y') \circ (x \times y)^{-1} = (x' \circ x^{-1}, y' \circ y^{-1})$, следовательно, замена карт дифференцируема. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — дифференцируемые атласы на M, N соответственно, то $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{x \times y: x \in \mathfrak{A}, y \in \mathfrak{B}\}$ есть дифференцируемый атлас на $M \times N$; таким образом, $M \times N$ становится дифференцируемым многообразием, которое называется *произведением многообразий* M и N. При этом $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

Естественные проекции π_1 и π_2 на оба множителя



определяются формулами $\pi_1(p, q) = p$, $\pi_2(p, q) = q$. Проекции π_1, π_2 дифференцируемы с максимальными рангами n, k соответственно. В самом деле, для карт x на M и y на N отображения $x \circ \pi_1 \circ (x \times y)^{-1}$, $y \circ \pi_2 \circ (x \times y)^{-1}$ являются естественными проекциями $\mathbb{R}^{n+k}$ на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ соответственно, которые дифференцируемы с максимальным рангом; остается применить (4) разд. 1.4 и простые соображения о рангах линейных отображений (x, y и $(x \times y)^{-1}$ — диффеоморфизмы).

Для $p \in M$, $q \in N$ определены инъекции i_q, j_p



по формулам $i_q(p') = (p', q)$ $(p' \in M)$, $j_p(q') = (p, q')$ $(q' \in N)$. Инъекции i_q, j_p дифференцируемы с максимальным рангом и тем самым являются дифференцируемыми вложениями. В самом

деле, для карт x, y на M, N отображения $(x \times y) \circ i_q \circ x^{-1}$, $(x \times y) \circ j_p \circ y^{-1}$ суть естественные инъекции $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n+k}$ и, следовательно, дифференцируемы с максимальным рангом; таким образом, утверждение следует из (4) разд. 1.4 и простых соображений о рангах линейных отображений. Образы $i_q(M)$, $j_p(N)$ суть замкнутые дифференцируемые подмногообразия $M \times N$.

Замечания

(i) Цилиндр $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ диффеоморфен S^n с выколотыми полюсами. Укажите явно этот диффеоморфизм, а также диффеоморфизм цилиндра и $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Покажите, что дифференцируемое отображение $f\colon M \to N$ индуцирует дифференцируемое вложение $F\colon M \to M \times N$ по формуле $F(p) = (p, f(p))$. Дифференцируемое подмногообразие $F(M)$ в $M \times N$ называется графиком f. Вложение F трансверсально регулярно к каждому „слою“ $j_p(N) \subset M \times N$ во всех точках $p \in M$ (см. замечание (iv) разд. 1.6). Таким образом, график дифференцируемого многообразия оказывается „гладким“ (этот термин часто применяют и к дифференцируемым отображениям).

Напротив, образ $f(M)$ в N может иметь „вершины“, „ребра“ и гораздо более сложные особенности, если f не дифференцируема с максимальным рангом. Образ погружения лишь локально „гладок“, а в целом же может иметь „самопересечения“. Приведите соответствующие примеры.

(iii) Объект, состоящий из дифференцируемого многообразия и заданной на нем групповой структуры, называется *группой Ли*, если групповая операция совместима с дифференциальной структурой, т. е. отображение $\mu\colon G \times G \to G$, заданное формулой $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$, дифференцируемо. Например, $\mathbb{R}^n$ есть абелева группа Ли с векторным сложением. Представьте общую линейную группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ всех автоморфизмов векторного пространства $\mathbb{R}^n$ каноническим образом в виде открытого подмножества $\mathbb{R}^{n^2}$ и получите отсюда, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ есть n^2-мерная неабелева группа Ли. Покажите, что $S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (здесь $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел и равенство означает изоморфизм векторных $\mathbb{R}$-пространств) есть группа Ли относительно умножения комплексных чисел, по модулю равных 1, и что $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n множителей) есть компактная абелева n-мерная группа Ли (эта группа называется n-мерным тором). Укажите каноническое вложение T^n в $\mathbb{R}^{2n}$.

(iv) Покажите, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ отображение $f\colon \mathbb{R} \to T^2$, заданное формулой $f(t) = (e^{it}, e^{i\alpha t})$, есть погружение, но не вложение; f инъективно тогда и только тогда, когда α иррационально; в этом случае образ f плотен в T^2.

Если $\alpha = p/q$ и p, q — взаимно простые целые числа, то f „периодично“ и образ f есть компактное дифференцируемое подмногообразие T^2, называемое торовым узлом типа (p, q). Каков его вид и что означают числа p, q?

(v) Важным обобщением произведения многообразий являются дифференцируемые *расслоения*, имеющие лишь локально структуру произведения.

Пусть P, M, N — дифференцируемые многообразия. Сюръективное дифференцируемое (следовательно, с максимальным рангом) отображение $\pi\colon P \to M$ называется дифференцируемым расслоением расслоенного многообразия P над базой M со слоем N, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U и такой диффеоморфизм $x\colon \pi^{-1}(U) \to U \times N$ („карта расслоения“ или „локальная тривиализация“), который диффеоморфно отображает каждый слой $\pi^{-1}(q)$ на $\{q\} \times N$ $(q \in U)$. Обозначая естественную проекцию $U \times N$ на U через π_U, имеем $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \pi_U \circ x$; так как x — диффеоморфизм, а π_U дифференцируемо с максимальным рангом, то π дифференцируемо с максимальным рангом на $\pi^{-1}(U)$ и, следовательно, во всех точках P. Если существует карта расслоения с $U = M$, то расслоение называется тривиальным, P диффеоморфно $M \times N$, а π при этом диффеоморфизме переходит в естественную проекцию на M. В общем случае, однако, расслоение лишь локально тривиально, а в целом „закручено“. Очевидно, $\dim P = \dim M + \dim N$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — атлас карт расслоения и x, $y \in \mathfrak{A}$ имеют областями определения $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$. Тогда для каждого $p \in U \cap V$ определен диффеоморфизм $y \circ x^{-1}|_{\{p\} \times N}$ и, значит, диффеоморфизм слоя N на себя. Всевозможные такие диффеоморфизмы порождают некоторую подгруппу $G_{\mathfrak{A}}$ группы $\mathrm{Diff}\, N$ всех диффеоморфизмов слоя N на себя. Объект, состоящий из дифференцируемого расслоения π и группы G, называется расслоением со структурной группой $G \subset \mathrm{Diff}\, N$, если существуют атласы $\mathfrak{A}$ расслоения π, для которых $G_{\mathfrak{A}}$ есть подгруппа G; такие атласы называются допустимыми по отношению к структурной группе. Чем „проще“ может быть выбрана структурная группа G, тем „проще“ устроено расслоение; в частности, если можно в качестве G выбрать группу из одного элемента id, мы возвращаемся к тривиальному расслоению.

В дифференциальной геометрии структурной группой обычно является группа Ли (чаще всего подгруппа общей линейной группы), а описанные выше отображения $U \cap V \to G$ дифференцируемы. В качестве типичного примера можно привести касательное расслоение n-мерного дифференцируемого многообразия (см. разд. 1.10) с канонической структурной группой $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Дифференцируемым сечением дифференцируемого расслоения π называется такое дифференцируемое отображение s: $M \to P$, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — стандартная сфера, π: $S^2 \times S^2 \to S^2$ — естественная проекция на первый множитель. Рассмотрим функцию f: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой $f(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$, где (p_1, p_2, p_3) — точка первого множителя, (q_1, q_2, q_3) — второго. Покажите, что $P = (f|_{S^2 \times S^2})^{-1}(0)$ есть дифференцируемое подмногообразие $S^2 \times S^2$, а $\pi|_P$: $P \to S^2$ — дифференцируемое расслоение.

Покажите, что из существования сечения $\pi|_P$ вытекает возможность непрерывной деформации тождественного отображения id: $S^2 \to S^2$ в отображение $(p_1, p_2, p_3) \to (-p_1, -p_2, -p_3)$. Так как по классической теореме топологии такая деформация невозможна, расслоение $\pi|_P$ не имеет сечения.

Если G — группа Ли и H — замкнутая подгруппа Ли, то можно доказать, что множество левых классов смежности G/H с фактортопологией, индуцированной G, естественным образом получает структуру дифференцируемого многообразия, так что проекция π: $G \to G/H$ есть дифференцируемое расслоение со слоем H (и структурной группой H). База G/H называется *однородным пространством* (см. замечания (iv) и (v) разд. 7.5).

Ввиду важности введенных здесь понятий приведем еще два примера дифференцируемых расслоений, первый из которых позволяет получить еще один тип стандартных пространств геометрии — *проективные пространства*. Пусть k означает одно из трех тел: $\mathbb{R}$ (действительные числа), $\mathbb{C}$ (комплексные числа) и $\mathbb{H}$ (кватернионы), $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, а $k^n = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$ — соответствующие векторные пространства над k. Тогда имеем канонические изоморфизмы $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n} \cong \mathbb{R}^{4n}$ над $\mathbb{R}$; например, в первом случае $(u_1, \ldots, u_n) \to (\mathrm{Re}\, u_1, \ldots, \mathrm{Re}\, u_n, \mathrm{Im}\, u_1, \ldots, \mathrm{Im}\, u_n)$, где $u_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$. Условие „$u \sim v$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in k$, что $u = \lambda v$“ определяет отношение эквивалентности на $k^{n+1} \setminus \{0\}$. Классы эквивалентности суть одномерные линейные подпространства над k; множество их $P^n(k)$ является образом факторизации π: $k^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n(k)$ и тем самым получаем фактортопологию. Как мы сейчас покажем, $P^n(k)$ обладает естественной структурой дифференцируемого многообразия размерности n, $2n$, $4n$ в случаях $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$; $P^n(k)$ называется n-мерным действительным, комплексным или кватернионным проективным пространством соответственно.

Рассмотрим, например, случай $k = \mathbb{C}$. Представим точку $P^n(\mathbb{C})$ одним из ее прообразов $u = (u_0, \ldots, u_n) \in C^{n+1} \setminus \{0\}$ при отображении π, тогда по крайней мере одно $u_i \neq 0$. Отображение

$(v_0, \ldots, v_n) \to \frac{1}{v_i}(v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)$ ($\hat{}$ означает пропуск v_i) индуцирует отображение некоторой окрестности $\pi(u)$ относительно $P^n(\mathbb{C})$ в векторное пространство $\mathbb{C}^n$, которое можно принять за карту на $P^n(\mathbb{C})$, определенную в окрестности $\pi(u)$. Все такие карты, очевидно, определяют дифференцируемый атлас и тем самым дифференциальную структуру на $P^n(\mathbb{C})$. Установите диффеоморфизмы $P^1(\mathbb{R}) \cong S^1$, $P^1(\mathbb{C}) \cong S^2$, $P^1(\mathbb{H}) \cong S^4$.

Заметим, что при доказательстве транзитивности отношения $\sim$ используется ассоциативность k. Алгебра октав Кели Ca не ассоциативна, поэтому из нее нельзя получить проективных пространств описанным выше способом. Другим путем, однако, удается определить 16-мерное дифференцируемое многообразие $P^2(\mathrm{Ca})$ — плоскость Кели. „Прямая Кели“ $P^1(\mathrm{Ca})$ есть S^8.

Проективные пространства (или, более общим образом, грассмановы многообразия линейных подпространств k^{n+1} более высоких размерностей) представляют собой также примеры однородных пространств, на чем, однако, мы здесь не будем останавливаться.

Покажите, что ограничение проекции π индуцирует на любой сфере в k^{n+1} (рассматриваемом как векторное $\mathbb{R}$-пространство) дифференцируемое расслоение: $\pi\colon S^n \to P^n(\mathbb{R})$, $\pi\colon S^{2n+1} \to P^n(\mathbb{C})$, $\pi\colon S^{4n+3} \to P^n(\mathbb{H})$, со слоями соответственно S^0, S^1, S^3 (расслоения Хопфа). Отсюда следует также, что проективные пространства компактны, как образы компактных пространств при непрерывных отображениях. Пространства $P^n(k)$ связны, а при $k = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ также односвязны. Все расслоения π не тривиальны, в противном случае при $k = \mathbb{R}$ сфера S^n не была бы связна, а при $k = \mathbb{C}$ сфера S^{2n+1} ($n \geqslant 1$) не была бы односвязна. В случае $k = \mathbb{H}$ доказательство более сложно.

Если слой N дифференцируемого расслоения $\pi\colon P \to M$ есть дискретное 0-мерное многообразие (состоящее не более чем из счетного множества точек, поскольку все многообразия имеют счетную базу), то π называется дифференцируемым *накрытием* M над N, а число точек в слое называется *„числом листов“* накрытия. Например, $\pi\colon S^n \to P^n(\mathbb{R})$ есть двулистное накрытие; $\pi\colon \mathbb{R}^n \to T^n$, заданное формулой $\pi(t_1, \ldots, t_n) = (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})$, есть бесконечнолистное дифференцируемое накрытие над n-мерным тором. Оба накрытия универсальны, т. е. накрывающие пространства $S^n (n > 1)$ и $\mathbb{R}^n$ односвязны.

Пусть $f\colon M \to N$ — погружение, $\dim M = \dim N$, M связно и компактно, N связно. Покажите, что $f(M)$ замкнуто и открыто в N; выведите отсюда, что f сюръективно. Проверьте, что f есть конечнолистное дифференцируемое накрытие. Пример $S^n \to P^n(\mathbb{R})$

показывает, что из предыдущих условий не вытекает инъективность f. Если, однако, добавочно потребовать, чтобы N было односвязно, то f становится диффеоморфизмом. Если же отказаться от условия компактности M, сохранив все остальные условия, то легко построить пример, когда f не сюръективно и не инъективно, даже при односвязном N.

Пусть теперь Q — квадрат в $\mathbb{R}^2$, заданный неравенствами $0<u^1, u^2<1$, с дифференциальной структурой, индуцированной канонической дифференциальной структурой $\mathbb{R}^2$. Постройте сюръективное, но не инъективное погружение $f\colon Q\to Q$.

Покажите, что если $f=\mathrm{id}$ на множестве $\left\{(u^1, u^2)\in Q : \left|u^1-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{6},\ \left|u^2-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{6}\right\}$, то f оказывается диффеоморфизмом (для этого постройте вложение $\varphi\colon Q\to S^2$ и продолжите $\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ до отображения $F\colon S^2\to S^2$).

1.8. Векторные поля

Пусть M — дифференцируемое многообразие, G — открытое подмножество M. Дифференцируемым *векторным полем* на G называется такое отображение $X\colon G\to\bigcup_{p\in G} M_p$, что $X_p=X(p)\in M_p$ для всех p и для всех $f\in\mathfrak{F}G$ функция Xf, заданная формулой

$$(Xf)(p)=X_p(f), \tag{1}$$

дифференцируема.

Обозначим через $\mathfrak{V}G$ множество всех дифференцируемых векторных полей на G. В $\mathfrak{V}G$ можно ввести сложение и умножение на функции из $\mathfrak{F}G$, полагая $(X+Y)_p=X_p+Y_p$ и $(\varphi X)_p=\varphi(p)X_p$ для всех $p\in G$, $\varphi\in\mathfrak{F}G$. Множество $\mathfrak{V}G$ превращается при этом в $\mathfrak{F}G$-модуль, или в векторное $\mathbb{R}$-пространство, если брать в качестве множителей постоянные функции. Векторное поле $X\in\mathfrak{V}G$, как видно из его определения, порождает $\mathbb{R}$-линейное отображение $\mathfrak{F}G\to\mathfrak{F}G$ по формуле $f\to Xf$. Для функций $f, g\in\mathfrak{F}G$ в силу (2) разд. 1.3 имеем „правило дифференцирования произведения“

$$X(fg)=(Xf)g+f(Xg). \tag{2}$$

Для карты x с областью определения U построим n дифференцируемых векторных полей $\frac{\partial}{\partial x^i}$ на U по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)=\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Поле $\frac{\partial}{\partial x^i}$ называется *i-м базисным полем* карты x. Каждое векторное поле $X \in \mathfrak{V}U$, согласно (3) разд. 1.3, можно представить в виде

$$X = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3}$$

где $\varphi^i = Xx^i \in \mathfrak{F}G$. Таким образом, векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ составляют базис $\mathfrak{F}U$-модуля $\mathfrak{V}U$.

Лемма

Усл. *N — k-мерное дифференцируемое многообразие; M — n-мерное дифференцируемое подмногообразие N; X — векторное поле на M.*

Утв. *Существует такое открытое подмножество $G \subset N$, содержащее M, и такое векторное поле $\tilde{X} \in \mathfrak{V}G$, что для всех $p \in M$ и $f \in \mathfrak{F}N$ выполняется $\tilde{X}_p f = X_p(f \circ \iota)$, где $\iota\colon M \to N$ — включение. Если M замкнуто в N, то в качестве G можно взять N.*

$\tilde{X}$ называется *продолжением* векторного поля X с M на G и соответственно на N.

Док. Пусть $p \in M$. Построим на N карту y с областью определения $V \ni p$ и окрестность U точки p относительно M, как в лемме 1 разд. 1.6. Обозначим $\pi'\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ композицию отображений ι, π (см. лемму 2 разд. 1.5). Тогда в $\mathbb{R}^n$ существует такая окрестность $\tilde{U}$ точки 0, что $[y^{-1} \circ \pi^{-1}(\tilde{U})] \cap M \subset U$. Продолжим векторное поле X на окрестность $W_p = y^{-1} \circ \pi^{-1}(\tilde{U})$ по формуле $X_{W_p}(q) = (y^{-1})_{*v} \circ I_v \circ I_w^{-1} \circ y_{*q'} \circ \iota_{*q'} X_{q'}$, где $v = y(q)$, $w = \pi'(v)$, $q' = y^{-1}(w)$ $(q \in W_p)$.

Окрестности W_p, построенные для всех точек $p \in M$, составляют открытое покрытие некоторого открытого подмножества $G \supset M$. Построим соответствующее этому покрытию разложение единицы $\{\varphi_p\}$, согласно теореме разд. 8.3.

Тогда

$$\tilde{X} = \sum_p \varphi_p \tilde{X}_{W_p}$$

есть искомое продолжение X на G.

Если M замкнуто в N, то построим для каждой точки $p \in N \setminus M$ окрестность W_p, не пересекающую M, положим $\tilde{X}_{W_p} = 0$ в такой окрестности и повторим предыдущее построение для полученного покрытия N.

Замечания

(i) Часто пишут $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ вместо $\frac{\partial}{\partial x^i} f$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial x^i}$ вместо $\frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)$ (где x, y — карты с областью определения U и $f \in \mathfrak{F}U$). Приведите пример, показывающий, что $\frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial x^i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^k}$, вообще говоря, различны. Однако $\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k}$. Вычислите вторые производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}$ функции f из замечания (iii) в разд. 1.2 на S^2_ρ относительно карты x, введенной в замечании (iii) разд. 1.1, в области S^2_ρ без северного полюса. Отметим, что базисные поля карты id в $\mathbb{R}^n$ мы обозначаем через D_i, а в случае $\mathbb{R}$ — символом D.

Для обозначения сумм мы придерживаемся, если это не вызывает затруднений, обычного правила: если базисные векторы имеют нижний индекс, как это принято, например, для касательных векторов и векторных полей („контравариантных“, а в современной функторной трактовке „ковариантных“ объектов), то коэффициенты получают верхний индекс; в противном случае (для форм и других „ковариантных“, а по существу „контравариантных“ объектов) поступаем наоборот. Для наглядности мы почти всегда суммируем по одному верхнему и одному нижнему индексу, при этом, однако, мы не пользуемся так называемым „правилом суммирования Эйнштейна“, требующим суммирования без употребления знака суммы во всех случаях, где имеется пара одноименных индексов в разном положении. Такое правило вряд ли необходимо в инвариантном исчислении.

(ii) Векторные поля в старой терминологии назывались „инфинитезимальными преобразованиями“, смысл этого термина выясняется в разд. 8.4 — 8.6.

Излагаемая в этих разделах связь между векторными полями („полями направлений“, „полями скоростей“) и системами обыкновенных дифференциальных уравнений („динамическими системами“) имеет основополагающее значение для дифференциальной геометрии, и мы рекомендуем читателю уже теперь ознакомиться с этими разделами, чтобы понять наглядную и логическую стороны вопроса.

(iii) Дифференцированием на $\mathbb{R}$-алгебре называется эндоморфизм ее векторного пространства, удовлетворяющий по отношению к мультипликативной структуре условию (2). Все дифференцирования, очевидно, также образуют векторное $\mathbb{R}$-пространство. Покажите, что дифференцируемые векторные поля на G допускают следующую алгебраическую характеризацию: векторное $\mathbb{R}$-пространство $\mathfrak{X}G$ всех дифференцируемых векторных полей

на G изоморфно пространству всех дифференцирований на $\mathbb{R}$-алгебре $\mathfrak{F}G$ дифференцируемых функций на G.

(iv) Лемма этого раздела о продолжении векторных полей может быть следующим образом обобщена. Пусть N — дифференцируемое многообразие; M — дифференцируемое подмногообразие N; X: $M \to TN$ — дифференцируемое отображение [1]). Покажите, видоизменив доказательство леммы, что существуют открытое подмножество $G \subset N$, содержащее M, и дифференцируемое векторное поле $\tilde{X}$: $G \to TG$, для которых $\tilde{X}\,|_M = X$. Покажите, что если M замкнуто в N, то в качестве G можно взять N.

(v) Найдите интегральные пути (см. 8.5) линейного векторного поля X на $\mathbb{R}^2$, заданного формулой

$$X_u = u^2 D_1\,|_u - u^1 D_2\,|_u.$$

Векторное поле полно и порождает однопараметрическую группу вращений (см. приложение).

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{id}.$$

1.9. Произведение Ли векторных полей

Произведение (или *скобка*) Ли на векторном $\mathbb{R}$-пространстве E есть отображение $[\,,]$: $E \times E \to E$, обладающее следующими свойствами:

$$[\alpha X + \beta \tilde{X},\ Y] = \alpha [X, Y] + \beta [\tilde{X}, Y], \tag{1}$$

$$[X, \alpha Y + \beta \tilde{Y}] = \alpha [X, Y] + \beta [X, \tilde{Y}], \tag{2}$$

$$[X, Y] = -[Y, X], \tag{3}$$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \tag{4}$$

где $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}, Z \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Согласно (1) и (2), отображение $[\,,]$ билинейно, а согласно (3), — антикоммутативно, причем (2), очевидно, вытекает из (1) и (3). Циклическое соотношение (4) называется тождеством Якоби. Объект, состоящий из векторного $\mathbb{R}$-пространства и заданного на нем произведения Ли, называется действительной *алгеброй Ли*. Например, векторное (внешнее) произведение на $\mathbb{R}^3$ есть произведение Ли, превращающее $\mathbb{R}^3$ в алгебру Ли.

Пусть M — дифференцируемое многообразие, а G — открытое подмножество M. Зафиксировав точку $p \in G$, определим для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}G$ отображение X_pY: $\mathfrak{F}_pG \to \mathbb{R}$ по формуле $(X_pY)(f) = X_p(Yf)$. Легко проверить, что $X_pY - Y_pX$ есть касательный вектор к M в точке p, хотя X_pY, вообще говоря, не

[1]) Относительно определения касательного расслоения TN см. разд. 1.10. — *Прим. перев.*

является касательным вектором. Построим по заданным $X, Y \in \mathfrak{B}G$ векторное поле $[X, Y] \in \mathfrak{B}G$, полагая

$$[X, Y]_p = X_p Y - Y_p X. \tag{5}$$

Определение (5) превращает, как легко видеть, векторное $\mathbb{R}$-пространство $\mathfrak{B}G$ в действительную алгебру Ли. Записывая для краткости $X(Yf)$ в виде XYf, $f \in \mathfrak{F}G$, имеем

$$[X, Y]f = XYf - YXf. \tag{6}$$

Докажем следующие соотношения:

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y, \tag{7}$$

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X. \tag{8}$$

В самом деле, $[X, fY]\varphi = X(fY\varphi) - fY(X\varphi) = (Xf)Y\varphi + fX(Y\varphi) - fY(X\varphi) = (Xf)\,Y\varphi + f[X, Y]\varphi$, где $\varphi \in \mathfrak{F}G$; (8) следует из (7) ввиду антисимметричности произведения Ли.

Пусть x — карта с областью определения U. Рассмотрим базисные поля $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{B}U$, $i = 1, \ldots, n$. Из соотношения $X_i\varphi = D_i(\varphi \circ x^{-1}) \circ x$ и перестановочности частных производных в $\mathbb{R}^n$ следует

$$[X_i, X_j] = 0. \tag{9}$$

В частности, для канонических базисных полей в $\mathbb{R}^n$ имеем $[D_i, D_j] = 0$. Для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{B}U$ получаем представления $X = \sum \varphi^i X_i$ и $Y = \sum \psi^i X_i$ с дифференцируемыми функциями $\varphi^i = Xx^i$ и $\psi^i = Yx^i$. В силу (7), (8) и (9) отсюда вытекает локальное представление

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} (X\psi^i - Y\varphi^i) X_i = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\varphi^j \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} - \psi^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right) X_i. \tag{10}$$

Замечания

(i) Пусть G — открытое подмножество n-мерного дифференцируемого многообразия M; $X, Y \in \mathfrak{B}G$. Если $[X, Y] = 0$, то говорят, что векторные поля X, Y коммутируют на G, так как в этом случае операторы XY, YX совпадают. Равенство $[X, Y] = 0$ является условием интегрируемости. Как можно показать, X и Y коммутируют на G тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in G$ существует окрестность $U \subset G$, где локальные потоки Φ, Ψ (см. разд. 8.5) векторных полей X, Y коммутируют для достаточно малых интервалов времени, т. е. $[X, Y] = 0$ равносильно $\Psi_s \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Psi_s$. Геометрически это значит, что мы приходим в одну и ту же точку, двигаясь из точки $q_1 \in U$ по каждому из следую-

щих двух путей: (a) сначала вдоль „линии тока“ (интегральной кривой) X в течение времени t до q_3, затем по проходящему через q_3 интегральному пути Y в течение времени s; (b) сначала вдоль интегрального пути Y в течение времени s до q_2, затем по проходящему через q_2 интегральному пути X в течение времени t. На этом простом обстоятельстве основана принадлежащая Фробениусу теория инволютивных распределений, в которой, обобщая понятие векторного поля (соответствующего обыкновенным дифференциальным уравнениям), задают в каждой точке $p \in M$ k-мерное линейное подпространство касательного пространства M_p $(k < n)$ и ищут интегральные многообразия, т. е. k-мерные дифференцируемые подмногообразия M, касательные пространства которых во всех точках совпадают с заданными подпространствами. Если потоки Φ, Ψ коммутируют, можно построить с помощью формулы $h(t, s) = \Psi_s \circ \Phi_t$ такое отображение окрестности $0 \in \mathbb{R}^2$ в M, что в этой окрестности $h_{*u}D_1|_u = X_{h(u)}$ и $h_{*u}D_2|_u = Y_{h(u)}$, т. е. коммутирующие векторные поля локально являются образами стандартных полей D_i евклидова пространства при дифференцируемых отображениях. Обратное также верно (см. замечание (iv)).

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — дифференцируемые векторные поля на G, произведения Ли которых попарно равны нулю, причем $X_1|_p, \ldots, X_n|_p$ линейно независимы, тогда, как можно показать, в некоторой окрестности p существует карта, базисными векторными полями которой являются $X_1, \ldots, X_n$. Это утверждение можно рассматривать как обратное (9) в локальном смысле. Тем самым мы получили геометрическую характеристику обращения в нуль произведения Ли $[X, Y]$.

Само же произведение $[X, Y]$ можно истолковать как „производную Ли“ $L_X Y$ векторного поля Y относительно X, а именно, чтобы вычислить $[X, Y]$ в точке $p \in G$, надо найти предел разностного отношения в M_p, причем для сравнения векторов, лежащих в разных касательных пространствах, их переносят в p с помощью локального потока Φ_t векторного поля X, т. е.

$$[X, Y]|_p = L_X Y|_p = \lim_{t \to 0} \frac{Y_p - \Phi_{t*} Y \circ \Phi_{-t}(p)}{t}.$$

(ii) Постройте такое дифференцируемое векторное поле без нулевых точек в некотором открытом подмножестве $G \subset \mathbb{R}^2$, которое не может быть базисным полем никакой карты x: $G \to \mathbb{R}^2$ (это совсем легко сделать для неодносвязного G и несколько труднее для односвязного).

Покажите, что для линейных векторных полей X, Y на $\mathbb{R}^2$, заданных формулами $X_u = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i^k u^i D_k|_u$, $Y_u = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_i^k u^i D_k|_u$, спра-

ведливо разложение $[X, Y]_u = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_i^k u^i D_k|_u$, где $\gamma = [\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ есть коммутатор матриц α, β. X, Y коммутируют одновременно с матрицами α, β.

(iii) Несколько слов по поводу замечания (iii) разд. 1.8. Дифференцирования на некоторой алгебре образуют алгебру Ли, если положить $[X, Y] = XY - YX$.

Действительная алгебра Ли $\mathfrak{B}G$ дифференцируемых векторных полей на G канонически изоморфна алгебре Ли всех дифференцирований на $\mathbb{R}$-алгебре $\mathfrak{F}G$.

(iv) Дифференцируемое отображение f: $M \to N$, вообще говоря, не индуцирует никакого отображения векторных полей $\mathfrak{B}M$ в векторные поля $\mathfrak{B}N$, даже если f инъективно. Поля $X \in \mathfrak{B}M$ и $Y \in \mathfrak{B}N$ называются *f-связанными*, если $f_{*p}X_p = Y_{f(p)}$ для всех $p \in M$. Покажите, что если $X_i \in \mathfrak{B}M$ и $Y_i \in \mathfrak{B}N$ f-связаны ($i = 1, 2$), то $[X_1, X_2]$, $[Y_1, Y_2]$ также f-связаны. В частности, если X_1, X_2 коммутируют, то $[Y_1, Y_2] \circ f = 0$.

Если f — диффеоморфизм, то получаем изоморфизм векторных пространств $f_{\#}$: $\mathfrak{B}M \to \mathfrak{B}N$, где $f_{\#}X$ есть однозначно определенное в этом случае векторное поле, f-связанное с $X \in \mathfrak{B}M$. При этом $[f_{\#}X_1, f_{\#}X_2] = f_{\#}[X_1, X_2]$, т. е. $f_{\#}$ есть изоморфизм алгебр Ли. Например, для карты x в M диффеоморфно отображающей область своего определения U на $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ имеем $x_* \frac{\partial}{\partial x^i} = D_i \circ x = x_{\#} \frac{\partial}{\partial x^i} \circ x$.

Пусть G — n-мерная группа Ли и L_h: $G \to G$, $h \in G$ — левый сдвиг на G, определяемый по формуле $L_h g = hg$. Преобразование L_h дифференцируемо, $L_e = \mathrm{id}$ для единичного элемента $e \in G$ и $L_{h_1 h_2^{-1}} = L_{h_1} \circ L_{h_2}^{-1}$, таким образом, L_h — диффеоморфизм.

Векторное поле $X \in \mathfrak{B}G$ называется *левоинвариантным*, если X является L_h-связанным с самим собой для любого $h \in G$, т. е. $L_{h*}X = X \circ L_h$. Покажите, что для $v \in G_e$ формула $g \to X_g = L_{g*}v$ определяет все левоинвариантные векторные поля X на G. Эти векторные поля образуют действительную алгебру Ли $\mathfrak{g}$, поскольку произведение Ли двух левоинвариантных векторных полей есть снова левоинвариантное векторное поле. Таким образом, в алгебре Ли $\mathfrak{B}G$ всех векторных полей на группе Ли G выделяется n-мерная подалгебра Ли левоинвариантных векторных полей, обычно называемая просто алгеброй Ли группы G. Очень многие свойства группы Ли можно описать с помощью алгебраических свойств ее алгебры Ли. Постройте инвариантные векторные поля на абелевых группах $\mathbb{R}^n$ и T^n. Их алгебры Ли абелевы (т. е. $[,] = 0$), иначе говоря, они изоморфны $\mathbb{R}^n$ с тривиальным произведением Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ общей линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ изоморфна алгебре Ли всех эндоморфизмов векторных пространств $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с произведением Ли $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$. Приведем в этой связи еще один пример. Рассмотрим группу Ли $\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ с кватернионным умножением. Включение $\iota\colon S^3 \subset \mathbb{H}^*$ индуцирует на S^3 умножение кватернионов с единичным модулем, тем самым S^3 превращается в группу Ли $\mathrm{Spin}(3)$, называемую трехмерной спинорной группой.

Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — обычный базис $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{H}$, $e = e_1$ — единичный элемент $\mathbb{H}^*$ и $I_u\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}_u$ — канонический изоморфизм, для которого $I_u e_i = D_i|_u$. Для $a \in \mathbb{H}$ формула $Y_u = I_u ua$ определяет левоинвариантное векторное поле Y на $\mathbb{H}^*$, причем $Y_e = I_e a$. Для $a = e_i$ получаем базис Y_i левоинвариантных векторных полей, описываемый формулами

$$Y_1 = u^1 D_1 + u^2 D_2 + u^3 D_3 + u^4 D_4, \quad Y_2 = -u^2 D_1 + u^1 D_2 + u^4 D_3 - u^3 D_4,$$

$$Y_3 = -u^3 D_1 - u^4 D_2 + u^1 D_3 + u^2 D_4, \quad Y_4 = -u^4 D_1 + u^3 D_2 - u^2 D_3 + u^1 D_4.$$

Произведения Ли базисных полей удовлетворяют равенствам

$$[Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_3] = [Y_1, Y_4] = 0,$$
$$[Y_2, Y_3] = 2Y_4, \quad [Y_3, Y_4] = 2Y_2, \quad [Y_4, Y_2] = 2Y_3.$$

На S^3 существуют векторные поля X_1, X_2, X_3, ι-связанные с Y_2, Y_3, Y_4. Поля X_i левоинвариантны и образуют базис алгебры Ли группы S^3, изоморфной введенной в начале этого раздела алгебре Ли $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением. Этот изоморфизм имеет вид $X_i \to 2e_i \in \mathbb{R}^3$.

1.10. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия

Как мы видели в разд. 1.3, дифференцируемое многообразие может быть локально „линеаризовано“, а именно каждой его точке сопоставляется действительное векторное пространство — касательное пространство в этой точке. Очень существенно, что это сопоставление не произвольно, а зависит от точки „дифференцируемым“ образом в том смысле, что множество всех касательных векторов может быть естественным образом снабжено структурой дифференцируемого многообразия.

Касательное расслоение TM дифференцируемого многообразия M есть $2n$-мерное дифференцируемое многообразие, множество точек которого есть объединение всех касательных векторов $\bigcup_{p \in M} M_p$, а топология и дифференциальная структура вводятся описываемым ниже способом.

Для карты x на M с областью определения U построим отображение $\bar{x}\colon \bigcup_{p\in U} M_p \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\bar{x}(v) = (x(p), v(x^1), \ldots, v(x^n)), \tag{1}$$

где $v \in M_p$; таким образом, $\bar{x}^i(v) = x^i(p)$ и $\bar{x}^{n+i}(v) = v(x^i)$ при $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что $\bar{x}$ есть биективное отображение $TU = \bigcup_{p\in U} M_p$ на $x(U) \times \mathbb{R}^n$. Назовем $\bar{x}$ картой расслоения TM, *ассоциированной* с картой x. Если y — другая карта на M, с областью определения V, то для $(a, b) \in y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ (см. (5) разд. 1.3) имеем

$$\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}(a, b) = \left(x \circ y^{-1}(a), \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^1}{\partial y^i}\Big|_{y^{-1}(a)} b^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^n}{\partial y^i}\Big|_{y^{-1}(a)} b^i \right). \tag{2}$$

Таким образом, $\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}$ дифференцируемо и вследствие обратимости является диффеоморфизмом. Поэтому можно ввести в $\bigcup_{p\in M} M_p$ (однозначно определенную) топологию, для которой карты расслоения $\bar{x}$ становятся гомеоморфизмами. По отношению к этой топологии множество всех карт расслоения $\bar{x}$ составляет дифференцируемый атлас, задающий дифференциальную структуру на TM.

Естественная *проекция* $\pi\colon TM \to M$, сопоставляющая каждому касательному вектору к M его начальную точку, т. е.

$$\pi(v) = p \quad \text{для} \quad v \in M_p, \tag{3}$$

дифференцируема с максимальным рангом. В самом деле, для карты x с областью определения $U \ni p$ и ассоциированной карты расслоения $\bar{x}$ на TU имеем

$$\pi(v) = x^{-1} \circ \pi_1 \circ \bar{x}(v),$$

где $v \in TU$, а π_1 — проекция $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ на первый множитель $\mathbb{R}^n$.

Как видно из последнего равенства, π — открытое отображение, так как π_1 открыто. Если $p \in M$, то $M_p = \pi^{-1}(p)$ называется *слоем* TM над p. Поскольку каждый слой является n-мерным действительным векторным пространством, точки TM можно умножать на действительные числа, а в случае, если они принадлежат одному слою, также складывать. Для каждой точки $p \in M$ слой M_p с канонической дифференциальной структурой есть дифференцируемое подмногообразие TM; это можно установить непосредственно или с помощью леммы 2 разд. 1.6, так как p есть регулярное значение проекции π. Касательное расслоение TM называется *тривиальным*, если существует такой диффеоморфизм

f: $TM \to M \times \mathbb{R}^n$ („тривиализация"), который для любой точки $p \in M$ изоморфно отображает слой M_p на $p \times \mathbb{R}^n$. В общем случае TM не тривиально.

Сечением TM над подмножеством $A \subset M$ называется отображение s: $A \to TM$, обладающее свойством

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_A. \tag{4}$$

Сечения $s_1, \ldots, s_k$ расслоения TM называются линейно независимыми, если для каждой точки $p \in A$ векторы $s_1(p), \ldots, s_k(p) \in M_p$ линейно независимы.

Нулевое сечение 0: $M \to TM$, заданное формулой $0(p) = 0_p$ (нуль M_p), есть дифференцируемое вложение M в TM.

Пусть G — открытое подмножество M, а X: $G \to TM$ — некоторое отображение. Как мы покажем, X является дифференцируемым векторным полем тогда и только тогда, когда X — дифференцируемое сечение. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда G — область определения некоторой карты x. Каждое отображение X: $G \to TM$, удовлетворяющее условию $\pi \circ X = \mathrm{id}_G$, записывается в виде

$$X|_p = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \tag{5}$$

где $\varphi^i(p) = X|_p(x^i)$. Пусть $\bar{x}$ — карта расслоения TM, ассоциированная с x, тогда

$$\bar{x} \circ X \circ x^{-1} = (x, \varphi^1, \ldots, \varphi^n) \circ x^{-1}. \tag{6}$$

Если X — дифференцируемое сечение, то отсюда следует дифференцируемость функций φ^i и $X \in \mathfrak{X}G$ в силу (5). Обратно, если X есть дифференцируемое векторное поле, то X представимо в виде (5) с $\varphi^i \in \mathfrak{F}G$. Поэтому из (6) следует, что X: $G \to TM$ — дифференцируемое сечение.

Многообразие M называется *параллелизуемым*, если существует n линейно независимых сечений TM над M, т. е. существуют такие векторные поля $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}M$ („параллелизация"), что для каждой точки $p \in M$ векторы $X_1|_p, \ldots, X_n|_p$ составляют базис M_p. Если M параллелизуемо, то на M существует векторное поле без нулевых точек. Многообразие M параллелизуемо тогда и только тогда, когда TM тривиально.

Пусть M, N — дифференцируемые многообразия размерностей n, k; f: $M \to N$ — дифференцируемое отображение. Тогда формула (1) разд. 1.4 задает индуцированное отображение f_*: $TM \to TN$, а именно

$$f_* v = f_{*p} v, \tag{7}$$

где $v \in TM$, $p = \pi(v)$. При этом получается коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}, \tag{8}$$

т. е. $f \circ \pi = \pi \circ f_*$.

По определению $f_*|_{M_p} = f_{*p}$, а это значит, что f_* линейно на каждом слое. Если дано еще одно дифференцируемое многообразие Q размерности l и дифференцируемое отображение g: $N \to Q$, то в силу (4) разд. 1.4 имеем

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*. \tag{9}$$

Лемма

Усл. f: $M \to N$ — *дифференцируемое отображение.*

Утв. f_*: $TM \to TN$ *дифференцируемо.*

Док. Пусть U — область определения такой карты x на M, что $f(U)$ принадлежит области определения V некоторой карты y на N. Обозначим через $\bar{x}$, $\bar{y}$ ассоциированные карты расслоений. В силу (2) разд. 1.4 имеем $f_* v = \sum v(y^i \circ f) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)}$, где $p = \pi(v)$, а $v \in TU$. Для заданных на TU функций $\varphi^i(v) = v(y^i \circ f)$ из (1) следует

$$\bar{y} \circ f_*|_{TU} = (y \circ f \circ \pi|_{TU}, \varphi^1, \ldots, \varphi^n).$$

Остается доказать, что $\varphi^i \in \mathfrak{F}TU$. Это следует из более общего утверждения: если $g \in \mathfrak{F}U$, то отображение φ: $TU \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\varphi(v) = v(g)$, дифференцируемо. Чтобы доказать последнее утверждение, заметим, что для $(a, b) \in x(U) \times \mathbb{R}^n$ из (1) вытекает

$$\varphi \circ x^{-1}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial g}{\partial x^i} \circ x^{-1}(a).$$

Рассмотрим касательное расслоение произведения двух дифференцируемых многообразий M и N. Пусть $(p, q) \in M \times N$. Естественные инъекции i_q: $M \to (M \times N)$, j_p: $N \to (M \times N)$ индуцируют линейные отображения i_{q*}: $M_p \to (M \times N)_{(p,q)}$, j_{p*}: $N_q \to (M \times N)_{(p,q)}$. Так как $\pi_1 \circ i_q = \mathrm{id}$, $\pi_2 \circ j_p = \mathrm{id}$, имеем $\pi_{1*} \circ i_{q*} = \mathrm{id}$, $\pi_{2*} \circ j_{p*} = \mathrm{id}$; следовательно, i_{q*}, j_{p*} инъективны. Из соотношений $\pi_2 \circ i_q = q$, $\pi_1 \circ j_p = p$ следует, далее, что образы $i_{q*}(M_p)$, $j_{p*}(N_q)$ пересекаются лишь по нулевому вектору. В самом деле, если бы эти подпространства имели общий вектор z, то было бы $\pi_{1*} z = 0$, $\pi_{2*} z = 0$ и z обращался бы в нуль на всех координатных функциях $x^i \circ \pi_1$, $y^j \circ \pi_2$ стандартной карты $x \times y$, определенной в окрестности (p, q)

(см. разд. 1.7), следовательно, было бы $\pi_{1*}z = 0$, $\pi_{2*}z = 0$. Так как $\dim M + \dim N = \dim (M \times N)$, формула

$$\omega(v, w) = i_{q*}v + j_{p*}w$$

задает изоморфизм векторных $\mathbb{R}$-пространств $M_p \times N_q \to (M \times N)_{(p,q)}$. С помощью этого изоморфизма мы будем канонически отождествлять $(M \times N)_{(p,q)}$ с $M_p \times N_q$, записывая касательные векторы к $M \times N$ в точке (p, q) в виде (v, w), где $v \in M_p$, $w \in N_q$.

Замечания

(i) Если U — открытое подмножество параллелизуемого многообразия, то TU тривиально. $T\mathbb{R}^n$ получает тривиализацию с помощью канонического изоморфизма I_u: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_u$; именно, тривиализацией является I^{-1}: $T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, где $I(u, v) = (u, I_u v)$. Можно также утверждать, что $\mathbb{R}^n$ параллелизуемо, поскольку на $\mathbb{R}^n$ существует n линейно независимых векторных полей D_i. Более того, каждая группа Ли параллелизуема, так как базис параллелизации можно составить из левоинвариантных полей.

Можно показать, что касательные расслоения четномерных сфер S^{2n} не тривиальны. Более того, на них не существует даже векторного поля без нулевых точек. В самом деле, согласно одной из старых теорем топологии, для существования такого векторного поля на компактном дифференцируемом многообразии M необходимо и достаточно, чтобы эйлерова характеристика $\chi(M)$ была равна нулю, в то время как $\chi(S^{2n}) = 2$. На S^{2n-1} при любом n существует дифференцируемое векторное поле без нулевых точек, например векторное поле X, с которым ι-связано линейное векторное поле $\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i u^{2n-i} D_{i+1}|_u$ на $\mathbb{R}^{2n}$, где ι: $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ — включение. Новый результат состоит в том, что единственные параллелизуемые сферы суть S^1, S^3, S^7 (как мы видели, S^1 и S^3 есть группы Ли; S^7 не является группой Ли, но ее параллелизация легко получается с помощью октав Кели). Из всех проективных пространств в замечании (v) разд. 1.7, как можно доказать, параллелизуемы только $P^1(\mathbb{R}) \cong S^1$, $P^3(\mathbb{R})$ и $P^7(\mathbb{R})$. Обычный метод доказательства нетривиальности касательного расслоения состоит в том, что каждому расслоению ставятся в соответствие алгебраические инварианты („характеристические классы когомологий"), обращающиеся в нуль для тривиальных расслоений, а затем доказывают, что в рассматриваемом случае эти инварианты отличны от нуля. Однако упомянутая только что теорема о сферах требует более глубоких средств.

(ii) Для погружения f: $M \to N$ индуцированное отображение f_*: $TM \to TN$ есть также погружение; если f — вложение, то и f_* — вложение.

Как было отмечено в замечании (vi) разд. 1.6 каждое дифференцируемое многообразие диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства.

Пусть M — n-мерное дифференцируемое подмногообразие $\mathbb{R}^k$ и ι: $M \subset \mathbb{R}^k$ — включение. Опишите образ ι_*: $TS^1 \to T\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$, где ι: $S^1 \to \mathbb{R}^2$ — естественное включение. В общем случае назовем x^{-1} (или, что то же самое, $z = \iota \circ x^{-1}$) локальной параметризацией M, если x есть карта на M, определенная в окрестности p. Тогда (см. разд. 1.4) векторы-столбцы $(D_j z^i|_p)_{i=1,\ldots,k}$, где $j = 1, \ldots, n$, порождают n-мерное линейное подпространство $E_p \subset \mathbb{R}^k$, которое при каноническом изоморфизме I_p переходит в M_p. В старой дифференциальной геометрии изучали главным образом E_p или аффинное подпространство $p + E_p \subset \mathbb{R}^k$, которые и рассматривались в качестве касательного пространства к M в точке p; $p + E_p$ как подмногообразие $\mathbb{R}^k$ имеет в p то же абстрактное касательное пространство, что и M, т. е. „касается“ M в точке p.

Для абстрактных многообразий такая трактовка невозможна, так как в них нет линейной структуры и, тем самым, канонического параллельного сдвига и отождествления. Заметим также, что линейные или аффинные подпространства E_p или $p + E_p$ пространства $\mathbb{R}^k$, построенные для разных $p \in M$, могут иметь общие точки в противоположность касательным пространствам M_p.

Касательное расслоение можно построить как дифференцируемое многообразие лишь после того, как касательные пространства „сделаны непересекающимися“.

(iii) Для дифференцируемого многообразия TM можно в свою очередь построить касательное расслоение TTM, которое представляет собой $4n$-мерное многообразие. Если задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}M$, т. е. дифференцируемое сечение X: $M \to TM$, то X индуцирует дифференцируемое отображение X_*: $TM \to TTM$. Более общим образом можно рекуррентно определить для каждого k $2^k n$-мерное итерированное касательное расслоение T^kM, полагая $T^0M = M$, $T^{i+1}M = TT^iM$. Значение этих расслоений в том, что геометрические задачи, в которые входят производные высших порядков, часто могут быть сведены к задачам первого порядка для надлежащего T^kM. Этот прием аналогичен сведению обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков к системам уравнений первого порядка. В § 2 мы рассмотрим типичный пример, в котором для исследования геодезических на многообразии M с линейной связностью используется векторное поле на TM.

(iv) Нам понадобится нижеследующее построение. Рассмотрим множество $TM \oplus TM = \{(v, w)\colon v, w \in TM, \pi(v) = \pi(w)\}$. Пусть x — карта на M с областью определения U. Отображение

f: $TU \times TU \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $f(v, w) = x \circ \pi(v) - x \circ \pi(w)$, имеет регулярное значение 0. Так как $(TM \oplus TM) \cap (TU \times TU) = f^{-1}(0)$, из леммы 2 разд. 1.6 следует, что $TM \oplus TM$ есть $3n$-мерное замкнутое подмногообразие $TM \times TM$ („сумма Уитни"). Проверьте, что отображение $TM \oplus TM \to TM$, заданное формулой $(v, w) \to \alpha v + \beta w$, дифференцируемо при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(v) Касательное расслоение представляет важный пример дифференцируемого расслоения (см. замечание (v) разд. 1.7). Это дифференцируемое векторное расслоение (т. е. слой есть векторное пространство) и структурная группа, как это непосредственно видно из построения, есть общая линейная группа. Из касательного расслоения можно построить другие расслоения. Естественные геометрические объекты, которые сопоставляются векторному пространству (например, тензоры, т. е. полилинейные функции на векторном пространстве, или проективные пространства), обычно соединяются в дифференцируемое расслоение над M, если построить их для каждого слоя M_p. Для этой цели существует универсальная конструкция (см. Стинрод Н., *Топология косых произведений*, М., 1953, или Атья М., *Лекции по К-теории*, М., 1967, гл. 1).

Приведем два примера, особенно часто встречающихся в дифференциальной геометрии. Первым примером является „фазовое пространство" T^*M над M, т. е. векторное расслоение, возникающее, подобно TM, из объединения всех сопряженных пространств M_p^*, где M_p^* — пространство, сопряженное M_p, всех линейных форм на M_p. Второй пример — ассоциированное с TM главное расслоение PM, слоем которого является группа всех изоморфизмов векторных пространств $\mathbb{R}^n \to M_p$, а структурной группой — $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, действующая на самой себе посредством левых сдвигов.

(vi) Отметим в заключение, что в большинстве основных определений и рассуждений § 1 предположение конечномерности многообразий не является необходимым. В последнее время все большее значение приобретают бесконечномерные многообразия. Они „моделируются" по банаховым пространствам, т. е. локально гомеоморфны открытым подмножествам банаховых пространств, в которых, подобно $\mathbb{R}^n$, вводится понятие дифференцируемости. По этому поводу см. Eells J., *A setting of global analysis*, Bull. Am. Math. Soc., 72 (1966), 751—807, а также Ленг С., *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, М., 1967.

Касательные векторы должны быть при этом определены несколько иначе, чем это сделано в разд. 1.2. Мы рекомендуем читателю для лучшего усвоения основных понятий посмотреть, как эти понятия вводятся в разных изложениях. Что касается материала этой книги, то бесконечномерные многообразия важны

в теории Морса (§ 7), где пространство Ω_{pq} путей риманова многообразия, соединяющих фиксированные точки p, q, имеет каноническую структуру гильбертова многообразия.

Существенные определения и понятия этого параграфа можно найти в современных книгах по дифференциальной топологии и дифференциальной геометрии. Приведем лишь общие источники, где указана дальнейшая литература:

Munkres J. R., Elementary differential topology, *Annals of Mathematics Studies*, **54** (1961), Princeton University Press.

Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry I, Interscience Publishers (1963), New York — London.

§ 2. Линейные связности

2.1. Определение линейной связности

Введем теперь на дифференцируемых многообразиях дополнительную структуру, которую геометрически можно описать как параллельный перенос. Начиная с этого места, собственно, речь идет уже не о дифференциальной топологии, а о дифференциальной геометрии.

В действительном векторном пространстве имеется естественное понятие параллельности. Однако для произвольного n-мерного дифференцируемого многообразия M еще не имеет смысла вопрос, параллельны ли два касательных вектора к M, если они не имеют общей начальной точки.

Если M параллелизуемо, то каждая параллелизация $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{B}M$ определяет некоторое связанное с ней понятие параллельности, а именно, касательные векторы $v \in M_p$ и $w \in M_q$ называются параллельными, если они имеют одинаковые координаты относительно базисов параллелизации в соответствующих точках. Вообще говоря, многообразие M не параллелизуемо, а понятие параллельности может быть введено следующим образом: вектор $v \in M_p$ переносится параллельно вдоль пути, соединяющего p с q, в касательное пространство M_q. При этом результат переноса, как правило, зависит от выбора соединяющего пути. От естественного понятия параллельного переноса, далее, надо требовать, чтобы каждому дифференцируемому пути c в M, соединяющему p с q, соответствовал изоморфизм векторных пространств $M_p \to M_q$, чтобы композиции путей отвечала композиция изоморфизмов, а пути, пройденному в обратном направлении, — обратный изоморфизм. Кроме того, должны быть еще выполнены некоторые условия дифференцируемости, а соответствие не должно меняться при переходе к другой параметризации пути. Таким образом можно построить геометрическую аксиоматику параллельного переноса или „линейной связности“ на M.

Оказывается, однако, что такое наглядное понятие менее удобно в обращении, чем эквивалентное формальное описание при помощи „ковариантной производной“. Дифференцируемым векторным полям X, Y на M можно сопоставить новое дифференцируемое

векторное поле $\nabla_X Y$, производную Y в направлении X, таким образом, что значение $\nabla_X Y$ в точке $p \in M$ зависит лишь от вектора X_p, причем зависимость линейная. Для этого Y параллельно переносится в M_p вдоль любого пути с начальным направлением X_p и находится предел обычного разностного отношения (см. замечание (ii) разд. 2.6). С другой стороны, полученная таким способом „ковариантная производная" может быть определена простыми свойствами, которые и будут перечислены ниже. Затем, используя это понятие, обратным путем можно определить параллельный перенос (см. разд. 2.6). Развиваемое ниже исчисление введено Кошулем и оказалось весьма плодотворным.

Часто параллельный перенос обосновывается с помощью общего метода, использующего главные расслоенные пространства (см. замечание (v) разд. 1.10), но чаще всего достаточны менее общие конструкции. Соответствующие понятия можно найти в литературе, указанной в конце этого параграфа.

Пусть M — дифференцируемое многообразие. *Линейной связностью* или *ковариантной производной* на M называется отображение ∇: $\mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ (записываемое в виде $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$), обладающее следующими свойствами:

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \tag{1}$$

$$\nabla_X (fY) = (Xf)\, Y + f \nabla_X Y, \tag{2}$$

$$\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \tag{3}$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \tag{4}$$

где $f \in \mathfrak{F}M$. Векторное поле $\nabla_X Y$ называется ковариантной производной Y в направлении X по отношению к линейной связности ∇. Согласно (3) и (4), ∇ ведет себя по отношению к первому аргументу $\mathfrak{F}M$ линейно („тензорно"); по отношению же ко второму аргументу ∇ ведет себя как производная, согласно (1) и (2).

Замечания

(i) Если M параллелизуемо и $X_1, \ldots, X_n$ — параллелизация то отображение ∇: $\mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$, заданное формулой $\nabla_X Y = \sum (X\varphi^i) X_i$, где $Y = \sum \varphi^i X_i$, есть линейная связность на M; в частности, имеем $\nabla_X X_j = 0$. На группе Ли G существует каноническая линейная связность ∇, определяемая с помощью параллелизации этой группы n линейно независимыми левоинвариантными векторными полями. Эта линейная связность не зависит от выбора левоинвариантных векторных полей. В частном случае $G = \mathbb{R}^n$, $X_i = D_i$ отображение ∇ называется канонической линейной связностью на $\mathbb{R}^n$.

(ii) Пусть $f\colon M \to N$ — диффеоморфизм и ∇ — линейная связность на N. Тогда формула $\tilde{\nabla}_X Y = f_{\#}^{-1}\left(\nabla_{f_{\#}X} f_* Y\right)$ (см. замечание (iv) разд. 1.9) задает линейную связность на M. Если $q \in M$ и U_q — область определения карты x_q на M, то отображение x_q индуцирует из канонической линейной связности на $\mathbb{R}^n$ некоторую линейную связность ∇_q на U_q. Пусть $(\varphi_q)_{q \in M}$ — дифференцируемое разложение единицы, для которого $\operatorname{Supp} \varphi_q \subset U_q$ (см. разд. 8.3). Тогда $\nabla = \sum_{q \in M} \varphi_q \nabla_q$ есть линейная связность на M. Таким образом, на каждом дифференцируемом многообразии существует линейная связность. В § 3 мы получим этот результат другим способом, используя риманову метрику на M, которая определяет на M линейную связность специального вида — связность Леви-Чивита.

2.2. Тензор кручения и тензор кривизны

Положим $\mathfrak{B}^0 M = \mathfrak{F}M$ и $\mathfrak{B}^k M = \mathfrak{B}M \times \ldots \times \mathfrak{B}M$ (k множителей), где $k = 1, 2, \ldots$. $\mathfrak{B}^k M$ каноническим образом является $\mathfrak{F}M$-модулем. Пусть $r \geqslant 1$ и $s = 0, 1$. *Тензорным полем* на M типа (r, s) называется r-линейное отображение $B\colon \mathfrak{B}^r M \to \mathfrak{B}^s M$ над кольцом $\mathfrak{F}M$:

$$B(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i + Y, X_{i+1}, \ldots, X_r) = B(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_r) + B(X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_r), \quad (1)$$

$$B(X_1, \ldots, X_{i-1}, fX_i, X_{i+1}, \ldots, X_r) = fB(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_r), \quad (2)$$

где $1 \leqslant i \leqslant r$, $X_i, Y \in \mathfrak{B}M$, $f \in \mathfrak{F}M$ [1]).

Пусть ∇ — линейная связность на M. Определим отображение $T\colon \mathfrak{B}^2 M \to \mathfrak{B}M$ формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3)$$

и отображение $R\colon \mathfrak{B}^3 M \to \mathfrak{B}M$ формулой

$$R(X, Y) Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (4)$$

Тогда T есть тензор типа (2,1), а R — тензор типа (3,1). Это следует непосредственно из правил (1) — (4) разд. 2.1 и свойств произведения Ли (разд. 1.9). Следует заметить, что отдельные члены в (3) и (4) не обладают свойством $\mathfrak{F}M$-линейности по отношению ко всем аргументам, так что тензорный характер T, R обеспечивается лишь надлежащей комбинацией членов. Легко проверить, что T и R антисимметричны по X, Y:

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \qquad R(X, Y) Z = -R(Y, X) Z. \quad (5)$$

[1]) При $s > 1$ тензорные поля определяются иначе. См. литературу, указанную в конце параграфа. — *Прим. ред.*

Тензор T называется *тензором кручения*, а R — *тензором кривизны* линейной связности ∇.

Замечания

(i) Если M параллелизуемо, то для линейной связности ∇, полученной из параллелизации $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{B}M$ (см. замечание (i) разд. 2.1), имеем $T(X_i, X_j) = -[X_i, Y_j]$ и $R = 0$.

Если M есть группа Ли и X_i левоинвариантны, то T есть не что иное, как взятое со знаком минус произведение Ли в алгебре Ли группы M. Для $M = \mathbb{R}^n$ и канонической линейной связности ∇ имеем $T = 0$, $R = 0$. Покажите, что на одномерном многообразии T и R равны нулю при любой линейной связности.

(ii) Определим на $\mathbb{R}^3$ для векторных полей $X = \sum_{i=1}^{3} \varphi^i D_i$, $Y = \sum_{i=1}^{3} \psi^i D_i$, принадлежащих $\mathfrak{B}\mathbb{R}^3$, векторное произведение

$$X \times Y = \sum_{i=1}^{3} (\varphi^{i+1}\psi^{i+2} - \psi^{i+1}\varphi^{i+2}) D_i,$$

где индексы приводятся по модулю 3. Произведение $X \times Y$ есть антисимметрический тензор типа (2,1). Из канонической линейной связности ∇ построим новую линейную связность $\tilde{\nabla}$ на $\mathbb{R}^3$, полагая

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \tfrac{1}{2} X \times Y.$$

Проверьте, что для $\tilde{\nabla}$ тензор кручения задается формулой $T(X, Y) = X \times Y$, а тензор кривизны — формулой $R(X, Y)Z = \tfrac{1}{4}(X \times Y) \times Z$.

(iii) Каждый из тензоров T, R формально можно истолковать как меру отклонения от перестановочности соответствующих производных. Это очевидно в случае, когда X, Y — базисные поля некоторой карты и, следовательно, $[X, Y] = 0$. Обратите внимание на то, что произведение Ли не является тензором, а ведет себя по отношению к обоим аргументам как дифференцирование. Нам не известно вполне удовлетворительное геометрическое истолкование тензора кручения. Напротив, тензор кривизны имеет очень ясный геометрический смысл, как мы увидим в разд. 2.6 в связи с параллельным переносом. Этот тензор используется во многих важнейших задачах дифференциальной геометрии.

(iv) Покажите, что для линейных связностей ∇, $\tilde{\nabla}$ на M разность $\nabla - \tilde{\nabla}$ есть тензорное поле типа (2,1) на M, и обратно, для любого тензорного поля S типа (2,1) $\nabla + S$ есть линейная связность. Тем самым можно (по крайней мере, теоретически) описать

всевозможные линейные связности на M. Если S симметричны (т. е. $S(X, Y) = S(Y, X)$), то ∇ и $\tilde{\nabla}$ имеют один и тот же тензор кручения.

2.3. Локализация тензорных полей и линейных связностей

Мы определим тензорное поле типа (r, s) как полилинейное отображение, сопоставляющее r глобально определенным дифференцируемым векторным полям на M функцию или векторное поле. Тензорное поле может быть локализовано, т. е. его значение в точке $p \in M$ зависит лишь от значений аргументов в p.

Лемма

Усл. $L\colon \mathfrak{B}^r M \to \mathfrak{B}^s M$ *есть* $\mathfrak{F}M$*-линейное отображение* ($r \geqslant 1$, $s = 0, 1$).
Утв. $L(X_1, \ldots, X_r)|_p = L(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r)|_p$, *если* $X_i|_p = \tilde{X}_i|_p$, *где* $i = 1, \ldots, r$.
Док. Можно принять $r = 1$, так как общий случай легко получается по индукции.

Пусть x — карта с областью определения $U \ni p$. Построим функцию $\varphi \in \mathfrak{F}M$, такую, что $\varphi(p) = 1$ и носитель φ принадлежит U (см. разд. 8.3). Зададим векторные поля $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{B}M$ формулой $X_i|_q = \varphi(q) \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q$ при $q \in U$, $X_i|_q = 0$ в остальных точках, а $i = 1, \ldots, n$. Тогда при $X, \tilde{X} \in \mathfrak{B}M$ получаем представления

$$\varphi X = \sum_{i=1}^{n} \psi^i X_i, \qquad \varphi \tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\psi}^i X_i,$$

где $\psi^i, \tilde{\psi}^i \in \mathfrak{F}M$, причем

$$L(X)|_p = \varphi(p)\, L(X)|_p = (\varphi L(X))|_p = L(\varphi X)|_p = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(p)\, L(X_i),$$

соответственно $L(\tilde{X})|_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\psi}^i(p)\, L(X_i)|_p$. Поскольку $X_p = \tilde{X}_p$, имеем $\psi^i(p) = \tilde{\psi}^i(p)$, откуда $L(X)|_p = L(\tilde{X})|_p$, и лемма доказана.

Пусть $M_p^0 = \mathbb{R}$ и $M_p^k = M_p \times \ldots \times M_p$ (k множителей). Согласно лемме, тензорное поле B типа (r, s) на M индуцирует для каждой точки $p \in M$ r-линейное отображение $B_p\colon M_p^r \to M_p^s$ по формуле

$$B_p(v_1, \ldots, v_r) = B(X_1, \ldots, X_r)|_p, \tag{1}$$

где $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{B}M$ и $X_i|_p = v_i$, $i = 1, \ldots, r$. Вместо B_p мы будем, как правило, писать B. Обратно, если каждой точке $p \in M$ поставлено в соответствие r-линейное отображение $B_p\colon M_p^r \to M_p^s$ (или, что то же самое, „построено сечение расслоения всех r-линейных

отображений $M_p^r \to M_p^{s}$"), то получаем тензорное поле на M при условии, что соответствие „дифференцируемо". Это, по существу, и означает, что подстановка дифференцируемых векторных полей приводит к дифференцируемым функциям или векторным полям.

Линейная связность ∇ на M $\mathfrak{F}M$-линейна по первому аргументу. Согласно лемме, при $X, Y \in \mathfrak{V}M$ и $p \in M$ линейная связность $(\nabla_X Y)_p$ зависит при фиксированном Y лишь от X_p. Поэтому для $v \in M_p$ можно положить

$$\nabla_v Y = (\nabla_X Y)_p, \tag{2}$$

где $X \in \mathfrak{V}M$ — любое векторное поле, принимающее в точке p значение $X_p = v$. Это рассуждение неприменимо ко второму аргументу ∇, так как ∇ ведет себя по отношению к Y, как дифференцирование. Подобно обычной производной, $(\nabla_X Y)_p$ зависит лишь от ростка Y в точке p. Это означает, что если векторное поле $\tilde{Y} \in \mathfrak{V}M$ совпадает с Y в некоторой окрестности U точки p, то для всех $v \in M_p$ имеет место $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$. В самом деле, возьмем функцию $\varphi \in \mathfrak{F}M$, обращающуюся в нуль вне U, такую, что $\varphi(p) = 1$, тогда $\varphi Y = \varphi \tilde{Y}$. Поэтому $\nabla_v(\varphi Y) = \nabla_v(\varphi \tilde{Y})$ и, следовательно, $\varphi(p)\nabla_v Y + (v\varphi) Y_p = \varphi(p)\nabla_v \tilde{Y} + (v\varphi)\tilde{Y}_p$. Так как $Y_p = \tilde{Y}_p$ и $\varphi(p) = 1$, утверждение доказано.

Если G — открытое подмножество M, то для векторного поля $Z \in \mathfrak{V}G$ можно положить $\nabla_v Z = \nabla_v Y$, где $v \in M_p$, $p \in G$ и $Y \in \mathfrak{V}M$ — векторное поле, совпадающее с Z в некоторой окрестности p (как мы видели в разд. 1.3, такое векторное поле Y всегда существует). Следовательно, линейная связность ∇ на M позволяет определить для любого открытого подмножества $G \subset M$ линейную связность

$$\nabla\colon \mathfrak{V}G \times \mathfrak{V}G \to \mathfrak{V}G, \tag{3}$$

такую, что для $X, Y \in \mathfrak{V}M$ имеем $(\nabla_X Y)|_G = \nabla_X|_G\, Y|_G$.

Пусть U — область определения карты x, содержащая $p \in M$. Полагая $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{V}U$, получаем представление

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k, \tag{4}$$

где $\Gamma_{ij}^k = (\nabla_{X_i} X_j)\, x^k \in \mathfrak{F}U$. Функции Γ_{ij}^k называются компонентами связности относительно карты x. Если ∇ „не имеет кручения", т. е. $T = 0$, то $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$, поскольку X_i — координатные поля. Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_{ji}^k X_k$ и, следовательно,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{5}$$

Обратно, из условия (5) вытекает, что линейная связность не имеет кручения на U.

Замечания

(i) Карта x определена на $U \in M$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{B}U$. Покажите, что в разложениях

$$T(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n} T_{ij}^k X_k,$$

$$R(X_i, X_j) X_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l X_l$$

функции

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k,$$

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^{n} (\Gamma_{ir}^l \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{jr}^l \Gamma_{ik}^r).$$

(ii) Векторные поля X_1, $X_2 \in \mathfrak{B}\mathbb{R}^2$, заданные формулами

$$X_1|_u = \cos u^1 D_1|_u + \sin u^1 D_2|_u,$$
$$X_2|_u = -\sin u^1 D_1|_u + \cos u^1 D_2|_u,$$

образуют параллелизацию на $\mathbb{R}^2$. Пусть ∇ — соответствующая линейная связность (см. замечание (i) разд. 2.1). Найдите $[X_1, X_2]$, Γ_{ij}^k, R_{ijk}^l относительно карты id. Покажите, что ∇ имеет кручение.

(iii) Пусть M — дифференцируемое многообразие с линейной связностью ∇, $X \in \mathfrak{B}M$, B — тензорное поле типа (r, s) на M, $s = 0, 1$ (в дальнейшем это последнее ограничение не оговаривается). Построим отображение $\nabla_X B$: $\mathfrak{B}^r M \to \mathfrak{B}^s M$ по формуле

$$(\nabla_X B)(Y_1, \ldots, Y_r) =$$
$$= \nabla_X B(Y_1, \ldots, Y_r) - \sum_{i=1}^{r} B(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r),$$

где в случае $s = 0$ следует понимать $\nabla_X f$ как Xf. Проверьте, что $\nabla_X B$ есть снова тензорное поле типа (r, s), называемое ковариантной производной B по X. Тем самым каждому тензорному полю B типа (r, s) ставится в соответствие тензорное поле ∇B типа $(r+1, s)$, заданное формулой

$$(\nabla B)(Y_0, \ldots, Y_r) = (\nabla_{Y_0} B)(Y_1, \ldots, Y_r).$$

Докажите, что в случае $T = 0$ тензор кривизны удовлетворяет тождеству Бьянки:

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U) + (\nabla_Y R)(Z, X, U) + (\nabla_Z R)(X, Y, U) = 0.$$

Достаточно проверить это соотношение для базисных полей произвольной карты (почему?).

(iv) Тензорное поле типа $(r, 0)$ называется также *дифференциальной формой* степени r или, кратко, r-формой. Пусть $f \in \mathfrak{F}M$. Полагая $df(X) = Xf$, получаем 1-форму на M, называемую *дифференциалом* f (см. замечание (ii) разд. 1.4). Для карты x вокруг $p \in M$ получаем дифференциалы dx^i, для которых $dx^i\left(\frac{\partial}{dx^k}\right) = \delta^i_k$, так что $dx^i|_p$ образуют базис пространства M_p^* линейных форм на M_p, двойственный базису $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Для тензорного поля B типа $(r, 1)$ и $1 \leqslant j \leqslant r$ определим *свертку* c_jB, как тензорное поле типа $(r-1, 0)$, построенное по правилу

$$(c_jB)(Y_1, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, Y_r)|_p = \operatorname{tr}(v \to B(Y_1, \ldots, Y_{j-1}, v, Y_{j+1}, \ldots, Y_r)|_p),$$

где $p \in M$, $v \in M_p$, tr — след эндоморфизма M_p, записанного в скобке (причем отображение строится для фиксированных векторных полей $Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_r$). Для карты x с областью определения U и базисными полями $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ имеем на U

$$(c_jB)(Y_1, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, Y_r) = \sum_{i=1}^{n} dx^i(B(Y_1, \ldots, Y_{j-1}, X_i, Y_{j+1}, \ldots, Y_r)).$$

Покажите, что $\nabla_X(c_jB) = c_j(\nabla_X B)$ и $\nabla c_j = c_{j+1}\nabla$, т. е. свертывание и ковариантное дифференцирование коммутируют.

Пусть B — *антисимметрическое* тензорное поле типа (r, s). Это значит, что при перестановке любых двух его аргументов, при неизменных остальных, значение B меняет знак (такие тензорные поля называются еще кососимметрическими или альтернирующими). Тогда *внешней производной* (или производной Картана) dB называется антисимметрическое тензорное поле типа $(r+1, s)$, определяемое формулой:

$$(dB)(Y_0, \ldots, Y_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \nabla_{Y_i} B(Y_0, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, Y_r) + \\ + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant r} (-1)^{i+j} B([Y_i, Y_j], Y_0, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, Y_r).$$

Проверьте тензорный характер и антисимметричность dB. Пусть I — тензор типа (1,1) тождественного эндоморфизма $\mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$, тогда $dI = T$. Если $T = 0$ и $\nabla B = 0$, то также $dB = 0$. При $s = 0$ справедливо соотношение $ddB = 0$; при $s = 1$ это верно в предположении, что $R = 0$. Антисимметрическая дифференциальная форма ω, для которой $d\omega = 0$, называется замкнутой или точной.

Очевидно, $d\omega$ всегда замкнута. Обратно, если антисимметрическая форма ω замкнута, то локально она является, как можно показать, внешней производной некоторой антисимметрической $(r-1)$-формы. В целом это неверно, так как могут возникнуть топологические препятствия. Мерой таких препятствий служит (в случае компактного M) r-я группа когомологий де Рама $H^r(M, \mathbb{R})$ — факторпространство векторного $\mathbb{R}$-пространства всех замкнутых антисимметрических r-форм на M по подпространству тех форм, которые являются внешними производными антисимметрических $r-1$)-форм на M.

2.4. Отображение связности

Векторное поле, как дифференцируемое сечение $M \to TM$, индуцирует отображение Y_*: $TM \to TTM$, так что каждому вектору $v \in M_p$ соответствует $Y_* v \in (TM)_{Y_p}$. Опираясь на этот факт, мы хотим указать другое, эквивалентное описание линейной связности ∇ на M, представляющее интерес не только в техническом отношении.

Вектор $\nabla_v Y$ ($v \in M_p$, $Y \in \mathfrak{X}M$) строится по новому определению в два шага: сначала находится естественный образ $Y_* v \in TTM$, а затем этот вектор „проектируется“ в вектор слоя M_p с помощью некоторого отображения K: $TTM \to TM$, геометрический смысл которого состоит в следующем. Для каждого слоя M_p определено отображение включения ι: $M_p \to TM$, образы касательных векторов к M_p при отображении ι_* называются вертикальными векторами TTM. Все касательные векторы к M_p (и их образы при ι_*) могут быть при помощи канонического изоморфизма I_v (см. (5) разд. 1.4) отождествлены с векторами M_p. Заданию линейной связности на M, как мы увидим, равносильно задание способа однозначного разложения векторов $a \in (TM)_w$ в сумму $a = a_H + a_V$, где a_V — вертикальный вектор, а a_H — горизонтальный, определяемый этим разложением. Образ $K(a)$ по определению есть вектор $M_{\pi(w)}$, канонически отождествленный с a_V. Линейная связность получается теперь в виде $\nabla_v Y = K(Y_* v)$.

Приступая к этому построению, предположим, что на M задана линейная связность ∇. По этой связности мы сначала построим $K(a)$ для векторов a вида $Y_* v$, где $v \in TM$, $Y \in \mathfrak{X}M$. Представление в этом виде вектора v, конечно, неоднозначно; из $Y_* v = \tilde{Y}_* \tilde{v}$ не следует, что $Y = \tilde{Y}$ (хотя, очевидно, следует $Y_p = \tilde{Y}_p$ и, как мы увидим ниже, $v = \tilde{v}$). Тем не менее справедливо следующее предложение.

Лемма 1

Усл. ∇ — *линейная связность на* M, $\mathfrak{M}$ — *множество всех векторов* TTM *вида* Y_*v ($Y \in \mathfrak{V}M$, $v \in TM$).

Утв. *Существует такое отображение* $K\colon \mathfrak{M} \to TM$, *что для каждого вектора* $a = Y_*v$

$$K(a) = \nabla_v Y. \tag{1}$$

Тем самым $\nabla_v Y$ однозначно определяется вектором Y_*v, т. е. если $Y_*v = \tilde{Y}_*\tilde{v}$, то $\nabla_v Y = \nabla_{\tilde{v}}\tilde{Y}$.

Док. Мы выведем требуемое утверждение из локальных представлений.

Пусть $v \in M_p$; x — карта с областью определения $U \ni p$; $\bar{x}$ — ассоциированная с x карта TM на TU. Положим $X_l = \dfrac{\partial}{\partial x^l} \in \mathfrak{V}U$ ($l = 1, \ldots, n$), $A_k = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \in \mathfrak{V}TU$ ($k = 1, \ldots, 2n$). Тогда получаем представления

$$v = \sum_{l=1}^{n} \alpha^l X_l|_p, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j X_j, \tag{2}$$

где $\alpha^l \in \mathbb{R}$, $\varphi^j \in \mathfrak{F}U$.

В силу (2) разд. 1.4 имеем $Y_*v = \sum\limits_{k=1}^{2n} v(\bar{x}^k \circ Y) A_k \circ Y|_p$. Учитывая $\bar{x}^k \circ Y = x^k \circ \pi \circ Y = x^k$ и $\bar{x}^{n+k} \circ Y = Yx^k = \varphi^k$ ($k = 1, \ldots, n$), из (2) получаем

$$Y_*v = \sum_{k=1}^{2n} a^k A_k \circ Y|_p; \tag{3}$$

$$a^l = \alpha^l, \quad a^{n+l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i (X_i \varphi^l)|_p \quad (l = 1, \ldots, n).$$

Далее, из (2), учитывая (4) разд. 2.3, находим

$$\nabla_v Y = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha^i \left(X_i \varphi^k + \sum_{j=1}^{n} \varphi^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k|_p \tag{4}$$

или в обозначениях (3)

$$\nabla_v Y = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} a^i \varphi^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k|_p. \tag{5}$$

Так как в (5) входят лишь координаты вектора $a = Y_*v$, то $\nabla_v Y$ зависит лишь от a, что и доказывает лемму. Отображение $K(a)$ при этом может быть задано формулой

$$K(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} a^i \bar{x}^{n+j}(w) \Gamma_{ij}^k \right) X_k|_p, \tag{6}$$

где $a \in (TM)_w$, $p = \pi(w)$.

Из (3) видно также, что равенство $\nabla_v Y = \nabla_{\tilde{v}} \tilde{Y}$ возможно лишь при $v = \tilde{v}$. В самом деле, ясно, что v и $\tilde{v}$ принадлежат одному слою M_p, и в силу (3) имеем $\alpha^i = a^i = \tilde{\alpha}^i$. Далее, из (3) вытекает, что при надлежащем выборе $v \in M_p$ и $Y \in \mathfrak{B}U$ можно представить в виде $Y_* v$ все векторы TTM, за исключением тех, у которых $a^k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ниже приводится геометрическая интерпретация таких векторов.

Пусть $a = \sum_{k=1}^{2n} a^k A_k \in (TM)_w$, найдем $\pi_* a$. Согласно (2) разд. 1.4, имеет место $\pi_* a = \sum_{k=1}^{n} a(x^k \circ \pi) X_k|_p$, где $p = \pi(w)$. Далее, $a(x^k \circ \pi) = \sum_{j=1}^{2n} a^j A_j (x^k \circ \pi)$, а эта сумма, как видно из определения векторных полей $A_j = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$, равна a^k. Итак,

$$\pi_* a = \sum_{k=1}^{n} a^k X_k|_p. \tag{7}$$

Векторы $a \in TTM$, для которых $\pi_* a = 0$, называются *вертикальными*. Из (7) следует, что в виде $Y_* v$ представимы все невертикальные векторы и только они.

Все вертикальные векторы TTM можно получить следующим образом. Рассмотрим произвольный слой M_p и включение ι: $M_p \subset TM$. Пусть $b \in (M_p)_w$ — касательный вектор в точке w к дифференцируемому многообразию M_p. Пользуясь обозначениями леммы 1, построим карту на M_p по формулам $\tilde{x}^i(w) = \bar{x}^{n+i}(w)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда получаем разложение

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_w,$$

откуда

$$\iota_* b = \sum_{i=1}^{n} \beta^i A_{n+i}|_w.$$

Ясно, что вектор $\iota_* b$ вертикален, и каждый вертикальный вектор может быть однозначно представлен в таком виде. Поэтому на множестве $\mathfrak{M}_V$ всех вертикальных векторов TTM определено обратное отображение

$$\iota_*^{-1}\colon \mathfrak{M}_V \to \bigcup_{p \in M} (TM)_p.$$

Далее, для каждого слоя M_p определен канонический изоморфизм I_w. Положим

$$K(a) = I_w^{-1} \circ \iota_*^{-1} a \quad (a \in \mathfrak{M}_V \cap (TM)_w). \tag{8}$$

Тогда в TU имеем представление $K(a) = \sum_{i=1}^{n} a^{n+i} X_i \circ \pi$; отсюда видно, что и для вертикальных векторов отображение K может быть задано по отношению к карте K той же формулой (6).

Таким образом, K определено на всем $TTM|_a$ и из (6) следует, что K — дифференцируемое отображение TTM в TM, линейное на каждом слое $(TM)_w$.

Отображение K называется *отображением связности*, соответствующим заданной линейной связности ∇ на M. Эта линейная связность может быть, в свою очередь, получена из K по формуле

$$\nabla_v Y = K(Y_* v). \tag{9}$$

Запишем еще действие отображений π_*, K на векторные поля $A \in \mathfrak{B}(TU)$ (а не на отдельные векторы). В силу (6), (7) имеют место соотношения

$$\pi_* \circ A = \sum_{k=1}^{n} a^k X_k \circ \pi, \tag{10}$$

$$K \circ A = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{n+k} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a^i \bar{x}^{n+j} \Gamma_{ij}^k \circ \pi \right) X_k \circ \pi. \tag{11}$$

Мы выделили в каждом $2n$-мерном пространстве $(TM)_w$ n-мерную плоскость V_w вертикальных векторов; отметим, что при этом не была использована линейная связность ∇. Напротив, выделение горизонтальных плоскостей, к которому мы приступаем, зависит от заданной линейной связности на M (и эквивалентно ее заданию). Подчеркнем, что задание одних только вертикальных векторов еще никоим образом не определяет разложения на горизонтальные и вертикальные составляющие, о котором шла речь в начале этого раздела.

Изучим действие отображения K на слое $(TM)_w$. Пользуясь опять картами x, $\bar{x}$, из (6) легко получить, что условие $K(a) = 0$ определяет в слое $(TM)_w$ n-мерную плоскость, а именно, задав произвольно a^i $(i = 1, \ldots, n)$, можно найти, пользуясь (6), остальные координаты a. Векторы $a \in TTM$, для которых $K(a) = 0$, называются *горизонтальными*. Итак, в каждом слое $(TM)_w$ выделяется n-мерная плоскость H_w, состоящая из горизонтальных векторов.

Покажем, что пересечение $V_w \cap H_w$ состоит только из нулевого вектора. В самом деле, если a вертикален, то, согласно (7), $a^k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Если же a, кроме того, горизонтален, то из (6) следует $a^{n+k} = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Итак, $(TM)_w$ есть прямая сумма n-мерных подпространств V_w, H_w. При этом, согласно (6) и (7), π_* переводит V_w в нуль и биективно отображает H_w на $M_{\pi(w)}$, тогда как K переводит H_w в нуль и биективно отображает V_w на $M_{\pi(w)}$. Следовательно, $\pi_* \times K$ изоморфно отображает каждый слой $(TM)_w$ на $M_{\pi(w)} \times M_{\pi(w)}$. Отметим еще, что образом отображения

$$\pi_* \times K\colon\ TTM \to TM \times TM$$

является $3n$-мерное подмногообразие $TM \oplus TM$ (см. замечание (iv) разд. 1.10), в то время как TTM $4n$-мерно; таким образом, $\pi_* \times K$ не является диффеоморфизмом. Заметим, что вертикальные и горизонтальные плоскости V_w, H_w в силу (6), (7) образуют *дифференцируемые распределения* на TM, это означает, что в некоторой окрестности каждой точки $w \in TM$ на TM существует n линейно независимых дифференцируемых векторных полей, состоящих из вертикальных и соответственно горизонтальных векторов (см. замечание (i) разд. 1.9).

Кроме линейности на каждом слое TTM, отображение K обладает еще и другим свойством линейности; чтобы сформулировать это свойство, введем на TTM некоторые операции.

Лемма 2

Усл. $\mathfrak{B} = \{(a, b)\colon a, b \in TTM,\ \pi_* a = \pi_* b\}$.

Утв. (a) *Существует такое отображение* $h\colon \mathbb{R} \times TTM \to TTM$, *что для любых* $v \in TM$, $Y \in \mathfrak{B}M$

$$h(\alpha, Y_* v) = (\alpha Y)_* v. \tag{12}$$

(b) *Существует такое отображение* $s\colon \mathfrak{B} \to TTM$, *что для любых* $v \in TM$, $Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{B}M$

$$s(Y_* v, \tilde{Y}_* v) = (Y + \tilde{Y})_* v. \tag{13}$$

Док. Воспользуемся опять картой x с областью определения $U \ni p = \pi(v)$ и соответствующей ассоциированной картой $\bar{x}$. Тогда из (2) и (3) следует, что для вектора $Y_* v = \sum_{k=1}^{2n} a^k A_k \circ Y|_p$ имеет место

$$(\alpha Y)_* v = \sum_{k=1}^{n} a^k A_k \circ \alpha Y|_p + \alpha \sum_{k=n+1}^{2n} a^k A_k \circ \alpha Y|_p. \tag{14}$$

Таким образом, $(\alpha Y)_* v$ зависит лишь от $a = Y_* v$, и требуемое в (a) отображение построено для не вертикальных a. Определим h для вертикальных a, полагая

$$h(\alpha, a) = \iota_* \circ I_{\alpha w} \circ \alpha I_w^{-1} \circ \iota_*^{-1} a \quad (a \in \mathfrak{M}_V \cap (TM)_w). \tag{15}$$

Легко проверить, что и в этом случае $h(\alpha, a)$ задается над U правой частью (14). Для доказательства (b) воспользуемся разложениями над U:

$$Y_* v = \sum_{k=1}^{2n} a^k A_k \circ Y|_p, \quad \tilde{Y}_* v = \sum_{k=1}^{2n} \tilde{a}^k A_k \circ \tilde{Y}|_p.$$

Так как $\pi_*(Y_* v) = \pi_*(\tilde{Y}_* v)$, из (7) вытекает, что $a_k = \tilde{a}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, из (2), (3) следует, что

$$(Y + \tilde{Y})_* v = \sum_{k=1}^{n} a^k A_k \circ (Y + \tilde{Y})|_p + \sum_{k=n+1}^{2n} (a_k + \tilde{a}_k) A_k \circ (Y + \tilde{Y})|_p. \quad (16)$$

Поэтому $(Y + \tilde{Y})_* v$ зависит лишь от $Y_* v$, $\tilde{Y}_* v$ и требуемое в (b) отображение построено для не вертикальных векторов a, $\tilde{a}$.

Определим $s(a, \tilde{a})$ для вертикальных векторов a, $\tilde{a}$ по формуле

$$s(a, \tilde{a}) = \iota_* \circ I_{w+\tilde{w}} \circ (I_w^{-1} \circ \iota_*^{-1} a + I_{\tilde{w}}^{-1} \circ \iota_*^{-1} \tilde{a}), \quad (17)$$

где $a \in \mathfrak{M}_V \cap (TM)_w$, $\tilde{a} \in \mathfrak{M}_V \cap (TM)_{\tilde{w}}$, $\pi_* a = \pi_* \tilde{a}$. Легко проверить, что и в этом случае $s(a, \tilde{a})$ задается над U правой частью равенства (16). Доказательство леммы этим завершено.

Заметим, что отображение $h(\alpha, a)$ можно получить еще и другим способом. Определим отображение гомотетии h_α: $\mathbb{R} \times TM \to TM$ формулой

$$h_\alpha(w) = \alpha w. \quad (18)$$

Тогда, как легко проверить, $h(\alpha, a) = h_\alpha(a)$.

Положим теперь $\alpha \underset{T}{\cdot} a = h(\alpha, a)$ $(\alpha \in \mathbb{R}, a \in TTM)$, $a \underset{T}{+} \tilde{a} = s(a, \tilde{a})$ $(a, \tilde{a} \in TTM, \pi_* a = \pi_* \tilde{a})$. Над U эти операции описываются формулами, вытекающими из (14) – (17):

$$\alpha \underset{T}{\cdot} a = \sum_{k=1}^{n} a^k A_k|_{\alpha w} + \alpha \sum_{k=n+1}^{2n} a^k A_k|_{\alpha w}, \quad (19)$$

где $a \in (TM)_w$,

$$a \underset{T}{+} \tilde{a} = \sum_{k=1}^{n} a^k A_k|_{w+\tilde{w}} + \sum_{k=n+1}^{2n} (a^k + \tilde{a}^k) A_k|_{w+\tilde{w}}, \quad (20)$$

где $a \in (TM)_w$, $\tilde{a} \in (TM)_{\tilde{w}}$.

Из (6), (19), (20) следует, что отображение K обладает свойством линейности по отношению к T-операциям:

$$K\left(\alpha \underset{T}{\cdot} a\right) = \alpha K(a), \quad (21)$$

$$K\left(a \underset{T}{+} \tilde{a}\right) = K(a) + K(\tilde{a}). \quad (22)$$

В качестве приложения изложенного в этом разделе построения линейной связности покажем, как по заданным линейным связностям ∇_1 на M и ∇_2 на N строится некоторая линейная связность ∇ на произведении $M \times N$, называемая *произведением линейных связностей* ∇_1, ∇_2. Пусть на $M \times N$ задано векторное поле Y, тогда определено индуцированное отображение Y_*: $M \times N \to T(M \times N)$, так что для каждой точки $(p, q) \in M \times N$ и каждого вектора $(v, w) \in (M \times N)_{(p, q)}$ задан вектор $Y_*(v, w) \in T(M \times N)_{Y(p, q)}$. Пусть π_1, π_2 — естественные проекции $M \times N$ на M, N соответственно (см. разд. 1.7). Обозначим через K_1, K_2 отображения связности для M, N, соответствующие линейным связностям ∇_1, ∇_2. Тогда, как мы покажем, формула

$$\nabla_{(v, w)} Y = (K_1 \circ \pi_{1**} Y_*(v, w), \quad K_2 \circ \pi_{2**} Y_*(v, w)) \tag{23}$$

задает линейную связность ∇ на $M \times N$, которая обозначается через $\nabla_1 \times \nabla_2$. Проверка линейности ∇ сводится к использованию линейности K_1, K_2 на каждом слое TTM, TTN соответственно. Чтобы изучить поведение ∇ относительно Y, заметим сначала, что из (20) и стандартного способа построения карт на $M \times N$ (см. разд. 1.7) легко следуют соотношения

$$\alpha \underset{T}{\cdot} (a, b) = (\alpha \underset{T}{\cdot} a, \alpha \underset{T}{\cdot} b), \quad (a, b) \underset{T}{+} (\tilde{a}, \tilde{b}) = (a \underset{T}{+} \tilde{a}, b \underset{T}{+} \tilde{b}),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, (a, b), $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in TT(M \times N)$, если предполагать, что сумма в левой части второго из них имеет смысл. Докажем аддитивность ∇ относительно Y. Если Z, Y, $\tilde{Y} \in \mathfrak{B}(M \times N)$ и $Z = Y + \tilde{Y}$, то в силу леммы 2

$$Z_*(v, w) = Y_*(v, w) \underset{T}{+} \tilde{Y}_*(v, w).$$

Следовательно,

$$\pi_{1**} Z_*(v, w) = \pi_{1**} Y_*(v, w) + \pi_{1**} \tilde{Y}(v, w).$$

Аналогично доказываем и для второй проекции. Остается воспользоваться соотношением (22) для K_1, K_2. Проверим, что $\nabla_{(v, w)} Y$ ведет себя как дифференцирование по отношению к Y. С помощью формул (2), (3) легко доказывается соотношение

$$(\varphi Y)_* v = v(\varphi) \cdot \iota_* I_{\varphi(p) Y_p}(Y_p) + \varphi(p) \underset{T}{\cdot} Y_* v, \tag{24}$$

где $\varphi \in \mathfrak{F}M$, $Y \in \mathfrak{B}M$, $v \in M_p$. Применяя (24) к $M \times N$ (вместо M), требуемое свойство получаем из (21), (22).

Наконец, для любого векторного поля $X \in \mathfrak{B}M$ определим $\nabla_X Y \in \mathfrak{B}M$, полагая

$$(\nabla_X Y)|_{(p, q)} = \nabla_{(v, w)} Y,$$

где

$$(v, w) = X_{(p, q)}.$$

Из (23) сразу же следует, что $\nabla_X Y$ — дифференцируемое векторное поле на $M \times N$.

Замечания

(i) Пусть $0\colon M \to TM$ — нулевое сечение, $p \in M$. Покажите, что $0_* M_p$ есть горизонтальная плоскость в точке $0_p \in TM$ для любой линейной связности ∇. (Таким образом, в точках $0(M)$ горизонтальные плоскости могут быть определены независимо от задания линейной связности.) Каждый горизонтальный вектор w в точке $0(p)$ представим в виде $w = 0_* \circ \pi_* w$. Горизонтальные векторы в точках $0(M)$ можно охарактеризовать еще следующим образом: вектор $w \in 0(M)$ горизонтален в том и только том случае, если для всех $f \in \mathfrak{F}TM$ имеет место $w(f) = w(f \circ 0 \circ \pi)$. Вертикальные векторы на TM можно охарактеризовать так: вектор w вертикален в том и только том случае, если для всех $f \in \mathfrak{F}M$ имеет место $w(f \circ \pi) = 0$.

(ii) Рассмотрим в обратном порядке процесс, изложенный в разд. 2.4. Пусть в каждом слое $(TM)_w$, наряду с вертикальной плоскостью V_w, задана n-мерная плоскость H_w, трансверсальная к V_w, т. е. пересекающая V_w только по нулевому вектору. Предположим, что плоскости H_w образуют дифференцируемое распределение на TM. Назовем вектор $a \in TTM$ горизонтальным, если для некоторой точки $w \in TM$ выполняется $a \in H_w$.

Предположим, что распределение горизонтальных плоскостей удовлетворяет следующим условиям: если a горизонтален, то $\alpha \cdot a$ горизонтален при всех $\alpha \in \mathbb{R}$; если a, b горизонтальны и определена их T-сумма (т. е. $\pi_* a = \pi_* b$), то и $a \underset{T}{+} b$ горизонтален. Определим отображение $K\colon TTM \to TM$, полагая $K(a) = 0$ при $a \in H_w$ и $K(a) = I_w^{-1} \circ \iota_*^{-1} a$ при $a \in V_w$ ($w \in TM$). Легко показать, что отображение K T-линейно, т. е. обладает свойствами (21), (22). Определив далее $\nabla_v Y$ по формуле (1), проверьте, что ∇ — линейная связность на M. (Воспользуйтесь T-линейностью K и соотношением (24).) Покажите, что отображение связности, соответствующее ∇, есть исходное отображение K.

(iii) Формула (23) принимает простейший вид для векторных полей $Y = Y_1 \times Y_2$ ($Y_1 \in \mathfrak{X}M$, $Y_2 \in \mathfrak{X}N$, $Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$), определяемых по формуле $Y(p, q) = (Y_1(p), Y_2(q))$. Для такого векторного поля и связности $\nabla = \nabla_1 \times \nabla_2$ имеем

$$\nabla Y = (\nabla_1 Y_1, \nabla_2 Y_2).$$

Кроме того, при $Y = Y_1 \times Y_2$, $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 \times \tilde{Y}_2$ имеет место

$$[Y, \tilde{Y}] = ([Y_1, \tilde{Y}_1], [Y_2, \tilde{Y}_2]).$$

(Это легче всего проверить, применяя обе части к координатным функциям стандартной карты на $M \times N$.) Поэтому, для вектор-

ных полей типа произведения можно найти значения тензоров кручения и кривизны линейной связности ∇ через соответствующие значения для ∇_1, ∇_2:

$$T(X, Y) = (T_1(X_1, Y_1), T_2(X_2, Y_2)),$$
$$R(X, Y)Z = (R_1(X_1, Y_1)Z_1, R_2(X_2, Y_2)Z_2),$$

где $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$, $Z = Z_1 \times Z_2$. Выведите отсюда, пользуясь леммой о локализации (см. разд. 2.3), что для любых векторов $(v_i, w_i) \in T(M \times N)$, $i = 1, 2, 3$,

$$T((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = (T_1(v_1, v_2), T_2(w_1, w_2)),$$
$$R((v_1, w_1), (v_2, w_2))(v_3, w_3) = (R_1(v_1, v_2)v_3, R_2(w_1, w_2)w_3).$$

Пользуясь стандартной картой $x \times y$ на $M \times N$, выразите компоненты Γ^k_{ij} линейной связности ∇ через компоненты линейных связностей ∇_1, ∇_2.

2.5. Векторные поля вдоль отображений

Мы введем теперь важное обобщение понятия векторного поля. Пусть M, N — дифференцируемые многообразия, $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение. Дифференцируемое отображение $X\colon N \to TM$, обладающее свойством $\pi \circ X = f$, называется дифференцируемым *векторным полем вдоль* f. Точно так же, как в разд. 1.10, проверяется, что отображение $X\colon N \to TM$ есть дифференцируемое векторное поле вдоль f в том и только том случае, если $X_p \in M_{f(p)}$ и функция $X\varphi\colon M \to \mathbb{R}$, заданная формулой $(X\varphi)|_p = X_p(\varphi)$, дифференцируема при всех $\varphi \in \mathfrak{F}M$.

Обозначим множество всех дифференцируемых векторных полей вдоль f через $\mathfrak{V}_f$. Пусть G — открытое подмножество M, $V = f^{-1}(G)$, $X \in \mathfrak{V}_f$ и $\psi \in \mathfrak{F}G$. Определим $X\psi \in \mathfrak{F}V$ формулой $(X\psi)|_p = X_p\psi$ $(p \in V)$.

Приведем два важных примера построения векторных полей вдоль f. Пусть $X \in \mathfrak{V}M$, тогда отображение $X \circ f\colon N \to TM$ или, что то же самое, $p \to X_{f(p)}$, есть дифференцируемое векторное поле вдоль f.

Если дано векторное поле $A \in \mathfrak{V}N$, то $f_*A\colon N \to TM$ или, что то же самое, $p \to f_*(A_p)$ есть дифференцируемое векторное поле вдоль f; оно называется *касательным векторным полем вдоль* f. Множество всех касательных векторных полей вдоль f обозначим через $\mathfrak{V}^T_f$.

Естественно, $\mathfrak{V}_f$ является $\mathfrak{F}N$-модулем, $\mathfrak{F}M$-модулем, а также, конечно, векторным $\mathbb{R}$-пространством: если $X \in \mathfrak{V}_f$ и $\varphi \in \mathfrak{F}N$,

отображение φX, заданное формулой $(\varphi X)(p) = (\varphi X)_p = \varphi(p) X_p$, принадлежит $\mathfrak{B}_f$; если же $X \in \mathfrak{B}_f$ и $\psi \in \mathfrak{F}M$, то $\psi \circ f \in \mathfrak{F}N$, и поэтому $(\psi \circ f) X \in \mathfrak{B}_f$. Очевидно, $\mathfrak{B}_f^T$ есть подмодуль $\mathfrak{B}_f$.

Пусть $p \in N$ и U — область определения некоторой карты x на M ($U \ni f(p)$). Тогда, полагая $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $V = f^{-1}(U)$, получаем представление для $Y \in \mathfrak{B}_f$:

$$Y|_V = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i X_i,$$

где

$$\varphi^i = Yx^i \in \mathfrak{F}V.$$

Теперь мы обобщим понятие линейной связности на многообразии, введя для векторных полей вдоль f операцию, аналогичную ковариантному дифференцированию. Пусть $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение, ∇ — линейная связность на M, которой соответствует отображение связности K: $TTM \to TM$. *Линейной связностью вдоль f, или ковариантной производной вдоль f,* называется отображение $\nabla_f\colon \mathfrak{B}N \times \mathfrak{B}_f \to \mathfrak{B}_f$, определенное формулой

$$\nabla_f(A, Y) = KY_*A.$$

Для краткости мы будем опускать индекс f и писать $\nabla_A Y$ вместо $\nabla(A, Y)$. Это не приведет к недоразумению, если помнить, что $Y \in \mathfrak{B}_f$. В этих обозначениях

$$\nabla_A Y = KY_*A.$$

Если $N = M$ и $f = \mathrm{id}$, то, очевидно, ∇_{id} тождественна с ∇. Таким образом, введенное только что понятие действительно обобщает понятие линейной связности на многообразии.

Следующая лемма показывает, что при таком обобщении сохраняются свойства линейной связности (1)—(4) разд. 2.3.

Лемма 1

Усл. $A, \tilde{A} \in \mathfrak{B}N$; $Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{B}_f$; $\varphi \in \mathfrak{F}N$.
Утв.

$$\nabla_A(Y + \tilde{Y}) = \nabla_A Y + \nabla_A \tilde{Y}, \tag{1}$$

$$\nabla_A(\varphi Y) = \varphi \nabla_A Y + (A\varphi) Y, \tag{2}$$

$$\nabla_{A+\tilde{A}} Y = \nabla_A Y + \nabla_{\tilde{A}} Y, \tag{3}$$

$$\nabla_{\varphi A} = \varphi \nabla_A Y. \tag{4}$$

Док. Мы сведем доказательство этих соотношений к аналогичным соотношениям для некоторой линейной связности $\hat{\nabla}$ на $N \times M$. Введем на N произвольную линейную связность ∇_0 (см. замеча-

ние (ii) разд. 2.1) и положим $\hat{\nabla} = \nabla_0 \times \nabla$ согласно определению (23) разд. 2.4. Пусть $Y \in \mathfrak{V}_f$, обозначим через $\overline{Y}$ любое векторное поле на $N \times M$, связанное с Y соотношением

$$\pi_{2*} \circ \overline{Y} \circ F = Y,$$

где π_2 — естественная проекция $N \times M$ на M, а $F\colon N \to (N \times M)$ задается формулой $F(p) = (p, f(p))$ (см. замечание (ii) разд. 1.7). Докажем существование такого векторного поля $\overline{Y}$. Для этого обозначим через F^0 отображение N в $F(N)$, заданное той же формулой, что и F. Тогда $\overline{Y}$ получается продолжением отображения $(0 \times Y) \circ (F^0)^{-1}\colon F(N) \to T(N \times M)$ до дифференцируемого векторного поля на $N \times M$ (см. замечание (iv) разд. 1.8).

Покажем, что для $v \in TN$, $Y \in \mathfrak{V}_f$ выполняется

$$\nabla_v Y = \pi_{2*} \hat{\nabla}_{F_* v} \overline{Y}. \tag{5}$$

Очевидно, $F_* v = (v, f_* v)$. В силу (23) разд. 2.4 и определения $\overline{Y}$ имеем

$$\pi_{2*} \hat{\nabla}_{F_* v} \overline{Y} = K \pi_{2**} \overline{Y}_* (v, f_* v) = K \pi_{2**} \overline{Y}_* F_* v = K (\pi_{2*} \circ \overline{Y} \circ F)_* v = K Y_* v = \nabla_v Y,$$

что и доказывает (5).

Доказательство свойств (3) и (4) легко получается непосредственно из определения $\nabla_A Y$.

Для доказательства (1) положим $\overline{Y + \tilde{Y}} = \overline{Y} + \overline{\tilde{Y}}$, тогда из (5) следует

$$\nabla_v (Y + \tilde{Y}) = \pi_{2*} \hat{\nabla}_{F_* v} (\overline{Y} + \overline{\tilde{Y}}) = \pi_{2*} \hat{\nabla}_{F_* v} \overline{Y} + \pi_{2*} \hat{\nabla}_{F_* v} \overline{\tilde{Y}} = \nabla_v Y + \nabla_v \tilde{Y}.$$

Для доказательства (2) можно положить $\overline{\varphi Y} = \bar{\varphi} \overline{Y}$, где $\bar{\varphi} = \varphi \circ \pi_1$. Тогда для $v \in N_p$ имеем

$$\nabla_v (\varphi Y) = \pi_{2*} \hat{\nabla}_{F_* v} (\bar{\varphi} \overline{Y}) = \pi_{2*} ((F_* v)\, \bar{\varphi} \circ \overline{Y}_{F(p)} + \bar{\varphi} \circ F(p)\, \hat{\nabla}_{F_* v} \overline{Y}) =$$
$$= v (\bar{\varphi} \circ F)\, \pi_{2*} \overline{Y}_{F(p)} + \bar{\varphi} \circ F(p)\, \nabla_v Y = v(\varphi)\, Y_p + \varphi(p)\, \Delta_v Y.$$

В следующей лемме доказываются так называемые структурные уравнения Картана, выражающие значения тензоров кручения и кривизны M „вдоль отображения f“.

Лемма 2

Усл. $A, B \in \mathfrak{V}N$, $Y \in \mathfrak{V}_f$.

Утв.
$$T(f_* A, f_* B) = \nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A - f_* [A, B], \tag{6}$$
$$R(f_* A, f_* B)\, Y = \nabla_A \nabla_B Y - \nabla_B \nabla_A Y - \nabla_{[A, B]} Y. \tag{7}$$

Док. Воспользуемся обозначениями леммы 1. Заметим сначала, что для любого векторного поля $B \in \mathfrak{V}N$ можно построить поле B

на $N \times M$, F-связанное с B (см. замечание (iv) разд. 1.9). Для этого достаточно продолжить на $N \times M$ векторное поле $F^0_{\#}B \in \mathfrak{V}(F(N))$.

Для доказательства (6) выразим сначала $\nabla_A f_* B$ с помощью линейной связности $\tilde{\nabla}$. Так как $f_* B = \pi_{2*} \circ F_* B = \pi_{2*} \circ \underline{B} \circ F$, то можно положить $\overline{f_* B} = \underline{B}$. Согласно (5), $\nabla_A f_* B = \pi_{2*} \circ \underline{B} \circ F$; $\Delta_B f_* A$ выражается аналогично. Далее, согласно замечанию (iv) разд. 1.9, имеем

$$f_*[A, B] = \pi_{2*} \circ F_*[A, B] = \pi_{2*} \circ [\underline{A}, \underline{B}] \circ F.$$

Итак,

$$\nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A - f_*[A, B] = \pi_{2*} \circ \hat{T}(\underline{A}, \underline{B}) \circ F = \pi_{2*} \circ \hat{T}(F_* A, F_* B),$$

где $\hat{T}$ — тензор кручения связности $\hat{\nabla}$. Чтобы получить (6), остается воспользоваться замечанием (iii) разд. 2.4.

Переходим к доказательству (7). Согласно (5), имеем

$$\nabla_B Y = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{F_* B} \overline{Y} = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{\underline{B}} \overline{Y} \circ F.$$

В таком случае можно положить $\overline{\nabla_B Y} = \hat{\nabla}_{\underline{B}} \overline{Y}$, и поэтому

$$\nabla_A \nabla_B Y = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{F_* A}(\overline{\nabla_B Y}) = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{F_* A} \hat{\nabla}_{\underline{B}} \overline{Y} = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{\underline{A}} \hat{\nabla}_{\underline{B}} \overline{Y} \circ F.$$

Аналогично выражается $\nabla_B \nabla_A Y$. Далее, согласно замечанию (iv) разд. 1.9, имеем

$$\nabla_{[A, B]} Y = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{F_* [A, B]} \overline{Y} = \pi_{2*} \circ \hat{\nabla}_{[\underline{A}, \underline{B}]} \overline{Y} \circ F.$$

Таким образом,

$$\nabla_A \nabla_B Y - \nabla_B \nabla_A Y - \nabla_{[A, B]} Y = \pi_{2*} \circ \hat{R}(\underline{A}, \underline{B}) \overline{Y} \circ F = \pi_{2*} \circ \hat{R}(F_* A, F_* B) \overline{Y} \circ F$$

и остается воспользоваться замечанием (iii) разд. 2.4.

Замечания

(i) Дайте полное доказательство свойств (3), (4) линейной связности вдоль отображения.

(ii) Пусть B — тензорное поле типа (r, s) на M, $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{V}_f$, $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение. Покажите, что $B(Y_1, \ldots, Y_r)$ дифференцируемо, т. е. принадлежит $\mathfrak{F}N$ и соответственно $\mathfrak{V}_f$.

(iii) Пусть $f\colon N \to \mathbb{R}^k$ — дифференцируемое отображение. Рассмотрим каноническую линейную связность ∇ на $\mathbb{R}^k$, векторное поле $I\colon \sum_{i=1}^{k} u^i D_i|_u \in \mathfrak{V}\mathbb{R}^k$ и „поле радиусов-векторов“ $I \circ f$ вдоль f. Покажите, что $\nabla_A I \circ f = f_* A$ для любого векторного поля $A \in \mathfrak{V}N$. Полагая $\dot{c} = c_* D$, вычислите ковариантные производные $\nabla_D \dot{c}$ и $\nabla_D \nabla_D \dot{c}$ для параметризованной окружности $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданной

формулой $c(t) = (\rho \sin t, \rho \cos t)$, где ∇ — линейная связность, введенная в замечании (ii) разд. 2.3.

(iv) Если $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение, $v \in TN$ и $Y \in \mathfrak{X}M$, то $\nabla_{f_* v} Y = KY_* f_* v = K(Y \circ f)_* v = \nabla_v (Y \circ f)$, так что $\nabla_{f_* v} Y = \nabla_v (Y \circ f)$. Следовательно, для f-связанных векторных полей $A \in \mathfrak{X}N$, $X \in \mathfrak{X}M$ (т. е. таких, что $f_* A = X \circ f$) имеем $(\nabla_X Y) \circ f = \nabla_A (Y \circ f)$.

(v) Если $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение, то во множестве P пар $\{(p, v)\colon p \in N, v \in M_{f(p)}\}$ можно ввести структуру дифференцируемого многообразия таким образом, что отображение $\pi\colon P \to N$, заданное формулой $\pi(p, v) = p$, является дифференцируемым расслоением с базой N и слоем M_p. Это расслоение называется расслоением над N, индуцированным отображением f. Векторные поля вдоль f суть дифференцируемые сечения индуцированного отображением f расслоения, а линейная связность вдоль отображения f определяет понятие линейной связности на векторном расслоении π. По поводу этого обобщения мы отсылаем читателя к литературе, приведенной в конце параграфа.

2.6. Параллельный перенос

Ковариантная производная, как будет показано ниже, определяет понятие параллельного переноса вдоль дифференцируемых путей.

Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности n, $c\colon J \to M$ — дифференцируемый путь на M (интервал $J \subset \mathbb{R}$ предполагается, как обычно, не вырожденным, т. е. концы его не совпадают).

Пусть ∇ — линейная связность на M. Векторное поле $X \in \mathfrak{X}_c$ называется *параллельным* (относительно ∇), если

$$\nabla_D X = 0. \tag{1}$$

Для параллельных векторных полей X_1, X_2 вдоль c и действительных чисел α, β векторное поле $\alpha X_1 + \beta X_2$ также является параллельным вдоль c. Таким образом, параллельные векторные поля образуют подпространство векторного $\mathbb{R}$-пространства $\mathfrak{X}_c$.

Для каждого $X \in \mathfrak{X}_c$ определено отображение $X_*\colon T\mathbb{R} \to TTM$ и формула $\dot{X}(t) = X_*(D_t)$ задает дифференцируемый путь $\dot{X}\colon J \to TTM$, при этом $\pi_* \circ \dot{X} = c_*$, где π — проекция касательного расслоения TM. Условие (1) означает, что $\dot{X}(t)$ есть горизонтальный вектор слоя $(TM)_{X(t)}$ при всех $t \in J$. Тогда $\dot{X}$ определяется однозначно, так как горизонтальная плоскость изоморфно отображается на соответствующий слой M_p отображением связности K. Из этих соображений можно было бы доказать теорему существования парал-

лельных полей, однако мы применим другой метод, использующий локальные представления.

Теорема 1

Усл. ∇ — *линейная связность на* M; $c\colon J \to M$ — *дифференцируемый путь*; $t_0 \in J$; $v \in M_{c(t_0)}$.

Утв. *Существует одно и только одно параллельное векторное поле* X *вдоль* c, *удовлетворяющее условию* $X_{t_0} = v$.

Док. Возьмем такие числа $\alpha_\nu \in J$, $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$, что $J = \bigcup_\nu [\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}]$ и $c([\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}])$ принадлежат области определения некоторой карты на M. Достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда $c(J)$ лежит в области определения U некоторой карты x, так как общий случай получается затем по индукции. Пусть $X \in \mathfrak{V}_c$, $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{V}U$ — базисные поля карты. Тогда

$$X = \sum_{k=1}^{n} (Xx^k) X_k \circ c,$$

откуда

$$\nabla_D X = \sum_{k=1}^{n} [D(Xx^k) X_k \circ c + (Xx^k) \nabla_D (X_k \circ c)].$$

В силу замечания (iv) разд. 2.5 имеем $\nabla_D (X_k \circ c) = \nabla_{c_* D} X_k$. Так как

$$c_* D = \sum_{i=1}^{n} D(x^i \circ c) X_i \circ c,$$

имеем

$$\nabla_D (X_k \circ c) = \sum_{i=1}^{n} D(x^i \circ c) \nabla_{X_i \circ c} X_k = \sum_{i,j=1}^{n} D(x^i \circ c)(\Gamma^j_{ik} \circ c) X_j \circ c,$$

откуда получаем локальное представление

$$\nabla_D X = \sum_{k=1}^{n} \left[D(Xx^k) + \sum_{i,j=1}^{n} (Xx^j) D(x^i \circ c) \Gamma^k_{ij} \circ c \right] X_k \circ c. \qquad (2)$$

Функции $a^k = Xx^k$, $B^k_j = -\sum_{i=1}^{n} (\Gamma^k_{ij} \circ c) D(x^i \circ c)$ принадлежат $\mathfrak{F}J$, и соотношение $\nabla_D X = 0$ равносильно

$$Da^k = \sum_{j=1}^{n} B^k_j a^j, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Тем самым утверждение теоремы сведено к теореме существования и единственности для систем обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений первого порядка. Пусть $v = \sum_{k=1}^{n} a_0^k X_k \circ c|_{t_0}$, где $a_0^k \in \mathbb{R}$. Тогда существует одна и только одна система функций $\tilde{a}^k \in \mathfrak{F}J_0$, удовлетворяющая условиям $\tilde{a}^k(t_0) = a_0^k$, где $J_0 \subset J$ — открытый интервал, содержащий t_0 (см. разд. 8.4). В данном случае важно, однако, что (3) является линейной системой (как известно, в этом случае локальное решение $\tilde{a}^k$ может быть однозначно продолжено до глобального решения $a^k \in \mathfrak{F}J$).

Если c_1: $[\alpha, \beta] \to M$, c_2: $[\beta, \gamma] \to M$ — дифференцируемые пути на M, такие, что $\gamma - \beta = \beta - \alpha$ и $c_2(\beta + \tau) = c_1(\beta - \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \beta - \alpha)$, то c_1 и c_2 называются взаимно обратными. Путь, обратный c, обозначается через c^{-1}. Как легко видеть, для параллельного поля вдоль пути c^{-1} получаем уравнения, аналогичные (3):

$$D\bar{a}^k = \sum_{j=1}^{n} \bar{B}_j^k \bar{a}^j, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $\bar{B}_j^k(t) = -B_j^k(2\beta - t)$ $(\beta \leqslant t \leqslant \gamma)$. Поэтому из всякого решения $a^k(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ системы (3) получается решение $\bar{a}^k(t) = a^k(2\beta - t)$ $(\beta \leqslant t \leqslant \gamma)$ системы (4). Отсюда следует, что если X_t — параллельное векторное поле вдоль c, то $X_{2\beta - t}$ — параллельное векторное поле вдоль c^{-1}. Поставим теперь в соответствие каждому вектору $v \in M_p$, $p = c(\alpha)$, вектор $\vartheta_c(v) = X_\beta$, где X_t — параллельное векторное поле вдоль c, удовлетворяющее условию $X_\alpha = v$. В силу линейности уравнений (3) ϑ_c есть линейное отображение M_p в M_q, а из указанного выше свойства параллельных путей вдоль взаимно обратных путей вытекает, что $\vartheta_{c^{-1}} \circ \vartheta_c = \mathrm{id}$. Итак, ϑ_c: $M_p \to M_q$ есть изоморфизм векторных $\mathbb{R}$-пространств, он называется *параллельным переносом* вдоль дифференцируемого пути c.

Размерность векторного пространства всех параллельных полей вдоль c равна, очевидно, n.

Покажем теперь, как можно выразить ковариантную производную с помощью соответствующего ей параллельного переноса (см. введение к этому параграфу).

Теорема 2

Усл. *∇ — линейная связность на M; c: $J \to M$ — дифференцируемый путь. Для $X \in \mathfrak{V}_c$ обозначим $X^{(t)}$ — однозначно определенное параллельное векторное поле вдоль c, удовлетворяющее условию $X_t^{(t)} = X_t$.*

Утв. *Для всех $t_0 \in J$*

$$\nabla_D X|_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{X_{t_0}^{(t)} - X_{t_0}}{t - t_0}, \tag{5}$$

Док. Пусть v_k, $k=1, \ldots, n$ — линейно независимые векторы из M_p, $p=c(t_0)$, и Y_k — параллельные поля вдоль c, удовлетворяющие условиям $Y_k|_{t_0}=v_k$. Тогда Y_k линейно независимы при всех $t \in J$, и по ним можно разложить X:

$$X=\sum_{i=1}^{n} \varphi^i Y_i. \tag{6}$$

Покажем, что $\varphi^i \in \mathfrak{F}J$. Воспользуемся картой x, определенной в окрестности p, тогда

$$Xx^i=\sum_{i=1}^{n} (Y_i x^j)\varphi^i, \tag{7}$$

и в силу линейной независимости Y_i имеем $\det(Y_i x^j)_{i,\, j=1,\, \ldots,\, n} \neq 0$. Решая систему уравнений (7) относительно φ^i, устанавливаем дифференцируемость φ^i. Из линейности параллельного переноса видно, что $X_{t_0}^{(t)}=\sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t) Y_i|_{t_0}$. С другой стороны, согласно (6), имеем

$$X_{t_0}=\sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t_0) Y_i|_{t_0}.$$

Следовательно, предел в правой части (5) равен $\sum_{i=1}^{n} D\varphi^i|_{t_0} Y_i|_{t_0}$. Из (6) вытекает по правилам ковариантного дифференцирования, что $\nabla_D X$ принимает то же значение при $t=t_0$. Это завершает доказательство.

Замечания

(i) Найдите для заданной в замечании (ii) разд. 2.2 линейной связности с кручением ∇ параллельные поля вдоль прямых $t \to at+b$, $a, b \in \mathbb{R}^3$. Например, параллельное поле Y вдоль прямой $t \to te_3$, удовлетворяющее условию $Y(0)=D_1|_0$, имеет вид $Y(t)=\cos\frac{t}{2} D_1|_{te_3}+\sin\frac{t}{2} D_2|_{te_3}$. Таким образом, при параллельном переносе вектор $Y(0)$ „вращается вокруг пути“.

(ii) Пусть M — дифференцируемое многообразие с линейной связностью ∇, $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение, $Y \in \mathfrak{X}_f$, $v \in TN$. Пусть, далее, $c\colon J \to N$ — произвольный дифференцируемый путь, для которого $\dot{c}(t_0)=v(t_0 \in J)$, и $Y^{(t)}$ — однозначно определенное параллельное векторное поле вдоль $f \circ c$, для которого $Y_t^{(t)}=Y \circ c(t)$. Получите из теоремы 2, что

$$\nabla_v Y=\lim_{t \to t_0} \frac{Y_{t_0}^{(t)}-Y_{c(t_0)}}{t-t_0},$$

Объясните эту формулу в частном случае $N=M$ и $f=\mathrm{id}$. Получите соответствующую формулу для ковариантной производной $\nabla_X B$ тензорного поля B типа (r, s) на M относительно векторного поля $X\in\mathfrak{B}M$ в точке $p\in M$ (см. замечание (iii) разд. 2.3).

(iii) Результат параллельного переноса из M_p в M_q вдоль дифференцируемого пути c, соединяющего p с q, зависит, вообще говоря, от выбора соединяющего пути. Однако, если $R=0$, и только в этом случае, результат параллельного переноса локально не зависит от пути, как это видно из рассуждения, приведенного ниже. В этом случае линейная связность ∇ и многообразие M с этой связностью называются плоскими.

Пусть J — невырожденный замкнутый интервал, H: $[\alpha, \beta]\times J\to M$ — дифференцируемое отображение („гомотопия"), такое, что $H(\alpha, s)=p$, $H(\beta, s)=q$ для всех $s\in J$; H задает, тем самым, дифференцируемое семейство дифференцируемых путей, соединяющих p с q. Пусть $v\in M_p$ и $Y\in\mathfrak{B}_H$ такое векторное поле, что $t\to Y(t, s)$ параллельно вдоль $t\to H(t, s)$ при каждом фиксированном $s\in J$ и $Y(\alpha, s)=v$ при всех $s\in J$. Тогда $\nabla_{D_1}Y|_{t,s}=0$ и $\nabla_{D_2}Y|_{\alpha,s}=0$. Так как при этом $\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}Y|_{t,s}=0$ и $[D_1, D_2]=0$, то из (7) разд. 2.5 в случае $R=0$ вытекает $\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}Y|_{t,s}=0$. Это означает, что $t\to D_2Y|_{t,s}$ параллельно вдоль $t\to H(t, s)$ и, следовательно, $\nabla_{D_2}Y|_{t,s}=0$, поскольку это поле обращается в нуль при $t=\alpha$. В частности, $\nabla_{D_2}Y|_{\beta,s}=0$ и $Y(\beta, s)$ не зависит от s. Заметим теперь, что каждая точка M имеет окрестность в M, диффеоморфную $\mathbb{R}^n$. Пути в такой окрестности, соединяющие p с q, можно деформировать друг в друга описанным выше способом.

Очевидно, в случае $R=0$ параллельный перенос локально не зависит от пути. Обратное утверждение легко получается обращением предыдущего рассуждения. Нахождение топологических условий, при которых на M существует в целом нетривиальная плоская линейная связность, представляет трудную задачу. Обратная задача так же трудна даже при дополнительном предположении $T=0$ (∇ называется в этом случае аффинной связностью).

В общем случае тензор кривизны есть мера зависимости параллельного переноса от пути в окрестности данной точки. Точный смысл этого утверждения виден из следующего построения. Пусть $p\in M$, u, v, $w\in M_p$. Возьмем в $\mathbb{R}^2$ квадрат $Q\{-1<u_1, u_2<1\}$ и построим такое дифференцируемое отображение f: $Q\to M$, что $f(0)=p$, $f_*D_1|_0=u$, $f_*D_2|_0=v$. Для $(t, s)\in Q$ обозначим через $w_{t,s}$ вектор из M_p, который переходит в $w\in M_p$ в результате последовательных параллельных переносов: сначала из p в $f(t, 0)$ вдоль пути $\tau\to f(\tau, 0)$, затем из $f(t, 0)$ в $f(t, s)$ вдоль пути $\sigma\to f(t, \sigma)$,

затем из $f(t, s)$ в $f(0, s)$ вдоль пути $\tau \to f(\tau, s)$ и, наконец, из $f(0, s)$ в p вдоль пути $\sigma \to f(0, \sigma)$. Вектор $w_{t,s}$ получается из w параллельным переносом в обратном направлении. Рассмотрим векторное поле $Y \in \mathfrak{V}_f$, такое, что $\sigma \to Y(0, \sigma)$ параллельно вдоль $\sigma \to f(0, \sigma)$, $Y(0, 0) = w$ и $\tau \to Y(\tau, \sigma)$ параллельно вдоль $\tau \to f(\sigma, \tau)$. Тогда в силу (7) разд. 2.5 имеем $R(u, v)w = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}Y|_0$. Выведите отсюда, что

$$R(u, v)w = \lim_{t, s \to 0} \frac{w_{t,s} - w}{ts},$$

если t и s одновременно стремятся к нулю таким образом, что отношение их заключено между двумя положительными числами. Запись тензора кривизны подсказывает, что каждой паре векторов $u, v \in M_p$ соответствует эндоморфизм $R(u, v)$: $M_p \to M_p$, геометрический смысл которого мы только что выяснили.

(iv) Тензорное поле B типа (r, s) на M называется параллельным, если $\nabla B = 0$. Функции $f \in \mathfrak{F}M$ можно рассматривать как тензоры типа (0, 0), тогда под ∇f следует понимать 1-форму df_0, а параллельные функции на M суть постоянные. Для векторных полей Y тензорное поле ∇Y имеет тип (1,1) и задается формулой $X \to \nabla_X Y$ $(X, Y \in \mathfrak{V}M)$. В общем случае на M не существует параллельных векторных полей, но если выполнено „условие интегрируемости“ $R = 0$, то, согласно (iii), локально существует n линейно независимых параллельных векторных полей. Для канонической связности ∇ некоторой параллелизации на M в качестве таких полей можно взять поля, образующие параллелизацию. Покажите, что в случае канонической линейной связности на группе Ли, заданной левоинвариантной параллелизацией, тензор кручения T параллелен.

Если подставить в параллельный тензор параллельные векторные поля на M, то получается снова параллельное векторное поле или постоянная функция. Докажите аналог этого утверждения для случая, когда подставляются векторные поля, параллельные вдоль некоторого пути на M (см. замечание (ii) разд. 2.5).

(v) Параллельный перенос вдоль кусочно дифференцируемого пути (см. разд. 3.3) определяется естественным образом как последовательный перенос вдоль дифференцируемых отрезков пути. Введем с помощью этого определения глобальную меру зависимости параллельного переноса от пути. Пусть $p \in M$, каждой кусочно дифференцируемой петле с началом и концом в p сопоставляется посредством параллельного переноса автоморфизм $M_p \to M_p$, и композиции путей отвечает композиция автоморфизмов. Все такие автоморфизмы образуют подгруппу полной линейной группы $\mathrm{GL}(M_p)$ всех автоморфизмов M_p, которая называется *группой голономии* M в точке p и обозначается через $\Phi(p)$. Пред-

положим, что M связно. Покажите, что для всех $q \in M$ группа $\Phi(q)$ изоморфна $\Phi(p)$. Если зафиксировать p и отождествить $\mathrm{GL}(M_p)$ с $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, то $\Phi(p)$ становится, как можно показать, даже подгруппой Ли группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (вообще говоря, незамкнутой). Значение группы голономии состоит в том, что структурная группа касательного расслоения может быть сведена к $\Phi(p)$ (см. замечание (v) разд. 1.7 и разд. 1.10), это означает, что вместо $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ можно принять группу $\Phi(p)$ в качестве структурной, если при построении TM (см. разд. 1.10) пользоваться вместо ассоциированных карт расслоения картами, возникающими естественным образом при параллельном перенесении. В общем случае $\Phi(p)$ есть общая линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ или ее подгруппа $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, состоящая из автоморфизмов $\mathbb{R}^n$ с положительным определителем. Если $\Phi(p) = 1$, то в силу (iii) связность ∇ плоская и TM тривиально. Обратно, если линейная связность ∇ плоская, то в силу (iii) параллельный перенос из p в q зависит лишь от гомотопического класса петель, т. е. мы приходим к „гомоморфизму голономии“ φ: $\pi_1(M, p) \to \mathrm{GL}(M_p) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ фундаментальной группы M в общую линейную группу, образом которой является группа голономий $\Phi(p)$. Если M плоско и односвязно, т. е. $\pi_1(M, p) = 1$, то $\Phi(p) = 1$ и M параллелизуемо.

2.7. Геодезические

Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности n; J — невырожденный интервал; c: $J \to M$ — дифференцируемый путь. *Касательным полем* пути c называется касательное векторное поле $\dot{c}$ вдоль c, определенное формулой

$$\dot{c} = c_* D. \tag{1}$$

Путь c называется *регулярным*, если c: $J \to M$ — погружение, т. е. если $\dot{c}(t) \neq 0$ для всех $t \in J$. Пусть J — замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$. Путь c называется *периодическим*, если отображение c можно продолжить до дифференцируемого периодического отображения $\mathbb{R} \to M$ с периодом $\beta - \alpha$.

Пусть ∇ — линейная связность на M. Дифференцируемый путь c на M называется *геодезической*, если его касательное поле $\dot{c}$ параллельно, т. е. удовлетворяет условию

$$\nabla_D \dot{c} = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь x — карта на M с областью определения U; положим $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Так как

$$\dot{c}(x^k) = (c_* D)(x^k) = \left(\sum_{i=1}^{n} D(x^i \circ c) X_i \circ c\right) x^k = D(x^k \circ c),$$

то в силу (2) разд. 2.6 имеем

$$\nabla_D \dot{c}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[DD(x^k \circ c) + \sum_{i,j=1}^{n} D(x^i \circ c) D(x^j \circ c) \Gamma_{ij}^k \circ c \right]_t X_k|_{c(t)},$$

при $c(t) \in U$. Поэтому локально (2) равносильно уравнениям

$$DD(x^k \circ c) + \sum_{i,j=1}^{n} D(x^i \circ c) D(x^j \circ c) \Gamma_{ij}^k \circ c = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Это классические дифференциальные уравнения геодезических.

Согласно известной теореме теории дифференциальных уравнений, для заданных $p \in M$, $v \in M_p$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ локально существует геодезическая, удовлетворяющая условиям $c(t_0) = p$, $\dot{c}(t_0) = v$. Эта геодезическая однозначно определена с точностью до области определения.

В следующих двух разделах мы получим геодезические как проекции интегральных путей некоторого глобально определенного на TM векторного поля S, что приведет нас сразу же к однозначно определенным максимальным геодезическим. При этом будет существенна глобальная „дифференцируемая зависимость решений от начальных значений“, с помощью которой мы сможем доказать дифференцируемость так называемого экспоненциального отображения, соответствующего линейной связности.

Подчеркнем, что система дифференциальных уравнений (3) нелинейна. Решения таких систем, вообще говоря, не могут быть неограниченно продолжены. В то время как параллельный перенос вдоль дифференцируемого пути возможен до тех пор, пока этот путь определен, геодезическая часто не может быть продолжена за пределы некоторого интервала $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, даже если M компактно (см., например, замечание (vi)). Линейная связность ∇ на M называется *полной*, если каждая геодезическая на M, определенная на некотором интервале, может быть продолжена до геодезической, определенной на всей $\mathbb{R}$. Отличительная черта связности Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии M (см. § 3) состоит именно в том, что из компактности или (в более общем случае) метрической полноты M вытекает полнота ∇.

Замечания

(i) Для канонической связности ∇ на $\mathbb{R}^n$ и карты $x = \mathrm{id}$ имеем $\Gamma_{ij}^k = 0$. Поэтому, согласно (3), все геодезические $c: J \to \mathbb{R}^n$ суть прямые $c(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R}^n)$,

(ii) Если для векторного поля $X \in \mathfrak{X}M$ выполнено условие $\nabla_X X = 0$, то каждый интегральный путь c поля X (см. разд. 8.5) есть геодезическая связности ∇. В самом деле $X \circ c = \dot{c} = c_* D$, так что D и X являются c-связанными, поэтому из замечания (iv) разд. 2.5 имеем $0 = (\nabla_X X) \circ c = \nabla_D (X \circ c) = \nabla_D \dot{c}$. В частности, интегральные пути параллельного векторного поля суть геодезические. Если M параллелизуемо и ∇ — каноническая линейная связность параллелизации $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}M$, то все геодезические на M — интегральные пути векторных полей вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha^i X_i$, $\alpha^i \in \mathbb{R}$. В этом случае линейная связность $\bar{\nabla} = \nabla + S$, где S — антисимметрическое тензорное поле типа (2,1) на M, имеет те же геодезические, что ∇, так как $S_D \dot{c} = 0$. Поэтому геодезическими связности ∇ на $\mathbb{R}^3$, введенной в замечании (ii) разд. 2.2, являются те же прямые, что и в замечании (i). Вообще если ∇ — линейная связность на M и S — тензорное поле типа (2,1) на M, то геодезические ∇ совпадают с геодезическими $\nabla + S$ тогда и только тогда, когда S антисимметрично. В частности, для каждой связности ∇ существует связность без кручения с теми же геодезическими, а именно, $\nabla - \frac{1}{2} T$.

(iii) Для связности ∇ на $\mathbb{R}^2$, введенной в замечании (ii) разд. 2.3, дифференциальные уравнения геодезической $c\colon J \to \mathbb{R}^2$ относительно карты $x = \mathrm{id}$ имеют вид

$$\ddot{u} + \dot{u}\dot{v} = 0, \quad \ddot{v} - \dot{u}^2 = 0,$$

где u, v — компоненты c и $\dot{u}$ обозначает Du. Для любой геодезической сумма $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$ постоянна. Если u постоянна, например $u(t) = u_0$, то прямая $u = u_0$, $v = \alpha t + \beta$, параллельная оси v, представляет решение предыдущей системы; v постоянна только для тривиальной геодезической. Используя замечание (ii) можно найти некоторые геодезические. Например, геодезическими являются интегральные пути X_2, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\dot{u} = -\sin u, \quad \dot{v} = \cos u.$$

Некоторые решения этих уравнений можно выразить простыми формулами. При $\dot{u} = 0$, например, получаем прямые $u(t) = k\pi$, $v(t) = (-1)^k t + \beta$, при $\dot{u} \neq 0$ можно указать семейство решений, зависящее от одного действительного и одного целочисленного параметра:

$$u(t) = 2 \operatorname{arctg} e^{(-1)^k t} + k\pi, \qquad \dot{u}(t) = 2(-1)^k \frac{e^{(-1)^k t}}{1 + e^{2(-1)^k t}},$$

$$v(t) = -\log \frac{1 + e^{2(-1)^k t}}{2e^{(-1)^k t}} + \beta, \qquad \dot{v}(t) = (-1)^k \frac{1 - e^{2(-1)^k t}}{1 + e^{2(-1)^k t}},$$

где k — целое и $\beta \in \mathbb{R}$. Координаты $u(t)$, $v(t)$ связаны при этом уравнением

$$v = -\frac{1}{2}\log \sin^2 u + \beta, \quad u \neq k\pi.$$

(iv) Пусть $c\colon J \to M$ — дифференцируемый путь. Тогда касательное поле $\dot{c}$ есть дифференцируемый путь на TM, $\ddot{c}$ — дифференцируемый путь на TTM, и т. д., k-кратная итерация касательного поля $c^{(k)}$ — дифференцируемый путь на $T^{(k)}M$. Путь c периодичен в том и только том случае, если $c^{(k)}$ замкнуты при всех $k \geqslant 0$; c является геодезической в том и только том случае, когда $\ddot{c}_t$ горизонтален при всех $t \in J$. Геодезическая c периодична тогда и только тогда, когда $c(\alpha) = c(\beta)$ и $\dot{c}(\alpha) = \dot{c}(\beta)$ ($J = [\alpha, \beta]$).

По традиции периодические геодезические часто называют „замкнутыми геодезическими“, хотя замкнутость означает обычно лишь $c(\alpha) = c(\beta)$.

(v) Рассмотрим на группе Ли G каноническую связность ∇ относительно левоинвариантной параллелизации. Эта связность не зависит от выбора левоинвариантных полей, задающих параллелизацию, поэтому мы будем называть ее просто левоинвариантной связностью на G. Согласно замечанию (ii), все геодезические связности ∇ суть интегральные пути левоинвариантных полей. Если X — такое поле, $h \in H$ и $c\colon J \to M$ — интегральный путь X, то $L_h \circ c$ также есть интегральный путь X по определению левоинвариантного поля. Обозначим через e единицу G. Если c — интегральный путь поля X, определенный в некотором открытом интервале J, содержащем 0, причем $c(0) = e$, то при t, t_1, $t + t_1 \in J$ путь c удовлетворяет функциональному уравнению $c(t_1 + t) = c(t_1)\,c(t)$. В самом деле, пути $t \to c(t_1 + t)$ и $t \to c(t_1)\,c(t)$ суть интегральные пути поля X, совпадающие при $t = 0$, а поэтому и везде.

Пусть c — максимальный интегральный путь, удовлетворяющий условию $c(0) = e$. Покажем, что его область определения $J = \mathbb{R}$. Действительно, если, например, $J = (\alpha, \beta)$, где $\beta < \infty$, то при $0 < \eta < \beta$ путь $c_1\colon (\alpha + \eta, \beta + \eta) \to G$, заданный формулой $c_1(t) = c(\eta)\,c(t - \eta)$, есть интегральный путь X. Так как $c_1(\eta) = c(\eta)$, то c может быть продолжен вправо от β, вопреки предположению. Итак, все геодезические группы Ли G могут быть продолжены на $\mathbb{R}$ и левоинвариантная связность группы Ли всегда полна.

Одновременно мы установили, что каждая геодезическая $c\colon \mathbb{R} \to G$, удовлетворяющая условию $c(0) = e$, есть гомоморфизм $\mathbb{R}$ в G и, естественно, также инъективное погружение (но, вообще говоря, не вложение; см. замечание (iv) разд. 1.7). Образ c есть одномерная подгруппа Ли группы G, такие подгруппы называются также однопараметрическими. Обратно, каждая однопараметрическая подгруппа G является образом некоторой геодезической.

Образ геодезической $c\colon \mathbb{R} \to G$, удовлетворяющей условию $c(0) = g$, есть левый класс смежности gH подгруппы $H = L_g^{-1} \circ c(\mathbb{R})$. Изучите геодезические групп Ли, приведенных выше в качестве примеров.

(vi) Покажите, что каноническая связность ∇ на $\mathbb{R}^n$ полна на непустом открытом подмножестве $G \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $U = \mathbb{R}^n$. Если ∇ — любая линейная связность на $\mathbb{R}$, то для любых $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ существует геодезическая $c\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям $c(\alpha) = s_1$, $c(\beta) = s_2$. Однако на $\mathbb{R}$ существуют неполные линейные связности, например заданная формулой $\nabla_D D = D$. Рассмотрим дифференцируемое накрытие $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$, заданное формулой $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$. Касательное поле $D \in \mathfrak{X}\mathbb{R}$, очевидно, π-связано с некоторым векторным полем $D_1 \in \mathfrak{X}S^1$. Формула $\nabla_{D_1} D_1 = D_1$ задает линейную связность ∇ на S^1. Никакая нетривиальная геодезическая c_1 этой связности не может быть определена на всей $\mathbb{R}$. В самом деле, $c_1 = \pi \circ c$, где c — геодезическая заданной выше связности ∇ на $\mathbb{R}$, и c не может быть продолжена на $\mathbb{R}$. Таким образом, существуют компактные многообразия с неполной линейной связностью. Сфера S^1 и прямая $\mathbb{R}$ являются даже аффинными многообразиями: для любой связности на них $R = 0$ и $T = 0$.

Постройте пример неполной линейной связности на двумерном многообразии.

2.8. Экспоненциальное отображение струи [1]

Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности n. Векторное поле S на касательном расслоенном пространстве TM называется *струей* на M, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\pi_* \circ S = \mathrm{id}, \tag{1}$$

$$S \circ h_\alpha = \alpha (h_\alpha)_* \circ S \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \tag{2}$$

где h_α — гомотетия, определенная в разд. 2.4, т. е. $h_\alpha(v) = \alpha v$.

Таким образом, для всех $v \in TM$, $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\pi_* S_v = v$, $S_{\alpha v} = \alpha (h_\alpha)_* S_v$. Оказывается, что интегральные пути струи удовлетворяют некоторому функциональному уравнению.

Лемма 1

Усл. *S — струя на M; $v \in TM$; $\Phi_v\colon J \to TM$ — однозначно определенный максимальный интегральный путь векторного поля S, удовлетворяющий условию $\Phi_v(0) = v$ (см. разд. 8.6).*

---

[1] В литературе термин „струя“ часто используется для обозначения объектов иного рода (в подлиннике — *spray*) — *Прим. ред.*

Утв. *Φ_v удовлетворяет соотношениям:*

$$\Phi_{sv}(t) = s\Phi_v(st) \quad (s \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

$$\widehat{\pi \circ \Phi_v} = \Phi_v. \tag{4}$$

Док. Чтобы доказать (3), рассмотрим путь $\Psi\colon J \to TM$, заданный формулой $\Psi(t) = s\Phi_v(st)$. Тогда $\dot{\Psi}(t) = \Psi_* D_t = (s\Phi_v)_*(sD_{st}) = s(s\Phi_v)_* D_{st} = s(h_s \circ \Phi_v)_* D_{st} = s(h_s)_* \circ (\Phi_v)_* D_{st} = s(h_s)_* \dot{\Phi}_v(st) = s(h_s)_* S \circ \Phi_v(st) = S \circ \Psi(t)$.

Таким образом, Ψ есть интегральный путь S. Так как при этом $\Psi(0) = s\Phi_v(0) = sv = \Phi_{sv}(0)$, то Ψ и Φ_{sv} совпадают. Соотношение (4) доказывается следующим образом: $\widehat{\pi \circ \Phi_v} = \pi_* \circ S \circ \Phi_v = \dot{\Phi}_v$.

Пусть S — струя на M. Согласно лемме из разд. 8.6, существуют такое открытое множество $W \subset \mathbb{R} \times TM$ и такое дифференцируемое отображение $\Phi(t, v)\colon W \to TM$, что для каждого $v \in TM$ множество $J_v = \{t\colon (t, v) \in W\}$ представляет собой открытый интервал и отображение $\Phi(t, v)|_{J_v}\colon J_v \to TM$ есть максимальный интегральный путь Φ_v векторного поля S, удовлетворяющий условию $\Phi_v(0) = v$:

$$\Phi(t, v) = \Phi_v(t). \tag{5}$$

Обозначим через $\widetilde{W}$ подмножество W, состоящее из всех точек (t, v), для которых $J_v \supset [0, 1]$. Обозначим через pr естественную проекцию $\widetilde{W}$ на второй сомножитель и положим $\widetilde{TM} = \mathrm{pr}(\widetilde{W})$, $\widetilde{TM} \subset TM$. Ясно, что $\widetilde{TM}$ — открытое подмножество TM. Покажем, что вместе с каждым вектором v $\widetilde{TM}$ содержит все векторы τv, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. В самом деле, согласно (3), при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ интегральный путь $\Phi_{\tau v}$ может быть определен, во всяком случае на интервале J_v, с помощью равенства

$$\Phi_{\tau v}(t) = \tau\Phi_v(\tau t) \quad (t \in J_v).$$

В частности,

$$\tau\Phi_v(\tau) = \Phi_{\tau v}(1) \tag{6}$$

при $v \in \widetilde{TM}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Из только что доказанного вытекает, что $\widetilde{M}_p = \widetilde{TM} \cap M_p$ представляет собой звездообразную окрестность нулевого вектора $0_p \in M_p$ для каждой точки $p \in M$.

Определим теперь *экспоненциальное отображение* $\exp\colon \widetilde{TM} \to M$ струи S по формуле

$$\exp(v) = \pi \circ \Phi(1, v), \tag{7}$$

где $v \in \widetilde{TM}$. Очевидно, это отображение дифференцируемо, поскольку дифференцируемы π и Φ. Часто рассматривают также отображение $\exp_p$: $\widetilde{M}_p \to M$, заданное формулой

$$\exp_p = \exp|_{\widetilde{M}_p}; \tag{8}$$

таким образом, $\exp_{\pi(v)}^{\cdot}(v) = \exp v$ для $v \in \widetilde{TM}$. Отображение $\exp_p$ называется экспоненциальным отображением в точке p и дифференцируемо вместе с exp.

Теорема 1

Усл. *S — струя на M; exp — экспоненциальное отображение струи S.*

Утв. *Для каждой точки $p \in M$ справедливы следующие предложения:*

(a) exp *имеет в точке* $0_p \in TM$ *максимальный ранг* $(= n)$;

(b) $\exp_p$ *имеет в точке* p *максимальный ранг* $(= n)$ *и обратимо в некоторой окрестности точки* $0_p \in M_p$;

(c) *отображение* $\pi \times \exp$: $\widetilde{TM} \to M \times M$ *имеет в точке* 0_p *максимальный ранг и обратимо в некоторой окрестности точки* 0_p *относительно* TM.

Док. Пусть ι: $\widetilde{M}_p \subset TM$ — включение. Построим для $v \in M_p$ дифференцируемые пути φ: $J_v \to \widetilde{M}_p$ и c: $J_v \to M$ по формулам

$$\varphi(t) = tv, \quad c = \exp \circ \iota \circ \varphi. \tag{9}$$

Тогда имеем

$$\dot{c}(0) = \exp_* \circ \iota_* \circ \varphi_* D_0 = \exp_* \circ \iota_* \circ I_{0_p} v, \tag{10}$$

где I_{0_p}: $M_p \to (M_p)_{0_p}$ — канонический изоморфизм (см. (5) разд. 1.4). Обозначая по-прежнему через Φ_v максимально определенный интегральный путь поля S, удовлетворяющий условию $\Phi_v(0) = v$, с помощью (6), (7) и (9) получаем, что

$$c(t) = \pi \circ \Phi_v(t) \tag{11}$$

для $t \in J_v$, откуда

$$\dot{c}(0) = \pi_* \circ \dot{\Phi}_v(0) = \pi_* S \circ \Phi_v(0) = \Phi_v(0) = v. \tag{12}$$

Сопоставляя (10) и (12), получаем

$$\exp_* \circ \iota_* \circ I_{0_p} v = v \tag{13}$$

для $v \in M_p$.

Доказательство утверждения (a) сразу же следует из (13).

Для доказательства (b) заметим, что $(\exp_p)_* = (\exp \circ \iota)_* = \exp_* \circ \iota_*$, поэтому из (13) следует, что $\exp_p$ имеет максимальный ранг

в точке 0_p. Так как $\dim M_p = \dim M$, утверждение следует из теоремы обращения.

Переходим к доказательству (c). Пусть x — карта, определенная в окрестности p, $\bar{x}$ — ассоциированная карта расслоения на TM. Положим $X_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $A_k = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^k}$ $(k = 1, \ldots, 2n)$. Введем произведение карт $z = x \times x$ на $M \times M$ в окрестности точки $(p, p) = (\pi(0_p), \exp(0_p))$ (см. разд. 1.7). Полагая

$$Z_k = \frac{\partial}{\partial z^k} \quad (k = 1, \ldots, 2n),$$

с помощью (2) разд. 1.4 получаем

$$(\pi \times \exp)_* A_k |_{0_p} = \sum_{j=1}^{2n} A_k |_{0_p} (z^j \circ (\pi \times \exp)) Z_j |_{(p, p)}. \tag{14}$$

Очевидно, $z^j \circ (\pi \times \exp) = x^j \circ \pi$ и $z^{n+j} \circ (\pi \times \exp) = x^j \circ \exp$ $(j = 1, \ldots, n)$. В силу (1) разд. 1.10 имеем $x^j \circ \pi = \bar{x}^j$ $(j = 1, \ldots, n)$, а поэтому

$$A_k |_{0_p} (x^j \circ \pi) = \delta_k^j \quad (j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, 2n). \tag{15}$$

Как мы покажем далее, имеет место

$$A_{n+k} |_{0_p} (x^j \circ \exp) = \delta_k^j \quad (j, \ k = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

В самом деле, рассмотрим пути φ_k: $\mathbb{R} \to M_p$, заданные формулой $\varphi_k(t) = tX_k |_p$. Тогда $(\iota \circ \varphi_k)_* D_0 = \sum_{j=1}^{2n} D_0 (\bar{x}^j \circ \iota \circ \varphi_k) A_j |_{0_p} = A_{n+k} |_{0_p}$, так как $\bar{x}^j \circ \iota \circ \varphi_k(t) = x^j(p)$ и

$$\bar{x}^{n+l} \circ \iota \circ \varphi_k(t) = tX_k |_p \, x^l = t\delta_k^l \quad (j = 1, \ldots, n).$$

С другой стороны, $(\iota \circ \varphi_k)_* D_0 = \iota_* \circ I_{0_p} X_k |_p$, откуда $A_{n+k} |_{0_p} = \iota_* \circ I_{0_p} X_k |_p$, и получаем из (13)

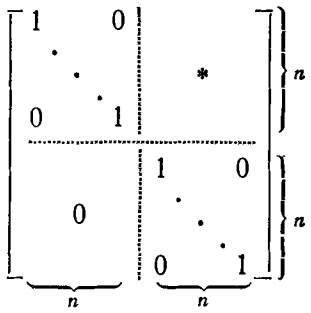
$$\exp_* A_{n+k} |_{0_p} = X_k |_p. \tag{17}$$

Более того, согласно (2) разд. 1.4, имеем

$$\exp_* A_{n+k} |_{0_p} = \sum_{j=1}^{n} A_{n+k} |_{0_p} (x^j \circ \exp) X_j |_p$$

и, сравнивая с разложением (17), получаем утверждение (16). В силу (14) — (16) матрица линейного отображения $(\pi \times \exp)_{*0_p}$ от-

носительно базисов $A_1|_{0_p}, \ldots, A_{2n}|_{0_p}$ соответственно $Z_1|_{(p,p)}, \ldots$ $\ldots, Z_{2n}|_{(p,p)}$, имеет вид



и поэтому имеет наивысший ранг ($=2n$). Для завершения доказательства (c) остается применить теорему обращения.

Из (17) опять же следует, что exp имеет максимальный ранг в точке 0_p.

В следующей теореме рассматривается „глобальное" поведение отображения $\pi \times \exp$ в окрестности подмногообразия $0(M) \subset \widetilde{TM}$.

Теорема 2

Усл. *S — струя на M*; exp — *экспоненциальное отображение струи S*; 0: $M \to TM$ — *нулевое сечение.*

Утв. *Существует такая окрестность $U \subset \widetilde{TM}$ дифференцируемого подмногообразия $0(M) \subset \widetilde{TM}$, что отображение $(\pi \times \exp)|_U$: $U \to M \times M$ есть диффеоморфизм U на некоторую окрестность диагонали в $M \times M$.*

Док. Доказательство получается из теоремы 1 и простых топологических соображений. Согласно утверждению (c) теоремы 1, у каждой точки $0_p \in TM$ найдется окрестность $G_p \subset \widetilde{TM}$, на которой отображение $\pi \times \exp$ гомеоморфно. Тогда открытое множество $G = \bigcup_{p \in M} G_p$ содержится в $\widetilde{TM}$, содержит $0(M)$, и $\pi \times \exp|_G$ локально гомеоморфно, в то время как $\pi \times \exp|_{0(M)}$ инъективно. Представим M, как и в доказательстве теоремы 8.2, в виде объединения возрастающей последовательности компактных множеств C_i ($i = 1, 2, \ldots$) так, чтобы C_i состояло из внутренних точек C_{i+1}. Положим $A_i = 0(C_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$), $A_0 = \varnothing$, $B_i = C_i \times C_i \subset M \times M$ ($i = 1, 2, \ldots$). Построим по индукции после-

довательность открытых множеств с компактными замыканиями $U_i \subset G$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, обладающих следующими свойствами:

(a) $U_i \supset \bar{U}_{i-1}$.

(b) $U_i \supset A_i$.

(c) Множество $\pi(\bar{U}_i) \cup \exp(\bar{U}_i)$ состоит из внутренних точек C_{i+1}.

(d) Отображение $\pi \times \exp|_{\bar{U}_i \cup 0(M)}$ инъективно.

Положим $U_0 = \varnothing$. Пусть $U_1, \ldots, U_i$ уже построены и обладают свойствами (a) – (d). Поскольку $\bar{U}_i \cup A_{i+2}$ компактно, в силу доказываемой ниже леммы 2 существует такое открытое в G множество $V_{i+1} \supset (\bar{U}_i \cup A_{i+2})$, на котором $\pi \times \exp$ инъективно. Далее,

$$(\pi \times \exp)(\bar{U}_i \cup A_{i+1}) \subset B_{i+1}. \tag{18}$$

Следовательно, компактное множество, стоящее в левой части (18), состоит из внутренних точек B_{i+2}. Поэтому существует такое открытое в G множество W_{i+1}, что $\bar{W}_{i+1}$ компактно, $(\pi \times \exp)(\bar{W}_{i+1})$ состоит из внутренних точек B_{i+2} и $W_{i+1} \supset (\bar{U}_i \cup A_{i+1})$. Положим $U_{i+1} = V_{i+1} \cap W_{i+1}$. Тогда $\pi \times \exp$ инъективно на $U_{i+1} \cup A_{i+2}$, причем значения отображения на этом множестве не могут совпадать с его значениями на $0(M) \setminus A_{i+2}$. Поэтому $\pi \times \exp$ инъективно на $U_{i+1} \cup 0(M)$ и построение по индукции окончено. Требуемая в теореме окрестность U подмногообразия $0(M)$ есть $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Лемма 2

Усл. *M, N — хаусдорфовы пространства со счетной базой; M локально компактно; $f\colon M \to N$ локально гомеоморфно; $A \subset M$ — компактное подмножество; $f|_A$ инъективно.*

Утв. *Существует такое открытое в M множество $V \supset A$, что $f|_V$ инъективно.*

Док. Построим убывающую последовательность открытых множеств с компактными замыканиями V_n, $n = 1, 2, \ldots$, пересечением которых является A. Предположим, что $f|_{V_n}$ не инъективно ни при каком n. Тогда для каждого n существуют такие различные точки p_n, $q_n \in V_n$, что $f(p_n) = f(q_n)$. Для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$ получаем предельные точки p, $q \in A$. Если $p \neq q$, то в силу инъективности $f|_A$ имеем $f(p) \neq f(q)$, отсюда при достаточно большом n получаем $f(p_n) \neq f(q_n)$, что невозможно. Если же $p = q$, то существует такая окрестность $V(p)$ точки p, что $f|_{V(p)}$ инъективно в силу локальной гомеоморфности f. Но тогда при некотором n имеет место p_n, $q_n \in V(p)$, что также ведет к противоречию.

Таким образом, для некоторого n отображение $f|_{V_n}$ инъективно, что и доказывает лемму.

Замечания

(i) Покажите, что $\pi \times \exp$ имеет максимальный ранг $(=2n)$ в точке $v \in \widetilde{TM}$, если $\exp_{\pi(v)}$ имеет максимальный ранг $(=n)$ в точке v.

(ii) Покажите, что окрестность U в теореме 2 может быть построена так, что при всех $p \in M$ множество $U \cap M_p$ будет звездообразно. Тем самым $\Delta = (\pi \times \exp)(U)$ есть окрестность диагонали в $M \times M$, ретрагируемая „по радиусам" на диагональ.

2.9. Геодезическая струя линейной связности

Мы получим теперь геодезические линейной связности на M проектированием интегральных кривых некоторой струи.

Теорема

Усл. *M — дифференцируемое многообразие, ∇ — линейная связность на M с отображением связности K.*

Утв. *На M существует одна и только одна горизонтальная струя S, т. е. такая, что*

$$KS_v = 0_{\pi(v)}$$

для всех $v \in TM$.

S называется *геодезической струей* линейной связности ∇.

Док. Согласно 2.4, отображение $\pi_* \times K$: $TTM \to TM \times TM$ индуцирует для каждого вектора $w \in TM$ изоморфизм $(TM)_w \to M_{\pi(w)} \times M_{\pi(w)}$. Поэтому для каждого $v \in TM$ существует один и только один вектор $S_v \in (TM)_v$, удовлетворяющий условиям

$$\pi_* S_v = v, \quad KS_v = 0_{\pi(v)}. \tag{1}$$

Определенное таким образом отображение S: $TM \to TTM$ есть, очевидно, сечение расслоения TTM. Ниже мы проверим, что это сечение дифференцируемо. Покажем сначала, что S удовлетворяет условиям (1) и (2) разд. 2.8. Условие (1) выполнено по самому построению S. Чтобы доказать (2), достаточно в силу разд. 2.4 проверить соотношения

$$\pi_* \circ (S \circ h_a) = \pi_* \circ (a(h_a)_* S), \tag{2}$$

$$K \circ (S \circ h_a) = K \circ (a(h_a)_* S). \tag{3}$$

Доказательство (2). Так как $\pi \circ h_a = \pi$, то для $v \in TM$ имеем

$$\pi_* a(h_a)_* S_v = a\pi_* (h_a)_* S_v = a(\pi \circ h_a)_* S_v = a\pi_* S_v = av = \pi_* S_{av} = \pi_* (S \circ h_a(v)).$$

Доказательство (3). В силу (1) левая часть (3) равна

$$K(S \circ h_a)\, v = 0_{\pi(av)} = 0_{\pi(v)};$$

правая же часть (3), согласно (21) разд. 2.4, равна

$$K(a(h_a)_*\, S)\, v = a(K \circ (h_a)_*)\, S_v = a h_a (K S_v) = 0_{\pi(v)}.$$

Остается проверить, что S дифференцируемо. Для этой цели мы построим локальное представление S. Пусть U — область определения некоторой карты x на M, $\bar{x}$ — ассоциированная карта расслоения на TU, $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $A_k = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^k}$ $(k = 1, \ldots, 2n)$.

Для v и S_v получаем представления

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, X_i|_{\pi(v)} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^{n+i}(v)\, X_i|_{\pi(v)}, \quad S_v = \sum_{k=1}^{2n} a^k(v)\, A_k|_v,$$

где $v \in TU$. Так как $\pi_* S_v = v$, из (10) разд. 2.4 следует, что $a^i = \bar{x}^{n+i}$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, в силу условия $K S_v = 0_{\pi(v)}$ из (11) разд. 2.4 следует

$$a^{n+k} = -\sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}^{n+i} \bar{x}^{n+j} \Gamma_{ij}^k \circ \pi, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Таким образом, имеем

$$S|_{TU} = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}^{n+k} A_k - \sum_{i,j,k=1}^{n} (\bar{x}^{n+i} \bar{x}^{n+j} \Gamma_{ij}^k \circ \pi)\, A_{n+k}, \tag{5}$$

откуда, очевидно, следует дифференцируемость S.

Геометрический смысл геодезической струи выражается следующей леммой.

Лемма

Усл. *∇ — линейная связность на M; S — геодезическая струя связности ∇.*

Утв. *Путь $c\colon J \to M$ тогда и только тогда является геодезической, когда существует такой интегральный путь $\varphi\colon J \to TM$ геодезической струи S, что*

$$c = \pi \circ \varphi \tag{6}$$

и

$$\dot{c} = \varphi. \tag{7}$$

Док. Пусть $c\colon J \to M$ — геодезическая. Тогда, согласно определению линейной связности вдоль пути (см. разд. 2.5) и (2) разд. 2.7, имеем

$$\nabla_D \dot{c} = K(\dot{c}_* D) = 0. \tag{8}$$

Так как $\pi \circ \dot{c} = c$, имеем, кроме того,

$$\pi_*(\dot{c}_* D) = (\pi \circ \dot{c})_* D = c_* D = \dot{c}. \tag{9}$$

По определению геодезической струи из (8) и (9) следует $\dot{c}_* D = S \circ \dot{c}$, т. е. $\dot{c}$ есть интегральный путь S. Поскольку $c = \pi \circ \dot{c}$, первая часть утверждения доказана.

Пусть, обратно, φ: $J \to TM$ — интегральный путь S, тогда

$$\widehat{\pi \circ \varphi} = \pi_* \circ \dot{\varphi} = \pi_* \circ S \circ \varphi = \varphi,$$

и поэтому

$$\nabla_D (\widehat{\pi \circ \varphi}) = \nabla_D \varphi = K \varphi_* D = K \dot{\varphi} = KS\varphi = 0,$$

т. е. $\pi \circ \varphi$ есть геодезическая.

Согласно разд. 8.6, для каждой точки $v \in TM$ и каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует один и только один максимальный интегральный путь φ: $J \to TM$, удовлетворяющий условию $\varphi(t_0) = v$. Тогда, согласно лемме, для каждой точки $p \in M$, $v \in M_p$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ существует одна и только одна максимальная геодезическая c: $J \to M$, удовлетворяющая условиям $c(t_0) = p$ и $\dot{c}(t_0) = v$ (возьмите интегральный путь φ, для которого $\varphi(t_0) = v$, и положите $c = \pi \circ \varphi$).

В дальнейшем exp: $\widetilde{TM} \to M$ везде означает экспоненциальное отображение геодезической струи некоторой линейной связности на M. Поскольку это отображение однозначно определяется связностью ∇, оно называется также экспоненциальным отображением связности ∇. Следующие три высказывания эквивалентны: ∇ полна; S полна; отображение exp определено на всем TM (см. разд. 2.7 и 8.8). Из (6) и (7) разд. 2.8 следует, что

$$\exp(tv) = \pi \circ \Phi_v(t), \tag{10}$$

где $v \in TM$ и Φ_v: $J \to TM$ — максимально определенный интегральный путь S, удовлетворяющий условию $\Phi_v(0) = v$. Тогда путь c: $J \to M$, заданный формулой

$$c(t) = \exp(tv), \tag{11}$$

есть, согласно лемме, однозначно определенная максимальная геодезическая, удовлетворяющая условиям $c(0) = \pi(v)$ и $\dot{c}(0) = v$. Таким образом, экспоненциальное отображение позволяет „линеаризировать“ все исходящие из точки $p \in M$ геодезические.

Замечания

(i) Экспоненциальное отображение канонической линейной связности ∇ на $\mathbb{R}^n$ задается формулой $\exp_p v = p + a$, где $v = \sum_{i=1}^{n} a^i D_i|_p$.

(ii) Термин „экспоненциальное отображение" объясняется следующим характерным частным случаем.

Пусть G — группа Ли с единичным элементом e и левоинвариантной связностью ∇. Согласно замечанию (v) разд. 2.7, определено отображение $\exp_e$: $G_e \to G$, являющееся на каждом одномерном подпространстве G_e гомоморфизмом, т. е. удовлетворяющее для всех $v \in G_e$, $t, t_1 \in \mathbb{R}$ функциональному уравнению $\exp((t_1 + t)v) = \exp(t_1 v)\exp(tv)$. Однако, в общем случае $\exp_e$ не является гомоморфизмом на всем G_e (рассматриваемом как аддитивная группа). Обозначим через $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ векторное $\mathbb{R}$-пространство всех действительных n-рядных матриц, тогда $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ есть открытое подмножество $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, и тем самым, G_e канонически изоморфно $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Обычное экспоненциальное отображение $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ определяется для матриц $\alpha \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ формулой $e^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$, поэтому мы получаем дифференцируемое отображение $G_e \to G$, удовлетворяющее на каждом одномерном линейном подпространстве тому же функциональному уравнению, что и $\exp_p$. Согласно замечанию (v) разд. 2.7, оба отображения должны совпадать, т. е. $\exp_e$ на полной линейной группе задается экспоненциальной функцией от матрицы. В случае $n = 1$ группа G есть мультипликативная группа $\mathbb{R}^*$ действительных чисел, не равных нулю, $G_1 \cong \mathbb{R}$, а функция $\exp_1$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ есть обычная действительная показательная функция $\exp_1(t) = e^t$, изоморфно отображающая $\mathbb{R}$ на мультипликативную группу положительных чисел. Таким образом, $t \to e^t$ есть геодезическая на $\mathbb{R}$.

Найдите $\nabla_D D$ для инвариантной связности ∇ на $\mathbb{R}^*$.

(iii) Экспоненциальное отображение $\exp_p$ линейной связности ∇ на M для точки p, вообще говоря, не инъективно, а также не везде имеет максимальный ранг. Даже если M связно и ∇ полна, так что $\tilde{M}_p = M_p$, отображение $\exp_p$ не обязательно сюръективно. Сюръективность не является обязательной даже в случае, если ∇ — левоинвариантная связность связной группы Ли. Например рассмотрите компоненту связности единицы $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ в группе $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ и покажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

не принадлежит образу $\exp_e$.

Можно, однако, показать, что если группа Ли G связна и компактна, то $\exp_e$: $G_e \to G$ сюръективно.

ЛИТЕРАТУРА К § 2

Dombrowski P., On the geometry of the tangent bundle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **210** (1962), 73—88.

Kobayashi S. and Nomizu K., Foundations of differential geometry I, Interscience Publishers (1963), New York — London.

Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., 1967.

Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., 1960.

§ 3. Римановы многообразия

3.1. Определение риманова многообразия

Предположим, что на дифференцируемом многообразии M определено тензорное поле g типа (2, 0), т. е. билинейное отображение g: $\mathfrak{B}M \times \mathfrak{B}M \to \mathfrak{F}M$ над кольцом $\mathfrak{F}M$. Если g удовлетворяет условиям

$$g(X, Y) = g(Y, X), \tag{1}$$

$$g(X, X)|_p > 0 \tag{2}$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{B}M$ и для всех p, где $X_p \neq 0$, то g называется *основным тензором*, или *метрическим тензором* на M. *Римановым многообразием* называется объект, состоящий из дифференцируемого многообразия и заданного на нем метрического тензора. Условие (1) выражает симметричность метрического тензора, условие (2) — его положительную определенность. Вместо $g(X, Y)$ мы будем большею частью пользоваться записью $\langle X, Y\rangle$. Согласно (1) разд. 2.3, для каждой точки $p \in M$ мы получим билинейную форму $\langle\ ,\ \rangle$ на векторном $\mathbb{R}$-пространстве M_p, полагая $\langle v, w\rangle = \langle X, Y\rangle_p$, где $v, w \in M_p$ и $X, Y \in \mathfrak{B}M$ — такие векторные поля, для которых $X_p = v$, $Y_p = w$. В силу (1) и (2) этим задается внутреннее (скалярное) произведение на M_p. В частности, мы получаем на M_p норму $\|\ \|$: $M_p \to \mathbb{R}$ и евклидову метрику ρ: $M_p \times M_p \to \mathbb{R}$ с помощью формул $\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$, $\rho(v, w) = \|v - w\|$. Касательное пространство M_p с заданной на нем метрикой ρ есть евклидово векторное пространство. Метрический тензор g на дифференцируемом многообразии M называется также *римановой метрикой касательного расслоения* TM, так как g индуцирует евклидову метрику на каждом слое M_p. Метрический тензор на M называется еще *римановой метрикой на* M. Существенно при этом, что „риманова метрика касательного расслоения“ не есть „риманова метрика на расслоенном пространстве TM“; ее задание равносильно заданию римановой метрики на M. Ниже мы увидим, как на дифференцируемом многообразии TM может быть построена риманова метрика, исходя из метрического тензора на M. Важно отметить, что внутреннее произведение „дифференцируемым образом зависит от p“, т. е. отображение

$p \to \langle X_p, Y_p \rangle$ дифференцируемо для любых дифференцируемых векторных полей на M, что вытекает непосредственно из определения тензора. Риманова геометрия есть обобщение евклидовой геометрии, так как задание римановой метрики означает задание на дифференцируемом многообразии дифференцируемым образом зависящей от точки евклидовой структуры.

Для каждой точки p определим функцию $\measuredangle: M_p^0 \times M_p^0 \to [0, \pi]$, где $M_p^0 = M_p \setminus \{0\}$, формулой

$$\cos \measuredangle (v, w) = \frac{\langle u, w \rangle}{\| v \| \cdot \| w \|}. \tag{3}$$

Функция $\measuredangle (v, w)$ называется (не ориентированным) *углом* между v, $w \in M_p^0$. Векторы v, $w \in M_p$ называются *ортогональными*, если $\langle v, w \rangle = 0$, или, что то же самое, $\measuredangle (v, w) = \frac{\pi}{2}$ $(v, w \in M_p^0)$. Если c_1, c_2: $J \to M$ — дифференцируемые пути,

$$t_0 \in J, \ c_1(t_0) = c_2(t_0) \text{ и } \dot{c}_1(t_0) \neq 0, \ \dot{c}_2(t_0) \neq 0,$$

то угол $\measuredangle (\dot{c}_1(t_0), \dot{c}_2(t_0))$ называется *углом пересечения* путей c_1, c_2 в t_0.

Пусть x — карта на M с областью определения U и $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{V}U$. Тогда векторные поля X, $Y \in \mathfrak{V}U$ представляются в виде $X = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{n} \psi^j X_j$, где $\varphi^i, \psi^j \in \mathfrak{F}U$. Из билинейности g вытекает представление $\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi^i \psi^j g_{ij}$, функции $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle \in \mathfrak{F}U$ называются компонентами тензора g относительно карты x.

Определим для тензоров ω_1, ω_2 типа $(r, 0)$ и $(s, 0)$ соответственно *тензорное произведение* $\omega_1 \otimes \omega_2$, т. е. $(r+s)$-форму, заданную формулой

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s) = \omega_1(X_1, \ldots, X_r)\, \omega_2(Y_1, \ldots, Y_s),$$
$$X_i, Y_j \in \mathfrak{V}M, \ i = 1, \ldots, r, \ j = 1, \ldots, s.$$

Тогда, обозначая тензорное поле $g|_U$ через ds^2, можно представить его в виде

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Обозначение ds^2, все еще употребляемое, указывает на то, что вдоль дифференцируемого пути g равно квадрату дифференциала

длины дуги (см. разд. 3.3), что связано, таким образом, с фундаментальным для всей римановой геометрии понятием. Тензор g называется также „первой основной формой" риманова многообразия M (есть еще „вторая основная форма", определяемая, однако, не внутренним образом, а как характеристика погружения в некоторое другое риманово многообразие, см. разд. 3.7).

Замечания

(i) Пусть M есть n-мерное параллелизуемое многообразие, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{B}M$ — параллелизация. Тогда условие $g(X_i, X_j)|_p = \delta_{ij}$ (для всех p) задает на M риманову метрику g. Если M — группа Ли, то для левоинвариантной параллелизации получаем левоинвариантную риманову метрику. В частном случае $M = \mathbb{R}^n$, $X_i = D_i$ такая метрика называется *канонической*.

(ii) Пусть M, N — римановы многообразия с метрическими тензорами g_1, g_2. Тогда на дифференцируемом многообразии $M \times N$ естественным образом вводится метрический тензор g, определяющий на нем произведение римановых метрик g_1, g_2. Положим для этого

$$g(X, Y) = g_1(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + g_2(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y),$$

где π_1, π_2 — проекции на M, N и $X, Y \in \mathfrak{B}(M \times N)$. В силу канонического изоморфизма $(M \times N)_{(p, q)} \cong M_p \times N_q$ метрика g индуцирует в $(M \times N)_{(p, q)}$ произведение евклидовых метрик, заданных тензором g_1 в M_p и тензором g_2 в N_q. Метрика g обозначается также через $g_1 \times g_2$.

3.2. Изометрические отображения

Рассмотрим теперь соответствующие классу римановых многообразий отображения, согласованные с римановой структурой. Пусть M, N — римановы многообразия, $f\colon M \to N$ — дифференцируемое отображение; f называется *изометрическим отображением*, если для всех $p \in M$ и всех $(v, w) \in M_p$ имеет место

$$\langle v, w\rangle = \langle f_* v, f_* w\rangle. \tag{1}$$

Очевидно, каждое изометрическое отображение является погружением. Если множество точек M содержится во множестве точек N и включение $\iota\colon M \subset N$ есть изометрическое вложение, то M называется *римановым подмногообразием* N. Изометрический диффеоморфизм называется также *изометрией*.

Пусть $f\colon M \to N$ — дифференцируемое отображение и B — тензорное поле типа (r, s) на N. Тогда f индуцирует на M тензорное поле f^*B того же типа по формуле

$$(f^*B)(X_1, \ldots, X_r) = B(f_*X_1, \ldots, f_*X_r),$$

где $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{B}M$. Если g — метрический тензор на N и f — погружение, то f^*g — однозначно определенный метрический тензор на M, по отношению к которому отображение f изометрично. В самом деле, f^*g симметричен по определению, а положительная определенность f^*g следует из соответствующего свойства g в силу инъективности f_{*p} для любого $p \in M$; f^*g называется римановой метрикой на M, *индуцированной* отображением f.

Если M, N — римановы многообразия с метрическими тензорами $\tilde{g}$, g и отображение f: $M \to N$ изометрично, то $\tilde{g} = f^*g$. В частности, на дифференцируемом подмногообразии M риманова многообразия N существует одна и только одна риманова метрика, превращающая M в римановó подмногообразие.

Теорема

Утв. *На каждом дифференцируемом многообразии M существует метрический тензор g.*

Док. Для каждой точки $q \in M$ построим карту x_q с областью определения $Uq \ni q$; x_q есть вложение U_q в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, индуцирует из канонической метрики $\mathbb{R}^n$ некоторый метрический тензор $\tilde{g}_q$ на U_q. Теперь локально определенные метрические тензоры $\tilde{g}_q$ „склеиваются“ с помощью разложения единицы в глобальную риманову метрику. Пусть $(\varphi_q)_{q \in M}$ — дифференцируемое разложение единицы, для которого $\operatorname{Supp} \varphi_q \subset U_q$ (см. разд. 8.3). Определим g_q: $\mathfrak{B}M \times \mathfrak{B}M \to \mathfrak{F}M$, полагая $g_q(X, Y)|_p = \varphi_q(p)\, \tilde{g}_q(X_p, Y_p)$ при $p \in U_q$ и $g_q(X, Y)|_p = 0$ в остальных точках. Положим, наконец, $g = \sum\limits_{q \in M} g_q$. Как легко видеть, g есть метрический тензор на M.

Замечания

(i) Рассмотрим $\mathbb{R}^k$ с каноническим метрическим тензором $\langle\ ,\ \rangle$ и n-мерное дифференцируемое подмногообразие M с включением ι: $M \subset \mathbb{R}^k$. Тогда ι индуцирует метрический тензор g на M. Пусть x: $U \to \mathbb{R}^n$ — карта на M и $z = x^{-1} = \iota \circ x^{-1}$ — локальная параметризация M, $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, g_{ij} — компоненты g относительно карты x. Тогда $g_{ij} = \langle \iota_* X_i, \iota_* X_j \rangle$ и, согласно (2) разд. 1.4, $\iota_* X_i = \sum\limits_{l=1}^{k} X_i(z^l)\, D_l \circ \iota$, а значит, и $\iota_* X_i \circ z = \sum\limits_{l=1}^{k} D_i z^l D_l \circ z$. Так как $\langle D_l, D_m \rangle = \delta_{lm}$, имеем

$$g_{ij} \circ z = \sum_{l=1}^{k} D_i z^l D_j z^l.$$

Например, в случае $\iota\colon S^n_\rho \subset \mathbb{R}^{n+1}$ мы получаем каноническую риманову метрику на S^n_ρ. Для карты на верхней полусфере H_+, заданной с помощью формулы $x(u^1, \ldots, u^{n+1}) = (u^1, \ldots, u^n)$ (см. замечание (iii) разд. 1.3), имеем

$$g_{ij} \circ z(v) = \delta_{ij} + \frac{v^i v^j}{\rho^2 - \|v\|^2} \text{ или } g_{ij}(u) = \delta_{ij} + \frac{u^i u^j}{(u^{n+1})^2}.$$

(ii) Рассмотрим римановы многообразия M, N с метрическими тензорами g_1, g_2 и дифференцируемое отображение $f\colon M \to N$. Вложение $F\colon M \to M \times N$, определенное формулой $F(p) = (p, f(p))$, индуцирует метрикой $g_1 \times g_2$ на $M \times N$ (см. замечание (ii) разд. 3.1) новый метрический тензор на M:

$$g(X, Y) = g_1(X, Y) + g_2(f_*X, f_*Y),$$

где $X, Y \in \mathfrak{B}M$; F по отношению к g есть изометрическое отображение M на график f, т. е. на риманово подмногообразие $F(M) \subset M \times N$ (ср. замечание (ii) разд. 1.7). Если, в частности, $N = \mathbb{R}$ и g_2 — каноническое отображение, то $g(X, Y) = g_1(X, Y) + Xf \cdot Yf$; если, кроме того, M — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ с канонической метрикой, то для карты $x = \mathrm{id}$ имеем $g_{ij} = \delta_{ij} + D_i f \cdot D_j f$ (см. замечание (i)).

(iii) Пусть M — риманово многообразие с метрическим тензором g. Предположим, что на M задана, кроме того, линейная связность ∇ с отображением связности K. Рассмотрим расслоенное пространство TM с естественной проекцией $\pi\colon TM \to M$. На TM можно определить метрический тензор

$$\bar{g}(A, B) = g(\pi_* A, \pi_* B) + g(KA, KB),$$

где $A, B \in \mathfrak{B}(TM)$ (см. разд. 2.4). При этом оказывается, что горизонтальное подпространство H_v и вертикальное V_v ортогональны в $(TM)_v$ при всех $v \in TM$. Пусть $p \in M$. Включение $\iota\colon M_p \subset TM$ индуцирует из $\bar{g}$ метрический тензор $\langle\ ,\ \rangle$ на M_p. Для $v \in M_p$ и векторов $a, b \in (M_p)_v$, очевидно, $\langle a, b\rangle = g(K\iota_* a, K\iota_* b)$. В силу (8) разд. 2.4 имеем $K\iota_* a = I_v^{-1} a$, и, таким образом,

$$\langle a, b\rangle = g(I_v^{-1} a, I_v^{-1} b).$$

Форма $\langle\ ,\ \rangle$ называется каноническим метрическим тензором на M_p; как видно из последнего равенства, она не зависит от ∇. При отождествлении всех $(M_p)_v$ с M_p при помощи параллельного сдвига $\langle\ ,\ \rangle$ переходит в евклидово скалярное произведение, определенное на M_p метрикой g. Теперь $\iota\colon M_p \to TM$ становится изометрическим вложением, т. е. M_p с каноническим метрическим тензором $\langle\ ,\ \rangle$ оказывается римановым подмногообразием TM, какова бы ни была линейная связность ∇.

(iv) Изометрии n-мерного риманова многообразия M на себя образуют подгруппу группы $\mathrm{Diff}\, M$ всех диффеоморфизмов M

на себя. В общем случае на M не существует изометрий, кроме тождественной. Чем больше существует изометрий, тем „симметричнее“ устроено M. Как показали С. Мейерс и Н. Стинрод, группа изометрий M с компактно-открытой топологией имеет естественную структуру (не обязательно связной) группы Ли размерности $\leqslant \binom{n+1}{2}$.

Пусть $f\colon M \to N$ — изометрическое отображение, $\dim M = \dim N$, M связно и компактно, а N односвязно. Тогда (см. замечание (v) разд. 1.7) f есть диффеоморфизм и, следовательно, изометрия. Это утверждение становится неверным, если отказаться от требования односвязности N, сохранив все остальные условия. Примером служит накрытие $S^n \to P^n(\mathbb{R})$ с канонической метрикой на S^n и с однозначно определенной требованием изометричности накрытия метрикой на $P^n(\mathbb{R})$. Утверждение становится неверным и в том случае, если отказаться от требования компактности M, сохранив все остальные условия; при этом, как видно из следующего примера, f может быть сюръективным, но не инъективным изометрическим отображением. Возьмем в качестве f отображение открытого квадрата Q на себя, построенное в замечании (v) разд. 1.7. В качестве N возьмем Q с метрикой, индуцированной включением в $\mathbb{R}^2$, а в качестве $M - Q$ с метрикой, индуцированной отображением f.

Покажите, что изометрическое отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ относительно канонической метрики линейно, т. е. имеет вид

$$f(u) = \alpha u + a,$$

где u, $a \in \mathbb{R}^n$ — столбцы, а $\alpha \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Покажите, что α — ортогональная матрица, т. е. $\alpha^t\alpha = e$, где ${}^t\alpha$ — транспонированная матрица с элементами $({}^t\alpha)_{ij} = \alpha_{ji}$. Таким образом, все изометрии $\mathbb{R}^n$ порождаются группой трансляций и ортогональной группой $\mathrm{O}(n) \subset \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Обозначим через $\mathfrak{M}_n^s(\mathbb{R})$ линейное подпространство симметрических матриц в векторном $\mathbb{R}$-пространстве всех действительных $n \times n$-матриц $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, тогда легко проверить, что $e \in \mathfrak{M}_n^s(\mathbb{R})$ есть регулярное значение дифференцируемого отображения $h\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n^s(\mathbb{R})$, заданного формулой $h(\alpha) = \alpha^t\alpha$. Согласно лемме 2 разд. 1.6, $\mathrm{O}(n) = h^{-1}(e)$ есть замкнутое дифференцируемое подмногообразие $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ размерности $\binom{n}{2}$; так как, кроме того, это — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^{n^2}$, то $\mathrm{O}(n)$ есть компактная подгруппа Ли группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Ортогональное отображение $\alpha \in \mathrm{O}(n+1)$ индуцирует изометрию на сферах $S_0^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (с канонической метрикой подмногообразий $\mathbb{R}^{n+1}$).

Если p, $q \in S_0^n$ и $\{v_i\}$, соответственно $\{w_i\}$ — ортонормированные базисы касательных векторов в точках p, q („ортонормированные

n-реперы"), то существует $\alpha \in O(n+1)$, для которого $\alpha_* v_i = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Евклидовы сферы S^n_ρ обладают максимальной возможной симметрией, их группа изометрий действует в указанном смысле транзитивно на множестве всех ортонормированных касательных n-реперов.

(v) Пусть G — группа Ли. Тензорное поле B типа (r, s) на G называется левоинвариантным, если $B(X_1, \ldots, X_r)$ постоянно в случае $s = 0$ и левоинвариантно в случае $s = 1$ для любых левоинвариантных полей $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{B}G$. Поле B левоинвариантно в том и только том случае, если $\nabla B = 0$, т. е. если B параллельно относительно левоинвариантной связности ∇ на G (см. замечание (iii) разд. 2.3). Левоинвариантное тензорное поле полностью определяется поведением в одной точке G. Для каждого r-линейного отображения B_e: $G_e^r \to \mathbb{R}$ $(s = 0)$ или B_e: $G_e^r \to G_e$ $(s = 1)$, где G_e^r — произведение r экземпляров пространства G_e, существует одно и только одно левоинвариантное тензорное поле B на G, совпадающее с B_e в точке e. Метрический тензор на G левоинвариантен тогда и только тогда, когда L_h является изометрией при любом $h \in G$. Таким образом, по отношению к левоинвариантной метрике G действует на себе как группа изометрий, посредством левых сдвигов. Если G не абелева, то правые сдвиги R_h: $G \to G$, определенные формулой $R_h g = gh$, вообще говоря, отличны от левых и не являются изометриями G по отношению к левоинвариантной метрике. Для групп Ли особую роль играют биинвариантные метрики, для которых как левые, так и правые сдвиги являются изометриями. Можно показать, что на компактной группе Ли всегда существует биинвариантная риманова метрика. Например, метрика на группе S^3, индуцированная канонической метрикой $\mathbb{R}^4$, как легко проверить, биинвариантна (см. замечание (iv) разд. 1.9). С помощью биинвариантной метрики на G можно построить на однородном пространстве G/H левых классов смежности по замкнутой подгруппе Ли H так называемую нормальную риманову метрику, так что G действует на G/H как группа изометрий посредством левых сдвигов (см. замечание (v) разд. 1.7).

(vi) Доказательство теоремы существования римановой метрики в этом разделе можно было бы сделать тривиальным, сославшись на упомянутую в замечании (vi) разд. 1.6 теорему Уитни о вложении. В самом деле, вложение f: $M \to \mathbb{R}^k$ индуцирует риманову метрику на M из канонической метрики $\mathbb{R}^k$. Обратное утверждение, согласно которому любое риманово многообразие может быть изометрически вложено в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^k$, лишь недавно доказано Нэшом (Nash J., *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 63 (1956), 20—63). Таким образом, класс всех римановых многообразий не шире класса ри-

мановых подмногообразий евклидовых пространств. Тем не менее, часто целесообразно рассматривать римановы многообразия как абстрактные многообразия (см. замечание (vi) разд. 1.6).

3.3. Длина дифференцируемого пути

Пусть M — риманово многообразие, c: $[\alpha, \beta] \to M$ — дифференцируемый путь. Действительная функция $\|\dot{c}\|$, заданная на $[\alpha, \beta]$, непрерывна, но вообще говоря, не дифференцируема, если $\dot{c}$ обращается в нуль. Рассмотрим C^1-отображение L_c: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, заданное формулой

$$L_c(t) = \int_\alpha^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau. \tag{1}$$

Действительное число $L(c) = L_c(\beta)$ называется *длиной* пути c. Если c — погружение, т. е. $\dot{c} \neq 0$, то путь c называется *регулярным*.

Путь c называется *нормальным*, если

$$\|\dot{c}(t)\| = 1 \text{ при всех } t \in [\alpha, \beta]. \tag{2}$$

Каждый нормальный путь регулярен. Если c регулярен, то L_c дифференцируемо и инъективно. Если c нормален, то $L_c(t) = t - \alpha$, и говорят, что „c параметризован длиной дуги“. Пусть N — другое риманово многообразие и f: $M \to N$ — изометрическое отображение, тогда $L(c) = L(f \circ c)$. Важный класс более общего вида путей, для которых можно определить длину по формуле (1), образуют абсолютно непрерывные пути. Если путь c: $[\alpha, \beta] \to M$ абсолютно непрерывен, то $\dot{c}$ существует почти всюду, т. е. за исключением множества меры нуль, и интеграл (1) существует на $[\alpha, \beta]$ в смысле Лебега.

Пусть $\tilde{J}$ — компактный интервал в $\mathbb{R}$, φ: $\tilde{J} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемое монотонно возрастающее отображение, $J = \varphi(\tilde{J})$ (монотонно возрастающим мы называли такое отображение, для которого из $t_1 < t_2$ следует $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$); если случай равенства исключается, мы называем отображение строго монотонным). Тогда дифференцируемому пути c: $J \to M$ соответствует путь „с новой параметризацией“ $c \circ \varphi$: $\tilde{J} \to M$. При этом, как мы сейчас покажем,

$$L_{c\circ\varphi} = L_c \circ \varphi \text{ и, в частности, } L(c) = L(c \circ \varphi).$$

В самом деле, пусть $\tilde{J} = [\alpha, \beta]$; тогда $J = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$, и поэтому

$$L_{c\circ\varphi}(t) = \int_\alpha^t \|\widehat{c \circ \varphi}(\tau)\| d\tau = \int_\alpha^t \|\dot{c} \circ \varphi(\tau)\| \cdot \varphi'(\tau) \, d\tau =$$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} \|\dot{c}(v)\| dv = L_c \circ \varphi(t).$$

Непрерывный путь $c\colon [\alpha, \beta] \to M$ называется *кусочно дифференцируемым*, если существует такая конечная последовательность действительных чисел $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$, что $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k = \beta$, и что для всех $\nu = 1, \ldots, k$ отображения $c_\nu\colon c|[\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]$ суть дифференцируемые пути. Длиной пути c называется

$$L(c) = \sum_{\nu=1}^{k} L(c_\nu), \tag{3}$$

причем нетрудно проверить, что сумма в (3) не зависит от выбора чисел γ_ν, удовлетворяющих предыдущим условиям. Так как функция $t \to \|\dot{c}(t)\|$ для кусочно дифференцируемого пути определена везде, кроме конечного множества, и ограничена, то (1) задает непрерывное отображение. Путь c называется кусочно регулярным (нормальным), если c_ν регулярны (нормальны) при $\nu = 1, \ldots, k$.

Пусть J, $\tilde{J}$ — компактные интервалы в $\mathbb{R}$. Кусочно дифференцируемые пути $c\colon J \to M$, $\tilde{c}\colon \tilde{J} \to M$ называются *совмещенными*, если существует такое дифференцируемое монотонно возрастающее отображение φ интервала $\tilde{J}$ на J, что $\tilde{c} = c \circ \varphi$, или такое же отображение $\tilde{\varphi}\colon J \to \tilde{J}$, причем $c = \tilde{c} \circ \tilde{\varphi}$. Если c, $\tilde{c}$ — совмещенные пути, то их образы, длины, начальные и конечные точки, а также „направления обхода" совпадают.

Лемма

Утв. *Для каждого кусочно дифференцируемого пути $c\colon [\alpha, \beta] \to M$ существует совмещенный с ним дифференцируемый путь $\tilde{c}\colon [\alpha, \beta] \to M$.*

Док. Существуют такие действительные числа $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k = \beta$, что $c_\nu = c|_{[\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]}$ есть дифференцируемый путь при $\nu = 1, \ldots, k$. Мы построим дифференцируемое строго монотонно возрастающее отображение $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, такое, что $\varphi(\gamma_\nu) = \gamma_\nu (\nu = 0, \ldots, k)$ и в точках γ_ν производные $D^r\varphi$ всех порядков $r \geqslant 1$ обращаются в нуль. Располагая таким отображением, можно построить путь $\tilde{c} = c \circ \varphi$; остается только показать, что $\tilde{c}$ дифференцируем в точках γ_ν. Для этой цели достаточно рассмотреть карту x, определенную в окрестности точки $\tilde{c}(\gamma_\nu)$, и проверить, что функции $x^i \circ \tilde{c} = x^i \circ c \circ \varphi$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеют в точках γ_ν равные нулю левые и правые производные всех порядков. Что касается функции φ, то построим (в соответствии с разд. 8.1) такие дифференцируемые функции $\varphi_\nu\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, что $\varphi_\nu(t) = 0$ при $t \leqslant \gamma_{\nu-1}$, $\varphi_\nu(t) = 1$ при $t \geqslant \gamma_\nu$ и φ_ν строго возрастает на $[\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]$. Тогда $\varphi(t) = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})\varphi_\nu(t)$ удовлетворяет поставленным выше условиям.

Заметим, наконец, что каждый регулярный путь может быть параметризован с помощью длины дуги. А именно, пусть c: $[\alpha, \beta] \to M$ — регулярный путь. Тогда, как мы сейчас покажем, существует нормальный путь c_1: $[0, \gamma] \to M$, совмещенный с c. Положим $\gamma = L_c(\beta) = L(c)$. Так как c регулярен, существует строго возрастающее дифференцируемое отображение L_c^{-1}: $[0, \gamma] \to \mathbb{R}$, отображающее $[0, \gamma]$ на $[\alpha, \beta]$. Положим

$$c_1 = c \circ L_c^{-1}.$$

Тогда $L_{c_1} = L_{c \circ L_c^{-1}} = L_c \circ L_c^{-1} = \mathrm{id}$, и поэтому

$$\|\dot{c}_1(t)\| = L'_{c_1}(t) = 1.$$

Из этих рассуждений вытекает также, что для кусочно регулярного пути существует совмещенный с ним кусочно нормальный путь.

Замечания

(i) Цепная линия c: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, заданная формулой $c(t) = (t, \operatorname{ch} t) = \left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$, есть регулярный путь. Найдите функцию L_c для этого пути и параметризируйте c с помощью длины дуги, т. е. укажите явно нормальный путь, совмещенный с c.

(ii) Отметим, что „функция длины дуги“ L_c для дифференцируемого пути c: $J \to M$ измеряет абсолютную длину пройденного при изменении параметра t пути и, таким образом, $L(c)$ зависит не только от образа $c(J) \subset M$. Приведите примеры дифференцируемых, а также регулярных путей с одним и тем же образом, но с разными длинами.

(iii) Пусть W — компактное k-мерное дифференцируемое многообразие (возможно с краем), M — n-мерное риманово многообразие и f: $W \to M$ — дифференцируемое отображение, тогда в качестве обобщения длины дуги можно определить понятие k-мерного абсолютного объема с помощью интеграла от некоторой антисимметрической k-формы по W. Этот вопрос, однако, в книге не рассматривается.

3.4. Риманова связность

На римановом многообразии, естественно, представляют интерес те линейные связности, которые в некотором смысле совместимы с римановой структурой. Линейная связность ∇ на M называется *римановой связностью*, если для каждого дифференцируемого пути c: $J \to M$ и любых двух параллельных векторных полей X, Y вдоль c функция $\langle X, Y \rangle$ постоянна. При этих условиях параллельное перенесение из $M_{c(t_1)}$ в $M_{c(t_2)}$ ($t_1, t_2 \in J$) есть изометрическое отображение, в частности постоянна функция

$\| X \| = \langle X, X \rangle^{1/2}$. Если c — геодезическая, то для $t \in J$ постоянно внутреннее произведение $\langle X, \dot{c} \rangle$ и тем самым угол $\sphericalangle (X(t), \dot{c}(t))$ $(X \neq 0, \dot{c} \neq 0)$, так как $\dot{c}$ параллельно вдоль c. Если $\| \dot{c}(t) \| = 1$, хотя бы для одного $t \in J$, то геодезическая c римановой связности нормальна.

Теорема

Усл. *M — риманово многообразие; ∇ — линейная связность на M.*

Утв. *Связность ∇ является римановой в том и только том случае, если для любых векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{B}M$ справедливо равенство*

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \tag{1}$$

Соотношение (1) есть „правило дифференцирования“ для скалярного произведения, оно называется также тождеством Риччи. Согласно замечанию (iii) разд. 2.3, соотношение (1) равносильно условию $\nabla g = 0$, т. е. параллельности метрического тензора g относительно линейной связности ∇ (см. замечание (iv) разд. 2.6).

Мы докажем сначала следующую лемму.

Лемма

Усл. *M — риманово многообразие, ∇ — линейная связность на M, удовлетворяющая условию* (1), *N — дифференцируемое многообразие, $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Для векторных полей $A \in \mathfrak{B}N$, $X, Y \in \mathfrak{B}_f$ выполняется*

$$A \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_A X, Y \rangle + \langle X, \nabla_A Y \rangle. \tag{2}$$

Док. Достаточно проверить, что (2) выполняется на открытом множестве $f^{-1}(U)$, где U — область определения произвольной карты x на M. Так как при фиксированном A отображение

$$A \langle X, Y \rangle - \langle \nabla_A X, Y \rangle - \langle X, \nabla_A Y \rangle$$

есть билинейное отображение $\mathfrak{B}_f \times \mathfrak{B}_f \to \mathfrak{F}N$ над кольцом $\mathfrak{F}N$, то достаточно проверить (2) для полей X, Y вида $X_i \circ f$, где X_i — базисные поля карты x, и тем более для полей вида $X = \tilde{X} \circ f$, $Y = \tilde{Y} \circ f$, где $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{B}U$. Наконец, достаточно проверить, что для каждой точки $p \in f^{-1}(U)$ и каждого вектора $v \in N_p$

$$v \langle \tilde{X} \circ f, \tilde{Y} \circ f \rangle = \langle \nabla_v (\tilde{X} \circ f), \tilde{Y}_q \rangle + \langle \tilde{X}_q, \nabla_v (\tilde{Y} \circ f) \rangle,$$

где $q = f(p)$. В силу замечания (iv) разд. 2.5 это равносильно выполнению

$$(f_* v) \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \nabla_{f_* v} \tilde{X}, \tilde{Y}_q \rangle + \langle \tilde{X}_q, \nabla_{f_* v} \tilde{Y} \rangle,$$

что вытекает непосредственно из (1).

Доказательство теоремы. Пусть выполнено условие (1). Покажем, что внутреннее произведение не меняется при параллельном переносе. Рассмотрим дифференцируемый путь $c\colon J \to M$ и параллельные векторные поля X, Y вдоль c. Тогда в силу леммы имеет место равенство

$$D\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_D X, Y\rangle + \langle X, \nabla_D Y\rangle. \tag{3}$$

Поскольку $\nabla_D X = \nabla_D Y = 0$, имеем $D\langle X, Y\rangle = 0$. Это означает, что $\langle X, Y\rangle$ постоянно, т. е. ∇ — риманова связность.

Обратно, пусть теперь ∇ — риманова связность и $X, Y, Z \in \mathfrak{V}M$. Покажем, что выполнено условие (1). Достаточно проверить это условие в произвольной точке $p \in M$. Построим дифференцируемый путь $c\colon [0, \beta] \to M$, такой, что $c(0) = p$ и $\dot{c}(0) = Z_p$ (например, интегральный путь поля Z, удовлетворяющий условию $c(0) = p$). Тогда

$$Z_p\langle X, Y\rangle = \dot{c}(0)\langle X, Y\rangle = (c_*D_0)\langle X, Y\rangle = D(\langle X, Y\rangle \circ c)\,|_0.$$

Поэтому

$$Z_p\langle X, Y\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\langle X_{c(t)}, Y_{c(t)}\rangle - \langle X_p, Y_p\rangle}{t}. \tag{4}$$

Построим для каждого $t \in [0, \beta]$ однозначно определенные параллельные векторные поля $X^{(t)}, Y^{(t)} \in \mathfrak{V}_c$, удовлетворяющие условиям $X_t^{(t)} = X_{c(t)}$, $Y_t^{(t)} = Y_{c(t)}$. Тогда, принимая во внимание риманов характер связности, имеем

$$\langle X_t^{(t)}, Y_t^{(t)}\rangle = \langle X_0^{(t)}, Y_0^{(t)}\rangle,$$

используя (4), находим

$$\begin{aligned} Z_p\langle X, Y\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{\langle X_0^{(t)}, Y_0^{(t)}\rangle - \langle X_p, Y_p\rangle}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\langle X_0^{(t)}, Y_0^{(t)}\rangle - \langle X_p, Y_0^{(t)}\rangle + \langle X_p, Y_0^{(t)}\rangle - \langle X_p, Y_p\rangle}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\left\langle \frac{X_0^{(t)} - X_p}{t}, Y_0^{(t)} \right\rangle + \left\langle X_p, \frac{Y_0^{(t)} - Y_p}{t} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Согласно теореме 2 разд. 2.6, имеем

$$Z_p\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_D(X \circ c)\,|_0, Y_p\rangle + \langle X_p, \nabla_D(Y \circ c)\,|_0\rangle. \tag{5}$$

Наконец, из замечания (iv) разд. 2.5 следует $\nabla_D(X \circ c)\,|_0 = \nabla_{c_*D_0}X = \nabla_{\dot{c}(0)}X = \nabla_{Z_p}X = (\nabla_Z X)_p$ и соответственно для $\nabla_D(Y \circ c)\,|_0$; поэтому (5) равносильно доказываемому утверждению.

Замечания

(i) Пусть M — n-мерное параллелизуемое многообразие и $X_1, \ldots, X_n$ — параллелизация; тогда соответствующая линейная связность ∇ (см. замечание (i) разд. 2.1) является римановой по отношению к канонической римановой метрике на M, заданной условием $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$. Связность, определенная в замечании (ii) разд. 2.2, является римановой по отношению к канонической римановой метрике $\mathbb{R}^3$.

(ii) Определим понятие тензорного поля вдоль дифференцируемого отображения $f\colon N \to M$.

Пусть $r \geqslant 0$, $s = 0, 1$, тогда тензорным полем типа (r, s) вдоль отображения f называется r-линейное над кольцом $\mathfrak{F}N$ отображение $B\colon \mathfrak{V}_f^r \to \mathfrak{V}_f^s$.

В случае $N = M$, $f = \mathrm{id}$ мы получаем снова тензорные поля на M.

Пусть теперь на M задана линейная связность ∇. Обобщая определение, данное в замечании (iii) разд. 2.3, назовем ковариантной производной $\nabla_A B$ тензорного поля B относительно векторного поля $A \in \mathfrak{V}N$ тензорное поле типа (r, s) вдоль f, заданное формулой

$$(\nabla_A B)(Y_1, \ldots, Y_r) =$$

$$= \nabla_A B(Y_1, \ldots, Y_r) - \sum_{i=1}^{r} B(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_A Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r),$$

где опять в случае $s = 0$ под $\nabla_A \varphi$ подразумевается $A\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{F}N$. Если B — тензорное поле типа (r, s) на M, то $B \circ f$ — тензорное поле того же типа вдоль f.

Покажите, что

$$\nabla_v (B \circ f) = \nabla_{f_* v} B$$

для $v \in TN$ (см. замечание (iv) разд. 2.5). Покажите, что последнее соотношение содержит в себе как частный случай лемму этого раздела (см. также замечание (iv) разд. 2.6).

(iii) Пусть M — n-мерное риманово многообразие. Тогда функция $\varphi\colon TM \to \mathbb{R}$, заданная формулой $\varphi(v) = \langle v, v \rangle$, дифференцируема с максимальным рангом везде, кроме нулевого сечения. Поэтому пространство так называемого сферического расслоения $T_1 M = \varphi^{-1}(1)$ есть дифференцируемое подмногообразие TM размерности $2n - 1$. Если M компактно, то и $T_1 M$ компактно. Покажите, что геодезическая струя S римановой связности ∇ на M является касательным полем вдоль $T_1 M$. Получите отсюда, что в случае компактного M риманова связность ∇ полна (см. разд. 2.9 и 8.7).

(iv) Для римановой связности ∇ на n-мерном римановом многообразии M группа голономии в любой точке $p \in M$ есть подгруппа ортогональной группы.

Так как римановы связности на M существуют, согласно разд. 3.5, то структурная группа касательного расслоения TM может быть сведена к $O(n)$ (см. замечание (v) разд. 2.6 и замечание (iv) разд. 3.2).

3.5. Связность Леви-Чивита

Среди всех римановых связностей на римановом многообразии выделяется единственная, не имеющая кручения.

Лемма 1

Усл. *M — дифференцируемое многообразие*; ω: $\mathfrak{B}M \to \mathfrak{F}M$ — *1-форма M, т. е. $\mathfrak{F}M$-линейное отображение $\mathfrak{B}M$ в $\mathfrak{F}M$*; $\langle , \rangle$ — *невырожденное тензорное поле типа* (2,0) *на M, т. е. 2-форма, обладающая тем свойством, что если $\langle v, w \rangle = 0$ для фиксированного $v \in M_p$ и всех $w \in M_p$, то $v = 0$, какова бы ни была точка $p \in M$.*

Утв. *Существует одно и только одно векторное поле $A \in \mathfrak{B}M$, сопряженное форме ω относительно $\langle , \rangle$, т. е. такое, что*

$$\omega(Z) = \langle A, Z \rangle \tag{1}$$

для всех $Z \in \mathfrak{B}M$.

Док. Достаточно доказать существование и единственность A в окрестности произвольной точки $p \in M$. Построим карту x на M вокруг p с областью определения U и положим $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда для каждого $A \in \mathfrak{B}U$ имеем представление $A = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i X_i$, где $\varphi^i \in \mathfrak{F}U$.

Соотношение (1) равносильно $\omega(X_i) = \langle A, X_i \rangle$, или

$$\omega(X_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\varphi^j, \quad g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Так как внутреннее произведение $\langle , \rangle$ не вырождено, для всех $q \in U$ имеем $\det | g_{ij} |_q \neq 0$, так что из (2) однозначно определяются φ^j. Они выражаются через дифференцируемые функции $\omega(X_i)$, g_{ij} и, следовательно, дифференцируемы. Но тогда однозначно определяется и векторное поле $A \in \mathfrak{B}U$, удовлетворяющее условию (1).

Теорема

Усл. *M — риманово многообразие с метрическим тензором $g = \langle , \rangle$.*

Утв. *На M существует одна и только одна линейная связность, удовлетворяющая условиям*

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{3}$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y], \text{ т. е. } T(X, Y) = 0 \tag{4}$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{V}M$, где T — тензор кручения для ∇.

Тождество Риччи (3) означает, что ∇ — риманова связность, т. е. g параллелен $\nabla g = 0$. Условие (4) означает, что ∇ — связность без кручения. Такая связность ∇ называется *связностью Леви-Чивита*, а определенный ею параллельный перенос — параллелизмом Леви-Чивита. Каноническая связность на $\mathbb{R}^n$, определенная в замечании (i) разд. 2.1, есть связность Леви-Чивита по отношению к канонической римановой метрике.

Док. Доказательство однозначности. Из (3) следует

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{5}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{6}$$

а из (3), (5) и (6) с помощью (4) получаем

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X Z, Y\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle, \tag{3'}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z, [X, Y]\rangle. \tag{6'}$$

Вычитая (3′) из (5) и прибавляя (6′), получаем после деления на 2

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \tfrac{1}{2}[X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \\ + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle]. \tag{7}$$

Пусть теперь $\tilde{\nabla}$ — другая линейная связность, удовлетворяющая условиям (3), (4), тогда из (7) вытекает $\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle$, откуда $\langle \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z\rangle = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{V}M$ и $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$.

Доказательство существования. Рассмотрим при фиксированных $X, Y \in \mathfrak{V}M$ отображение ω: $\mathfrak{V}M \to \mathfrak{F}M$, ставящее в соответствие каждому $Z \in \mathfrak{V}M$ функцию из $\mathfrak{F}M$, стоящую в правой части (7). Мы утверждаем, что отображение ω $\mathfrak{F}M$-линейно. Аддитивность ω относительно Z очевидна. Однородность доказывается следующим образом:

$$\omega(\varphi Z) = \tfrac{1}{2}[X\langle Y, \varphi Z\rangle + Y\langle \varphi Z, X\rangle - \varphi Z\langle X, Y\rangle + \\ + \langle \varphi Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [\varphi Z, X]\rangle - \langle X, [Y, \varphi Z]\rangle] = \\ = \varphi\omega(Z) + \tfrac{1}{2}[(X\varphi)\langle Y, Z\rangle + (Y\varphi)\langle Z, X\rangle - (X\varphi)\langle Y, Z\rangle - \\ - (Y\varphi)\langle X, Z\rangle] = \varphi\omega(Z).$$

Согласно лемме 1, существует одно и только одно такое векторное поле $A \in \mathfrak{X}M$, что $\omega(Z) = \langle A, Z\rangle$ для всех $Z \in \mathfrak{X}M$. Положим $\nabla_X Y = A$. Определенное таким способом отображение $\nabla\colon \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$, как мы покажем, удовлетворяет условиям (1)–(4) разд. 2.1. Аддитивность относительно X и Y очевидна, однородность относительно X доказывается аналогично однородности относительно Z. Остается проверить правило дифференцирования (2) разд. 2.1:

$$2\langle \nabla_X \varphi Y, Z\rangle = X\langle \varphi Y, Z\rangle + \varphi Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, \varphi Y\rangle +$$
$$+ \langle Z, [X, \varphi Y]\rangle + \langle \varphi Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [\varphi Y, Z]\rangle =$$
$$= 2\langle \varphi \nabla_X Y, Z\rangle + (X\varphi)\langle Y, Z\rangle - (Z\varphi)\langle X, Y\rangle + (X\varphi)\langle Z, Y\rangle + (Z\varphi)\langle X, Y\rangle =$$
$$= 2[\langle \varphi \nabla_X Y, Z\rangle + \langle (X\varphi) Y, Z\rangle] = 2\langle \varphi \nabla_X Y + (X\varphi) Y, Z\rangle.$$

Следовательно, $\langle \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y - (X\varphi)\, Y, Z\rangle = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{X}M$, а поэтому $\nabla_X \varphi Y = \varphi \nabla_X Y + (X\varphi) Y$.

Связность ∇ удовлетворяет также условиям (3) и (4); (3) получается сразу же, если сложить вычисленные по формуле (7) выражения для $\langle \nabla_Z X, Y\rangle$ и $\langle \nabla_Z Y, X\rangle$. Чтобы доказать (4), проверяем с помощью (7), что $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle$, откуда следует $\langle \nabla_X Y + \nabla_Y X - [X, Y], Z\rangle = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{X}M$, что равносильно (4).

Пусть x — карта на M с областью определения U и $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Выведем соотношения между компонентами связности Леви-Чивита Γ_{ij}^k и компонентами метрического тензора g_{ij} относительно карты x. Поскольку $[X_i, X_j] = 0$, из формулы (7) получаем

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, X_k\rangle = \frac{1}{2}[X_i\langle X_j, X_k\rangle + X_j\langle X_k, X_i\rangle - X_k\langle X_i, X_j\rangle].$$

Так как $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l X_l$ и $\langle X_i, X_j\rangle = g_{ij}$, получаем

$$\sum_{l=1}^{n} g_{lk}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Определитель $\det(g_{lk})_p \neq 0$ для всех $p \in U$, следовательно, система уравнений (8) имеет единственное решение, состоящее из n^3 функций $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}U$.

Компоненты связности Леви-Чивита суть классические „символы Кристофеля второго рода“.

Пусть N — дифференцируемое многообразие, M — риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇, $f\colon N \to M$ — диффе-

ренцируемое отображение. Тогда для любых векторных полей A, B, $C \in \mathfrak{B}N$ справедливо соотношение, аналогичное (7):

$$\langle \nabla_A f_* B, f_* C\rangle = \tfrac{1}{2}\,[A\langle f_* B, f_* C\rangle + B\langle f_* C, f_* A\rangle - C\langle f_* A, f_* B\rangle + \\ + \langle f_* C, f_*[A, B]\rangle + \langle f_* B, f_*[C, A]\rangle - \langle f_* A, f_*[B, C]\rangle. \quad (9)$$

Доказательство (9) аналогично доказательству (7) и опирается на тождества

$$A\langle f_* B, f_* C\rangle = \langle \nabla_A f_* B, f_* C\rangle + \langle f_* B, \nabla_A f_* C\rangle$$

и

$$\nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A - f_*[A, B] = T(f_* A, f_* B) = 0$$

(см. (2) разд. 3.4 и (6) разд. 2.5).

Теперь мы покажем, что связность Леви-Чивита в известном смысле инвариантна при изометрических отображениях. Для этого сделаем сначала следующее предварительное замечание. Пусть $\tilde{M}$ — риманово многообразие, $\iota\colon M \to \tilde{M}$ — погружение. Согласно лемме 1, для векторного поля $X \in \mathfrak{B}_\iota$ вдоль ι существует такое однозначно определенное касательное векторное поле $X^\top$ вдоль ι, что $X^\top = \iota_* A$, $A \in \mathfrak{B}M$ и $\langle \iota_* A, \iota_* C\rangle = \langle X, \iota_* C\rangle$ для всех $C \in \mathfrak{B}M$. Поле $X^\top \in \mathfrak{B}_\iota^\top$ называется *касательной компонентой* X, $X^\perp = X - X^\top$ — *ортогональной компонентой* X относительно ι. Отображения $\top$, $\perp\colon \mathfrak{B}_\iota \to \mathfrak{B}_\iota$, т. е. проекции, дающие касательную, соответственно ортогональную компоненту относительно ι, суть тензорные поля типа (1, 1) вдоль ι (см. замечание (ii) разд. 3.4). Они индуцируют во всех точках $\iota(p) \in \tilde{M}$ $(p \in M)$ проекции касательного пространства $\tilde{M}_{\iota(p)}$ на $\iota_* M_p$ соответственно на ортогональное дополнение этого подпространства в $\tilde{M}_{\iota(p)}$. Вообще если $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение и $X \in \mathfrak{B}_{\iota \circ f}$ — векторное поле вдоль $\iota \circ f$, то и в этом случае определены касательная и ортогональная компоненты $X^\top$, $X^\perp \in \mathfrak{B}_{\iota \circ f}$ векторного поля X относительно ι, а именно $(X^\top)_p = (X_p)^\top$ и $(X^\perp)_p = X_p - (X^\top)_p$ для $p \in N$. В случае $\dim M = \dim \tilde{M}$, очевидно, имеем $X^\top = X$, $X^\perp = 0$.

Лемма 2

Усл. *M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия со связностями Леви-Чивита ∇, $\tilde{\nabla}$ и отображениями связности K, $\tilde{K}$; $\iota\colon M \to \tilde{M}$ — изометрическое отображение; N — дифференцируемое многообразие; $f\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\iota_* Kb = (\tilde{K}\iota_{**} b)^\top \tag{10}$$

для всех $b \in TTM$ *и*

$$\iota_* \nabla_A Y = (\tilde{\nabla}_A \iota_* Y)^\top \tag{11}$$

для всех $A \in \mathfrak{B}N$, $Y \in \mathfrak{B}_f$.

В случае $\dim M = \dim \tilde{M}$ имеем, таким образом, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\iota_{**}} & TT\tilde{M} \\ {\scriptstyle K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{K}} \\ TM & \xrightarrow[\iota_*]{} & T\tilde{M} \end{array},$$

т. е.

$$\iota_* \circ K = \tilde{K} \circ \iota_{**} \quad \text{и} \quad \iota_* \nabla_A Y = \tilde{\nabla}_{A} \iota_* Y.$$

Док. Поскольку ι изометрично, из сравнения (7) и (9) вытекает, что для всех X, Y, $Z \in \mathfrak{B}M$ имеет место

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \iota_* Y, \iota_* Z\rangle$$

и, значит, $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \iota_* \nabla_X Y, \iota_* Z\rangle$, откуда $\langle \iota_* \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X \iota_* Y, \iota_* Z\rangle = 0$. Поэтому $(\iota_* \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_X \iota_* Y)^\top = 0$ или, что то же самое, $\iota_* \nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X \iota_* Y)^\top$; тем самым (11) доказано в частном случае, когда $N = M$ и $f = \mathrm{id}$. Но в таком случае для всех $p \in M$ имеем $\iota_* K Y_* X_p = (\tilde{K}\iota_{**} Y_* X_p)^\top$, откуда (см. разд. 2.4) получается равенство (10), а из (10) вытекает общий случай формулы (11) (см. разд. 2.5)

Соотношение (11) леммы 2 было исходным пунктом открытия Леви-Чивита, который в знаменитой работе, написанной в 1917 г., показал, как на произвольном римановом многообразии можно внутренним образом ввести понятие параллельного переноса, теперь называемое связностью Леви-Чивита. На римановом подмногообразии евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ (такие многообразия главным образом до тех пор и рассматривали) он ввел ковариантную производную, построив, согласно (11), касательную компоненту тривиальной ковариантной производной в $\mathbb{R}^k$. При этом оказалось, что соответствующий этой ковариантной производной параллельный перенос вдоль кривых, выражаемый формулами (1) и (2) разд. 2. 6, не зависит от объемлющего пространства, так как в силу (8) полностью определяется индуцированной римановой метрикой M. Благодаря этому оказалось возможным ввести параллельный перенос на абстрактных римановых многообразиях. (Levi-Civita T., *Nozione di parallelismo in una varieta*

qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana, Rend. Palermo, 42 (1917), 173–205.)

Укажем еще некоторые следствия леммы 2. Пусть $\dim M = \dim \tilde{M}$. Если $c\colon J \to M$ — дифференцируемый путь и X — параллельное векторное поле вдоль c, то $\iota_* X$ — параллельное векторное поле вдоль $\iota \circ c$, так как в силу (11) $0 = \iota_* \nabla_D X = \tilde{\nabla}_D \iota_* X$. Таким образом, параллельный перенос Леви-Чивита коммутирует с изометриями. Можно еще выразить это, сказав, что отображение ι_{**} горизонтально, т. е. изоморфно отображает горизонтальные подпространства TTM на горизонтальные подпространства $TT\tilde{M}$. Если, в частности, $c\colon J \to M$ — геодезическая M, то $\iota \circ c\colon J \to \tilde{M}$ есть геодезическая $\tilde{M}$. Соответственно этому экспоненциальные отображения exp, $\widetilde{\exp}$ связностей ∇, $\tilde{\nabla}$ удовлетворяют соотношению

$$\iota \circ \exp = \widetilde{\exp} \circ \iota_*. \tag{12}$$

Для тензоров кривизны R, $\tilde{R}$ связностей ∇, $\tilde{\nabla}$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}M$ из (7) разд. 2.5 и (11) получаем

$$\iota_* R(X, Y) Z = \tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y) \iota_* Z. \tag{13}$$

Читатель без труда построит примеры, свидетельствующие о том, что последние утверждения неверны при $\dim M < \dim \tilde{M}$.

Замечания

(i) Обобщите теорему этого раздела: если T — антисимметрический тензор типа (2,1) на M, то существует одна и только одна риманова связность на M, для которой T является тензором кручения.

Доказательство аналогично приведенному выше, с той лишь разницей, что вместо (7) получается формула

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \tfrac{1}{2}[&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \\ &+ \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \\ &+ \langle Z, T(X, Y)\rangle + \langle Y, T(Z, X)\rangle - \langle X, T(Y, Z)\rangle].\end{aligned} \tag{7'}$$

Если $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита на M, то

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = &\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + \\ &+ \tfrac{1}{2}[\langle Z, T(X, Y)\rangle + \langle Y, T(Z, X)\rangle - \langle X, T(Y, Z)\rangle].\end{aligned} \tag{14}$$

Пусть f: $N \to M$ — дифференцируемое отображение. Покажите, что для векторных полей Y, $Z \in \mathfrak{V}_f$ имеет место

$$\langle \nabla_A Y, Z\rangle = \langle \tilde{\nabla}_A Y, Z\rangle + \\ + \frac{1}{2}[\langle Z, T(f_*A, Y)\rangle + \langle Y, T(Z, f_*A)\rangle - \langle f_*A, T(Y, Z)\rangle]. \quad (15)$$

Обратите внимание на то, что Y здесь не обязательно имеет вид f_*B ($B \in \mathfrak{V}N$). Последнее соотношение, ввиду его тензорного характера, может быть доказано аналогично лемме 3.4.

(ii) Пусть M — риманово многообразие со связностью Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$. Пусть, кроме того, на M задана риманова связность ∇, тензор кручения которой T ортогонален, т. е. $\langle T(X, Y), Y\rangle = 0$ или, что то же самое, 3-форма $\langle T(\,,\,),\,\rangle$ антисимметрична по всем трем аргументам. Тогда ∇ и $\tilde{\nabla}$ имеют одни и те же геодезические. В самом деле, если c: $J \to M$ — геодезическая $\tilde{\nabla}$, то, согласно (15), для всех $Z \in \mathfrak{V}_c$ имеем

$$\langle \nabla_{\dot{c}} \dot{c}, Z\rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c}, Z\rangle + \frac{1}{2}[\langle Z, T(\dot{c}, \dot{c})\rangle + \langle \dot{c}, T(Z, \dot{c})\rangle - \langle \dot{c}, T(\dot{c}, Z)\rangle] = 0.$$

(iii) Рассмотрим в римановом многообразии $\tilde{M}$ римановы подмногообразия M_1, M_2 равной размерности. Предположим, что на всех многообразиях введена связность Леви-Чивита. Пусть c: $J \to M$ — дифференцируемый путь, вдоль которого M_1, M_2 касаются друг друга, т. е. $c(J) \subset M_1 \cap M_2$ и $(M_1)_{c(t)} = (M_2)_{c(t)}$ для всех $t \in J$, причем TM_i, $i = 1, 2$, канонически отождествлены с подпространствами $T\tilde{M}$. Тогда по лемме 2 векторное поле, параллельное вдоль c на M_1, также параллельно вдоль c на M_2, так что параллельные переносы вдоль c на M_1 и M_2 совпадают.

(iv) Рассмотрим сферу $S^2 = S_1^2$ как риманово подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ со связностью Леви-Чивита. Пусть c: $\mathbb{R} \to S^2$ — параметризованная параллель радиуса α, заданная формулой $c(t) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta)$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, $-1 < \beta < 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Положим $X = \frac{1}{2}\dot{c} \in \mathfrak{V}_c$, т. е.

$$X(t) = -\sin t D_1 \circ c|_t + \cos t D_2 \circ c|_t.$$

Далее, пусть Y — направленное к северному полюсу поле длины 1, касающееся S вдоль c и ортогональное X:

$$Y(t) = -\beta \cos t D_1 \circ c|_t - \beta \sin t D_2 \circ c|_t + \alpha D_3 c|_t.$$

Из соотношения (11) (лемма 2) видно, что векторное поле на S_2 вдоль c, заданное формулой

$$Z(t) = \lambda[\cos(\gamma_0 - \beta t) X(t) + \sin(\gamma_0 - \beta t) Y(t)],$$

есть параллельное поле вдоль c, удовлетворяющее начальному условию

$$Z(0) = \lambda [\cos \gamma_0 X(0) + \sin \gamma_0 Y(0)], \quad \lambda, \gamma_0 \in \mathbb{R}.$$

В самом деле, для канонической связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ в $\mathbb{R}^3$ имеем $\tilde{\nabla}_D Z = \dot{Z} = -\lambda\alpha \cos(\gamma_0 - \beta t) I \circ c$, где $I \circ c$ есть поле радиусов-векторов вдоль c (см. замечание (iii) разд. 2.5) и $(I \circ c)^{\top} = 0$.

Таким образом, при параллельном переносе вдоль параллели сферы векторы вращаются „вокруг пути перенесения", если $\beta \neq 0$. При $\beta = 0$ образ c есть большой круг сферы и c — нормальная геодезическая, так как $\dot{c}$ — параллельное поле. В силу замечания (iv) разд. 3.2 все геодезические на S периодичны, а их образы — большие круги. Этот пример можно также рассмотреть наглядным способом, пользуясь замечанием (iii), а также замечаниями (iv) и (v) разд. 3.8, при этом в случае $\beta \neq 0$ надо рассмотреть конус, а в случае $\beta = 0$ — цилиндр в $\mathbb{R}^3$, касающийся S^2 вдоль c. Конусы и цилиндры плоски, а именно, согласно результатам разд. 3.8, они локально изометричны $\mathbb{R}^2$, так что можно, „разрезав их вдоль образующей", совершить параллельный перенос вдоль c на $\mathbb{R}^2$. Подобная геометрическая интерпретация параллельного переноса может быть распространена на более общий класс кривых, если воспользоваться „соприкасающимися развертывающимися поверхностями".

(v) Пусть M — n-мерное риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇, $f\colon M \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Согласно лемме 1, дифференциалу df этой функции соответствует сопряженное векторное поле $\nabla f \in \mathfrak{X}M$, удовлетворяющее соотношению $\langle \nabla f, X \rangle = Xf = df(X)$ для всех $X \in \mathfrak{X}M$. Это поле называется *градиентом* f. Иногда оно обозначается также через $\operatorname{grad} f$. Для открытого подмножества $U \subset M$ и линейно независимых векторных полей $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}U$ получаем локальное представление

$$\nabla f|_U = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} (X_i f) X_j,$$

где $g^{ij} \in \mathfrak{F}U$ — элементы матрицы, обратной матрице компонент метрического тензора $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$. Точка $p \in M$ является критической точкой f (или, как еще говорят, f стационарна в точке p) тогда и только тогда, когда $\nabla f|_p = 0$. Если $\alpha = f(p)$ — регулярное значение f, то, согласно лемме 2 разд. 1.6, мы получаем $(n-1)$-мерное дифференцируемое подмногообразие $N = f^{-1}(\alpha)$ („поверхность уровня"). Покажите, что отображение $df|_p$ обращается в нуль в точности на касательном пространстве N_p и что $\nabla f|_p$ ортогонален N_p в M_p. Если $\nabla f|_p \neq 0$, т. е. f не стационарна в p, то $\left.\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right|$ есть направление скорейшего роста, а $\left. -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right|_p$ — на-

правление скорейшего убывания f, т. е. для всех $v \in M_p$, $\|v\| = 1$ имеем

$$-\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_p f \leqslant vf \leqslant \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_p f,$$

причем равенство возможно только для $v = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_p$. Правую часть предыдущего неравенства, например, можно доказать следующим образом:

$$vf = \langle \nabla f,\ v\rangle \leqslant \Big\langle \nabla f,\ \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big\rangle_p = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_p f.$$

Тензором Гессе называется тензорное поле на M типа (1,1), заданное формулой $H_f X = \nabla_X \nabla f$, *формой Гессе*, или *гессианом* — соответствующая 2-форма $h_f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle$. Покажите, что H_f самосопряжен относительно римановой метрики, т. е. h_f симметрична.

Проверьте, что в критической точке p функции f имеем $h_f(X, Y)_p = X_p Yf = Y_p Xf$. Если, обратно, для векторного поля $Z \in \mathfrak{X}M$ форма $\langle \nabla_X Z, Y\rangle$ симметрична относительно X, Y, то Z локально является градиентом некоторой дифференцируемой функции.

(vi) Свертка, т. е. след тензорного поля типа (1,1) на M, заданного формулой $X \to \nabla_X Z$, есть дифференцируемая функция на M, обозначаемая через $\operatorname{div} Z$. Она называется *дивергенцией* Z (по поводу определения свертки см. замечание (iv) разд. 2.3). Положим

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \operatorname{tr} H_f \in \mathfrak{F}M.$$

Δ называется *оператором Лапласа* по отношению к заданной римановой метрике. Покажите, что

$$\operatorname{div} \varphi Z = \varphi \operatorname{div} Z + Z\varphi,\ \Delta(\varphi\psi) = \varphi \Delta\psi + \psi \Delta\varphi + 2\langle \nabla\varphi,\ \nabla\psi\rangle$$

для $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}M$, $Z \in \mathfrak{X}M$. Вычислите $\operatorname{div} Z$, Δf в локальных координатах.

Метрические тензоры g, $\tilde{g}$ на n-мерном дифференцируемом многообразии M называются *конформно эквивалентными*, если существует такая дифференцируемая функция $\varphi \in \mathfrak{F}M$, что $\tilde{g} = \varphi g$ (откуда, в частности, следует $\varphi > 0$). В этом случае в каждом касательном пространстве M_p отношения длин и углы обеих метрик g, $\tilde{g}$ совпадают. Покажите с помощью (7), что

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \tfrac{1}{2}[(X\psi)Y + (Y\psi)X - \langle X, Y\rangle \nabla\psi],$$

где $\psi = \log \varphi$.

Проверьте следующее соотношение между тензорами кривизны R, $\tilde{R}$ связностей ∇, $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \tfrac{1}{2}[h_\psi(X, Z)Y - h_\psi(Y, Z)X +$$
$$+ \langle X, Z\rangle H_\psi Y - \langle Y, Z\rangle H_\psi X] + \tfrac{1}{4}\{[(Y_\psi)(Z_\psi) - \langle Y, Z\rangle \|\nabla\psi\|^2]X -$$
$$- [(X\psi)(Z\psi) - \langle X, Z\rangle \|\nabla\psi\|^2]Y + [(X\psi)\langle Y, Z\rangle - (Y\psi)\langle X, Z\rangle]\nabla\psi\}.$$

Как легко проверить, для градиента имеем $\varphi\tilde{\nabla}f = \nabla f$. Полагая $\psi = \log\varphi$, получаем

$$\widetilde{\operatorname{div}} Z = \operatorname{div} Z + \tfrac{n}{2} Z\psi, \quad \varphi\tilde{\Delta}f = \Delta f + \left(\tfrac{n}{2} - 1\right)\langle \nabla f, \nabla\psi\rangle,$$

где $f \in \mathfrak{F}M$ и $Z \in \mathfrak{X}M$. В частности, при $n = 2$ получаем $\varphi\tilde{\Delta}f = \Delta f$.

Пусть M, N — римановы многообразия с метрическими тензорами g, $\tilde{g}$. Дифференцируемое отображение $f\colon M \to N$ называется *конформным*, если f — погружение, и индуцированная метрика $f^*\tilde{g}$ конформно эквивалентна g.

Таким образом, при конформных отображениях отношения длин дуг и углы пересечения путей, исходящих из данной точки, остаются неизменными. Очевидно, изометрические отображения конформны. Конформно также отображение $S^n \to S^n_\rho$, заданное формулой $p \to \rho p$. Любое голоморфное отображение открытого подмножества $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ есть конформное отображение евклидовой метрики на $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, если его комплексная производная отлична от нуля.

3.6. Тождества для кривизн и скалярные кривизны

Пусть R — тензор кривизны связности Леви-Чивита ∇ на n-мерном римановом многообразии M.

Лемма

Утв. *Для векторных полей $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}M$ справедливы следующие соотношения*:

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z; \tag{1}$$
$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0; \tag{2}$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle = -\langle R(X, Y)U, Z\rangle; \tag{3}$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle = \langle R(Z, U)X, Y\rangle. \tag{4}$$

Заметим, что (1) выполняется в силу определения R для любой линейной связности; (2) — только для связности без кручения; (3) — лишь для римановой связности. Свойство (3) можно сформулировать также эквивалентным образом: отображение кривизны

$Z \to R(X, Y)Z$ антисимметрично относительно римановой метрики для любых фиксированных X, Y. Обратите внимание в связи с этими соотношениями на тождество Бьянки, см. замечание (iii) разд. 2.3.

Док. Достаточно доказать соотношения леммы для базисных полей произвольной карты и тем более для векторных полей с нулевыми произведениями Ли.

Прежде всего $0 = T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, так как ∇ — связность без кручения. Поэтому

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X, \tag{5}$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z. \tag{6}$$

Из (5) и (6) сразу же следует тождество (2). Антисимметричность по двум последним аргументам в (3) равносильна тождеству $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{X}M$. Так как ∇ — риманова связность, что

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle, \tag{7}$$

$$\langle \nabla_Y Z, Z\rangle = \tfrac{1}{2} Y\langle Z, Z\rangle. \tag{8}$$

В силу (7) и (8), а также учитывая, что по предположению $[X, Y] = XY - YX = 0$, имеем

$$2\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = XY\langle Z, Z\rangle - YX\langle Z, Z\rangle = 0.$$

Тождество (4), позволяющее переставлять обе пары аргументов, является чисто алгебраическим следствием предыдущих. В самом деле, из (1) и (2) следует

$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle = -\langle R(Y, X)Z, U\rangle = \\ = \langle R(X, Z)Y, U\rangle + \langle R(Z, Y)X, U\rangle, \tag{9}$$

а из (3) и (2) следует

$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle = -\langle R(X, Y)U, Z\rangle = \\ = \langle R(Y, U)X, Z\rangle + \langle R(U, X)Y, Z\rangle. \tag{10}$$

Складывая (9) и (10), получаем

$$2\langle R(X, Y)Z, U\rangle = \langle R(X, Z)Y, U\rangle + \langle R(Z, Y)X, U\rangle + \\ + \langle R(Y, U)X, Z\rangle + \langle R(U, X)Y, Z\rangle. \tag{11}$$

Меняя местами X с Z, Y с U в (11), получаем

$$2\langle R(Z, U)X, Y\rangle = \langle R(Z, X)U, Y\rangle + \langle R(X, U)Z, Y\rangle + \\ + \langle R(U, Y)Z, X\rangle + \langle R(Y, Z)U, X\rangle. \tag{12}$$

Так как правая часть (11) переходит в правую часть (12), если к каждому ее члену применить (1) и (3), то (4) доказано.

С помощью тензора кривизны R можно определить другие характеристики кривизны M. Рассмотрим сначала „биквадратичную форму“ k: $\mathfrak{V}M \times \mathfrak{V}M \to \mathfrak{F}M$, определенную с помощью формулы $k(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X\rangle$. Заметим, что $k(X+Y, Y) = k(X, Y) = k(Y, X)$. Оказывается, что тождества (1) — (4) позволяют однозначно восстановить R, зная форму k. Чтобы доказать это, выразим сначала $R(X, Y)Z$ с помощью (1) и (2) через векторные поля вида $R(X, Y)Y$:

$$R(X, Y+Z)(Y+Z) = R(X, Y)Y + R(X, Y)Z + R(X, Z)Y + R(X, Z)Z;$$

$$R(X+Z, Y)(X+Z) = R(X, Y)X + R(X, Y)Z + R(Z, Y)X + R(Z, Y)Z;$$

$$0 = R(X, Y)Z + R(Y, X)Z.$$

Складывая эти равенства и снова пользуясь (2) и (1), имеем

$$3R(X, Y)Z = R(X, Y+Z)(Y+Z) - R(X, Y)Y - R(X, Z)Z - R(Y, X+Z)(X+Z) + R(Y, X)X + R(Y, Z)Z. \quad (13)$$

Если ω — симметрическая билинейная форма, то $2\omega(X, Y) = \omega(X+Y, X+Y) - \omega(X, X) - \omega(Y, Y)$. В силу (1), (3) и (4) форма $\langle R(X, Z)Z, Y\rangle$ симметрична по X и Y, откуда

$$2\langle R(X, Z)Z, Y\rangle = k(X+Y, Z) - k(X, Z) - k(Y, Z). \quad (14)$$

Из (13) и (14) непосредственно вытекает

$$6\langle R(X, Y)Z, U\rangle = k(X+U, Y+Z) - k(X+U, Y) - k(X+U, Z) - k(X, Y+Z) - k(U, Y+Z) + k(X, Z) + k(U, Y) - k(Y+U, X+Z) + k(Y+U, X) + k(Y+U, Z) + k(Y, Z+X) + k(U, Z+X) - k(Y, Z) - k(U, X). \quad (15)$$

Итак, тензор кривизны, действительно, выражается через $k(X, Y)$. В частности, $R = 0$ одновременно с $k = 0$. Введем теперь тензорное поле типа (3.1) по формуле

$$R_1(X, Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y,$$

а также биквадратичную форму $k_1(X, Y) = \langle R_1(X, Y)Y, X\rangle = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2$. Эта форма называется определителем Грама по отношению к римановой метрике $\langle\ ,\ \rangle$. Можно показать, что она равна квадрату площади параллелограмма, образованного векторами X_p, Y_p в M_p. Легко проверить, что тензор R_1 удовлетворяет тем же тождествам (1) — (4), что и R. Для любой точки $p \in M$ и линейно независимых векторов u, $v \in M_p$ из неравенства Коши — Шварца следует $k_1(v, w) > 0$, поэтому имеет смысл действительное число $K(v, w) = k(v, w)/k_1(v, w)$. Если обозначить

через σ двумерное линейное подпространство M_p порожденное v и w, то для другого базиса $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ в σ имеем $\tilde{v} = \alpha_{11}v + \alpha_{12}w$ $\tilde{w} = \alpha_{21}v + \alpha_{22}w$. Полагая

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

находим

$$k(\tilde{v}, \tilde{w}) = (\det \alpha)\langle R(v, w)\tilde{w}, \tilde{v}\rangle = (\det \alpha)^2 k(v, w),$$

$$k_1(\tilde{v}, \tilde{w}) = (\det \alpha)^2 k_1(v, w),$$

поскольку $\langle R(X, Y)Z, U\rangle$ и $\langle R_1(X, Y)Z, U\rangle$ антисимметричны по X, Y и Z, U соответственно. Поэтому $K(\tilde{v}, \tilde{w}) = K(v, w)$ и, в частности, $K(v, w) = k(v, w)$, если v, w ортонормированы.

Предположим теперь, что $\dim M \geqslant 2$; обозначим через G_p „многообразие Грассмана“ всех двумерных линейных подпространств M_p и через G_W объединение $\bigcup_{p \in W} G_p$, построенное для произвольного подмножества $W \subset M$. Каждой плоскости $\sigma \in G_M$ можно сопоставить действительное число K_σ, выбирая линейно независимые векторы v, $w \in \sigma$ и полагая

$$K_\sigma = K(v, w) = \frac{k(v, w)}{k_1(v, w)} = \frac{\langle R(v, w)w, v\rangle}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2}. \tag{16}$$

K_σ называется *римановой кривизной* M по отношению к σ или „кривизной в двумерном направлении“, поскольку при $\dim M \geqslant 3$ функция K_σ измеряет кривизну M в каждой точке p по „двумерному направлению“ σ в M_p. Это понятие введено Риманом. В случае $\dim M = 2$ каждая касательная плоскость M_p содержит единственное двумерное линейное подпространство, риманова кривизна $K_\sigma = K$ совпадает с гауссовой кривизной из теории поверхностей (см. разд. 3.7). В этом случае K есть дифференцируемая функция из $\mathfrak{F}M$. Из (15) и (16) видно, что тензор кривизны и риманова кривизна взаимно определяют друг друга.

M называется пространством постоянной кривизны или пространственной формой, если существует такое число $\varkappa \in \mathbb{R}$, что $K_\sigma = \varkappa$ для всех $\sigma \in G_M$; M называется в этом случае эллиптическим, если $\varkappa > 0$, гиперболическим, если $\varkappa < 0$, и плоским (локально евклидовым), если $\varkappa = 0$. Существуют простые стандартные пространства, служащие образцами пространств постоянной кривизны (см. замечание (iv)). Геометрические свойства этих пространств хорошо изучены; они играют фундаментальную роль в общей римановой геометрии в качестве объектов сравнения (см., например, § 6).

Найдем тензор кривизны для пространства постоянной кривизны. Более обще, пусть K_σ зависит только от точки p, но не от двумерного подпространства $\sigma \subset M_p$, т. е. $K_\sigma = K(p)$, где $K(p)$, естественно, дифференцируема.

Тогда, как мы докажем,

$$R(X, Y)Z = KR_1(X, Y)Z = K(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y). \tag{17}$$

В самом деле, полагая $R_0 = R - KR_1$ и обозначая через k_0 биквадратичную форму, соответствующую R_0 (т. е. $k_0 = k - Kk_1$), получаем, что R_0 удовлетворяет одновременно с R и R_1 тождествам (1)—(4), и из (16) следует $k_0 = 0$. Тогда аналогично выводу (15) заключаем, что $R_0 = 0$, откуда $R = KR_1$.

Если $\dim M = 2$, то тензор кривизны любого двумерного риманова многообразия имеет вид (17). В случае $\dim M \geqslant 3$ функция K в (17) должна быть локально постоянной. Это означает, что связное риманово многообразие, кривизна которого в любой точке не зависит от двумерного направления, есть пространство постоянной кривизны. Этот факт впервые был отмечен Шуром (см. замечание (v) этого раздела).

Тензором Риччи на M называется свертка c_1R тензора кривизны R, т. е. 2-форма на M, заданная формулой

$$(c_1R)(v, w) = \operatorname{tr}[u \to R(u, v)w],$$

где $u, v, w \in M_p$, $p \in M$ (см. замечание (iv) разд. 2.3).

Рассмотрим также квадратичную форму $v \to (c_1R)(v, v)$. При $v \in M_p$, $v \neq 0$ число $r(v) = \frac{(c_1R)(v, v)}{\|v\|^2}$ называется *кривизной Риччи* M в направлении v. Это число сопоставляется, таким образом, каждому одномерному линейному подпространству M_p. Выберем в M_p ортонормированный базис $u_1, \ldots, u_n$. Тогда

$$(c_1R)(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(u_i, v)w, u_i\rangle$$

и, следовательно, тензор Риччи симметричен относительно v, w. След тензора Риччи по отношению к метрическому тензору $\langle , \rangle$, т. е. число $s(p) = \sum_{j=1}^{n} r(u_j)$, называется *скалярной кривизной* M в точке p.

Если $w_i (i = 1, \ldots, n-1)$ — нормированные векторы, ортогональные к v и друг к другу, то, очевидно,

$$r(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K(w_i, v). \tag{18}$$

Отсюда

$$s(p) = \sum_{j=1}^{n} r(u_j) = \sum_{i, j=1}^{n} K(u_i, u_j) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} K(u_i, u_j). \tag{19}$$

Замечания

(i) Пусть $p \in M$, $\sigma \in G_p$ и x — почти нормальная карта вокруг p, т. е. такая, что $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$, $x(p) = 0$ (существование таких карт доказывается в замечании (ii) разд. 3.8). Положим $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и выберем в σ ортонормированный базис x, w. По разложениям $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i X_i|_p$, $w = \sum_{i=1}^{n} \beta^i X_i|_p$ из (16) с учетом (7) разд. 3.6 находим из условия $(\nabla_{X_i} X_j)_p = 0$, что

$$K_\sigma = \sum_{i,j\ k,l=1}^{n} \alpha^i\beta^j\beta^k\alpha^l \langle R(X_i, X_j)X_k, X_l\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\sum \alpha^i\beta^j\beta^k\alpha^i [X_iX_k\langle X_j, X_l\rangle - X_iX_l\langle X_j, X_k\rangle - X_jX_k\langle X_i, X_l\rangle +$$
$$+ X_jX_l\langle X_i, X_k\rangle]|_p,$$

откуда, объединяя крайние члены и повторно используя соотношения $[X_i, X_k] = 0$, получаем формулу

$$K_\sigma = \sum \alpha^i\beta^j\beta^k\alpha^l \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\,\partial x^k}\right)\Big|_p. \qquad (20)$$

В частном случае $\dim M = 2$ имеем

$$K(p) = \left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^2}\right)\Big|_p.$$

Практически вычисление римановых кривизн M по этой формуле слишком громоздко и редко оказывается целесообразным даже в случае поверхностей. Вообще говоря, явное вычисление кривизн в конкретных случаях может оказаться весьма трудным, даже если M в некотором смысле „симметрично“ (см. замечание (vii)) или задано простыми уравнениями как римановo подмногообразие евклидова пространства (см. разд. 3.7).

(ii) Многообразие M называется многообразием положительной (отрицательной) кривизны, если $K_\sigma > 0$ (соответственно $K_\sigma < 0$) для всех $\sigma \in G_M$; это означает, что самосопряженный эндоморфизм кривизны $M_p \to M_p$, заданный формулой $v \to R(v, w)w$, при всех $w \in M_p$, $w \neq 0$ является положительно определенным (соответственно отрицательно определенным).

Если W — компактное подмножество M, то K_σ ограничена при всех $\sigma \in G_W$. В самом деле, отображение k: $TM \times TM \to \mathbb{R}$, заданное формулой $(v, w) \to k(v, w)$, непрерывно, а множество ортонормированных реперов (v, w) в точках множества W компактно (см. замечание (iii) разд. 3.4). Поэтому для компактного подмножества многообразия положительной (отрицательной) кривизны

существуют такие положительные числа $\varkappa$, λ, что для всех $\sigma \in G_W$ имеет место $\varkappa \leqslant K_\sigma \leqslant \lambda$ $(-\lambda \leqslant K_\sigma \leqslant -\varkappa)$.

(iii) Пусть M — риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇, $\dim M = n \geqslant 2$. В дальнейшем для некоторых случаев будет показан геометрический смысл римановой кривизны (см., например, § 4 и 6), пока же приведем без доказательства одно ее фундаментальное свойство.

Пусть Q — замкнутый квадрат в $\mathbb{R}^2$, $f\colon Q \to M$ — дифференцируемое отображение. Число $F = \int\limits_Q \sqrt{k_1(f_*D_1, f_*D_2)}\, dt\, ds$ называется площадью „параметризованной поверхности“ f в M. Фиксируем $p \in M$ и найдем, согласно 5.2, такое действительное число $\delta_0 > 0$, чтобы для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ экспоненциальное отображение $\exp_p$ диффеоморфно отображало шары $U_\delta = \{v\colon v \in M_p, \|v\| < \delta\}$ на строго выпуклые шары $B_\delta = \exp U_\delta$ в M. Тогда три произвольные точки из B_δ определяют геодезический треугольник в B_δ (см. разд. 6.4). Как можно доказать, существует такое число $\mu_0 > 0$, зависящее от δ_0, что для любого геодезического треугольника Δ в B_δ с углами γ_0, γ_1, γ_2 при вершинах p_0, p_1, p_2 справедливо неравенство

$$\left|\frac{\varepsilon}{F} - K_\sigma\right| \leqslant \delta\mu_0, \tag{21}$$

где $\varepsilon = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \pi$ есть „угловой избыток“ Δ, F — „площадь“ Δ, т. е. в случае $n \geqslant 3$ нижняя грань площадей всех натянутых на Δ параметризованных поверхностей, а K_σ — кривизна M „в направлении Δ“, т. е. соответствующая двумерной плоскости $\sigma \subset M_{p_i}$, содержащей касательные векторы к пересекающимся в p_i сторонам Δ, $i = 0, 1, 2$. В классических геометриях на стандартных моделях римановых многообразий постоянной кривизны соблюдается в точности равенство $\frac{\varepsilon}{F} = \varkappa$.

Вследствие (21) на римановом многообразии положительной (отрицательной) кривизны сумма углов достаточно малого геодезического треугольника больше (соответственно меньше) π; обратно, если для всех треугольников сумма углов не меньше (не больше) π, то для всех $\sigma \in G_M$ имеет место $K_\sigma \geqslant 0$ $(K_\sigma \leqslant 0)$ (по этому поводу см. также разд. 6.4 и замечание (iii) разд. 2.6). Вывод неравенства (21) нетруден, он приведен, например, в разд. VII гл. X цитированной в конце этого параграфа книги Э. Картана.

(iv) Пусть M — n-мерное дифференцирумое многообразие $(n \geqslant 2)$, $\varphi \in \mathfrak{F}M$ — положительная дифференцируемая функция и g, $\tilde{g} = \varphi g$ — конформно эквивалентные римановы метрики на M. Рассмотрим связности Леви-Чивита ∇, $\tilde{\nabla}$ для g, $\tilde{g}$. Если $\sigma \in G_M$ — касательная плоскость и v, w составляют ортонормированный базис σ, то из

замечания (vi) разд. 3.5 получается следующее соотношение между римановыми кривизнами K_σ, $\tilde{K}_\sigma$ метрик g, $\tilde{g}$:

$$\varphi\tilde{K}_\sigma = K_\sigma - \frac{1}{2}\left[h_\psi(v, v) + h_\psi(w, w) + \frac{\|\nabla\psi\|^2 - (v\psi)^2 - (w\psi)^2}{2}\right], \quad (22)$$

где $\psi = \log\varphi$. В случае $n = 2$ отсюда вытекает

$$\varphi\tilde{K} = K - \frac{1}{2}\Delta\log\varphi.$$

Таким образом, если, например, умножить каноническую метрику на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^2$ на $\varphi = e^\psi$, где $\psi \in \mathfrak{F}U$ — гармоническая функция (т. е. $\Delta\varphi = 0$), то полученная метрика снова имеет нулевую гауссову кривизну.

Пусть теперь g — стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$, $\varkappa$ — действительное число и $U_\varkappa$ есть $\mathbb{R}^n$ при $\varkappa \geqslant 0$, соответственно шар $\left\{a\colon a \in \mathbb{R}^n, \|a\|^2 < \frac{1}{|\varkappa|}\right\}$ при $\varkappa < 0$. Положим для $a \in U_\varkappa$,

$$\varphi(a) = \frac{4}{(1 + \varkappa\|a\|^2)^2}, \quad \tilde{g} = \varphi g. \quad (23)$$

Проверьте с помощью (22), что риманово многообразие $U_\varkappa$ с метрикой $\tilde{g}$ имеет постоянную кривизну $\tilde{K}_\sigma = \varkappa$; в частности, тензор кривизны для $\tilde{\nabla}$ задается формулой (17), что, впрочем, видно и непосредственно из замечания (vi) разд. 3.5.

Найдем теперь тензор кривизны риманова подмногообразия $S^n_\rho \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Из замечания (iv) разд. 3.2 прежде всего следует, что S^n_ρ есть пространство постоянной кривизны. В самом деле, для любых двух касательных плоскостей $\sigma_1 \subset M_{p_1}$, $\sigma_2 \subset M_{p_2}$ существует такая изометрия $\alpha \in O(n+1)$ сферы S^n_ρ на себя, что $\sigma_2 = \alpha_*\sigma_1$, а риманова кривизна инвариантна при изометриях.

Таким образом, тензор кривизны S^n_ρ имеет вид (17), и остается вычислить постоянную риманову кривизну K. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to S^n_\rho \subset \mathbb{R}^{n+1}$, обратное стереографической проекции x с северного полюса (см. замечание (iii) разд. 1.1). Очевидно, для $a \in \mathbb{R}^n$

$$f(a) = \frac{\rho}{\|a\|^2 + \rho^2}(2\rho a, \|a\|^2 - \rho^2).$$

Вычислив производные компонент $D_i f^k(a)$ $(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n+1)$, легко проверить, что

$$\langle f_*D_i, f_*D_j\rangle = \varphi\langle D_i, D_j\rangle = \varphi\delta_{ij},$$

где

$$\varphi(a) = \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\|a\|^2\right)^2}.$$

Следовательно, f является конформным отображением по отношению к евклидовой метрике на $\mathbb{R}^n$ и изометрией по отношению к метрике $\tilde{g}=\varphi g$ на $\mathbb{R}^n$. Согласно (23), имеем $K_\sigma=\frac{1}{\rho^2}$ для всех касательных плоскостей σ сферы S^n_ρ, а в силу (17) тензор кривизны S^n_ρ есть

$$R(X, Y)Z=\frac{1}{\rho^2}(\langle Y, Z\rangle X-\langle X, Z\rangle Y). \tag{24}$$

В разд. 3.7 мы получим формулу (24) более простым путем.

Таким образом, мы имеем стандартные пространства классической геометрии в виде римановых многообразий: сферу $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ постоянной кривизны $\varkappa>0$ (сферическая геометрия; отождествление диаметрально противоположных точек на сфере приводит к эллиптической геометрии); $\mathbb{R}^n$ с постоянной кривизной $n=0$ (евклидова геометрия); открытый шар $U_\varkappa\subset\mathbb{R}^n$ с метрикой (23) как многообразие постоянной отрицательной кривизны $\varkappa<0$ (гиперболическая геометрия). Метрики (23) были введены Риманом.

С помощью (22) строится другая модель гиперболической плоскости постоянной кривизны $K=-1$. Возьмем в качестве двумерного дифференцируемого многообразия верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$, т. е. открытое подмножество точек $a+ib\in\mathbb{C}$, для которых $b>0$. Введем на $\mathbb{R}^2_+$ метрику $\tilde{g}=\frac{1}{b^2}g$, где g — метрика, индуцированная канонической метрикой $\mathbb{R}^2$. По отношению к карте id имеем $\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0$, $\Gamma^2_{11}=\frac{1}{b}$, $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{22}=-\frac{1}{b}$.

Геодезические $J\to\mathbb{R}^2_+$ с компонентами u, v удовлетворяют, таким образом, дифференциальным уравнениям $\ddot{u}-\frac{2}{v}\dot{u}\dot{v}=0$, $\ddot{v}+\frac{1}{v}(\dot{u}^2-\dot{v}^2)=0$, и все они могут быть продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$. Максимальные нормальные геодезические $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющие очевидному соотношению $\frac{\dot{u}^2+\dot{v}^2}{v^2}=1$, задаются (с точностью до сдвига и перемены знака параметра) уравнениями

$$u(t)=\alpha\operatorname{th}t+\beta, \qquad u(t)=\beta,$$

или

$$v(t)=\frac{\alpha}{\operatorname{ch}t}, \qquad v(t)=e^t,$$

где α, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$.

Образы этих геодезических в $\mathbb{R}^2_+$ суть полуокружности с центрами в точках $(\beta, 0)$ и радиусами α или же полупрямые, параллельные оси v. По существу, т. е. с точностью до несущественных замен параметра, для каждых двух точек $z_1, z_2\in\mathbb{R}^2_+$ есть одна

соединяющая их нормальная геодезическая. Найдите ее длину. Покажите, что отображение $z \to \frac{z-i}{z+i}$ есть изометрия риманова многообразия $\mathbb{R}^2_+$ на U_{-1}. Найдите вид геодезических на $U_\varkappa$. Преобразования единичного круга в себя $z \to e^{i\nu} \frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$, где ν действительно и $|z_0| < 1$, являются изометриями U_{-1}. Можно показать, что ими исчерпывается вся группа изометрий U_{-1}.

(v) Пусть M — связное риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇, и $\dim M = n \geqslant 3$. Если K_σ не зависит от σ в каждой точке $p \in M$, тензор кривизны M имеет вид (17), где $K \in \mathfrak{F}M$. Докажем теорему Шура, утверждающую, что K постоянна. Для этого заметим, что тензор g параллелен, т. е. $\nabla g = 0$, поэтому $\nabla R_1 = 0$. Из (17) и тождества Бьянки (см. замечание (iii) разд. 2.3)

$$(XK)\,R_1(Y, Z, U) + (YK)\,R_1(Z, X, U) + (ZK)\,R_1(X, Y, U) = 0$$

для всех $X, Y, Z, U \in \mathfrak{V}M$. Отсюда уже легко выводится утверждение теоремы Шура (причем существенно используется предположение $\dim M \geqslant 3$). Докажем теорему, аналогичную теореме Шура: если кривизна Риччи в каждой точке постоянна, то она постоянна вообще. Для доказательства заметим, что в условиях теоремы тензор Риччи $c_1 R$ пропорционален метрическому тензору, т. е. $c_1 R = \lambda g$, где $\lambda \in \mathfrak{F}M$. Но в таком случае из тождества Бьянки и замечания (iv) разд. 2.3 следует, что λ постоянна.

Римановы многообразия с постоянной кривизной Риччи называются также многообразиями Эйнштейна. Покажите, что связное трехмерное многообразие Эйнштейна есть многообразие постоянной кривизны.

(vi) Пусть M_1, M_2 — римановы многообразия, $M_1 \times M_2$ — их риманово произведение (см. замечание (ii) разд. 3.1). Покажите, что связность Леви-Чивита на $M_1 \times M_2$ есть произведение соответствующих связностей на M_1 и M_2 (см. разд. 2.4). Докажите формулу, связывающую тензоры кривизны R^1, R^2, R многообразий M_1, M_2, $M_1 \times M_2$:

$$\langle R(X, Y)\,Z, U\rangle = \langle R^1(X_1 Y_1)\,Z_1, U_1\rangle + \langle R^2(X_2, Y_2)\,Z_2, U_2\rangle, \qquad (25)$$

где $X, Y, Z, U \in \mathfrak{V}(M_1 \times M_2)$, $X_i = \pi_{i*}X$, $Y_i = \pi_{i*}Y$, $Z_i = \pi_{i*}Z$, $U_i = \pi_{i*}U$ — векторные поля вдоль естественных проекций π_i, т. е. компоненты X, Y, Z, U по отношению к TM_i $(i = 1, 2)$ (см. замечание (iii) разд. 2.4). Выведите из (25), что риманова кривизна K_σ обращается в нуль в каждой точке $(p, q) \in M_1 \times M_2$ для всех плоскостей $\sigma \in G_{(p,q)}$, „расположенных касательно к M_1 и M_2“, т. е. таких, что $\dim \pi_{1*}\sigma = \dim \pi_{2*}\sigma = 1$. Если M_1, M_2 — многообразия положительной (отрицательной) кривизны, то $M_1 \times M_2$ имеет неотрицательную (неположительную) риманову кривизну, причем $K_\sigma = 0$ в каждой точке $(p, q) \in M_1 \times M_2$ для тех и только тех

плоскостей σ, которые касательны к M_1 и M_2. Вычислите для $S^n_{\rho_1} \times S^k_{\rho_2}$ риманову кривизну и кривизну Риччи. Скалярная кривизна в этом случае постоянна, $s = \frac{n(n-1)}{\rho_1^2} + \frac{k(k-1)}{\rho_2^2}$. Кривизна Риччи r всегда положительна при $n, k > 1$; если $S^n_{\rho_1}$, $S^k_{\rho_2}$ имеют одну и ту же кривизну Риччи $r = \frac{n-1}{\rho_1^2} = \frac{k-1}{\rho_2^2}$, то r постоянна на их произведении.

(vii) Еще один класс римановых многообразий, для которых кривизны вычисляются относительно просто, образуют симметрические и однородные пространства. Пусть M — связное риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇. Многообразие M называется *локально симметрическим пространством*, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность V и такая изометрия ι_p этой окрестности на себя, что $\iota_{p*} v = -v$ для всех $v \in M_p$ или, что эквивалентно предыдущему, все проходящие через p геодезические отражаются в точке p, т. е. для геодезической c: $[-\alpha, \alpha] \to M$, удовлетворяющей условию $c(0) = p$, справедливо соотношение $\iota_p \circ c(t) = c(-t)$. Таким образом, ι_p есть отражение в точке p, для которого $\iota_p \circ \iota_p = \mathrm{id}$, а точка p является (локально) единственной неподвижной точкой. Если при этом для каждой точки $p \in M$ можно взять в качестве V все M, то M называется глобально симметрическим, или просто *симметрическим пространством*. Например, $\mathbb{R}^n$ и S^n_ρ, очевидно, симметрические пространства (см. замечание (vi) разд. 3.8). Известна теорема Э. Картана, по которой односвязное локально симметрическое пространство глобально симметрично, если его связность Леви-Чивита полна [1]). Покажите, что, с другой стороны, на глобально симметрическом пространстве все геодезические могут быть продолжены на $\mathbb{R}$.

Из леммы 2 разд. 3.5 следует, что если M — симметрическое пространство и X — параллельное векторное поле вдоль геодезической c: $\mathbb{R} \to M$, то для t_1, $t \in \mathbb{R}$, $p = c(t_1)$ имеем $\iota_{p*} X(t_1 + t) = -X(t_1 - t)$. Согласно (13) разд. 3.5, отсюда следует, что $\langle R(X, Y)Z, U\rangle$ постоянно для любых параллельных вдоль c полей X, Y, Z, U. Поэтому R параллельно, т. е. $\nabla R = 0$ (предполагается лишь локальная симметричность M). Как мы увидим в замечании (ii) разд. 6.3, верно и обратное: если $\nabla R = 0$, то M локально симметрично. Таким образом, M локально симметрично тогда и только тогда, когда его тензор кривизны параллелен. Например, любое пространство постоянной кривизны симметрично, так как из (17) следует $\nabla R = 0$, см. замечание (v).

[1]) Доказательство, см., например, в книге С. Хелгасона «Дифференциальная геометрия и симметрические пространства», М., 1964. — *Прим. перев.*

Покажем теперь, что каждая связная группа Ли G с биинвариантной метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ есть глобально симметрическое пространство (см. замечание (v) разд. 3.2), если определить отражение ι_g: $G \to G$ относительно точки $g \in G$ формулой $\iota_g h = gh^{-1}g$. Так как $\iota_e = L_{g^{-1}} \circ \iota_e \circ R_{g^{-1}}$, то ι_{e*}: $G_g \to G_{g^{-1}}$ есть изометрия. В самом деле, левые и правые сдвиги суть изометрии G, и $\iota_{e*}v = -v$ для $v \in G_e$, поскольку ι_e производит отражение в однопараметрических подгруппах G (см. замечание (v) разд. 2.7). Следовательно, ι_e есть изометрия G на себя, а значит, и $\iota_g = L_g \circ \iota_g \circ L_{g^{-1}}$; далее, $\iota_{g*}v = -v$ для $v \in G_e$. Пусть ∇ — связность Леви-Чивита биинвариантной метрики $\langle\ ,\ \rangle$ и c: $\mathbb{R} \to G$ — геодезическая связности ∇, удовлетворяющая условию $c(0) = e$. Для любого $t_1 \in \mathbb{R}$ отображение ι_p отражает c относительно точки $p = c(t_1)$, откуда $c(t_1)\,c(t_1 + t)^{-1}\,c(t_1) = c(t_1 - t)$. Из этого соотношения индуктивно получаем $c(mt_1) = c(t_1)^m$ для любого целого числа m, а затем доказываем, что $c(t_1 + t) = c(t_1)\,c(t)$, сначала для рациональных t_1, t, а затем, в силу непрерывности c, для всех действительных. Таким образом, c есть гомоморфизм $\mathbb{R} \to G$, и образ его есть однопараметрическая подгруппа G, иными словами, интегральный путь левоинвариантного векторного поля X на G, удовлетворяющего условию $X_e = \dot{c}(0)$. Мы видим, что геодезические ∇ совпадают с геодезическими канонической левоинвариантной связности на G. Следовательно, они являются интегральными путями левоинвариантных векторных полей. В частности, для левоинвариантного поля X, согласно замечанию (ii) разд. 2.7, имеем $\nabla_X X = 0$.

Пусть теперь X, Y, Z, U — левоинвариантные поля на G. Получите из (7) разд. 3.5 и $\nabla_X X = 0$, что $\langle [X, Y], Y\rangle = 0$; поэтому $\langle [X, Y], Z\rangle$ антисимметрична по всем трем аргументам. Тензор кручения T левоинвариантной связности G оказывается, таким образом, ортогональным по отношению к биинвариантной метрике (см. замечание (ii) разд. 3.5). Далее, поле $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ левоинвариантно. Теперь легко проверить, что

$$R(X, Y)Z = -\tfrac{1}{4}[[X, Y], Z],$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle = -\tfrac{1}{4}\langle [X, Y], [Z, U]\rangle. \tag{26}$$

Отсюда следует, что риманова кривизна группы Ли с биинвариантной метрикой неотрицательна. Для некоторых плоскостей она может обращаться в нуль, например в случае $G = \mathbb{R}^n$. С помощью (26) вычислите еще раз тензор кривизны и риманову кривизну группы Ли $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ с индуцированной биинвариантной метрикой (см. замечание (iv) разд. 1.3). Рассмотрите более общий случай, когда на трехмерном дифференцируемом многообразии

заданы векторные поля X_1, X_2, X_3, образующие параллелизацию и удовлетворяющие соотношениям $[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2}$ (индексы считаются по модулю 3), и покажите, что если с помощью этой параллелизации ввести каноническую риманову метрику (в которой X_1, X_2, X_3 ортонормированы), то получается пространство постоянной кривизны $K = 1$.

Другие примеры компактных симметрических пространств можно получить, введя на проективных пространствах $P^n(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{H})$, $P^2(\mathrm{Ca})$ (см. замечание (v) разд. 1.7) естественную метрику, возникающую из их представления в виде однородных пространств. Их кривизна положительна и при надлежащей нормировке принимает в каждой точке значения, заполняющие интервал $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$. Эти пространства входят в более общий класс римановых многообразий — однородных пространств некоторой группы Ли G по ее замкнутой подгруппе Ли H, снабженных инвариантной метрикой.

Так как G действует на G/H как группа изометрий посредством левых сдвигов, кривизны в произвольной точке q могут быть определены, если их вычислить в единственной точке p. В самом деле, существует изометрия ι пространства G/H, переводящая p в q. Более того, тензор кривизны нормальной метрики на G/H задается относительно простыми выражениями, аналогичными формуле (26) для групп Ли, и вычисляется с помощью алгебраических операций по алгебрам Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ групп G, H с помощью инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$. Несмотря на это, уже, например, выяснение точной области значений скалярных кривизн может оказаться для таких пространств затруднительным. Если G компактна, то G/H с любой нормальной метрикой есть пространство неотрицательной римановой кривизны, однако пространства этого типа со строго положительной кривизной весьма немногочисленны (см. разд. 7.9 и замечание (iv) разд. 7.5).

3.7. Относительные кривизны

Очень часто приходится иметь дело с римановыми многообразиями, изометрически вложенными в другие римановы многообразия, например с подмногообразиями евклидовых пространств, заданными с помощью уравнений. В таких случаях так называемый второй основной тензор измеряет, насколько вложенное многообразие искривлено по отношению к объемлющему. Замечательно, что при этом определенный внутренним образом риманов тензор кривизны вложенного многообразия может быть выражен через второй основной тензор и тензор кривизны объемлющего многообразия. Для случая поверхностей в $\mathbb{R}^3$ это было впервые обнаружено Гауссом в его „Theorema egregium“. Второй основной тензор, как правило, легче поддается вычислению в конкретных случаях,

чем риманов тензор кривизны; тем самым мы получаем ценное средство для вычисления скалярных кривизн, в особенности в случае обращения в нуль тензора кривизны объемлющего многообразия, например, евклидова пространства.

Рассмотрим несколько более общий случай. Пусть M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия, $\dim M = n$ и $\iota\colon M \to \tilde{M}$ — изометрическое отображение (тем самым погружение). Обозначим через ∇, $\tilde{\nabla}$ связности Леви-Чивита и через R, $\tilde{R}$ тензоры кривизны M, $\tilde{M}$.

Определим для векторного поля Y вдоль ι „перемещенную обратно“ касательную компоненту ${}^{\top}Y \in \mathfrak{X}M$ с помощью соотношения

$$\langle {}^{\top}Y, X\rangle = \langle Y, \iota_* X\rangle \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{X}M \tag{1}$$

(см. лемму 1 разд. 3.5). Из разд. 3.5 ясно, что $\iota_*^{\top} Y = Y^{\top}$ и ${}^{\top}({}^{\top}Y) = {}^{\top}Y$. Отображение $S\colon \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}_{\iota}^{\perp} \to \mathfrak{X}M$, заданное формулой

$$S(X, N) = {}^{\top}(\tilde{\nabla}_X N), \tag{2}$$

называется *вторым основным тензором изометрического отображения* ι[1]). Отображение S билинейно над кольцом $\mathfrak{F}M$, что проверяется без труда. Докажите, например, однородность по второму аргументу. По лемме 2.3 тензор $S(X, N)|_p$ зависит лишь от значений N_p и X_p.

Таким образом, мы получаем отображение $S\colon \nu \times TM \to TM$, где ν — нормальное расслоение ι (см. замечание (iii) разд. 3.8).

При фиксированном поле нормалей $N \in \mathfrak{X}_{\iota}^{\perp}$ отображение $S(X, N)$ обращается в тензорное поле S_N типа (1,1):

$$S_N X = S(X, N). \tag{3}$$

С помощью этого тензора определяется билинейная форма

$$l_N(X, Y) = \langle S_N X, Y\rangle. \tag{4}$$

Покажем, что эта форма симметрична. Прежде всего из равенств (1) — (4), соотношения ортогональности $\langle N, \iota_* Y\rangle = 0$ и тождества Риччи (2) разд. 3.4 имеем

$$l_N(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X N, \iota_* Y\rangle = -\langle N, \tilde{\nabla}_X \iota_* Y\rangle. \tag{5}$$

Так как связность $\tilde{\nabla}$ не имеет кручения, то из (6) разд. 2.5 следует

$$-\langle N, \tilde{\nabla}_X \iota_* Y\rangle = -\langle N, \tilde{\nabla}_Y \iota_* X + \iota_*[X, Y]\rangle = -\langle N, \tilde{\nabla}_Y \iota_* X\rangle = l_N(Y, X).$$

[1]) Приведенное здесь изложение теории второго основного тензора принадлежит П. Домбровскому, см. цитированную в конце замечания (vii) работу.

S_N называется *вторым основным тензором*, а $l_N(X, Y)$ — *второй основной формой* по отношению к нормальному векторному полю N. Для $p \in M$ и $u, v \in M_p$, $w \in M_p^{\perp}$ обычным образом определяются $S_w(u)$ и $l_w(u, v)$ (здесь $M_p^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $\iota_* M_p$ в $\tilde{M}_{\iota(p)}$). При этом S_w: $M_p \to M_p$ оказывается самосопряженным по отношению к метрике M_p эндоморфизмом. Если $\| w \| = 1$, то инварианты этого эндоморфизма называются *относительными кривизнами* M в точке p в направлении нормали w. Из них важнее всего n (действительных) собственных значений S_w, которые называются *главными кривизнами* M; соответствующие собственные векторы задают прямые, называемые *направлениями главных кривизн*. Из главных кривизн составляются *средняя кривизна* H_w и *кривизна Гаусса — Кронеккера* G_w на M по отношению к w:

$$H_w = \frac{1}{n} \operatorname{tr} S_w, \quad G_w = \det S_w. \tag{6}$$

Для ортонормированного базиса $v_1, \ldots, v_n$ на M_p имеем $G_w = \det(l_w(v_i, v_j))$.

Пусть теперь коразмерность погружения равна 1, т. е. $\dim \tilde{M} = n + 1$, и оба многообразия M, $\tilde{M}$ ориентируемы (см. разд. 7.4), тогда, как мы сейчас покажем, можно построить поле единичных нормалей N вдоль ι глобально на всем M. А именно, в каждой точке $p \in M$ подпространство N_p выбирается таким образом, чтобы для любого положительно ориентированного базиса $v_1, \ldots, v_n$ в M_p векторы $(N_p, \iota_* v_1, \ldots, \iota_* v_n)$ составляли положительно ориентированный базис в $\tilde{M}_{\iota(p)}$. В этом случае можно обозначить второй основной тензор и вторую основную форму относительно N просто через S, соответственно l (впрочем, остается еще зависимость от выбора ориентаций, так что S и l определяются с точностью до знака). При этом S называется просто вторым основным тензором, а l — второй основной формой погружения ι, а инварианты S — относительными кривизнами ι. Средняя кривизна $H = \frac{1}{n} \operatorname{tr} S$ и кривизна Гаусса — Кронеккера погружения ι суть дифференцируемые функции на M, причем G для четного n, как легко видеть, не зависит от выбора ориентаций M, $\tilde{M}$. Регулярный путь c: $J \to M$, нормированное касательное поле которого $\frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$ в каждой точке $t \in J$ имеет направление главной кривизны, называется *линией кривизны*.

Перейдем к соотношениям, связывающим тензоры кривизны M, $\tilde{M}$ и второй основной тензор. Эти соотношения содержатся в следующих равенствах, представляющих обобщение классической гауссовой „Theorema egregium“. При этом, как мы уже говорили,

разность между внутренними кривизнами $\tilde{M}$ и M выражается через относительную кривизну M в $\tilde{M}$.

Лемма (Уравнения Гаусса)

Усл. $\iota\colon M \to \tilde{M}$ — *изометрическое отображение*, $\dim \tilde{M} \geqslant 2$, *коразмерность погружения* $\dim \tilde{M} - \dim M = m$. *Для* $p \in M$ *векторы* $u, v, w, z \in M_p$ *и* $N_1, \ldots, N_m$ — *ортонормированные базисные векторы в* $M_p^{\perp}$. *Для каждого* N_i *определены эндоморфизм* $S_i = S_{N_i}$ *пространства* M_p *и вторая основная форма* $l_i = l_{N_i}$ *относительно* N_i. *Через* k, $\tilde{k}$ *обозначаются соответствующие* R, $\tilde{R}$ *биквадратичные формы* (*разд.* 3.6).

Утв.

$$R(u, v)w - {}^{\top}(\tilde{R}(\iota_* u, \iota_* v)\iota_* w) = \sum_{\mu=1}^{m} [l_\mu(v, w) S_\mu u - l_\mu(u, w) S_\mu v]; \quad (7)$$

$$R(u, v)w, z\rangle - \langle \tilde{R}(\iota_* u, \iota_* v)\iota_* w, \iota_* z\rangle = \sum_{\mu=1}^{m} [l_\mu(v, w) l_\mu(u, z) - l_\mu(u, w) l_\mu(v, z)]; \quad (8)$$

$$k(u, v) = \tilde{k}(u, v) + \sum_{\mu=1}^{m} \det \begin{pmatrix} l_\mu(u, u) & l_\mu(u, v) \\ l_\mu(u, v) & l_\mu(v, v) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тензор, стоящий в левой части (7), называется „тензором разности кривизн“ погружения ι.

Док. (8) и (9) есть тривиальные следствия (7).

Для доказательства (7) продолжим $N_1, \ldots, N_m$ локально до ортонормированных векторных полей в $\mathfrak{B}_\iota^{\perp}$, обозначив их также через $N_1, \ldots, N_m$. Продолжим u, v, w локально до векторных полей X, Y, $Z \in \mathfrak{B}M$. Тогда S_μ и l_μ канонически продолжаются до тензорных полей.

Разложим $\tilde{\nabla}_Y \iota_* Z$ на касательную и нормальную составляющие и применим лемму 2 разд. 3.5:

$$\tilde{\nabla}_Y \iota_* Z = (\tilde{\nabla}_Y \iota_* Z)^{\top} + (\tilde{\nabla}_Y \iota_* Z)^{\perp} = \iota_* \nabla_Y Z + \sum_{\mu=1}^{m} \langle N_\mu, \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z\rangle N_\mu.$$

Ковариантно дифференцируя по X, находим

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z = \tilde{\nabla}_X \iota_* \nabla_Y Z + \sum_{\mu=1}^{m} [X(\langle N_\mu, \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z\rangle) N_\mu + \langle N_\mu, \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z\rangle \tilde{\nabla}_X N_\mu],$$

отсюда

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z)^{\top} = \iota_* \nabla_X \nabla_Y Z + \sum_{\mu=1}^{m} \langle N_\mu, \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z\rangle (\tilde{\nabla}_X N_\mu)^{\top}.$$

Перемещая обратно касательные составляющие, получаем из (3) и (5)

$$^{\top}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z) = \nabla_X \nabla_Y \iota_* Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \sum_{\mu=1}^{m} l_\mu(Y, Z) S_\mu X.$$

Меняя местами X и Y, получаем аналогичное выражение для $^{\top}(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \iota_* Z)$, а в силу $^{\top}(\tilde{\nabla}_{[X,Y]} \iota_* Z) = \nabla_{[X,Y]} Z$ из определения тензора кривизны и (7) разд. 2.5 следует

$$R(X, Y) Z - {}^{\top}(\tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y) \iota_* Z) = \sum_{\mu=1}^{m} [l_\mu(Y, Z) S_\mu X - l_\mu(X, Z) S_\mu Y],$$

что и доказывает лемму.

В частности, при $\dim M = 2$ и $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$, т. е. для поверхности в $\mathbb{R}^3$, из (9) сразу же вытекает, что риманова и гауссова кривизны M совпадают.

Замечания

(i) Геометрический смысл второго фундаментального тензора проще всего уяснить себе в случае изометрического вложения $\iota\colon M \subset \tilde{M}$ коразмерности 1. Если N — нормальное поле постоянной длины, то $\tilde{\nabla}_X N$ везде касательна. При этом $\iota_* S_N X = \tilde{\nabla}_X N$ выражает „скорость отклонения" нормального поля N от параллельного поля при смещении в направлении X. При более высокой коразмерности это истолкование неприменимо, поскольку $\tilde{\nabla}_X N$ может иметь нормальную составляющую для нормального поля N постоянной длины. Однако заданный единичный нормальный вектор N_p в точке $p \in M$ всегда можно локально продолжить до единичного нормального поля N таким образом, что для всех $v \in M_p$ вектор $\tilde{\nabla}_v N$ будет касательным. Такое поле можно построить, например, следующим способом. Пусть Y — векторное поле вдоль вложения ι, полученное из N_p параллельным переносом в $\tilde{M}$ вдоль исходящих из p геодезических M. Положим $N = \frac{Y^{\perp}}{\|Y^{\perp}\|}$ в некоторой окрестности p. Тогда $\tilde{\nabla}_v Y^{\perp} = -\tilde{\nabla}_v Y^{\top}$; легко проверить, что $\tilde{\nabla}_v Y^{\top}$ и тем самым $\tilde{\nabla}_v Y^{\perp}$ — касательный вектор. Так как $v\|Y^{\perp}\| = \frac{\langle \tilde{\nabla}_v Y^{\perp}, Y^{\perp} \rangle}{\|Y^{\perp}\|} = 0$, то вектор $\tilde{\nabla}_v \frac{Y^{\perp}}{\|Y^{\perp}\|}$ тоже касательный.

Приведем другое геометрическое истолкование второго основного тензора. Для вектора $v \in M_p$ и нормального вектора $w \in M_p^{\perp}$ рассмотрим дифференцируемый путь $c\colon [0, \beta] \to M$, удовлетворяющий условию $\dot{c}(0) = v$, а также параллельное относительно $\tilde{\nabla}$

векторное поле Y вдоль c, для которого $Y(0) = w$. Легко проверить (см. теорему 2 разд. 2.6), что

$$S_w v = {}^{\top}(\tilde{\nabla}_D Y^{\perp})|_0 = -{}^{\top}(\tilde{\nabla}_D Y^{\top})|_0 = -\lim_{t\to 0}\frac{{}^{\top}Y(t)}{t}.$$

Следовательно, $\iota_* S_w v = -\lim_{t\to 0}\frac{Y^{\top}(t)}{t}$ есть скорость, с которой Y отклоняется от нормального к M положения при смещении в направлении v. Эта интерпретация могла бы мотивировать противоположный выбор знака в определении S.

(ii) Рассмотрим риманово многообразие $\tilde{M}$ размерности $n \geqslant 2$, возьмем точку $p \in \tilde{M}$. Пусть σ — двумерное линейное подпространство M_p, U — некоторая окрестность 0 в σ, которую экспоненциальное отображение exp: $T\tilde{M} \to \tilde{M}$ диффеоморфно вкладывает в $\tilde{M}$. Тогда $M = \exp(U)$ с индуцированной из $\tilde{M}$ метрикой становится двумерным римановым подмногообразием $\tilde{M}$, причем $M_p = \sigma$. Покажите, что риманова кривизна $K_p = K_\sigma$ подмногообразия M в точке p совпадает с римановой кривизной $\tilde{K}_\sigma$ многообразия $\tilde{M}$ в двумерном направлении σ. Для этого достаточно заметить, что при $v \in \sigma$

$$l_N(v, v) = \langle \nabla_{\dot{c}(0)} N, \dot{c}(0)\rangle = \langle \nabla_D (N \circ c), \dot{c}\rangle|_0 = D\langle N \circ c, \dot{c}\rangle|_0 = 0,$$

где $c(t) = \exp(tv)$ и N — произвольное нормальное поле в окрестности p на M.

(iii) Риманово подмногообразие M риманова многообразия $\tilde{M}$ называется *вполне геодезическим* в $\tilde{M}$, если все геодезические M являются также геодезическими $\tilde{M}$. Покажите, что M является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда его второй основной тензор равен нулю.

(iv) Рассмотрим изометрическое погружение ι: $M \to \tilde{M}$ коразмерности 1 и единичное нормальное поле N вдоль M (которое существует глобально, если M и $\tilde{M}$ ориентируемы). Пусть S — второй основной тензор относительно N или, как мы его назвали выше, второй основной тензор погружения ι. Рассматривая тензорное поле S типа (1,1) как антисимметрическое, применим к нему дифференцирование Картана (см. замечание (iv) разд. 2.3); таким образом, мы получаем антисимметрический тензор dS типа (2,1). Докажите уравнение Кодацци: $dS(X, Y) = {}^{T}\tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y)N$. Из этого соотношения вытекает, что

$$\langle dS(X, Y), Z\rangle = -\langle \tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y)\iota_* Z, N\rangle,$$

т. е. $\langle dS(X, Y), Z\rangle$ есть взятая со знаком минус нормальная компонента $\tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y)\iota_* Z$.

Если, в частности, $\tilde{R}=0$, как, например, в случае $\tilde{M}=\mathbb{R}^n$, то $dS=0$, или, что то же самое, тензор ∇S симметричен.

(v) Укажем геометрический смысл кривизны Гаусса – Кронеккера.

Пусть M – ориентированное n-мерное риманово подмногообразие $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. ориентированная гиперповерхность (можно доказать ориентируемость любого подмногообразия $\mathbb{R}^{n+1}$ коразмерности 1). Тогда, очевидно, вдоль M можно построить глобальное поле единичных нормалей N. Пусть S – второй основной тензор относительно N, π_0: $T\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ – проекция, на каждом слое $T\mathbb{R}^{n+1}$ обратная каноническому изоморфизму. Гауссово сферическое отображение γ: $M\to S^n$ определяется формулой $\gamma=\pi_0\circ N$, оно называется также „отображением посредством параллельных нормалей“. Покажите, что $\pi_0\circ\gamma_*=\pi_0\circ S$ (допуская некоторую неточность, можно сказать, что $\gamma_*=S$ после параллельного сдвига. Кривизна Гаусса – Кронеккера $\det S_p=\det\gamma_{*p}$ есть тем самым мера растяжения объема M в точке p при гауссовом сферическом отображении.

(vi) Рассмотрим поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$. Пусть φ: $J\to\mathbb{R}^2$ – регулярный путь с компонентами φ_1, φ_2, причем $\varphi_1(t)>0$ для $t\in J$. Поверхностью вращения, полученной вращением φ вокруг второй координатной оси, называется образ „периодического“ погружения f: $J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, заданного формулой

$$f(t,\ s)=(\varphi_1(t)\cos s,\ \varphi_1(t)\sin s,\ \varphi_2(t)).$$

Поле единичных нормалей N вдоль f имеет вид

$$N(t,\ s)=(\dot\varphi_1^2+\dot\varphi_2^2)^{-\frac{1}{2}}[\dot\varphi_2(t)\cos sD_1\circ f(t,\ s)+$$
$$+\dot\varphi_2(t)\sin sD_2\circ f(t,\ s)-\dot\varphi_1(t)D_3\circ f(t,\ s)].$$

Пусть S – второй основной тензор относительно N. Покажите, что

$$f_*SD_1=\nabla_{D_1}N=\frac{\dot\varphi_1\ddot\varphi_2-\dot\varphi_2\ddot\varphi_1}{(\dot\varphi_1^2+\dot\varphi_2^2)^{3/2}}f_*D_1,\quad f_*SD_2=\nabla_{D_2}N=\frac{\dot\varphi_2}{\varphi_1(\dot\varphi_1^2+\dot\varphi_2^2)^{1/2}}f_*D_2.$$

Двумерный тор T^2 посредством вращения пути $\varphi=(R+r\cos t,\ r\sin t)$ погружается в $\mathbb{R}^3$ при $R,\ r>0$ и вкладывается в $\mathbb{R}^3$ при $R>r>0$. Легко найти для погружения тора главные кривизны

$$\lambda_1=\frac{1}{r},\quad \lambda_2=\frac{\cos t}{R+r\cos t},$$

среднюю кривизну

$$H=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{R+2r\cos t}{2r(R+r\cos t)}$$

и гауссову (риманову) кривизну

$$G = K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\cos t}{r(R + r\cos t)}.$$

Укажите на торе области положительной и отрицательной кривизн. В качестве второго примера возьмем поверхность вращения цепной линии $\varphi(t) = (\operatorname{ch} t, t)$, называемую катеноидом. В этом случае главные кривизны равны

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

Катеноид есть, таким образом, поверхность нулевой средней кривизны ($H = 0$); такие поверхности называются „минимальными". При этом его гауссова кривизна $G = K = -\frac{1}{\operatorname{ch}^4 t}$ везде отрицательна.

Постройте поверхность вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

(vii) Покажем, как можно вычислять кривизны многообразий, заданных уравнениями. Пусть $\tilde{M}$ — $(n+1)$-мерное риманово многообразие (в большинстве встречающихся примеров $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$), $f\colon \tilde{M} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и 0 — регулярное значение f. Тогда $M = f^{-1}(0)$ с индуцированной римановой метрикой есть n-мерное риманово подмногообразие $\tilde{M}$. Поле $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_M$ есть единичное поле нормалей вдоль M. Пусть S — второй основной тензор, l — вторая основная форма, H — средняя кривизна и G — гауссова кривизна M по отношению к N. Покажите, что для $p \in M$ и $v, w \in M_p$

$$Sv = \frac{1}{\|\nabla f\|_p}\left(H_f v - \frac{h_f(\nabla f, v)}{\|\nabla f\|_p^2}\nabla f|_p\right) = \frac{1}{\|\nabla f\|_p}(H_f v)^{\top}, \tag{10}$$

$$l(v, w) = \frac{1}{\|\nabla f\|_p} h_f(v, w), \tag{11}$$

$$H = \frac{1}{n\|\nabla f\|}\left(\Delta f - \frac{h_f(\nabla f, \nabla f)}{\|\nabla f\|^2}\right). \tag{12}$$

Выведите отсюда формулу, связывающую римановы кривизны K_σ, $\tilde{K}_\sigma$ многообразий M, $\tilde{M}$ в направлении двумерного подпространства $\sigma \subset M_p$ с ортонормированным базисом v, w:

$$K_\sigma = \tilde{K}_\sigma + \frac{1}{\|\nabla f\|^2}\det\begin{pmatrix} h_f(v, v) & h_f(v, w) \\ h_f(v, w) & h_f(w, w)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Чтобы получить явную формулу для гауссовой кривизны, напомним некоторые понятия линейной алгебры. Пусть E — действи-

тельное векторное пространство размерности n, $A\colon E\to E$ — эндоморфизм, $\chi(\lambda)$ — характеристический полином A со свободным членом $(-1)^n \det A$. Определим полином $\rho(\lambda)$ тождеством $\lambda\rho(\lambda) = \det A - (-1)^n\chi(\lambda)$. В силу известного тождества $\chi(A) = 0$ имеем $A\rho(A) = \det A \cdot \mathrm{id}$. В любом базисе E эндоморфизм $A^c = \rho(A)$ изображается матрицей, элементы которой суть алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы эндоморфизма A.

Если в E введена евклидова метрика $\langle\ ,\ \rangle$ и F есть $(n-1)$-мерное подпространство E, то с помощью ортогональной проекции $P\colon E\to F$ получаем эндоморфизм $P\circ A\colon F\to F$. Покажите, что

$$\det(P\circ A) = \langle A^c w,\ w\rangle, \tag{14}$$

где w — единичный вектор, ортогональный к F. В силу (10) отсюда вытекает формула для кривизны Гаусса — Кронеккера подмногообразия M:

$$G = \det S = \frac{1}{\|\nabla f\|^{n+2}}\langle H_f^c \nabla f,\ \nabla f\rangle. \tag{15}$$

Если M описывается более чем одним уравнением, т. е. является прообразом регулярного значения 0 дифференцируемого отображения $f\colon \tilde{M}\to\mathbb{R}^m$, то градиенты $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ составляют базис нормального расслоения подмногообразия $M = f^{-1}(0)$. После ортогонализации из них получается m ортонормированных нормальных полей вдоль M, с помощью которых можно получить из (9) формулу для вычисления кривизн, аналогичную (13). Явные формулы и их подробное обсуждение см. в работе П. Домбровского (Dombrowski P., *Krümmungsgrößen gleichungsdefinierten Untermannigfaltigkeiten Riemannscher Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der DMV, 1967).

(viii) Рассмотрим в качестве примера симметрическую билинейную форму Φ на $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть B — самосопряженный относительно $\langle\ ,\ \rangle$ эндоморфизм, для которого $\langle Bp, q\rangle = \Phi(p, q)$, f — соответствующая квадратичная форма $f(p) = \Phi(p, p)$. Для регулярного значения ρ^2 функции f получаем риманово подмногообразие $M = f^{-1}(\rho^2)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Покажите, что

$$\nabla f|_p = 2Bp, \quad H_f = 2B, \quad h_f = 2\Phi,$$

$$K_\sigma = \frac{4}{\|\nabla f\|_p^2}\det\begin{pmatrix}\Phi(v, v) & \Phi(v, w)\\ \Phi(v, w) & \Phi(w, w)\end{pmatrix},$$

после канонического отождествления касательных пространств к $\mathbb{R}^{n+1}$ с $\mathbb{R}^{n+1}$ (здесь $p\in M$, σ — плоскость в M_p с ортонормированным базисом v, w). Формула для K_σ показывает, что M является пространством положительной кривизны в том и только том случае, если форма Φ положительно определена; в этом случае M —

эллипсоид. Например, M есть сфера при $\Phi = \langle\ ,\ \rangle$ и, как легко видеть, $\| \nabla f \|_p = 2\rho$, $K_\sigma = \frac{1}{\rho^2}$.

Пользуясь методами этого раздела, выведите заново формулу (24) разд. 3.6. Поскольку для поверхностей в $\mathbb{R}^3$ гауссова и риманова кривизны совпадают, формула (15) оказывается в этом случае удобным средством вычисления римановой кривизны. При этом нет надобности явно находить какие-либо касательные векторы. Проверьте, что эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ имеет кривизну $K=\left[abc\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\right]^{-2}$, гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — кривизну $K=-\left[abc\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}-\frac{z^2}{c^4}\right)\right]^{-2}$, параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ — кривизну $K=\left[ab\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+1\right)\right]^{-2}$.

3.8. Различные замечания

В этом разделе мы рассмотрим некоторые приложения и примеры экспоненциального отображения; в частности, мы введем специальные виды координат, полезные при изучении ряда вопросов. Вначале сделаем общее замечание по поводу римановой метрики.

(i) Многие понятия и результаты этого параграфа дословно переносятся на более общий случай, когда на дифференцируемом многообразии определена симметрическая и невырожденная, но не обязательно положительно определенная форма g. В общем случае можно определить на M связность без кручения, по отношению к которой тензорное поле g параллельно. Например, в основе общей теории относительности лежит четырехмерное многообразие M с симметрическим основным тензором $\langle\ ,\ \rangle$, индуцирующим в каждом касательном пространстве M_p „лоренцово скалярное произведение“ $\langle\ ,\ \rangle$: в M_p существует базис из векторов v_1, v_2, v_3, v_4, для которых

$$\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_3, v_3\rangle = 1, \quad \langle v_4, v_4\rangle = -1,$$

а попарные произведения равны нулю.

(ii) Нормальные координаты, почти нормальные координаты, координаты Ферми.

Пусть M — риманово многообразие с метрическим тензором g и связностью Леви-Чивита ∇, $\exp\colon \widetilde{TM} \to M$ — экспоненциальное отображение для ∇.

Пусть $p \in M$. Карта x с областью определения $U \ni p$ называется *нормальной* в точке p, если существуют такой открытый

шар $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ радиуса ε с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$ и такая линейная изометрия $\iota\colon \mathbb{R}^n \to M_p$, что $\exp \circ \iota$ диффеоморфно отображает U_ε на U и $x = (\exp \circ \iota|_{U_\varepsilon})^{-1}$. В этом случае U называется „ε-шаром" M с центром в p, а функции x^i называются *римановыми нормальными координатами*. Так как $\exp_p$ имеет в точке $0 \in M_p$ максимальный ранг, то в каждой точке M существует нормальная карта.

Покажем, что если x — нормальная карта в точке $p \in M$ с областью определения U, то компоненты g_{ij} тензора g и компоненты связности Γ^k_{ij} относительно x удовлетворяют условиям

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \Gamma^k_{ij}(p) = 0, \tag{1}$$

$i, j, k = 1, \ldots, n$. Чтобы доказать (1), рассмотрим геодезические $c_i\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, заданные формулой $c_i(t) = \exp \circ \iota(te_i) = \exp(t\iota e_i)$, где ε — достаточно малое число. Очевидно, $\dot{c}_i(0) = \iota e_i$. С другой стороны, $c_i(t) = x^{-1}(te_i)$, откуда $\dot{c}_i(0) = x_*^{-1} D_i|_0 = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. Так как ι изометрично, отсюда следует первое из соотношений (1).

Для доказательства второго из этих соотношений построим для каждого $a \in \mathbb{R}^n$ геодезическую $c\colon J \to U$ по формуле $c(t) = \exp(t\iota a)$. Тогда $x \circ c(t) = ta$, и вследствие (3) разд. 2.7 имеем $\sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma^k_{ij} \circ c)\, a^i a^j = 0$; в частности, $\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(p)\, a^i a^j = 0$ для всех a, откуда $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$.

Нормальными координатами и инвариантностью экспоненциального отображения по отношению к изометрическим отображениям ((12) разд. 3.5) можно воспользоваться для доказательства следующей теоремы единственности: если M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия одинаковой размерности и f, $g\colon M \to \tilde{M}$ — изометрические отображения, M связно и в некоторой точке p имеет место $f(p) = g(p)$, $f_{*p} = g_{*p}$, то $f = g$. Для этого надо проверить, что множество точек, в которых f, f_* совпадают с g, g_*, открыто и замкнуто в M.

Пусть $p \in M$. Карта x вокруг p с областью определения U называется *почти нормальной*, если справедливы равенства (1) и $x(p) = 0$. Таким образом, нормальная карта также является и почти нормальной. Для локальных вычислений почти нормальные карты часто так же удобны, как и нормальные, построение же их проще (см. замечание (vi)).

Пусть J — открытый интервал в $\mathbb{R}$ и $c\colon J \to M$ — нормальная геодезическая. Рассмотрим сначала отображения $\iota\colon \mathbb{R}^{n-1} \times J \to TM$, обладающие следующими свойствами:

(a) При $i=1, \ldots, n-1$ отображения X_i: $J \to TM$, заданные формулой $X_i(t)=\iota(e_i, t)$, суть параллельные векторные поля вдоль c.

(b) Для каждого $t \in J$ отображение ι линейно отображает каждый слой $\mathbb{R}^{n-1} \times t$ на $M_{c(t)}$, причем векторы $X_1(t), \ldots, X_{n-1}(t)$, $\dot{c}(t)$ образуют ортонормированный базис $M_{c(t)}$.

Отображения с требуемыми свойствами существуют; достаточно взять для некоторой точки $t_0 \in J$ векторы $v_1, \ldots, v_{n-1} \in M_{c(t_0)}$, составляющие вместе с $\dot{c}(t_0)$ ортонормированный базис, затем построить однозначно определенные параллельные векторные поля X_i вдоль c, удовлетворяющие условиям $X_i(t_0)=v_i$, и положить $\iota(a, t)=\sum_{i=1}^{n-1} a^i X_i(t)$ $((a, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times J)$. Карта x с областью определения U называется *картой Ферми* вдоль c, если существуют такой открытый ε-шар U_ε в $\mathbb{R}^{n-1}$ с центром в 0 и такое отображение ι: $\mathbb{R}^{n-1} \times J \to TM$, обладающее свойствами (a) и (b), что $\exp \circ \iota$ диффеоморфно отображает цилиндр $U_\varepsilon \times J$ на U и $x=\left(\exp \circ \iota|_{U_\varepsilon \times J}\right)^{-1}$. В этом случае U называется „ε-цилиндром“ вдоль c, а функции x^i называются *координатами Ферми*.

Докажем существование координат Ферми в окрестности инъективной нормальной геодезической c: $J \to M$. Построим сначала отображение ι: $\mathbb{R}^{n-1} \times J \to TM$, удовлетворяющее требованиям (a), (b). Тогда $\exp \circ \iota(a, t)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} a^i X_i(t)\right)$, отображение $\exp \circ \iota$ дифференцируемо, а из соотношений $\exp \circ \iota(se_i, t)=\exp(sX_i(t))$, $\exp \circ \iota(0, t)=c(t)$ следует

$$(\exp \circ \iota)_* D_i|_{0, t}=X_i(t), \quad (\exp \circ \iota)_* D_n|_{0, t}=\dot{c}(t), \tag{2}$$

где $i=1, \ldots, n-1$. Поэтому при всех $t_0 \in J$ отображение $\exp \circ \iota$ имеет максимальный ранг в $(0, t_0)$ и, следовательно, диффеоморфно отображает некоторую окрестность $U_{\varepsilon_0} \circ J_0$ точки $(0, t_0)$ на некоторый ε_0-цилиндр вдоль $c|_{J_0}$. Из леммы 2 разд. 2.8 вытекает теперь, что для каждой геодезической $c|_{J_1}$, где $J_1 \subset J$ — компактный интервал, существует окрестность $c(J_1)$, в которой можно построить координаты Ферми. Легко показать также, что в некоторой окрестности $c(J)$ существует карта x, которая является картой Ферми на каждом ε-цилиндре, содержащем $c(J_1)$, где $J_1 \subset J$ — произвольный компактный интервал, а ε зависит от J_1 (см. теорему 2 разд. 2.8). Если, наконец, c не инъективна, то существует отображение $G \to M$, где $G \supset (0 \times J)$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^{n-1} \times J$, локальное обращение которого является картой Ферми в окрестности каждой точки $c(t)$, $t \in J$. Координаты

Ферми обладают следующими свойствами. Если x — карта Ферми с областью определения U вдоль геодезической c, то для компонент g_{ij} тензора g и Γ_{ij}^k связности ∇ относительно x справедливы соотношения

$$g_{ij} \circ c(t) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k \circ c = 0 \quad (i, j, k = 1, \ldots, n, t \in J). \tag{3}$$

Первое из этих соотношений получается из (b) и (2), так как

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{0,t} = x_*^{-1} D_i|_{0,t} = X_i(t), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_{0,t} = x_*^{-1} D_n|_{0,t} = \dot{c}(t).$$

Рассмотрим теперь геодезические $c(s, t) = \exp \circ \iota(sa, t)$, где $a' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in J$. Как и в доказательстве (1), находим, что $\sum_{i,j=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k \circ c(t)\, a^i a^j = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, откуда $\Gamma_{ij}^k \circ c = 0$ при $i, j = 1, \ldots, n-1$, $k = 1, \ldots, n$. Наконец, $\Gamma_{jn}^k \circ c = \Gamma_{nj}^k \circ c = 0$ при $j, k = 1, \ldots, n$, так как в силу замечания (iv) разд. 2.5 имеем

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \circ c(t) = \nabla_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{D_t}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \circ c\right),$$

а $\frac{\partial}{\partial x^j} \circ c = X_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ и $\frac{\partial}{\partial x^n} \circ c = \dot{c}$ — параллельные векторные поля вдоль c.

В окрестности произвольного нормального пути c можно построить координаты, аналогичные координатам Ферми, но в случае $i = j = n$, вообще говоря, уже не будет выполнено условие $\Gamma_{ij}^k \circ c = 0$ (см. по этому поводу замечание (iii)).

(iii) Экспоненциальное отображение подмногообразия.

Специальные координаты, введенные в (ii), являются в некотором смысле частными случаями более общей конструкции. Пусть M — n-мерное риманово многообразие, N — k-мерное подмногообразие M, $\iota\colon N \subset M$ — включение. Естественная проекция $\pi\colon TM \to M$ дифференцируема с максимальным рангом, поэтому прообраз $\pi^{-1}(N)$ есть дифференцируемое подмногообразие TM размерности $n+k$ (см. замечание (iv) разд. 1.6). Покажите, что проекция $f\colon \pi^{-1}(N) \to TN$, заданная формулой $f(v) = v^\top$, трансверсально регулярна к нулевому сечению N расслоения TN, и поэтому *нормальное расслоенное пространство* $\nu = f^{-1}(N)$ подмногообразия N есть дифференцируемое подмногообразие $\pi^{-1}(N)$ размерности n. Пространство ν естественным образом является пространством векторного расслоения, слоем которого над $p \in N$ служит ортогональное дополнение $N_p^\perp$ касательного простран-

ства N_p в M_p; это расслоение называется *нормальным расслоением* N в M. Нормальное расслоение (обозначим его также через ν) не обязательно тривиально, т. е. может не быть произведением $N \times \mathbb{R}^{n-k}$ в том смысле, что над N существует $n-k$ линейно независимых сечений ν. Например, нормальное расслоение ν диагонали в $M \times M$ изоморфно касательному расслоению TM (изоморфизм индуцируется проекцией π_{1*}: $T(M \times M) \to TM$) и, следовательно, не тривиально, если не тривиально TM.

В общем случае, для любого погружения ι: $N \to M$ можно определить нормальное расслоение погружения ι, как расслоение над N, слоем которого в каждой точке $p \in N$ является ортогональное дополнение $N_p^{\perp}$ к линейному подпространству $\iota_* N_p$ в $M_{\iota(p)}$; структура дифференцируемого многообразия получается так же, как выше, поскольку локально ι является вложением.

Рассмотрим экспоненциальное отображение exp: $\widetilde{TM} \to M$ для M, и положим $\tilde{\nu} = \nu \cap \widetilde{TM}$. Экспоненциальным отображением подмногообразия N в M называется отображение $\exp_N$: $\tilde{\nu} \to M$, заданное формулой $\exp_N = \exp|_{\tilde{\nu}}$. Если, в частности, N есть точка p, то мы возвращаемся к отображению $\exp_p$. Ясно, что $\exp_N$ дифференцируемо и отображает исходящие из 0 лучи $N_p^{\perp}$ в исходящие из N геодезические M, ортогональные N. Покажите, что $\exp_N$ имеет на нулевом сечении $N \subset \nu$ максимальный ранг. Выведите отсюда (см. теорему 2 разд. 2.8), что если N замкнуто, то некоторая окрестность N в ν диффеоморфно отображается с помощью $\exp_N$ на некоторую окрестность N в M.

Таким образом, $\exp_N$ позволяет естественно ввести параметризацию окрестности N в M, если дана параметризация N; это обобщает специальные конструкции координатных систем, приведенные выше.

(iv) Экспоненциальное отображение цилиндра.

Рассмотрим функцию F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой $F(a) = a_1^2 + a_2^2 - 1$; 0 является ее регулярным значением, так что по лемме 2 разд. 1.6 цилиндр $C = F^{-1}(0)$ есть двумерное дифференцируемое риманово подмногообразие $\mathbb{R}^3$. Накрывающее отображение ι: $\mathbb{R}^2 \to C$, заданное формулой $\iota(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$, изометрично, потому что для $p = (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ и $q = \iota(p) \in C$ векторы $w_1 = \iota_* D_1|_p$, $w_2 = \iota_* D_2|_p$ составляют ортонормированный базис C_q. Из (12) разд. 3.5 и замечания (i) разд. 2.9 видно, что для $v = sw_1 + tw_2 \in C_q$

$$\exp_q(v) = (\cos(s + s_0), \sin(s + s_0), t + t_0).$$

Отображение $\exp_q$ определено на всем касательном пространстве C_q, сюръективно и везде дифференцируемо с максимальным рангом,

но в целом не инъективно. Все непостоянные геодезические суть винтовые линии, за исключением периодических накрывающих окружностей $s \to \exp_q(sw_1)$; все остальные нетривиальные геодезические инъективны. Каждую пару точек $q, q' \in C$ можно соединить геодезическими сколь угодно большой длины.

(v) Экспоненциальное отображение конуса.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^3_+ = \{a \in \mathbb{R}^3\colon a_3 > 0\}$ функцию $F(a) = a_1^2 + a_2^2 - \frac{1}{\varkappa^2 - 1} a_3^2$, где $\varkappa > 1$; 0 является регулярным значением F, и полуконус $C = F^{-1}(0)$ есть тем самым двумерное риманово подмногообразие $\mathbb{R}^3$. Полагая $\mathbb{R}_+ = \{r\colon r > 0\}$ и $U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, построим погружение $h\colon U \to \mathbb{R}^2$ по формуле $h(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. После этого можно задать на надрезанной плоскости $V = \mathbb{R}^2 - \{(s, t)\colon t = 0, s \geqslant 0\}$ отображение $\iota\colon V \to G$, удовлетворяющее соотношению

$$\iota \circ h(r, \varphi) = \left(\frac{r}{\varkappa}\cos\varkappa\varphi, \frac{r}{\varkappa}\sin\varkappa\varphi, \frac{r}{\varkappa}\sqrt{\varkappa^2 - 1}\right), \quad (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi). \tag{4}$$

Отображение ι сюръективно, а также изометрично, потому что $\langle (\iota \circ h)_* D_i|_p, (\iota \circ h)_* D_j|_p\rangle = \langle h_* D_i|_p, h_* D_j|_p\rangle$ для всех точек p из области определения $\iota \circ h$. В случае, если $\varkappa > 1$ — натуральное число, формула (4) задает даже накрытие $\iota\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to C$ (при этом под (r, φ) понимается любая точка U). При $\varkappa = 3$, например, имеем

$$\iota(s, t) = \left(-s + \frac{4}{3}\frac{s^3}{s^2 + t^2},\ t - \frac{4}{3}\frac{t^3}{s^2 + t^2},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{s^2 + t^2}\right).$$

Для $p = (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ и $q = \iota(p) \in C$ векторы $w_1 = \iota_* D_1|_p$, $w_2 = \iota_* D_2|_p$ образуют ортонормированный базис C_q. Так же, как и в замечании (iv), для вектора $v = sw_1 + tw_2 \in C_q$ имеем

$$\exp_q(v) = \left(-(s + s_0) + \frac{4}{3}\frac{(s + s_0)^3}{(s + s_0)^2 + (t + t_0)^2},\right.$$
$$\left. t + t_0 - \frac{4}{3}\frac{(t + t_0)^3}{(s + s_0)^2 + (t + t_0)^2},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(s + s_0)^2 + (t + t_0)^2}\right),$$

за исключением случая $v = \lambda(-s_0 w_1 - t_0 w_2)$, $\lambda \geqslant 1$. Область определения $\exp_p$ есть, следовательно, C_q, из которой выброшена полупрямая. Исходящая из q геодезическая в направлении $-s_0 w_1 - t_0 w_2$ есть образующая конуса, подходящая к вершине, не принадлежащей C. Отображение $\exp_q$ сюръективно и является погружением. Геодезические C, вообще говоря, не инъективны; например, полагая $s_0 = 0$, $t_0 = 1$ и определив $c\colon \mathbb{R} \to C$ формулой $c(\lambda) = \exp_p(\lambda w_1)$, имеем $c(\sqrt{3}) = c(-\sqrt{3})$, $\dot{c}(\sqrt{3}) \neq \dot{c}(-\sqrt{3})$, так что геодезическая c пересекает сама себя под ненулевым углом.

Изучите поведение геодезических C, рассматривая их как образы прямых $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Покажите, что на C нет периодических геодезических.

(vi) Экспоненциальное отображение сферы.

Рассмотрим риманово подмногообразие $M = S^n_\rho \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Для любой пары ортонормированных векторов e, $\tilde{e} \in \mathbb{R}^{n+1}$ построим путь c: $[0, 2\pi\rho] \to S^n_\rho$ по формуле

$$c(t) = \rho e \cos \frac{t}{\rho} + \rho \tilde{e} \sin \frac{t}{\rho}. \tag{5}$$

Путь c периодичен и нормален. Образ c, называемый меридианом или большим кругом, проходящим через ρe и $\rho\tilde{e}$, есть пересечение S^n_ρ с порожденным e, $\tilde{e}$ двумерным подпространством $\mathbb{R}^{n+1}$. Из леммы 2 разд. 3.5 сразу же следует, что c есть геодезическая на M, так как ковариантная производная в $\mathbb{R}^{n+1}$ касательного векторного поля к c ортогональна M (см. замечание (iv) разд. 3.5). В северном полюсе $p = (0, \ldots, 0, \rho) \in M$ векторы $\iota_* w_i = D_i|_p$ $(i = 1, \ldots, n)$ образуют ортонормированный базис в M_p. Теперь экспоненциальное отображение $\exp_p$: $M_p \to M$ находится с помощью следующей формулы (где $v = a^1 w_1 + \ldots + a^n w_n \in M_p$):

$$\exp_p(v) = p \cos \frac{\|a\|}{\rho} + \rho \frac{a}{\|a\|} \sin \frac{\|a\|}{\rho} \tag{6}$$

при $v \neq 0$, $\exp_p(0) = p$.

В самом деле, при $v \in M_p$ путь $c(t) = \exp_p(tv)$ есть геодезическая на M, удовлетворяющая условию $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$, как мы видели выше. Отображение $\exp_p$ определено на всем касательном пространстве и, согласно общей теории, имеет максимальный ранг в некоторой окрестности точки $0 \in M_p$. Легко проверить, что $\exp_p$ не имеет максимального ранга при $n > 1$ в том и только том случае, когда $\|v\| = \nu\pi\rho$ и $\nu > 0$ — целое число. При $n = 1$ отображение $\exp_p$ есть погружение и накрывающее отображение. Для $v \in M_p$, $\|v\| = \nu\pi\rho$, имеем

$$\exp_p v = (0, \ldots, 0, (-1)^\nu \rho), \quad \operatorname{rang} \exp_p|_v = 1. \tag{7}$$

Ядро эндоморфизма $\exp_{p*}$: $(M_p)_v \to M_{\exp_p v}$ есть подпространство Λ^v_p, состоящее из всех таких $b \in (M_p)_v$, для которых $(\exp_p)_* b = 0$. В силу (6) имеем

$$\begin{aligned} &\dim \Lambda^v_p = n - 1 \quad \text{при} \quad \|v\| = \nu\pi\rho, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \\ &\dim \Lambda^v_p = 0 \qquad \text{в остальных случаях.} \end{aligned} \tag{8}$$

Отображение $\exp_p$ наматывает исходящие из 0 лучи M_p на большие круги M. При этом $(n-1)$-мерные сферы M_p радиуса $\nu\pi\rho$

с центром 0 отображаются попеременно в северный и южный полюсы M. Отображение $\exp_p$ сюръективно, а на множествах

$$\{v:\ v \in M_p,\ \|v\| < \pi\rho\},\quad \{v:\ v \in M_p,\ \nu\pi\rho < \|v\| < (\nu+1)\pi\rho\}$$

также инъективно.

Чтобы построить экспоненциальное отображение в любой точке $q \in M$, воспользуемся изометрией $\alpha \in O(n+1)$, для которой $\alpha p = q$. Тогда, согласно (12) разд. 3.5, имеем $\exp_q = \alpha \circ \exp_p \circ \alpha_*^{-1}$. В частности, все геодезические $\mathbb{R} \to M$ либо постоянны, либо периодичны, причем образами их являются большие круги.

В разделах 3.6 и 3.7 мы вычислили различными способами тензор кривизны сферы. Найдем теперь R еще раз, прямым вычислением в локальных координатах. Хотя в этом случае такой метод не очень удобен, он дает представление о более общей ситуации, когда требуется найти кривизны абстрактно заданного риманова многообразия. Мы найдем R в северном полюсе p, применив для этого почти нормальные координаты в p; нормальная карта (т. е. обращение экспоненциального отображения) привела бы к более сложным выкладкам.

Определим на множестве $V = \left\{ b \in \mathbb{R}^n:\ -\frac{\pi}{2}\rho < b_1, \ldots, b_{n-1} < \frac{\pi}{2}\rho,\ -\pi\rho < b_n < \pi\rho \right\}$ отображение $z\colon V \to M$ с помощью формул

$$z^k(b) = \rho \sin\frac{b_k}{\rho} \prod_{\lambda=1}^{k-1} \cos\frac{b_\lambda}{\rho}\ (1 \leqslant k \leqslant n),\quad z^{n+1}(b) = \rho \prod_{\lambda=1}^{n} \cos\frac{b_\lambda}{\rho}.$$

Отображение z есть вложение, и $x = z^{-1}$ есть карта на сфере M с областью определения U, состоящей из всех таких точек $a \in M$, для которых либо $a_n \neq 0$, либо $a_{n+1} > 0$ (или то и другое вместе); иначе говоря, U есть сфера, „надрезанная“ вдоль $(n-1)$-мерной полусферы $\{a_n = 0,\ a_{n+1} \leqslant 0\}$. Функции x^i называются сферическими или „географическими“ координатами. Учитывая замечание (i) разд. 3.2, находим

$$g_{ij} \circ z(b) = \delta_{ij} \prod_{\lambda=1}^{i-1} \cos^2\frac{b_\lambda}{\rho}.$$

Отсюда видно, что

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}.$$

Согласно (8) разд. 3.5, имеем

$$g_{kk}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

откуда

$$\Gamma^k_{ij} \circ z(b) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{b_i}{\rho} \quad (1 \leqslant i < j = k \leqslant n),$$

$$\Gamma^k_{ij} \circ z(b) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{b_j}{\rho} \quad (1 \leqslant j < i = k \leqslant n),$$

$$\Gamma^k_{ij} \circ z(b) = \frac{1}{\rho} \sin \frac{b_k}{\rho} \cos \frac{b_k}{\rho} \prod_{\lambda=k+1}^{i-1} \left(\cos \frac{b_\lambda}{\rho}\right)^2 \quad (1 \leqslant k < i = j \leqslant n),$$

$$\Gamma^k_{ij} \circ z(b) = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Таким образом, в северном полюсе $p = (0, \ldots, 0, \rho)$, действительно, $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$, и карта x почти нормальна в p. Положим $X_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $k = 1, \ldots, n$, тогда $X_k|_p$ образуют ортонормированный базис в M_p. Компоненты тензора кривизны в точке p задаются равенством $R(X_i, X_j) X_k|_p = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk}|_p X_l|_p$. Согласно замечанию (i) разд. 2.3, имеем

$$R^l_{ijk}|_p = (X_i \Gamma^l_{jk} - X_j \Gamma^l_{ik})|_p = (D_i \Gamma^l_{jk} \circ z - D_j \Gamma^l_{ik} \circ z)|_0 = \frac{1}{\rho^2}(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}).$$

Отсюда $R(X_i, X_j) X_k|_p = \dfrac{1}{\rho^2}(\delta_{jk} X_i|_p - \delta_{ik} X_j|_p)$. Следовательно, для всех u, v, $w \in M_p$ имеет место

$$R(u, v) w = \frac{1}{\rho^2}(\langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v),$$

поскольку последнее соотношение достаточно проверить для векторов, принадлежащих ортонормированному базису M_p. Зная тензор кривизны в северном полюсе, мы легко получаем формулу (24) разд. 3.6 для любой точки, ввиду однородности сферы и формулы (13) разд. 3.5. В случае общего риманова многообразия аналогичные вычисления приходится выполнить, вообще говоря, для каждой точки в отдельности.

ЛИТЕРАТУРА К § 3

Cartan E., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier — Villars (1946), Paris. (Имеется русский перевод предыдущего издания.)

Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, М., 1948.

Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964.

Kobayashi S. and Nomizu K., Foundations of differential geometry I, Interscience Publishers (1963), New York — London.

Singer I. and Thorpe J., Lectures on elementary topology and geometry, Scott — Foresman Co. (1967), Glenview.

Willmore T. I., An introduction to differential geometry, Oxford University Press (1959).

§ 4. Экстремальные свойства геодезических

4.1. Вариации геодезической

Со времен возникновения римановой геометрии (а для поверхностей — еще раньше) известно, что геодезические риманова многообразия M локально минимизируют длину дифференцируемых путей; это означает, что для достаточно близких точек $p, q \in M$ существует геодезическая с концами p, q, которая короче всех других путей, соединяющих p с q. Именно эта вариационная задача и привела впервые к геодезическим. Но гораздо позже развилось вариационное исчисление в целом. Морс первым отметил последствия того факта, что геодезические, соединяющие p с q, суть экстремали (или „критические точки“) функционала длины на пространстве Ω_{pq} всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$ с концами p, q (см. книгу Морса, указанную в конце этого параграфа). В теории Морса показывается, что топология Ω_{pq} и, значит, в известном смысле топология M определяются геодезическими, соединяющими p с q, и их вторыми вариациями, если только M полно и p, q выбраны надлежащим образом (см., например, разд. 7.6). Основная формула для второй вариации содержит риманову кривизну, и на этом обстоятельстве прямо или косвенно основываются сильнейшие известные результаты о связи между топологией и кривизной.

В этом параграфе через M обозначается n-мерное риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇.

Пусть $c\colon [\alpha, \beta] \to M$ — дифференцируемый путь, J — открытый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0. *Вариацией* (или дифференцируемой гомотопией) c называется дифференцируемое отображение $V\colon [\alpha, \beta] \times J \to M$, такое, что $V(t, 0) = c(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Отображение V называется *собственной вариацией*, если $V(\alpha, \varepsilon) = c(\alpha)$, $V(\beta, \varepsilon) = c(\beta)$ при всех $\varepsilon \in J$.

Пути $V_\varepsilon\colon [\alpha, \beta] \to M$, заданные формулой $V_\varepsilon(t) = V(t, \varepsilon)$, называются соседними с c по отношению к вариации V. Введем еще функцию $L(\varepsilon) = L(V_\varepsilon)$, сопоставляющую каждому пути V_ε его длину.

Формула (2) для второй вариации, содержащаяся в следующей теореме, была впервые получена Сингом.

Теорема (Первая и вторая вариации длины дуги)

Усл. *c: $[\alpha, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая, V: $[\alpha, \beta] \times J \to M$ — вариация c; X, $Y \in \mathfrak{B}_V$ — векторные поля вдоль V, заданные формулами $X = V_* D_1$, $Y = V_* D_2$. Векторное поле $\tilde{Y} \in \mathfrak{B}_V$ определяется формулой $\tilde{Y} = Y - \langle Y, X\rangle X$.*

Утв. *Длина пути $L(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in J$) есть дифференцируемая функция от ε, при этом*

$$L'(0) = \langle Y, X\rangle|_{t,0}|_\alpha^\beta, \tag{1}$$

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, \nabla_{D_1}\tilde{Y}\rangle - \langle R(Y, X), X, Y\rangle)|_{t,0}\, dt + \langle \nabla_{D_2} Y, X\rangle|_{t,0}|_\alpha^\beta. \tag{2}$$

Если V — собственная вариация, то

$$L'(0) = 0, \tag{3}$$

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, \nabla_{D_1}\tilde{Y}\rangle - \langle R(Y, X)X, Y\rangle)|_{t,0}\, dt. \tag{4}$$

Геометрически $\tilde{Y}|_{t,0}$ есть нормальная к геодезической компонента векторного поля Y вдоль c.

Док. По определению $L(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \|X(t, \varepsilon)\|\, dt$. Так как $X \in \mathfrak{B}_V$ и $\|X(t, 0)\| = \|\dot{c}(t)\| = 1$, а $\|X\|$ непрерывна на компактном интервале $[\alpha, \beta]$, то существует такая окрестность нуля $J_0 \subset J$, что $\|X\|$ не обращается в нуль на $[\alpha, \beta] \times J_0$. Тогда функция L дифференцируема на J_0, и для $\varepsilon \in J_0$ в силу тождества Риччи (см. (2) разд. 3.4)

$$L'(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \frac{D_2\langle X, X\rangle|_{t,\varepsilon}}{2\|X(t, \varepsilon)\|}\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{\langle \nabla_{D_2} X, X\rangle|_{t,\varepsilon}}{\|X(t, \varepsilon)\|}\, dt.$$

Далее, пользуясь тем, что у связности ∇ нет кручения[1]), получаем из (6) разд. 2.5 и $[D_1, D_2] = 0$ соотношение $\nabla_{D_2} V_* D_1 = \nabla_{D_1} V_* D_2$, или, что то же самое, $\nabla_{D_2} X = \nabla_{D_1} Y$. Отсюда

$$L'(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \frac{\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle|_{t,\varepsilon}}{\|X(t, \varepsilon)\|}\, dt. \tag{5}$$

---

[1]) В доказательстве используется лишь ортогональность тензора кручения т. е. условие $\langle T(A, B), B\rangle = 0$. В самом деле, из этого условия вытекает $\langle \nabla_{D_2} V_* D_1, V_* D_1\rangle = \langle \nabla_{D_1} V_* D_2, V_* D_1\rangle$ (по этому поводу см. замечание (ii) разд. 3.5).

По определению геодезической

$$\nabla_{D_1} X|_{t,0} = \nabla_D \dot{c}|_t = 0 \tag{6}$$

и, следовательно, $\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle|_{t,0} = D_1\langle Y, X\rangle|_{t,0}$. Так как для нормальной геодезической $\|\dot{c}_t\| = \|X(t,0)\| = 1$, имеем $L'(0) = \langle Y, X\rangle|_{t,0}|_\alpha^\beta = 0$, что и доказывает утверждение (1).

Переходим к доказательству (2). Из (5) получаем $L''(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta D_2\left(\frac{\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle}{\|X\|}\right)\Big|_{t,\varepsilon} dt$. Вычислим производную под знаком интеграла, применив снова тождество Риччи:

$$D_2\left(\frac{\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle}{\|X\|}\right) = \frac{\langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y, X\rangle + \langle \nabla_{D_1} Y, \nabla_{D_2} X\rangle}{\|X\|} - \frac{\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle^2}{\|X\|^3}.$$

Найдем эту производную при $\varepsilon = 0$, пользуясь соотношениями $\nabla_{D_2} X = \nabla_{D_1} Y$ и $\|X\|_{t,0} = 1$:

$$\langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y, X\rangle|_{t,0} + \langle \nabla_{D_1} Y, \nabla_{D_1} Y\rangle|_{t,0} - \langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle^2|_{t,0}.$$

В силу (6) имеем

$$\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle|_{t,0} = D_1\langle Y, X\rangle|_{t,0} - \langle Y, \nabla_{D_1} X\rangle|_{t,0} = D_1\langle Y, X\rangle|_{t,0},$$
$$\langle \nabla_{D_1} Y, X\rangle^2|_{t,0} = \langle D_1\langle Y, X\rangle X, D_1\langle Y, X\rangle X\rangle|_{t,0}.$$

Теперь можно записать два последних члена интересующей нас производной в виде

$$\langle \nabla_{D_1} Y, \nabla_{D_1} Y\rangle - \langle D_1\langle Y, X\rangle X, D_1\langle Y, X\rangle X\rangle,$$

и подставить вместо Y в первое слагаемое $\tilde{Y} + \langle Y, X\rangle X$; применив снова (6), получаем

$$\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, \nabla_{D_1}\tilde{Y}\rangle|_{t,0} + 2\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, D\langle Y, X\rangle X\rangle|_{t,0}.$$

Поскольку $\langle \tilde{Y}, X\rangle|_{t,0} = 0$, то из тождества Риччи и (6) имеем $\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, X\rangle|_{t,0} = 0$, и остается лишь $\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, \nabla_{D_1}\tilde{Y}\rangle|_{t,0}$. Таким образом,

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y, X\rangle + \langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, \nabla_{D_1}\tilde{Y}\rangle)|_{t,0}\, dt.$$

Введем в это выражение тензор кривизны. Так как $[D_1, D_2] = 0$, из (7) разд. 2.5 имеем $R(X, Y)Y = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2} Y - \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y$, а в силу (6) и тождества Риччи $\langle \nabla_{D_1}\nabla_{D_2} Y, X\rangle|_{t,0} = -D_1\langle \nabla_{D_2} Y, X\rangle|_{t,0}$, откуда

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle \nabla_{D_1}\tilde{Y}, \nabla_{D_1}\tilde{Y}\rangle - \langle R(X, Y)Y, X\rangle)|_{t,0}\, dt + \langle \nabla_{D_2} Y, X\rangle|_{t,0}|_\alpha^\beta.$$

Чтобы получить отсюда (4), остается применить тождество (4) разд. 3.6. В случае собственной вариации при всех $\varepsilon \in J$ имеем

$V(\alpha, \varepsilon) = c(\alpha)$, $V(\beta, \varepsilon) = c(\beta)$, откуда $V_*D_2|_{\alpha, \varepsilon} = Y(\alpha, \varepsilon) = 0$, $V_*D_2|_{\beta, \varepsilon} = Y(\beta, \varepsilon) = 0$. Следовательно, $\nabla_{D_1} Y|_{\alpha, 0} = \nabla_{D_2} Y|_{\beta, 0} = 0$, что доказывает (3) и (4).

Пусть $I = [\alpha, \beta]$ и c: $I \to M$ — дифференцируемый путь. Кусочно дифференцируемый путь Y: $I \to TM$, удовлетворяющий условию $\pi \circ Y = c$, *называется кусочно гладким векторным полем вдоль* c. Существует, следовательно, такое конечное множество I_0 внутренних точек I, что на $I \setminus I_0$ векторное поле Y дифференцируемо.

Определим отображение Y': $I \to TM$, полагая $Y'(t) = (\nabla_D Y)(t)$ при $t \in I \setminus I_0$ и доопределив Y' в точках I_0 так, чтобы отображение было непрерывным слева. Ясно, что если $Y \in \mathfrak{B}_c$, то $Y' = \nabla_D Y \in \mathfrak{B}_c$. Множество всех кусочно гладких векторных полей вдоль c образует векторное $\mathbb{R}$-пространство, подпространством которого является $\mathfrak{B}_c$.

Пусть c: $I \to M$ — дифференцируемый путь, J — открытый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0. Непрерывное отображение V: $I \times J \to M$ называется *ломаной вариацией* c, если существуют такое натуральное число k и такие действительные числа $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k = \beta$, что для $\nu = 1, \ldots, k$ и $I_\nu = [\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]$ отображения $V|_{I_\nu \times J}$ суть вариации соответствующих путей $c|_{I_\nu}$. Соседние с c пути V_ε: $I \to M$ ломаной вариации вследствие непрерывности V кусочно дифференцируемы. Пусть $L_\nu(\varepsilon)$ — функция длины пути, соответствующая вариации $V|_{I_\nu \times J}$; тогда функция длины $L(\varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{k} L_\nu(\varepsilon)$ для вариации V дифференцируема в некоторой окрестности нуля в J, если все $c|_{I_\nu}$ — регулярные пути, так как в этом случае каждое слагаемое $L_\nu(\varepsilon)$ обладает тем же свойством.

Так как $\left(V|_{I_\nu \times J}\right)(\gamma_\nu, \varepsilon) = \left(V|_{I_{\nu+1} \times J}\right)(\gamma_\nu, \varepsilon)$ $(\nu = 1, \ldots, k-1)$, то отображение V_*D_2: $I \times J \to TM$, заданное формулой $V_*D_2|_{t, \varepsilon} = \left(V|_{I_\nu \times J}\right)_* D_2|_{t, \varepsilon}$ для $t \in I_\nu$, непрерывно, а отображение Y: $I \to TM$, заданное формулой $Y(t) = V_*D_2|_{t, 0}$, есть кусочно гладкое векторное поле вдоль c. Положим $X_\nu = \left(V|_{I_\nu}\right)_* D_1$, $Y_\nu = \left(V|_{I_\nu}\right)_* D_2$, $\tilde{Y}_\nu = Y_\nu - \langle Y_\nu, X_\nu \rangle X_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, тогда в силу (1), (2) для нормальной геодезической c

$$L'(0) = \sum_{\nu=1}^{k} \langle Y_\nu, X_\nu \rangle|_{t, 0}\Big|_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu},$$

$$L''(0) = \sum_{\nu=1}^{k} \left[\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} \left(\langle \nabla_{D_1} \tilde{Y}_\nu, \nabla_{D_1} \tilde{Y}_\nu \rangle - \langle R(Y_\nu, X_\nu) X_\nu, Y_\nu \rangle \right)|_{t, 0}\, dt + \right.$$

$$\left. + \langle \nabla_{D_2} Y_\nu, X_\nu \rangle|_{t, 0}\Big|_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} \right].$$

Введем теперь обозначение $Y_\perp = Y|_{t,0} - \langle Y|_{t,0}, \dot c\rangle \dot c$ (вспомните геометрический смысл $\tilde Y$). Тогда $\nabla_{D_1}\tilde Y_\nu|_{t,0} = Y'_\perp(t)$ для $t \in [\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]$ и $X_\nu|_{t,0} = \dot c(t)$. Далее, имеем $Y_\nu|_{\gamma_\nu,\varepsilon} = Y_{\nu+1}|_{\gamma_\nu,\varepsilon}$ $(\nu = 1, \ldots, k-1)$, откуда $\nabla_{D_2}Y_\nu|_{\gamma_\nu,\varepsilon} = \nabla_{D_2}Y_{\nu+1}|_{\gamma_\nu,\varepsilon}$; вследствие этого мы приходим к обобщению формул (1) и (2) на ломаные вариации нормальной геодезической c:

$$L'(0) = \langle Y, \dot c\rangle|_\alpha^\beta, \tag{7}$$

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta \left(\langle Y'_\perp, Y'_\perp\rangle - \langle R(Y, \dot c)\dot c, Y\rangle\right)|_t\, dt + \\ + \langle \nabla_{D_2}Y_k|_{\beta,0}, \dot c(\beta)\rangle - \langle \nabla_{D_2}Y_1|_{\alpha,0}, \dot c(\alpha)\rangle, \tag{8}$$

где $|_t$ означает, что Y следует брать при $\varepsilon = 0$. В случае собственной вариации V имеем $Y(\alpha) = Y(\beta) = 0$ и $\nabla_{D_2}Y_1|_{\alpha,0} = \nabla_{D_2}Y_k|_{\beta,0} = 0$, что приводит к обобщению формул (3), (4):

$$L'(0) = 0, \tag{9}$$

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta \left(\langle Y'_\perp, Y'_\perp\rangle - \langle R(Y, \dot c)\dot c, Y\rangle\right)|_t\, dt. \tag{10}$$

Из свойств тензора кривизны сразу же вытекает, что $\langle R(Y, \dot c)\dot c, Y\rangle = \langle R(Y_\perp, \dot c)\dot c, Y_\perp\rangle$. Это значит, что на значение интеграла „второй вариации“ (8) и соответственно (10) влияет лишь ортогональная к $\dot c$ компонента Y.

Заметим еще, что каждое гладкое векторное поле Y вдоль дифференцируемого пути c: $[\alpha, \beta] \to M$ соответствует в указанном выше смысле некоторой ломаной вариации c. Канонический способ получения вариации c с заданным „вектором вариации“ Y состоит в следующем. Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ строится геодезическая, исходящая из $c(t)$ в направлении $Y(t)$. Так как $[\alpha, \beta]$ компактно и Y непрерывно, существует такой содержащий 0 открытый интервал $J \subset \mathbb{R}$, что при всех $(t, \varepsilon) \in [\alpha, \beta] \times J$ вектор $\varepsilon Y(t)$ принадлежит области определения отображения exp: $\widetilde{TM} \to M$. Полагая

$$V(t, \varepsilon) = \exp(\varepsilon Y(t)), \tag{11}$$

получаем ломаную вариацию V: $[\alpha, \beta] \times J \to M$, для которой $V_* D_2|_{t,0} = Y(t)$.

Замечания

(i) Пространство Ω_{pq} кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$, соединяющих точки $p, q \in M$, можно после надлежа-

щего пополнения превратить в бесконечномерное многообразие Тогда для дифференцируемого пути $c \in \Omega_{pq}$ кусочно гладкие векторные поля вдоль c суть „касательные векторы“ в точке c, а собственная вариация V пути c есть „дифференцируемый путь“ в Ω_{pq}, исходящий из точки c, причем $V_* D_2|_{t,0}$ есть „касательный вектор“ в начале этого пути. В окрестности регулярного пути $c \in \Omega_{pq}$ длина пути L: $\Omega_{pq} \to \mathbb{R}$ дифференцируема, и $L'(0)$, $L''(0)$ — не что иное, как первая и вторая производные L вдоль пути V в точке c (см. разд. 7.6).

(ii) Для кусочно дифференцируемых c: $[\alpha, \beta] \to M$ можно определить функционал $E(c) = \int_\alpha^\beta \| \dot{c} \|_t^2 \, dt$, называемый *энергией* пути c. Пусть c дифференцируем и V: $[\alpha, \beta] \times J \to M$ — ломаная вариация c. Рассмотрим аналогичную $L(\varepsilon)$ функцию $E(\varepsilon)$, равную энергии пути V_ε. Функция $E(\varepsilon)$ всегда дифференцируема, в отличие от $L(\varepsilon)$, которая дифференцируема лишь при дополнительных предположениях (например, при регулярности c). Вычислите $E'(0)$, $E''(0)$ для собственной вариации V геодезической c. Покажите, что если путь c дифференцируем (соответственно регулярен) и если для любой собственной вариации c имеет место $E'(0) = 0$ ($L'(0) = 0$), то удовлетворяются „уравнения Эйлера“ $\nabla_D \dot{c} = 0$ и c есть геодезическая (для этого найдите общие выражения $E'(0)$, $L'(0)$ и примените (11)). Тем самым длина пути и энергия имеют одни и те же экстремали, а именно геодезические.

(iii) Пусть c: $[\alpha, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая. Покажем, что если M — пространство отрицательной кривизны, то $L''(0) > 0$ для каждой собственной вариации V пути c, а значит, все достаточно близкие к c соседние пути вариацни длиннее c. Рассмотрим параллельное поле Y вдоль c, для которого $\langle Y, \dot{c} \rangle = 0$, $\| Y \| = 1$, и вариацию c в направлении V, построенную по формуле (11). Обозначая через $\sigma(t)$ плоскость в $M_{c(t)}$, порожденную $Y(t)$, $\dot{c}(t)$, получаем из (7) и (8)

$$L'(0) = 0, \quad L''(0) = -\int_\alpha^\beta K_{\sigma(t)} \, dt, \tag{12}$$

откуда и следует сделанное выше утверждение. Таким образом, при параллельном смещении геодезическая в пространстве отрицательной кривизны растягивается (а в пространстве положительной кривизны сокращается).

(iv) Пусть M_1, M_2 — римановы подмногообразия M, c: $[\alpha, \beta] \to M$ — дифференцируемый путь, $c(\alpha) \in M_1$, $c(\beta) \in M_2$. Ломаная вариация V пути c называется вариацией вдоль M_1 и M_2, если для всех соседних путей V_ε выполнены условия $V_\varepsilon(\alpha) \in M_1$, $V_\varepsilon(\beta) \in M_2$. Покажите, что если c регулярен и является экстремалью по отно-

шению к таким вариациям, т. е. если $L'(0)=0$ для всех вариаций вдоль M_1 и M_2, то c — геодезическая, ортогональная в своих концах к M_1, M_2. Пусть теперь c — нормальная геодезическая, $c(\alpha)\in M_1$, $c(\beta)\in M_2$ и $\langle \dot c(\alpha), v\rangle = \langle \dot c(\beta), w\rangle$ для всех $v\in (M_1)_{c(\alpha)}$, $w\in (M_2)_{c(\beta)}$, V — ломаная вариация c вдоль M_1 и M_2. Тогда $L'(0)=0$ и для любого кусочно гладкого поля Y вдоль c из (8), как мы покажем, следует

$$L''(0)=\int_\alpha^\beta (\langle Y'_\perp, Y'_\perp\rangle - \langle R(Y,\dot c)\dot c, Y\rangle)|_t\, dt + \\ + l_1(Y(\alpha), Y(\alpha)) - l_2(Y(\beta), Y(\beta)), \quad (13)$$

где l_1, l_2 — вторые основные формы M_1, M_2 в $c(\alpha)$, $c(\beta)$ по отношению к нормальным векторам $\dot c(\alpha)$, $\dot c(\beta)$ (см. разд. 3.7). Для доказательства (13) рассмотрим, например, локальное нормальное поле N к M_2, для которого $N_{c(\beta)}=\dot c(\beta)$. Из тождества Риччи имеем

$$\langle \nabla_{D_2} V_* D_2, N\rangle|_{\beta,0} = -\langle V_* D_2, \nabla_{D_2} N\rangle|_{\beta,0} = -l_2(Y(\beta), Y(\beta)),$$

аналогичное выражение получается в левом конце. Как мы видим, вторая вариация длины пути в этом случае зависит от предельных членов (13), которые выражают относительную искривленность M_1, M_2 в направлении вектора вариации.

4.2. Поля Якоби

Теперь мы займемся „дифференциальными уравнениями Якоби“ для заданной экстремали рассматриваемой вариационной задачи о длине пути; при этом выделим векторы вариации, для которых вторая вариация обладает в некотором смысле экстремальными свойствами.

Условимся обозначать ковариантную производную $\nabla_D Y$ векторного поля Y вдоль дифференцируемого пути $c\colon J\to M$ через Y'.

Пусть $c\colon J\to M$ — геодезическая. *Полем Якоби* вдоль c называется векторное поле $Y\in \mathfrak{V}_c$, удовлетворяющее уравнению

$$Y''+R(Y,\dot c)\dot c=0. \quad (1)$$

Множество J_c полей Якоби вдоль c есть подпространство векторного $\mathbb{R}$-пространства $\mathfrak{V}_c$. Заметим, что для $\alpha\in\mathbb{R}$ поле $\alpha\dot c$ есть поле Якоби вдоль c, так как $\nabla_D \dot c=0$ и $R(\dot c,\dot c)\dot c=0$. Если $X, Y\in J_c$, то $\langle Y', X\rangle = -\langle Y, X'\rangle$ постоянно, поскольку (см. разд. 3.6)

$$D(\langle Y', X\rangle - \langle Y, X'\rangle) = \langle Y'', X\rangle + \langle Y', X\rangle - \langle Y', X'\rangle - \langle Y, X''\rangle = \\ = -\langle R(Y,\dot c)\dot c, X\rangle + \langle R(X,\dot c)\dot c, Y\rangle = 0.$$

В частности, для $X=\dot c$ оказывается, что $\langle Y', \dot c\rangle$ постоянно. Если

существуют такие α, $\beta \in J$, что $\langle Y, \dot{c}\rangle|_\alpha = 0$ и $\langle Y', \dot{c}\rangle|_\beta = 0$, то $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$, так как из предыдущего рассуждения следует $0 = \langle Y', \dot{c}\rangle = D\langle Y, \dot{c}\rangle$. Точно так же, если для различных чисел α, $\beta \in J$ справедливо $\langle Y, \dot{c}\rangle|_\alpha = \langle Y, \dot{c}\rangle|_\beta = 0$, то $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$. В самом деле, $D\langle Y, \dot{c}\rangle = \langle Y', \dot{c}\rangle$ есть постоянная и $\langle Y, \dot{c}\rangle$ — линейная функция от t.

Покажем, что (1) локально эквивалентно линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Лемма (Существование и единственность полей Якоби)

Усл. $c\colon J \to M$ — *геодезическая*; $t_0 \in J$; $v, w \in M_{c(t_0)}$.

Утв. *Существует одно и только одно такое поле Якоби* Y *вдоль* c, *что*

$$Y(t_0) = v, \quad Y'(t_0) = w. \tag{2}$$

Док. Возьмем такие числа $\alpha_\nu \in J$, $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$, чтобы было $J = \bigcup_\nu [\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}]$ и чтобы каждое множество $c([\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}])$ принадлежало области определения некоторой карты на M. Достаточно доказать утверждение для случая, когда $c(J)$ лежит в области определения U некоторой карты x; после этого общий случай получается по индукции (см. доказательство теоремы 1 разд. 2.6 и в особенности замечание в конце этого доказательства).

Положим $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{B}U$. Тогда для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{B}_c$ имеем разложение $Y = \sum_{i=1}^n \varphi^i X_i$, $\varphi^i = Yx^i$, откуда $R(Y, \dot{c})\dot{c} = \sum_{i=1}^n \varphi^i R(X_i \circ c, \dot{c})\dot{c}$. Далее, $R(X_i \circ c, \dot{c})\dot{c} = \sum_{k=1}^n a_i^k X_k \circ c$, где $a_i^k = (R(X_i \circ c, \dot{c})\dot{c})x^k \in \mathfrak{F}J$; в этих обозначениях имеем

$$R(Y, \dot{c})\dot{c} = \sum_{i,k=1}^n \varphi^i a_i^k X_k \circ c. \tag{3}$$

Теперь вычислим Y''. Очевидно,

$$Y' = \sum_{i=1}^n (D\varphi^i X_i \circ c + \varphi^i \nabla_D X_i \circ c), \tag{4}$$

$$Y'' = \sum_{j=1}^n [D(Y'x^j) X_j \circ c + (Y'x^j)\nabla_D X_j \circ c]. \tag{5}$$

Учитывая, что $(X_i \circ c)x^j = \delta_i^j$, и полагая $(\nabla_D X_i \circ c)x^j = b_i^j$, получаем из (4), (5)

$$Y'' = \sum_{i,j=1}^n \{[D(\delta_i^j D\varphi^i) + b_i^j D\varphi^i + (Db_i^j)\varphi^i] X_j \circ c + [\delta_i^j D\varphi^i + b_i^j \varphi^i]\nabla_D X_j \circ c\}.$$

Так как $\nabla_D X_j \circ c = \sum_{k=1}^{n} b_j^k X_k \circ c$, имеем окончательно

$$Y'' = \sum_{k=1}^{n} \left[DD\varphi^k + 2\sum_{i=1}^{n} b_i^k D\varphi^i + \sum_{i=1}^{n} \left(Db_i^k + \sum_{j=1}^{n} b_i^j b_j^k \right) \varphi^i \right] X_k \circ c. \qquad (6)$$

В силу (3) и (6) уравнение (1) равносильно однородной системе из n линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$DD\varphi^k + 2\sum_{i=1}^{n} b_i^k D\varphi^i + \sum_{i=1}^{n} \left(Db_i^k + \sum_{j=1}^{n} b_i^j b_j^k + a_i^k \right) \varphi^i = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \qquad (7)$$

Как обычно, систему (7) можно свести к системе из $2n$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка, введя функции $\varphi^{n+k} = D\varphi^k$. Согласно (2), должны соблюдаться условия $Y(t_0) = v$, $Y'(t_0) = w$, откуда $v(x^k) = \varphi^k(t_0)$, а из (4) следует $w(x^k) = (D\varphi^k)(t_0) + \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t_0) b_i^k(t_0)$. Мы получаем для системы дифференциальных уравнений первого порядка, к которой сводится (7), начальные значения

$$\varphi^k(t_0) = v(x^k), \quad \varphi^{n+k}(t_0) = w(x^k) - \sum_{i=0}^{n} b_i^k(t_0) v(x^i) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

На некотором интервале $J_0 \subset J$, содержащем t_0, существует единственная система функций φ^k, $\varphi^{n+k} \in \mathfrak{F}J_0$, удовлетворяющая системе уравнений первого порядка и этим начальным условиям (см. разд. 8.4). Так как уравнения линейны, φ^k, φ^{n+k} однозначно продолжаются до решения, определенного на J, что и доказывает теорему.

Всевозможные поля Якоби вдоль геодезической $c\colon J \to M$ образуют векторное $\mathbb{R}$-пространство J_c размерности $2n$; это непосредственно вытекает из только что доказанной леммы. При этом множество полей Якоби, обращающихся в нуль в точке $t_0 \in J$, образует n-мерное подпространство J_c.

Замечания

(i) Обобщите следующим образом теорему существования и единственности этого раздела и разд. 2.6. Пусть M — дифференцируемое многообразие с линейной связностью ∇, $c\colon J \to M$ — дифференцируемый путь, $B_0, B_1, \ldots, B_r$ — тензорные поля типа (1, 1) на M (или вдоль c), такие, что $(\det B_r) \circ c \neq 0$, $X \in \mathfrak{B}_c$ — векторное поле вдоль c. Тогда для $t_0 \in J$ и $v_0, \ldots, v_{r-1} \in M_{c(t_0)}$ существует одно и только одно векторное поле $Y \in \mathfrak{B}_c$, удовлетворяющее уравнению

$$B_r Y^{(r)} + B_{r-1} Y^{(r-1)} + \ldots + B_1 Y' + B_0 Y = X$$

и начальным условиям $Y^i(t_0) = v_i$ $(i = 0, \ldots, r-1)$. При этом $Y^{(i)}$ означает i-ю ковариантную производную Y.

(ii) В случае $M = \mathbb{R}^n$ вследствие $R = 0$ все поля Якоби вдоль произвольной геодезической c: $J \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют уравнению $Y'' = 0$. Пусть $t_0 \in J$; $v, w \in M_{c(t_0)}$. Найдем такие векторы $a, b \in \mathbb{R}^n$, чтобы параллельные векторные поля вдоль c, заданные равенствами $A = \sum_{i=1}^{n} a^i D_i \circ c$, $B = \sum_{i=1}^{n} b^i D_i \circ c$, удовлетворяли условиям $A(t_0) = v$, $B(t_0) = w$. Тогда поле Якоби Y вдоль c, для которого $Y(t_0) = v$, $Y'(t_0) = w$, линейно выражается через A и B:

$$Y(t) = (t - t_0) B(t) + A(t). \tag{8}$$

Этот же случай можно описать несколько более общим образом. Пусть E — n-мерное действительное векторное пространство с евклидовой метрикой, $v, w \in E$. Тогда исходящий из точки $0 \in E$ луч φ: $[0; \beta] \to E$, заданный формулой $\varphi(t) = tv$, есть геодезическая в E, а линейное векторное поле B вдоль φ

$$B(t) = tI_{tv}(w) \tag{9}$$

есть поле Якоби, удовлетворяющее условиям $B(0) = 0$, $B'(0) = I_0 w$; здесь I_u: $E \to E_u$ — канонический изоморфизм (см. (5) разд. 1.4). Поле $t \to I_{tv} w$ параллельно.

(iii) Пусть $\dim M = 2$, c: $J \to M$ — нормальная геодезическая, X — параллельное поле вдоль c, нормированное ($\| X \| = 1$) и ортогональное c ($\langle X, \dot{c} \rangle = 0$). Для любого поля Якоби Y вдоль c, ортогонального c, имеем $Y = \varphi X$, где $\varphi = \langle Y, X \rangle \in \mathfrak{F}J$, так что уравнение (1) в этом случае равносильно классическому уравнению Якоби для геодезических на поверхностях:

$$\varphi'' + K\varphi = 0, \tag{10}$$

где $K(t)$ — гауссова (или риманова) кривизна M в точке $c(t)$. Уравнение (10) есть уравнение свободных колебаний, его решения при $K \geqslant \varkappa > 0$ имеют осциллирующий характер, а при $K \leqslant 0$ — неосциллирующий. Найдите общее решение уравнения (10) для поверхностей постоянной кривизны.

(iv) Рассмотрим теперь поля на n-мерной сфере: $M = S^n_\rho$. Пусть c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая, $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = u$. Возьмем в M_p два произвольных вектора v, w и найдем поле Якоби Z вдоль c, удовлетворяющее условиям $Z(0) = v$, $Z'(0) = w$. Построим параллельные поля X, Y вдоль c, такие, что $X(0) = v$, $Y(0) = w$. Предположим сначала, что $\langle v, u \rangle = \langle w, u \rangle = 0$, и покажем, что в этом случае искомое поле Якоби имеет вид

$$Z(t) = \rho Y(t) \sin \frac{t}{\rho} + X(t) \cos \frac{t}{\rho}. \tag{11}$$

В самом деле, так как $X' = Y' = 0$, имеем

$$Z'(t) = Y(t)\cos\frac{t}{\rho} - \frac{1}{\rho}X(t)\sin\frac{t}{\rho},$$

$$Z''(t) = -\frac{1}{\rho}Y(t)\sin\frac{t}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}X(t)\cos\frac{t}{\rho},$$

и из (24) разд. 3.6 следует $Z'' + R(Z, \dot{c})\dot{c} = 0$. Далее, $Z(0) = X(0) = v$, $Z'(0) = Y(0) = w$. Переходя к общему случаю, разложим v, w на касательные к u компоненты $v^\top$, $w^\top$ и ортогональные компоненты $v^\perp$, $w^\perp$:

$$v^\top = \langle v, u\rangle u,\ w^\top = \langle w, u\rangle u,\ v^\perp = v - v^\top,\ w^\perp = w - w^\top.$$

Для начальных значений $v^\perp$, $w^\perp$ поле Якоби $Z^\perp$ находится по формуле (11). Так как формула $Z^\top(t) = \langle w, u\rangle t\dot{c}(t) + \langle v, u\rangle \dot{c}(t)$ определяет поле Якоби вдоль c, для которого $Z^\top(0) = v^\top$, $Z^{\top\prime}(0) = w^\top$, то решением исходной задачи является $Z = Z^\perp + Z^\top$. Заметим, что в дальнейшем играют роль лишь поля Якоби, ортогональные к $\dot{c}$.

(v) Простота вычисления полей Якоби в примерах (ii), (iv) связана с тем, что $\mathbb{R}^n$ и S^n_ρ — симметрические пространства (см. замечание (vii) разд. 3.6). Пусть теперь M — любое локально симметрическое пространство, т. е. R параллельно, или, что то же самое, $\nabla R = 0$. Тогда, как мы сейчас увидим, для нормальной геодезической $c\colon J \to M$ система дифференциальных уравнений (1) распадается на n обыкновенных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть $p \in M$; v, $w \in M_p$; тогда, как мы знаем, эндоморфизм $v \to R(v, w)w$ самосопряжен относительно римановой метрики (это вытекает из тождеств разд. 3.6). Зафиксируем $t_0 \in J$ и положим $p = c(t_0)$, $w = \dot{c}(t_0)$. Выберем для p, w ортонормированную систему собственных векторов $v_1, \ldots, v_n$ эндоморфизма кривизны, принимая $\dot{c}(t_0)$ за v_n. Пусть соответствующие собственные значения будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (причем $\lambda_n = 0$). Построим параллельные поля $X_1, \ldots, X_n$ вдоль c, удовлетворяющие условиям $X_i(t_0) = v_i$. Так как тензор R параллелен, то поля $R(X_i, \dot{c})\dot{c}$ параллельны вдоль c, следовательно, $R(X_i, \dot{c})\dot{c} = \lambda_i X_i$. Представив любое векторное поле Y вдоль c в виде $Y = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i X_i$, где $\varphi^i = \langle Y, X_i\rangle \in \mathfrak{F}J$, мы видим, что Y является полем Якоби тогда и только тогда, когда

$$(\varphi^i)'' + \lambda_i\varphi^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

(см. уравнение (1)).

Собственные значения λ_i есть не что иное, как римановы кривизны $K_{\sigma_i(t)}$, где $\sigma_i(t)$ — плоскость, порожденная векторами

$X_i(t)$, $\dot{c}(t)$ в $M_{c(t)}$, $i=1, \ldots, n-1$, $t\in J$. Фундаментальная система решений (12) состоит из функций $\operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_i|}\,t$, $\operatorname{ch}\sqrt{|\lambda_i|}\,t$ при $\lambda_i<0$ и $\sin\sqrt{\lambda_i}\,t$, $\cos\sqrt{\lambda_i}\,t$ при $\lambda_i>0$, а также 1, t при $\lambda_i=0$.

4.3. Сопряженные точки

В этом разделе мы установим важную связь между полями Якоби и экспоненциальным отображением. При этом поля Якоби вдоль геодезической c будут получены с помощью специальных вариаций, для которых все соседние с c пути являются геодезическими.

Лемма

Усл. *c: $[0, \beta]\to M$ — геодезическая; $p=c(0)$; v, $w\in M_p$; $v=\dot{c}(0)$ (так что $c(t)=\exp(tv)$). Для $u\in M_p$ отображение I_u: $M_p\to (M_p)_u$ есть канонический изоморфизм.*

Утв. *Отображение Y: $[0, \beta]\to TM$, заданное формулой*

$$Y(t)=\exp_{p*}(tI_{tv}(w)), \tag{1}$$

есть поле Якоби вдоль c, удовлетворяющее условиям $Y(0)=0$, $Y'(0)=w$.

Док. Рассмотрим для достаточно малого открытого интервала J, содержащего 0, вариацию V: $[0, \beta]\times J\to M$ пути c вида

$$V(t, \varepsilon)=\exp(t(v+\varepsilon w)). \tag{2}$$

Построим вдоль V векторные поля $X=V_*D_1$, $\tilde{Y}=V_*D_2$. По цепному правилу и по определению канонического изоморфизма имеем $\tilde{Y}(t, \varepsilon)=V_*D_2|_{t,\varepsilon}=\exp_{p*}I_{t(v+\varepsilon w)}(tw)$, откуда

$$Y(t)=\tilde{Y}(t, 0)=V_*D_2|_{t,0}\qquad (t\in[0, \beta]). \tag{3}$$

Далее, поскольку $(D_1, D_2]=0$, имеем $R(\tilde{Y}, X)X=\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}X-\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}X$. Так как V_ε: $[0, \beta]\to M$ есть геодезическая при всех $\varepsilon\in J$, то $\nabla_{D_1}X=0$, откуда $\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}X=0$. Пользуясь тем, что ∇ не имеет кручения, получаем, кроме того,

$$\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}X=\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}V_*D_1=\nabla_{D_1}\nabla_{D_1}V_*D_2=\nabla_{D_1}\nabla_{D_1}\tilde{Y},$$

а следовательно, $\nabla_{D_1}\nabla_{D_1}\tilde{Y}+R(\tilde{Y}, X)X=0$. Из (3) и условия $X(t, 0)=\dot{c}$ вытекает, что Y есть поле Якоби. Ясно, что $Y(0)=V_*D_2|_{0,0}=0$. Наконец, $Y'(0)=\nabla_{D_1}V_*D_2|_{0,0}=\nabla_{D_2}V_*D_1|_{0,0}$, и из

$$V_*D_1|_{t,\varepsilon}=\exp_{p*}I_{p(v+\varepsilon w)}(v+\varepsilon w),\quad V_*D_1|_{0,\varepsilon}=\exp_{p*}I_0(v+\varepsilon w)=v+\varepsilon w$$

следует $Y'(0)=w$, что и доказывает лемму.

Пусть c: $J \to M$ — геодезическая. Точки t_0, $t_1 \in J$ называются *сопряженными* относительно c, если существует не равное тождественно нулю поле Якоби Y вдоль c, для которого $Y(t_0) = 0$ и $Y(t_1) = 0$. Покажем, что если t_0, $t_1 \in J$ различны и не сопряжены относительно c, то для любых векторов $v \in M_{c(t_0)}$, $w \in M_{c(t_1)}$ существует одно и только одно поле Якоби Y вдоль c, удовлетворяющее условиям $Y(t_0) = v$, $Y(t_1) = w$. В самом деле, линейное отображение ψ: $J_c \to M_{c(t_0)} \times M_{c(t_1)}$, заданное формулой $\psi Y = (Y(t_0), L(t_1))$, инъективно, поскольку ни для какого ненулевого поля Y не может быть $Y(t_0) = 0$, $Y(t_1) = 0$. В таком случае из соображений размерности видно, что ψ — изоморфизм.

Если $t_0 = \alpha$, $J = [\alpha, \beta]$, то все точки $t_1 \in J$, сопряженные t_0, называются просто сопряженными точками c.

Как вытекает из следующей теоремы, сопряженные точки геодезических могут быть охарактеризованы с помощью экспоненциального отображения.

Теорема

Усл. *c: $[0, \beta] \to M$ — геодезическая; $p = c(0)$; $t_1 \in (0, \beta]$; $u = t_1 \dot{c}(0) \in M_p$. Символ $J_c^{t_1}$ обозначает векторное $\mathbb{R}$-пространство всех полей Якоби Y вдоль c, удовлетворяющих условиям $Y(0) = Y(t_1) = 0$; Δ_p^u обозначает ядро отображения $\exp_{p*}$ в точке u, т. е. подпространство всех таких векторов $b \in (M_p)_u$, для которых $\exp_{p*} b = 0$.*

Утв. *Справедливо равенство*

$$\dim J_c^{t_1} = \dim \Lambda_p^u. \tag{4}$$

Док. С помощью канонического изоморфизма I_u: $M_p \to (M_p)_u$ можно построить линейное отображение Φ: $J_c^{t_1} \to \Lambda_p^u$ по формуле $\Phi Y = I_u Y'(0)$. В самом деле, в силу (1) имеем $0 = Y(t_1) = \exp_{p*} t_1 I_u Y'(0)$ и $I_u Y'(0) \in \Lambda_p^u$ при $t_1 \neq 0$. Отображение Φ инъективно; из теоремы существования и единственности полей Якоби, как мы сейчас увидим, следует, что Φ сюръективно, что и доказывает теорему. Пусть $b \in \Lambda_p^u$. Построим поле Якоби Y вдоль c, удовлетворяющее начальным условиям $Y(0) = 0$, $Y'(0) = I_u^{-1}(b)$. Тогда вследствие (1) имеем $Y(t_1) = \exp_{p*} t_1 b = t_1 \exp_{p*} b = 0$, откуда $Y \in J_c^{t_1}$, причем $\Phi Y = b$.

Для геодезической c: $[0, \beta] \to M$, $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$, имеем представление $c(t) = \exp(tv)$. Согласно теореме, $t_1 \in (0, \beta]$ является сопряженной точкой c в том и только том случае, если ранг экспоненциального отображения $\exp_p$ в точке $u = t_1 v$ не максимален, т. е. u есть критическая точка $\exp_p$. В некоторой окрестности точки $0 \in M_p$ по теореме из разд. 2.8 $\exp_p$ имеет максимальный

ранг. Поэтому существует такое число $\mu > 0$, что ни на одной исходящей из p нормальной геодезической $[0, \mu] \to M$ нет сопряженных точек. В частности, любое не тождественно равное нулю поле Якоби вдоль c имеет конечное число нулей; в противном случае нули имели бы предельную точку $\tilde{t} \in [0, \beta]$ и было бы $Y(\tilde{t}) = 0$, что противоречит только что полученному результату в применении к точке $c(\tilde{t})$ (см. замечание (iv)).

Таким образом, на каждой исходящей из p геодезической сопряженные точки расположены изолированно, соответственно изолированы на каждом луче M_p критические точки $\exp_p$, которые могут, однако, иметь предельную точку на границе области определения $\exp_p$.

Если t_1 — сопряженная точка c, то число $\dim J_c^{t_1} = \dim \Lambda_p^u \leqslant \leqslant n-1$ в (4) называется *кратностью* t_1.

Замечания

(i) В предположениях леммы вместо вариации (2) можно воспользоваться любой вариацией V: $[0, \beta] \times J \to M$ вида $V(t, \varepsilon) = \exp\left(t \frac{\psi(\varepsilon)}{\beta}\right)$, где J — достаточно малый открытый интервал, содержащий 0, а ψ: $J \to M_p$ — дифференцируемый путь. Пусть $\psi(0) = \beta v$, $\dot{\psi}(0) = I_{\beta v}(\beta w)$. Для такой более общей вариации без труда доказывается, что $V_* D_2|_{t,0} = \exp_{p*} t I_{tv}(w) = Y(t)$, где $Y(t)$ соответствует специальному выбору пути $\psi(\varepsilon) = \beta(v + \varepsilon w)$, сделанному в лемме.

Заметим еще, что луч φ: $[0, \beta] \to M_p$, заданный формулой $\varphi(t) = tv$, есть геодезическая по отношению к канонической связности Леви-Чивита на M_p. Формула $\Phi(t, \varepsilon) = t \frac{\psi(\varepsilon)}{\beta}$ определяет вариацию Φ: $[0, \beta] \times J \to M_p$ геодезической φ, а соответствующее поле Якоби B вдоль φ имеет вид $B(t) = \Phi_* D_2|_{t,0} = t I_{tv}(w)$ (см. (9) разд. 4.2). При экспоненциальном отображении φ переходит в геодезическую $c = \exp \circ \varphi$; вариация Φ, при которой все соседние с φ пути суть геодезические на M_p, переходит в вариацию $V = \exp \circ \Phi$ геодезической $c = \exp \circ \varphi$, при которой все соседние с c пути суть геодезические на M, а поле Якоби B вдоль φ — в поле Якоби $Y = \exp_{p*} B$ вдоль $c = \exp \circ \varphi$.

(ii) Покажите, что если V: $[0, \beta] \times J \to M$ — собственная вариация пути V_0 и все V_ε ($\varepsilon \in J$) — геодезические, то длины всех путей V_ε равны. Если, кроме того, при некотором $t_0 \in [0, \beta]$ имеет место $V_* D_2|_{t_0, \varepsilon} \neq 0$ ($\varepsilon \in J$), то β является сопряженной точкой каждого пути V_ε.

(iii) Покажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ не имеют сопряженных точек. Пусть $M = S_\rho^n$, $p = (0, \ldots, 0, \rho)$ — северный полюс и k —

натуральное число, тогда, согласно замечанию (vi) разд. 3.8 или (11) разд. 4.2, при $n>1$ на геодезической c: $[0, k\pi\rho] \to S^n_\rho$, $c(0)=p$, сопряженными точками являются $\nu\pi\rho$, $\nu=1, \ldots, k$, причем кратность каждой из них равна $n-1$. Сопряженные точки отображаются геодезической c последовательно на южный и северный полюсы. При $n=1$ геодезическая c не имеет сопряженных точек. Докажите с помощью замечания (v) разд. 4.2 более общее утверждение: пусть M — симметрическое пространство, C: $\mathbb{R} \to M$ — нормальная геодезическая, тогда t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$ сопряжены относительно c в том и только том случае, если существует такое положительное собственное значение λ эндоморфизма кривизны $X \to R(X, \dot{c})\dot{c}$ (X — параллельное поле вдоль c), что $t_1 - t_0 = \frac{\nu\pi}{\sqrt{\lambda}}$, $\nu \neq 0$ — целое число.

(iv) Если c: $J \to M$ — геодезическая и t_0, $t_1 \in J$ сопряжены относительно c, то образы $p=c(t_0)$, $q=c(t_1)$ часто также называются сопряженными точками c. Так как может быть много геодезических, соединяющих p с q, такой способ выражения может привести к недоразумению, если не указать, по отношению к какой геодезической понимается „сопряженность"; эта ситуация встречается, например, когда c периодична.

Поля Якоби, как и геодезические, инвариантны при линейных заменах параметра, т. е. если $\tilde{J}$ и J — интервалы в $\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\alpha t+\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) и $\varphi(\tilde{J})=J$, то для каждого поля Якоби Y вдоль c: $J \to M$ векторное поле $Y \circ \varphi$ вдоль $c \circ \varphi$ есть также поле Якоби. При $\alpha<0$ ориентация геодезической, конечно, меняется. Точки $t_0, t_1 \in J$ тогда и только тогда сопряжены относительно c, когда $\varphi^{-1}(t_0)$, $\varphi^{-1}(t_1)$ сопряжены относительно $c \circ \varphi$.

(v) Множество критических точек $\exp_p$ в M_p, $p \in M$, называется *сопряженным множеством* M в M_p. Образ этого множества при отображении $\exp_p$, т. е. множество критических значений $\exp_p$, называется сопряженным множеством в M относительно p. Особую роль играет так называемое первое сопряженное множество M в M_p — множество всех таких критических точек v отображения $\exp_p$, что tv является регулярной точкой $\exp_p$ при всех $t \in [0, 1)$. Покажите с помощью леммы и уравнения (10) разд. 4.2, что сопряженное множество двумерного риманова многообразия M в M_p не содержит изолированных точек, но на каждом исходящем из 0 луче M_p сопряженные точки расположены изолированно.

Рассмотрим более общим образом риманово подмногообразие N в M с нормальным расслоенным пространством $\nu \subset TM$ и экспоненциальным отображением $\exp_N$ (см. замечание (iii) разд. 3.8). Множество критических точек $\exp_N$ в ν называется *фокальным множеством* отображения $\exp_N$ в N, а образ этого множества при

экспоненциальном отображении, т. е. множество критических значений $\exp_N$, — фокальным множеством N в M. Пусть $v \in \nu$ и c: $[0, \beta] \to M$ — ортогональная N геодезическая в M вида $c(t) = \exp(tv)$, тогда $t_1 \in [0, \beta]$ называется *фокусом* c по отношению к N, если $t_1 v$ принадлежит фокальному множеству $\exp_N$ в ν. В случае когда N — точка, фокусы c относительно N суть сопряженные точки c.

Рассмотрите отдельно случай $M = \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. Получите из замечания (i) разд. 2.9 и из разд. 3.7, что $t_1 \in [0, \beta]$ является фокусом c относительно N в том и только том случае, если $-\frac{1}{t_1}$ есть отрицательное собственное значение второго основного тензора S_v подмногообразия N относительно нормали v. Таким образом, фокусы c есть в точности те главные радиусы кривизны N относительно v, для которых N по соответствующему главному направлению обращено вогнутостью в сторону v.

Естественно, понятие фокуса подсказано поведением световых лучей, концентрирующихся вблизи фокуса зеркала или линзы.

Пусть t_1 — первый фокус c по отношению к N. Тогда, как можно показать, при $0 \leqslant t < t_1$ все достаточно близкие к c кусочно дифференцируемые пути, соединяющие N с $c(t)$, длиннее $c|_{[0, t]}$, если они не совмещены с этим путем. Однако после прохождения каждого последовательного фокуса t_ν появляется, в определенном смысле, все больше близких к c путей короче $c|_{[0, t]}$ $(t > t_\nu)$, соединяющих N с $c(t)$.

4.4. Лемма Гаусса и ее следствия

В следующей лемме содержится важное свойство экспоненциального отображения.

Лемма 1 (Лемма Гаусса)

Усл. *Пусть* $p \in M$; $v \in M_p$ *лежит в области определения* $\exp_p$ *и* φ: $[0, 1] \to M_p$ — *луч, описываемый формулой* $\varphi(t) = tv$. *В* M_p *введена каноническая метрика* (*см. замечание* (iii) *разд.* 3.2).

Утв. *Для векторов* b, $a \in (M_p)_v$, *где* $a = \dot{\varphi}(1)$, *справедливо соотношение*

$$\langle b, a \rangle = \langle \exp_{p*} b, \exp_{p*} a \rangle. \tag{1}$$

В силу (1) можно сказать, что отображение $\exp_p$ „радиально изометрично“. Компонента касательного к M_p вектора в точке v в направлении луча, содержащего v, при отображении $\exp_{p*}$ сохраняет длину.

Если, в частности, дифференцируемый путь ψ в M_p ортогонален к φ в точке v, то $\exp \circ \psi$ ортогонален геодезической $\exp \circ \varphi$

в точке $\exp v$. Ядро Λ_p^v отображения $\exp_{p*}$ в точке $v \in \tilde{M}_p$, таким образом, ортогонально к $\phi(1)$, т. е. к радиальному направлению.

Док. Пусть Y — поле Якоби вдоль геодезической $c = \exp \circ \varphi$, $Y(0) = v$ и $Y'(0) = w = I_v^{-1}(b)$, где I_v: $M_p \to (M_p)_v$ — канонический изоморфизм.

Согласно (1) разд. 4.3, имеем

$$Y(1) = \exp_{p*}(I_v w) = \exp_{p*} b. \tag{2}$$

Так как $D\langle Y, \dot{c}\rangle = \langle Y', \dot{c}\rangle$ постоянна, $\langle Y, \dot{c}\rangle$ есть линейная функция. Вследствие $Y(0) = 0$ имеем

$$\langle Y, \dot{c}\rangle = t\langle Y', \dot{c}\rangle|_0 = t\langle w, v\rangle, \quad t \in [0,1],$$

откуда $\langle Y, \dot{c}\rangle|_1 = \langle w, v\rangle$. Поскольку $\dot{c}(1) = \exp_{p*} a$, из (2) получаем $\langle w, v\rangle = \langle \exp_{p*} b, \exp_{p*} a\rangle$. Но из определения канонической метрики в M_p следует $\langle w, v\rangle = \langle I_v w, I_v v\rangle = \langle b, a\rangle$, что и требовалось доказать.

Из леммы Гаусса вытекают следствия, выражающие экстремальные свойства геодезических.

Лемма 2

Усл. *Пусть $p \in M$, на M_p введена каноническая метрика; $\tilde{M}_p$ — область определения $\exp_p$; $v \in \tilde{M}_p$. Далее, пусть φ: $[0, 1] \to \tilde{M}_p$ — путь вида $\varphi(t) = tv$; ψ: $[0, 1] \to \tilde{M}_p$ — кусочно дифференцируемый путь, для которого $\psi(0) = \varphi(0)$, $\psi(1) = \varphi(1) = v$.*

Утв. *Справедливо неравенство*

$$L(\exp \circ \psi) \geqslant L(\exp \circ \varphi); \tag{3}$$

более того, если существует такое $t_0 \in (0, 1]$, что ортогональная к радиальному направлению компонента вектора $\psi(t_0)$ не переводится в нуль отображением $\exp_{p*}$, то

$$L(\exp \circ \psi) > L(\exp \circ \varphi). \tag{4}$$

Таким образом, луч φ, являющийся кратчайшим путем между 0 и v, переходит при отображении $\exp_p$ в путь, обладающий таким же свойством.

Док. По лемме из разд. 3.3 каждый кусочно дифференцируемый путь совмещен с некоторым дифференцируемым путем той же длины, поэтому можно считать путь ψ дифференцируемым. Далее, можно ограничиться случаем, когда $v \neq 0$ и $\psi(t) \neq 0$ при $t \in (0, 1]$.

Идея дальнейшего рассуждения состоит в следующем. Пусть ψ радиально проектируется на луч φ, при этом получается путь, образ которого при отображении $\exp$ заведомо не короче $\exp \circ \varphi$,

но, с другой стороны, и не длиннее $\exp \circ \psi$, так как длина каждого касательного вектора к $\exp \circ \psi$ по лемме Гаусса не меньше длины радиальной компоненты соответствующего касательного вектора ψ.

Построим для $t \in (0, 1]$ ортонормированные векторы $b, a \in (M_p)_{\psi(t)}$, где $a = I_{\psi(t)}\left(\frac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}\right)$, а b выбран таким образом, чтобы существовало разложение $\dot{\psi}(t) = \langle \dot{\psi}(t), b\rangle b + \langle \dot{\psi}(t), a\rangle a$. Так как $\|\widehat{\exp \circ \psi}\|^2 = \langle \exp_{p*} \circ \dot{\psi}, \exp_{p*} \circ \dot{\psi}\rangle$, из (1) получаем

$$\|\widehat{\exp \circ \psi}(t)\|^2 = \langle \dot{\psi}(t), b\rangle^2 \langle \exp_{p*} b, \exp_{p*} b\rangle + \langle \dot{\psi}(t), a\rangle^2 \geqslant \langle \dot{\psi}(t), a\rangle^2. \quad (5)$$

Покажем, что при $t > 0$ справедливо

$$\langle \dot{\psi}(t), a\rangle = D\|\psi\|_t. \quad (6)$$

В самом деле, при $t > 0$, как мы предположили, $\psi(t) \neq 0$ и

$$D\|\psi\|_t = D\langle \psi, \psi\rangle_t^{1/2} = \frac{\langle \nabla_D \psi, \psi\rangle}{\|\psi\|}\Big|_t = \left\langle \dot{\psi}(t), I_{\psi(t)}\left(\frac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}\right)\right\rangle$$

(ψ рассматривается здесь как векторное поле вдоль тривиального пути $t \to p$).

Из (5) и (6) следует

$$L(\exp \circ \psi) = \int_0^1 \|\widehat{\exp \circ \psi}(t)\|\, dt \geqslant \int_0^1 |D\|\psi\|_t|\, dt \geqslant \int_0^1 D\|\psi\|_t\, dt. \quad (7)$$

Так как $\psi(t)$ непрерывна при $t = 0$ и $\psi(0) = 0$, имеем

$$\int_0^1 D\|\psi\|_t\, dt = \|\psi(1)\| = \|v\| = L(\exp \circ \varphi), \quad (8)$$

и из (7), (8) вытекает неравенство (3).

Если в (5) хотя бы при одном значении $t \neq 0$ исключается равенство, то соблюдается неравенство (4), что и завершает доказательство леммы.

Заметим, что предположение, при котором мы доказали (4), выполнено, например, в том случае, когда $\exp_p$ имеет максимальный ранг в точке $\psi(t_0)$ и $\dot{\psi}(t_0)$ не направлен радиально. Покажем, что если образы ψ и φ не совпадают, то существует значение $t_0 > 0$, при котором $\dot{\psi}(t_0)$ отличен от нуля и не направлен радиально. В самом деле, в противном случае при $t > 0$ имеет

место $\psi = \gamma\psi$, где γ: $(0, 1] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. При $t > 0$, следовательно,

$$\left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\psi}\|\psi\| - \psi D\|\psi\|}{\|\psi\|^2} = \frac{\dot{\psi}\|\psi\|^2 - \frac{1}{2}\psi D\langle\psi, \psi\rangle}{\|\psi\|^3} =$$

$$= \frac{\dot{\psi}\|\psi\|^2 - \psi\langle\dot{\psi}, \psi\rangle}{\|\psi\|^3} = \frac{\gamma\dot{\psi}\|\psi\|^2 - \gamma\psi\langle\dot{\psi}, \psi\rangle}{\|\psi\|^3} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)_t = \frac{\psi(1)}{\|\psi(1)\|} = \frac{\varphi(1)}{v}, \quad \varphi(t) = \frac{\varphi(1)}{\|v\|}\|\psi\|_t.$$

Но в таком случае образ ψ совпадает с образом φ, вопреки предположению.

Наконец, рассмотрим случай, когда образы ψ и φ совпадают. В этом случае при $t > 0$ имеем $\psi = \delta v$, где $\delta \in \mathfrak{F}([0, 1])$. Поэтому

$$L(\exp \circ \psi) = \int_0^1 \|\widehat{\exp \circ \psi}(t)\|\, dt = \int_0^1 \|\exp_{p*}\delta'(t) I_{\delta v}(v)\|\, dt =$$

$$= \int_0^1 \|\delta'(t)\exp_{p*} I_{\delta v}(v)\|\, dt = \int_0^1 |\delta'(t)|\,\|\exp_{p*} I_{\delta v}(v)\|\, dt.$$

Так как вектор $I_{\delta v}(v)$ направлен по касательной к φ, то по лемме Гаусса $\|\exp_{p*} I_{\delta v}(v)\| = \|I_{\delta v}(v)\| = \|v\|$. Следовательно,

$$L(\exp \circ \psi) = \|v\| \int_0^1 |\delta'(t)|\, dt = L(\exp \circ \varphi) \int_0^1 |\delta'(t)|\, dt.$$

Теперь видно, что равенство $L(\exp \circ \psi) = L(\exp \circ \varphi)$ возможно лишь при условии $\int_0^1 |\delta'(t)|\, dt = 1 = \int_0^1 \delta'(t)\, dt$, т. е. если $\delta'(t) \geqslant 0$, а это значит, что пути ψ, φ совмещены (см. разд. 3.3).

Из сопоставления предыдущих замечаний с леммой 2 вытекает, что если, в дополнение к условиям леммы 2, $\exp_p$ имеет максимальный ранг во всех точках $\psi(t)$, $t \in [0, 1]$ и пути ψ, φ не совмещены, то справедливо неравенство (4).

Если даны топологические пространства A, E, F и непрерывные отображения

т. е. $h \circ g = f$, то говорят, что отображение f „поднимается“ посредством h в отображение g: $A \to F$, или „поднимается“ в F.

Геодезическая c: $[0, \beta] \to M$, $c(0) = p$, $c(\beta) = q$, очевидно, может быть поднята посредством $\exp_p$ в касательное пространство M_p, так как для луча φ: $[0, \beta] \to M_p$, заданного формулой $\varphi(t) = t\dot{c}(0)$, справедливо соотношение $\exp_p \circ \varphi = c$. Если $\tilde{c}$: $[0, \beta] \to M$ — кусочно дифференцируемый путь, $\tilde{c}(0) = p$, $\tilde{c}(\beta) = q$, и если $\tilde{c}$ может быть поднят посредством $\exp_p$ в кусочно дифференцируемый путь ψ: $[0, \beta] \to M_p$, такой, что $\psi(0) = \varphi(0)$, $\psi(\beta) = \varphi(\beta)$, то, согласно лемме 2, имеем $L(\tilde{c}) \geqslant L(c)$. Конечно, не каждый путь в M, соединяющий p с q, можно поднять посредством $\exp_p$ в M_p и тем более таким образом, чтобы поднятый путь соединял 0 с $\varphi(\beta)$. Подъем может оказаться невозможным, например, по той причине, что $\exp_p$ не обязательно сюръективно. В случае $M = S_p^n$ отображение $\exp_p$ сюръективно, но исходящие из 0 лучи M_p, не имеющие в M_p других общих точек, переходят при отображении $\exp_p$ в пересекающиеся геодезические, так что невозможно удовлетворить условию $\varphi(\beta) = \psi(\beta)$.

Теорема

Усл. *c: $[0, \beta] \to M$ — геодезическая без сопряженных точек и V: $[0, \beta] \times J \to M$ — собственная ломаная вариация c.*

Утв. *Существует такой открытый интервал $J_0 \subset J$, содержащий 0, что для всех $\varepsilon \in J_0$ справедливо неравенство $L(\varepsilon) \geqslant L(0)$, а если пути $V(\varepsilon)$, $V(0) = c$ не совмещены, то $L(\varepsilon) > L(0)$.*

Док. Положим $p = c(0)$ и рассмотрим луч φ: $[0, \beta] \to M_p$, $\varphi(t) = t\dot{c}(0)$. Так как на c нет сопряженных точек, то $\exp_p$ для всех $t \in [0, \beta]$ имеет максимальный ранг в точке $\varphi(t)$ и по теореме обращения существует окрестность $\varphi(t)$ в M_p, которую $\exp_p$ диффеоморфно отображает на некоторую окрестность $c(t)$ в M. Из компактности множества $\varphi([0, \beta])$ следует существование таких чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \beta$ и открытых множеств $U_\nu \supset \varphi([t_{\nu-1}, t_\nu])$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, что $h_\nu = \exp_p|_{U_\nu}$ есть вложение. В силу непрерывности V существует, далее, такое $\eta_\nu > 0$, что $V([t_{\nu-1}, t_\nu] \times (-\eta_\nu, \eta_\nu)) \subset \exp_p(U_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$. Положим $\eta = \min\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$, $J_0 = (-\eta, \eta)$. Собственная ломаная вариация $V|_{[0, \beta]} \times J_0$ геодезической c может быть поднята посредством $\exp_p$ в некоторую собственную ломаную вариацию Φ геодезической φ в M_p, а именно Φ: $[0, \beta] \times J_0 \to M_p$ задается формулой $\Phi(t, \varepsilon) = h_\nu^{-1} \circ V(t, \varepsilon)$ при $(t, \varepsilon) \in [t_{\nu-1}, t_\nu] \times J_0$. После этого утверждение теоремы вытекает из леммы 2 и следствия этой леммы.

Как показывает пример S_p^n, утверждение теоремы может не выполняться, если на c есть сопряженные точки; ниже будет по-

казано, что оно неверно во всех случаях, когда сопряженные точки лежат в открытом интервале $(0, \beta)$.

Замечания

(i) Теорема может быть усилена в случае, когда геодезическая $c\colon [0, \beta] \to M$, не имеющая сопряженных точек, инъективна. В самом деле, пусть $c(0) = p$, $\varphi\colon [0, \beta] \to M_p$ – луч $\varphi(t) = t\dot{c}(0)$, тогда в силу леммы 2 разд. 2.8 существует такая окрестность $U \supset \varphi([0, \beta])$, которую $\exp_p$ отображает диффеоморфно на окрестность $G \supset c([0, \beta])$. Для любого кусочно дифференцируемого пути $\tilde{c}$ в G, имеющего общие концы с c, справедливо неравенство $L(\tilde{c}) \geqslant L(c)$, а если $\tilde{c}$ не совпадает с c, то $L(\tilde{c}) > L(c)$. Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 2, поскольку $\tilde{c}$ можно поднять в U с помощью $(\exp_p |_U)^{-1}$.

Если отображение $\exp_p |_U\colon U \to G$ лишь локально диффеоморфно, то в G могут существовать пути с концами p, $c(\beta)$, которые короче c. Так обстоит дело, когда c не инъективна (см. примеры на цилиндре и конусе в замечаниях (iv) и (v) разд. 3.8). Однако в пространстве Ω_{pq} всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$ с концами p, q существует такая окрестность геодезической без сопряженных точек c, что для любого пути $\tilde{c}$ в этой окрестности выполняется неравенство $L(\tilde{c}) \geqslant L(c)$, а если $\tilde{c}$ и c не совмещены, то $L(\tilde{c}) > L(c)$ (предполагается, как обычно, что в Ω_{pq} введена компактнооткрытая топология).

(ii) Для каждой точки $p \in M$ существует такое $\delta > 0$, что $\exp_p$ диффеоморфно отображает открытый шар $U_\delta = \{v\colon v \in M_p, \| v \| < \delta\}$ в M_p с центром 0 радиуса δ на некоторую окрестность B_δ точки p (см. теорему 1 разд. 2.8). При $q \in B_\delta$ существует единственная геодезическая $c\colon [0, 1] \to B_\delta$ с концами $c(0) = p$, $c(1) = q$; любая другая геодезическая $[0, 1] \to M$ с теми же концами, как мы покажем, не может целиком содержаться в B_δ. Пусть $h = \exp_p |_{U_\delta}$, $v = h^{-1}(q)$, $c(t) = h(tv)$. Если $c_1\colon [0, 1] \to B_\delta$ – другая геодезическая, для которой $c_1(0) = p$, $c_1(1) = q$, то $c_1(t) = \exp_p(tv_1)$, $v_1 = \dot{c}_1(0)$. Множество $\{t\colon t \in [0, 1],\ h^{-1} \circ c_1(t) = tv_1\}$, очевидно, открыто и замкнуто в $[0, 1]$, не пусто и, следовательно, совпадает со связным множеством $[0, 1]$. Поэтому $v_1 = h^{-1} \circ c_1(1) = v$ и $c_1 = c$. Покажем, что для каждого кусочно дифференцируемого пути $\tilde{c}\colon [0, 1] \to M$ с концами $\tilde{c}(0) = p$, $\tilde{c}(1) = q$ выполняется неравенство $L(\tilde{c}) \geqslant L(c)$, а если $\tilde{c}$, c не совмещены, то $L(\tilde{c}) > L(c)$. Если $\tilde{c}$ целиком лежит в B_δ, то, как и в замечании (i), это следует непосредственно из леммы 2, достаточно поднять c, $\tilde{c}$ в U_δ с помощью $\exp_p$. Если $\tilde{c}$ не полностью расположен в B_δ, возьмем $\beta = \sup\{t\colon \tilde{c}([0, t]) \subset B_\delta\}$; тогда существует такое $t_0 \in (0, \beta)$, что для $v_0 = h^{-1} \circ \tilde{c}(t_0)$ выполнено неравенство $\| v_0 \| > \| v \|$. Построим луч $\psi\colon [0,1] \to M_p$, $\varphi(t) = tv_0$;

тогда из леммы 2 получаем $L(\tilde{c}|_{[0,\,t_0]}) \geqslant L(h \circ \psi)$, откуда $L(\tilde{c}) \geqslant$ $\geqslant L(\tilde{c}|_{[0,\,t_0]}) \geqslant L(h \circ \psi) = \| v_0 \| > \| v \| = L(c)$.

(iii) Пусть c: $[0, 1] \to M$ — кусочно дифференцируемый путь, $c(0) = p$, $c(1) = q$. Если в Ω_{pq} существует такая окрестность пути c, что для всякого пути $\tilde{c}$ в этой окрестности $L(\tilde{c}) \geqslant L(c)$, то c совмещен с некоторой геодезической; если при этом c — кусочно нормальный путь, то c — нормальная геодезическая.

Для доказательства надо воспользоваться замечанием (ii), в силу которого c локально совмещен с некоторой геодезической. Заметим, что, вообще говоря, не каждые две точки связного риманова многообразия можно соединить путем кратчайшей длины, как это видно на примере $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (см. § 5).

4.5. Индексная форма геодезической

Рассмотрим теперь экстремальные свойства геодезической с сопряженными точками.

Пусть E — векторное $\mathbb{R}$-пространство (не обязательно конечномерное).

Ограничение на диагональ симметричного билинейного отображения f: $E \times E \to \mathbb{R}$ называется квадратичной формой на E. Отображение f, а также соответствующая квадратичная форма, называются положительно определенными (соответственно, неотрицательными), если $f(X, X) > 0$ ($f(X, X) \geqslant 0$) при всех $X \neq 0$; аналогично f (и квадратичная форма f) называются отрицательно определенными (неположительными), если $f(X, X) < 0$ ($f(X, X) \leqslant 0$) при всех $X \neq 0$.

Пусть c: $[\alpha, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая и $\mathfrak{B}_c'$ — векторное $\mathbb{R}$-пространство всех кусочно гладких векторных полей Z вдоль c, ортогональных $\dot{c}$, т. е. удовлетворяющих условию $\langle Z, \dot{c} \rangle = 0$. Естественно „билинеаризировать“ формулу Синга для второй вариации (4) и соответственно (10) из разд. 4.1. Другими словами, построим отображение I: $\mathfrak{B}_c' \times \mathfrak{B}_c' \to \mathbb{R}$ по формуле

$$I(X, Y) = \int_\alpha^\beta (\langle X', Y' \rangle - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle)|_t \, dt. \tag{1}$$

Отображение I билинейно и симметрично; оно называется *индексной формой* геодезической c. Для дифференцируемых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{B}_c'$ из (1) и тождества $D\langle X', Y \rangle = \langle X'', Y \rangle + \langle X', Y' \rangle$ получаем

$$I(X, Y) = \langle X', Y \rangle|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \langle X'' + R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle|_t \, dt, \tag{2}$$

а вследствие симметричности I имеем также

$$I(X, Y) = \langle X, Y' \rangle |_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \langle X, Y'' + R(Y, \dot{c})\dot{c} \rangle |_t \, dt. \qquad (2')$$

Если $X, Y \in \mathfrak{B}_c'$ — дифференцируемы и Y — поле Якоби, то, как видно из (2'), имеет место

$$I(X, Y) = \langle X, Y' \rangle |_\alpha^\beta. \qquad (3)$$

Но тогда с помощью предельного перехода нетрудно распространить (3) на случай, когда $X \in \mathfrak{B}_c'$ не дифференцируемо.

Соответствующая индексной форме I геодезической c квадратичная форма $I(X, X)$: $\mathfrak{B}_c' \to \mathbb{R}$ сопоставляет каждому кусочно гладкому векторному полю $Y \in \mathfrak{B}_c'$ вторую вариацию длины $L''(0)$ по отношению к канонической ломаной вариации V: $[\alpha, \beta] \times J \to M$ геодезической c с вектором вариации Y (см. (8) и (11) разд. 4.1). При этом, принимая во внимание (7) разд. 4.1, имеем

$$L'(0) = 0, \quad L''(0) = I(Y, Y), \qquad (4)$$

где

$$V(t, \varepsilon) = \exp(\varepsilon Y(t)), \quad V_* D_2 |_{t,0} = Y(t).$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_c''$ векторное $\mathbb{R}$-пространство всех ортогональных $\dot{c}$ кусочно гладких векторных полей вдоль c, удовлетворяющих условиям $Y(\alpha) = Y(\beta) = 0$. Ясно, что $\mathfrak{B}_c''$ — подпространство $\mathfrak{B}_c'$ и поля из $\mathfrak{B}_c''$ суть векторы собственных ломаных вариаций c, ортогональные $\dot{c}$. Если для $Y \in \mathfrak{B}_c''$ выполнено неравенство $I(Y, Y) < 0$, то в силу (4) существует такая собственная ломаная вариация V: $[\alpha, \beta] \times J \to M$ геодезической c, что для достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ имеем $L(\varepsilon) < L(0)$. Отсюда вытекает следующая лемма:

Лемма 1

Усл. *Пусть* c: $[\alpha, \beta] \to M$ — *нормальная геодезическая с сопряженной точкой* $t_1 \in (\alpha, \beta)$.

Утв. *Существует такая собственная ломаная вариация* V: $[\alpha, \beta] \times J \to M$ *геодезической* c, *что при достаточно малых* $\varepsilon \neq 0$ *выполняется неравенство* $L(\varepsilon) < L(0)$.

Док. По определению (см. разд. 4.3), существует ненулевое поле Якоби Y вдоль c, для которого $Y(\alpha) = Y(t_1) = 0$. Мы построим с помощью Y такое кусочно гладкое векторное поле $\tilde{Y} \in \mathfrak{B}_c''$, что $I(\tilde{Y}, \tilde{Y}) < 0$; тогда утверждение леммы получится из непосредственно предшествующих ей рассуждений. Согласно разд. 4.2, имеем $\langle Y, \dot{c} \rangle = 0$, откуда $\langle Y', \dot{c} \rangle = 0$. Так как $Y \neq 0$,

должно быть $Y'(t_1) \neq 0$; построим такое векторное поле $Z \in \mathfrak{B}_c''$, что $Z(t_1) = -Y'(t_1)$. Для этого достаточно взять параллельное поле Z_1 вдоль c, удовлетворяющее условию $Z_1(t_1) = -Y'(t_1)$, и положить $Z = \psi Z_1$, где ψ — дифференцируемая действительная функция на $[\alpha, \beta]$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = 0$, $\psi(t_1) = 1$ (см. разд. 8.1). Определим для каждого $\eta > 0$ кусочно гладкое векторное поле $Y_\eta(t) \in \mathfrak{B}_c''$ по формуле $Y_\eta(t) = Y(t) + \eta Z(t)$ при $t \in [\alpha, t_1]$, и по формуле $Y_\eta(t) = \eta Z(t)$ при $t \in [t_1, \beta]$. В силу (1) и (3) имеем

$$I(Y_\eta, Y_\eta) = \langle Y, Y' \rangle|_{t_1} + 2\eta \langle Z, Y' \rangle|_{t_1} + \eta^2 I(Z, Z).$$

Так как $Y(t_1) = 0$, $Z(t_1) = -Y'(t_1)$, отсюда следует, что для достаточно малых $\eta > 0$ выполняется

$$I(Y_\eta, Y_\eta) = -2\eta \langle Y', Y' \rangle|_{t_1} + \eta^2 I(Z, Z) < 0,$$

и лемма доказана.

В следующей лемме подпространство полей Якоби в пространстве векторов собственных вариаций геодезической характеризуется как пространство вырождения индексной формы.

Лемма 2

Усл. c: $[\alpha, \beta] \to M$ — *нормальная геодезическая.*

Утв. *Для* $Y \in \mathfrak{B}_c''$ *следующие утверждения равносильны:*
(a) Y *есть поле Якоби вдоль* c;
(b) *для всех* $Z \in \mathfrak{B}_c''$ *имеет место* $I(Y, Z) = 0$.
Если при $Y \neq 0$ *выполняется* (b), *то говорят, что индексная форма вырождена для вектора* Y.

Док. Согласно (3), из (a) следует (b).

Чтобы вывести (a) из (b), возьмем такие числа $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k = \beta$, что $Y_\mu = Y|_{[\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]}$ суть дифференцируемые векторные поля ($\nu = 1, \ldots, k$). Положим $c_\nu = c|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$, тогда $\langle Y_\nu, \dot{c}_\nu \rangle = 0$, откуда легко следует $\langle Y_\nu', \dot{c}_\nu \rangle = 0$, $\langle Y_\nu'', \dot{c}_\nu \rangle = 0$ ($\nu = 1, \ldots, k$). Построим дифференцируемые функции ψ_ν: $[\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям $\psi_\nu(\gamma_{\nu-1}) = \psi_\nu(\gamma_\nu) = 0$ и $\psi_\nu > 0$ в остальных точках ($\nu = 1, \ldots, k$). Определим $Z_\nu = \varphi_\nu(Y_\nu'' + R(Y_\nu, \dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu)$ вдоль геодезической c_ν и $Z(t) = Z_\nu(t)$ при $t \in [\gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu]$, тогда $Z \in \mathfrak{B}_c''$. В силу (2) имеем

$$= I(Y, Z) = \sum_{\nu=1}^{k} \langle Y_\nu', Z_\nu \rangle|_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} - \sum_{\nu=1}^{k} \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} \langle Y_\nu'' + R(Y_\nu, \dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu, Z_\nu \rangle|_t \, dt,$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{k} \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} \psi_\nu(t) \langle Y_\nu'' + R(Y_\nu, \dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu, Y_\nu'' + R(Y_\nu, \dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu\rangle|_t \, dt = 0.$$

Следовательно, $Y_\nu'' + R(Y_\nu, \dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu = 0$ и Y_ν есть поле Якоби при $\nu = 1, \ldots, k$. Пусть теперь r — одно из чисел $1, \ldots, k-1$. Построим векторное поле $\tilde{Z} \in \mathfrak{B}_c''$, такое, что $\tilde{Z}(\gamma_r) = Y_{r+1}'(\gamma_r) - Y_r'(\gamma_r)$ и $\tilde{Z}(\gamma_\nu) = 0$ при $\nu \neq r$. Учитывая (3), получаем

$$0 = I(Y, \tilde{Z}) = \sum_{\nu=1}^{k} [\langle Y_\nu'(\gamma_\nu), \tilde{Z}(\gamma_\nu)\rangle - \langle Y_\nu'(\gamma_{\nu-1}), \tilde{Z}(\gamma_{\nu-1})\rangle] =$$

$$= -\langle Y_{r+1}'(\gamma_r) - Y_r'(\gamma_r), \tilde{Z}(\gamma_r)\rangle = -\langle Y_{r+1}'(\gamma_r) - Y_r'(\gamma_r), Y_{r+1}'(\gamma_r) - Y_r'(\gamma_r)\rangle,$$

так что $Y_r'(\gamma_r) = Y_{r+1}'(\gamma_r)$. По теореме единственности для полей Якоби Y дифференцируемо в точках γ_ν, что и доказывает утверждение (a).

При помощи индексной формы можно охарактеризовать геодезические без сопряженных точек.

Теорема

Усл. c: $[\alpha, \beta] \to M$ — *нормальная геодезическая.*

Утв. *Следующие утверждения равносильны:*

(a) *на c нет сопряженных точек;*

(b) *индексная форма I геодезической c положительно определена на $\mathfrak{B}_c''$.*

Док. Из (a) следует (b).

Если выполнено (a), то $I(Y, Y) \geqslant 0$ для всех $Y \in \mathfrak{B}_c''$, потому что в противном случае (4) с последующими рассуждениями было бы несовместимо с теоремой из разд. 4.4. Остается показать, что если $Y \in \mathfrak{B}_c''$ и $I(Y, Y) = 0$, то $Y = 0$. Для $Z \in \mathfrak{B}_c''$ и любого $\eta \subset \mathbb{R}$ имеем $0 \leqslant I(Y - \eta Z, Y - \eta Z) = -2\eta I(Y, Z) + \eta^2 I(Z, Z)$. Поэтому $I(Y, Z) = 0$ при всех $Z \in \mathfrak{B}_c''$ и Y есть поле Якоби согласно лемме 2. Но на c нет сопряженных точек, следовательно, $Y = 0$.

Из (b) следует (a).

Пусть $t_1 \in (\alpha, \beta)$ — сопряженная точка c. Тогда существует ненулевое поле Якоби Y вдоль c, для которого $Y(\alpha) = Y(t_1) = 0$. Положим $Z(t) = Y(t)$ при $t \in [\alpha, t_1]$ и $Z(t) = 0$ в других точках; точка $Z \in \mathfrak{B}_c''$, и $I(Z, Z) = 0$ при $Z \neq 0$.

Из последней теоремы вытекает важное экстремальное свойство полей Якоби.

Пусть c: $[\alpha, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая без сопряженных точек и $Y \in \mathfrak{V}_c'$ — поле Якоби, тогда, как мы сейчас покажем, для всех векторных полей $X \in \mathfrak{V}_c'$, удовлетворяющих условиям $X(\alpha) = Y(\alpha)$, $X(\beta) = Y(\beta)$, справедливо неравенство

$$I(X, X) > I(Y, Y) \quad \text{при} \quad X \neq Y. \tag{5}$$

В самом деле, $X - Y \in \mathfrak{V}_c''$ и $X - Y \neq 0$, откуда $I(X - Y, X - Y) > 0$. В силу (3) имеем

$$\begin{aligned} I(X-Y, X-Y) &= I(X, X) - 2I(X, Y) + I(Y, Y) = \\ &= I(X, X) - 2(X, Y')\Big|_\alpha^\beta + \langle Y, Y' \rangle\Big|_\alpha^\beta = \\ &= I(X, X) - \langle Y, Y' \rangle\Big|_\alpha^\beta = I(X, X) - I(Y, Y), \end{aligned}$$

и (5) следует из

$$I(X - Y, X - Y) = I(X, X) - I(Y, Y). \tag{6}$$

Отметим, что из полученных результатов видна связь между сопряженными точками геодезической и ее свойством минимизировать длину. Из замечания (i) разд. 4.4 следует, что геодезическая без сопряженных точек короче всех достаточно близких путей с теми же концами. С другой стороны, как следует из леммы 1 этого раздела, для геодезической c: $[\alpha, \beta] \to M$, содержащей внутреннюю сопряженную точку t_1, $\alpha < t_1 < \beta$, существуют сколь угодно близкие к ней пути с теми же концами, которые короче c.

Замечания

(i) Если M — пространство неположительной кривизны, J — компактный интервал в $\mathbb{R}$ и c: $J \to M$ — нормальная геодезическая, то в силу (1) индексная форма I положительно определена на $\mathfrak{V}_c'$, и по теореме этого раздела на c нет сопряженных точек. Учитывая разд. 4.3, отсюда следует, что для каждой точки $p \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_p$ имеет максимальный ранг во всей области своего определения.

Пусть $M = S_\rho^n$ и c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая, $w_1, w_2 \in M_{c(0)}$, $\langle w_1, \dot{c}(0) \rangle = \langle w_2, \dot{c}(0) \rangle = 0$. Тогда для полей Якоби $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{V}_c'$, удовлетворяющих условиям $Y_1(0) = Y_2(0) = 0$, $Y_1'(0) = w_1$, $Y_2'(0) = w_2$, из (3) имеем, учитывая (11) разд. 4.2,

$$I(Y_1, Y_2) = \frac{\rho}{2} \sin \frac{2\beta}{\rho} \langle w_1, w_2 \rangle. \tag{7}$$

Вследствие (5) индексная форма I при $0 < \beta < \frac{\pi\rho}{2}$ положительно определена на подпространства всех полей $X \in \mathfrak{V}_c'$, для которых

$Y(0) = 0$. Но, например, I отрицательно определена при $\frac{\pi\rho}{2} < \beta < \pi\rho$ на подпространстве всех полей Якоби $Y \in \mathfrak{B}_c'$, для которых $Y(0) = 0$.

Пусть $0 < \beta < \pi\rho$ и $u \in M_{c(\beta)}$, $\langle u, \dot{c}(\beta)\rangle = 0$, найдите поле Якоби $Y \in \mathfrak{B}_c'$, удовлетворяющее условиям $Y(0) = 0$, $Y(\beta) = u$, и покажите, что $I(Y, Y) = \frac{\|u\|^2}{\rho} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{\rho}$.

(ii) Пусть c: $[\alpha, \beta] \to M$ — геодезическая. Покажите, что индексная форма I неотрицательна, но не положительно определена на $\mathfrak{B}_c''$ в том и только том случае, когда β — единственная сопряженная точка c (при этом в (5) выполняется $I(X, X) \geqslant I(Y, Y)$). В каком случае здесь возможно равенство?

(iii) Вернемся еще раз к замечанию (i) разд. 4.1. Если c — невырожденная геодезическая, т. е. критическая точка функционала длины L: $\Omega_{pq} \to \mathbb{R}$ (или функционала энергии) в пространстве путей Ω_{pq}, то индексная форма I есть не что иное, как гессиан функционала L в точке c (см. замечание (v) разд. 3.5 и разд. 7.6), т. е. дифференциальный оператор второго порядка на Ω_{pq} от L, который полностью определяет возрастание и убывание L в окрестности c, если I не вырождена.

4.6. Теорема Морса об индексе

Введем теперь меру, позволяющую судить, „как много“ близких путей меньшей длины может быть у геодезической с сопряженными точками.

Пусть E — векторное $\mathbb{R}$-пространство (не обязательно конечномерное), f — квадратичная форма на E. Назовем индексом (соответственно квазииндексом) f точную верхнюю границу размерностей всех подпространств E, на которых f отрицательно (соответственно неположительно) определена.

Рассмотрим для нормальной геодезической c: $[\alpha, \beta] \to M$ пространство $\mathfrak{B}_c''$ всех ортогональных $\dot{c}$ кусочно гладких векторных полей Y вдоль c, удовлетворяющих условиям $Y(\alpha) = Y(\beta) = 0$ (см. разд. 4.5). Индекс (квазииндекс) квадратичной формы I: $\mathfrak{B}_c'' \times \mathfrak{B}_c'' \to \mathbb{R}$ называется *индексом* (*квазииндексом*) геодезической c. Индекс c мы обозначим через $\operatorname{Ind} c$, квазииндекс c — через $\operatorname{Ind}_0 c$; очевидно, $\operatorname{Ind} c \leqslant \operatorname{Ind}_0 c$.

Следующие дальше результаты принадлежат Морсу.

Лемма

Усл. *c: $[\alpha, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая; J_c^β — подпространство всех полей Якоби в $\mathfrak{B}_c''$.*

Утв. $\operatorname{Ind} c$, $\operatorname{Ind}_0 c$ *конечны, причем*

$$\operatorname{Ind}_0 c = \operatorname{Ind} c + \dim J_c^{\beta}. \tag{1}$$

Док. Согласно теореме 2 разд. 2.8, существует такая окрестность U множества $0(M)$ в $\widetilde{TM}$, которая диффеоморфно отображается с помощью $\pi \times \exp$ на некоторую окрестность диагонали в $M \times M$. Так как $0(c([0, \beta]))$ компактно, существует такое число $\delta > 0$, что для любого $t \in [0, \beta]$ шар $U_{\delta, t} = \{v \in M_{c(t)}, \| v \| < \delta\}$ принадлежит U. Поэтому $\exp_{c(t)} |_{U_{\delta, t}}$ имеет в каждой точке максимальный ранг ($=n$) и, следовательно, есть диффеоморфизм для всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Поскольку $c((t-\delta, t+\delta)) \subset \exp_{c(t)}(U_{\delta, t})$, из теоремы 4.3 следует, что на геодезической $c|_{\left[t, t+\frac{\delta}{2}\right]}$ нет сопряженных точек ($t \in [\alpha, \beta]$). Выберем числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \beta$, чтобы было $t_\nu - t_{\nu-1} < \frac{\delta}{2}$ ($\nu = 1, \ldots, k$), тогда геодезические $c|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ не имеют сопряженных точек. Согласно 4.3, для каждого $\nu = 1, \ldots, k$ и любых векторов $v \in M_{c(t_{\nu-1})}$, $w \in M_{c(t_\nu)}$ существует одно и только одно поле Якоби Z_ν вдоль $c|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$, удовлетворяющее условиям $Z_\nu(t_{\nu-1}) = v$, $Z_\nu(t_\nu) = w$. Обозначим через J_c'' конечномерное подпространство таких полей $Y \in \mathfrak{B}_c''$, что для каждого ν $Y|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ есть поле Якоби; очевидно, $\dim J_c'' = (n-1)(k-1)$.

Построим для каждого $X \in \mathfrak{B}_c''$ такое векторное поле ΦX вдоль c, что $\Phi X|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ есть поле Якоби Y_ν вдоль $c|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$, удовлетворяющее условиям $Y_\nu(t_{\nu-1}) = X(t_{\nu-1})$, $Y_\nu(t_\nu) = X(t_\nu)$ ($\nu = 1, \ldots, k$). Отображение Φ: $\mathfrak{B}_c'' \to J_c''$ является линейным, причем $\Phi X = X$ тогда и только тогда, когда $X \in J_c''$. В силу (5) разд. 4.5 при $X \in \mathfrak{B}_c''$, $X \notin J_c''$ имеем

$$I(X, X) > I(\Phi X, \Phi X). \tag{2}$$

Обозначим теперь через A произвольное подпространство $\mathfrak{B}_c''$, на котором I отрицательно (неположительно) определена, тогда $\Phi|_A$ инъективно. В самом деле, в противном случае существует $X \in A$, $X \neq 0$, для которого $\Phi X = 0$, а это значит, что $X \notin J_c''$ и вследствие (2) имеем $I(X, X) > I(\Phi X, \Phi X) = 0$ вопреки определению A. Поэтому $\operatorname{Ind} c$ и $\operatorname{Ind}_0 c$ конечны: $\dim A \leqslant \dim J_c'' = (n-1)(k-1)$. Если обозначить через $\operatorname{Ind}' c$ ($\operatorname{Ind}_0' c$) индекс (квазииндекс) ограничения I на J_c'', то получаем также неравенства $\operatorname{Ind} c \leqslant \operatorname{Ind}' c$, $\operatorname{Ind}_0 c \leqslant \operatorname{Ind}_0' c$. Так как обратные неравенства очевидным образом следуют из включения $J_c'' \subset \mathfrak{B}_c''$, имеем $\operatorname{Ind} c = \operatorname{Ind}' c$, $\operatorname{Ind}_0 c =$

$= \operatorname{Ind}_0' c$. Итак, J_c'' является конечномерной „аппроксимацией“ $\mathfrak{B}_c''$, достаточной для вычисления индекса и квазииндекса c.

Выберем новую систему чисел $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_l = \beta$, удовлетворяющих неравенствам $s_\mu - s_{\mu-1} < \frac{\delta}{2}$ $(\mu = 1, \ldots, l)$, таких, что $\{s_1, \ldots, s_{l-1}\} \cap \{t_1, \ldots, t_{k-1}\} = \varnothing$. Обозначим через $\tilde{J}_c''$ подпространство полей $Y \in \mathfrak{B}_c''$, для которых $Y|_{[s_{\mu-1}, s_\mu]}$ есть поле Якоби вдоль $c|_{[s_{\mu-1}, s_\mu]}$ $(\mu = 1, \ldots, l)$. Тогда $J_c'' \cap \tilde{J}_c'' = J_c^\beta$, и (2) выполнено для всех $X \in \tilde{J}_c'' \setminus J_c^\beta$. Применив к $\tilde{J}_c''$ те же самые рассуждения, построим подпространство $\tilde{B}_0 \subset \tilde{J}_c$, на котором I неположительна и размерность которого равна $\operatorname{Ind}_0 c$. В силу (2) $\Phi|_{\tilde{B}_0}$ инъективно. Положим $B_0 = \Phi \tilde{B}_0$, тогда $\dim B_0 = \dim \tilde{B}_0 = \operatorname{Ind}_0 c$. Пусть B — дополнительное к J_c^β подпространство B_0, т. е. B_0 есть прямая сумма B и J_c^β:

$$B_0 = B \oplus J_c^\beta. \tag{3}$$

Из (2) следует, что I отрицательно определена на B. Теперь для доказательства (1) остается проверить, что $\dim B = \operatorname{Ind} c$. По доказанному выше, существует такое подпространство $B' \subset J_c''$, для которого $\dim B' = \operatorname{Ind} c$, и на котором I отрицательно определена. Если бы было $\dim B' > \dim B$, то было бы также

$$\dim (B' \oplus J_c^\beta) > \dim (B \oplus J_c^\beta) = \operatorname{Ind}_0 c.$$

Но это невозможно, так как из (3) разд. 4.5 следует, что I неотрицательна на $B' \oplus J_c^\beta$. Итак, $\dim B = \dim B' = \operatorname{Ind} c$, что и доказывает лемму.

Докажем теперь следующую очень важную теорему.

Теорема (Теорема об индексе)

Усл. *c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая; $J_c^t (t \in (0, \beta])$ — векторное пространство всех полей Якоби Y вдоль c, удовлетворяющих условиям $Y(0) = Y(\beta) = 0$.*

Утв. *Число сопряженных точек геодезической c конечно, причем справедливы соотношения*

$$\operatorname{Ind} c = \sum_{t \in (0, \beta)} \dim J_c^t, \quad \operatorname{Ind}_0 c = \sum_{t \in (0, \beta]} \dim J_c^t. \tag{4}$$

Если $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — сопряженные точки c в $(0, \beta)$, а кратности их равны соответственно $m_1, \ldots, m_r$, то $\operatorname{Ind} c = \sum_{i=1}^{r} m_i$. Таким образом, индекс c равен числу сопряженных точек в $(0, \beta)$, считая каждую с ее кратностью.

Док. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in (0, \beta]$ — некоторые попарно различные сопряженные точки c. Точка $t_1 \in (0, \beta]$ является сопряженной точкой c в том и только том случае, если $\dim J_c^{t_1} \geqslant 1$ (см. разд. 4.3). Построим линейное отображение $\iota\colon J_c^{t_1} \to \mathfrak{B}_c''$, полагая $(\iota Y)_t = Y_t$ при $t \in [0, t_1]$ и $(\iota Y)_t = 0$ в остальных точках; ясно, что ι инъективно. Далее, рассмотрим при $i = 1, \ldots, r$ подпространства $A_i = \iota J_c^{\gamma_i} \subset \mathfrak{B}_c''$. В силу (3) разд. 4.5 для всех $Z \in A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ имеем $I(Z, Z) = 0$; следовательно, $\operatorname{Ind}_0 c \geqslant \dim A_1 + \ldots + \dim A_r \geqslant r$. Из предыдущей леммы известно, что $\operatorname{Ind}_0 c$ конечен, и поэтому на c может быть лишь конечное число сопряженных точек.

Рассмотрим теперь следующие функции φ, φ_0: $(0, \beta] \to \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — множество целых чисел с дискретной топологией):

$$\varphi(t) = \operatorname{Ind} c|_{[0, t]}, \quad \varphi_0(t) = \operatorname{Ind}_0 c|_{[0, t]}.$$

Пусть $\gamma_1 < \ldots < \gamma_r$ — все сопряженные точки c в $(0, \beta]$. Тогда вследствие (1) имеем

$$\varphi_0(t) - \varphi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, \beta] \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\},$$

так что

$$\sum_{t \in (0, \beta]} [\varphi_0(t) - \varphi(t)] = \sum_{i=1}^{r} [\varphi_0(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i)].$$

Как мы покажем ниже, φ непрерывна слева, а φ_0 — справа, пока же докажем, что этого достаточно для доказательства теоремы. В самом деле, в любом открытом интервале, не содержащем сопряженных точек c, $\varphi_0(t) = \varphi(t)$, и, следовательно, обе непрерывны. Так как эти функции принимают лишь целочисленные значения, то обе постоянны в таком интервале. Далее, так как φ непрерывна слева в точке γ_{i+1}, а φ_0 непрерывна справа в точке γ_i, то $\varphi_0(\gamma_i) = \varphi(\gamma_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, r-1)$; поэтому $\sum_{i=1}^{r} [\varphi_0(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i)] = \varphi_0(\gamma_r) - \varphi(\gamma_1)$. Кроме того, φ непрерывна слева в точке γ_1, и из теоремы разд. 4.5 следует, что $\varphi(\gamma_1) = 0$, φ_0 непрерывна справа в точке γ_r и потому постоянна в $[\gamma_r, \beta]$. Пользуясь снова соотношением (1), имеем

$$\varphi_0(\beta) = \sum_{t \in (0, \beta]} [\varphi_0(t) - \varphi(t)] = \sum_{t \in (0, \beta]} \dim J_c^t,$$

что и доказывает (4), поскольку первое из соотношений (4) непосредственно следует из второго.

Остается доказать, что φ непрерывна слева, а φ_0 — справа. Прежде всего заметим, что φ, φ_0 — неубывающие функции. Действительно, если t_1, $t_2 \in (0, \beta]$, $t_1 \leqslant t_2$, $c_1 = c|_{[0, t_1]}$, $c_2 = c|_{[0, t_2]}$, то можно построить инъективное линейное отображение $\iota\colon \mathfrak{B}_{c_1}'' \to \mathfrak{B}_{c_2}''$,

полагая $(\iota Y)_t = Y_t$ при $t \in [0, t_1]$, $(\iota Y)_t = 0$ в других точках, причем $I(Y, Y) + I(\iota Y, \iota Y)$.

Пусть $\bar{t} \in (0, \beta]$; выберем, как в лемме, такие числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \bar{t}_0$, что $t_\nu - t_{\nu-1} < \frac{\delta}{2}$, и, следовательно, на $c|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ нет сопряженных точек ($\nu = 1, \ldots, k$). Пусть J — интервал, содержащий $\bar{t}$ и открытый в $(0, \beta]$, столь малый, что $t_{k-1} \in J$ и $|t - t_{k-1}| < \frac{\delta}{2}$ при $t \in J$. Положим $c_t = c|_{[0, t]}$. Для каждого $t \in J$ рассмотрим $(n-1)(k-1)$-мерное подпространство $J''_{c_t} \subset \mathfrak{B}''_{c_t}$ всех таких векторных полей Y вдоль c_t, что $Y|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ ($\nu = 1, \ldots, k$) и $Y|_{[t_{k-1}, t]}$ суть поля Якоби. Как видно из доказательства леммы, $\varphi(t)$ есть индекс, а $\varphi_0(t)$ — квазииндекс ограничения I на J''_{c_t}, $t \in J$. Построим изоморфизм

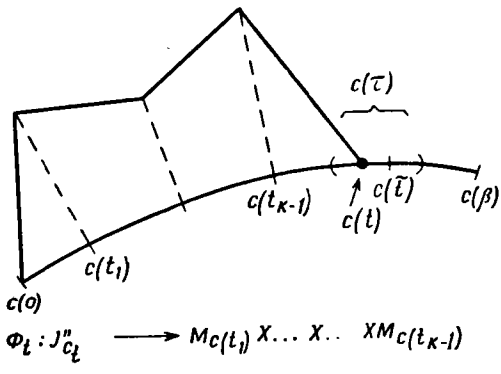


Рис. 1.

$$\Phi_t = J''_c \to M_{c(t_1)} \times \ldots \times M_{c(t_{k-1})} = E$$

по формуле

$$\Phi_t Y = (Y(t_1), \ldots, Y(t_{k-1}))$$

и билинейную форму Q_t на E по формуле $Q_t(u, v) = I(\Phi_t^{-1}u, \Phi_t^{-1}v)$ тогда $\varphi(t)$ равна индексу, а $\varphi_0(t)$ — квазииндексу Q_t ($t \in J$). Отображение Q: $E \times E \times J \to \mathbb{R}$, заданное формулой $Q(u, v, t) = Q_t(u, v)$, как мы сейчас покажем, непрерывно. Обозначим через B векторное пространство всех полей $Y|_{[0, t_{k-1}]}$, где $Y \in J''_{c_t}$, тогда $\Phi Z = (Z(t_1), \ldots, Z(t_{k-1}))$ есть изоморфизм Φ: $B \to E$, и в силу (3) разд. 4.5 имеем

$$Q(u, v, t) = I(\Phi_t^{-1}u, \Phi_t^{-1}v) = I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v) + I(X_{u,t}, Y_{u,t}) =$$

$$= I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v) + \langle X_{u,t}, Y'_{u,t}\rangle\Big|_{t_{k-1}}^{t_k},$$

где $X_{u,t} = \Phi_t^{-1}u|_{[t_{k-1}, t]}$, $Y_{v,t} = \Phi_t^{-1}v|_{[t_{k-1}, t]}$ — поля Якоби. Так как отображение $(u, v) \to I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v)$ есть билинейная форма на E, то $(u, v, t) \to I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v)$ непрерывно. Заметим теперь, что векторное поле Z вдоль любой геодезической $[0, \gamma] \to M$ является

полем Якоби тогда и только тогда, когда поле Z_-, $Z_-(t) = Z(\gamma - t)$, есть поле Якоби вдоль обратно ориентированной геодезической. Поэтому из (1) разд. 4.3 следует непрерывность отображения $(u, v, t) \to \langle X_{u,t}, Y'_{v,t}\rangle$, а тем самым и $Q(u, v, t)$.

Теперь можно без труда доказать требуемые свойства непрерывности φ, φ_0, рассматривая непрерывное семейство Q квадратичных форм на фиксированном векторном пространстве E. Так как E есть произведение евклидовых пространств $M_{c(t_i)}$, на E определена евклидова метрика. Пусть A — подпространство E размерности $\varphi(\bar{t})$, на котором $Q_{\bar{t}}$ отрицательно определена, т. е. $Q_t(u, u) < 0$ при $u \in A$, $u \neq 0$. Рассмотрим множество $S = \{u: u \in A, \|u\| = 1\}$. Так как отображение Q непрерывно и S компактно, существует такая окрестность J_0 точки $\bar{t}$ в J, что $Q(u, u, t) = Q_t(u, u) < 0$ для всех $u \in S$, $t \in J_0$; тем самым $Q_t(u, u) < 0$ для всех $u \in A$, $u \neq 0$, $t \in J_0$. Таким образом, при $t \in J_0$ имеем $\varphi(t) \geqslant \varphi(\bar{t})$. С другой стороны, как было показано, $\varphi(t)$ — неубывающая функция, поэтому при $t \in J_0$, $t \leqslant \bar{t}$ должно быть $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)$ и φ непрерывна слева в точке $\bar{t}$.

Пусть, наконец, $s_\mu \in J$, $s_\mu > \bar{t}$ и $\lim\limits_{\mu\to\infty} s_\mu = \bar{t}$. Покажем, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} \varphi_0(s_\mu) = \varphi_0(\bar{t})$, откуда и будет следовать, что φ_0 непрерывна справа в точке $\bar{t}$. Так как φ_0 не убывает и принимает лишь целочисленные значения, можно считать, что $\varphi_0(s_\mu) = k$ при всех μ, где k — некоторое неотрицательное целое число. Тогда $\varphi_0(\bar{t}) \leqslant k$. Возьмем в E такие k-мерные подпространства A_μ, что Q_{s_μ} неположительна на A_μ, т. е. $Q_{s_\mu}(u, u) \leqslant 0$ для всех $u \in A$. Пусть $a_{\mu 1}, \ldots, a_{\mu k}$ — ортонормированный базис в A_μ. Выбирая в случае надобности подпоследовательности, можно считать, что существуют пределы $\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{\mu i} = a_{0i}$ $(i = 1, \ldots, k)$; векторы a_{0i} составляют ортонормированный базис некоторого k-мерного подпространства $A_0 \subset E$. Для $u_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha^i a_{0i} \in A_0$ имеем $u_0 = \lim\limits_{\mu\to\infty} u_\mu$, где $u_\mu = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha^i a_{\mu i}$; из непрерывности Q следует поэтому, что

$$Q_{\bar{t}}(u_0, u_0) = \lim_{\mu\to\infty} Q(u_\mu, u_\mu, s_\mu) \leqslant 0.$$

Итак, $Q_{\bar{t}}$ неположительна на A_0, откуда получаем неравенство $\varphi_0(\bar{t}) \geqslant k = \lim\limits_{\mu\to\infty} \varphi(s_\mu)$, завершающее доказательство теоремы. Отметим еще, что, согласно последней теореме, критические точки экспоненциального отображения $\exp_p$, $p \in M$, на каждом исходящем из $0 \in M_p$ луче расположены изолированно.

Замечания

(i) Для нормальной геодезической c: $[0, \beta] \to S^n_\rho$ в силу теоремы об индексе и замечания (iii) разд. 4.3 имеем

$$\operatorname{Ind} c = \nu(n-1) \quad \text{при} \quad \nu\pi\rho < \beta \leqslant (\nu+1)\pi\rho,$$
$$\operatorname{Ind}_0 c = \nu(n-1) \quad \text{при} \quad \nu\pi\rho \leqslant \beta < (\nu+1)\pi\rho,$$

где $\nu \geqslant 0$ — целое число.

В $\mathbb{R}^n$ все геодезические имеют нулевой квазииндекс (и индекс).

(ii) Пусть c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая, $c(0) = p$, $c(\beta) = q$. Индекс c есть некоторая мера множества тех близких к c путей с концами p, q, которые короче c (см. замечание (v) разд. 4.3). В самом деле, если $B \in \mathfrak{B}''_c$ — линейное подпространство, $\dim B = \operatorname{ind} c = m$ и I отрицательно определена на B, то каждому полю $Y \in B$, согласно (4) разд. 4.5, соответствует каноническая вариация c, и, таким образом, получается „m-мерное веретено" близких к c путей с теми же концами, которые все короче c. Заметим в дополнение к замечанию (iii) разд. 4.5, что индекс c есть не что иное, как индекс критической точки c функционала длины L (или энергии E) на пространстве путей Ω_{pq}, т. е. размерность максимального линейного подпространства касательного пространства к Ω_{pq}, состоящего из таких векторов, в направлении которых L убывает, т. е. имеет строгий относительный максимум в точке c (см. также разд. 7.6).

Если $\operatorname{Ind} c \geqslant 1$, то существуют сколь угодно близкие к c пути с теми же концами p, q, которые короче c. Поэтому для кратчайшей на M геодезической c, соединяющей p с q, $\operatorname{Ind} c = 0$, так что c не имеет сопряженных точек в $(0, \beta)$. Однако β может быть в этом случае сопряженной точкой, как показывает пример полумеридиана на S^2_ρ.

(iii) Пусть c: $[\alpha, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая, c_-: $[\alpha, \beta] \to M$ — обратно направленная геодезическая, заданная формулой $c_-(t) = c(\alpha + \beta - t)$. Покажите, что $\operatorname{Ind} c_- = \operatorname{Ind} c$, $\operatorname{Ind}_0 c_- = \operatorname{Ind}_0 c$. Докажите для $\alpha < \tilde{t} < \beta$, $c_1 = c|_{[\alpha, \tilde{t}]}$, $c_2 = c|_{[\tilde{t}, \beta]}$ неравенства

$$\operatorname{Ind} c_1 + \operatorname{Ind} c_2 \leqslant \operatorname{Ind} c, \quad \operatorname{Ind}_0 c_1 + \operatorname{Ind}_0 c_2 \leqslant \operatorname{Ind}_0 c.$$

(iv) Обобщение теоремы об индексе на фокальные точки (см. замечание (v) разд. 4.3) также принадлежит Морсу. По этому поводу см. его книгу и статью Амброза (Ambrose W., *The index theorem in Riemannian geometry*, Ann. of Math. 73 (1961), 49—86).

В случае периодических геодезических c рассматривается индекс на подпространстве всех замкнутых полей в $\mathfrak{B}'_c$. Для этого случая Ботт доказал теорему об индексе, показывающую, что индекс произвольной периодической геодезической, накрывающей „простую" периодическую геодезическую c, определяется поведе-

нием полей Якоби вдоль c, т. е. „вдоль первого оборота“, см. Bott R., *On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory*, Comm. on Pure and Applied Math. IX (1956), 171—206.

ЛИТЕРАТУРА К § 4

Бишоп Р. и Криттеидеи Р., Геометрия многообразий, М., 1967.

Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechung, B. G. Teubner (1909), Leipzig und Berlin.

Милнор Дж., Теорня Морса, М., 1965.

Morse M., The calculus of variations in the large, *AMS Colloquium Publications*, XVIII (1934), New York.

Зейферт Г. и Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, М., 1947.

Стернберг С., Лекции по дифферепциальной геометрии, М., 1970.

§ 5. Римановы многообразия как метрические пространства

5.1. Функция расстояния риманова многообразия

Рассмотрим естественную метрическую структуру, которую можно ввести на римановом многообразии.

Пусть E — произвольное множество. Отображение $\rho: E\times E\to\mathbb{R}$ называется функцией расстояния на E, если для всех $p, q, r\in E$ выполнены условия:

(1) $\rho(p, q)=\rho(q, p)$ (симметрия);
(2) $\rho(p, q)\leqslant\rho(p, r)+\rho(r, q)$ (неравенство треугольника);
(3) $\rho(p, q)=0$ тогда и только тогда, когда $p=q$.

Пусть E — топологическое пространство и $\rho: E\to E$ — функция расстояния на E. Функция ρ называется совместимой с топологической структурой E, если шары $B_\delta(p)=\{q: q\in E, \rho(p, q)<\delta\}$ с центрами в точках $p\in E$ радиусов $\delta>0$ составляют базис топологии E. Объект, состоящий из топологического пространства E и определенной на E функции расстояния ρ, совместимой с топологией E, называется *метрическим пространством.*

Рассмотрим теперь связное риманово многообразие M. Обозначим через Ω_{pq} множество всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1]\to M$ с началом p и концом q. Поскольку M связно, Ω_{pq} не пусто. Построим отображение $\rho: M\times M\to\mathbb{R}$ с помощью формулы

$$\rho(p, q)=\inf\{L(c): c\in\Omega_{pq}\}, \tag{4}$$

где $L(c)$ — длина пути c. Тогда справедлива следующая

Лемма

Утв. *M вместе с ρ составляют метрическое пространство.*
ρ называется функцией расстояния риманова многообразия M.

Док. Свойства (1) и (2) непосредственно вытекают из определения; заметим для этого, что если c — путь из Ω_{pq}, то формула $c_-(t)=c(1-t)$ определяет путь $c_-\in\Omega_{qp}$, причем $L(c_-)=L(c)$; если же $c_1\in\Omega_{pr}$, $c_2\in\Omega_{rq}$, то путь c: $[0, 1]\to M$, заданный формулами $c(t)=c_1(2t)$ при $t\in\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $c(t)=c_2(2t-1)$ при $t\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, принадлежит Ω_{pq}, причем $L(c)=L(c_1)+L(c_2)$. Переходим к до-

казательству (3). Ясно, что $\rho(p, p)=0$. Надо показать, что из $\rho(p, q)=0$ следует $p=q$. Возьмем для этого ε-шар U_ε с центром 0 в M_p, который диффеоморфно отображается экспоненциальным отображением $\exp_p$ связности Леви-Чивита на некоторую окрестность точки p. Согласно замечанию (ii) разд. 4.4, любой исходящий из p путь, не лежащий в $\exp(U_\varepsilon)$, длиннее ε и для $q \in \exp(U_\varepsilon)$ соединяющая p с q геодезическая c: $[0, 1] \to \exp(U_\varepsilon)$ есть кратчайший на M путь с концами p, q. Так как $L(c)=0$ лишь в случае, когда c постоянен, то из $\rho(p, q)=0$ следует $p=q$.

Надо еще показать, что δ-шары $B_\delta(p)$ с центрами $p \in M$ составляют базис топологии M, т. е. что шары $B_\delta(p)$ открыты, и любая окрестность точки $p \in M$ содержит δ-шар с центром в p. Для этого заметим сначала, что функция ρ непрерывна. В самом деле, для последовательности точек $(p_\nu, q_\nu) \in M \times M$ из $\lim\limits_{\nu\to\infty} p_\nu = p$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} q_\nu = q$ с помощью неравенства треугольника и условия симметрии получается, что

$$\rho(p_\nu, q_\nu) \leqslant \rho(p, q) + \rho(p, p_\nu) + \rho(q, q_\nu),$$
$$\rho(p_\nu, q_\nu) \geqslant \rho(p, q) - \rho(p, p_\nu) - \rho(q, q_\nu).$$

Достаточно поэтому показать, что для последовательности точек $p_\nu \in M$, сходящейся к p, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(p, p_\nu) = 0$. Рассмотрим опять шар U с центром в $0 \in M_p$, на котором $\exp_p$ является диффеоморфизмом. В силу замечания (ii) разд. 4.4 имеем

$$\rho(p, q) = \| (\exp|_U)^{-1}(q) \| \quad \text{для всех } q \in \exp(U). \tag{5}$$

Поскольку для всех ν, за исключением конечного множества, точки p_ν принадлежат $\exp(U)$, из (5) вытекает непрерывность ρ, так как непрерывно отображение $(\exp|_U)^{-1}$. Из непрерывности ρ следует, что δ-шары $B_\delta(p)$ открыты. Наконец, как мы сейчас покажем, каждая окрестность V точки p содержит δ-шар с центром в p, являющийся диффеоморфным образом открытого δ-шара $U_\delta \subset M_p$ с центром в 0 при отображении $\exp_p$. Для этого выберем δ таким образом, чтобы $\exp|_{U_\delta}$ было диффеоморфизмом и $\exp(U_\delta)$ содержалось в заданной окрестности V, тогда $B_\delta(p) = \exp(U_\delta)$. В самом деле, положим $V_\delta = \exp(U_\delta)$, тогда в силу (5) имеем $V_\delta \subset B_\delta(p)$. Далее, V_δ открыто в M, а следовательно и в $B_\delta(p)$. С другой стороны, V_δ также замкнуто в $B_\delta(p)$. Действительно, если $q_\nu \in V_\delta$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} q_\nu = q \in B_\delta(p)$, то существует предельная точка $v \in \bar{U}_\delta$ последовательности $v_\nu = (\exp|_{U_\delta})^{-1}(q_\nu)$. Согласно (5), выполняется $\rho(p, q_\nu) = \| v_\nu \|$, и в силу непрерывности ρ

имеем $\lim_{v\to\infty} \|v_v\| = \rho(p, q)$. Следовательно, $\|v\| = \rho(p, q) < \delta$, $v \in U_\delta$, и ввиду непрерывности exp получаем $\exp v = q$. Итак, V_δ открыто и замкнуто в $B_\delta(p)$, и равенство $V_\delta = B_\delta(p)$ будет вытекать из связности $B_\delta(p)$. В действительности шар $B_\delta(p)$ даже линейно связен, так как для любой точки $q \in B_\delta(p)$ существует путь $c \in \Omega_{pq}$ длины $L(c) < \delta$, т. е. целиком лежащей в $B_\delta(p)$. Этим завершается доказательство леммы.

Покажем еще, что функция ρ^2 дифференцируема в некоторой окрестности точки диагонали $(p, p) \in M \times M$, какова бы ни была точка $p \in M$. Для этого заметим, что по теореме 1 разд. 2.8 отображение $\pi \times \exp\colon \widetilde{TM} \to M \times M$ обратимо в некоторой окрестности W точки $0_p \in TM$. Построим ε-шар $B_\varepsilon(p)$, такой, что $B_\varepsilon(p) \times B_\varepsilon(p) \subset (\pi \times \exp)(W)$; тогда для любой точки $q_1 \in B_{\varepsilon/3}(p)$ отображение $\exp_{q_1}$ обратимо в $\frac{2\varepsilon}{3}$-шаре U_{q_1} с центром $0 \in M_{q_1}$.

Из (5) получаем

$$\rho(q_1, q_2) = \left\|(\exp|_{U_{q_1}})^{-1}(q_2)\right\| = \left\|(\pi \times \exp)|_W)^{-1}(q_1, q_2)\right\| \qquad (6)$$

для $q_1, q_2 \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(p)$, откуда и следует дифференцируемость ρ^2. Сама функция ρ также дифференцируема в $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(p) \times B_{\frac{\varepsilon}{3}}(p)$, кроме точек диагонали, так как при $q_1 \neq q_2$, очевидно, $((\pi \times \exp)|_W)^{-1}(q_1, q_2) \neq 0$. Вне достаточно малой окрестности диагонали в $M \times M$ функция ρ^2, вообще говоря, не дифференцируема (например, в случае $M = S^n_\rho$ функция ρ^2, как и ρ, не дифференцируема, когда p, q — диаметрально противоположные точки).

Замечания

(i) Если $N \subset M$ — связное риманово подмногообразие и $\tilde{\rho}$ — функция расстояния на N, то, очевидно, $\tilde{\rho}(p, q) \geqslant \rho(p, q)$ для всех $p, q \in N$.

Приведите пример, в котором функции $\tilde{\rho}$ и ρ не совпадают, хотя $\dim M = \dim N$. Более общим образом $\tilde{\rho}$ и ρ могут не совпадать, когда N — вполне геодезическое (см. замечания (iii) разд. 3.7 и (iii) этого раздела) подмногообразие M. Если $\dim N < \dim M$, то при этом N может быть даже полным (см. разд. 5.3).

(ii) Пусть N — связное риманово многообразие, $\tilde{\rho}$ — функция расстояния N и $f\colon N \to M$ — изометрическое дифференцируемое отображение. Тогда для всех $p, q \in N$ выполняется неравенство $\tilde{\rho}(p, q) \geqslant \rho(f(p), f(q))$. Если f — изометрия, т. е. изометрический диффеоморфизм N на M, то верно и обратное неравенство, так что справедливо равенство

$$\tilde{\rho}(p, q) = \rho(f(p), f(q)) \quad \text{для всех} \quad p, q \in N, \qquad (7)$$

т. е. f является изометрией также и в смысле расстояния. Обратно, пусть $\dim N = \dim M$ и f — изометрия в смысле расстояния, т. е. выполнено (7). Покажите, что в этом случае f открыто и инъективно, следовательно, является гомеоморфизмом (см. замечание (iv) разд. 1.1). Более того, как можно доказать, f дифференцируемо (см. Palais R., *On the differentiability of isometries*, Proc. AMS 8 (1957), 805—807). Предполагая, что f дифференцируемо, покажите с помощью нормальных координат (см. замечание (ii) разд. 3.8), что f есть изометрическое отображение в смысле римановой метрики.

Покажите, что изометрическое отображение $\mathbb{R}^{n+1}$ на себя в смысле расстояния есть аффинное отображение, а именно композиция ортогонального отображения и сдвига. Отсюда следует, что изометрия в смысле расстояния стандартной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ на себя есть ограничение ортогонального преобразования $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iii) Пусть $N \subset M$ — связное риманово подмногообразие с функцией расстояния $\tilde{\rho}$. Покажите, что N является вполне геодезическим в M тогда и только тогда, когда у каждой точки $p \in N$ существует окрестность $V \subset N$, такая, что $\tilde{\rho}|_{V \times V} = \rho|_{V \times V}$ (см. также (i)).

5.2. Выпуклые множества

Рассмотрим связное риманово многообразие M с функцией расстояния ρ и связностью Леви-Чивита.

Пусть G — открытое подмножество M; G называется *простым*, если для любых двух точек $p, q \in G$ существует не более одной геодезической c: $[0, 1] \to G$ с концами $c(0) = p$, $c(1) = q$. Каждое открытое подмножество G является простым вместе с G.

Множество G называется *выпуклым*, если для любых двух точек $p, q \in G$ существует геодезическая c с концами p, q длины $L(c) = \rho(p, q)$, целиком лежащая в G. Множество G называется *сильно выпуклым*, если G выпукло и, кроме того, все δ-шары $B_\delta(p) \subset G$ выпуклы. Если G сильно выпукло, то любое выпуклое открытое подмножество G также сильно выпукло.

Мы покажем, что у каждой точки $p \in M$ существует сильно выпуклая окрестность. Следующие ниже предложения в основном принадлежат Дж. Г. К. Уайтхеду, который впервые рассмотрел соответствующий вопрос для общей линейной связности (см. Whitehead J. H. C., *Convex regions in the geometry of paths*, The Quraterly J. of Math. 3 (1932), 33—42).

Для нормальной геодезической c: $[0, \beta] \to M$ обозначим через I_c ограничение индексной формы на подпространство полей Якоби вдоль c, удовлетворяющих условиям $\langle Y, \dot{c} \rangle = 0$, $Y(0) = 0$.

Лемма

Усл. *Пусть* $B_\delta(p)$ *есть* δ*-шар с центром в точке* $p \in M$, *такой, что для всех* $q \in B_\delta(p)$ *открытый* 2δ*-шар в* M_q *с центром в* $0 \in M_q$ *диффеоморфно отображается на* $B_{2\delta}(q)$ *отображением* $\exp_q$. *Для каждого* $v \in M_p$, $\|v\| = 1$, *обозначим через* c_v: $[0, \delta] \to M$ *нормальную геодезическую* $c_v(t) = \exp(tv)$. *Предположим, что для каждой из таких геодезических индексная форма* I_{c_v} *положительна определена.*

Утв. *Шар* $B_\delta(p)$ *есть простое выпуклое множество.*

Док. Прежде всего из замечания (ii) разд. 4.4 сразу же следует, что $B_\delta(p)$ есть простое множество и что каждая геодезическая в $B_\delta(p)$ является кратчайшей в M. Остается доказать, что $B_\delta(p)$ — выпуклое множество. Для этого рассмотрим для любой фиксированной точки $q \in B_\delta(p)$ непустое множество A тех точек $B_\delta(p)$, которые можно соединить с q геодезической, лежащей в $B_\delta(p)$. Так как $B_\delta(p)$ связно, то лемма будет доказана, если мы проверим, что A открыто и замкнуто в $B_\delta(p)$.

A открыто. Пусть $q' \in A$ и c — геодезическая, соединяющая q с q' в $B_\delta(p)$. Поднимем c посредством $\exp_q$ в исходящий из 0 луч φ пространства M_q. Тогда существует окрестность компактного образа φ, которую $\exp_q$ диффеоморфно отображает на окрестность образа c в $B_\delta(p)$.

A замкнуто в $B_\delta(p)$. Пусть $q' \in B_\delta(p)$ — предельная точка A и q_ν — последовательность в A, сходящаяся к q'. Так как $\exp|_{U_q}$ — диффеоморфизм, последовательность $u_\nu = (\exp|_{U_q})^{-1}(q_\nu)$ сходится к $u = (\exp|_{U_q})^{-1}(q') \in U_q$. Тогда, как мы покажем, геодезическая c: $[0, 1] \to B_{2\delta}(q)$, заданная формулой $c(t) = \exp(tu)$ и соединяющая q с q', целиком принадлежит $B_\delta(p)$, а именно, убедимся, что если c имеет общую точку с границей $B_\delta(p)$, то существует $t_0 \in (0, 1)$, для которого $c(t_0) \in \overline{B_\delta(p)}$ (поскольку все точки $q_\nu \in A$, требуемое утверждение будет тогда следовать из соображений непрерывности). Если для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ имеет место $\rho(p, c(\varepsilon_0)) = \delta$, рассмотрим нормальную геодезическую c_v, где $v = \frac{1}{\delta}(\exp|_{U_p})^{-1} \circ c(\varepsilon)$, и построим в достаточно малом интервале J_0, содержащем нуль, вариацию V: $[0, \delta] \times J_0 \to M$ геодезической c_v по формуле $V(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{t}{\delta}(\exp|_{U_p})^{-1} \circ c(\varepsilon + \varepsilon_0)\right)$. Обозначая, как обычно, функцию длины пути для вариации V через $L(\varepsilon)$, имеем $L(0) = \delta$. Если $L'(0) \neq 0$, то наше утверждение доказано. Если же $L'(0) = 0$, то $Y(t) = V_* D_2|_{t,0}$ есть поле Якоби вдоль c_v, $Y(0) = 0$, $\langle Y, \dot{c}_v \rangle = 0$, $Y \neq 0$ и по предположению $L''(0) = I_{c_v}(Y, Y) > 0$. Следовательно, L имеет в точке 0 строгий относительный минимум и утверждение доказано полностью.

Из леммы вытекает следующее важное предложение.

Теорема

Утв. *Для каждой точки $p \in M$ существует такое $\delta > 0$, что шар $B_\delta(p)$ — сильно выпуклое множество.*

Док. По теореме 1 разд. 2.8 отображение $\pi \times \exp\colon \widetilde{TM} \to M \times M$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность 0_p в TM на окрестность G точки (p, p) в $M \times M$. Возьмем такое $\delta'' > 0$, чтобы было $B_{\delta''}(p) \times B_{\delta''}(p) \subset G$, и положим $\delta' = \frac{\delta''}{3}$. Тогда для каждой точки $q \in B_{\delta'}(p)$ шар $B_{2\delta'}(q)$ есть диффеоморфный образ $2\delta'$-шара в M_q с центром в 0 при отображении $\exp q$. Построим для $v, w \in \pi^{-1}(\overline{B}_{\delta'}(p))$, $\pi(v) = \pi(w)$, геодезическую c_v: $[0, \delta'] \to M$ по формуле $c_v(t) = \exp(tv)$ и поле Якоби Y_{vw} вдоль c_v, удовлетворяющее условиям $Y_{vw}(0) = 0$, $Y'_{vw}(0) = w$. Заметим прежде всего, что отображения $(v, w, t) \to Y_{vw}(t)$, $(v, w, t) \to Y'_{vw}(t)$, $(v, w, t) \to Y''_{vw}(t) = -R(Y_{vw}, \dot{c}_v)\dot{c}_v|_t$ непрерывны, как это видно, например, из леммы разд. 4.3, поскольку отображение $(v, w, t, \varepsilon) \to t(v + \varepsilon w)$ дифференцируемо (см. замечание (iv) разд. 1.10). Но тогда непрерывна и функция $(v, w, t) \to D\langle Y_{vw}, Y'_{vw}\rangle|_t$; ввиду $Y_{vw}(0) = 0$ имеем $D\langle Y_{vw}, Y'_{vw}\rangle|_0 = \langle Y'_{vw}, Y'_{vw}\rangle|_0 = \| w \|^2$, и из компактности множества $A = \{(v, w)\colon v, w \in TM, \pi(v) = \pi(w) \in \overline{B_{\delta'}(p)}, \| v \| = \| w \| = 1\}$ следует существование такого числа $\delta \in (0, \delta']$, что для всех $t \in [0, \delta]$, $(u, w) \in A$ выполнено неравенство $D\langle Y_{vw}, Y'_{vw}\rangle|_t > 0$. Поэтому $\langle Y_{vw}, Y'_{vw}\rangle$ строго возрастает на $[0, \delta]$, и в силу (3) разд. 4.5 для всех $(v, w) \in A$ имеем $I_{c_v}(Y_{vw}, Y_{vw}) = \langle Y_{vw}, Y'_{vw}\rangle|_\delta > 0$. Утверждение теоремы следует теперь из предыдущей леммы, с только что определенным значением δ.

Обозначим через $\hat{\mathbb{R}}$ двухточечную компактификацию числовой прямой, т. е. числовую прямую $\mathbb{R}$, обычным образом пополненную точками $-\infty$, ∞. Для любой точки $p \in M$ обозначим через $r(p)$, $r(p) \in \hat{\mathbb{R}}$, точную верхнюю границу тех чисел δ, для которых шар $B_\delta(p)$ — сильно выпуклое множество; $r(p)$ называется *радиусом выпуклости* M в точке p. Согласно последней теореме, $r(p) > 0$ для всех $p \in M$. Покажем, что отображение r: $M \to \hat{\mathbb{R}}$, при котором каждой точке $p \in M$ ставится в соответствие $r(p)$, непрерывно. Если существует такая точка $p_0 \in M$, что $r(p_0) = \infty$, то все шары в M выпуклы, и $r(p) = \infty$ для всех $p \in M$. Если же $r(p)$ конечна для всех $p \in M$, то, как мы сейчас покажем, имеет место неравенство

$$|r(p) - r(q)| \leqslant \rho(p, q) \tag{1}$$

для всех $q \in B_{r(p)}(p)$. В самом деле, вместе с $B_{r(p)}(p)$ шар $B_{r(p)-\rho(p,q)}(q)$ является сильно выпуклым множеством; следовательно, $r(q) \geqslant r(p) - \rho(p, q)$, откуда $r(p) - r(q) \leqslant \rho(p, q)$. В случае $r(q) \leqslant r(p)$ этим все доказано. В случае $r(q) > r(p)$ имеем $p \in B_{r(q)}(q)$ и, значит, $r(q) - r(p) \leqslant \rho(p, q)$, что и доказывает (1). Из неравенства (1) и непрерывности функции расстояния вытекает непрерывность r.

Рассмотрим для точки $p \in M$ множество всех чисел δ, для которых отображение $\exp|_{U_\delta}$ определено и инъективно (U_δ — шар радиуса δ с центром в $0 \in M_p$). Точная верхняя граница d_p чисел δ называется *радиусом инъективности* отображения $\exp_p$ или радиусом инъективности в точке p. Пусть U — шар в M_p с центром 0 радиуса d_p и $B(p)$ — шар в M с центром в p радиуса d_p. Как мы увидим ниже (лемма разд. 5.3), p можно соединить с каждой точкой $q \in B(p)$ кратчайшей геодезической. Отсюда следует, что кратчайшие геодезические из p в $q \in B(p)$ определяются однозначно и имеют вид c: $t \to \exp tv$, где $v \in U$.

Пусть A — подмножество M. Число $d_A = \inf\{d_p\colon p \in A\}$ называется *элементарной длиной* A в M. Каждую точку $p \in A$ можно соединить с $q \in M$ единственной кратчайшей геодезической c: $[0, 1] \to M$, если $\rho(p, q) < d_A$. Для компактного множества A имеем $d_A > 0$; в самом деле, для всех $p \in M$ выполняется $r(p) \leqslant d_p$, а непрерывная функция r принимает на компактном множестве положительный минимум.

Замечания

(i) Для $M = \mathbb{R}^n$ имеем $d_p = \infty$ при всех $p \in \mathbb{R}^n$, следовательно, $d_A = \infty$ при всех $A \subset \mathbb{R}^n$.

Для $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполняется $d_p = \|p\|$, откуда $d_A = 0$ при $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Для $M = S^n_\rho$ справедливо равенство $d_p = \pi\rho$, какова бы ни была точка p; поэтому $d_A = \pi\rho$ для всех подмножеств $A \subset S^n_\rho$.

Приведите пример двумерного риманова многообразия M, для которого $d_p = \infty$ в одной и только одной точке $p \in M$. Получите из замечания (i) разд. 4.5 значение радиуса выпуклости для $p \in S^n_\rho$ $\left(r(p) = \frac{\pi\rho}{2}\right)$. Покажите, что на S^n_ρ любое отличное от S^n_ρ выпуклое открытое множество содержится в некоторой полусфере. Очевидно, $r(p) = \infty$ для $\mathbb{R}^n$ и $r(p) = \|p\|$ для $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Пусть M — связное риманово многообразие размерности n с функцией расстояния ρ, $p \in M$. Пусть $r_0 > 0$ выбрано таким образом, чтобы $\exp_p$ диффеоморфно отображало шар U_{r_0} с центром в $0 \in M_p$ на шар $B_{r_0}(p)$ в M. Тогда, согласно (5) разд. 5.1, функ-

ция φ: $B_{r_0}(p) \to \mathbb{R}$, заданная формулой $\varphi(q) = \rho(p, q)$, дифференцируема при $q \neq p$ и все $r \in (0, r_0)$ являются регулярными значениями φ, так как производная φ в радиальном направлении, очевидно, не равна нулю. Поэтому определены $(n-1)$-мерные компактные римановы подмногообразия $S_r(p) = \varphi^{-1}(r) \subset M$, называемые сферами M с центром в точке p. По лемме Гаусса вектор градиента $\nabla\varphi|_q$ есть касательный вектор нормальной геодезической c, соединяющей p с q в $B_{r_0}(p)$, в ее конечной точке q; следовательно, $\|\nabla\varphi\| = 1$. Рассмотрим вторую основную форму l подмногообразия $S_r(p) \subset M$ по отношению к полю единичных нормалей $\nabla\varphi$; для $q \in S_r(p)$ и векторов $v, w \in M_q$, касательных к $S_r(p)$, имеем $l(v, w) = \langle \nabla_v \nabla\varphi, w\rangle$ (см. разд. 3.7). Покажите, что $l(v, w) = \langle X', Y\rangle|_r = I(X, Y)$, где X, Y — поля Якоби вдоль c, удовлетворяющие условиям $X(0) = Y(0) = 0$, $X(r) = v$, $Y(r) = w$. В случае когда $\exp_p$ диффеоморфно отображает шар U_{2r} на $B_{2r}(p)$, согласно лемме, получаем, что $B_r(p)$ — простое выпуклое множество, если вторая основная форма положительно определена во всех точках сферы $S_r(p)$. Пусть теперь σ — двумерное линейное подпространство касательного пространства к $S_r(p)$ в точке q $(n > 2)$, а v, w — ортонормированный базис в σ. Тогда, согласно (9) разд. 3.7, риманова кривизна K_σ многообразия M в направлении σ и соответствующая кривизна $\bar{K}_\sigma$ сферы $S_r(p)$ связаны соотношением

$$\bar{K}_\sigma = K_\sigma + \det \begin{pmatrix} I(X, X) & I(X, Y) \\ I(X, Y) & I(Y, Y) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Выберем v и w так, чтобы было $l(v, w) = I(X, Y) = 0$ (это можно сделать в силу симметричности l). Тогда, подставляя в формулу (2) значения $I(X, X)$, $I(Y, Y)$, вычисленные согласно определению индексной формы (1) разд. 4.5, получаем выражение, в котором при $r \to 0$ главными членами являются интегралы от $\langle X', X'\rangle$, $\langle Y', Y'\rangle$. Исходя из этого, покажите, что при достаточно малых $r > 0$ существуют такие функции $\varkappa(r)$, $\lambda(r)$, для которых $0 < \varkappa(r) \leqslant \bar{K}_\sigma \leqslant \lambda(r)$ при всех σ, касающихся $S_r(p)$, причем

$$\lim_{r\to 0} r^2 \varkappa(r) = \lim_{r\to 0} r^2 \lambda(r) = 1. \tag{3}$$

Равенство (3) означает, что при малых r сферы $S_r(p)$ риманова многообразия M имеют асимптотически ту же постоянную кривизну $\frac{1}{r^2}$, что и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть $N \subset M$ — риманово подмногообразие коразмерности 1 в M; $p \in N$; $u \in M_p$ — единичный вектор нормали к N, так что $\|u\| = 1$ и $\langle u, v\rangle = 0$ при всех $v \in N_p$; l — вторая основная форма N по отношению к u. Существует такое $r_0 > 0$, для которого из условия $r \in (0, r_0]$ следует, что $B_r(p)$ — простое выпуклое множе-

ство и $B_r(p) \setminus N$ распадается на две компоненты связности G_r^+, G_r^- (причем через G_r^- обозначена та компонента, в сторону которой направлен u). При достаточно малом r множество G_r^+ выпукло, если форма l положительно определена. Обратно, если G_+^r — выпуклое множество, то l — неотрицательна.

(iii) Пусть A — компактное подмножество связного риманова многообразия M; d_A — элементарная длина A. Получите непосредственно из теоремы 2 разд. 2.8 положительность d_A, не пользуясь радиусом выпуклости (см. также разд. 5.4.).

(iv) Рассмотрим связные римановы многообразия M, N равной размерности с функциями расстояния ρ, $\bar{\rho}$ и пусть $f\colon N \to M$ — дифференцируемое изометрическое отображение. Покажите, что f локально является также изометрией в смысле расстояния, т. е. у каждой точки $p \in N$ существует такая окрестность V в N, что для точек q_1, $q_2 \in V$ имеем $\bar{\rho}(q_1, q_2) = \rho(f(q_1), f(q_2))$ (см. замечание (ii) разд. 5.1).

5.3. Полные римановы многообразия

Метрическое пространство E называется полным, если каждая последовательность Коши в E сходится.

Пусть M — связное риманово многообразие с функцией расстояния ρ, оно называется *полным*, если M полно как метрическое пространство с метрикой ρ. Если M компактно, то M полно. С другой стороны, $\mathbb{R}^n$, например, является полным римановым многообразием, хотя и не является компактным. Мы приступаем к доказательству теоремы Хопфа — Ринова, имеющей фундаментальное значение для всей римановой геометрии в целом; эта теорема устанавливает эквивалентность метрической полноты M и полноты связности Леви-Чивита на M, т. е. полноты соответствующей геодезической струи. Идея доказательства, излагаемого ниже, принадлежит де Раму, его существенная часть содержится в следующей лемме:

Лемма

Усл. *M — связное риманово многообразие с функцией расстояния ρ и связностью Леви-Чивита. Точка $p \in M$; $U_\delta(\delta > 0)$ — открытый шар радиуса δ в M_p с центром в 0; $B_\delta(p)$ — открытый шар радиуса δ в M с центром в p.*

Утв. *Если для $\varepsilon > 0$ шар U_ε целиком принадлежит области определения экспоненциального отображения $\exp_p$, то p можно соединить с каждой точкой $q \in B_\varepsilon(p)$ кратчайшей геодезической c, т. е. такой, что $L(c) = \rho(p, q)$. В частности, отображение $\exp_p$: $U_\varepsilon \to B_\varepsilon(p)$ сюръективно. Наконец, для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$ замкнутый δ-шар $\overline{B_\delta(p)}$ компактен.*

Док. Для $\delta \in (0, \varepsilon)$ обозначим через C_δ множество точек $q \in \overline{B_\delta(p)}$, которые можно соединить с p геодезической c_q длины $L(c_q) = \rho(p, q)$. Мы покажем, что C_δ компактно, и что при всех $\delta \in (0, \varepsilon)$ имеет место $C_\delta = \overline{B_\delta(p)}$, откуда и будет следовать утверждение леммы.

Так как C_δ содержится в компактном множестве $\exp(\bar{U}_\delta) \subset \overline{B_\delta(p)}$, то для доказательства компактности C_δ достаточно проверить, что C_δ замкнуто в $\overline{B_\delta(p)}$. Пусть $q \in \overline{B_\delta(p)}$ — предельная точка C_δ, q_ν — последовательность точек C_δ, сходящаяся к q. Для каждой точки q_ν существует такой $v_\nu \in \bar{U}_\delta$, что $\exp_p(v_\nu) = q_\nu$ и $\| v_\nu \| = \rho(p, q_\nu)$. Последовательность v_ν имеет в компактном множестве $\bar{U}_\delta$ предельную точку v. Вследствие непрерывности $\exp_p$ и ρ, для геодезической c_q: $[0, 1] \to M$, $c_q(t) = \exp(tv)$, имеем $L(c_q) = \rho(p, q)$, что и доказывает замкнутость C_δ в $\overline{B_\delta(p)}$, а значит, и компактность C_δ.

Рассмотрим множество A тех чисел $\delta \in (0, \varepsilon)$, для которых $C_\delta = \overline{B_\delta(p)}$. В силу разд. 5.1 (см. доказательство утверждения (3) леммы) A содержит некоторый интервал с началом 0, таким образом, A не пусто. Докажем, что A замкнуто и открыто в $(0, \varepsilon)$, тогда из связности $(0, \varepsilon)$ будет следовать, что $A = (0, \varepsilon)$, что равносильно утверждению леммы.

Покажем, что A замкнуто в $(0, \varepsilon)$. Пусть $\delta_0 \in (0, \varepsilon)$ — предельная точка A. Тогда существует последовательность $\delta_\nu \in A$, сходящаяся к δ_0. Для всех ν выполняется $C_{\delta_\nu} = \overline{B_{\delta_\nu}(p)}$, откуда следует $B_{\delta_0}(p) \subset C_{\delta_0}$, а так как C_{δ_0} замкнуто в $\overline{B_{\delta_0}(p)}$, имеем $C_{\delta_0} = \overline{B_{\delta_0}(p)}$, $\delta_0 \in A$.

Покажем, что A открыто в $(0, \varepsilon)$. Пусть $\delta_0 \in A$. Непрерывная функция r: $M \to \hat{\mathbb{R}}$ (см. разд. 5.2), сопоставляющая каждой точке $p \in M$ радиус выпуклости M в точке p, имеет на компактном множестве $C_{\delta_0} = \overline{B_{\delta_0}(p)}$ положительный минимум η'.

Если $0 < \eta < \min(\eta', \varepsilon - \delta_0)$, то, как мы покажем, $C_{\delta_0+\eta} = \overline{B_{\delta_0+\eta}(p)}$; отсюда и будет следовать, что A открыто. Так как $C_{\delta_0+\eta}$ замкнуто, достаточно доказать включение $B_{\delta_0+\eta}(p) \subset C_{\delta_0+\eta}$, более того, $\overline{B_{\delta_0}(p)} \subset C_{\delta_0+\eta}$, и достаточно показать, что $B_{\delta_0+\eta}(p) \setminus \overline{B_{\delta_0}(p)} \subset C_{\delta_0+\eta}$.

Итак, пусть $q \in B_{\delta_0+\eta}(p) \setminus \overline{B_{\delta_0}(p)}$. Существует последовательность путей c_ν: $[\alpha, \beta] \to M$ с началом p и концом q, для которой $\lim_{\nu\to\infty} L(c_\nu) = \rho(p, q)$. По теореме о промежуточном значении, существуют такие числа $t_\nu \in [\alpha, \beta]$, что $\rho(p, c_\nu(t_\nu)) = \delta_0$. Последовательность $\tilde{q}_\nu = c_\nu(t_\nu)$ имеет в компактном множестве $\overline{B_{\delta_0}(p)} \setminus B_{\delta_0}(p)$ предельную точку $\tilde{q}$, причем, выбирая в случае надобности под-

последовательность, можно считать, что $\tilde{q}_\nu$ сходятся к $\tilde{q}$. Покажем, что

$$\rho(p, q) = \rho(p, \tilde{q}) + \rho(\tilde{q}, q). \tag{1}$$

В самом деле, $\rho(p, \tilde{q}) + \rho(\tilde{q}, q) \leqslant L(c_\nu)$, и при $\nu \to \infty$ в силу непрерывности функции ρ отсюда следует $\rho(p, \tilde{q}) + \rho(\tilde{q}, q) \leqslant \rho(p, q)$, что вместе с неравенством треугольника приводит к (1).

По построению точки $\tilde{q}$, справедливо $\rho(p, \tilde{q}) = \delta_0$. Поэтому существует нормальная геодезическая c: $[0, \delta_0] \to M$, соединяющая p с q. Так как $\rho(p, q) < \delta_0 + \eta$, из (1) следует $\rho(\tilde{q}, q) < \eta$; тем самым q принадлежит сильно выпуклому шару $B_\eta(\tilde{q})$, и существует единственная нормальная геодезическая $\tilde{c}$: $[\delta_0, \gamma] \to M$ длины $\rho(\tilde{q}, q)$, соединяющая $\tilde{q}$ с q. Геодезические c, $\tilde{c}$ вместе составляют кусочно нормальный путь $\bar{c}$ с началом p и концом q; длина этого пути $L(\bar{c}) = \rho(p, q)$, и из замечания (iii) разд. 4.4 вытекает, что $\bar{c}$ — нормальная геодезическая. Таким образом, $(0, \delta_0 + \eta) \subset A$ и A открыто, что и завершает доказательство леммы.

Мы воспользовались в доказательстве леммы радиусом выпуклости, но можно было бы обойтись без этого понятия, построив вокруг каждой точки $p' \in \overline{B_{\delta_0}(p)} \setminus B_{\delta_0}(p)$ шар, являющийся диффеоморфным образом при $\exp_{p'}$ (см. разд. 5.1), и взяв нижнюю границу радиусов таких шаров в качестве η'.

Теорема (Х. Хопф, В. Ринов)

Усл. *M — связное риманово многообразие с функцией расстояния ρ и связностью Леви-Чивита.*

Утв. *Следующие три утверждения равносильны:*

(a) *M полно;*

(b) *для каждой точки $p \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на всем M_p;*

(c) *каждое ограниченное по отношению к расстоянию ρ замкнутое множество $A \subset M$ компактно.*

Далее, следующее утверждение является следствием каждого из утверждений (a), (b), (c):

(d) *любые две точки $p, q \in M$ можно соединить на M геодезической длины $\rho(p, q)$.*

Первоначальное доказательство этой теоремы (Hopf H., Rinow W., *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comm. Math. Helv., 3 (1931), 209–225) относилось к случаю $\dim M = 2$, но почти в той же форме распространялось на римановы многообразия любой размерности. См. по этому поводу также статью де Рама (de Rham G., *Sur la reductibilité d'un espace de Riemann*, Comm. Math. Helv., 26 (1952), p. 341).

Док. Прежде всего импликация „из (c) следует (a)“ очевидна, так как последовательность Коши ограничена и поэтому содержится в замкнутом ограниченном подмножестве M, которое, по предположению, компактно; на компактном же множестве сходится каждая последовательность Коши.

Покажем, что из (a) следует (b). Достаточно доказать, что при $v \in M_p$ экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на всем луче $\{tv\colon t \in \mathbb{R}_+\}$. Согласно (10) разд. 2.9, $\exp(tv) = \pi \circ \Phi_v(t)$, где Φ_v — максимальный интегральный путь геодезической струи S, удовлетворяющий условию $\Phi_v(0) = v$. Поэтому достаточно показать, что все $t \in \mathbb{R}_+$ принадлежат области определения Φ_v. Область определения Φ_v есть некоторый открытый интервал J, содержащий 0. Покажем, что $J \cap \mathbb{R}_+$ замкнуто в $\mathbb{R}_+$. Пусть $[0, \tilde{t}) \subset J$, тогда Φ_v определен в точке $\tilde{t}$. Для доказательства этого утверждения построим последовательность $t_\nu \in [0, \tilde{t}]$, сходящуюся к $\tilde{t}$. Тогда $\rho(\exp(t_\nu v), \exp(t_\mu v)) \leqslant |t_\nu - t_\mu| \cdot \| v \|$ и образы $p_\nu = \exp(t_\nu v)$ образуют последовательность Коши в M. В силу (a) эта последовательность сходится к некоторой точке $q \in M$. Последовательность $v_\nu = \Phi_v(t_\nu)$ имеет в TM по крайней мере одну предельную точку, так как $\| v_\nu \| = \| v \|$, и для компактного замыкания окрестности W точки $q \in M$ множество $\pi^{-1}(W) \cap \{w\colon w \in TM,\ \| w \| = \| v \|\}$ также компактно (см. замечание (iii) разд. 3.4). Согласно теореме о продолжении (разд. 8.7), пусть Φ_v определен в точке $\tilde{t}$, поскольку Φ_v — максимальный интегральный путь.

Остается доказать, что из (b) вытекают утверждения (d) и (c). Так как $\exp_p$ определено на всем M_p, из леммы следует, что каждую точку $q \in M$ можно соединить с p геодезической длины $\rho(p, q)$, т. е. справедливо (d).

Какова бы ни была точка $p \in M$, каждое ограниченное замкнутое множество $A \subset B_\delta(p)$ для достаточно большого δ. Согласно лемме, $\overline{B_\delta(p)}$ компактно, а потому $A \subset \overline{B_\delta(p)}$ также компактно. Тем самым, теорема доказана.

Отметим еще, что утверждение (b) равносильно следующему, формально более сильному:

(b′) существует точка $p \in M$, для который экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на всем M_p.

Выведем из (b′) полноту M. Пусть q_ν — последовательность Коши в M, тогда последовательность $\rho(p, q_\nu)$ ограничена. По лемме для каждой точки q_ν существует геодезическая c_ν, соединяющая p с q_ν, длины $L(c_\nu) = \rho(p, q_\nu)$. Далее, существует такой вектор $v_\nu \in M_p$, что $\| v_\nu \| = \rho(p, q_\nu)$ и $\exp(v_\nu) = q_\nu$. Последовательность v_ν содержится в ограниченном множестве M_p и имеет тем самым предельную точку v в M_p. Поэтому последовательность q_ν сходится к $\exp(v)$. Итак, M полно, а отсюда, согласно теореме, следует (b).

Замечания

(i) Пусть M — связное полное риманово многообразие, $N \subset M$ — связное риманово подмногообразие. Покажите, что если N замкнуто в M, то N полно. График функции $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, заданной формулой $t \to \sin \frac{1}{t}$, есть полное, но не замкнутое подмногообразие $\mathbb{R}^2$.

(ii) Из теоремы вложения Уитни (см. замечание (vi) разд. 1.6) и (i) следует, что на каждом связном дифференцируемом многообразии можно ввести структуру полного риманова многообразия.

(iii) Из леммы этого раздела вытекает такое утверждение:

если M — риманово многообразие, $p \in M$ и $\exp_p$ определено и инъективно в шаре $U_\varepsilon \subset M_p$ радиуса ε с центром 0, то $\exp_p$ имеет во всех точках этого шара максимальный ранг.

В самом деле, пусть c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая с началом p и $\beta < \varepsilon$. Тогда, обозначая $c(\beta)$ через q, имеем $\rho(p, q) \leqslant \beta < \varepsilon$, и по лемме существует кратчайшая геодезическая, соединяющая p с q. В силу инъективности $\exp_p$ эта кратчайшая есть c. Согласно лемме 1 разд. 4.5, на $(0, \beta)$ нет сопряженных точек c, и ввиду произвольности числа $\beta < \varepsilon$ и c наше утверждение доказано.

Заметим, что доказанное свойство специфично для инъективного экспоненциального отображения и, конечно, не распространяется на любые инъективные дифференцируемые отображения.

(iv) С помощью методов алгебраической топологии и теории Морса можно усилить утверждение (d) этого раздела. Пусть M — полное риманово многообразие, которое не ациклично, т. е. по крайней мере в одной размерности $i > 0$ группа гомологий с целочисленными коэффициентами $H_i(M, \mathbb{Z}) \neq 0$, тогда каждые две точки $p, q \in M$ можно соединить геодезической сколь угодно большой длины. Следовательно, существует бесконечное множество геодезических, соединяющих p с q. Условие „не ацикличности“ M равносильно требованию, чтобы M „нельзя было стянуть по себе в точку“. По этому поводу см. Serre J.-P., *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math., 54 (1951), 425—505.

(v) Пусть M, $\hat{M}$ — связные римановы многообразия и π: $\hat{M} \to M$ — риманово накрытие, т. е. дифференцируемое изометрическое накрытие (см. замечание (v) разд. 1.7). Покажите, что если $\hat{M}$ полно, то M полно, и обратно.

5.4. Множество раздела риманова многообразия

$\hat{\mathbb{R}}$ означает в этом разделе, как и выше, двухточечную компактификацию $\mathbb{R}$.

Пусть M — полное риманово многообразие с функций расстояния ρ. Рассмотрим касательное сферическое расслоенное про-

странство $T_1M = \{v\colon v \in TM, \|v\| = 1\}$ над M, как в замечании (iii) разд. 3.4. Определим функцию $s\colon T_1M \to \hat{\mathbb{R}}$ формулой

$$s(v) = \sup\{t\colon \rho(\pi(v), \exp(tv)) = t\}.$$

$s(v)$ есть, таким образом, наибольшее значение параметра t, при котором исходящая из $\pi(v)$ нормальная геодезическая $c_v\colon [0, \infty) \to M$ является кратчайшей между точками $c_v(0)$ и $c_v(t)$, или, иными словами, c_v перестает быть кратчайшей после $t = s(v)$.

Две кратчайших геодезических могут иметь не более одной общей точки; это видно из замечания (iii) разд. 4.4.

Множеством раздела называется множество

$$C_p = \{s(v)\, v\colon v \in M_p \cap T_1M\}.$$

Образ этого множества $C(p) = \exp_p C_p \subset M$ также называется *множеством раздела* M по отношению к p (это понятие восходит к Дж. Г. К. Уайтхеду (cut locus) и Пуанкаре (ligne de partage).

Лемма (Клингенберг)

Утв. *Отображение* $s\colon T_1M \to \hat{\mathbb{R}}$ *непрерывно.*

Док. Пусть $v \in T_1M$ и $v_\nu \in T_1M$ — последовательность, сходящаяся к v. Положим $\pi(v_\nu) = p_\nu$, $\pi(v) = p$, $\tau = s(v)$, $\tau_\nu = s(v_\nu)$; можно считать, выбрав подпоследовательность, что существует $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tau_\nu = \bar{\tau}$.

Предположим, что $\bar{\tau} < \tau$, возьмем такое число $\eta > 0$, чтобы было $\bar{\tau} + \eta < \tau$, и рассмотрим геодезические $c_{v_\nu}|_{[0,\, \tau_\nu + \eta]}$, соединяющие p_ν с $q_\nu = c_{v_\nu}(\tau_\nu + \eta)$. По определению s и τ_ν, c_{v_ν} — не кратчайшие. Так как M полно, существует, согласно разд. 5.3, кратчайшая геодезическая $c_{\tilde{v}_\nu}|_{[0,\, \rho(p_\nu, q_\nu)]}$, соединяющая p_ν с q_ν, где $\tilde{v}_\nu \in T_1M$, $\tilde{v}_\nu \neq v_\nu$. На кратчайшей геодезической $c_v|_{[0,\, \tau]}$ нет сопряженных точек в $[0, \tau)$, поэтому $\pi \times \exp$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность луча $\{tv\colon 0 \leqslant t \leqslant s\}$ при $\bar{\tau} + \eta < \zeta < \tau$ в $M \times M$ (см. замечание (i) и лемму 2 разд. 2.8). Отсюда видно, что не существует подпоследовательности векторов $\tilde{v}_\nu$, сходящейся к v, так как в этом случае из точки p_ν (при достаточно большом ν) исходили бы два луча пространства M_{p_ν}, лежащие в построенной выше окрестности, концы же этих лучей имели бы один и тот же образ при отображении $\exp$. Можно, следовательно, считать, что векторы $\tilde{v}_\nu$ сходятся к некоторому вектору $\tilde{v} \neq v$, $\tilde{v} \in M_p$. При этом $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(p_\nu, q_\nu) = \rho(p, c(\bar{\tau} + \eta)) = \bar{\tau} + \eta$, так как $c|_{[0,\, \bar{\tau}+\eta]}$ — кратчайшая, и существует еще одна кратчайшая $c_{\tilde{v}}|_{[0,\, \bar{\tau}+\eta]}$ с теми же концами, что невозможно ввиду $\bar{\tau} + \eta < \tau = s(v)$.

Пусть теперь $\bar{\tau} > \tau$. Возьмем такое число $\eta > 0$, чтобы было $\bar{\tau} > \tau + \eta$, и рассмотрим геодезические $c_{v_\nu}|_{[0,\, \tau+\eta]}$. Все они — кратчайшие, и вследствие непрерывности ρ геодезическая $c_v|_{[0,\, \tau+\eta]}$ также должна быть кратчайшей, что противоречит определению числа $\tau = s(v)$.

Следствие

Утв. *Отображение* $d\colon M \to \hat{\mathbb{R}}$, *ставящее в соответствие каждой точке* $p \in M$ *радиус инъективности в этой точке, непрерывно.*

Док. В самом деле, $d_p = \inf\{s(v)\colon v \in M_p \cap T_1 M\}$; в силу непрерывности $s(v)$, замечания о пересечении кратчайших (стр. 187), леммы разд. 5.3 и так как $T_1 M$ локально имеет структуру произведения, остается сослаться на следующую общую теорему: если N_1, N_2 — хаусдорфовы пространства со счетной базой, причем N_2 компактно, и $f\colon N_1 \times N_2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то функция $p \to \inf\limits_{q \in N_2} f(p, q)$ непрерывна на N_1.

Отметим, что радиус инъективности d_p есть не что иное, как расстояние $\rho(p, C(p))$ от точки p до соответствующего этой точке множества раздела $C(p) \subset M$, т. е. $d_p = \inf\limits_{q \in C(p)} \rho(p, q)$. Если M компактно и $p \in M$, то непрерывная функция $q \to \rho(p, q)$ ограничена на M. Следовательно, ограничена и $s|_{S^{n-1}}$, где $S^{n-1} = M_p \cap T_1 M$. Тем самым множество раздела $C_p \subset M_p$ оказывается компактным топологическим подмногообразием M_p, а отображение $v \to s(v)\, v$ — гомеоморфизмом S^{n-1} на C_p. Ясно, что C_p ограничивает компактную звездообразную окрестность $W = \{tv\colon v \in S^{n-1},\ 0 \leqslant t \leqslant s(v)\}$ точки 0 в M_p, гомеоморфную n-мерному шару $D^n = \{v\colon v \in M_p,\ \|v\| \leqslant 1\}$. Согласно разд. 5.3, $\exp_p$ сюръективно отображает W на M, причем $\exp_p|_{W \setminus C_p}$ есть дифференцируемое вложение, но $\exp|_{C_p}$ не инъективно. Функция $s\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$, вообще говоря, не дифференцируема, так что C_p не является дифференцируемым подмногообризием M_p (даже в случае, когда $\exp_p$ имеет максимальный ранг везде на C_p, как можно показать на соответствующем примере).

Из только что приведенных рассуждений, между прочим, следует, что любое n-мерное компактное дифференцируемое многообразие можно получить из n-мерного шара с помощью надлежащего отождествления граничных точек.

Замечания

(i) Для $p \in M$ множество раздела C_p в M_p ограничивает максимальную связную окрестность $W \setminus C_p$ точки 0 в M_p, обладающую тем свойством, что каждый луч, соединяющий 0 с $u \in W \setminus C_p$, переходит при отображении $\exp_p$ в единственную кратчайшую геодезическую M, соединяющую p с $\exp u$.

Образ каждого исходящего из 0 луча в M_p, пересекающий C_p, встречается в некоторой точке после C_p с более короткой исходящей из p геодезической, как это видно из теоремы Хопфа — Ринова. Этим объясняется термин „множество раздела", применяемый к C_p и $C(p)$.

Первое сопряженное множество $\exp_p$ в M_p (см. замечание (v) разд. 4.3) характеризуется более слабым условием: каждый исходящий из 0 луч $\varphi \subset M_p$, не пересекающий первого сопряженного множества, переходит при отображении $\exp_p$ в геодезическую $\exp \circ \varphi$, которая короче всех достаточно близких к ней кусочно дифференцируемых путей с теми же концами p, $\exp u$. Луч φ пересекает C_p не раньше, чем первое сопряженное множество $\exp_p$. Как видно на примерах, первое сопряженное множество может совпадать с C_p; каждое из этих множеств может оказаться пустым.

Можно показать, что на любом компактном дифференцируемом многообразии M, не гомеоморфном S^2, можно ввести такую риманову структуру, что для некоторой точки p множество раздела C_p и сопряженное множество $\exp_p$ в M_p не имеют общих точек; это значит, что экспоненциальное отображение $\exp_p$ имеет везде на C_p максимальный ранг (см. Weinstein A., *The cut locus and conjugate locus of a Riemannian manifold*, Thesis, University of California (1966), Berkeley). Если же M гомеоморфно S^2, то по одной теореме Мейерса, для любого $p \in M$ множество раздела содержит по крайней мере одну критическую точку $\exp_p$. Дальнейшее изучение сопряженных множеств, в частности глобальные результаты, можно найти, например, в работах: Warner F. W., *The conjugate locus of a Riemannian Manifold*, Am. J. Math., 87 (1965), 575—604 и Warner F. W., *Conjugate loci of constant order*, Ann. of Math., 86 (1967), 192—212.

Если M компактно, то структура множества раздела $C_p \subset M_p$ известна в том смысле, что C_p всегда гомеоморфно S^{n-1} и ограничивает звездообразную окрестность точки 0 в M_p, как было указано выше. О множестве раздела $C(p) = \exp(C_p) \subset M$ известно очень мало (см. замечание (iii)). При $\dim M = 2$ удалось выяснить локальное строение $C(p)$, а именно $C(p)$ является одномерным полиэдром, т. е. линейным графом (см. Mayers S., *Connections between differential geometry and topology* I, Duke Math. J., 1 (1935), 376—391).

(ii) Покажем, что $q \in C(p)$ в точности в том случае, когда $p \in C(q)$. Для этого рассмотрим кратчайшую нормальную геодезическую c: $[0, \beta] \to M$ с началом p и концом q. Если β — не сопряженная точка c, то существует отличная от c нормальная геодезическая $\tilde{c}$ той же длины, с тем же началом и концом (см.

доказательство леммы). Если же β — сопряженная точка c, то утверждение следует из замечания (iv) разд. 4.3 и замечания (i) этого раздела.

(iii) Покажите, что множество раздела $C(p) \subset M$ в случае компактного M есть строгий деформационный ретракт множества $M_* = M \setminus \{p\}$, т. е. существует непрерывное отображение H: $M_* \times I \to M_*$ ($I = [0, 1]$), такое, что $H(q, 0) = q$, $H(q, 1) \in C(p)$ для всех $q \in M_*$ и $H(q, t) = q$ для всех $q \in C(p)$, $t \in I$. При этой ретракции M_* стягивается в $C(p)$ по исходящим из p геодезическим. В частности, M_* и $C(p)$ гомотопически эквивалентны (см. разд. 7.6).

(iv) Пусть M — связное риманово многообразие (не обязательно полное) с функцией расстояния ρ. Построим функцию a: $M \to \hat{\mathbb{R}}$ следующим образом. При $p \in M$ значение $a(p)$ есть точная верхняя граница всех таких чисел $\varepsilon > 0$, для которых открытый шар U_ε радиуса ε с центром в $0 \in M_p$ принадлежит области определения $\exp_p$. Покажем, что $a(p)$ непрерывна.

Достаточно проверить, что при $p \in M$ и $q \in B_{a(p)}(p)$ выполнено неравенство $a(q) \geqslant a(p) - \rho(p, q)$. Непрерывность a получается после этого так же, как непрерывность радиуса выпуклости в разд. 5.2. Пусть U_δ — открытый шар радиуса δ в M_p с центром в 0. Область определения $\exp_q$ открыта; поэтому множество A тех чисел δ, для которых $\exp_q$ определено на $\bar{U}_\delta$, есть непустой открытый интервал с началом 0. Остается показать, что A замкнуто в $(0, a(p) - \rho(p, q))$. Пусть для некоторого $\delta \in (0, a(p) - \rho(p, q))$ отображение $\exp_q$ определено на U_δ. Тогда прежде всего $B_\delta(q)$ принадлежит шару радиуса $\rho(p, q) + \delta < a(p)$ с центром в p, замыкание которого по лемме из разд. 5.3 компактно; значит, и $\overline{B_\delta(q)}$ компактно. Рассмотрим для $v \in M_p$, $\|v\| = 1$ луч $t \to tv$. Если $t_\nu \to \delta$, $t_\nu < \delta$, то $\exp(t_\nu v)$ есть последовательность Коши в $B_\delta(q)$, сходящаяся в M, так как $\overline{B_\delta(q)}$ компактно. Далее, как в доказательстве теоремы Хопфа — Ринова, показываем, что максимальный интегральный путь Φ_v геодезической струи, для которого $\Phi_v(0) = 0$, определен в точке δ, а тем самым $\exp_q$ определено в точке δv. Итак, непрерывность $a(p)$ доказана. Если $\inf_{p \in M} a(p) > 0$, то M полно, и $a(p) = \infty$ для всех $p \in M$. Если M не полно, то и в этом случае можно определить функцию s: $T_1 M \to \hat{\mathbb{R}}$, но s уже не обязательно непрерывна. Покажите, что отображение $M \to \hat{\mathbb{R}}$, ставящее в соответствие точке p ее радиус инъективности d_p, непрерывно для любого M.

ЛИТЕРАТУРА К § 5

Бишоп Р. и Криттенден Р., Геометрия многообразий, М., 1967.
Kobayashi S. and Nomizu K., Foundations of differential geometry, I, Interscience Publishers (1963), New York — London.

§ 6. Теоремы сравнения

6.1. Теорема сравнения индексов

В дальнейшем в центре нашего внимания будут находиться связи между кривизной и топологическими свойствами полных римановых многообразий. Во всех применявшихся до сих пор подходах к этой проблеме решающим шагом была ее релятивизация, а именно, пользуясь соотношениями между кривизнами, сравнивают соответствующие дифференциально-геометрические или топологические свойства двух римановых многообразий, а затем, выбирая в качестве одного из них стандартное пространство, например одну из моделей пространства постоянной кривизны, применяют различные конструкции в этих хорошо изученных пространствах.

Полученные таким образом результаты естественно называть теоремами сравнения, они приобрели самостоятельное значение в римановой геометрии. В этом параграфе излагаются некоторые важные теоремы сравнения. В их доказательствах существенную роль играет теория краевых задач и теоремы сравнения для полей Якоби, обобщающие классическую теорию Штурма — Лиувилля для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

В этом параграфе везде рассматриваются римановы многообразия одной и той же размерности $n \geqslant 2$ с линейной связностью Леви-Чивита.

Пусть M — риманово многообразие, $c\colon J \to M$ — нормальная геодезическая. Обозначим через $G_{c,t}$, $t \in J$, множество всех двумерных линейных подпространств $\sigma \in M_{c(t)}$, для которых $\dot{c}(t) \in \sigma$; положим $C = \bigcup_{t \in J} G_{c,t}$. Пусть теперь M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия равной размерности n; $c\colon [0, \beta] \to M$; $\tilde{c}\colon [0, \beta] \to \tilde{M}$ — нормальные геодезические; $\iota\colon M_{c(0)} \to \tilde{M}_{\tilde{c}(0)}$ — линейное изометрическое отображение, причем $\iota\dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$. Построим для всех $t \in [0, \beta]$ отображение

$$\Phi_{\iota, t}\colon M_{c(t)} \to \tilde{M}_{\tilde{c}(t)} \tag{1}$$

следующим образом: вектор $u \in M_{c(t)}$ параллельно переносится вдоль c в точку $M_{c(0)}$, затем отображается с помощью ι в $\tilde{M}_{\tilde{c}(0)}$

и, наконец, параллельно переносится вдоль $\tilde{c}$ в точку $\tilde{c}(t)$. Тогда при любом $t \in J$ отображение $\Phi_{\iota, t}$ есть линейная изометрия. Построение $\Phi_{\iota, t}$ по заданному ι можно изобразить в виде коммутативной диаграммы, где значок $\|$ означает параллельное перенесение:

$$\begin{array}{ccc} M_{c(0)} & \xrightarrow{\|} & M_{c(t)} \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi_{\iota, t}} \\ \tilde{M}_{\tilde{c}(0)} & \xrightarrow{\|} & \tilde{M}_{\tilde{c}(t)} \end{array}$$

Теорема

Усл. *M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия равной размерности n; $c\colon [0, \beta] \to M$; $\tilde{c}\colon [0, \beta] \to \tilde{M}$ — нормальные геодезические. Кривизна M вдоль c не больше кривизны $\tilde{M}$ вдоль $\tilde{c}$, т. е. существует такая линейная изометрия $\iota\colon M_{c(0)} = \tilde{M}_{\tilde{c}(0)}$, что для всех $t \in [0, \beta]$, $\sigma \in G_{c, t}$ выполнено неравенство*

$$K_\sigma \leqslant K_{\tilde{\sigma}}, \tag{2}$$

где $\tilde{\sigma} = \Phi_{\iota, t}(\sigma) \subset G_{\tilde{c}, t}$.

Утв. *Для индексов (квазииндексов) c и $\tilde{c}$ справедливы неравенства*

$$\operatorname{Ind} c \leqslant \operatorname{Ind} \tilde{c}, \quad \operatorname{Ind}_0 c \leqslant \operatorname{Ind}_0 \tilde{c}. \tag{3}$$

Док. Рассмотрим векторные $\mathbb{R}$-пространства $\mathfrak{V}'_c$, $\mathfrak{V}'_{\tilde{c}}$ ортогональных к $\dot{c}$, $\dot{\tilde{c}}$ кусочно гладких векторных полей вдоль c, $\tilde{c}$. Тогда формула $(\Phi X)_t = \Phi_t X_t$ $(X \in \mathfrak{V}'_c)$, где мы для краткости опустили индекс ι, задает отображение

$$\Phi\colon \mathfrak{V}'_c \to \mathfrak{V}'_{\tilde{c}}, \tag{4}$$

причем Φ переводит дифференцируемые векторные поля вдоль c в дифференцируемые векторные поля вдоль $\tilde{c}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить вдоль $c(\tilde{c})$ параллельные векторные поля $Z_i(t)(\tilde{Z}_i(t))$, для которых $Z_i(0) = v_i$ образуют ортонормированный базис $M_{c(0)}$, $\tilde{Z}_i(0) = \tilde{v}_i$ образуют ортонормированный базис $M_{\tilde{c}(0)}$ и $\iota v_i = \tilde{v}_i$, где $i = 1, \ldots, n$. Тогда из разложения $X = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i Z_i$, $\varphi^i = \langle X, Z_i \rangle$, следует

$$\Phi X = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \tilde{Z}_i. \tag{5}$$

Ясно также, что Φ есть изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{V}'_c$ и $\mathfrak{V}'_{\tilde{c}}$, при этом равенство $\langle X, Y \rangle = \langle \Phi X, \Phi Y \rangle$ выполняется для всех $X, Y \in \mathfrak{V}'_c$. Далее, из (5) имеем

$$\Phi(X') = (\Phi X)'. \tag{6}$$

Покажем, что индексные формы удовлетворяют неравенству

$$I(X, X) \geqslant I(\Phi X, \Phi X), \quad X \in \mathfrak{B}'_c. \tag{7}$$

В самом деле, обозначая через R, $\tilde{R}$ тензоры кривизны M, $\tilde{M}$, имеем при $X(t) = 0$

$$\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle|_t = \langle \tilde{R}(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \Phi X\rangle|_t = 0.$$

Если же $X(t) \neq 0$, то в силу (16) разд. 3.6 имеем

$$\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle|_t = K(X, \dot{c})\langle X, X\rangle|_t \leqslant K(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\langle \Phi X, \Phi X\rangle|_t = \langle \tilde{R}(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \Phi X\rangle|_t.$$

Но тогда, согласно (6), получаем

$$I(X, X) = \int_0^\beta (\langle X', X'\rangle - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle)|_t\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\beta (\langle (\Phi X)', (\Phi X)'\rangle - \langle \tilde{R}(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \Phi X\rangle)|_t\, dt = I(\Phi X, \Phi X). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь подпространство $\mathfrak{B}''_c$ векторных полей $X \in \mathfrak{B}'_c$, для которых $X(0) = X(\beta) = 0$, и соответствующее подпространство $\mathfrak{B}''_{\tilde{c}} \subset \mathfrak{B}'_{\tilde{c}}$. Тогда $\Phi\mathfrak{B}''_c = \mathfrak{B}''_{\tilde{c}}$ и $\Phi|\mathfrak{B}''_c$ есть изоморфизм. Пусть $A \subset \mathfrak{B}''_c$ — подпространство максимальной размерности, на котором индексная форма I отрицательно (соответственно неположительно) определена. Тогда $\Phi(A) \subset \mathfrak{B}''_{\tilde{c}}$ — подпространство той же размерности, что A, и в силу (7) форма I отрицательно (неположительно) определена на $\Phi(A)$, что и доказывает неравенства (3).

Теорему можно формулировать также следующим образом: если кривизна M вдоль c не больше кривизны $\tilde{M}$ вдоль $\tilde{c}$, то (см. теорему об индексе в разд. 4.6) число сопряженных точек вдоль c, считая каждую с ее кратностью, не больше соответствующего числа для $\tilde{c}$. В частности, первая сопряженная точка на c появляется не раньше, чем на $\tilde{c}$.

6.2. Теорема сравнения Морса — Шенберга

Применяя соображения, изложенные в разд. 6.1, к случаю, когда второе из многообразий M, $\tilde{M}$ — сфера, приходим к следующей теореме.

Теорема (М. Морс, И. Шенберг)

Усл. *M — риманово многообразие размерности n; c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая.*

Утв. (a) *Если* $K_\sigma \leqslant \lambda (\lambda > 0)$ *для всех* $\sigma \in G_c$ *и* $L(c) < (\nu + 1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, *соответственно* $L(c) \leqslant (\nu + 1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, *где* $\nu \geqslant 0$ *— целое число, то* $\operatorname{Ind} c \leqslant \operatorname{Ind}_0 c \leqslant \nu(n-1)$, *соответственно* $\operatorname{Ind} c \leqslant \nu(n-1)$; *если* $L(c) < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, *то на* c *нет сопряженных точек.*

(a′) *Если для всех* $\sigma \in G_c$ *выполняется* $K_\sigma \leqslant 0$, *то на* c *нет сопряженных точек,* $\operatorname{Ind} c = \operatorname{Ind}_0 c = 0$.

(b) *Если* $K_\sigma \geqslant \varkappa > 0$ *для всех* $\sigma \in G_c$ *и* $L(c) \geqslant \frac{\nu\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, *соответственно* $L(c) > \frac{\nu\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, *где* $\nu \geqslant 1$ *— целое число, то* $\operatorname{Ind}_0 c \geqslant \nu(n-1)$, *соответственно* $\operatorname{Ind}_0 c \geqslant \operatorname{Ind} c \geqslant \nu(n-1)$, *причем на* c *существует по крайней мере одна сопряженная точка в интервале* $(0, \beta]$, *соответственно в* $(0, \beta)$.

Док. Согласно замечанию (i) разд. 4.6, для нормальной геодезической $\tilde{c}\colon [0, \beta] \to S^n_\rho$ имеем

$$\operatorname{Ind} \tilde{c} = \nu(n-1) \text{ при } \nu\pi\rho < \beta \leqslant (\nu+1)\pi\rho,$$
$$\operatorname{Ind}_0 \tilde{c} = \nu(n-1) \text{ при } \nu\pi\rho \leqslant \beta < (\nu+1)\pi\rho,$$

где $\nu \geqslant 0$ — целое число.

Для доказательства (a) рассмотрим $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ с постоянной кривизной, равной λ (см. разд. 3.6).

Если $\tilde{c}\colon [0, \beta] \to S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ — нормальная геодезическая, то $\operatorname{Ind}_0 \tilde{c} \leqslant \nu(n-1)$, соответственно $\operatorname{Ind} \tilde{c} \leqslant \nu(n-1)$, при $\beta < (\nu+1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, соответственно $\beta \leqslant (\nu+1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, и утверждение (a) следует из теоремы разд. 6.1.

Утверждение (a′) непосредственно вытекает из (a), так как в этом случае можно взять $\lambda > 0$ сколь угодно малым.

Для доказательства (b) рассмотрим сферу $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ постоянной кривизны $\varkappa$. Если $\tilde{c}\colon [0, \beta] \to S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ — нормальная геодезическая, то $\operatorname{Ind}_0 \tilde{c} \geqslant \nu(n-1)$, соответственно $\operatorname{Ind} \tilde{c} \geqslant \nu(n-1)$, при $\beta \geqslant \nu\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, соответственно $\beta > \nu\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, и утверждение снова получается из теоремы разд. 6.1, в которой надо поменять местами M, $\tilde{M}$.

Пусть $c\colon [0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая и при всех $\sigma \in G_c$, $0 < \varkappa \leqslant K_\sigma \leqslant \lambda$. Если на c есть сопряженные точки

(это верно при $L(c) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$), то, обозначая через $t_1 \in (0, \beta_1]$ первую сопряженную точку c, получаем из (a) и (b):

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \leqslant t_1 \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{1}$$

Это значит, что если кривизна M вдоль c не меньше (не больше), чем у сферы S^n_ρ постоянной кривизны $\frac{1}{\rho^2}$, то первая сопряженная точка на c появляется не позже (не раньше), чем на нормальной геодезической S^n_ρ. Ясно, что неравенства предыдущей теоремы в общем случае не могут быть усилены.

Замечания

(i) Пусть M — риманово многообразие размерности n; c: $[0, \beta] \to M$ — нормальная геодезическая. Обозначим через $r(t)$ ($t \in [0, \beta]$) кривизну Риччи многообразия M в точке $c(t)$ в направлении единичного вектора $\dot{c}(t)$ (см. разд. 3.6). Тогда, как заметил Мейерс, можно доказать следующее предложение, аналогичное утверждению (b) теоремы Морса — Шенберга:

если $r(t) \geqslant (n-1)\varkappa > 0$ для всех $t \in [0, \beta]$, то при $L(c) \geqslant \nu \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ ($\nu \geqslant 1$ — целое число) имеет место неравенство $\operatorname{Ind}_0 c \geqslant \nu$, а при $L(c) > \nu \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ — неравенство $\operatorname{Ind}_0 c \geqslant \operatorname{Ind} c \geqslant \nu$. В силу замечания (iii) разд. 4.4 и теоремы об индексе достаточно показать, что если t_1, $t_2 \in [0, \beta]$, $t_1 < t_2$ и $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, то $c|_{[t_1, t_2]}$ содержит по крайней мере одну сопряженную точку. Поэтому можно ограничиться случаем $\beta = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Согласно теореме из разд. 4.5, достаточно проверить, что индексная форма I не положительно определена на векторном пространстве $\mathfrak{B}''_c$.

Построим ортонормированные поля $Z_1, \ldots, Z_{n-1} \in \mathfrak{B}'_c$ и определим поля $X_i \in \mathfrak{B}''_c$ по формуле $X_i(t) = \sin t\sqrt{\varkappa}\, Z_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Тогда получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} I(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\beta (\varkappa \cos^2 t\sqrt{\varkappa} - \sin^2 t\sqrt{\varkappa}\langle R(Z_i, \dot{c})\dot{c}, Z_i\rangle|_t)\, dt =$$

$$= \int_0^\beta ((n-1)\varkappa \cos^2 t\sqrt{\varkappa} - r_t \sin^2 t\sqrt{\varkappa})\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (n-1)\varkappa \int_0^\beta (\cos^2 t\sqrt{\varkappa} - \sin^2 t\sqrt{\varkappa})\, dt = (n-1)\varkappa \int_0^\beta \cos 2t\sqrt{\varkappa}\, dt = 0.$$

Следовательно, для некоторого i должно быть $I(X_i, X_i) \leqslant 0$.

6.3. Теорема сравнения Рауха

Опираясь на соотношения между кривизнами, можно сравнивать поля Якоби по их длине.

Теорема (Г. Е. Раух)

Усл. *M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия равной размерности; $c\colon [0, \beta] \to M$, $\tilde{c}\colon [0, \beta] \to \tilde{M}$ — нормальные геодезические; Y, $\tilde{Y}$ — поля Якоби вдоль c, $\tilde{c}$, удовлетворяющие условиям*

$$Y(0) = 0,\ \tilde{Y}(0) = 0,\ \langle Y',\ \dot{c}\rangle|_0 = \langle \tilde{Y}',\ \dot{\tilde{c}}\rangle|_0 = 0,\ \|Y'(0)\| = \|\tilde{Y}'(0)\|.$$

$\tilde{c}$ не имеет сопряженных точек в $(0, \beta)$.

Утв. *Если кривизна M вдоль c не больше кривизны $\tilde{M}$ вдоль $\tilde{c}$, т. е. $K_\sigma \leqslant K_{\tilde{\sigma}}$ для всех $\sigma \in G_{c,t}$, $\tilde{\sigma} \in G_{\tilde{c},t}$ $(t \in [0, \beta])$, то*

$$\|Y(t)\| \geqslant \|\tilde{Y}(t)\| \quad (t \in [0, \beta]). \tag{1}$$

Эта теорема содержится в работе Rauch H. F., *A contribution to Riemannian geometry in the large*, Ann. of Math., 54 (1951), 38–55. В случае $\dim M = 2$ теорема Рауха сводится к классической теореме сравнения Штурма для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (см. замечание (iii) разд. 4.2). Заметим, что неравенство (1) после первой сопряженной точки $\tilde{c}$ может нарушиться.

Следствие

Усл. *M, $\tilde{M}$ — как в теореме; $p \in M$; $\tilde{p} \in \tilde{M}$; $\iota\colon M_p \to \tilde{M}_{\tilde{p}}$ — линейная изометрия. Векторы $u \in M_p$, $\iota u \in \tilde{M}_{\tilde{p}}$ принадлежат области определения* $\exp_p$, *соответственно* $\exp_{\tilde{p}}$. *Лучи $\varphi\colon [0, \beta] \to M_p$, $\tilde{\varphi}\colon [0, \beta] \to \tilde{M}_{\tilde{p}}$ $(\beta = \|u\|)$ заданы формулами $\varphi(t) = tu/\beta$, $\tilde{\varphi}(t) = \iota\varphi(t)$; нормальные геодезические — формулами $c = \exp_p \circ \varphi$, $\tilde{c} = \exp_{\tilde{p}} \circ \tilde{\varphi}$.*

Утв. *Если $\tilde{c}$ не имеет сопряженных точек в $(0, \beta)$, т. е. в образе луча $\tilde{\varphi}$ только $\tilde{\varphi}(\beta)$ может быть критической точкой* $\exp_{\tilde{p}}$, *и если $K_\sigma \leqslant K_{\tilde{\sigma}}$ для всех $\sigma \in G_{c,t}$, $\tilde{\sigma} \in G_{\tilde{c},t}$, $t \in [0, \beta]$, то для всех $b \in (M_p)_u$ выполняется неравенство*

$$\|\exp_{p*} b\| \geqslant \|\exp_{\tilde{p}*} \iota_* b\|. \tag{2}$$

Док. Предположим, как обычно, что на M_p, $\tilde{M}_{\tilde{p}}$ введена каноническая метрика.

Если $u = 0$ и, таким образом, $b \in (M_p)_0$, то $\exp_{p*} b = I_0^{-1}(b)$ и $\exp_{\tilde{p}*} \iota_* b = I_0^{-1} \iota_* b$, откуда $\|\exp_{p*} b\| = \|b\| = \|\exp_{\tilde{p}*} \iota_* b\|$. Пусть теперь $u \neq 0$ и $b \in (M_p)_u$. Согласно лемме Гаусса (см. разд. 4.4), достаточно рассмотреть случай, когда $\langle b, I_u u\rangle = 0$. Построим поля

Якоби Y, $\tilde{Y}$ вдоль c, $\tilde{c}$, удовлетворяющие условиям $Y(0)=0$, $Y'(0)=I_u^{-1}\left(\frac{b}{\beta}\right)$, $\tilde{Y}(0)=0$, $\tilde{Y}'(0)=I_{\iota u}^{-1}\left(\iota_*\frac{b}{\beta}\right)$. В силу (1) разд. 4.3 для $t\in[0,\beta]$ имеем

$$Y(t)=\exp_{p*}\left(t\frac{b}{\beta}\right),\quad \tilde{Y}(t)=\exp_{\tilde{p}*}\left(\iota_* t\frac{b}{\beta}\right), \tag{3}$$

причем $\langle Y', \dot{c}\rangle|_0=0$, $\langle\tilde{Y},\dot{\tilde{c}}\rangle|_0=0$. Так как $\tilde{c}$ не имеет сопряженных точек на $(0,\beta)$, (2) получается из (1) и (3) при $t=\beta$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем важное геометрическое приложение. Пусть M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия равной размерности; $p\in M$; $\tilde{p}\in\tilde{M}$; ι: $M_p\to\tilde{M}_{\tilde{p}}$ — линейная изометрия. Рассмотрим на компактном интервале такой кусочно дифференцируемый путь ψ: $J\to M_p$, что образы ψ и $\iota\circ\psi=\tilde{\psi}$ принадлежат, соответственно, областям определения $\exp_p$, $\exp_{\tilde{p}}$. Пусть $\exp_{\tilde{p}}$ имеет максимальный ранг на звездообразном множестве $\{t\tilde{\psi}(s)\colon t\in[0,1),\ s\in J\}$. Тогда выполняется неравенство

$$L(\exp_p\circ\psi)\geqslant L(\exp_{\tilde{p}}\circ\tilde{\psi}), \tag{4}$$

если $K_\sigma\leqslant K_{\tilde{\sigma}}$ для всех $\sigma\in G_{c_s,t}$, $\tilde{\sigma}\in G_{\tilde{c}_s,t}$, $t\in[0,\beta_s]$, $s\in J$, где c_s, $\tilde{c}_s$: $[0,\beta_s]\to M$, $\tilde{M}$ — нормальные геодезические, заданные формулами $c_s(t)=\exp_p\left(t\frac{\psi(s)}{\beta_s}\right)$, $\tilde{c}_s=\exp_{\tilde{p}}\left(t\frac{\tilde{\psi}(s)}{\beta_s}\right)$. В самом деле, достаточно доказать (4) для дифференцируемого пути ψ. По определению длины пути надо показать, что $\|\widehat{\exp_p\circ\psi}(s)\|\geqslant\|\widehat{\exp_{\tilde{p}}\circ\iota\psi}(s)\|$, а это равносильно неравенству

$$\|\exp_{p*}\circ\dot{\psi}(s)\|\geqslant\|\exp_{\tilde{p}*}\circ\dot{\psi}(s)\|\qquad(s\in J),$$

и поэтому следует из (2). Меняя местами M и $\tilde{M}$, получаем

$$L(\exp_p\circ\psi)\leqslant L(\exp_{\tilde{p}}\circ\tilde{\psi}),\ \text{если}\ K_\sigma\geqslant K_{\tilde{\sigma}} \tag{5}$$

для тех же σ, $\tilde{\sigma}$, что и в (4).

Неравенства (4), (5) выражают геометрический смысл теоремы Рауха: если отождествить M_p с $\tilde{M}_{\tilde{p}}$ при помощи линейной изометрии, то один и тот же путь в M_p переходит при отображении $\exp_p$ в более длинный путь на том из многообразий, кривизна которого меньше. Как это видно на примере сфер разных радиусов, такое соотношение может нарушиться вне некоторой окрестности p.

Доказательство теоремы. Согласно разд. 4.2, имеем $\langle Y,\dot{c}\rangle=\langle\tilde{Y},\dot{\tilde{c}}\rangle=0$. Если $\tilde{Y}=0$, то вследствие условия $\|Y'(0)\|=\|\tilde{Y}'(0)\|$ имеем $Y=0$, и утверждение теоремы становится очевидным.

Итак, пусть $\tilde{Y}$ — ненулевое поле. Зафиксируем $t_0 \in (0, \beta)$ и построим параллельные поля X, $\tilde{X}$ вдоль c, $\tilde{c}$, удовлетворяющие условиям $X(t_0) = Y(t_0)$, $\tilde{X}(t_0) = \tilde{Y}(t_0)$. Поскольку t_0 не является

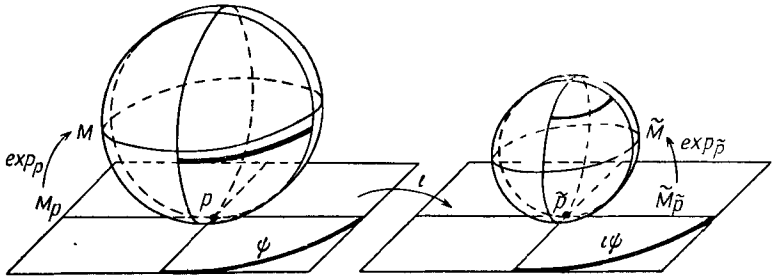


Рис. 2.

сопряженной точкой $\tilde{c}$ по условию, а по теореме Морса — Шенберга — также и сопряженной точкой c, то $\tilde{Y}(t_0) \neq 0$, $Y(t_0) \neq 0$. Тогда существует такая линейная изометрия ι: $M_{c(0)} \to \tilde{M}_{\tilde{c}(0)}$, для которой $\iota \dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$ и $\iota\left(\frac{X(0)}{\|X(0)\|}\right) = \frac{\tilde{X}(0)}{\|\tilde{X}(0)\|}$. Как и в разд. 6.1, изометрия ι определяет изоморфизм векторных пространств Φ: $\mathfrak{B}'_c \to \mathfrak{B}'_{\tilde{c}}$. Далее, построим, как и в разд. 4.3, поле Якоби Z вдоль $\tilde{c}$, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(t_0) = (\Phi Y)_{t_0}$. По построению ι поля $\tilde{Y}(t_0)$, $Z(t_0)$ линейно зависимы, следовательно, поля $\tilde{Y}$, Z линейно зависимы (над $\mathbb{R}$), откуда

$$Z = \frac{\langle Z, Z\rangle|_{t_0}^{1/2}}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_{t_0}^{1/2}} Y, \qquad Z' = \frac{\langle Z, Z\rangle|_{t_0}^{1/2}}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_{t_0}^{1/2}} Y'$$

и тем самым

$$\langle Z, Z'\rangle|_{t_0}\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_{t_0} = \langle Z, Z\rangle|_{t_0}\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}'\rangle|_{t_0}.$$

Так как $\langle Z, Z\rangle|_{t_0} = \langle \Phi Y, \Phi Y\rangle|_{t_0} = \langle Y, Y\rangle|_{t_0}$, получаем

$$\langle Z, Z'\rangle|_{t_0}\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_{t_0} = \langle Y, Y\rangle|_{t_0}\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}'\rangle|_{t_0}. \tag{6}$$

С другой стороны, как мы покажем, выполняется неравенство

$$\langle Y, Y'\rangle|_{t_0} \geqslant \langle Z, Z'\rangle|_{t_0}. \tag{7}$$

Действительно, для $c_0 = c|_{[0, t_0]}$, $\tilde{c}_0 = \tilde{c}|_{[0, t_0]}$ имеем вследствие (7) разд. 6.1

$$\langle Y, Y'\rangle|_{t_0} = I(Y|_{c_0}, Y|_{c_0}) \geqslant I(\Phi Y|_{\tilde{c}_0}, \Phi Y|_{\tilde{c}_0}),$$

а из (5) разд. 4.5

$$I(\Phi Y|_{\tilde{c}_0}, \Phi Y|_{\tilde{c}_0}) \geqslant I(Z|_{\tilde{c}_0}, Z|_{\tilde{c}_0}) = \langle Z, Z'\rangle|_{t_0},$$

поскольку на $\tilde{c}_0$ нет сопряженных точек. Так как $t_0 \in (0, \beta)$ произвольно, то, сравнивая (6) и (7), получаем

$$D \frac{\langle Y, Y\rangle}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle}\Big|_t \geqslant 0 \tag{8}$$

для $t \in (0, \beta]$. Поэтому отношение $\frac{\langle Y,Y\rangle}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle}$ не убывает в $(0, \beta)$. Далее, дважды применив правило Лопиталя, найдем предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{\langle Y, Y\rangle|_t}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_t} = \lim_{t\to 0} \frac{\langle Y, Y''\rangle|_t + \langle Y', Y'\rangle|_t}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}''\rangle|_t + \langle \tilde{Y}', \tilde{Y}'\rangle|_t} = \frac{\|Y'(0)\|^2}{\|\tilde{Y}'(0)\|^2},$$

откуда, сопоставляя с (8), имеем

$$\frac{\langle Y, Y\rangle}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle}\Big|_t = \frac{\|Y(t)\|^2}{\|\tilde{Y}(t)\|^2} \geqslant 1 \qquad (t \in (0, \beta)). \tag{9}$$

Так как Y, $\tilde{Y}$ непрерывны в $[0, \beta]$, из (9) следует утверждение теоремы.

Замечания

(i) Докажите с помощью (2) следующую теорему. Пусть M, $\tilde{M}$ — римановы многообразия равной размерности и одинаковой постоянной римановой кривизны; тогда M, $\tilde{M}$ локально изометричны, т. е. для любых точек $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ существует изометрия f: $V \to \tilde{V}$, где V, $\tilde{V}$ — некоторые окрестности p, $\tilde{p}$ в M, $\tilde{M}$. Для доказательства постройте линейную изометрию ι: $M_p \to \tilde{M}_{\tilde{p}}$ и положите $f = \exp_{\tilde{p}} \circ \iota \circ \exp_p^{-1}|_V$, где окрестность V достаточно мала. Заметим, что при тех же условиях, вообще говоря, не существует глобальной изометрии M и $\tilde{M}$, даже если оба многообразия полны; это видно на примере $M = \mathbb{R}^n$, $\tilde{M} = T^n$, где T^n — n-мерный тор, метрика которого индуцируется стандартной метрикой S^1 (см. по этому поводу § 7).

(ii) Рассмотрим в этой связи еще раз риманово многообразие M с параллельным тензором кривизны R, т. е. для которого $\nabla R = 0$, и покажем, что M локально симметрично (см. замечание (vii) разд. 3.6).

Пусть $p \in M$ и ι: $M_p \to M_p$ — изометрия вида $\iota v = -v$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ изометрия $\iota_p = \exp_p \circ \iota \circ \exp_p^{-1}|_{B_\varepsilon(p)}$ есть, как мы покажем, изометрия открытого шара $B_\varepsilon(p)$ на себя. В самом деле, из леммы разд. 4.3 следует, что для каждой нормальной геодезической c: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $c(0) = p$, вместе с полем Якоби Y вдоль c поле $\iota_{p*}Y$ также является полем Якоби вдоль c, если $Y(0) = 0$. Отсюда $Y_{-t} = (\iota_{p*}Y)_t$ $(t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$, и из замечания (v) разд. 4.2 вытекает изометричность $(\iota_{p*})_q$ при всех $q \in B_\varepsilon(p)$, поскольку при условии $\nabla R = 0$ поля Якоби явно выражаются через параллельные поля вдоль c. Если M полно и односвязно, то,

объединяя предыдущие рассуждения с простыми топологическими соображениями (см. замечание (v) разд. 1.7), приходим к классической теореме Э. Картана, согласно которой для такого многообразия из локальной симметричности вытекает глобальная (см. замечание (vi) разд. 3.6, а также замечание (iii) разд. 7.3).

6.4. Теорема Топоногова о сравнении углов

На теореме сравнения Рауха основан очень сильный глобальный результат об углах треугольника в полном римановом многообразии. Напомним сначала замечание (iii) разд. 3.6. Как там было отмечено, избыток достаточно малого геодезического треугольника на M по существу определяется римановой кривизной M. Оказывается, что этот результат в известном смысле может быть распространен на треугольники любых размеров, а также уточнен: вместо суммы углов треугольника можно оценить каждый угол в отдельности.

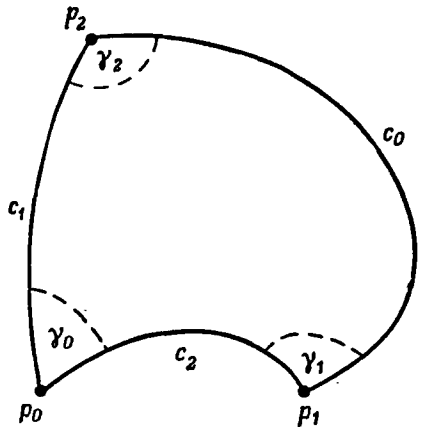


Рис. 3.

Пусть M — связное риманово многообразие с функцией расстояния ρ, для краткости расстояние $\rho(p, q)$ между точками p, $q \in M$ мы будем обозначать также через $\overline{pq}$.

Рассмотрим попарно различные точки $p_i \in M$ $(i = 0, 1, 2)$ и кратчайшие геодезические $c_0\colon [0, 1] \to M$ с началом p_1 и концом p_2; $c_1\colon [0, 1] \to M$ с началом p_2 и концом p_0; $c_2\colon [0, 1] \to M$ с началом p_0 и концом p_1. Для краткости мы будем записывать концы $c_i\colon [0, 1] \to M$ в виде $c_i(0) = p_{i+1}$, $c_i(1) = p_{i+2}$, где индексы приводятся по модулю три, тогда $L(c_i) = \rho(p_{i+1}, p_{i+2})$. Тройка $\Delta = (c_0, c_1, c_2)$ называется *треугольником* в M со сторонами c_i, вершинами p_i и углами $\gamma_i = \pi - \measuredangle(\dot{c}_{i+1}(1), \dot{c}_{i-1}(0)) \in [0, \pi]$ при вершинах p_i (рис. 3). Таким образом, γ_i суть углы, дополнительные к углам пересечения сторон в соответствующих вершинах p_i.

Очевидно, выполнено неравенство треугольника

$$L(c_i) + L(c_{i+1}) \geqslant L(c_{i+2}). \tag{1}$$

Если в (1) имеет место равенство, то $\gamma_{i+2} = \pi$. В самом деле, при $\gamma_{i+2} \neq \pi$ композиция путей c_i, c_{i+1} не может быть кратчайшим путем, соединяющим p_{i+1} с p_i. Заметим, что в случае $\gamma_{i+2} = \pi$ углы γ_i, γ_{i+1} могут быть отличны от нуля, как это, например, видно в случае треугольника Δ на S^n_ρ, у которого c_{i+2} — полуме-

ридиан. Далее, $\gamma_{i+2}=\pi$ не обязательно влечет за собой равенство в (1) (соответствующие примеры легко построить на сфере или на цилиндре). Композиция c_0, c_1, c_2 — кусочно дифференцируемый замкнутый путь в M; если при этом $\gamma_{i+2}\neq 0$, то композиция путей c_i, c_{i+1} — инъективный путь. Если же $\gamma_{i+2}=0$, то либо $\gamma_{i+1}=0$, $\gamma_i=\pi$, либо $\gamma_{i+1}=\pi$, $\gamma_i=0$, и все вершины треугольника $\triangle$ расположены на образе самой длинной его стороны.

Если M полно, то для любых трех попарно различных точек p_0, p_1, p_2 существует треугольник $\triangle$ с вершинами в этих точках. Может существовать много различных треугольников с заданными вершинами; например, на S^n_p можно в качестве двух из вершин взять северный и южный полюсы. Поэтому в ряде случаев для задания треугольника приходится указывать не только его вершины, но и стороны.

В следующей теореме углы треугольника в полном римановом многообразии неотрицательной кривизны сравниваются с углами треугольника на сфере или в евклидовом пространстве с теми же длинами сторон.

Теорема (В. А. Топоногов)

Усл. *M — полное риманово многообразие размерности $n\geqslant 2$; $K_\sigma\geqslant\varkappa\geqslant 0$ для всех касательных к M двумерных плоскостей σ; $\triangle=(c_0, c_1, c_2)$ — треугольник в M с углами γ_0, γ_1, γ_2.*

Утв. *Если $\varkappa>0$ ($\varkappa\geqslant 0$), то существует треугольник $\tilde{\triangle}=(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ в $\tilde{M}=S^n_{1/\sqrt{\varkappa}}$ (соответственно в $\tilde{M}=\mathbb{R}^n$) с углами $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, для которого*

$$L(c_i)=L(\tilde{c}_i), \tag{2}$$

$$\gamma_i\geqslant\tilde{\gamma}_i, \tag{3}$$

где $i=0, 1, 2$.

Для случая, когда M — двумерное риманово многообразие, гомеоморфное S^2, эта теорема была впервые доказана А. Д. Александровым (Александров А. Д., *Внутренняя геометрия выпуклых* поверхностей, 1948). В общем случае теорема была доказана В. А. Топоноговым (*Свойство выпуклости римановых пространств положительной кривизны*, ДАН СССР, 115, № 4 (1957); *Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу положительным числом*, ДАН СССР, 120, № 4 (1958); *Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу*, УМН, XIV, № 1 (85), 1959). См. также Berger M., *An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications*, Illinois J. of Math., 6 (1962), 700—712. Первоначальное доказательство Топоногова, некоторые идеи которого исходят от А. Д. Александрова, в существенном месте (в нашем изложении пункт (b)) наталкивается на трудность, которая обходится ценой серьезного усложнения исходной конструк-

гии. Мы следуем методу Топоногова, с некоторыми видоизменениями, позволяющими сократить доказательство.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем к ней некоторые замечания и отметим простейшие следствия. Ясно, что треугольник $\tilde{\Delta}$ принадлежит двумерному вполне геодезическому подмногообразию $N \subset \tilde{M}$, изометрически диффеоморфному $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ (соответственно $\mathbb{R}^2$), так как все кратчайшие в N являются также кратчайшими в $\tilde{M}$ (см. замечание (iii) разд. 5.1). Поэтому можно было бы равносильным образом формулировать теорему, считая $\tilde{\Delta}$ треугольником в $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ (соответственно в $\mathbb{R}^2$). Пусть $\varkappa > 0$. В силу (2) имеем $0 < L(\tilde{c}_i) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Согласно теореме косинусов сферической тригонометрии, углы $a_j = \sqrt{\varkappa}\, L(\tilde{c}_j)$ связаны с $\tilde{\gamma}_i$ соотношением

$$\cos a_i = \cos a_{i+1} \cos a_{i+2} + \sin a_{i+1} \sin a_{i+2} \cos \tilde{\gamma}_i. \tag{4}$$

Покажем прежде всего, что $L(\tilde{c}_i) + L(\tilde{c}_{i+1}) + L(\tilde{c}_{i+2}) \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. В самом деле, если $L(\tilde{c}_i) < \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ $(i = 0, 1, 2)$ и по крайней мере один из углов $\tilde{\gamma}_i < \pi$, то мы построим в $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ треугольник строго большего периметра, чем $\tilde{\Delta}$, одна из сторон которого имеет длину $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. А именно, предполагая, что $\tilde{\gamma}_i < \pi$, „продолжим“ $\tilde{c}_{i+1}$ за вершину $\tilde{p}_i$ до точки $\tilde{p}_i'$ так, чтобы было $\rho(\tilde{p}_{i+2}, \tilde{p}_i') = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, и рассмотрим на $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ треугольник с вершинами $\tilde{p}_i'$, $\tilde{p}_{i+1}$, $\tilde{p}_{i+2}$. Так как для этого треугольника $L(\tilde{c}_{i+1}) = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, то из (4) следует $\cos a_i = -\cos a_{i+2}$, откуда $L(\tilde{c}_i) + L(\tilde{c}_{i+2}) = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, и мы получаем требуемую оценку для периметра $\tilde{\Delta}$. Остается рассмотреть случай, когда $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 = \pi$. В этом случае композиция $\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ совмещена с большим кругом $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$, т. е. периодической геодезической длины $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$.

В силу (2) и (3) получаем оценку периметра треугольника в M:

$$L(c_0) + L(c_1) + L(c_2) \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{5}$$

Из предыдущего рассуждения видно, что равенство в (5) достигается лишь в двух случаях: (a) для одной из сторон c_i выполняется $L(c_i)=\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, и тогда $\gamma_i=\pi$ (в этом случае $\triangle$ есть „геодезический двуугольник“, составленный из двух кратчайших равной длины $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$); (b) имеет место равенство $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\pi$, в этом случае $\triangle$ совмещен с периодической геодезической длины $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$.

В силу (5) для любых точек $p, q, r\in M$ имеем

$$\rho(p,q)+\rho(q,r)+\rho(r,p)\leqslant\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{6}$$

Из (2), (3) и (4) следует

$$\cos a_i\geqslant\cos a_{i+1}\cos a_{i+2}+\sin a_{i+1}\sin a_{i+2}\cos\gamma_i, \tag{7}$$

где $a_i=\sqrt{\varkappa}\,L(c_i)=\sqrt{\varkappa}\,L(\tilde{c}_i)$. Из (7) видно, в частности, что

если $L(c_{i+1})\geqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$, $L(c_{i+2})\geqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$ и $\gamma_i\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $L(c_i)\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$; (8)

если $L(c_{i+1})\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$, $L(c_{i+2})\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$ и $\gamma_i\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $L(c_i)\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$.

Пусть $\varkappa\geqslant 0$. Положим $b_i=L(\tilde{c}_i)=L(c_i)$. По теореме косинусов прямолинейной тригонометрии $b_i^2=b_{i+1}^2+b_{i+2}^2-2b_{i+1}b_{i+2}\cos\tilde{\gamma}_i$ и из (3) следует

$$b_i^2\leqslant b_{i+1}^2+b_{i+2}^2-2b_{i+1}b_{i+2}\cos\gamma_i. \tag{9}$$

Лемма 1

Усл. *M — риманово многообразие; A — компактное подмножество M; $\varepsilon>0$ выбрано таким образом, что для каждой точки $q\in A$ замкнутый шар $\overline{U}_{q,\varepsilon}\subset M_q$ с центром в $0\in M_q$ радиуса ε принадлежит области определения* $\exp_q$.

Утв. *Существует такое число $\vartheta>0$, что для $q\in A$, $\delta\in(0,\varepsilon]$ и любого кусочно дифференцируемого пути ψ: $[\alpha,\beta]\to U_{q,\delta}$*

$$|L(\exp\circ\psi)-L(\psi)|\leqslant\delta^2\vartheta L(\psi). \tag{10}$$

Неравенство (10) дает равномерную относительно $q\in A$ оценку изменения длины путей M_q при отображении $\exp_q$, если задано их расстояние от $0\in M_p$.

Док. Пусть $q\in A$, $\delta\in(0,\varepsilon]$, $u\in U_{q,\delta}\subset M_q$, $u\neq 0$, $\gamma=\|u\|$, $v=\frac{1}{\gamma}u$, $a\in(M_q)_u$, $\|a\|=1$ и $w=I_u^{-1}(a)$ (следовательно, $\|w\|=1$). Согласно (1) разд. 4.3, вдоль нормальной геодезической $[0,\gamma]\to M$,

заданной формулой $t \to \exp(tv)$, определено поле Якоби $Y_{vw}(t) = \exp_{q*}(tI_{tv}(w))$, причем $Y_{vw}(0) = 0$, $Y'_{vw}(0) = w$ и $Y_{vw}(\gamma) = \exp_{q*}(\gamma a)$. Из (1) разд. 4.2 сразу же следует, что $D\langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_0 = D^3\langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_0 = 0$. Так как, далее, $\langle Y'_{vw}, Y'_{vw}\rangle|_0 = \|w\|^2 = 1$, то по формуле Тейлора

$$\langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_\gamma = \gamma^2 + \frac{\gamma^4}{24} D^4\langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_{\vartheta\gamma},$$

где $\vartheta \in (0, 1)$.

Так как

$$\gamma^2\langle \exp_{q*} a, \exp_{q*} a\rangle = \langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_\gamma,$$

отсюда получается

$$\|\exp_{q*} a\|^2 - 1 = \frac{\gamma^2}{24} D^4\langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_{\vartheta\gamma}.$$

Отображение $(v, w, t) \to \frac{1}{24} D^4\langle Y_{vw}, Y_{vw}\rangle|_t$ непрерывно на компактном множестве

$$\{(v, w, t) \in TM \times TM \times [0, \varepsilon], \quad \pi(v) = \pi(w) \in A, \quad \|v\| = \|w\| = 1\}$$

и принимает на нем наибольшее значение ϑ (см. доказательство теоремы из разд. 5.2).

Так как $\gamma \in (0, \delta)$, имеем

$$|\|\exp_{q*} a\|^2 - 1| \leqslant \delta^2\vartheta, \quad |\|\exp_{q*} a\| - 1| \leqslant \frac{\delta^2\vartheta}{\|\exp_{q*} a\| + 1} \leqslant \delta^2\vartheta.$$

Поэтому для любого $b \in (M_q)_u$ справедливо неравенство

$$|\|\exp_{q*} b\| - \|b\|| \leqslant \delta^2\vartheta\|b\|, \tag{11}$$

в частности $|\|\exp_{q*}\psi(s)\| - \|\psi(s)\|| \leqslant \delta^2\vartheta\|\psi(s)\|$ для всех $s \in [\alpha, \beta]$, откуда непосредственно следует (10).

Приведем два простых следствия из леммы 1.

• Пусть M — риманово многообразие с функцией расстояния ρ, $p \in M$ и q_ν — последовательность точек M, сходящаяся к p. Если векторы u_ν, $v_\nu \in M_{q_\nu}$ принадлежат области определения exp и сходятся в TM к $0 \in M_p$, то, как мы покажем, существует такая последовательность действительных чисел η_ν, стремящаяся к нулю, что

$$\rho(\exp(u_\nu), \exp(v_\nu)) = \|u_\nu - v_\nu\| + \delta_\nu^2\eta_\nu, \tag{12}$$

где

$$\delta_\nu = \max(\|u_\nu\|, \|v_\nu\|).$$

Обозначим через A объединение всех точек q_ν и точки p, очевидно, множество A компактно. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого ν отображения $\exp_{q_\nu}$ определено на замкнутом

шаре $\overline{U}_{v,\varepsilon} \subset M_{q_v}$ радиуса ε с центром в $0 \in M_{q_v}$ и диффеоморфно отображает $U_{v,\varepsilon}$ на сильно выпуклый шар $B_{v,\varepsilon}$ с центром в q_v (см. разд. 5.2). Для достаточно больших v, очевидно, $u_v, v_v \in U_{v,\varepsilon}$. Пусть φ_v — кратчайшая в $\overline{U}_{v,\delta_v}$, соединяющая u_v с v_v, c_v — кратчайшая в $\overline{B}_{v,\delta_v}$, соединяющая $\exp(u_v)$ с $\exp(v_v)$, и $\psi_v = \left(\exp|_{U_{v,\delta_v}}\right)^{-1} \circ c_v$. Так как $L(\varphi_v) \leqslant L(\psi_v)$, $L(\exp \circ \varphi_v) \geqslant L(\exp \circ \psi_v)$, из (10) следует

$$|L(\exp \circ \psi_v) - L(\varphi_v)| \leqslant \delta_v^2 \vartheta L(\psi_v). \tag{13}$$

Наконец, $\lim\limits_{v\to\infty} L(c_v) = 0$, откуда $\lim\limits_{v\to\infty} L(\psi_v) = 0$, и из (13) получаем (12).

Важным шагом к доказательству теоремы является следующая лемма, представляющая и самостоятельный геометрический интерес.

Лемма 2

Усл. *M — полное риманово многообразие с функцией расстояния ρ; p, q, r — различные точки в M; b, c: $[0, 1] \to M$ — кратчайшие геодезические, соединяющие p с r, соответственно p с q, причем r не принадлежит образу c; q_v — последовательность точек в образе c, сходящаяся к p, $q_v \neq p$; a_v: $[0, 1] \to M$ — кратчайшая геодезическая, соединяющая q_v с r; α — угол пересечения b с c в точке p; ξ_v — угол пересечения a_v с c в точке q_v.*

Утв. *Последовательность ξ_n сходится, и предел $\bar{\alpha} = \lim\limits_{v\to\infty} \xi_v$ удовлетворяет неравенству $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$.*

Док. Если доказать неравенство $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$ в предположении, что последовательность ξ_n сходится, то отсюда будет следовать общий случай леммы. В самом деле, для двух сходящихся подпоследовательностей $\xi_{v'_k} \to \bar{\alpha}_1$, $\xi_{v''_k} \to \bar{\alpha}_2$ можно считать соответствующие кратчайшие $a_{v'_k}$, $a_{v''_k}$ сходящимися к некоторым кратчайшим a', соответственно a'' (для этого, возможно, придется снова выбрать из них подпоследовательности); a', a'' соединяют p с r и образуют в точке p углы $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ с геодезической c. Тогда, считая неравенство $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$ доказанным для сходящихся последовательностей ξ_v, имеем $\bar{\alpha}_1 \leqslant \bar{\alpha}_2$ и $\bar{\alpha}_2 \leqslant \bar{\alpha}_1$, т. е. $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$, что и доказывает лемму в общем случае.

Итак, можно считать, что ξ_n сходятся. Далее, можно, очевидно, предположить, что геодезические a_v сходятся к кратчайшей геодезической b: $[0, 1] \to M$, соединяющей p с r, а углы α, $\bar{\alpha}$ удовлетворяют неравенствам $0 < \alpha < \pi$, $0 < \bar{\alpha} \leqslant \pi$; тогда при всех v выполняются неравенства $\xi_v < \pi$.

Пусть для некоторого ν имеет место $\overline{pq_\nu} < \rho_\nu < \overline{pr}$, тогда существуют точки t_ν, s_ν, принадлежащие соответственно образам b, a_ν, для которых $\overline{pt_\nu} = \overline{ps_\nu} = \rho_\nu$ (см. рис. 4*а*).

В основе доказательства леммы лежит неравенство $\overline{q_\nu t_\nu} \geqslant \overline{q_\nu s_\nu}$, которое мы и выведем сначала. Из неравенства треугольника получаем $\overline{ps_\nu} + \overline{s_\nu r} \geqslant \overline{pr} = \overline{pt_\nu} + \overline{t_\nu r}$, откуда $\overline{s_\nu r} \geqslant \overline{t_\nu r}$. С другой стороны, имеем $\overline{q_\nu t_\nu} + \overline{t_\nu r} \geqslant \overline{q_\nu r} = \overline{q_\nu s_\nu} + \overline{s_\nu r}$, откуда $\overline{t_\nu r} \geqslant \overline{s_\nu r} + \overline{q_\nu s_\nu} - \overline{q_\nu t_\nu}$, так что $\overline{s_\nu r} \geqslant \overline{t_\nu r} \geqslant \overline{s_\nu r} + \overline{q_\nu s_\nu} - \overline{q_\nu t_\nu}$ и, следовательно, $\overline{q_\nu t_\nu} \geqslant \overline{q_\nu s_\nu}$. Дальнейшие рассуждения относятся к „малым“ треугольникам $pq_\nu t_\nu$, $pq_\nu s_\nu$. Если $\rho_\nu \to 0$ так, что $\frac{\overline{pq_\nu}}{\rho_\nu} \to 0$ (т. е. оба малых треугольника становятся „сколь угодно узкими“), то неравенство $\bar{\alpha} > \alpha$ несовместимо с только что выведенным неравенством $\overline{q_\nu t_\nu} \geqslant \overline{q_\nu s_\nu}$, поскольку в малых треугольниках соотношения между сторонами и углами почти такие же, как в прямолинейных.

Исходя из этой идеи, положим $\overline{q_\nu s_\nu} = \tau \overline{pq_\nu}$, где $\tau > 0$ — произвольное фиксированное число. Выберем $\varepsilon > 0$, как при выводе (12), таким образом, чтобы экспоненциальные отображения $\exp_p$, $\exp_{q_\nu}$ диффеоморфно отображали шары $U_\varepsilon \subset M_p$, $U_{\nu,\varepsilon} \subset M_q$ радиуса ε с центрами $0 \in M_p$, $0 \in M_{q_\nu}$ на сильно выпуклые шары в M. Тогда, при достаточно большом ν, $U_{\nu,\varepsilon}$ содержит треугольник $(0, u_\nu, v_\nu)$, для которого $\exp_{q_\nu}(u_\nu) = p$, $\exp_{q_\nu}(v_\nu) = s_\nu$. Из (12) и теоремы косинусов прямолинейной тригонометрии имеем

$$\overline{ps_\nu^2} = \overline{pq_\nu^2} + \overline{q_\nu s_\nu^2} - 2\overline{pq_\nu} \cdot \overline{q_\nu s_\nu} \cos(\pi - \xi_\nu) + \overline{pq_\nu^2}\eta_\nu,$$

где $\eta_\nu \to 0$, откуда

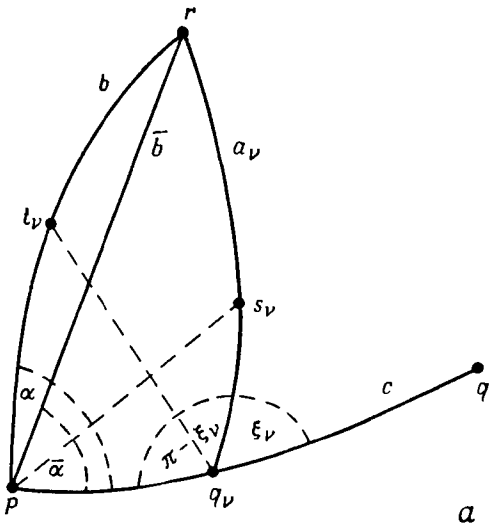
$$\overline{pt_\nu^2} = \overline{pq_\nu^2}(1 + \tau^2 + 2\tau \cos \xi_\nu + \eta_\nu), \qquad \eta_\nu \to 0. \tag{14}$$

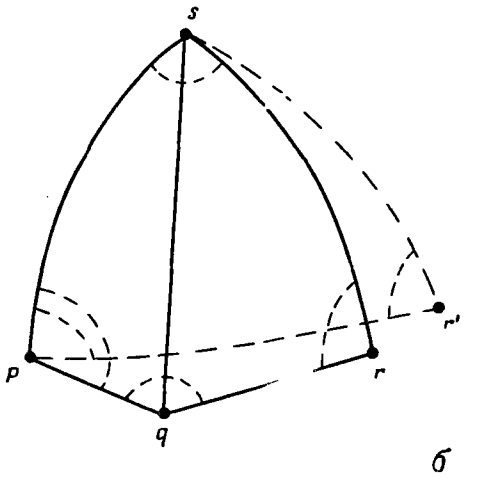
Аналогично, применяя (12) и теорему косинусов к треугольнику $(0, \tilde{u}_\nu, \tilde{v}_\nu)$ в $U_\varepsilon \subset M_p$, для которого $\exp_p \tilde{u}_\nu = q_\nu$, $\exp_p \tilde{v}_\nu = t_\nu$, получаем

$$\overline{q_\nu t_\nu^2} = \overline{pt_\nu^2} + \overline{pq_\nu^2} - 2\overline{pt_\nu} \cdot \overline{pq_\nu} \cos \alpha + (\max(\overline{pt_\nu}, \overline{pq_\nu}))^2 \tilde{\eta}_\nu,$$

где $\tilde{\eta}_\nu \to 0$. Так как $\overline{pt_\nu} = \overline{ps_\nu} \leqslant \overline{pq_\nu} + \overline{q_\nu s_\nu} = (1 + \tau)\overline{pq_\nu}$, отсюда следует

$$\overline{q_\nu t_\nu^2} = \overline{pt_\nu^2} + \overline{pq_\nu^2} - 2\overline{pt_\nu}\,\overline{pq_\nu} \cos \alpha + \overline{pq_\nu^2}\eta'_\nu, \qquad \eta'_\nu \to 0. \tag{15}$$


r
b
$\bar{b}$
a_ν
t_ν
s_ν
α
$\bar{\alpha}$
π
ξ_ν
ξ_ν
c
q
p
q_ν
а


s
p
q
r
r'
б

Р и с. 4.

Теперь используем неравенство $\overline{q_\nu t_\nu} \geqslant \overline{q_\nu s_\nu}$, из которого следует $\overline{q_\nu t_\nu^2} \geqslant \tau^2 \overline{pq_\nu^2}$. Учитывая (14), (15), имеем

$$\overline{q_\nu t_\nu^2} = \overline{pq_\nu^2}(1 + \tau^2 + 2\tau \cos \xi_\nu + \eta_\nu) +$$
$$+ \overline{pq_\nu^2} - 2\overline{pq_\nu^2} \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos \xi_\nu + \eta_\nu} \cos \alpha + \overline{pq_\nu^2} \cdot \eta'_\nu \geqslant \tau^2 \overline{pq_\nu^2},$$

откуда

$$1 + \tau \cos \xi_\nu - \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos \xi_\nu + \eta_\nu} \cos \alpha + \eta''_\nu \geqslant 0, \quad \eta''_\nu \to 0.$$

Выполнив предельный переход при $\nu \to \infty$ и разделив на τ, приходим к неравенству

$$\frac{1}{\tau} + \cos \bar{\alpha} - \sqrt{1 + \frac{2}{\tau} \cos \bar{\alpha} + \frac{1}{\tau^2}} \cos \alpha \geqslant 0. \tag{16}$$

Так как $\tau > 0$ — произвольное число, то можно совершить в (16) предельный переход $\tau \to \infty$, что дает $\cos \bar{\alpha} \geqslant \cos \alpha$, $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$.

Доказательство следующего предложения сводится к простым рассуждениям элементарной геометрии и предоставляется читателю (см. также Rinow W., *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Springer — Verlag (1961), вторая часть теоремы 2 на стр. 314). Содержание леммы 3 иллюстрируется на рис. 4 (*б*).

Лемма 3

Усл. *Обозначим pqs, qrs — треугольники в S^2_ρ, соответственно в $\mathbb{R}^2$, причем $\overline{pq} + \overline{qr} \leqslant \overline{rs} + \overline{sp}$; $pr's$ — треугольник, у которого $\overline{pr'} = \overline{pq} + \overline{qr}$, $\overline{r's} = \overline{rs}$. Сумма углов треугольников pqs, qrs в точке q не больше π.*

Утв. *Четырехугольник $pqrs$ выпуклый, т. е. сумма углов треугольников pqs, qrs при вершине s также не больше π, и углы $pqrs$ при вершинах p, r соответственно не меньше углов треугольника $pr's$ при p, r'.*

Доказательство теоремы. Приведем доказательство для случая $\varkappa > 0$, однако все рассуждения распространяются и на случай $\varkappa = 0$, если отбросить некоторые лишние в этом случае части текста, отмеченные скобками „$(\varkappa > 0)$“. Основная идея доказательства состоит в том, что соотношения между углами надлежащим образом сводятся к соотношениям между длинами кратчайших, которые вытекают из следствия теоремы Рауха.

В пунктах (a) — (c) теорема доказывается при дополнительном предположении, что $L(c_0) + L(c_1) + L(c_2) < \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ $(\varkappa > 0)$. В пункте (a) показывается, каким образом можно получать соотношения между углами из соотношений между длинами. В пункте (b) утверждение теоремы доказывается для „узких“ треугольников, т. е. таких,

одна сторона которых достаточно коротка по сравнению с другими. При этом мы встречаемся с трудностью, состоящей в том, что на длинных сторонах могут быть сопряженные точки. В пункте (c) результат пункта (b) „глобализуется" посредством процесса продолжения, опирающегося на леммы 2 и 3. Наконец, пункты (d) и (e) относятся к случаю $L(c_0)+L(c_1)+L(c_2)\geqslant\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, который сводится к ранее рассмотренному.

Все пути, участвующие в доказательстве, определены на интервале $[0, 1]$.

(a) Пусть (a, b, c) — треугольник в M периметра $<\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ $(\varkappa>0)$. Тогда в $\tilde{M}$ существует треугольник $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ с соответственно равными длинами сторон. Положим $p=c(0)$, $\tilde{p}=\tilde{c}(0)$. Рассмотрим в $\tilde{M}$ другой треугольник $(a', b', \tilde{c})$, у которого $L(b')=L(\tilde{b})$ ($\tilde{b}$ — смежная с p сторона), а угол при вершине $\tilde{p}$ равен углу α при вершине p треугольника (a, b, c). Обозначим через $\tilde{\alpha}$ угол при вершине $\tilde{p}$ треугольника $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$. Пусть U — звездообразное относительно точки 0 открытое множество M_p, содержащее точки 0, $-b(1)$, $\dot{c}(0)$; $\iota\colon M_p\to\tilde{M}_{\tilde{p}}$ — линейная изометрия, такая, что $\iota(-b(1))=-b'(1)$, $\iota(\dot{c}(0))=\dot{\tilde{c}}(0)$. Тогда справедливо следующее утверждение:

> если $\exp_p$ имеет во всех точках U максимальный ранг и если a' принадлежит $\exp_{\tilde{p}}(\iota U)$, то $\alpha\geqslant\tilde{\alpha}$. (17)

В самом деле, по теореме Морса—Шенберга для всех векторов $\tilde{v}\in\iota U$ имеем $\|v\|<\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, так что кратчайшая a' может быть поднята в $\tilde{M}_{\tilde{p}}$ посредством отображения $\exp_{\tilde{p}}|_{\iota U}$ $(\varkappa>0)$. Поэтому существует такой путь ψ в U, что $\exp_{\tilde{p}}\circ\iota\psi=a'$, и в силу неравенства (5) теоремы сравнения Рауха имеем

$$L(\tilde{a})=L(a)\leqslant L(\exp_p\circ\psi)\leqslant L(\exp_{\tilde{p}}\circ\iota\psi)=L(a').$$

Но тогда по элементарному свойству треугольников на сфере $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ (в $\mathbb{R}^n$) имеем $\tilde{\alpha}\leqslant\alpha$, что и требовалось доказать.

(b) Предположим, что периметр треугольника (a, b, c) в M с вершинами p, q, r строго меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ $(\varkappa>0)$, и пусть $p=c(0)$, $q=a(0)$, $r=b(0)$. Пусть r не принадлежит образу c. Рассмотрим сходящуюся к p последовательность q_ν точек c, $q_\nu\neq p$. Пусть a_ν — произвольные кратчайшие, соединяющие q_ν с r; c_ν — кратчайшие, соединяющие p с q_ν; α, β_ν, γ_ν — углы треугольника (a_ν, b, c_ν) при вершинах p, q_ν, r и $\tilde{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu$ — соответствующие углы

треугольника с теми же длинами сторон в $\tilde{M}$ (такой треугольник существует, поскольку периметр (a_ν, b, c_ν) меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ $(\varkappa > 0)$), тогда справедливо следующее утверждение:

для достаточно больших значений ν выполняются неравенства

$$\alpha \geqslant \tilde{\alpha}_\nu, \quad \beta_\nu \geqslant \tilde{\beta}_\nu. \tag{18}$$

Заметим прежде всего, что достаточно доказать (18) в случае, когда кратчайшие a_ν сходятся к некоторой кратчайшей a_0, так как из всякой подпоследовательности a_ν можно в свою очередь выбрать сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что a_0 есть b^{-1} (пройденная в обратном направлении кратчайшая b). В самом деле, в противном случае мы заменили бы в условии пункта (b) кратчайшую b на a_0^{-1}, а затем с помощью леммы 2 сравнили бы углы, образуемые b^{-1}, a_0, с c в точке p.

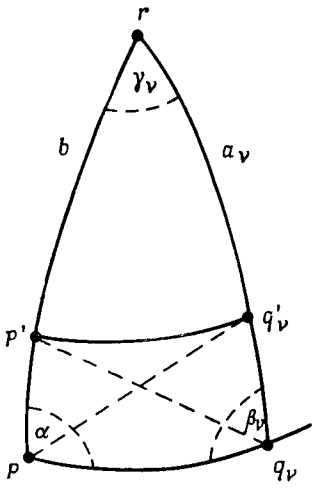


Рис. 5.

Если a_ν сходятся к b^{-1}, то $-\lim\limits_{\nu\to\infty} \dot{a}_\nu(1) = b(0)$.

Пусть $\delta > 0$ — элементарная длина компактного шара в M с центром в p столь большого радиуса, что ему принадлежат все треугольники (a_ν, b, c_ν) (см. разд. 5.2 и 5.3). Выберем такое число $\eta \in (0, 1)$, чтобы для точки $p' = b(1-\eta)$ выполнялось $\rho(p, p') < \delta$, тогда для всех ν, за исключением конечного числа, будет $\rho(q_\nu, q'_\nu) < \delta$, где $q'_\nu = a_\nu(\eta)$.

Рассмотрим следующие треугольники в M: $\triangle_\nu$ с вершинами p'_ν, q'_ν, r; $\triangle'_\nu$ с вершинами p', q_ν, r (причем стороной, соединяющей q_ν с r, является a_ν); $\triangle''_\nu$ с вершинами p, q'_ν, r, причем стороной, соединяющей r с p, является b. Соответствующие треугольники с теми же длинами сторон в $\tilde{M}$, что у $\triangle_\nu$, $\triangle'_\nu$, $\triangle''_\nu$, обозначим через $\tilde{\triangle}_\nu$, $\tilde{\triangle}'_\nu$, $\tilde{\triangle}''_\nu$. Заметим, что две точки кратчайшей геодезической могут быть сопряжены относительно нее только в том случае, если являются ее концами (лемма 1 разд. 4.5). Так как p', q'_ν — внутренние точки кратчайших b, a_ν, то ни одна точка b, a_ν не может быть критическим значением отображения $\exp_{p'}$, соответственно $\exp_{q'_\nu}$, и ни одна точка кратчайшей rp' (составляющей часть b) не является критическим значением $\exp_r$.

Кроме того, точка r по условию не принадлежит образу c; поэтому кратчайшие b и a_ν инъективны при достаточно большом ν. Таким образом, существуют замкнутые отрезки B, $A_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, C, принадлежащие, соответственно, $M_{p'}$, $M_{q_\nu'}$, M_r, на которых отображения $\exp_{p'}$, $\exp_{q_\nu'}$, $\exp_r$ инъективны и имеют максимальный ранг, причем $\exp_{p'}(B) = b$, $\exp_{q_\nu'}(A_\nu) = a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, $\exp_r(C) = rp'$.

Поскольку множество $B \cup C \cup \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \right) \subset TM$ компактно, существует его ε-окрестность в TM, на которой соответствующие отображения $\exp_{p'}$, $\exp_{q_\nu'}$, $\exp_r$ имеют максимальный ранг (см. разд. 2.8); ε-окрестностью множества называется объединение всех открытых шаров радиуса ε с центрами в его точках, а шары понимаются в смысле канонической метрики на TM (см. замечание (iii) разд. 3.2).

Обозначим через $\tilde{\gamma}_\nu$ угол треугольника $\tilde{\triangle}_\nu$, соответствующий γ_ν; тогда из (17) следует, что для пары треугольников $\triangle_\nu$, $\tilde{\triangle}_\nu$ угол $\gamma_\nu \geqslant \tilde{\gamma}_\nu'$, если ν достаточно велико (и, значит, $\overline{p' q_\nu'}$ достаточно мало). Аналогично, применяя (17) к $\exp_{q_\nu'}$ и треугольникам $\triangle_\nu$, $\tilde{\triangle}_\nu$, находим, что угол $\triangle_\nu$ при вершине q_ν' не меньше угла $\tilde{\triangle}_\nu$ при соответствующей вершине для достаточно большого ν. Так как $\lim\limits_{\nu \to \infty} \overline{p' q_\nu} \leqslant \lim\limits_{\nu \to \infty} (\overline{p'p} + \overline{pq_\nu}) = \overline{p'p} < \delta$, $\overline{q_\nu q_\nu'} < \delta$, начиная с некоторого ν, и $\lim\limits_{\nu \to \infty} \overline{p' q_{\nu'}} = 0$, то из (17) опять следует, что все углы треугольника $p' q_\nu q_\nu'$ не меньше соответствующих углов треугольника в $\tilde{M}$ с теми же длинами сторон, при достаточно большом ν. Обозначим через $\tilde{\gamma}_\nu'$ угол треугольника $\tilde{\triangle}_\nu'$, соответствующий γ_ν, тогда, применяя лемму 3 к треугольникам $\triangle_\nu$, $p' q_\nu q_\nu'$, получаем $\gamma_\nu > \tilde{\gamma}_\nu'$. Далее, применяя (17) к $\exp_{p'}$, находим, что при достаточно большом ν угол треугольника $\triangle_\nu'$ при вершине p' не меньше соответствующего угла треугольника $\tilde{\triangle}_\nu'$. Так как все углы треугольника $pq_\nu p'$, начиная с некоторого ν, также не меньше соответствующих углов треугольника в $\tilde{M}$ с теми же длинами сторон, то из леммы 3 следует, наконец, что $\alpha \geqslant \tilde{\alpha}_\nu$, начиная с некоторого ν. Совершенно аналогично, рассматривая последовательно треугольники $\triangle_\nu$, $pq_\nu' p'$, затем $\triangle_\nu''$, $pq_\nu q_\nu'$, получаем $\beta_\nu \geqslant \tilde{\beta}_\nu$, начиная с некоторого ν, что и доказывает (18).

(c) Рассмотрим теперь треугольник $\triangle = (c_0, c_1, c_2)$ в M с углами γ_i и предположим, что $L(c_0) + L(c_1) + L(c_2) < \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}} (\varkappa > 0)$.

Тогда в $\tilde{M}$ существует треугольник $\tilde{\Delta}=(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ с углами $\tilde{\gamma}_i$, удовлетворяющий соотношениям (2). Мы докажем неравенство (3), например, для γ_0.

Прежде всего можно считать, что p_2 не принадлежит образу c_2, так как в противном случае $\gamma_0=0$ и $\tilde{\gamma}_0=0$. Рассмотрим подмножество $I\subset(0, 1]$, состоящее из всех точек t_0, обладающих следующим свойством: при $t\leqslant t_0$ в M существует треугольник с вершинами p_0, $c_2(t)$, p_2, сторона которого, соединяющая p_2 с p_0, есть c_1, а в случае $t=1$ сторона, соединяющая p_0 с p_1, есть c_2, углы же при вершинах p_0, $c_2(t)$ не меньше соответствующих углов треугольника в $\tilde{M}$ с теми же длинами сторон. Согласно (18), множество I содержит некоторый интервал $(0, t')$. Пусть t' — наибольшее число, для которого $(0, t')\subset I$, покажем прежде всего, что $t'\in I$. Пусть $t_\nu\in I$, $t_\nu\to t'$, и Δ_ν — треугольник с вершинами p_0, $c_2(t_\nu)$, p_2 и стороной c_1, соединяющей p_2 с p_0, причем углы Δ_ν при вершинах p_0, $c_2(t_\nu)$ не меньше соответствующих углов треугольника $\tilde{\Delta}_\nu$ в $\tilde{M}$ с теми же длинами сторон. Далее, пусть Δ' — треугольник в M с вершинами p_0, $c_2(t')$, p_2, стороны которого суть кратчайшие, предельные для соответствующих сторон Δ_ν. Так как длины сторон $\tilde{\Delta}'_\nu$ стремятся к отличным от нуля длинам сторон треугольника $\tilde{\Delta}'$ в M, стороны которого имеют ту же длину, что и соответствующие стороны Δ', а периметр меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ $(\varkappa>0)$, то углы $\tilde{\Delta}'_\nu$ сходятся к соответствующим углам $\tilde{\Delta}'$. Поэтому углы треугольника Δ' при p_0, $c_2(t')$ не меньше соответствующих углов $\tilde{\Delta}'$, и $t'\in I$. Покажем, что $t'=1$. В самом деле, при $t'<1$ существует, согласно (18), число $t''\in(t', 1]$ и треугольник Δ'' в M с вершинами $c_2(t')$, $c_2(t'')$, p_2 и общей с Δ' стороной, соединяющей $c_2(t')$ и p_2, углы которого при вершинах $c_2(t')$, $c_2(t'')$ не меньше соответствующих углов треугольника в $\tilde{M}$ с теми же длинами сторон. Тогда, применяя лемму 3 к треугольникам Δ', Δ'', находим, что $t''\in I$ вопреки определению t'. Итак, $t'=1$ и $\gamma_0\geqslant\tilde{\gamma}_0$.

(d) Пусть теперь $\varkappa>0$ и $L(c_0)+L(c_1)+L(c_2)=\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Покажем, что если для всех сторон выполняется неравенство $L(c_i)<\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, то $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\pi$. Рассмотрим, например, γ_0. Пусть t' — точная нижняя граница всех чисел $t\in[0, 1]$, для которых $\rho(p_0, c_2(t))+\rho(c_2(t), p_2)+\rho(p_2, p_0)=\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Так как $L(c_0)<\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, ясно, что $t'>0$. Построим последовательность t_ν в интервале $(0, t')$, сходящуюся к t', и треугольники Δ_ν в M с вершинами p_0, $c_2(t_\nu)$, p_2 и стороной c_1, соединяющей p_2 с p_0. По построению периметр Δ_ν

меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$; пусть $\tilde{\triangle}_\nu$ — треугольник на $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ с теми же длинами сторон, что $\triangle_\nu$. Согласно пункту (c), γ_0 не меньше соответствующего угла $\tilde{\triangle}_\nu$, а этот угол стремится к π, так как $\lim\limits_{\nu\to\infty}\rho(p_0,\ c_2(t_\nu))<$ $<\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, $\rho(p_2,\ p_0)<\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Но тогда и $\gamma_0=\pi$.

Пусть теперь $L(c_0)=\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, тогда $L(c_1)+L(c_2)=\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ и тем самым $\gamma_0=\pi$. Утверждение теоремы в этом случае получается сразу же, так как можно построить на $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ треугольник $\tilde{\triangle}$, у которого $\tilde{\gamma}_0=\pi$ и $\tilde{\gamma}_1=\tilde{\gamma}_2=0$, а длины сторон те же, что у $\triangle$.

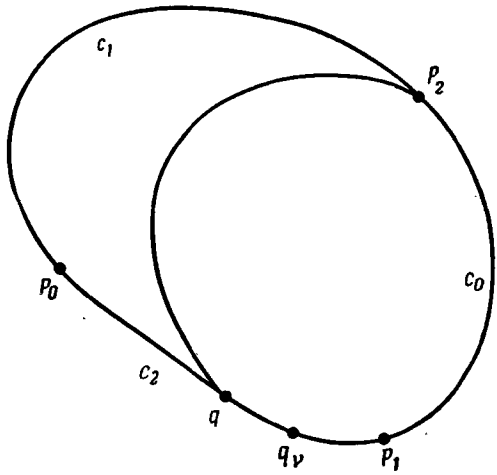


Рис. 6.

(e) Пусть, наконец, $\varkappa>0$ и $L(c_0)+L(c_1)+$ $+L(c_2)>\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Покажем сначала, что отсюда следует $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\pi$. В самом деле, вследствие непрерывности функции расстояния ρ существует такое $t'\in(0,\ 1)$, что для точек $p_1'=c_2(t')$, $p_2'=$ $=c_1(1-t')$ выполнено равенство $\rho(p_0,\ p_1')+\rho(p_1',\ p_2')+\rho(p_2',\ p_0)=\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Построим в M треугольник $\triangle$ с вершинами p_0, p_1', p_2'. Согласно (d), γ_0 лишь в том случае может быть меньше π, если $\overline{p_0p_1'}=\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ или $\overline{p_0p_2'}=$ $=\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. С другой стороны, в силу полноты M и теоремы Морса—Шенберга расстояние между точками M не может быть больше $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ (см. разд. 5.3 и 6.2, а также теорему Мейерса в разд. 7.3). Отсюда $\overline{p_0p_1'}<\overline{p_0p_1}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, $\overline{p_0p_2'}<\overline{p_0p_2}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, и $\gamma_0=\pi$. Аналогично доказывается, что $\gamma_1=\gamma_2=\pi$.

Пусть $t''\in[0,\ 1)$ — точная верхняя граница всех чисел $t\in[0,\ 1]$, для которых $\rho(p_0,\ c_2(t))+\rho(c_2(t),\ p_2)+\rho(p_2,\ p_0)=\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Возьмем

последовательность $t_\nu \in (t'', 1)$, сходящуюся к t'', положим $q_\nu = c_2(t_\nu)$, $q = \lim\limits_{\nu\to\infty} q_\nu = c_2(t'')$ и рассмотрим треугольники Δ_ν с вершинами (p_0, q_ν, p_2) и стороной p_2, соединяющей p_2 с p_0. Периметр каждого треугольника Δ_ν больше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ и, по только что доказанному, все углы Δ_ν равны π. Поэтому (см. рис. 5) $\overline{q_\nu p_1} + \overline{p_1 p_2} = \overline{q_\nu p_2}$, откуда $\overline{qp_1} + \overline{p_1 p_2} = \overline{qp_2}$, следовательно, $L(c_0) + L(c_1) + L(c_2) = \overline{p_0 q} + \overline{qp_1} + \overline{p_1 p_2} + \overline{p_2 p_0} = \overline{p_0 q} + \overline{qp_2} + \overline{p_2 p_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, вопреки предположению. Доказательство теоремы окончено.

Замечания

(i) Теорема о сравнении углов, доказанная в этом разделе, в той же формулировке распространяется на случай, когда $K_\sigma \geqslant \varkappa$, где $\varkappa$ отрицательно. В качестве $\tilde{M}$ в этом случае берется n-мерное гиперболическое пространство, или, проще, двумерная гиперболическая плоскость постоянной отрицательной кривизны $\varkappa$ (см. описание стандартной модели $U_\varkappa$ в замечании (iv) разд. 3.6). Покажите, что $U_\varkappa$ — полное риманово многообразие. Каждая исходящая из точки $p \in U_\varkappa$ максимальная геодезическая имеет бесконечную длину; ее образ $U_\varkappa$ есть часть евклидовой окружности или луча, ортогональная граница шара $U_\varkappa$ (см. замечание (iv) разд. 3.6). Для любых трех положительных чисел a_0, a_1, a_2, удовлетворяющих неравенствам $a_i + a_{i+1} \geqslant a_{i+2}$, существует треугольник $\tilde{\Delta} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ в $\tilde{M} = U_\varkappa$ со сторонами $L(\tilde{c}_i) = \frac{a_i}{\sqrt{-\varkappa}}$; обозначим его углы через $\tilde{\gamma}_i$. Треугольник $\tilde{\Delta}$ определен с точностью до конгруэнтности, т. е. до преобразования с помощью некоторой изометрии $U_\varkappa$. Для любых трех точек $\tilde{p}_0$, $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ существует в точности один треугольник $\tilde{\Delta}$ с вершинами в этих точках.

Справедлива теорема косинусов гиперболической геометрии

$$\operatorname{ch} a_i = \operatorname{ch} a_{i+1} \operatorname{ch} a_{i+2} - \operatorname{sh} a_{i+1} \operatorname{sh}_{i+2} \cos \tilde{\gamma}_i.$$

Из теоремы Топоногова о сравнении углов при $\varkappa < 0$ следует неравенство

$$\operatorname{ch} a_i \leqslant \operatorname{ch} a_{i+1} \operatorname{ch} a_{i+2} - \operatorname{sh} a_{i+1} \operatorname{sh} a_{i+2} \cos \tilde{\gamma}_i, \tag{19}$$

в предположениях и обозначениях предыдущей теоремы.

Утверждение (3) при $\varkappa < 0$ доказывается так же, как и при $\varkappa = 0$.

(ii) Требование полноты M в теореме о сравнении углов можно несколько ослабить. Как видно из доказательства, достаточно предположить следующее: экспоненциальное отображение $\exp_{p_i}$, где p_i — вершина треугольника Δ, определено на открытом шаре M_{p_i}

с центром 0 достаточно большого радиуса r, и $K_\sigma \geqslant \varkappa$ для всех касательных плоскостей σ в точках шара $B_r(p_i)$. Если, далее, предположить, что $L(c_0)+L(c_1)+L(c_2)<2r$, то утверждение (3) теоремы справедливо для γ_{i+1}, γ_{i+2} (см. по этому поводу лемму в разд. 5.3, замечание (iv) разд. 5.4 и замечание (ii) разд. 7.3). Только что указанное уточнение теоремы важно в ряде случаев. Если, например, M полно, но не компактно, и Δ — треугольник в M, то Δ принадлежит достаточно большому шару M с компактным замыканием, на котором K_σ ограничено снизу, в то время как на всем M кривизна K_σ может быть не ограниченной. Даже если M компактно, это замечание позволяет, насколько возможно, усилить оценку (3) углов треугольника, так как нижняя граница кривизны может быть увеличена, если воспользоваться компактными шарами, величина которых того же порядка, что и у рассматриваемых треугольников.

(iii) Обобщенным треугольником $\Delta=(c_0, c_1, c_2)$ с вершинами p_0, p_1, p_2 мы назовем систему из трех геодезических c_0 (с началом p_1 и концом p_2), c_1 (с началом p_2 и концом p_0), c_2 (с началом p_0 и концом p_1), из которых две, например c_0 и c_1, должны быть кратчайшими. При этом c_2 может быть любой геодезической с началом p_0 и концом p_1, и допускается случай $p_0=p_1$, но для всех i должно быть выполнено неравенство треугольника (1).

Докажем для обобщенных треугольников Δ в M аналог теоремы о сравнении углов, в котором утверждение (3) высказывается лишь для примыкающих к c_2 углов γ_1, γ_2, а в случае $\varkappa>0$ добавочно предполагается, что $L(c_2)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Для этого сторона c_2 подразделяется на кратчайшие, предыдущая теорема применяется к полученным треугольникам, а затем применяется лемма 3, причем в случае $\varkappa>0$ вначале предполагается, что периметр Δ меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Затем, аналогично пункту (d), рассматривается случай периметра, равного $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, и аналогично пункту (e) приводится к противоречию случай, когда периметр больше $\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}(\varkappa>0)$. При этом для обобщенных треугольников, конечно, справедливы лишь утверждения о двух углах, но рассуждения пунктов (d), (e) могут быть повторены с некоторыми очевидными изменениями.

(iv) Можно было бы ожидать, что если кривизна M ограничена сверху числом $\varkappa$, то углы треугольника Δ на M оцениваются сверху соответствующими углами треугольника с теми же длинами сторон в пространстве постоянной кривизны, в предположении, что такой треугольник существует, т. е. периметр Δ не слишком велик ($\varkappa>0$). Однако такое утверждение в общем случае невозможно: не существует глобальной теоремы о сравнении углов для

многообразий ограниченной сверху кривизны, аналогичной теореме Топоногова. Для достаточно малых треугольников, все стороны которых могут быть подняты в касательные пространства с помощью экспоненциальных отображений в вершинах, можно в ряде случаев получить оценки углов сверху с помощью теоремы сравнения Рауха, аналогично пункту (а) предыдущего доказательства. Для более общих утверждений требуются сильные добавочные предположения. Например, недостаточно предположить, что M односвязно. А именно, существует трехмерное компактное риманово многообразие M, диффеоморфное S^3, у которого $0<K_\sigma\leqslant 1$, и периодическая геодезическая длины $<2\pi$ на M, которую можно превратить в треугольник с углами, равными π. Но любой треугольник на S^2 периметра $<2\pi$ имеет по крайней мере один угол $<\pi$. По этому поводу см. замечание (iii) разд. 7.5 и замечание (vi) разд. 7.2, а также Tsukamoto Y., *On a theorem of A. D., Alexandrov*, Memoirs of the Faculty of Science, 15(1961), 83–89, Kyushu University [1]).

[1]) Работа Цукамото содержит необоснованную критику результата А. Д. Александрова (Acad. Wiss. Forsch. Math., № 1 (1957)). — *Прим. ред.*

§ 7. Связи между кривизной и топологическим строением

7.1. Деформации геодезических

Мы обращаемся теперь к проблеме характеризации топологических свойств полного риманова многообразия с помощью его римановой кривизны. В частности, мы займемся вопросом, на каких дифференцируемых многообразиях существует полная метрика знакоопределенной кривизны, т. е. везде положительной или везде отрицательной. Сильнейшие известные результаты в этом направлении получаются посредством исследования геодезических на римановом многообразии и их экстремальных свойств, а именно из теории Морса в соединении с теоремами сравнения предыдущего параграфа.

Все используемые ниже топологические понятия можно найти, например, в книге Спеньер Э., *Алгебраическая топология*, М., 1971. При рассмотрении римановых многообразий всегда имеется в виду связность Леви-Чивита.

Пусть M — дифференцируемое многообразие; $p,\ q \in M$; $c_0,\ c_1\colon [\alpha, \beta] \to M$ — кусочно дифференцируемые пути с началом p и концом q. Непрерывное отображение $H\colon [\alpha, \beta] \times [0, 1] \to M$ называется (p, q)-*гомотопией*, связывающей c_0 с c_1, если отображение $H_s\colon [\alpha, \beta] \to M$, заданное формулой $H_s(t) = H(t, s)$, является кусочно дифференцируемым путем с началом p и концом q при всех $s \in [0, 1]$, причем $H_0 = c_0$, $H_1 = c_1$. Если M — риманово многообразие, то в этом определении дополнительно предполагается, что функция длины пути $s \to L(H_s)$ непрерывна. Пути c_0, c_1 называются (p, q)-гомотопными, если существует (p, q)-гомотопия, связывающая c_0 с c_1. Легко видеть, что „(p, q)-гомотопность“ есть отношение эквивалентности на множестве Ω_{pq} всех кусочно дифференцируемых путей, соединяющих p с q. Очевидно, (p, q)-гомотопию H, соединяющую $c_0,\ c_1 \in \Omega_{pq}$, можно рассматривать как непрерывный путь в пространстве путей Ω_{pq} с началом c_0 и концом c_1 (см. замечание (i) разд. 4.1 и разд. 7.6).

Вначале мы докажем предложение о гомотопиях, связывающих геодезические риманова пространства, в котором с помощью простых условий для экспоненциального отображения оценивается снизу длина пути при таких гомотопиях.

Лемма

Усл. *M — риманово многообразие, $p \in M$; экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на открытом шаре U_ε в M_p радиуса ε с центром 0, и имеет везде в U_ε максимальный ранг; векторы v, $w \in M_p$ принадлежат области определения $\exp_p$, $v \neq w$ и $\exp v = \exp w = r$; $t_0 \in [0, 1]$, $q = \exp(t_0 v)$; c_0: $[0, 1] \to M$ — геодезическая, заданная формулой $c_0(t) = \exp(t t_0 v)$, с началом p и концом q; c_1: $[0, 1] \to M$ — ломаная геодезическая, также соединяющая p с q и заданная формулами $c_1(t) = \exp(2tw)$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $c_1(t) = \exp([1 - (2t-1)(1-t_0)]v)$ при $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; H: $[0, 1] \times [0, 1] \to M$ — (p, q)-гомотопия, связывающая c_0 с c_1* (рис. 7).

Утв. *Существует такое $s_0 \in [0, 1]$, что*

$$L(c_0) + L(H_{s_0}) \geqslant 2\varepsilon. \tag{1}$$

Если M полно и кривизна $K_\sigma \leqslant \lambda$ $(\lambda > 0)$ для всех касательных к M плоскостей σ, то можно взять $\varepsilon = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$; в самом деле, по теореме Хопфа — Ринова $\exp_p$ определено на всем M_p, а по теореме Морса — Шенберга $\exp_p$ имеет в открытом шаре M_p с центром 0 радиуса $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ максимальный ранг. Как видно на примере сферы $M = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$, число ε, вообще говоря, нельзя выбрать больше $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$. А именно, в качестве c_0, c_1 можно взять две различных геодезических, соединяющих северный полюс p с южным полюсом r, $q = r$.

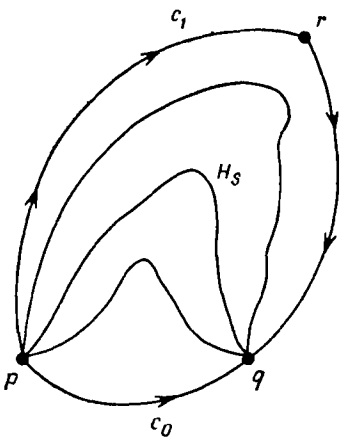


Рис. 7.

Док. Предположим, что, вопреки утверждению леммы, для всех $s \in [0, 1]$ имеет место $L(c_0) + L(H_s) < 2\varepsilon$. Тогда в силу непрерывности функции $s \to L(H_s)$ существует такое число δ, что

$$L(c_0) + \sup_{s \in [0, 1]} L(H_s) < 2\delta < 2\varepsilon, \tag{2}$$

и, в частности,

$$L(c_0) = L(H_0) < \delta. \tag{3}$$

По предположению $\exp_p$ имеет максимальный ранг во всех точках U_ε. Обозначим через J_0 множество всех таких чисел $\eta \in [0, 1]$, что $H|_{[0,1]\times[0,\eta]}$ можно поднять до непрерывного отображения Φ: $[0, 1] \times [0, \eta] \to U_\delta$, так что $\exp \circ \Phi = H|_{[0,1]\times[0,\eta]}$, и что $\Phi_s(t) = \Phi(t, s)$ представляют кусочно дифференцируемые пути Φ_s: $[0, 1] \to U_\delta$, соединяющие 0 с $t_0 v$. Из (3), точно так же как при подъеме вариации в доказательстве теоремы разд. 4.4, следует, что J_0 есть интервал с началом 0 и концом η_0. Если $\eta_0 < 1$ и принадлежит J_0, то из того же рассуждения вытекает существование непустого интервала $(\eta_0 - \vartheta, \eta_0 + \vartheta)$, в котором возможен подъем вариации, вопреки определению η_0. Итак, либо $\eta_0 = 1$, либо η_0 не принадлежит J.

С другой стороны, все предельные точки множества $\Phi([0, 1] \times [0, \eta_0))$ принадлежат $\bar{U}_\delta \subset U_\varepsilon$; следовательно, в этих предельных точках $\exp_p$ имеет максимальный ранг и путь H_{η_0} также может быть поднят в некоторый путь Φ_{η_0}: $[0, 1] \to \bar{U}_\delta$. Покажем, что Φ_{η_0} целиком принадлежит U_δ. Предположим обратное, тогда существует такое $t_0 \in [0, 1]$, что $\| \Phi_{\eta_0}(t_0) \| = \delta$, но в таком случае в силу леммы 2 разд. 4.4 имеем $L(c_0) + L(H_{\eta_0}) \geqslant 2\delta$, что противоречит (2). Тем самым $\eta_0 = 1$. Итак, мы показали, что гомотопия H может быть полностью поднята в U_δ. В частности, $H_1 = c_1$ поднимается в путь Φ_1, соединяющий 0 с $t_0 v$.

Так как пути в U_δ с начальными точками p, q, переходящие при отображении $\exp_p$ соответственно в c_1 и в часть qr геодезической c_0, определяются однозначно, то должно быть $\Phi_1(t) = 2tw$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\Phi_1(t) = [1 - (2t - 1)(1 - t_0)]\, v$ при $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. При $t = \frac{1}{2}$ получаем, в частности, $\Phi_1\left(\frac{1}{2}\right) = v = w$, и полученное противоречие доказывает лемму.

Замечания

(i) Пусть M — дифференцируемое многообразие. Кусочно дифференцируемые пути c_0, c_1: $[\alpha, \beta] \to M$ с началом p и концом q в том и только том случае (p, q)-гомотопны, если они гомотопны в общем топологическом смысле при фиксированных начальной и конечной точках, т. е. если существует, как выше, связывающая c_1 с c_2 гомотопия $\tilde{H}$, предполагаемая лишь непрерывной, без дальнейших требований дифференцируемости. Чтобы это доказать, достаточно аппроксимировать непрерывное отображение $\tilde{H}$: $[\alpha, \beta] \times [0, 1] \to M$ с произвольной точностью (p, q)-гомотопией H, которая кусочно дифференцируема, т. е. для H существуют такие числа $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_l = 1$, что $H|_{[t_{\nu-1}, t_\nu] \times [s_{\mu-1}, s_\mu]}$ дифференцируемо при $1 \leqslant \nu \leqslant k$, $1 \leqslant \mu \leqslant l$

и $\rho(\tilde{H}(t, s), H(t, s)) < \varepsilon$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$, $s \in [0, 1]$ по отношению к некоторой римановой метрике на M, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Пусть $P = [\alpha, \beta] \times [0, 1]$ и $\varepsilon' > 0$ не превосходит нижнюю границу значений радиуса выпуклости r на компактном множестве $\tilde{H}(P) \subset M$, кроме того, пусть $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$. Отображение $P \times P \to \mathbb{R}$, заданное формулой $(a, a') \to \rho(\tilde{H}(a), \tilde{H}(a'))$, равномерно непрерывно, поэтому существует такое $\delta > 0$, что $\rho(\tilde{H}(a), \tilde{H}(a')) < \varepsilon'$ для всех $a, a' \in P$, удовлетворяющих неравенству $\| a - a' \| < \delta$. Выберем числа $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \beta$ и $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_l = 1$ таким образом, чтобы пути $c_0|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$, $c_1|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ были дифференцируемы и чтобы было $(t_\nu - t_{\nu-1})^2 + (s_\mu - s_{\mu-1})^2 < \delta^2$ при $1 \leqslant \nu \leqslant k$, $1 \leqslant \mu \leqslant l$. Построим кусочно дифференцируемые пути H_{s_μ}: $[\alpha, \beta] \to M$, полагая $H_{s_\mu}|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ равным кратчайшей геодезической $[t_{\nu-1}, t_\nu] \to M$, соединяющей $\tilde{H}(t_{\nu-1}, s_\mu)$ с $\tilde{H}(t_\nu, s_\mu)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant l,\ 1 \leqslant \nu \leqslant k)$. При этом, очевидно, $H_0 = c_0$, $H_1 = c_1$. Наконец, построим H, полагая $H|_{t \times [s_{\mu-1}, s_\mu]}$ равным кратчайшей геодезической $[s_{\mu-1}, s_\mu] \to M$ с началом $H_{s_{\mu-1}}(t)$ и концом $H_{s_\mu}(t)$ $(t \in [\alpha, \beta],\ 1 \leqslant \mu \leqslant l)$. В силу разд. 5.1 и 5.2, а также свойств отображения $\pi \times \exp$, H обладает всеми требуемыми свойствами. В частности, пути $s \to H(t, s)$ кусочно дифференцируемы и даже являются „ломаными геодезическими“.

7.2. Теорема Адамара — Картана

В этом параграфе выясняется топологическое строение полных римановых многообразий неположительной кривизны.

Связное дифференцируемое многообразие M называется *односвязным*, если любой замкнутый кусочно дифференцируемый путь c_0: $J \to M$ с началом и концом в $p \in M$ стягиваем в точку p, т. е. (p, p)-гомотопен тривиальному пути c_1: $J \to M$, заданному формулой $c_1(t) = p$. Легко видеть, что M односвязно в том и только том случае, если любые два кусочно дифференцируемых пути c_0, c_1: $J \to M$ с началом p и концом q являются (p, q)-гомотопными в M (см. замечание (i) разд. 7.1).

Точка p связного риманова многообразия M называется *полюсом* M, если экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на всем M и везде имеет максимальный ранг. Если на M существует полюс, то из утверждения (b') разд. 5.3 следует, что M полно.

Лемма

Усл. *M — односвязное n-мерное риманово многообразие, p — полюс M.*

Утв. *Экспоненциальное отображение* $\exp_p$: $M_p \to M$ *есть диффеоморфизм, и, следовательно, M диффеоморфно* $\mathbb{R}^n$.

Док. Так как $\exp_p$ — локальный диффеоморфизм, сюръективный в силу полноты M, то остается доказать, что $\exp_p$ инъективно.

Предположим, что существуют векторы v, $w \in M_p$, для которых $\exp v = \exp w = q$ и $v \neq w$. Положим в условии леммы разд. 7.1, что $t_0 = 1$, $c_0(t) = \exp(tv)$, $c_1(t) = \exp(2tw)$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $c_1(t) = q$ при $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Так как M односвязно, существует (p, q)-гомотопия H: $[0, 1] \times [0, 1] \to M$, связывающая c_0 с c_1. Поскольку $\exp_p$ определено на всем M_p и везде имеет максимальный ранг, по лемме разд. 7.1 для любого $\varepsilon > 0$ и некоторого $s_0 \in [0, 1]$ выполнено неравенство $L(c_0) + L(H_{s_0}) \geqslant 2\varepsilon$. Но отображение $s \to L(H_s)$ непрерывно по самому определению (p, q)-деформации на римановом многообразии, и, значит, функция $L(H_s)$ ограничена при $s \in [0, 1]$, а полученное противоречие доказывает лемму.

Следующая ниже теорема была доказана Ж. Адамаром для поверхностей, а позже обобщена Э. Картаном на римановы многообразия высших размерностей.

Теорема (Ж. Адамар, Э. Картан)

Усл. *M — полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$; риманова кривизна $K_\sigma \leqslant 0$ для всех касательных к M плоскостей σ.*

Утв. *Для каждой $p \in M$ отображение* $\exp_p$: $M_p \to M$ *есть диффеоморфизм. В частности, M диффеоморфно* $\mathbb{R}^n$.

Док. Согласно предложению (a′) (теорема Морса — Шенберга), отображение $\exp_p$ имеет максимальный ранг на всем M_p при всех $p \in M$. Следовательно, каждая точка M является полюсом и выполнены предположения леммы, откуда и следует требуемое утверждение.

Замечания

(i) Покажите, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ односвязно, также как сфера S^n при $n \geqslant 2$ и проективные пространства $P^n(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{H})$, $P^2(\mathrm{Ca})$ (см. замечание (V) разд. 1.7).

Пусть M — связное дифференцируемое многообразие и $p \in M$. Классы эквивалентности по отношению „(p, p)-гомотопность“ во множестве Ω_{pp} всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$ с началом и концом в p составляют группу $\pi_1(M, p)$. А именно,

композицией путей является их последовательное прохождение, а обратным элементом — путь с противоположной ориентацией. Для другой точки $q \in M$ получаем группу $\pi_1(M, q)$; любой (p, q)-гомотопический класс кусочно дифференцируемых путей, связывающих p с q, определяет изоморфизм $\pi_1(M, p) \to \pi_1(M, q)$. Таким образом, группа $\pi_1(M) \cong \pi_1(M, p)$ не зависит от p, она называется *фундаментальной группой* M. В частности, M односвязно в том и только том случае, если $\pi_1(M) \cong 1$.

Покажите, что для связных дифференцируемых многообразий M, N имеет место $\pi_1(M \times N) \cong \pi_1(M) \times \pi_1(N)$.

С помощью фундаментальной группы можно классифицировать накрытия. Пусть $\pi\colon \hat{M} \to M$ — дифференцируемое накрытие (см. замечание (V) разд. 1.7). Дифференцируемое накрытие $\tilde{\pi}\colon \tilde{M} \to M$ называется эквивалентным π, если существует диффеоморфизм $f\colon \tilde{M} \to \hat{M}$, сохраняющий слои, т. е. такой, что $\pi \circ f = \tilde{\pi}$. Если $\tilde{M} = M$, то π называется *преобразованием накрытия*. Теорема о классификации накрытий состоит в следующем: для каждого класса сопряженных подгрупп Γ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ существует в точности один класс эквивалентных дифференцируемых накрытий $\hat{M} \to M$, причем $\hat{M}$ связно, $\pi_1(\hat{M}) \cong \Gamma$ и слой над точкой $p \in M$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов смежности $\pi_1(M)$ по Γ. Таким способом описываются с точностью до эквивалентности все дифференцируемые накрытия $\hat{M} \to M$, для которых $\hat{M}$ связно. Если Γ — инвариантная подгруппа $\pi_1(M)$, то соответствующее накрытие $\hat{M} \to M$, для которого $\pi_1(\hat{M}) \cong \Gamma$, называется главным или регулярным. В этом случае группа $\pi_1(M)/\Gamma$ действует на $\hat{M}$, как группа преобразований накрытия, и тем самым действует на слое (или, что то же самое, на самой себе), как группа левых сдвигов. Если $\Gamma = \pi_1(M)$, то $\hat{M} = M$, а при $\Gamma = 1$ получаем *универсальное накрытие* $\pi\colon \hat{M} \to M$ с односвязным накрывающим многообразием $\hat{M}$ (по этому поводу см. также замечание (iii)).

Покажите, что если M компактно и $\pi_1(M)/\Gamma$ конечна, то и $\hat{M}$ компактно, и обратно.

Дифференцируемое накрытие $\mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, заданное формулой $t \to e^{2\pi i t}$, универсально, поэтому $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел.

Следовательно, для n-мерного тора имеем $\pi_1(T^n) = \pi_1(S^1 \times \ldots \times S^1) \cong \mathbb{Z}^n$. Двулистное накрытие $S^n \to P^n(\mathbb{R})$ (замечание (v) разд. 1.7) при $n \geqslant 2$ универсально, так как при этом условии S^n односвязна, поэтому

$$\pi_1(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (n \geqslant 2) \quad \text{и} \quad \pi_1(P^1(\mathbb{R})) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Простыми примерами дифференцируемых многообразий с неабелевой фундаментальной группой являются компактные ориентируемые поверхности M_g^2 рода $g \geqslant 2$. Фундаментальная группа такой поверхности $\pi_1(M_g^2)$ порождается $2g$ элементами $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ с единственным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots$ $\ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Пусть $\hat{M} \to M_g^2$ — универсальное накрытие, тогда $\hat{M}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, потому что $\pi_1(M_g^2)$ — группа бесконечного порядка и, следовательно, $\hat{M}$ некомпактно и односвязно (см. также замечание (v)).

(ii) Покажите, что полюсы полного риманова многообразия образуют замкнутое множество, возможно пустое (например, на $M = S_0^n$ при $n \geqslant 2$); может случиться, что все точки M — полюсы, как в предыдущей теореме (примером служит $\mathbb{R}^n$). Покажите, что точка 0 является единственным полюсом гиперболоида вращения $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$, где $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$.

Часто полюсами называют те точки $p \in M$, для которых отображение $\exp_p$: $M_p \to M$ инъективно, т. е. все исходящие из p геодезические c суть кратчайшие между p и любой точкой c. Полюсы в этом более сильном смысле (см. замечание (iii) разд. 5.3) суть точки p, для которых $d_p = \infty$, где d: $M \to \hat{\mathbb{R}}$ обозначает, как в разд. 5.4, радиус инъективности, т. е. расстояние от p до соответствующего места раздела. Так как d — непрерывное отображение, то полюсы в этом смысле образуют замкнутое в M подмножество множества полюсов, определенного выше.

(iii) Пусть M — связное полное риманово многообразие. Покажем, что для любых точек p, $q \in M$ и любого (p, q)-гомотопического класса путей из Ω_{pq} существует геодезическая c: $[0, 1] \to M$, соединяющая p с q и принадлежащая этому гомотопическому классу. Если $\mu \geqslant 0$ — точная нижняя граница длин всех путей заданного (p, q)-гомотопического класса, то в нем существуют пути c_i, для которых $\lim\limits_{i \to \infty} L(c_i) = \mu$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что все c_i принадлежат компактному метрическому шару $W = \bar{B}_{\mu+\varepsilon}(p)$ радиуса $\mu + \varepsilon$ с центром в p. Обозначая через $d_W (> 0)$ элементарную длину W, найдем натуральное число k и такие числа $0 = t_1^0 < \ldots < t_i^j < \ldots < t_i^k = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что $L(c_i|_{[t_i^{j-1}, t_i^j]}) = \frac{L(c_i)}{k} \leqslant \delta < d_W$ для всех i и $j = 1, \ldots, k$. Поскольку $[0, 1]$ и W компактны, найдется такая последовательность i_l индексов i, что числа $t_{i_l}^j$ сходятся при $l \to \infty$ к некоторым $t^j \in [0, 1]$ и, следовательно, $c_{i_l}(t_{i_l}^j)$ — к некоторым точкам $c^j \in W$ $(j = 1, \ldots, k)$. Построим в Ω_{pq} ломаную геодезическую c: $[0, 1] \to M$, полагая $c|_{[t^{j-1}, t^j]}$ $(j = 1, \ldots, k)$ равной однозначно определенной кратчайшей геоде-

зической $[t^{l-1}, t^l] \to M$, соединяющей c^{l-1} с c^l. Проверьте, что c принадлежит тому же (p, q)-гомотопическому классу, в котором были выбраны c_i, и что $L(c) = \mu$. Отсюда нетрудно заключить, что c — геодезическая, так как в противном случае можно было бы найти близкий к c более короткий путь, принадлежащий тому же (p, q)-гомотопическому классу.

Геодезическую c в (p, q)-гомотопическом классе путей из Ω_{pq} можно проще получить с помощью абстрактной конструкции универсального накрытия $\pi\colon \hat{M} \to M$. В этой конструкции можно, зафиксировав p, взять в качестве слоя над q в $\hat{M}$ множество всех (p, q)-гомотопических классов. Топология на $\hat{M}$ определяется следующими системами окрестностей для точек $\hat{q} \in M$. Зафиксируем путь $c \in \hat{q}$ и окрестность U точки $q = \pi(\hat{q})$. Рассмотрим всевозможные пути c' с началом в q и концом в $q_1 \in U$, целиком лежащие в U. Пусть c_1 — композиция c с таким путем c'; символом $\hat{q}_1$ обозначим (p, q_1)-гомотопический класс, содержащий c_1. По определению классы $\hat{q}_1$, соответствующие всевозможным c', составляют окрестность $\hat{q}$ в $\hat{M}$. Меняя U и c, получаем полную систему окрестностей $\hat{q}$. Покажите, что по отношению к этой топологии π является локальным диффеоморфизмом, канонически индуцирующим на $\hat{M}$ структуру связного полного риманова многообразия, причем π оказывается дифференцируемым изометрическим накрытием (см. также замечание (v) разд. 5.3). Далее, $\hat{M}$ односвязно, а потому накрытие $\pi\colon \hat{M} \to M$ универсально.

Обозначим через $\hat{p}$ класс гомотопных нулю путей, для которых $\pi(\hat{p}) = p$, т. е. путей, (p, p)-гомотопных тривиальному пути $t \to p$. Тогда существует геодезическая $\hat{c}\colon [0, 1] \to \hat{M}$, соединяющая $\hat{p}$ с $\hat{q}$, и $c = \pi \circ \hat{c}$ есть геодезическая в M, принадлежащая $\hat{q}$ и соединяющая p с q.

В дополнение к предыдущему рассуждению покажем, что фундаментальная группа $\pi_1(M) \cong \pi_1(M, p)$ действует на $\hat{M}$ как группа изометрических преобразований накрытия, а именно элемент $f \in \pi_1(M, p)$ точке $\hat{q} \in \hat{M}$ ставит в соответствие (p, q)-гомотопический класс композиции некоторого пути из f с путем из $\hat{q}$. Действие $\pi_1(M)$ на $\hat{M}$ свободно, т. е. каждая точка $\hat{q}$ имеет такую окрестность V в $\hat{M}$, что для любых двух различных элементов $f_1, f_2 \in \pi_1(M, p)$ пересечение $f_1(V) \cap f_2(V) = \varnothing$. В частности, никакой элемент $\pi_1(M)$, отличный от единичного, не имеет неподвижных точек на $\hat{M}$. Обратно, если на римановом многообразии $\hat{M}$ свободно действует некоторая дискретная группа Γ, составляющая подгруппу группы всех изометрий $\hat{M}$ на себя, то множество $M = \hat{M}/\Gamma$ всех орбит $\{f(p)\colon f \in \Gamma\}$ с фактортопологией, заданной естественной проекцией $\pi\colon \hat{M} \to M$, имеет структуру риманова многообразия,

при которой π оказывается изометрическим дифференцируемым накрытием. Если при этом $\widehat{M}$ односвязно, то $\pi_1(M) \cong \Gamma$.

Вообще говоря, в каждом (p, q)-гомотопическом классе путей в Ω_{pq} существует более чем одна и даже бесконечное множество геодезических, как это видно на примере $M = S^2$ (см. также замечание (iii) разд. 5.3). Если, однако, p — полюс M, то в каждом (p, q)-гомотопическом классе Ω_{pq} существует в точности одна геодезическая. В самом деле, в доказательстве нуждается только единственность, а она получается либо аналогично рассуждениям леммы этого раздела, либо прямым применением той же леммы к построенному выше универсальному накрытию $\widehat{M} \to M$.

Отсюда получается другая, „конкретная" конструкция универсального накрытия. Пусть $\widehat{M}_p$ — касательное пространство M_p в точке p с индуцированной из M отображением $\exp_p$ римановой метрикой. Тогда, как мы сейчас покажем, для полюса $p \in M$ отображение $\exp_p$: $\widehat{M}_p \to M$ есть изометрическое дифференцируемое накрытие. Для этого достаточно проверить, что прообраз $\exp_p^{-1}(U)$ произвольной односвязной окрестности $U \subset M$ распадается на компоненты связности, каждая из которых при отображении $\exp_p$ диффеоморфно отображается на U. Пусть $\tilde{U}$ — такая компонента связности, v_1, $v_2 \in \tilde{U}$, $v_1 \neq v_2$ и $\exp_p(v_1) = \exp_p(v_2) = q$. Обозначим через $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ пути в $\tilde{U}$, заданные формулами $t \to tv_1$, $t \to tv_2$, $t \in [0, 1]$, и положим $c_1 = \exp_p \circ \hat{c}_1$, $c_2 = \exp_p \circ \hat{c}_2$, тогда c_1, c_2 — геодезические в M с общим началом p и общим концом $q \in U$. Построим в $\widehat{M}_p$ дифференцируемый путь ψ, соединяющий точки v_1, v_2, и обозначим через χ композицию путей $\hat{c}_1$, ψ, $\hat{c}_2^{-1}$, где $\hat{c}_2^{-1}(t) = \hat{c}_2(1-t)$, $t \in [0, 1]$. Тогда в силу односвязности $\widehat{M}_p$ путь $\exp_p \circ \chi$ является (p, p)-гомотопным нулю в M, а в силу односвязности U путь $\exp_p \psi$ соответственно (q, q)-гомотопным нулю в U. Поэтому геодезические c_1, c_2 являются (p, q)-гомотопными, вопреки доказанному выше. Итак, $\exp_p$: $\widehat{M}_p \to M$ есть накрытие. Так как $M_p \cong \mathbb{R}^n$ односвязно, $\exp_p$ есть универсальное накрытие, являющееся в то же время изометрическим отображением римановых многообразий $\widehat{M}_p \to M$. Тем самым построена конкретная геометрическая реализация ранее указанной абстрактной конструкции.

(iv) Пусть M — полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$ с везде неположительной римановой кривизной. Так как универсальное накрывающее $\widehat{M}$ по теореме Адамара — Картана диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ и, в частности, стягиваемо по себе, то M есть пространство Эйленберга — Маклейна типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = \pi_1(M)$ — фундаментальная группа M. В этом случае группы когомологий M изоморфны группам когомологий тех же размерностей абстрактной

группы π, $H^*(M, \mathbb{Z}) \cong H^*(\pi, \mathbb{Z})$. Отсюда следует, что каждый отличный от единицы элемент $\pi_1(M)$ имеет бесконечный порядок. Действительно, элемент конечного порядка порождает циклическую подгруппу $\Gamma \subset \pi_1(M)$, которой в силу (i) соответствует изометрическое накрытие $\tilde{M} \to M$, для которого $\pi_1(\tilde{M}) \cong \Gamma$. Так как $\tilde{M}$ — n-мерное многообразие, то $H^i(\tilde{M}, \mathbb{Z}) = H^i(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$ при всех $i > n$, что приводит к противоречию, поскольку последовательность групп когомологий конечной группы, как можно показать, не обрывается.

Тот же результат можно получить прямым геометрическим путем. Для этого рассмотрим риманово универсальное накрывающее $\tilde{M}$, на котором, согласно (i) и (iii), $\pi_1(M)$ свободно действует как группа изометрических преобразований накрытия. Пусть существует элемент $f \in \pi_1(M)$ конечного порядка k, $f \neq 1$, при этом существует нетождественная периодическая изометрия f: $\tilde{M} \to \tilde{M}$, для которой $f^k = \mathrm{id}$. Возьмем точку $p_0 \in \tilde{M}$ и положим $p_i = f^i(p_0)$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, тогда множество $\{p_0, \ldots, p_{k-1}\}$ инвариантно относительно f. Поскольку $\tilde{M}$ — полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны, каждая точка $p \in \tilde{M}$ является полюсом, так что $\exp_p$ инъективно. Из леммы этого раздела с учетом замечания (ii) разд. 5.2 и сравнивая индексную форму, как в разд. 6.1, получаем, что все метрические шары в $\tilde{M}$ выпуклы и просты. Для некоторого $\eta > 0$ и $p \in \tilde{M}$ точки $p_0, \ldots, p_{k-1}$ принадлежат компактному шару $\bar{B}_\eta(p)$. Таким образом, множество A всех точек q, для которых $f^i(q) \in \bar{B}_\eta(p)$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$, не пусто и компактно, и непрерывная функция $q \to \rho(q, f(q))$ достигает минимума $\mu \geqslant 0$ в некоторой точке $q_0 \in A$. Мы покажем, что $\mu = 0$, а это будет означать, что q_0 — неподвижная точка f, вопреки предположению, что $\pi_1(M)$ свободно действует на $\tilde{M}$. Из этого противоречия и будет следовать требуемое утверждение. Если $\mu > 0$, то угол треугольника с вершинами $q_0, f(q_0), f^2(q_0)$ при вершине $f(q_0)$ меньше π, потому что в противном случае все точки $f^i(q_0)$ лежали бы на некоторой нетривиальной периодической геодезической, что несовместимо с инъективностью $\exp_{q_0}$. Возьмем точку $\tilde{q}$ на кратчайшей, соединяющей q_0 с $f(q_0)$, отличную от ее концов, тогда ввиду выпуклости всех метрических шаров имеем

$$\rho(\tilde{q}, f(\tilde{q})) < \rho(\tilde{q}, f(q_0)) + \rho(f(q_0), f(\tilde{q})) = \rho(q_0, f(q_0)) = \mu,$$

что противоречит определению μ.

(v) Пусть M — полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$ постоянной кривизны $K_\sigma = \varkappa \leqslant 0$. Рассмотрим для $\varkappa < 0$ n-мерное гиперболическое пространство $\tilde{M} = U_\varkappa$, а при $\varkappa = 0$ евклидово пространство $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ (см. замечание (iv) разд. 3.6). Если M одно-

связно, $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ и $\iota\colon M_p \to \tilde{M}_{\tilde{p}}$—линейная изометрия, то экспоненциальные отображения $\exp_p$, $\exp_{\tilde{p}}$ инъективны и $\exp_{\tilde{p}} \circ \iota \circ \exp_p^{-1}$, согласно замечанию (i) разд. 6.3, есть изометрия M на $\tilde{M}$. Следовательно, риманово универсальное накрывающее $\tilde{M}$ многообразия M всегда изометрически диффеоморфно (и, значит, изометрично в смысле расстояния) стандартному пространству той же кривизны, т. е. гиперболическому или евклидову пространству.

В случае если M не обязательно односвязно, также известны некоторые результаты о строении M, по крайней мере при $\varkappa = 0$. Риманово многообразие нулевой кривизны называется плоским. Такое многообразие M имеет в качестве изометрического универсального накрывающего $\mathbb{R}^n$ и может быть, согласно (iii), получено как пространство орбит $\mathbb{R}^n$ относительно группы $\pi_1(M)$, элементы которой отождествляются с изометрическими преобразованиями накрытия $\mathbb{R}^n$, т. е. с евклидовыми движениями $\mathbb{R}^n$ (см. замечание (iv) разд. 3.2). Так как при этом $\pi_1(M)$ действует свободно, то получаются движения без неподвижных точек.

Рассмотрим эндоморфизм голономии $\varphi\colon \pi_1(M) \to O(n)$ (см. замечание (v) разд. 2.6). Если M компактно, то, как можно показать, образ φ в $O(n)$, т. е. группа голономии Φ риманова многообразия M, конечен и ядро φ есть максимальная нормальная подгруппа $\pi_1(M)$, изоморфная n-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, фундаментальная группа плоского риманова многообразия M есть конечное расширение свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$. Точной последовательности групп $0 \to \mathbb{Z}^n \to \pi_1(M) \to \Phi \to 1$ соответствуют римановы накрытия $\mathbb{R}^n \to T^n \to M$. Итак, плоское компактное риманово многообразие всегда имеет n-мерный тор T^n в качестве конечного изометрического накрывающего, причем группа голономии M действует на T^n как группа изометрических преобразований накрытия. Для любой конечной группы Φ существует плоское компактное риманово многообразие, имеющее Φ своей группой голономии. В каждой размерности существует лишь конечное число не гомеоморфных друг другу плоских компактных римановых многообразий.

Единственная компактная ориентируемая поверхность M, допускающая плоскую риманову метрику, есть тор T^2, как это вытекает из предыдущих соображений и замечания (i). Это также легко следует из теоремы Гаусса — Бонне, согласно которой для любой компактной ориентируемой поверхности M имеет место $\int_M K\omega = 2\pi\chi$, где ω — форма площади и χ — эйлерова характеристика поверхности M. Если $K = 0$, то и $\chi = 0$, поэтому поверхность M диффеоморфна T^2.

При $\varkappa<0$ фундаментальная группа $\pi_1(M)$ представляется как группа изометрических преобразований накрытия, свободно действующая на n-мерном гиперболическом пространстве $U_\varkappa$, таким образом, M изоморфно факторпространству стандартного пространства $U_\varkappa$. Несмотря на такое достаточно явное описание гиперболических пространств постоянной кривизны, общей классификации всевозможных диффеоморфных типов таких пространств еще не существует. Ряд дальнейших сведений по этому вопросу можно найти в цитируемой ниже книге Вольфа (см. замечание (iii) разд. 7.3). Любая компактная ориентируемая поверхность M_g^2 рода $g\geqslant 2$ диффеоморфна пространству орбит некоторой группы изометрий, свободно действующей на гиперболической плоскости, как это доказывается в теории функций (см. замечание (iv) разд. 3.6). Поэтому на M_g^2 существует риманова метрика постоянной отрицательной кривизны $\varkappa$, которая может быть задана произвольно.

(vi) Отметим в заключение одно свойство фундаментальной группы полного риманова многообразия, кривизна которого везде отрицательна.

Пусть M полно, $\dim M\geqslant 2$, $K_\sigma\leqslant\varkappa\leqslant 0$ для всех касательных плоскостей σ, и пусть M односвязно. Если $\triangle=(c_0, c_1, c_2)$ — треугольник в M с углами γ_i при вершинах p_i, то существует треугольник $\tilde{\triangle}(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ с теми же длинами сторон $L(\tilde{c}_i)=L(c_i)$ в гиперболической плоскости $U_\varkappa$ (при $\varkappa<0$) или в $\mathbb{R}^2$ (при $\varkappa=0$) (см. замечание (i) разд. 6.4). Обозначим через $\tilde{\gamma}_i$ углы треугольника $\tilde{\triangle}$, соответствующие углам $\triangle$. Так как $\exp_{p_i}\colon M_{p_i}\to M$ есть диффеоморфизм, из теоремы сравнения Рауха непосредственно вытекает (как и в части (а) доказательства теоремы Топоногова), что $\gamma_i\leqslant\tilde{\gamma}_i$ и, более того, $\gamma_i<\tilde{\gamma}_i$, если $K_\sigma<\varkappa\leqslant 0$ и треугольник $\triangle$ — невырожденный, т. е. не все его вершины лежат на одной геодезической (см. замечание (iv) разд. 6.4). Сравнивая с $\mathbb{R}^2$, находим, что сумма углов $\triangle$ не больше π, и притом строго меньше π, если $K_\sigma<0$ и $\triangle$ — невырожденный.

Четыре попарно различные точки p_0, p_1, p_2, p_3 определяют геодезический четырехугольник $\square=(c_0, c_1, c_2, c_3)$ в M, где $c_i\colon [0, 1]\to M$ — геодезическая с $c_i(0)=p_i$, $c_i(1)=p_{i+1}$, считая индексы по модулю 4. Угол γ_i четырехугольника $\square$ при вершине p_i по определению равен $\pi-\measuredangle(\dot{c}_{i-1}(1), \dot{c}_i(0))$. Покажем, что сумма углов $\square$ не превосходит 2π и строго меньше 2π, если $K_\sigma<0$ и $\square$ — невырожденный, т. е. не все четыре его вершины лежат на одной геодезической. Для этого разобьем $\square$ диагональю на треугольники с вершинами p_0, p_1, p_2 и p_2, p_3, p_4, а затем примем во внимание, что для любых трех ненулевых векторов $u, v, w\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\measuredangle(u, w)\leqslant\measuredangle(u, v)+\measuredangle(v, w)$, как это следует из неравенства треугольника на сфере S^{n-1}.

Последнее рассуждение имеет следующее непосредственное приложение. Образ невырожденной геодезической c: $\mathbb{R} \to M$ назовем прямой в M; изометрию f: $M \to M$ назовем трансляцией, если на M существует прямая C, остающаяся инвариантной относительно f, т. е. $f(C) = C$. Пусть везде на M выполняется $K_\sigma < 0$. Покажем, что каждая трансляция f оставляет инвариантной в точности одну прямую C, так что в M нет „параллельных" прямых. Допустим, что C' — отличная от C прямая, для которой $f(C') = C'$. Возьмем точки $p \in C$, $p' \in C'$ и положим $q = f(p) \in C$, $q' = f(p') \in C'$. В геодезическом четырехугольнике $\square$ с вершинами (p, q, q', p') углы при вершинах p, q, соответственно p', q', дают в сумме π, так как f — изометрия, а C и C' инвариантны относительно f, поэтому сумма углов $\square$ равна 2π, вопреки доказанному выше.

Пусть теперь Γ — группа изометрий, свободно действующая на M (см. замечание (iii)). Если Γ — абелева группа, содержащая трансляцию f, то Γ есть бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$. В самом деле, если C — прямая в M, инвариантная относительно f и $g \in \Gamma$, то $g(C) = g(f(C)) = f(g(C))$. Поэтому прямая $g(C)$ также инвариантна относительно f, откуда $g(C) = C$, поскольку мы доказали выше, что в M может быть не более одной прямой, инвариантной относительно f. Таким образом, все не тождественные изометрии группы Γ суть трансляции с одной и той же инвариантной прямой C. На прямой C группа Γ свободно действует как группа сдвигов, откуда и следует требуемое утверждение.

Пусть теперь M не обязательно односвязно (но компактно) и имеет всюду отрицательную кривизну. Следующее утверждение вытекает из предыдущих рассуждений: каждая абелева подгруппа Γ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ — бесконечная циклическая. Для доказательства рассмотрим риманово универсальное накрытие $\hat{M} \to M$; согласно замечанию (iii), $\pi_1(M)$ свободно действует на $\hat{M}$ как группа изометрических преобразований накрытия. Мы покажем, что все преобразования накрытия суть трансляции, откуда и будет следовать сформулированное выше предложение.

Сначала сделаем замечание общего характера. Пусть M — дифференцируемое многообразие, c_0, c_1: $[\alpha, \beta] \to M$ — кусочно дифференцируемые замкнутые пути, $c_0(\alpha) = c_0(\beta) = p_0$, $c_1(\alpha) = c_1(\beta) = p_1$. Непрерывное отображение H: $[\alpha, \beta] \times [0, 1] \to M$ называется свободной гомотопией, связывающей c_0 с c_1, если отображение H_s: $[\alpha, \beta] \to M$, заданное формулой $H_s(t) = H(t, s)$, — есть кусочно дифференцируемый замкнутый путь для каждого $s \in [0, 1]$ и, кроме того, $H_0 = c_0$, $H_1 = c_1$. При этом в случае риманова многообразия M опять предполагается, что функция длины $s \to L(H_s)$

непрерывна (см. разд. 7.1). Пути c_0 и c_1 называются *свободно гомотопными*, если существует свободная гомотопия, связывающая c_0 с c_1. „Свободная гомотопность" есть отношение эквивалентности во множестве Ω всех кусочно дифференцируемых замкнутых путей $[0, 1] \to M$. Если пути c_0 и c_1 свободно гомотопны и $p_0 = p_1$, то c_0 и c_1 не обязательно (p_0, p_0)-гомотопны. Путь c_0 в том и только том случае (p_0, p_0)-гомотопен тривиальному пути $t \to p_0$, если c_0 принадлежит тривиальному классу свободной гомотопии, т. е. свободно гомотопен тривиальному пути $t \to p \in M$. Покажите, что каждый класс эквивалентности свободно гомотопных путей в Ω содержит периодическую геодезическую минимальной длины, если M — компактное многообразие (рассуждения аналогичны (iii)). Следует заметить, что для полных, но не компактных римановых многообразий последнее утверждение, вообще говоря, неверно, как это видно на примере гиперболоида вращения $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$.

Вернемся теперь к исходной ситуации. Зафиксируем $p \in M$ и отождествим $\pi_1(M)$ с $\pi_1(M, p)$. Если путь $c_0 \in \Omega$ представляет отличный от единичного класс (p, p)-гомотопии из $\pi_1(M)$, то c_0 свободно гомотопен нетривиальной периодической геодезической $c \in \Omega$. Прообраз c относительно проекции $\widehat{M} \to M$ есть прямая в $\widehat{M}$. В силу конструкции универсального накрывающего в (iii) эта прямая инвариантна относительно индуцированного c_0 преобразования накрытия f: $\widehat{M} \to \widehat{M}$. В самом деле, рассмотрим свободную гомотопию H, связывающую c_0 с c, положим $q = c(0) = c(1)$ и определим c_+, $c_- \in \Omega_{pq}$ по формулам $c_+(s) = H(0, s)$, $c_-(s) = H(0, 1-s)$. Тогда очевидно, путь c_0 является (p, p)-гомотопным композиции путей c_+, c, c_-. Итак, каждое преобразование накрытия есть трансляция, и наше исходное предложение доказано.

Рассмотрим в качестве примера произведение $M = M^2_{g_1} \times M^2_{g_2}$ двух компактных ориентируемых поверхностей $M^2_{g_1}$, $M^2_{g_2}$ родов $g_1, g_2 \geqslant 2$ с постоянной отрицательной кривизной (см. замечание (v) и определение произведения в замечании (vi) разд. 3.6). Метрика произведения имеет всюду кривизну $K_\sigma \leqslant 0$, но из только что полученного результата следует, что на M не может существовать никакой метрики строго отрицательной кривизны, так как $\pi_1(M)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}^2$ (см. (i) и (v)). Точно так же не может существовать метрики строго отрицательной кривизны на торе T^n.

Покажите, что фундаментальная группа $\pi_1(M)$ компактного риманова многообразия строго отрицательной кривизны не может быть абелевой.

Пусть M, N — компактные дифференцируемые многообразия, покажите, что на $M \times N$ не существует метрики строго отрицательной кривизны.

По вопросам, рассмотренным в этом разделе, см. Preissmann A., *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comm. Math. Helv., 15 (1943), 175–216. В этой же работе собран ряд известных к тому времени результатов глобальной римановой геометрии.

7.3. Кривизна и диаметр

Для полных римановых многообразий неположительной кривизны известно по крайней мере топологическое строение универсального накрывающего, которое диффеоморфно евклидову пространству. В случае положительной кривизны дело обстоит иначе, и мы подробно займемся этим вопросом в следующих разделах.

Пусть M — связное риманово многообразие и A — подмножество M. Число $\rho_A = \sup_{p,\, q \in A} \rho(p, q)$ называется *диаметром* A. Для компактного подмножества $A \subset M$ диаметр ρ_A конечен и существуют точки $p_0, q_0 \in A$, для которых $\rho_A = \rho(p_0, q_0)$, поскольку ρ — непрерывная функция.

Следующая теорема является обобщением классического результата Бонне о выпуклых поверхностях.

Теорема 1 (Мейерс С. Б.)

Усл. *M — полное риманово многообразие; $K_\sigma \geqslant \varkappa > 0$ для всех касательных к M плоскостей σ.*

Утв. *Для всех $p, q \in M$ выполнено неравенство*

$$\rho(p, q) \leqslant \rho_M \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{1}$$

Согласно части (c) теоремы Хопфа — Ринова (разд. 5.3), отсюда следует, что M компактно. Так как риманово универсальное накрывающее $\widehat{M}$ удовлетворяет вместе с M условиям теоремы, $\widehat{M}$ также компактно и, следовательно, $\pi_1(M)$ конечна (см. замечание (iv) разд. 5.3 и замечание (i) разд. 7.2).

Док. По теореме Хопфа — Ринова существует нормальная геодезическая c: $[0, \beta] \to M$, соединяющая p с q, для которой $L(c) = \rho(p, q)$. В силу разд. 4.5 геодезическая c не имеет сопряженных точек в $[0, \beta)$, и из теоремы Морса — Шенберга следует, что $\rho(p, q) = \beta \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, т. е. утверждение (1).

Пусть M — риманово многообразие, $\dim M \geqslant 2$ и δ — действительное число, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Кривизна M называется δ-*ограниченной*, если существует такое число $\mu > 0$, что

$$\delta\mu \leqslant K_\sigma \leqslant \mu \tag{2}$$

для всех касательных к M плоскостей σ.

Многообразия с 1-ограниченной кривизной суть пространства постоянной положительной кривизны μ („эллиптические пространственные формы").

При умножении метрического тензора g на положительное число λ все значения римановой кривизны K_σ делятся на λ (см., например, (22) разд. 3.6), и δ-ограниченное многообразие переходит опять в δ-ограниченное. В частности, риманову метрику M можно всегда нормировать так, чтобы везде выполнялось $\delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$. Если M компактно и везде $K_\sigma > 0$, то кривизна M δ-ограничена, где $\delta > 0$ (см. замечание (ii) разд. 3.6).

Верхняя граница в неравенстве (1) достигается для сферы $M = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ кривизны $\varkappa$, диаметр которой (в смысле внутренней метрики) равен $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Для любого другого риманова многообразия, удовлетворяющего условиям теоремы Мейерса, диаметр меньше $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, как это видно из следующей теоремы:

Теорема 2 (В. А. Топоногов)

Усл. *M полно; $K_\sigma \geqslant \varkappa > 0$ для всех касательных к M плоскостей σ;* $\rho_M = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$.

Утв. *M изометрически диффеоморфно сфере $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ кривизны $\varkappa$.*

Док. Зафиксируем точки $p, q \in M$, для которых $\rho(p, q) = \rho_M = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$.

(а) Покажем вначале, что каждая исходящая из p нормальная геодезическая c: $[0, \beta] \to M$ длины $\beta = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ имеет конец в точке q. Возьмем значение $t_0 \in (0, \beta)$, тогда для точки $r = c(t_0)$ имеем $t_0 = \rho(p, r)$. Пусть, далее, c_0 — нормальная геодезическая, соединяющая r с q, для которой $L(c_0) = \rho(r, q)$. Тогда $t_0 + L(c_0) = \rho(p, r) + \rho(r, q) \geqslant \rho(p, q)$. С другой стороны, в силу (6) разд. 6.4 имеем $\rho(p, r) + \rho(r, q) + \rho(q, p) \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, откуда $\rho(p, r) + \rho(r, q) \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}} - \rho(p, q) = \rho(p, q)$. Поэтому $t_0 + L(c_0) = \rho(p, q)$, композиция путей $c|_{[0, t_0]}$ и c_0 есть кратчайшая и, значит, нормальная геодезическая, которая должна совпасть с c. Следовательно, $c(\beta) = q$ (см. замечание (iii) разд. 4.4).

Из утверждения (а) вытекает, что отображение $\exp_p$ обратимо на открытом шаре $U \subset M_p$ радиуса $\beta = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ с центром в 0. В са-

мом деле, предположим, что $\exp|_U$ не инъективно, тогда существуют две различные нормальные геодезические c_1, c_2: $[0, \beta] \to M$, соединяющие p с q, и два числа t_1, $t_2 \in (0, \beta)$, для которых $c_1(t_1) = c_2(t_2)$. Ясно, что $t_1 = t_2$, так как в противном случае либо композиция путей $c_1|_{[0, t_1]}$, $c_2|_{[t_2, \beta]}$, либо композиция путей $c_2|_{[0, t_2]}$, $c_1|_{[t_1, 1]}$ была бы короче $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Но тогда композиция $c_1|_{[0, t_1]}$ и $c_2|_{[t_2, \beta]}$ есть кусочно нормальная геодезическая длины $\beta = \rho(p, q)$, соединяющая p с q, и в силу замечания (iii) разд. 4.4 является нормальной геодезической. Итак, c_1 и c_2 совпадают, вопреки предположению. Заметим еще, что из инъективности $\exp_p|_U$ следует, что $\exp_p|_U$ есть диффеоморфизм (см. замечание (iii) разд. 5.3).

(b) Пусть c: $[0, \beta] \to M$ — произвольная нормальная геодезическая длины $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ с началом p, покажем, что $K_\sigma = \varkappa$ для всех плоскостей $\sigma \in G_c$. Согласно (a), c есть кратчайшая, соединяющая p с q, тогда из замечания (ii) разд. 4.6 следует

$$\operatorname{Ind} c = 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ северный и южный полюсы сферы $\tilde{M} = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ кривизны $\varkappa$, через $\tilde{c}$ — нормальную геодезическую в $\tilde{M}$, соединяющую $\tilde{p}$ с $\tilde{q}$. Построим, как и в разд. 6.1, изоморфизм Φ: $\mathfrak{B}'_{\tilde{c}} \to \mathfrak{B}'_c$. Предположим, вопреки нашему утверждению, что существуют такие $t_0 \in [0, \beta]$ и $u \in M_{c(t_0)}$, для которых $\|u\| = 1$, $\langle u, \dot{c}(t_0)\rangle = 0$ и кривизна $K(u, \dot{c}(t_0)) > \varkappa$, в силу непрерывности можно считать при этом, что $t_0 \in (0, \beta)$. Тогда, согласно замечанию (iv) разд. 4.2, существует поле Якоби Y вдоль $\tilde{c}$, для которого $Y(0) = 0$, $Y(\beta) = 0$, $Y(t_0) = \tilde{u} = \Phi_{t_0}^{-1}(u)$. Из неравенства (7) разд. 6.1 следует прежде всего, что $I(Y, Y) \geqslant I(\Phi Y, \Phi Y)$, поскольку в данном случае выполнено предположение (1) разд. 6.1. Так как

$$K(u, \dot{c}(t_0)) = K(\Phi Y(t_0), \dot{c}(t_0)) > \varkappa = K(Y(t_0), \dot{\tilde{c}}(t_0)),$$

мы получаем в (8) разд. 6.1 вместо „$\geqslant$“ строгое неравенство, т. е. $I(Y, Y) > I(\Phi Y, \Phi Y)$. С другой стороны, $I(Y, Y) = 0$, так как $\tilde{c}$ — кратчайшая, и из предыдущего неравенства получается $\operatorname{Ind} c > 0$, что противоречит (3). Этим утверждение (b) доказано.

(c) Теперь мы можем доказать, что M изометрически диффеоморфно сфере $\tilde{M} = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ кривизны $\varkappa$. Пусть $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ — северный и южный полюсы $\tilde{M}$; $U \subset \tilde{M}_{\tilde{p}}$ — открытый шар радиуса $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ с центром в 0; $V \subset M_q$ — открытый шар радиуса $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ с центром в 0.

Построим произвольную линейную изометрию $\iota\colon \tilde{M}_{\tilde{p}} \to M_p$ и определим непрерывное отображение $h\colon \tilde{M} \to M$ по формуле $h(\tilde{r}) = \exp_p \circ \iota \circ (\exp_{\tilde{p}}|_U)^{-1}(\tilde{r})$ для $\tilde{r} \neq \tilde{q}$, $h(\tilde{q}) = q$. Согласно пункту (а), $h|_{\tilde{M}\setminus\{\tilde{q}\}}$ есть диффеоморфизм. Покажем, что этот диффеоморфизм изометричен. Пусть $v \in \tilde{M}_{\tilde{r}}$, положим $b = (\exp_{\tilde{p}}|_U)_*^{-1} v$. В силу (2) разд. 6.3 имеем $\|\exp_{\tilde{p}*} b\| = \|\exp_{p*} \iota_* b\|$, так как M имеет постоянную кривизну $\varkappa$ вдоль всех исходящих из p геодезических (см. пункт (b)). Тем самым $\|v\| = \|h_* v\|$ и h_* сохраняет норму. Из тождества $2\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$ видно, что h_* сохраняет также скалярное произведение, так что $h|_{M\setminus\{q\}}$ есть изометрический диффеоморфизм.

Остается доказать, что h является также дифференцируемым и изометрическим отображением и в окрестности $\tilde{q}$. Для этого построим произвольную линейную изометрию $\tilde{\iota}\colon M_q \to \tilde{M}_{\tilde{q}}$ и определим отображение $f\colon M \to \tilde{M}$ по формуле $f(r) = \exp_{\tilde{q}} \circ \tilde{\iota} \circ (\exp_q|_V)^{-1}(r)$ для $r \neq p$, $f(p) = \tilde{p}$. Отображение $f|_{M\setminus\{p\}}$ оказывается изометрическим диффеоморфизмом, точно так же, как $h|_{\tilde{M}\setminus\{\tilde{q}\}}$.

Нетрудно проверить, что $F = f \circ h\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ есть диффеоморфизм сферы $\tilde{M}$ на себя, сохраняющий расстояния. В самом деле, если $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in \tilde{M}\setminus\{\tilde{q}\}$ и $r_1, r_2 \in M\setminus\{p\}$, то, очевидно,

$$\rho(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = \rho(h(\tilde{r}_1), h(\tilde{r}_2)), \quad \rho(r_1, r_2) = \rho(f(r_1), f(r_2)). \tag{4}$$

Из соображений непрерывности равенства (4) распространяются все точки $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in M$, $\tilde{r}_1, r_2 \in M$, откуда получается $\rho(F(\tilde{r}_1), F(\tilde{r}_2)) = \rho(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ для всех $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in M$. Таким образом, F — ортогональное отображение евклидовой сферы на себя и, значит, изометрический диффеоморфизм, см. замечание (iv) разд. 4.2. Отображение $F^{-1} \circ f$ есть обратное h, так как $F^{-1} \circ f|_{M\setminus\{p\}}$ есть изометрический диффеоморфизм, отображающий $M\setminus\{p\}$ на $\tilde{M}\setminus\{\tilde{p}\}$, то h есть изометрический изоморфизм на $\tilde{M}\setminus\{\tilde{p}\}$ и, следовательно, h — изометрия.

Замечания

(i) Пусть M — полное многообразие, $\dim M = n$. Предположим, что для всех нормированных векторов $v \in TM$ кривизна Риччи $r(v) \geqslant (n-1)\varkappa > 0$ (см. разд. 3.6). Пользуясь результатом замечания (i) разд. 6.2, покажите, что в этом более слабом предположении остается справедливой оценка (1) теоремы 1.

Таким образом, полное риманово многообразие, кривизна Риччи которого ограничена снизу положительным числом, компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

Параболоид представляет пример полного некомпактного риманова многообразия положительной кривизны (см. замечание (viii) разд. 3.7).

(ii) Рассмотрим связное (не обязательно полное) риманово многообразие M. Пусть $p \in M$, $U_\varepsilon \subset M_p$ — открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в 0. Предположим, что U_ε целиком принадлежит области определения $\exp_p$ и что для всех плоскостей σ, касательных к M в точках $\exp_p(U_\varepsilon)$, выполнено неравенство $K_\sigma \geqslant \varkappa > 0$. Покажите, опираясь на лемму разд. 5.3, что при $\varepsilon > \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ многообразие M компактно.

(iii) Пусть M — полное риманово многообразие постоянной кривизны $K_\sigma = \varkappa > 0$. Тогда по теореме Майерса M компактно и фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечна. Покажем, что если M односвязно, то M изометрически диффеоморфно стандартному пространству той же кривизны $\varkappa$ — сфере $\tilde{M} = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$. Это предложение можно получить, сопоставляя теорему 2 этого раздела с теоремой разд. 7.7, согласно которой $\rho_M \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Более простое доказательство состоит в следующем. Возьмем точки $\tilde{p} \in \tilde{M}$ и $p \in M$ и построим линейную изометрию ι_0: $\tilde{M}_{\tilde{p}} \to M_p$. Тогда $f_0 = \exp_p \circ \iota_0 \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}$ есть изометрическое погружение в $\tilde{M}$ открытого шара $B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{p}) \subset \tilde{M}$ радиуса $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$ с центром $\tilde{p}$ (см. замечание (i) разд. 6.3). Пусть $\tilde{q} \in B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{p})$ и $\tilde{q} \neq \tilde{p}$. Положим $q = f_0(\tilde{q})$ и построим линейную изометрию ι_1: $\tilde{M}_{\tilde{q}} \to M_q$ по формуле $\iota_1 v = f_{0*} v$. Тогда отображение f_1: $\exp_q \circ \iota_1 \circ \exp_{\tilde{q}}^{-1}$ изометрически отображает $B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{q})$ в M, и по теореме единственности для изометрий имеем $f_0|_{B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{p}) \cap B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{q})} = f_1|_{B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{p}) \cap B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}}(\tilde{q})}$. Поскольку оба шара вместе покрывают всю сферу $\tilde{M}$, отображения f_0, f_1 задают изометрическое погружение f: $\tilde{M} \to M$. Так как $\tilde{M}$ и M компактны, а M односвязно, выполняются условия замечания (v) разд. 1.7, откуда получается, что f — диффеоморфизм. Таким образом, доказана и оставшаяся часть теоремы.

Из только что доказанного предложения следует, что для многообразия M постоянной кривизны $\varkappa > 0$ риманово универсальное накрывающее $\hat{M}$ изометрически диффеоморфно $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$, причем

фундаментальная группа $\pi_1(M)$ свободно действует на $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ как группа изометрических преобразований накрытия, т. е. в данном случае ортогональных отображений без неподвижных точек (кроме тождественного).

Из топологии известно, что при четном n всякое диффеоморфное отображение S^n на себя, сохраняющее ориентацию S^n, имеет неподвижные точки (см. разд. 7.7). Оправляясь от этого факта, покажите, что каждое компактное многообразие постоянной положительной кривизны $\varkappa$ изометрически диффеоморфно либо сфере $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$, либо проективному пространству $P^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}(\mathbb{R})$, для которого $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ служит римановым универсальным накрывающим (см. разд. 7.5).

Для нечетного n соответствующая классификация классов изометрии и связанный с ней вопрос, какие конечные группы могут свободно действовать на S^n, представляет трудную задачу, лишь недавно решенную Вольфом. Следует указать на раннюю основополагающую работу Хопфа (Hopf H., *Zum Clifford – Kleinschen Raumproblem*, Math. Ann., 95 (1926)), а также на весьма содержательную книгу Вольфа (Wolf J. A., *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill Co. (1967)). Некоторые сведения из этой области можно найти также в цитированной в конце § 1 книге Кобаяси – Номидзу.

Примером неодносвязного компактного риманова многообразия постоянной положительной кривизны является действительное проективное пространство $P^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, его фундаментальная группа $\mathbb{Z}_2$ свободно действует на сфере $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ (образующий элемент $\mathbb{Z}_2$ есть инволюция $a \to -a$). Приведем в качестве более общего построения так называемые линзовые пространства. Пусть p, q – взаимно простые натуральные числа. Циклическую группу q-го порядка $\mathbb{Z}_q$ можно представить как мультипликативную группу корней q-й степени из единицы $\left\{ e^{\frac{2\pi i \nu}{q}} \Big|_{0 \leqslant \nu \leqslant q-1} \right\}$, свободно действующую на S^3 по правилу $(z_1, z_2) \to \left(z_1 e^{\frac{2\pi i \nu}{q}}, z_2 e^{\frac{2\pi i \nu p}{q}} \right)$, где $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ описывается уравнением $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1$. Линзовое пространство $L(p, q)$ есть факторпространство по отношению к этой групповой операции с индуцированной римановой структурой.

Существуют также простые неабелевы группы ортогональных отображений, свободно действующих на S^3 (см. также замечание (iv)).

(iv) Если M — полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$ с δ-ограниченной кривизной, $\delta > 0$, т. е. M компактно и имеет везде положительную кривизну, то в случае нечетной размерности n о строении фундаментальной группы $\pi_1(M)$ известно немногое; в случае же четного n существует очень простое полное описание (см. разд. 7.5). Если $\delta > \frac{1}{4}$, то по теореме о сфере (см. разд. 7.8) риманово универсальное накрывающее $\widehat{M}$ многообразия M гомеоморфно сфере S^n. В этом случае методами алгебраической топологии (исследованием спектральной последовательности накрытия $S^n \to S^n/\Gamma$) можно показать, что каждая абелева подгруппа $\Gamma \subset \pi_1(M)$ циклична. Интересна нерешенная задача, поставленная Чжэнем: останется ли справедливым последнее утверждение, если отказаться от ограничений на δ. Достаточно рассмотреть накрытие $\widehat{M} \to \widehat{M}/\Gamma$ и, таким образом, можно считать, что $\Gamma \cong \pi_1(M)$ уже абелева. Однако $\widehat{M}$ может быть не гомеоморфно сфере S^n. Если n четно, то ответ положителен, как и в случае компактных многообразий строго отрицательной кривизны (см. замечание (vi) разд. 7.2). Если допустить, что каждая абелева подгруппа фундаментальной группы компактного риманова многообразия положительной кривизны — циклическая, то отсюда, например, во многих случаях следовало бы, что на произведении двух неодносвязных компактных многообразий не существует римановой метрики положительной кривизны.

7.4. Ориентируемые многообразия

Напомним сначала одно понятие линейной алгебры.

Пусть E — действительное n-мерное векторное пространство размерности n и τ: $E \to E$ — эндоморфизм, τ называется сохраняющим ориентацию, если $\det \tau > 0$. Сохраняющий ориентацию эндоморфизм, в частности, является изоморфизмом. Пусть E_1, E_2 — действительные векторные пространства равной размерности n, f: $E_1 \to E_2$, g: $E_2 \to E_1$ — линейные отображения, причем $g \circ f$ сохраняет ориентацию. Далее, пусть τ: $E_2 \to E_2$ — сохраняющий ориентацию изоморфизм, тогда и $g \circ \tau \circ f$: $E_1 \to E_1$ сохраняет ориентацию.

Установим во множестве всех упорядоченных базисов E следующее отношение эквивалентности: два упорядоченных базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ называются эквивалентными, или одинаково ориентированными, если существует сохраняющий ориентацию изоморфизм τ: $E \to E$, для которого $\tau e_i = \tilde{e}_i$. Класс эквивалентности одинаково ориентированных базисов называется ориентацией E. Существуют в точности две различные ориентации E при $n > 0$.

Пусть M — n-мерное многообразие. *Ориентацией* $\mathfrak{O}$ на M называется функция, сопоставляющая каждой точке $p \in M$ ориентацию $\mathfrak{O}_p$ касательного пространства M_p, „непрерывно зависящую от p" в следующем смысле:

для любой точки $p \in M$ существуют окрестность U точки p и непрерывные базисные поля $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{B}U$, такие, что для всех $q \in U$ базис $X_1|_q, \ldots, X_n|_q$ представляет ориентацию $\mathfrak{O}_q$ на M_q.

Многообразие M называется *ориентируемым*, если на M существует ориентация; M ориентируемо в том и только том случае, если ориентируема каждая компонента связности M; если таких компонент имеется k, то существует, при $n>0$, 2^k ориентаций. Ориентируемое дифференцируемое многообразие M вместе с заданной ориентацией на M называется *ориентированным многообразием*. Каждое параллелизуемое дифференцируемое многообразие M ориентируемо, так как в этом случае существуют даже глобально определенные базисные поля.

Пусть M — n-мерное ориентируемое дифференцируемое многообразие с ориентацией $\mathfrak{O}$; c: $[0, 1] \to M$ — непрерывный путь. Определим непрерывные базисные поля X_i: $[0, 1] \to TM$ вдоль c, $i = 1, \ldots, n$, т. е. такие поля, что $\pi \circ X_i = c$ и $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ составляют базис касательного пространства $M_{c(t)}$ при всех $t \in [0, 1]$, причем последовательность $X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)$ принадлежит ориентации $\mathfrak{O}_{c(t_0)}$ пространства $M_{c(t_0)}$. Тогда, как нетрудно убедиться, базисы $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ представляют при всех t ориентацию $\mathfrak{O}_{c(t)}$. Если, в частности, путь c замкнут, т. е. $p = c(0) = c(1)$, то изоморфизм τ: $M_p \to M_p$, заданный формулой $\tau X_i(0) = X_i(1)$, $i = 1, \ldots, n$, сохраняет ориентацию.

Пусть M, $\tilde{M}$ — ориентированные связные многообразия равной размерности с ориентациями $\mathfrak{O}$, $\tilde{\mathfrak{O}}$. Погружение f: $M \to \tilde{M}$ называется сохраняющим ориентацию, если для всех p имеем $f_* \mathfrak{O}_p = \tilde{\mathfrak{O}}_{f(p)}$, в противном случае f называется обращающим ориентацию. Покажите, что если для некоторой точки $p_0 \in M$ справедливо $f_* \mathfrak{O}_{p_0} = \tilde{\mathfrak{O}}_{f(p_0)}$, то f сохраняет ориентацию.

Пусть M — связное дифференцируемое многообразие, $p \in M$, $\mathfrak{O}_p$ — ориентация M_p. Каждый непрерывный путь c: $[0, 1] \to M$, для которого $c(0) = p$, $c(1) = q$, индуцирует из $\mathfrak{O}_p$ ориентацию $\mathfrak{O}_q$ на M_q. А именно, рассмотрим непрерывные базисные поля $X_1, \ldots, X_n$ вдоль c, представляющие в точке p ориентацию $\mathfrak{O}_p$, тогда $\mathfrak{O}_q$ задается базисом $X_1(1), \ldots, X_n(1)$ и, как легко видеть, не зависит от выбора X_i.

Построим теперь на M произвольную линейную связность и предположим, что c — кусочно дифференцируемый путь. Тогда,

в частности, параллельный перенос вдоль c по отношению к ∇ задает изоморфизм τ: $M_p \to M_q$, такой, что $\tau\mathfrak{O}_p = \mathfrak{O}_q$. Пусть $\tilde{c}$: $[0, 1] \to M$ — другой кусочно дифференцируемый путь, $\tilde{c}(0) = p$, $\tilde{c}(1) = q$ и $\tilde{\tau}$: $M_p \to M_q$ — параллельный перенос вдоль $\tilde{c}$. Если c, $\tilde{c}$ являются (p, q)-гомотопными, то c и $\tilde{c}$ индуцируют из $\mathfrak{O}_p$ одну и ту же ориентацию $\mathfrak{O}_q$ на M_q. В самом деле, согласно замечанию (i) разд. 7.1, существует кусочно дифференцируемая (p, q)-гомотопия H: $[0, 1] \times [0, 1] \to M$, соединяющая c с $\tilde{c}$, и параллельный перенос τ_s: $M_p \to M_q$ вдоль пути семейства H_s непрерывно зависит от s, так что для всех $s \in [0, 1]$ образы базиса M_p при отображении τ_s одинаково ориентированы в M_q. Поскольку $\tau = \tau_0$, $\tilde{\tau} = \tau_1$, имеем $\tau\mathfrak{O}_p = \tilde{\tau}\mathfrak{O}_p = \mathfrak{O}_q$. Отождествим фундаментальную группу $\pi_1(M)$ с $\pi_1(M, p)$. Зададим следующим образом *гомоморфизм ориентации* $\pi_1(M) \to \mathbf{Z}_2$, где $\mathbf{Z}_2$ представляется как мультипликативная группа $\{-1, 1\}$: сопоставим замкнутому кусочно дифференцируемому пути c: $[0, 1] \to M$ элемент 1, если c переводит ориентацию $\mathfrak{O}_p$ на M_p снова в $\mathfrak{O}_p$, в противном случае — элемент -1. По указанным выше соображениям это соответствие зависит только от (p, p)-гомотопического класса c и мультипликативно.

Лемма.

Усл. *M — связное дифференцируемое многообразие*; $p \in M$; $\pi_1(M) \cong \pi_1(M, p)$.

Утв. *Следующие предложения равносильны*:
(a) *M ориентируемо*;
(b) *гомоморфизм ориентации тривиален.*

Если, например, $\pi_1(M)$ — конечная группа нечетной размерности, то M ориентируемо. В частности, каждое односвязное дифференцируемое многообразие ориентируемо.

Док. Из (a) следует (b), как уже было отмечено в этом разделе.

Пусть теперь гомоморфизм ориентации тривиален. Выделим некоторую ориентацию $\mathfrak{O}_p$ пространства M_p. Если $q \in M$, то существует кусочно дифференцируемый путь $\tilde{c}$: $[0, 1] \to M$ с началом p и концом q, индуцирующий ориентацию $\mathfrak{O}_q$ пространства M_q. Любой другой кусочно дифференцируемый путь $\tilde{c}$: $[0, 1] \to M$, соединяющий p с q, переводит $\mathfrak{O}_p$ в ту же ориентацию $\mathfrak{O}_q$. В самом деле, композиция путей $\tilde{c}$, c^{-1}, c, где c^{-1} получается из c переменой направления, очевидно, (p, q)-гомотопна $\tilde{c}$, в то время как композиция путей $\tilde{c}$, c^{-1} есть замкнутый путь, по предположению переводящий $\mathfrak{O}_p$ в $\mathfrak{O}_p$. Легко видеть, что соответствие $q \to \mathfrak{O}_q$ задает ориентацию на M. Таким образом, (a) следует из (b), и лемма доказана.

В следующем абзаце применяются замечания (i) и (iii) разд. 7.2 относительно теории накрывающих.

Пусть M — связное неориентируемое дифференцируемое многообразие, $p \in M$, $\pi_1(M) \cong \pi_1(M, p)$. Можно каноническим образом построить для M ориентируемое связное дифференцируемое многообразие $\tilde{M}$, двулистно накрывающее M. Гомоморфизм ориентации $\pi_1(M) \to Z_2$ не тривиален, следовательно, сюръективен, и его ядро Γ есть инвариантная подгруппа $\pi_1(M)$ индекса 2.

Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ свободно действует на универсальном накрывающем $\hat{M}$ многообразия M как группа диффеоморфных накрывающих преобразований. Мы получаем двулистное регулярное дифференцируемое *накрытие ориентации* $\hat{M} = \hat{M}/\Gamma \to \hat{M}/\pi_1(M) = M$, ставя в соответствие орбите каждой точки $\hat{M}$ относительно Γ соответствующую орбиту относительно $\pi_1(M)$; $\pi_1(M)/\Gamma = Z_2$ естественным образом действует как группа преобразований этого накрытия на связном многообразии $\tilde{M}$, $\pi_1(\tilde{M}) \cong \Gamma$. Накрытие ориентации индуцирует включение $\pi_1(\tilde{M}) \cong \Gamma \to \pi_1(M)$, а в композиции с гомоморфизмом ориентации $\pi_1(M) \to Z_2$ дает гомоморфизм ориентации $\tilde{M}$, который, по определению Γ, тривиален; таким образом, $\tilde{M}$ ориентируемо в силу доказанной выше леммы.

В заключение мы приведем еще равносильное предыдущему прямое определение накрытия ориентации. Обозначим через $\tilde{M}$ множество всех ориентаций $\mathfrak{O}_q$ касательных пространств M_q с естественной проекцией $f\colon \tilde{M} \to M$ и введем на $\tilde{M}$ топологию, задав следующую систему окрестностей для каждой точки $\mathfrak{O}_q \in M$: для каждой карты x с областью определения U, координатные поля которой $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, X_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$ представляют в точке $q \in U$ ориентацию $\mathfrak{O}_q$, назовем окрестностью $\mathfrak{O}_q$ в $\tilde{M}$ множество всех заданных базисами $X_1|_{q_1}, \ldots, X_n|_{q_1}$ ориентаций $\mathfrak{O}_{q_1}$ пространств M_{q_1}, где $q_1 \in U$. По отношению к этой топологии f является локальным гомоморфизмом, индуцирующим на $\tilde{M}$ структуру связного ориентируемого дифференцируемого многообразия, так что f становится дифференцируемым накрытием. Группа $\pi_1(M)/\Gamma \cong Z_2 = \{-1, 1\}$ свободно действует на $\tilde{M}$ как группа накрывающих преобразований $\tilde{M}$, причем 1 есть тождественное преобразование, а -1 сопоставляет ориентации $\mathfrak{O}_q^+$ пространства M_q противоположную ориентацию $\mathfrak{O}_q^-$; $\tilde{M}/Z_2 \cong M$.

Замечания

(i) Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$, сферы S^n и проективные пространства $P^n(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{H})$, $P^2(\mathrm{Ca})$ ориентируемы. Неориентируем,

например, лист Мёбиуса, который можно описать как двумерное дифференцируемое многообразие $M=\mathbb{R}^2/\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ свободно действует на $\mathbb{R}^2$ как группа аффинных преобразований $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}+$ $+\begin{pmatrix}n\\ 0\end{pmatrix}$, $\pi_1(M)\cong\mathbf{Z}$ (см. также замечание (v) разд. 1.7). Ядро гомоморфизма ориентации $\pi_1(M)\to\mathbf{Z}_2$ есть подгруппа целых чисел $\Gamma=2\mathbf{Z}$, накрытие ориентации есть $\tilde{M}\to M$, где $\tilde{M}=\hat{M}/\Gamma=\mathbb{R}^2/2\mathbf{Z}\cong$ $\cong S_1\times\mathbb{R}$ есть цилиндр, на котором $\mathbf{Z}_2$ действует как группа преобразований накрытия (действие определяется формулой $(z, t)\to$ $\to(-z, -t)$).

(ii) Покажите, что действительное проективное пространство $P^n(\mathbb{R})$ ориентируемо при нечетном n и неориентируемо при четном. Накрытие ориентации $P^n(\mathbb{R})$ при нечетном n есть универсальное накрытие $S^n\to P^n(\mathbb{R})$.

(iii) Пусть M — связное дифференцируемое многообразие, $\dim M=n$. Покажите, что M ориентируемо тогда и только тогда, когда на M существует n-форма ω, такая, что $\omega_p\neq 0$ для всех $p\in M$.

(iv) Пусть $\hat{M}$ — связное дифференцируемое многообразие, $\hat{M}\to M$ — дифференцируемое накрытие. Покажите, что вместе с M ориентируемо и $\hat{M}$.

Пусть теперь $\hat{M}$ ориентируемо, а группа Γ свободно действует на $\hat{M}$ как группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Тогда дифференцируемое накрытие $\hat{M}\to\hat{M}/\Gamma$ каноническим образом индуцирует ориентацию дифференцируемого многообразия $\hat{M}/\Gamma$. Если Γ содержит обращающий ориентацию диффеоморфизм $\hat{M}$ на себя, то $\hat{M}/\Gamma$ неориентируемо. Для доказательства можно, например, рассмотреть универсальное накрытие $\hat{M}\to M$. Так как $\pi_1(\hat{M})=1$, $\hat{M}$ ориентируемо, M же ориентируемо в том и только том случае, если каждый элемент свободно действующей на M в качестве группы преобразований накрытия фундаментальной группы $\pi_1(M)$ есть сохраняющий ориентацию диффеоморфизм.

(v) Рассмотрим связное дифференцируемое многообразие M с линейной связностью ∇, точку $p\in M$ и группу голономии $\Phi(p)\subset GL(M_p)$ многообразия M в точке p по отношению к ∇ (см. замечание (v) разд. 2.6). Из рассуждений этого раздела видно, что M ориентируемо в том и только том случае, если $\Phi(p)$ — подгруппа $GL^+(M_p)\cong GL^+(n, \mathbb{R})$, т. е. группы всех сохраняющих ориентацию автоморфизмов $M_p\cong\mathbb{R}^n$. Таким образом, структурная группа касательного расслоения TM ориентируемого дифференцируемого многообразия всегда может быть сведена к $GL^+(n, \mathbb{R})$. Это — еще одно эквивалентное описание ориентируемости M.

7.5. Радиус инъективности экспоненциального отображения в случае четной размерности

В разд. 7.3 мы получили оптимальную оценку сверху для диаметра компактного риманова многообразия со всюду положительной кривизной. Универсальные оценки снизу дать труднее. Мы получим в этом разделе точную нижнюю оценку для радиуса инъективного экспоненциального отображения, но только в случае четной размерности. В случае нечетной размерности этого не удается сделать без дополнительных предположений (см. разд. 7.7 и замечание (iii) этого раздела).

Докажем сначала некоторое утверждение относительно периодических геодезических.

Лемма 1 (Дж. Л. Синг)

Усл. *M — ориентируемое риманово многообразие четной размерности положительной кривизны; c: $[0, \beta] \to M$ — периодическая нормальная геодезическая.*

Утв. *Существует такая вариация V: $[0, \beta] \times J \to M$ геодезической c, что все соседние с c пути V_ε суть замкнутые дифференцируемые пути, и $L(\varepsilon) < L(0) = \beta$ в некоторой окрестности нуля в J, $\varepsilon \neq 0$.*

Док. Положим $p = c(0) = c(\beta)$ и рассмотрим $(n-1)$-мерное подпространство $M_p^\perp$ всех векторов $v \in M_p$, для которых $\langle v, \dot{c}(0)\rangle = \langle v, \dot{c}(\beta)\rangle = 0$. Параллельный перенос вдоль c задает ортогональное отображение τ: $M_p^\perp \to M_p^\perp$. Напомним, что комплексное число λ является собственным значением τ, если $\det|\tau - \lambda\,\mathrm{id}| = 0$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ суть собственные значения τ. Тогда $\det\tau = \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$, и вследствие ориентируемости M имеем $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} = 1$. Если λ — собственное значение τ, то и комплексно сопряженное значение $\bar{\lambda}$ является собственным значением τ и, поскольку τ — ортогональное отображение, $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Но так как $n - 1 = \dim M_p^\perp$ нечетно, то по крайней мере одно из собственных значений τ равно 1 (не -1, поскольку $\det\tau > 0$). Поэтому $\det|\tau - \mathrm{id}| = 0$, и существует такой вектор $u \in M_p$, для которого $\tau u = u$, $u \neq 0$. Таким образом, преобразование τ имеет отличные от нуля неподвижные векторы.

Пусть Y — параллельное векторное поле вдоль c, для которого $Y(0) = Y(\beta) = u$. Существует такой открытый интервал $J \subset \mathbb{R}$, содержащий нуль, что $\varepsilon Y(t)$ лежит в области определения экспоненциального отображения exp на M для всех $\varepsilon \in J$, $t \in [0, \beta]$. Определим V: $[0, \beta] \times J \to M$ по формуле $V(t, \varepsilon) = \exp(\varepsilon Y(t))$ (см. (11) разд. 4.1). Тогда $V_* D_2|_{t,0} = Y(t)$, откуда $L'(0) = 0$ (см. (7) разд. 4.1). Из параллельности Y следует $Y' = 0$ и $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$, далее, $\nabla_{D_1} V_* D_2|_{t,\varepsilon} = 0$ для всех $(t, \varepsilon) \in (0, \beta) \times J$, так как $\varepsilon \to V(t, \varepsilon)$ есть геодезическая

при всех $t \in [0, \beta]$. Теперь из (8) разд. 4.1 вытекает, что $L''(0) = -\int_0^\beta \langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y\rangle|_t \, dt < 0$, поскольку кривизна вдоль c по предположению положительна. Значит L имеет в нуле относительный максимум, что и доказывает лемму (см. замечание (iii) разд. 4.1).

Следствие

Утв. *Связное компактное ориентируемое риманово многообразие M четной размерности и положительной кривизны — односвязно.*

С учетом предыдущего раздела получаем теперь, что для компактного многообразия положительной кривизны односвязность равносильна ориентируемости. Если M неориентируемо, рассмотрим двулистное риманово накрывающее $\tilde{M}$ многообразия M.

Согласно только что сформулированному следствию, $\tilde{M}$ односвязно и тем самым универсально, так что фундаментальная группа многообразия M — циклическая порядка 2, т. е. $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$. Примерами служат действительные проективные пространства $P^n(\mathbb{R})$ четной размерности с их естественной метрикой постоянной кривизны (см. замечание (ii) разд. 7.4).

Подобных простых и полных предложений о фундаментальной группе компактного многообразия положительной кривизны в случае нечетной размерности не существует (см. разд. 7.3).

Док. Каждый нетривиальный свободный гомотопический класс во множестве Ω всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$ содержит периодическую геодезическую c минимальной длины $\mu > 0$ (см. замечание (vi) разд. 7.2), но это невозможно по лемме 1. Поэтому все пути Ω свободно гомотопны тривиальным путям, откуда и следует утверждение.

Заметим теперь, что в некоторых случаях различные кратчайшие геодезические, соединяющие две точки риманова многообразия, образуют вместе периодическую геодезическую.

Лемма 2

Усл. *M — риманово многообразие и $p, q \in M$; c_0, c_1: $[0, 1] \to M$ — геодезические, соединяющие p с q, $c_0 \neq c_1$; точка 1 не является сопряженной точкой на каждой из геодезических c_0, c_1.*

Утв. *Если $\sphericalangle(\dot{c}_0(1), \dot{c}_1(1)) < \pi$, то существуют такие геодезические $\bar{c}_0$, $\bar{c}_1$: $[0, 1] \to M$ с началом в p и общим концом $\bar{q}$, что $L(\bar{c}_0) = L(c_0)$ и $L(\bar{c}_1) < L(c_1)$.*

Отсюда следует, что если $L(c_0) = L(c_1) = d_p$ (радиусу инъективности $\exp_p$), то $\sphericalangle(\dot{c}_0(1), \dot{c}_1(1)) = \pi$ (см. разд. 5.2).

Док. Положим $\dot{c}_0 = v$, $\dot{c}_1(0) = w$. Экспоненциальное отображение $\exp_p$ имеет максимальный ранг в точках v, w, так как 1 не

является сопряженной точкой ни c_0, ни c_1. По лемме Гаусса (см. разд. 4.4) отображение $\exp_{p*} \circ I_v$ изоморфно отображает $(n-1)$-мерное линейное подпространство M_p, ортогональное v, на подпространство M_q, ортогональное $\dot{c}_0(1)$, где $I_v\colon M_p \to (M_p)_v$ — канонический изоморфизм. Поскольку $(n-1)$-мерные линейные подпространства M_q, ортогональные соответственно $\dot{c}_0(1)$, $\dot{c}_1(1)$, по предположению не совпадают, существует такой вектор $\tilde{v} \in M_p$, что $\langle \tilde{v}, v\rangle = 0$, $\|\tilde{v}\| = \|v\|$ и $\langle \exp_{p*} I_v \tilde{v}, \dot{c}_1(1)\rangle \neq 0$. Построим для достаточно малого $\varepsilon > 0$ путь $c\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ по формуле $c(s) = \exp(v\cos s + \tilde{v}\sin s)$; очевидно, $\dot{c}(0) = \exp_{p*} I_v \tilde{v}$. Пусть $U \subset M_p$ — окрестность точки w, такая, что $\exp|_U$ обратимо. Тогда с помощью леммы Гаусса получаем $\langle \dot{c}(0), \dot{c}_1(1)\rangle = \langle \exp_{p*} I_v \tilde{v}, \dot{c}_1(1)\rangle \neq 0$. Следовательно, путь $\varphi = (\exp|_U)^{-1} \circ c$ в M_p пересекает луч $t \to tw$ в точке $w = \varphi(0)$ не ортогонально, и поэтому существует $s_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, для которого $\|\varphi(s_0)\| < \|w\|$. Полагая $\bar{v} = v\cos s_0 + \tilde{v}\sin s_0$, $\bar{w} = \varphi(s_0)$, имеем очевидным образом $\|\bar{v}\| = \|\tilde{v}\| = \|v\|$, $\|\bar{w}\| < \|w\|$ и $\exp(\bar{v}) = \exp(\bar{w})$. Обозначим точку $\exp(\bar{v}) = \exp(\bar{w})$ через $\bar{q}$. Геодезические $c_0, c_1\colon [0, 1] \to M$, заданные формулами $c_0(t) = \exp(t\bar{v})$, $c_1(t) = \exp(tw)$, соединяют p с $\bar{q}$ и обладают требуемыми свойствами.

Пусть M — связное компактное риманово многообразие. Так как, согласно следствию из леммы разд. 5.4, радиус инъективности d непрерывен, существует точка $p \in M$, для которой $d_p = \inf\limits_{p' \in M} d_{p'} = \delta > 0$. Предположим, что $\exp_p$ имеет максимальный ранг в шаре $U_{\delta_1} \subset M_p$ радиуса $\delta_1 > \delta$ с центром 0. Тогда существуют векторы $v, w \in M_p$, для которых $\exp(v) = \exp(w)$, $v \neq w$, $\|v\| = \|w\| = \delta$. Построим геодезические $c_0, c_1\colon [0, 1] \to M$ по формулам $c_0(t) = \exp(tv)$, $c_1(t) = \exp(tw)$, соединяющие p с $q = \exp v$ и имеющие длину $L(c_0) = L(c_1) = \delta$. Согласно следствию из леммы 2, имеем $\measuredangle(\dot{c}_0(1), \dot{c}_1(1)) = \pi$, так как 1 не является сопряженной точкой ни на c_0, ни на c_1. Далее, поскольку $d_p = d_q = \delta$, можно поменять местами точки p, q и рассмотреть вместо c_0 c_1, геодезические c_0^-, $c_1^-\colon [0, 1] \to M$ противоположной ориентации, соединяющие q с p. Тогда, снова применяя лемму, имеем $\measuredangle(\dot{c}_0^-(1), \dot{c}_1^-(1)) = \pi$. Таким образом, замкнутый путь, составленный из путей c_0 и c_1^-, дифференцируемо замкнут и, следовательно, является периодической геодезической длины 2δ. Ясно, что не существует невырожденных замкнутых геодезических короче 2δ. Каждая замкнутая геодезическая длины 2δ периодична, если она распадается на две геодезические длины δ без сопряженных точек. Теперь мы можем получить упомянутую в начале этого раздела оценку радиуса инъективности экспоненциального отображения.

Теорема (В. Клингенберг)

Усл. *M — связное компактное ориентируемое риманово многообразие четной размерности. Для всех касательных к M плоскостей σ выполнено неравенство $0 < K_\sigma \leqslant \lambda$.*

Утв. *Радиус инъективности $d\colon M \to \mathbb{R}$ отображения* exp *удовлетворяет для всех $p \in M$ неравенству*

$$\rho_M \geqslant d_p \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}, \tag{1}$$

где ρ_M — диаметр M.

Как мы видели выше, ориентируемость M равносильна односвязности M. Пример сферы $M = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ показывает, что оценка $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ оптимальна, тем самым неравенство (1) можно рассматривать как теорему сравнения в смысле § 6.

Док. По теореме сравнения Морса — Шенберга нормальные геодезические M длины $< \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ не содержат сопряженных точек. Предположим, что $\delta = \inf\limits_{q \in M} d_q < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Тогда, согласно выведенному выше следствию из леммы 2, существует периодическая геодезическая $c\colon [0, \beta] \to M$ длины $\beta = 2\delta < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Построим, как в лемме 1, вариацию $V\colon [0, \beta] \times J \to M$ периодической геодезической c, при которой пути V_ε дифференцируемо замкнуты и $L(\varepsilon) < L(0) = \beta$ для $\varepsilon \neq 0$. Далее, построим отображение $\bar{V}\colon [0, \beta] \times J \to M \times M$ по формуле $\bar{V}(t, \varepsilon) = (V(0, \varepsilon), V(t, \varepsilon))$. Обозначим через $U_\delta(\varepsilon)$ открытый шар в $M_{V(0,\varepsilon)}$ радиуса δ с центром 0. Так как $L(\varepsilon) < \beta = 2\delta$ при $\varepsilon \neq 0$, путь V_ε $(\varepsilon \neq 0)$ целиком лежит в диффеоморфном образе $B_\delta(\varepsilon) = \exp U_\delta(\varepsilon)$. Поскольку $\exp|_{U_\delta(\varepsilon)}$ — диффеоморфизм, отображение $\pi \times \exp\colon TM \to M \times M$ имеет на множестве $W = \bigcup\limits_{\varepsilon \in J} U_\delta(\varepsilon)$ максимальный ранг. Далее, $\pi(U_\delta(\varepsilon)) = \{V(0, \varepsilon)\}$, следовательно, отображение $\pi \times \exp|_W$ инъективно. Поскольку $\bar{V}([0, \beta] \times (J \setminus \{0\})) \subset (\pi \times \exp)|_W$, отображение $\bar{V}|_{[0,\beta] \times (J \setminus \{0\})}$ можно поднять до $\Phi\colon [0, \beta] \times (J \setminus \{0\}) \to TM$, т. е. $\Phi(t, \varepsilon) = (\pi \times \exp|_W)^{-1} \circ \bar{V}(t, \varepsilon)$. При этом пути $\Phi_\varepsilon\colon [0, \beta] \to TM$, заданные формулой $\Phi_\varepsilon(t) = \Phi(t, \varepsilon)$, дифференцируемо замкнуты. Рассмотрим теперь предельные точки в TM множества $\{\Phi(t, \varepsilon)\}$, где $t \in [0, \beta]$, $0 \neq \varepsilon \in J$, при $\varepsilon \to 0$. Так как $\|\Phi(t, \varepsilon)\| < \delta$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \pi \circ \Phi(t, \varepsilon) = V(0, 0)$, эти предельные точки принадлежат компактному шару $\overline{U_\delta(0)} \subset M_{V(0,0)}$ с центром

в точке 0. Как вытекает из неравенства $\delta < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, отображение $\exp|_{\overline{U_\delta(0)}}$ имеет везде максимальный ранг и тем самым $\pi \times \exp$ имеет максимальный ранг на $\overline{\{\Phi(t, \varepsilon)\}}$ (см. замечание (i) разд. 2.8). Поэтому путь $\overline{V}|_{[0,\beta]\times\{0\}}$ может быть еще поднят до дифференцируемо замкнутого пути Φ_0: $[0, \beta] \to TM$, причем $\Phi_0(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi(t, \varepsilon)$ и Φ_0 принадлежит слою $M_{V(0,0)}$ касательного расслоения TM (см. по этому поводу доказательство леммы в разд. 7.1). С другой стороны, однако, $\exp \circ \Phi_0 = V_0$ есть исходящая из $V(0, 0)$ геодезическая, которая может быть поднята лишь до некоторого луча. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть M — компактное односвязное риманово многообразие четной размерности, на котором всюду $0 < K_\sigma \leqslant \lambda$. Согласно последней теореме, для каждой точки $p \in M$ радиус инъективности d_p отображения $\exp_p$ не меньше радиуса инъективности экспоненциального отображения в точке сферы $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$. Отсюда получается, как мы покажем ниже, аналогичная оценка для радиуса выпуклости r: $M \to \mathbb{R}$, а именно для всех точек $p \in M$ имеет место неравенство

$$r(p) \geqslant \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{2}$$

Таким образом, при $\delta \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ все метрические шары $B_\delta(p)$ в M сильно выпуклы. В случае нечетной размерности это следует из теоремы разд. 7.7, правда, при более сильном предположении, что всюду выполняется $\frac{\lambda}{4} < K_\sigma \leqslant \lambda$. Нижняя граница $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ радиуса выпуклости в общем случае не может быть улучшена, как это видно снова на примере сферы $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ (см. замечание (i) разд. 5.2). Доказательство оценки (2) получается из (1), с учетом леммы разд. 5.2. Достаточно проверить, что для каждой нормальной геодезической c: $[0, \delta] \to M$, где $\delta < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, ограничение индексной формы на векторное пространство всех полей Якоби Y вдоль c, удовлетворяющих условиям $Y(0) = 0$ и $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$, есть положительно определенная форма. Рассмотрим сферу $\tilde{M} = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$, нормальную геодезическую $\tilde{c}$: $[0, \delta] \to \tilde{M}$, $p = c(0)$, $\tilde{p} = \tilde{c}(0)$ и изометрию ι: $M_p \to \tilde{M}_{\tilde{p}}$, удовлетворяющую условию $\iota\dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$. Согласно (4) разд. 6.1, имеем изоморфизм Φ: $\mathfrak{B}'_c \to \mathfrak{B}'_{\tilde{c}}$. Пусть

$Y \in \mathfrak{B}_c'$ — поле Якоби, для которого $Y(0)=0$. Построим поле Якоби $\tilde{Y} \subset \mathfrak{B}_{\tilde{c}}'$, удовлетворяющее условиям $\tilde{Y}(0)=0$ и $\tilde{Y}(\delta)=\Phi Y(\delta)$. В силу (7) разд. 6.1 и (5) разд. 4.5, имеем $I(Y, Y) \geqslant I(\Phi Y, \Phi Y) \geqslant I(\tilde{Y}, \tilde{Y})$. Поэтому из (7) разд. 4.5 следует $I(\tilde{Y}, \tilde{Y})>0$, откуда $I(Y, Y)>0$ при $Y \neq 0$.

Замечания

(i) Покажем, что компактное риманово многообразие положительной кривизны ориентируемо, если размерность $\dim M=n$ нечетна.

Прежде чем перейти к доказательству, отметим, что в качестве примеров можно привести неодносвязные многообразия $P^n(\mathbb{R})$ нечетной размерности и пространства из замечания (iii) разд. 7.3.

Для доказательства достаточно рассмотреть связное M. Покажем, что гомоморфизм ориентации $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ тривиален. В самом деле, в противном случае в M существует замкнутый путь, свободно гомотопный некоторой нетривиальной периодической геодезической c, кратчайшей в свободном гомотопическом классе c и такой, что параллельный перенос вдоль c индуцирует для фиксированной точки $p=c(t)$ обращающий ориентацию автоморфизм τ в ортогональном вектору $\dot{c}(t)$ линейном подпространстве $M_p^{\perp} \subset M_p$, $\dim M_p^{\perp}=n-1$. Отсюда получится противоречие точно так же, как и в лемме Синга, если мы докажем, что в $M_p^{\perp}$ существует ненулевой неподвижный вектор $u \neq 0$ автоморфизма τ, а именно в этом случае c не может быть кратчайшей в свободном гомотопическом классе c. Чтобы доказать существование неподвижного вектора, заметим, что $\dim M_p^{\perp}=n-1=2k$ четна и τ — ортогональное отображение. Поэтому существуют такие инвариантные относительно τ двумерные евклидовы подпространства $E_1, \ldots, E_k \subset M_p^{\perp}$, что $M_p^{\perp}=E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$. Очевидно, $\det \tau = \prod_{i=1}^{k} \det \tau|_{E_i} = -1$, так что по крайней мере для одного i выполняется $\det \tau|_{E_i} = -1$. Но ортогональное отображение двумерной евклидовой плоскости, обращающее ориентацию, есть композиция вращения и зеркального отражения относительно некоторой прямой, а поэтому имеет ненулевую неподвижную точку.

(ii) Пусть M — связное компактное риманово многообразие размерности n, для которого всюду $0<K_\sigma \leqslant \lambda$. Если n четно и M не ориентируемо или, что равносильно по доказанному выше, $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$, то оценка (1) справедлива для двулистного риманова накрывающего $\tilde{M}$. Получите отсюда, что для M справедлива оценка $\rho_M \geqslant d_p \geqslant \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, причем она не может быть улучшена,

как показывает пример проективного пространства $P^n(\mathbb{R})$ постоянной кривизны λ. Для радиуса выпуклости получаем соответственно $r(p) \geqslant \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}$. Иначе обстоит дело в случае нечетного n. Хотя в этом случае, согласно (1), M ориентируемо, но даже в предположении односвязности M вообще не существует никакой универсальной нижней границы для радиуса инъективности экспоненциального отображения на M. Оценку снизу можно получить лишь при дополнительном предположении, что кривизна ограничена снизу (см. замечание (iii), а также разд. 7.7).

Только что сказанное тем более справедливо для неодносвязного M. Проверьте, что для линзового пространства $L(q, 1)$ постоянной кривизны 1 (см. замечание (iii) разд. 7.3) радиус инъективности $d_p = \frac{\pi}{q}$. Заметим, что в случае односвязного M не известно ни одного примера, в котором не была бы справедлива оценка $\rho_M \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ из (1). Определение нижней границы диаметра ρ_M и радиуса инъективности, зависящих лишь от верхней и нижней границы кривизны, представляет интересную нерешенную задачу.

(iii) Мы уже ссылались на интересный пример Берже: на дифференцируемом многообразии S^3 можно построить римановы метрики, всюду удовлетворяющие неравенствам $0 < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$, для которых существуют замкнутые геодезические короче 2π. (Сравните это с разобранным выше случаем четной размерности.) Описываемая конструкция опирается на некоторые общие предложения, изложенные ниже, в замечании (iv).

Рассмотрим группу Ли S^3, введенную в замечании (iv) разд. 1.9, с обычной биинвариантной метрикой (см. замечание (v) разд. 3.2), в которой левоинвариантные поля X_1, X_2, X_3 ортонормированы. Тогда на группе Ли $G = S^3 \times \mathbb{R}$ получается биинвариантная метрика — произведение только что описанной метрики на S^3 и обычной эвклидовой метрики на $\mathbb{R}$. Левоинвариантные поля $Z_i = (X_i, 0)$ $(i = 1, 2, 3)$ и $Z_4 = (0, D)$ образуют ортонормированный базис на G. Пусть c_1: $\mathbb{R} \to S^3$ — интегральный путь поля X_1, для которого $c_1(0) = e$ — единичный элемент S^3. Согласно замечанию (v) разд. 2.7, c_1 является гомоморфизмом групп Ли и в то же время нормальной периодической геодезической длины 2π, как это видно, например, из замечания (vii) разд. 3.6 или как можно проверить непосредственно. Отображение h: $\mathbb{R} \to G$, заданное формулой $h(t) = (c_1(\alpha t), \beta t)$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, является вложением групп Ли и в то же время нормальной геодезической, образующей с первым множителем S^3 постоянный угол φ, $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, заданный равенством $\sin\varphi = \beta$. Образ $H = h(\mathbb{R})$ есть замкнутая подгруппа Ли

группы G, мы будем рассматривать однородное пространство G/H, в котором введем описываемую ниже, в замечании (iv), нормальную риманову метрику. Обозначим через f естественную проекцию f: $G \to M$. Ясно, что M диффеоморфно S^3, а при $\alpha = 0$ даже изометрично.

Геодезическая c: $\mathbb{R} \to G$, заданная формулой $c(t) = (c_1(\beta t), -\alpha t)$, пересекает H перпендикулярно, проекция $f \circ c$ есть нормальная периодическая геодезическая в M длины $2\pi\beta$, так как равенство $c(t+\lambda) = c(t)\,h(\tau)$ выполняется впервые при $\lambda = 2\pi\beta$, $\tau = -2\pi\alpha$.

Найдем теперь границы для римановой кривизны M. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных полей на G поле $\alpha Z_1 + \beta Z_4$ составляет базис подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы H; поля $Z = \beta Z_1 - \alpha Z_4$ составляют базис ортогонального дополнения $\mathfrak{m}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Для любых нормальных полей A, $B \in \mathfrak{m}$ (см. замечание (iv)) получаем представления

$$A = \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \mu_3 Z_3, \quad B = \nu_1 Z_1 + \nu_2 Z_2 + \nu_3 Z_3,$$

причем

$$[A, B] = 2\lambda_1 Z_1 + 2\beta\lambda_2 Z_2 + 2\beta\lambda_3 Z_3,$$

где $\lambda_1 = \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2$, $\lambda_2 = \mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3$, $\lambda_3 = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$. Выражения в правой части формулы (5) (см. замечание (iv), стр. 253), служащей для вычисления кривизны нормальной римановой метрики, находятся теперь следующим образом:

$$\|[A, B]^{\perp}\|^2 = 4\beta^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2), \qquad \|[A, B]^{\top}\|^2 = 4\alpha^2\lambda_1^2,$$

далее,

$$\|A\|^2\|B\|^2 - \langle A, B\rangle^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0,$$

если A, B линейно независимы.

Из (5) теперь следует, что

$$K(f_*A, f_*B) = \frac{(1+3\alpha^2)\lambda_1^2 + \beta^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2},$$

откуда

$$\beta^2 \leqslant K_\sigma \leqslant 1 + 3\alpha^2$$

для всех касательных плоскостей σ, причем обе границы достигаются. Умножив риманову метрику на $1 + 3\alpha^2$, получаем

$$\delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1,$$

где

$$\delta = \frac{\beta^2}{1+3\alpha^2} = \frac{1}{1 + 4\operatorname{ctg}^2\varphi}.$$

Длина геодезической $f \circ c$ в этой метрике равна $2\pi\beta\sqrt{1+3\alpha^2}$; если учесть условия, налагаемые на α и β, то $\beta\sqrt{1+3\alpha^2} < 1$ равносильно неравенству $0 < \beta < \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Соответствующая β_0 нижняя

граница кривизны есть $\delta_0 = \frac{1}{9}$, причем угол φ_0 определяется равенством $\sin\varphi_0 = \beta_0$. Таким образом, при $\varphi < \varphi_0$ получаются периодические геодезические в M, которые короче 2π. Проекции интегральных путей Z_2, Z_3, как легко видеть, суть периодические геодезические длины $2\pi\sqrt{1+3\alpha^2}$.

Покажите, что в исходной метрике из всех периодических геодезических самые короткие имеют длину $2\pi\beta$, а самые длинные — 2π.

(iv) Пусть G — n-мерная группа Ли и H — k-мерная замкнутая подгруппа Ли группы G (см. замечания (v) разд. 1.7 и (iii)). Введем на множестве левых классов смежности G/H, т. е. орбит группы H, действующей на G посредством правых сдвигов, сначала фактортопологию, а затем структуру $(n-k)$-мерного дифференцируемого многообразия. Прежде всего мы имеем непрерывную естественную проекцию $f\colon G \to G/H$. Обозначим $f(g)$ через $\bar{g}$. Далее, имеем левые и правые сдвиги — диффеоморфизмы L_h, $R_h\colon G \to G$ $(h \in G)$, заданные формулами $L_h g = hg$, $R_h g = gh$. На однородном пространстве G/H группа G действует транзитивно: каждый левый сдвиг L_h на G индуцирует гомеоморфизм G/H на себя. Проекция f есть открытое отображение, так как для открытого подмножества $U \subset G$ множество $f^{-1}(f(U)) = \bigcup_{h\in H} R_h U$ открыто в G и, следовательно, $f(U)$ открыто в G/H. По определению фактортопологии G/H имеет вместе с G счетный базис из открытых множеств. Далее, мы сейчас покажем, что G/H есть хаусдорфово пространство. Проверим, что для любых двух точек $\bar{g}_1 \neq \bar{g}_2$ существуют непересекающиеся окрестности W_1 (точки $\bar{g}_1$) и W_2 (точки $\bar{g}_2$) в G/H. Так как $g_1^{-1}g_2 \notin H$ и H замкнута в G, то в $G \times G$ существует окрестность $U_1 \times U_2$ точки (g_1, g_2), не пересекающая прообраз H при непрерывном отображении $G \times G \to G$, заданном формулой $(g, h) \to g^{-1}h$. Поэтому $U_1^{-1}U_2 \cap H = \varnothing$ остается положить $W_1 = f(U_1)$, $W_2 = f(U_2)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержит подалгебру Ли $\mathfrak{h}$, соответствующую H. Можно отождествить $\mathfrak{g}$ с касательным подпространством $H_e \subset G_e$ (см. замечание (iv) разд. 1.9).

Построим дополнительное к $\mathfrak{h}$ линейное подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. Экспоненциальное отображение G (см. замечание (ii) разд. 2.3) диффеоморфно отображает некоторую окрестность U_0 точки $0 \in \mathfrak{g}$ на окрестность точки e в G. Положим $V_0 = \mathfrak{m} \cap U_0$. Отображение $\nu\colon V_0 \times V_0 \to G$, заданное формулой $\nu(v, w) = \exp(-v)\exp(w)$, дифференцируемо и трансверсально регулярно к H в точке 0, так как $\nu(0 \times V_0)$ трансверсально пересекает H в точке e, по построению $\mathfrak{m}$. В силу непрерывности ν существует такая окрестность $V_1 \times V_1$ точки 0 в $V_0 \times V_0$, что ν трансверсально регулярно к H во всех

точках пересечения $\Delta = (V_1 \times V_1) \cap \nu^{-1}(H)$. Поэтому Δ естественным образом оказывается замкнутым дифференцируемым подмногообразием той же коразмерности $n-k$ в $V_1 \times V_1$, что и H в G. В некоторой окрестности $V \times V$ точки 0 относительно $V_1 \times V_1$ подмногообразие всех диагональных элементов (v, v) должно совпадать с Δ, согласно разд. 1.6. Поэтому для $v, w \in V$ включение $\exp(-v)\exp(w) = (\exp(v))^{-1}\exp(w) \in H$ выполняется в том и только том случае, если $v = w$. Следовательно, непрерывное отображение $\bar{x}^{-1} = f \circ \exp\colon V \to G/H$ инъективно. Покажем, что $\bar{x}^{-1}$ гомеоморфно вкладывает открытое множество $V \subset \mathfrak{m}$ в G/H. Для этого остается только проверить, что $\bar{x}^{-1}$ — открытое отображение. Дифференцируемое отображение $z\colon V \times H \to G$, заданное формулой $z(v, h) = \exp(v)h$, инъективно и всюду имеет максимальный ранг n, так как по построению V образ $z(V \times e) = \exp(V)$ трансверсально пересекает каждый класс смежности $\exp(v)H$ (в точке $\exp(v)$). Тем самым z диффеоморфно отображает дифференцируемое многообразие $V \times H$ на „трубчатую окрестность" подгруппы H в G. Так как для любого открытого подмножества $U \subset V$ имеем $\bar{x}^{-1}(U) = f \circ z(U \times H)$, то $\bar{x}^{-1}$ открыто вместе с z. Определенное в окрестности $W = \bar{x}^{-1}(V) = f \circ z(V \times H)$ точки $\bar{e} \in G/H$ обратное отображение $\bar{x}$ есть гомеоморфизм в векторное пространство $\mathfrak{m}$. Легко показать, что „канонические карты" $\{\bar{x} \circ \bar{L}_g|_{g \in G}\}$ составляют дифференцируемый атлас, превращающий естественным образом однородное пространство G/H в дифференцируемое многообразие, причем $\dim G/H = \dim \mathfrak{m} = n - k$. Сдвиги $\bar{L}_g$ становятся при этом диффеоморфизмами, f — дифференцируемым с максимальным рангом, следовательно, дифференцируемо с максимальным рангом и действие G на G/H, т. е. отображение $G \times G/H \to G/H$ по правилу $(g, \bar{h}) \to \bar{L}_g \bar{h}$.

Попутно мы доказали более сильное утверждение, а именно, доказано, что $f\colon G \to G/H$ есть дифференцируемое расслоение со слоем H, и даже главное расслоение, поскольку в качестве структурной группы может быть взята сама группа H, действующая при замене карт расслоения посредством левых сдвигов. Диффеоморфизм $x = (f \circ \exp \times \mathrm{id}) \circ z^{-1}\colon f^{-1}(W) \to W \times H$ задает дифференцируемый атлас канонических карт расслоения $\{(\bar{L}_g^{-1} \times \mathrm{id}) \circ x \circ L_g|_{g \in G}\}$.

Предположим теперь, что на G существует биинвариантная риманова метрика $\langle\ ,\ \rangle$ (см. замечание (v) разд. 3.2). Выберем дополнительное к $\mathfrak{h}$ подпространство $\mathfrak{m}$ ортогональным к $\mathfrak{h}$ (в $\mathfrak{g}$). Поскольку при $h \in H$ правые сдвиги R_h суть изометрии G, причем $f \circ R_h = f$, то для каждой точки $\bar{g}$ в касательном пространстве $(G/H)_{\bar{g}}$ существует одна и только одна такая риманова метрика $\langle\ ,\ \rangle_{\bar{g}}$, что f_{*g} изометрически отображает ортогональное дополне-

ние $L_{g*}\mathfrak{m}$ к $L_{g*}\mathfrak{h}$ в G_g на $(G/H)_{\bar{g}}$. Отображение $\bar{g} \to \langle\ ,\ \rangle_{\bar{g}}$ есть риманова метрика, называемая *нормальной однородной метрикой* на G/H, ее также обозначаем символом $\langle\ ,\ \rangle$. Тем самым G/H становится римановым многообразием, которое называется нормальным однородным пространством; на нем действуют диффеоморфизмы $\bar{L}_g$, порожденные левыми сдвигами G. Рассмотрим связности Леви-Чивита и соответствующие экспоненциальные отображения пространств G и G/H. Каждому дифференцируемому векторному полю X на G можно поставить в соответствие его нормальную компоненту относительно слоев L_gH, то есть дифференцируемое векторное поле $X^\perp$, удовлетворяющее для всех $g \in G$ условиям $X^\perp_g \in L_{g*}\mathfrak{m}$, $X_g - X^\perp_g \in L_{g*}\mathfrak{h}$; $X^\top = X - X^\perp$ есть „касательная к слоям" компонента X. Поле X называется нормальным, если $X = X^\perp$. Для нормального векторного поля X на G, вообще говоря, не существует f-связанного с ним векторного поля на G/H, но можно рассматривать поле f_*X вдоль f. Напротив, для каждого дифференцируемого векторного поля $\bar{X}$ на G/H существует однозначно определенное векторное поле X на G, f-связанное с $\bar{X}$, т. е. такое, что $f_*X_g = \bar{X}_{\bar{g}}$. В силу (9) разд. 3.5 для любых нормальных векторных полей X, Y, Z на G выполняется соотношение $\langle \bar{\nabla}_{fX} f_*Y, f_*Z\rangle = \langle f_*\nabla_X Y, f_*Z\rangle$, откуда следует

$$\bar{\nabla}_{fX} f_*Y = f_*(\nabla_X Y)^\perp. \tag{3}$$

Левоинвариантные поля X на G, для которых $X_e \in \mathfrak{m}$, нормальны. Согласно замечанию (vii) разд. 3.6, имеем $\nabla_X X = 0$, и все интегральные пути поля X являются геодезическими на G, а так как из (3) следует $\bar{\nabla}_{\dot{f}\circ c}\,\dot{f}\circ\dot{c}\,|_t = \bar{\nabla}_{\dot{f}} f_*\circ \dot{c}\,|_t = \bar{\nabla}_{fX} f_*X\,|_{c(t)} = f_*\nabla_X X\,|_{c(t)} = 0$, то и пути $f\circ c$ являются геодезическими на G/H, причем $\|\dot{c}\| = \|\dot{f\circ c}\|$. Все геодезические G/H можно получить проектированием геодезических G, ортогональных классам смежности L_gH, или, что то же самое, однопараметрических подгрупп с начальными направлениями в $\mathfrak{m}$. Поскольку пространство G/H однородно, достаточно, в силу (12) разд. 3.5, задать экспоненциальное отображение $\overline{\exp}$ в точке $\bar{e}$, а именно

$$\overline{\exp}\circ f_*\,|_{\mathfrak{m}} = f\circ \exp|_{\mathfrak{m}}. \tag{4}$$

Покажите, что пространство G/H полно, если оно связно. Покажите, что если G связно, то метрическое расстояние между $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ в G/H совпадает с метрическим расстоянием между подмногообразиями g_1H и g_2H в G, причем существует путь, для которого достигается минимум длины.

Вычислим теперь риманову кривизну G/H. Пусть X, Y, Z — нормальные левоинвариантные векторные поля на G. Из (3) и (7) разд. 2.5 получаем

$$\bar{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z = \bar{\nabla}_X f_*\nabla_Y Z - \bar{\nabla}_Y f_*\nabla_X Z - \bar{\nabla}_{[X,\,Y]}f_*Z.$$

Положим здесь $Z=Y$ и заметим, что поле $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ опять левоинвариантно, но, вообще говоря, не нормально, а $\nabla_Y Y = 0$ (см. замечание (viii) разд. 3.6). Отсюда $\bar{R}(f_*X, f_*Y)f_*Y = -\frac{1}{2}\bar{\nabla}_Y f_*[X, Y] - \bar{\nabla}_{[X,\,Y]}f_*Y$. Поскольку в силу (6) разд. 2.5 имеет место $\bar{\nabla}_{[X,\,Y]}f_*Y = \bar{\nabla}_Y f_*[X, Y] + f_*[[X, Y], Y]$, из (3) получаем $\bar{R}(f_*X, f_*Y)f_*Y = -\frac{3}{4}f_*[Y, [X, Y]^{\perp}] - f_*[[X, Y], Y]$. Наконец, пользуясь антисимметричностью формы $\langle [\ ,\ ],\ \rangle$ по отношению ко всем трем аргументам, имеем

$$\langle \bar{R}(f_*X, f_*Y)f_*Y, f_*X\rangle = \tfrac{1}{4}\|[X, Y]^{\perp}\|^2 + \|[X, Y]^{\top}\|^2. \tag{5}$$

Вследствие однородности и (13) разд. 3.5, достаточно найти кривизну в одной точке G/H, чтобы определить ее во всех точках. В случае когда $H=\{e\}$ есть тривиальная подгруппа G, т. е. $G/H=G$, соотношение (5) содержится в (26) разд. 3.5.

Как видно из (5), все нормальные однородные пространства имеют неотрицательную кривизну, однако в большинстве случаев при этом кривизна принимает для некоторых касательных плоскостей нулевые значения (см. разд. 7.9).

(v) Кроме применения, сделанного выше в замечании (iii), мы хотим указать некоторые дальнейшие примеры изложенного в замечании (iv) построения. На алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ общей линейной группы $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ определяется *форма Киллинга* — симметричная билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$, заданная с помощью формулы

$$2\langle \alpha, \beta\rangle = -\operatorname{tr}\alpha\beta = -\sum_{i,\,j=1}^{n+1}\alpha_{ij}\beta_{ji}. \tag{6}$$

Так как для любого эндоморфизма γ и автоморфизма η справедливо $\operatorname{tr}(\eta^{-1}\gamma\eta) = \operatorname{tr}\gamma$, левые и правые сдвиги задают на $\mathrm{GL}(n+1)$ одну и ту же биинвариантную 2-форму, ограничение которой определяет такую же форму на каждой подгруппе Ли (см. замечание (v) разд. 3.2). Однако в большинстве случаев эта форма вырождена. Пусть теперь $G=\mathrm{O}(n+1)$ — ортогональная группа (см. замечание (iv) раз. 3.2). Элементы G удовлетворяют равенству $\alpha^t\alpha = e$, а элементы касательного пространства к G в точке e — равенству $\alpha + {}^t\alpha = 0$, т. е. алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G есть под-

алгебра всех антисимметрических матриц в $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Ясно, что форма Киллинга (6) положительно определена на $\mathfrak{g}$ и задает тем самым биинвариантную риманову метрику на G.

Пусть $H \cong O(n)$ — замкнутая подгруппа G, состоящая из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O(n) \end{pmatrix}$. Нормальное однородное пространство G/H имеет размерность $\dim O(n+1) - \dim O(n) = \binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n$. Обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли подгруппы H, состоящую из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, где $*$ — антисимметрическая матрица из $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, через $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ по отношению к форме Киллинга, состоящее из всех матриц $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -{}^t a & 0 \end{pmatrix}$, где строка $a \in \mathbb{R}^n$. Для принадлежащих $\mathfrak{m}$ матриц $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -{}^t a & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -{}^t b & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\langle \alpha, \beta \rangle = (a, b)$. Выберем α, β ортонормированными в $\mathfrak{g}$, т. е. a, b ортонормированными в $\mathbb{R}^n$. Как легко проверить, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha \in \mathfrak{h}$ и $\|[\alpha, \beta]\|^2 = 1$. Из (5) теперь следует, что G/H — пространство постоянной кривизны, равной 1. Покажите, что $G/H = O(n+1)/O(n)$ канонически изометрично стандартной сфере S^n (изометрия получается, если каждому классу смежности gH поставить в соответствие вектор $ge_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$).

Рассмотрим теперь важный пример комплексного проективного пространства $P^n(\mathbb{C})$. Общая линейная группа $GL(n+1, \mathbb{C})$ всех комплексных линейных автоморфизмов $(n+1)$-мерного комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ есть группа Ли действительной размерности $2(n+1)^2$, алгебра Ли которой $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ состоит из всех эндоморфизмов $\mathbb{C}^{n+1}$ или из всех матриц $(n+1)$-го порядка с комплексными коэффициентами. Как и в действительном случае, легко проверить, что $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ для $\alpha, \beta \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$. На алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$ снова определяется форма Киллинга

$$2\langle \alpha, \beta \rangle = -\operatorname{Re} \operatorname{tr} \alpha\beta = -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ji}, \tag{6'}$$

задающая биинвариантную симметрическую 2-форму $\langle\ ,\ \rangle$ на $GL(n+1, \mathbb{C})$ и на каждой подгруппе Ли этой группы (Re здесь означает действительную часть комплексного числа).

Рассмотрим компактную подгруппу Ли $G = \mathrm{U}(n+1)$ группы $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$, состоящую из всех унитарных автоморфизмов α пространства $\mathbb{C}^{n+1}$, т. е. удовлетворяющих равенству $\alpha\,{}^t\bar{\alpha} = e$. Касательное пространство к G в точке e задается условием $\alpha + {}^t\bar{\alpha} = 0$, т. е. алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G есть подалгебра $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, состоящая из всех антиэрмитовых матриц. Легко видеть, что $\dim G = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = (n+1)^2$. Форма Киллинга (6′) положительно определена на $\mathfrak{g}$ и определяет тем самым биинвариантную риманову метрику на G. Пусть $U(1) \cong S^1$ есть группа комплексных чисел, по модулю равных 1. Рассмотрим в G замкнутую подгруппу $\begin{pmatrix} U(1) & 0 \\ 0 & U(n) \end{pmatrix}$. Нормальное однородное пространство G/H имеет размерность $\dim U(n+1) - \dim U(n) - \dim U(1) = 2n$. Покажите, что $G/H = U(n+1)/U(1) \times U(n)$ канонически диффеоморфно комплексному проективному пространству $P^n(\mathbb{C})$ (см. замечание (v) разд. 1.7). Чтобы построить диффеоморфизм, каждому классу смежности gH, $g \in G$, ставится в соответствие комплексная прямая $\lambda g e_1$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Нормальная риманова метрика на $P^n(\mathbb{C}) = G/H$ совпадает с классической метрикой Фубини — Штуди. Вычислим, используя формулу (5), риманову кривизну G/H. Обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли подгруппы H, состоящую из всех матриц вида $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, где $u \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, u = 0$ и $*$ — антиэрмитова матрица из $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, и через $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга, состоящее из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -{}^t\bar{a} & 0 \end{pmatrix}$, где строка $a \in \mathbb{C}^n$. Для принадлежащих $\mathfrak{m}$ матриц $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -{}^t\bar{a} & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -{}^t\bar{b} & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\langle \alpha, \beta \rangle = \mathrm{Re}\langle a, b \rangle$, где $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$ — обычное эрмитово скалярное произведение a и b в $\mathbb{C}^n$. Выберем α, β ортонормированными в $\mathfrak{m}$, т. е. $\|a\|^2 = \|b\|^2 = 1$, $\mathrm{Re}\langle a, b \rangle = 0$. Легко проверить, что $[\alpha, \beta] \in \mathfrak{h}$, так что $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{h}$, и, как показывает непосредственное вычисление, $\|[\alpha, \beta]\|^2 = 1 + 3|\langle a, b \rangle|^2$ (заметим, что $\langle a, b \rangle$ при этом чисто мнимо). Отсюда

$$[\alpha, \beta]^{\perp} = 0, \quad \|[\alpha, \beta]^{\top}\|^2 = \|[\alpha, \beta]\|^2 = 1 + 3|\langle a, b \rangle|^2 = 1 + 3\cos^2\psi, \qquad (7)$$

где $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ задается равенством $\cos\psi = |\langle a, b \rangle|$. Здесь ψ обозначает угол между одномерными комплексными линейными подпространствами $\{\lambda a\colon \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\{\mu b\colon \mu \in \mathbb{C}\}$, или, что то же самое, угол между двумерным действительным линейным подпространством E в $\mathbb{C}^n$, порожденным векторами a, b, и подпространством iE,

т. е. $\cos\psi = |\cos \sphericalangle(ia, b)| = |\cos \sphericalangle(a, ib)|$. Угол ψ измеряет, насколько E отличается от комплексной прямой; $\psi = \sphericalangle(E, iE) = 0$ в точности в том случае, когда $E = iE$, т. е. E есть комплексная прямая, или „голоморфная" плоскость; $\psi = \sphericalangle(E, iE) = \frac{\pi}{2}$, т. е. E, iE ортогональны в действительном смысле, в точности в том случае, когда $\langle a, b\rangle = 0$, т. е. a, b комплексно ортогональны (в этом случае E называется „действительной" плоскостью). Из (5) и (7) следует, что G/H имеет везде положительную кривизну, лежащую между 1 и 4, причем эти границы при $n > 1$ достигаются: нижняя для касательных плоскостей, соответствующих действительным, а верхняя — голоморфным плоскостям $\mathbb{C}^n$.

Многообразие $U(2)/U(1) \times U(1) = P^1(\mathbb{C})$ имеет постоянную кривизну, равную 4, и потому (см., например, замечание (iii) разд. 7.3) изометрично сфере S^2_2.

Установим в заключение еще некоторые важные геометрические свойства проективного пространства $G/H = P^n(\mathbb{C})$.

Изометрия ι_e: $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, заданная формулой

$$\iota_e a = \begin{pmatrix} i & & & 0 \\ & -i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -{}^t\bar{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -{}^t\overline{ia} & 0 \end{pmatrix},$$

как легко проверить, определяет с помощью левых сдвигов изометрии ι_g $(g \in G)$ в пространствах $L_{g*}\mathfrak{m}$, инвариантные относительно правых сдвигов R_h $(h \in H)$. Вследствие этого проектирование задает на G/H дифференцируемое тензорное поле J типа (1,1), удовлетворяющее условию $J^2 = -\mathrm{id}$. Такое поле называется *почти комплексной структурой*, так как определяет в каждом касательном пространстве комплексную структуру — умножение на i. В действительности J есть даже комплексная структура на G/H, т. е. J индуцируется естественной структурой $P^n(\mathbb{C})$, рассматриваемого как комплексное многообразие. Очевидно, $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$, $\langle JX, Y\rangle = -\langle X, JY\rangle$, и из (3) легко следует $\bar{\nabla} J = 0$, т. е. поле J параллельно. Нормируем риманову метрику $P^n(\mathbb{C})$ умножением на 4, тогда, согласно предыдущим вычислениям, получаем

$$4K_\sigma = 1 + 3\cos^2\psi, \quad \frac{1}{4} \leqslant K_\sigma \leqslant 1, \tag{8}$$

где $\psi = \sphericalangle(\sigma, J\sigma) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos\psi = |\langle v, Jw\rangle|$ для любой ортонормированной пары векторов v, w из σ. При этом $K_\sigma = 1$ в точности в тех случаях, когда σ — голоморфная плоскость (т. е. $\sigma = J\sigma$), и $K_\sigma = \frac{1}{4}$ в точности в тех случаях, когда σ — действительная

плоскость (т. е. $\langle \sigma, J\sigma \rangle = 0$). Пространство $P^n(\mathbb{C})$ имеет $\frac{1}{4}$-ограниченную кривизну. Как вытекает из теоремы о сфере (см. разд. 7.8), на $P^n(\mathbb{C})$ не существует никакой метрики δ-ограниченной кривизны с $\delta > \frac{1}{4}$.

Как мы сейчас увидим, $P^n(\mathbb{C})$ есть глобально симметрическое пространство (см. замечание (vii) разд. 3.6). Отражение относительно точки задается отражением относительно соответствующей прямой комплексного пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. В однородном представлении $P^n(\mathbb{C}) = G/H$ это отражение в точке $\bar{g}$ есть изометрия $\overline{L}_{ghg^{-1}}$ пространства G/H, где

$$h = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix} \in H.$$

Исследуйте с помощью (8) и замечания (v) разд. 4.2 тензор кривизны и поля Якоби вдоль нормальной геодезической $P^n(\mathbb{C})$.

В силу (4) экспоненциальное отображение для $P^n(\mathbb{C})$ будет полностью определено, если найти $\exp|_{\mathfrak{m}}$ для унитарной группы G. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -{}^t\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}$ и $\|\alpha\| = 1$, тогда $\alpha^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\bar{a}_i a_j \end{pmatrix}$, $\alpha^3 = -\alpha$, $\alpha^4 = -\alpha^2$, и вообще $\alpha^{2k} = (-1)^{k+1}\alpha^2$, $\alpha^{2k-1} = (-1)^{k+1}\alpha$ для $k > 0$. Согласно замечанию (ii) разд. 2.9, однопараметрическая подгруппа (и одновременно нормальная геодезическая) c: $\mathbb{R} \to G$ с начальным условием $\dot{c}(0) = \alpha$ в точке $c(0) = e$ задается формулой $c(t) = \exp(t\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^k}{k!}$, откуда

$$c(t) = \exp(t\alpha) = e + \alpha \sin t + \alpha^2(1 - \cos t). \tag{9}$$

Так как $c(t) \in H$ в точности для значений $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, и $c(t + \pi) = c(t)\,c(\pi)$, то все нормальные геодезические $\mathbb{R} \to P^n(\mathbb{C})$ периодичны с периодом 2π (следует учесть нормировку метрики).

Пользуясь найденными выше значениями кривизны вдоль нормальной геодезической, легко показать, что экспоненциальное отображение $\exp_p$: $M_p \to M = P^n(\mathbb{C})$ имеет максимальный ранг ($= 2n$) во всех точках $v \in M_p$, для которых $\|v\| \neq k\pi$ (k — положительное целое число). Если $\|v\| = (2k-1)\pi$, то ядро Λ_p^v отображения $(\exp_p)_{*v}$ имеет размерность 1, если же $\|v\| = 2k\pi$, — размерность $2n-1$.

Метрические сферы в M_p радиуса $2k\pi$ с центром в 0 переводятся отображением $\exp_p$ в точку p. Согласно (1), $\exp_p$ инъективно на открытом шаре радиуса 1 с центром в 0, а также вследствие периодичности геодезических диффеоморфно вкладывает „кольцевые области“ $(2k-1)\pi<\|v\|<2k\pi$ в $P^n(\mathbb{C})$. Сфера $S=\{v\colon \|v\|=\pi\}$ является одновременно множеством раздела и первым сопряженным множеством отображения $\exp_p$ в M_p, а образ $C(p)=\exp S$ — множеством раздела M относительно точки p (см. разд. 5.4).

Легко доказать следующее общее предложение: каждая компонента связности множества неподвижных точек некоторой изометрии риманова многообразия на себя есть вполне геодезическое замкнутое риманово подмногообразие.

Так как $\{p\}\cup C(p)$ есть множество всех неподвижных точек отражения симметрического пространства $P^n(\mathbb{C})$ в точке p, то $C(p)$ — вполне геодезическое подмногообразие M. Рассмотрим теперь голоморфные плоскости $\sigma=J\sigma$ в M_p^*, т. е. комплексные прямые в пространстве M_p, снабженном комплексной структурой с помощью J. Построим аналогично отражению в точке, описанному выше, изометрию $F=\bar{L}_{ghg^{-1}}$ пространства $M=G/H$ на себя с неподвижной точкой $p=\bar{g}$, такое, что $F_*v=v$ для $v\in\sigma$ и $F_*v=-v$, если v ортогонально σ. Тогда $N=\exp(\sigma)$ есть компонента связности множества неподвижных точек F и, следовательно, вполне геодезическое подмногообразие M. Далее, все касательные плоскости к N голоморфны, так что N имеет постоянную кривизну $K_\sigma=1$ и, следовательно, изометрично $S^2\cong P^1(\mathbb{C})$. Далее, окружность $\sigma\cap S$ переходит при отображении $\exp_p$ в одну точку $q\in C(p)$ и пространство Λ_p^v в точке $v\in\sigma\cap S$ касательно к $\sigma\cap S$. Соответствие $\sigma\to q$ задает теперь отображение проективного пространства $P^{n-1}(\mathbb{C})$ всех комплексных прямых σ пространства M_p в многообразие M, дифференцируемое с максимальным рангом. Так как $P^{n-1}(\mathbb{C})$ односвязно, это отображение есть диффеоморфизм на $C(p)$. Легко показать, что если ввести в $P^{n-1}(\mathbb{C})$ метрику, индуцированную M_p, с учетом нормировки (8), то построенный только что диффеоморфизм $P^{n-1}(\mathbb{C})\to C(p)$ есть изометрия.

Итак, комплексное проективное пространство можно представить себе как „пучок“ вполне геодезических голоморфных сфер $S^2\cong P^1(\mathbb{C})$ постоянной кривизны, пересекающихся в одной, произвольно выбранной на $P_n(\mathbb{C})$ точке p, причем антиподы точки p на этих сферах образуют множество раздела $C(p)\cong\cong P^{n-1}(\mathbb{C})$, вполне геодезическое и изометрично вложенное в $P^n(\mathbb{C})$. Расстояние от p до множества раздела $C(p)$ в любом направлении равно π, поэтому диаметр $\rho_M=\pi$.

(vi) Мы уже рассматривали в этом разделе и выше периодические геодезические c: $\mathbb{R} \to M$ на римановом многообразии M (т. е. такие, что $c(t+\tau) = c(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, где $\tau > 0$).

Отныне мы не будем различать периодические геодезические, переходящие друг в друга при аффинном преобразовании параметра. В частности, отождествим все периодические геодезические, получаемые многократным обходом c в любом направлении, и исключим из рассмотрения тривиальные геодезические.

Приняв все эти условия, мы можем рассматривать периодическую геодезическую как „аффинное" погружение $S^1 \to M$, при котором длины дуг растягиваются в постоянном отношении.

Возникает весьма интересный вопрос, всегда ли на M существуют периодические геодезические, и в каком числе. Если M компактно, можно доказать общие теоремы, относящиеся к этому вопросу. Как мы видели в замечании (vi) разд. 7.2, периодические геодезические существуют, если $\pi_1(M) \neq 0$. В этом случае в каждом нетривиальном классе свободно гомотопных замкнутых путей множества Ω всех замкнутых кусочно дифференцируемых путей существует по крайней мере одна периодическая геодезическая, длина которой минимальна в этом классе. Классы свободной гомотопии находятся в каноническом взаимно однозначном соответствии с множеством классов сопряженности группы $\pi_1(M)$. Поэтому несопряженные элементы $a, b \in \pi_1(M)$ определяют различные периодические геодезические, если между ними не существует никакого соотношения вида $a^\mu b^\nu = 1$ с отличными от нуля целыми числами μ, ν. Получите, используя замечание (i) разд. 7.2, что на каждом двумерном компактном римановом многообразии M^2, не гомеоморфном S^2 или $P^2(\mathbb{R})$, существует бесконечное множество различных периодических геодезических (достаточно рассмотреть случай ориентируемого M^2, так как иначе можно перейти к риманову ориентированному двулистному накрытию).

В случае когда M односвязно, задача становится существенно труднее. Пуанкаре впервые доказал существование периодической геодезической для любой аналитической римановой метрики на S^2, а Биркгоф распространил этот результат на S^n. Лишь в 1951 году Л. А. Люстерник и А. И. Фет доказали, что на каждом компактном римановом многообразии M существует периодическая геодезическая. В последние годы С. И. Альбер, А. И. Фет и В. Клингенберг получили лучшие оценки числа периодических геодезических на M, зависящие отчасти от топологического строения, отчасти же от римановой структуры M. Наилучшей вполне универсальной нижней оценкой является 3[1]).

[1]) В действительности наилучшей оценкой пока является 2 (см. Фет А. И., *ДАН СССР*, 160, № 2 (1965)). Относительно современного состояния вопроса см. Klingenberg W., *Ann. of Math.* 89 (1969), 68–91. – *Прим. перев.*

Недавно удалось доказать для весьма широкого класса компактных односвязных римановых многообразий M существование бесконечного множества периодических геодезических. Это верно, например, если M имеет гомотопический тип произведения сфер $S^m \times S^k$ (см. Gromoll D. and Meyer W., *Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds*, Berkeley, препринт). Разумно предположить, что при $\dim M > 1$ на M всегда существует бесконечное число периодических геодезических (см. соответствующий результат Серра в замечании (iii) разд. 5.3 для геодезических с заданными концами [1]).

При доказательстве всех результатов этого рода существенно используется теория Морса на пространстве замкнутых путей Ω.

7.6. Основная теорема теории Морса

В этом разделе вводятся некоторые топологические понятия и доказывается основной результат теории Морса, который будет применен в дальнейшем.

Пусть X — топологическое пространство и A — подпространство X, тогда (X, A) называется парой пространств, причем в случае пустого подпространства $\varnothing \subset X$ пара $(X, \varnothing)$ отождествляется с пространством X. Непрерывным отображением пар $f\colon (X, A) \to (X', A')$ называется непрерывное отображение $f\colon X \to X'$, для которого $f(A) \subset A'$. Два непрерывных отображения f, $g\colon (X, A) \to (X', A')$ называются *гомотопными* ($f \sim g$), если существует такое непрерывное отображение $H\colon (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (X', A')$, что $H(a, 0) = f(a)$ и $H(a, 1) = g(a)$ для всех $a \in X$. При этом H называется *гомотопией* между f и g, или непрерывной деформацией f в g. Отношение „$\sim$“ есть отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений $(X, A) \to (X', A')$. Пары пространств (X, A), (X', A') называются *гомотопически эквивалентными* ($(X, A) \sim (X', A')$), если существуют такие непрерывные отображения $f\colon (X, A) \to (X', A')$ и $f'\colon (X', A') \to (X, A)$, которые гомотопически обратны друг другу, т. е. $f' \circ f \sim \mathrm{id}_{(X, A)}$ и $f \circ f' \sim \mathrm{id}_{(X', A')}$. В этом случае f, f' называются гомотопическими эквивалентностями. Говорят также, что (X, A) и (X', A') имеют одинаковый „гомотопический тип“. Гомотопическая эквивалентность $(X, A) \to (X', A')$ естественным образом индуцирует гомотопические эквивалентности $X \to X'$ и $A \to A'$. Важнейшие алгебраические инварианты типа гомеоморфизма топологических пространств, например группы гомологий и гомотопические группы, суть также инварианты их гомотопического типа. Легко проверить, например, что $\mathbb{R}^n$ имеет гомотопический

[1]) Это предположение не кажется убедительным, равно как и ссылка на результат Серра. — *Прим. перев.*

тип одноточечного пространства, т. е. „стягиваемо“, что $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ и $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n) \sim (D^n, S^{n-1})$, где $D^n = \{a \in \mathbb{R}^n: \|a\| \leqslant 1\}$.

Пусть X, X' — топологические пространства, B — подпространство X' и f: $B \to X$ — непрерывное отображение. Тогда можно построить новое топологическое пространство $X \cup_f X'$ „склеиванием X и X' посредством отображения f“. Для этого рассмотрим объединения непересекающихся множеств $X \cup X'$, $X \cup (X' \setminus B)$ и отображение g: $X \cup X' \to X \cup (X' \setminus B)$, заданное формулой $g(a) = f(a)$ при $a \in B$ и формулой $g(a) = a$ в остальных точках. Введем в $X \cup X'$ топологию суммы пространств: множество U называется открытым в $X \cup X'$ в том и только том случае, если $U \cap X$ открыто в X и $U \cap X'$ открыто в X'. Введем, далее, во множестве $X \cup (X' \setminus B)$ топологию отождествления, т. е. слабейшую топологию, в которой g непрерывно. Это означает, что множество V называется открытым в $X \cup (X' \setminus B)$ в том и только том случае, если $g^{-1}(V)$ открыто в $X \cup X'$. Полученное пространство обозначается через $X \cup_f X'$. Для целого $k \geqslant 0$ определены „стандартная k-мерная клетка“ $D^k = \{a: a \in \mathbb{R}^k, \|a\| \leqslant 1\}$ с относительной топологией $\mathbb{R}^k$ и подпространство $S^{k-1} = \partial D^k \subset D^k$, $S^{k-1} = \{a: a \in \mathbb{R}^k, \|a\| = 1\}$, причем D^0 есть одноточечное пространство, а $S^{-1} = \varnothing$. Пусть X — топологическое пространство и f: $S^{k-1} \to X$ — непрерывное отображение. Пару $e_k = (D^k, f)$ назовем k-мерной клеткой, приклеенной к X с помощью f, и определим топологическое пространство $X \cup e_k = X \cup_f D^k$ ($X \cup e_0$ есть просто топологическая сумма X и e_0). Если, например, X — одноточечное пространство, то D^k можно приклеить к X единственным способом, и $X \cup e_k$ гомеоморфно S^k. В случае когда $X = S^1$, для постоянного отображения $S^1 \to S^1$ пространство $X \cup e_2$ гомеоморфно $S^1 \vee S^2$ — „букету“, полученному отождествлением одной точки S^1 с одной точкой S^2. С другой стороны, если воспользоваться тождественным отображением $S^1 \to S^1$, то $X \cup e_2$ гомеоморфно D^2. Заметим, что $S^1 \vee S^2$ и D^2 не являются гомотопически эквивалентными, так как их фундаментальные группы не изоморфны: $\pi_1(S^1 \vee S^2) \cong \mathbf{Z} \neq 1 = \pi_1(D^2)$.

Топологическое пространство X называется линейно связным, если для любых двух точек a, $b \in X$ существует непрерывный путь h: $[0, 1] \to X$, соединяющий a с b, т. е. такой, что $h(0) = a$, $h(1) = b$. X есть топологическая сумма компонент линейной связности — классов эквивалентности точек по отношению „$a \sim b$ тогда и только тогда, когда a можно соединить с b путем в X“ [1]). Обо-

[1]) Термин „линейная связность“ употребляется, таким образом, в двух разных смыслах. Переводчик не нашел способа избежать такого положения, так как и в том и в другом случае эти термины являются общепринятыми. — *Прим. перев.*

значим через $\pi_0(X)$ множество всех компонент линейной связности X. Если это множество состоит из одного элемента, т. е. X линейно связно, будем писать $\pi_0(X)=1$. Каждое непрерывное отображение $f\colon X\to X'$ индуцирует отображение $f_*\colon \pi_0(X)\to\pi_0(X')$, а именно, компоненте линейной связности точки $a\in X$ ставится в соответствие компонента линейной связности точки $f(a)\in X'$; если $g\colon X\to X'$ гомотопно f, то $f_*=g_*$. Индуцированное отображение для композиции непрерывных отображений есть композиция соответствующих индуцированных отображений. В случае когда f — гомотопически обратное отображению f', имеем $f'_*\circ f_*=(f'\circ f)_*=\mathrm{id}_*$ и соответственно $f_*\circ f'_*=\mathrm{id}_*$, т. е. отображения f_*, f'_* биективны и взаимно обратны. В частности, X линейно связно в том и только том случае, если X' линейно связно. Рассмотрим k-мерную клетку e_k, приклеиваемую к X непрерывным отображением. Естественное включение $i\colon X\to X\cup e_k$ непрерывно, и при $k\geqslant 2$ отображение $i_*\colon \pi_0(X)\to\pi_0(X\cup e_k)$ биективно. В самом деле, линейно связное пространство D^k приклеивается в точности к одной компоненте линейной связности X, так как край S^{k-1} линейно связен. При $k=0$ отображение i_*, очевидно, инъективно, но не сюръективно, при $k=1$ — сюръективно, но не обязательно инъективно, как видно из примера $X\cup e_1=S^0\cup_{\mathrm{id}}D^1$.

Основная идея теории Морса состоит в том, что гомотопический тип (а при более тонком изучении даже тип диффеоморфии) m-мерного риманова многообразия N характеризуется поведением дифференцируемой функции $\varphi\colon N\to\mathbb{R}$ в ее критических точках, предполагая, что φ имеет только невырожденные критические точки, т. е. что гессиан φ в каждой критической точке не вырожден (заметим, что понятие „невырожденной критической точки φ“ зависит лишь от дифференциальной структуры на N).

Рассмотрим для каждого действительного числа α подпространство $N^\alpha=\{a\colon \varphi(a)\leqslant\alpha\}$ многообразия N. Если α — регулярное значение, принадлежащее образу φ, то „поверхность уровня“ $\varphi^{-1}(\alpha)$, согласно разд. 1.6, есть замкнутое дифференцируемое подмногообразие N коразмерности 1, а N^α — дифференцируемое подмногообразие с краем $\partial N^\alpha=\varphi^{-1}(\alpha)$. Пусть $\beta<\alpha$ — другое регулярное значение, принадлежащее образу φ, причем $\varphi^{-1}[\alpha,\beta]$ компактно. Если $[\alpha,\beta]$ не содержит критических точек φ, то N^β можно каноническим образом деформировать в N^α вдоль интегральных путей $-\frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|^2}$ и включение $N^\alpha\subset N^\beta$ есть гомотопическая эквивалентность. Последнее утверждение, вообще говоря, неверно, если φ имеет критические точки в $\varphi^{-1}[\alpha,\beta]$. Число их должно быть конечно, так как было сделано предположение, что все критические точки φ невырожденные и, следовательно, изолированные. Если,

например, a — единственная критическая точка φ в $\varphi^{-1}[\alpha, \beta]$, то N^β можно получить, с точностью до гомотопического типа, приклеивая к N^α клетку e_k: $N^\beta \sim N^\alpha \cup e_k$, где k — индекс невырожденной критической точки a, т. е. максимальная размерность линейного подпространства касательного пространства N^α, на котором гессиан h_φ — отрицательно определенная форма, т. е. на котором φ принимает строгий относительный максимум в точке 0_a. Как можно показать, существует такая карта x вокруг точки a на N, что $\varphi \circ x^{-1} = -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_m^2$.

Следующий более общий результат есть основная теорема теории Морса.

Теорема 1 (М. Морс)

Усл. *N — риманово многообразие*; φ: $N \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемая функция, все критические точки которой невырожденные.*

Пусть α, β — *регулярные значения* φ, $\varphi^{-1}[\alpha, \beta]$ *компактно и* $a_1, \ldots, a_r$ — *критические точки в* φ *в* $\varphi^{-1}[\alpha, \beta]$, $\alpha < \varphi(a_1) \leqslant \varphi(a_2) \leqslant \ldots \leqslant \varphi(a_r) < \beta$.

Утв. *Существует гомотопическая эквивалентность*

$$(N^\beta, N^\alpha) \sim (N^\alpha \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, N^\alpha),$$

где k_i — *индекс критической точки* a_i *и* e_{k_i} — *клетки размерностей* k_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, *последовательно приклеиваемые к* N^α *с помощью некоторых отображений.*

При этом не исключается, что N^α (или множество критических точек в $\varphi^{-1}[\alpha, \beta]$) пусто. Далее, можно выбрать такие гомотопические эквивалентности и гомотопии, при которых N^α неподвижно.

Рассмотрим в качестве примера $N = S^n$ и функцию расстояния φ: $S^n \to \mathbb{R}$ от некоторой аффинной касательной гиперплоскости, например $\varphi(a) = 1 + a_{n+1}$. Критические точки φ — южный и северный полюсы. Это невырожденные критические точки индексов 0 и n, в которых φ достигает абсолютного минимума и максимума. Согласно теореме, $S^n \sim e_0 \cup e_n$. Другой простой пример — тор $N = T^2$ в $\mathbb{R}^3$ с функцией расстояния φ: $T^2 \to \mathbb{R}$ от аффинной касательной плоскости в точке $(R + r, 0, 0)$, т. е. $\varphi(a) = R + r - a_1$. Функция φ имеет четыре (невырожденные) критические точки: минимум индекса 0, две седловые точки индекса 1 и максимум индекса 2, так что $T^2 \sim e_0 \cup e_1 \cup e_1 \cup e_2$. Нетрудно в этом случае указать явное описание всех соответствующих гомотопических типов N^α для регулярных значений α функции φ.

Док. См. Милнор Дж., *Теория Морса*, М., 1965. (Многие разделы этой книги посвящены римановой геометрии.)

Заслуживает внимания тот факт, что последняя теорема в почти неизмененной формулировке справедлива также в случае, когда N — бесконечномерное риманово многообразие. При этом приходится, однако, ввести добавочные предположения, заменяющие требование компактности $\varphi^{-1}[\alpha, \beta]$ в конечномерном случае (см. Palais R., *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology 2 (1963), 229 — 340, и Abraham R., *Foundations of mechanics*, New York (1967)). Особенно важным примером является пространство $\hat{\Omega}_{pq}$, получаемое пополнением пространства Ω_{pq} всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$ полного n-мерного риманова многообразия M, соединяющих точку p с точкой q. Пополнение состоит из всех абсолютно непрерывных путей $[0, 1] \to M$, у которых существует энергия; $\hat{\Omega}_{pq}$ каноническим образом снабжено структурой гильбертова многообразия. При этом функция энергии E: $\hat{\Omega}_{pq} \to \mathbb{R}$ дифференцируема, критические точки E суть в точности геодезические из Ω_{pq}. Все они невырожденные, если пространство Ω_{pq} невырожденное (см. следующие разделы, а также замечания (i) и (ii) разд. 4.1). Тогда к $N = \hat{\Omega}_{pq}$ и $\varphi = E$ применимо обобщение теоремы 1 на гильбертовы многообразия, согласно которому $(\hat{\Omega}^{\beta}_{pq}, \hat{\Omega}^{\alpha}_{pq}) \sim (\hat{\Omega}^{\alpha}_{pq} \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, \hat{\Omega}^{\alpha}_{pq})$, где $c_1, \ldots, c_r$ — существующие в конечном числе критические точки E на множестве $E^{-1}[\alpha, \beta]$, $\alpha < E(c_1) \leqslant \ldots \leqslant E(c_r) < \beta$, а k_i — индекс критической точки c_i, совпадающий в этом случае с индексом геодезической c_i в смысле § 4 (см. также замечание (iii) разд. 4.5 и замечание (ii) разд. 4.6). Заметим, что для упрощения записи мы определили и индексную форму для нормальных геодезических; индексом любой нетривиальной геодезической c: $[0, 1] \to M$, естественно, называется индекс совмещенной с ней нормальной геодезической $[0, L(c)] \to M$, индекс же тривиальной геодезической полагается равным нулю.

Теорию Морса для пространства $\hat{\Omega}_{pq}$ путей по различным причинам естественно и целесообразно строить, рассматривая вместо длины L энергию E. Например, в отличие от энергии L не везде дифференцируема, как это уже указывалось в замечании (i) разд. 4.1. Все предыдущие соображения служат, однако, лишь мотивировкой описываемого ниже построения.

Пусть M — связное риманово многообразие с функцией расстояния ρ; c: $[\tau, \tau'] \to M$ — кусочно дифференцируемый путь. Энергия определяется формулой $E(c) = \int_{\tau}^{\tau'} \| \dot{c} \|_t^2 \, dt$. В силу неравенства Коши

имеем

$$\left(\int_\tau^{\tau'} 1 \cdot \|\dot c\|_t\, dt\right)^2 \leqslant \left(\int_\tau^{\tau'} 1\, dt\right) \cdot \left(\int_\tau^{\tau'} \|\dot c\|_t^2\, dt\right),$$

откуда

$$\rho^2(c(\tau),\ c(\tau')) \leqslant L^2(c) \leqslant (\tau' - \tau) E(c). \qquad (1)$$

При этом равенство в правой части соблюдается тогда и только тогда, когда $\|\dot c\|$ постоянна, или, что то же самое, c „параметризована пропорционально длине дуги“ (в частности, это верно для геодезической c). Равенство в левой части соблюдается тогда и только тогда, когда c совмещена с кратчайшей геодезической, соединяющей $c(\tau)$ с $c(\tau')$ (см. разд. 4.4). Таким образом, $\rho^2(c(\tau), c(\tau')) = (\tau' - \tau) E(c)$ только в случае, когда c — геодезическая длины $\rho(c(\tau), c(\tau'))$. Легко видеть, что существуют совмещенные с c пути $[\tau, \tau'] \to M$ сколь угодно большой энергии.

Пусть $p, q \in M$. Введем на множестве Ω_{pq} всех кусочно дифференцируемых путей $[0, 1] \to M$, соединяющих p с q, топологию с помощью расстояния $\hat\rho$:

$$\hat\rho(c_0, c_1) = \sup_{t \in [0,1]} \rho(c_0(t), c_1(t)) + \left[\int_0^1 (\|\dot c_0\| - \|\dot c_1\|)_t^2\, dt\right]^{1/2}. \qquad (2)$$

Принимая шары в метрике $\hat\rho$ за базис топологии в Ω_{pq}, превращаем Ω_{pq} в топологическое пространство. Благодаря второму члену в правой части (2), эта топология сильнее компактно-открытой топологии Ω_{pq}. Вследствие этого энергия E: $\Omega_{pq} \to \mathbb{R}$ оказывается непрерывной. Длина дуги L: $\Omega_{pq} \to \mathbb{R}$ также непрерывна, так как

$$|L(c_0) - L(c_1)|^2 = \left[\int_0^1 (\|\dot c_0\| - \|\dot c_1\|)_t\, dt\right]^2 \leqslant \int_0^1 (\|\dot c_0\| - \|\dot c_1\|)_t^2\, dt.$$

Отметим еще, что в силу (1) выполняется неравенство $L^2 \leqslant E$ и, кроме того, $L^2(c) = E(c)$ для геодезических $c \in \Omega_{pq}$. Каждый путь h: $[0, 1] \to \Omega_{pq}$, соединяющий c_0 с c_1, задает (p, q)-гомотопию H: $[0, 1] \times [0, 1] \to M$ между c_0 и c_1 по формуле $H(t, s) = [h(s)](t)$. Однако, для (p, q)-гомотопии H между c_0 и c_1 отображение $[0, 1] \to \Omega_{pq}$, заданное формулой $s \to H_s$, не обязательно непрерывно. В „пространстве петель“ Ω_{pp} последовательное прохождение путей задает закон композиции, превращающий Ω_{pp} в H-пространство, т. е. в топологическую группу „с точностью до гомотопии“. Этот закон композиции порождает групповую структуру в $\pi_0(\Omega_{pp})$, причем по определению фундаментальной группы M имеем $\pi_1(M) \cong$

$\cong \pi_1(M, p) = \pi_0(\Omega_{pp})$ (ср. разд. 7.2 и замечание (i) разд. 7.1, согласно которому для (p, q)-гомотопных путей $c_0, c_1 \in \Omega_{pq}$ существует кусочно дифференцируемая (p, q)-гомотопия H между c_0 и c_1 и отображение $[0, 1] \to \Omega_{pq}$, заданное формулой $s \to H_s$, есть непрерывный путь в Ω_{pq} с началом c_0 и концом c_1).

Упомянем еще в этой связи, что если обозначить через Ω^*_{pq} множество всех путей $[0, 1] \to M$, соединяющих p с q, с компактно-открытой топологией, то естественное включение i: $\Omega_{pq} \to \Omega^*_{pq}$ непрерывно (можно показать, что это отображение есть гомотопическая эквивалентность).

Построим для действительных чисел α подпространства $\Omega^\alpha_{pq} = \{c: E(c) \leqslant \alpha\}$ пространства Ω_{pq}. Пространство Ω_{pq} называется *невырожденным*, если для каждой геодезической $c \in \Omega_{pq}$ точка 1 не является сопряженной точкой c. Согласно разд. 7.7, для каждой точки $p \in M$ существуют такие $q \in M$, что Ω_{pq} — невырожденное. Если Ω_{pq} — невырожденное, то для каждого α Ω^α_{pq} содержит лишь конечное число геодезических (см. замечание (v) разд. 4.6). В частности, множество всех таких чисел β, что Ω_{pq} не содержит геодезических энергии β, всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Теперь мы докажем для энергии E: $\Omega_{pq} \to \mathbb{R}$ аналог теоремы 1; для этого мы заменим подпространства $\Omega^\alpha_{pq} \subset \Omega_{pq}$ гомотопически эквивалентными им конечномерными многообразиями ломаных геодезических, после чего применим теорему 1. При этом существенное преимущество энергии перед длиной состоит в том, что, с одной стороны, Ω^α_{pq} оказывается множеством равностепенно непрерывных отображений; с другой же стороны, в то время как метрика ρ дифференцируема лишь в некоторой окрестности U диагонали $M \times M$, за исключением самой диагонали, функция ρ^2 дифференцируема на всей U. Замена подпространств Ω^α_{pq}, „исчерпывающих“ Ω_{pq}, их конечномерными моделями и есть первоначальный метод Морса, примененный им для изучения топологического строения пространств путей на полных римановых многообразиях (см. книги Морса и Зейферта — Трельфалля, литература к § 4).

Теорема 2 (М. Морс)

Усл. *M — полное риманово многообразие; $p, q \in M$; Ω_{pq} не вырождено; E: $\Omega_{pq} \to \mathbb{R}$ — энергия. Пусть числа $\alpha < \beta$ выбраны так, что в Ω_{pq} нет геодезических со значениями энергии α или β, и $c_1, \ldots, c_r$ — геодезические, принадлежащие $E^{-1}[\alpha, \beta]$,*

$$\alpha < E(c_1) \leqslant \ldots \leqslant E(c_r) < \beta.$$

Утв. *Существует гомотопическая эквивалентность*

$$(\Omega^{\beta}_{pq}, \Omega^{\alpha}_{pq}) \sim (\Omega^{\alpha}_{pq} \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, \Omega^{\alpha}_{pq}),$$

где e_{k_i} *— клетки размерностей* $k_i = \operatorname{Ind} c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, *последовательно приклеиваемые с помощью некоторых отображений.*

При этом опять не исключается случай, когда Ω^{α}_{pq} или множество геодезических в $E^{-1}[\alpha, \beta]$ пусто.

Следствие

Усл. M *— полное односвязное риманово многообразие;* $p, q \in M$; Ω_{pq} *не вырождено. Пусть* α *— такое действительное число, что* Ω_{pq} *не содержит геодезических энергии* α.

Утв. *Если для всех геодезических* $c \in \Omega_{pq}$ *с энергией* $E(c) > \alpha$ *выполнено условие* $\operatorname{Ind} c \geqslant 2$, *то* Ω^{α}_{pq} *линейно связно.*

Док. Мы должны показать, что две точки $c_0, c_1 \in \Omega^{\alpha}_{pq}$ можно связать путем в Ω^{α}_{pq}. Поскольку M односвязно, пространство Ω_{pq} линейно связно, и существует путь h в Ω_{pq}, соединяющий c_0 с c_1. Выберем такое значение $\beta > \sup\{E(h(s)): s \in [0, 1]\}$, что Ω_{pq} не содержит геодезических энергии β. Требуемое утверждение получится, если мы докажем, что включение $j: \Omega^{\alpha}_{pq} \subset \Omega^{\beta}_{pq}$ индуцирует инъективное отображение $j_*: \pi_0(\Omega^{\alpha}_{pq}) \to \pi_0(\Omega^{\beta}_{pq})$. Согласно теореме, существует гомотопическая эквивалентность

$$f: (\Omega^{\alpha}_{pq}, \Omega^{\beta}_{pq}) \to (\Omega^{\alpha}_{pq} \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, \Omega^{\alpha}_{pq})$$

с гомотопически обратным отображением f' и по предположению $k_i \geqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Пусть $\bar{f}: \Omega^{\alpha}_{pq} \to \Omega^{\alpha}_{pq}$ — гомотопическая эквивалентность, полученная ограничением f. Как было уже отмечено в начале этого раздела, естественное включение $X \to X \cup e_k$ при $k \geqslant 2$ индуцирует биективное отображение $\pi_0(X) \to \pi_0(X \cup e_k)$. По индукции следует, что $i_*: \pi_0(\Omega^{\alpha}_{pq}) \to \pi_0(\Omega^{\alpha}_{pq} \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r})$ биективно, где $i: \Omega^{\alpha}_{pq} \to \Omega^{\alpha}_{pq} \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}$ — включение. Очевидно, $f \circ j = i \circ \bar{f}$, откуда $f' \circ f \circ j = f' \circ i \circ \bar{f}$, так что $j \sim f' \circ i \circ \bar{f}$ и $j_* = (f' \circ i \circ \bar{f})_* = f'_* \circ i_* \circ \bar{f}_*$ биективно.

Доказательство теоремы. Будем следовать доказательству Милнора (см. ссылку в теореме 1). Возьмем $\gamma > \beta$ и рассмотрим открытый шар B в метрике M с центром p радиуса $\sqrt{\gamma}$; $\bar{B}$ компактен, так как M полно. Пусть $\varepsilon > 0$ не больше нижней границы всех значений радиуса выпуклости r на $\bar{B}$ (см. разд. 5.2). Тогда квадрат функции расстояния ρ риманова многообразия M диф-

ференцируем на открытом множестве $(B \times B) \cap \rho^{-1}[0, \varepsilon)$ произведения $M \times M$ (см. разд. 5.1). Нам нужно представить открытое подмножество $\Omega_0 = E^{-1}[0, \gamma)$ пространства Ω_{pq}, с точностью до гомотопической эквивалентности, в виде конечномерного многообразия. Согласно (1), все пути Ω_0 принадлежат B.

Разобьем интервал $[0, 1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, так что $t_\nu - t_{\nu-1} < \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$, и определим для каждого пути $c \in \Omega_0$ кусочно дифференцируемые пути $c_\nu = c|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$. Тогда, как мы сейчас покажем,

$$\rho(c(t_{\nu-1}), c(t)) < \varepsilon, \quad t \in [t_{\nu-1}, t_\nu], \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant k. \tag{3}$$

В самом деле, $\rho(c(t_{\nu-1}), c(t)) \leqslant L(c_\nu)$ и из (1) следует

$$\rho^2(c(t_{\nu-1}), c(t)) \leqslant L^2(c_\nu) \leqslant (t_\nu - t_{\nu-1}) E(c_\nu) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\gamma} E(c) < \varepsilon^2.$$

Неравенство (3) выражает „равностепенную непрерывность" множества функций Ω_0, о которой шла речь выше. Образ каждого пути c_ν по построению принадлежит сильно выпуклому шару с центром в $c(t_{\nu-1})$ радиуса ε.

Рассмотрим пространство Ω_1 всех путей c в Ω_0, для которых c_ν есть геодезическая с $L(c_\nu) = \rho(c(t_{\nu-1}), c(t_\nu))$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$. Тогда включение $i\colon \Omega_1 \to \Omega_0$ оказывается гомотопической эквивалентностью, а именно, мы построим гомотопически обратное „ретрагирующее отображение" $g\colon \Omega_0 \to \Omega_1$, поставив в соответствие каждому пути $c \in \Omega_0$ однозначно определенную в силу (3) ломаную геодезическую $g(c) = c^* \in \Omega_1$, для которой $c^*(t_\nu) = c(t_\nu)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant k)$. Очевидно, $E(c^*) \leqslant E(c)$.

Далее, $g \circ i$ есть тождественное отображение Ω_1, гомотопия $H\colon \Omega_0 \times [0, 1] \to \Omega_0$ между тождественным отображением Ω_0 и $i \circ g$ получается следующим образом.

Положим $H(c, s) = c_s \in \Omega_0$, где $c_s|_{[0, t_{\nu-1}]} = c^*|_{[0, t_{\nu-1}]}$; $c_s|_{[t_{\nu-1}, s]}$ — кратчайшая геодезическая, соединяющая $c(t_{\nu-1})$ с $c(s)$, и $c_s|_{[s, 1]} = c|_{[s, 1]}$, если $s \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$. Ясно, что $E(c_s) \leqslant E(c) < \gamma$ для всех $s \in [0, 1]$, H непрерывно, $H(c, 0) = c$, $H(c, 1) = g(c)$. Поскольку отображение $c \to H(c, s)$ переводит в себя каждое из подпространств Ω^α_{pq}, Ω^β_{pq} пространства Ω_0 $(s \in [0, 1])$, i есть гомотопическая эквивалентность:

$$(\Omega^\beta_{pq}, \Omega^\alpha_{pq}) \sim (\Omega^\beta_1, \Omega^\alpha_1), \tag{4}$$

где $\Omega^\alpha_1 = \Omega_1 \cap \Omega^\alpha_{pq}$, $\Omega^\beta_1 = \Omega_1 \cap \Omega^\beta_{pq}$ — подпространства Ω_1.

При $k = 1$ все доказано; пусть $k \geqslant 2$.

Формула $F(c) = (c(t_1), \ldots, c(t_{k-1}))$ задает естественное отображение $F\colon \Omega_1 \to M \times \ldots \times M$ ($k - 1$ множитель), F есть гомео-

морфизм Ω_1 на некоторое открытое подмножество N в $M\times\ldots\times M$, на котором мы вводим индуцированную риманову метрику. Определим непрерывную функцию φ: $M\times\ldots\times M\to\mathbb{R}$, полагая

$$\varphi(a)=\varphi(a_1,\ldots,a_{k-1})=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\rho^2(a_{\nu-1},a_\nu)}{t_\nu-t_{\nu-1}},$$

где $a_0=p$, $a_k=q$; тогда $\varphi\circ F=E$ и φ по построению дифференцируема на N, причем $N=\{a\colon \varphi(a)<\gamma\}$. Мы применим теорему 1 к N и φ. Прежде всего с помощью F получаем гомеоморфизм

$$(\Omega_1^\beta,\ \Omega_1^\alpha)\cong(N^\beta,\ N^\alpha). \tag{5}$$

Далее, множество $\varphi^{-1}[\alpha,\beta]$ замкнуто в компактном множестве $\bar{B}\times\ldots\times\bar{B}$ и, следовательно, само компактно. Мы покажем, что $a\in N$ является критической точкой φ в том и только том случае, когда $a=F(c)$ и $c\in\Omega_1$ — геодезическая. Вначале сделаем следующее предварительное замечание.

Пусть $\tilde{B}$ — сильно выпуклый шар в метрике M и ψ: $\tilde{B}\times\tilde{B}\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, заданная формулой $\psi(r,r')=\rho^2(r,r')$. Найдем градиент и гессиан ψ. Рассмотрим геодезическую c: $[\tau,\tau']\to\tilde{B}$, для которой $c(\tau)=r$, $c(\tau')=r'$, векторы $u\in M_r$, $u'\in M_{r'}$. Построим вариацию V: $[\tau,\tau']\times J\to\tilde{B}$ геодезической c ($J\subset\mathbb{R}$ открытый интервал, содержащий 0), удовлетворяющую условиям $V_*D_2|_{\tau,0}=u$, $V_*D_2|_{\tau',0}=u'$ и такую, что пути V_η: $[\tau,\tau']\to\tilde{B}$, заданные формулой $V_\eta(t)=V(t,\eta)$, суть геодезические для всех $\eta\in J$ (в частности, $V_0=c$). Тогда имеем

$$\psi(V(\tau,\eta),\ V(\tau',\eta))=(\tau'-\tau)\int_\tau^{\tau'}\|\dot{V}_\eta\|_t^2\,dt=f(\eta);$$

по определению градиента и производной по направлению

$$\langle\nabla\psi|_{r\times r'},\ u\times u'\rangle=(u\times u')\psi=f'(0)=(\tau'-\tau)\int_\tau^{\tau'}D_2\langle V_*D_1,\ V_*D_1\rangle|_{t,0}\,dt.$$

Вследствие $\nabla_{D_1}V_*D_1=0$ имеем

$$D_2\langle V_*D_1,\ V_*D_1\rangle=2\langle V_*D_1,\ \nabla_{D_2}V_*D_1\rangle=2\langle V_*D_1,\ \nabla_{D_1}V_*D_2\rangle=$$
$$=2D_1\langle V_*D_1,\ V_*D_2\rangle,$$

откуда

$$\langle\nabla\psi|_{r\times r'},\ u\times u'\rangle=2(\tau'-\tau)\langle V_*D_1,\ V_*D_2\rangle|_{\tau,0}^{\tau',0}=$$
$$=2(\tau'-\tau)\langle-\dot{c}(\tau)\times\dot{c}(\tau'),\ u\times u'\rangle;$$

следовательно,

$$\nabla\psi|_{r\times r'}=2(\tau'-\tau)(-\dot{c}(\tau),\ \dot{c}(\tau')). \tag{6}$$

Согласно предыдущим вычислениям,

$$\nabla\psi|_{V(\tau,\eta)\times V(\tau',\eta)} = 2(\tau'-\tau)(-V_*D_1|_{\tau,\eta},\ V_*D_1|_{\tau',\eta'}),$$

так что

$$H_\psi(u\times u') = \nabla_{u\times u'}\nabla\psi = 2(\tau'-\tau)(-\nabla_{D_2}V_*D_1|_{\tau,0},\ \nabla_{D_2}V_*D_1|_{\tau',0}) =$$
$$= 2(\tau'-\tau)(-\nabla_{D_1}V_*D_2|_{\tau,0},\ \nabla_{D_1}V_*D_2|_{\tau',0}).$$

Векторное поле Y вдоль c, заданное формулой $Y(t) = V_*D_2|_{t,0}$, есть поле Якоби, в самом деле,

$$\nabla_{D_1}\nabla_{D_1}V_*D_2 + R(V_*D_2,\ V_*D_1)V_*D_1 =$$
$$= \nabla_{D_1}\nabla_{D_1}V_*D_2 + \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}V_*D_1 - \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}V_*D_1 = 0,$$

откуда $Y'' + R(Y,\dot c) = 0$. Таким образом, тензор Гессе имеет вид

$$H_\psi(u\times u') = 2(\tau'-\tau)(-Y'(\tau),\ Y'(\tau')), \tag{7}$$

где Y — поле Якоби вдоль c, удовлетворяющее условиям $Y(\tau) = u$, $Y(\tau') = u'$. Сравните эти вычисления с соответствующими вычислениями в разделах 4.1, 4.3 и с замечанием (ii) разд. 5.2.

Согласно (6), градиент φ имеет вид

$$\nabla\varphi|_a = 2(\dot c_1(t_1) - \dot c_2(t_2),\ \ldots,\ \dot c_{k-1}(t_{k-1}) - \dot c_k(t_{k-1})),$$

где $F(c) = a$, $c_\nu = c|_{[t_{\nu-1},\,t_\nu]}$, $1\leqslant\nu\leqslant k$. Поэтому $\nabla\varphi|_a = 0$ в точности тогда, когда $\dot c_\nu(t_\nu) = \dot c_{\nu-1}(t_\nu)$ при всех $\nu = 1,\ \ldots,\ k-1$, т. е. когда c — геодезическая. Согласно (7), гессиан φ в критической точке $a = F(c)$ имеет вид

$$h_\varphi(v,\ w) = 2\sum_{\nu=1}^{k}\langle X_\nu,\ Y'_\nu\rangle\Big|_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}, \tag{8}$$

где $v,\ w\in N_a$, $v = (v_1,\ \ldots,\ v_{k-1})$, $w = (w_1,\ \ldots,\ w_{k-1})$, а X_ν, Y_ν — поля Якоби вдоль c_ν, удовлетворяющие условиям

$$X_\nu(t_{\nu-1}) = v_{\nu-1},\quad Y_\nu(t_{\nu-1}) = w_{\nu-1},\quad X_\nu(t_\nu) = v_\nu,\quad Y_\nu(t_\nu) = w_\nu$$

(считаем $v_0 = w_0 = 0\in M_p$, $v_k = w_k = 0\in M_q$).

Если c — тривиальная геодезическая, то h_φ, очевидно, положительно определена вдоль a. В этом случае индекс a равен 0 и, по определению, равен индексу c.

Если c — нетривиальная геодезическая, то касательное пространство к N в точке a разлагается в ортогональную сумму, $N_a = N_a^\perp\oplus N_a^\top$, где $N_a^\perp = \{v\colon \langle v_\nu,\ \dot c(t_\nu)\rangle = 0,\ 1\leqslant\nu\leqslant k-1\}$ и $N_a^\top$ — ортогональное дополнение к $N_a^\perp$. Легко проверить, что $h_\varphi|_{N_a^\top\times N_a^\top}$ положительно определена и $h_\varphi(N_a^\perp,\ N_a^\top) = 0$; остается исследовать

$h_\varphi^\perp = h_\varphi|_{N_a^\perp \times N_a^\perp}$. Пусть $c \circ \lambda$ — совмещенная с c нормальная геодезическая, λ: $[0, L(c)] \to [0, 1]$ — другая параметризация этой же геодезической, для которой $\lambda(s) = \frac{s}{L(c)}$. Из (8) и разд. 4.5 следует $\frac{1}{2L(c)} h_\varphi^\perp(v, w) = I(X \circ \lambda, Y \circ \lambda)$, где X, Y — ломаные поля Якоби вдоль c с точками излома $t_1, \ldots, t_{k-1}$, удовлетворяющие условиям $X|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]} = X_\nu$, $Y|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]} = Y_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant k)$. Согласно лемме 2 разд. 4.5, индексная форма I не вырождена, так как по предположению все сопряженные точки $c \circ \lambda$ лежат в $(0, L(c))$; поэтому форма $h_\varphi^\perp$ и тем самым h_φ не вырождены.

Как видно из доказательства леммы в разд. 4.6, индекс геодезической $c \circ \lambda$ можно получить как индекс ограничения I на подпространство $J''_{c\circ\lambda} \subset \mathfrak{B}''_{c\circ\lambda}$ всех ломаных полей Якоби с изломами в точках $L(c)t_\nu$. Тем самым мы показали, что индекс φ в критической точке $a = F(c)$ равен $\operatorname{Ind} c = \operatorname{Ind} c \circ \lambda$.

Теперь мы можем применить к N и φ теорему 1, согласно которой существует гомотопическая эквивалентность $(N^\beta, N^\alpha) \sim (N^\alpha \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, N^\alpha)$. В силу (4) и (5) имеем, наконец,

$$(\Omega_{pq}^\beta, \Omega_{pq}^\alpha) \sim (N^\beta, N^\alpha) \sim (N^\alpha \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, N^\alpha) \underset{F}{\simeq}$$
$$\underset{F}{\simeq} (\Omega_1^\alpha \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, \Omega_1^\alpha) \underset{i}{\sim} (\Omega_{pq}^\alpha \cup e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_r}, \Omega_{pq}^\alpha);$$

при этом F и i предполагаются канонически продолженными.

Тем самым теорема доказана.

7.7. Радиус инъективности экспоненциального отображения в случае произвольной размерности

В разделе 7.5 мы дали нижнюю оценку радиуса инъективности экспоненциального отображения компактного риманова многообразия четной размерности и положительной кривизны через верхнюю границу кривизны.

Теперь мы займемся соответствующей задачей в случае произвольной размерности.

Приведем вначале известный результат о дифференцируемых отображениях.

Лемма

Усл. *M, N — дифференцируемые многообразия равной размерности; f: $M \to N$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Множество регулярных значений f всюду плотно в M.*

Док. Предположение непосредственно вытекает из более общей теоремы Сарда (см. Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, М., 1956, стр. 30, теорема 4).

Согласно лемме, регулярные значения экспоненциального отображения $\exp_p\colon M_p \to M$ полного риманова многообразия M всюду плотны в M, какова бы ни была точка $p \in M$. Это значит, что в любой окрестности U произвольной точки $r \in M$ существует такая точка q, что все геодезические $c\colon [0, 1] \to M$, соединяющие p с q, могут иметь сопряженные точки только в открытом интервале $(0, 1)$ (в терминологии разд. 7.6 это значит, что пространство путей Ω_{pq} не вырождено).

Теорема (В. Клингенберг)

Усл. *M — полное односвязное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$. Кривизна M для всех касательных плоскостей σ удовлетворяет неравенствам* $0 < \frac{\lambda}{4} < K_\sigma \leqslant \lambda$.

Утв. *Радиус инъективности $d\colon M \to \mathbb{R}$ отображения* exp *во всех точках $p \in M$ заключен в пределах*

$$\rho_M \geqslant d_p \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}, \tag{1}$$

где ρ_M — диаметр M.

Заметим, что в разд. 7.5 для четных размерностей было доказано более сильное утверждение; там же содержатся дальнейшие замечания по этому поводу.

Док. Прежде всего нормируем риманову метрику M умножением на λ, тогда $\frac{1}{4} < K_\sigma \leqslant 1$. Далее мы можем ограничиться случаем $n \geqslant 3$ (см. разд. 7.5).

Пусть $p \in M$ и U_η — открытый шар радиуса η в M_p с центром в точке 0. Предположим, что $\exp|_{U_\pi}$ не инъективно. Тогда существуют такие точки v_0, $w_0 \in U_\pi$, что $v_0 \neq w_0$ и $\exp(v_0) = \exp(w_0)$. Обозначим точку $\exp(v_0) = \exp(w_0)$ через r_0. По теореме сравнения Морса — Шенберга $\exp_p$ имеет максимальный ранг на U_π. Следовательно, существуют окрестность V точки v_0 и окрестность W точки w_0, каждая из которых диффеоморфно отображается отображением $\exp_p$ на некоторую окрестность точки r_0; при этом можно считать, что $\exp(V) = \exp(W)$. Множество $\tilde{V} = \{tu\colon u \in V, t \in (0, 1]\}$ открыто в M_p. Согласно лемме, при $0 < \varepsilon \leqslant \pi$ открытое множество $\exp(\tilde{V} \cap U_\varepsilon)$ содержит регулярное значение $\exp_p$.

По теореме Мейерса M компактно, поэтому $\varkappa = \inf\limits_\sigma K_\sigma > \frac{1}{4}$, откуда $2\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}} > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравен-

ствам $\varepsilon < 2\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, $\varepsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}$, затем $v \in V$ и $t_0 \in (0, 1]$ таким образом, чтобы было $t_0 v \in \tilde{V} \cap U_\varepsilon$ и чтобы $\exp(t_0 v) = q$ была регулярным значением $\exp_p$. Тогда существует вектор $w \in W$, для которого $\exp(w) = \exp(v) = r$. Построим, как и в лемме разд. 7.1, геодезическую c_0: $[0, 1] \to M$, соединяющую p с q, и ломаную геодезическую c_1: $[0, 1] \to M$, соединяющую p с q, заданные формулами $c_0(t) = \exp(tt_0 v)$, $c_1(t) = \exp(2tw)$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $c_1(t) = \exp([1 - (2t-1)(1-t_0)]\, v)$ при $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (точкой излома c_1 служит r). Очевидно, $L(c_0) = t_0 \| v \|$, $L(c_1) = \| w \| + (1 - t_0) \| v \|$ и

$$L(c_0) + L(c_1) < 2\pi. \tag{2}$$

Пространство путей Ω_{pq}, по построению, не вырождено. В силу (2) и неравенств $\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}} + L(c_0) < \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}} + \varepsilon < 2\pi$ можно найти такое число $\sqrt{\alpha} \geqslant L(c_1)$, что

$$\frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}} \leqslant \sqrt{\alpha} < 2\pi - L(c_0) \tag{3}$$

и Ω_{pq} не содержит геодезических энергии α. Тогда из (3) и разд. 6.2 следует, что все геодезические из Ω_{pq} длины, большей $\sqrt{\alpha}$, имеют индекс, не меньший $n - 1 \geqslant 2$. Из следствия к теореме 2 разд. 7.6 вытекает, что Ω_{pq}^{α} линейно связно. Пусть $s \to H_s$ — путь в Ω_{pq}^{α}, соединяющий c_0 с c_1; H: $[0, 1] \times [0, 1] \to M$ есть (p, q)-гомотопия, соединяющая c_0 с c_1 и заданная формулой $H(t, s) = H_s(t)$. Очевидно, справедливы неравенства $L^2(H_s) \leqslant E(H_s) \leqslant \alpha$. Согласно (1) разд. 7.1, существует такое $s_0 \in [0, 1]$, что $2\pi \leqslant L(c_0) + L(H_{s_0}) \leqslant L(c_0) + \sqrt{\alpha}$, а это противоречит (3). Тем самым теорема доказана.

7.8. Теорема о сфере

Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема

Усл. *M — полное односвязное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$. Пусть кривизна M δ-ограничена с $\delta > \frac{1}{4}$, т. е.*

$$\frac{1}{4} < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1 \tag{1}$$

для всех касательных плоскостей σ.

Утв. *M гомеоморфно сфере S^n.*

Этот результат — „теорема о сфере" — был сначала доказан Рауxом с большей нижней границей δ в (1), а затем в полном

объеме Клингенбергом (см. Rauch H. E., *A contribution to differential geometry in the large*, Ann. of Math., 54 (1951), 38–55; Klingenberg W., *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comm. Math. Helv., 35 (1961), 35–54). В случае $n=2$ утверждение теоремы остается справедливым, если вместо (1) предположить лишь, что $K \geqslant \delta > 0$. Действительно, в силу разд. 7.3, M в этом случае компактно, а всякое двумерное компактное односвязное топологическое многообразие гомеоморфно S^2.

Можно утверждать даже большее: если M компактно и $K \geqslant 0$, причем $K(p) > 0$ по крайней мере в одной точке $p \in M$, то по теореме Гаусса – Бонне для эйлеровой характеристики компактного двулистного риманова накрывающего $\tilde{M}$ имеем

$$2\pi\chi_{\tilde{M}} = \int\limits_{\tilde{M}} K\omega > 0,$$

где ω – форма площади на $\tilde{M}$; но тогда в силу классификации компактных поверхностей M гомеоморфно сфере S^2 или проективной плоскости $P^2(\mathbb{R})$, в зависимости от того, ориентируемо M или нет.

Если отказаться в теореме о сфере от требования односвязности M, то прежде всего универсальное риманово накрывающее $\hat{M}$ многообразия M оказывается гомеоморфным S^n. При четном n достаточно предположить M ориентируемым, так как отсюда следует односвязность M (см. разд. 7.5).

Пусть теперь $n > 2$ и $n = 2k$ четно, тогда предположение теоремы (1) не может быть заменено более слабым

$$\frac{1}{4} \leqslant K_\sigma \leqslant 1, \tag{2}$$

как показывает пример комплексного проективного пространства $P^k(\mathbb{C})$ с канонической метрикой (см. (8) разд. 7.5). В самом деле, $P^k(\mathbb{C})$ не гомеоморфно S^n, поскольку их эйлеровы характеристики $\chi_{P^k(\mathbb{C})} = k+1$ и $\chi_{S^n} = 2$ различны.

Если в теореме заменить условие (1) условием (2), то справедливо следующее: либо M гомеоморфно сфере S^n, либо M изометрично одному из симметрических пространств ранга 1, т. е. $P^k(\mathbb{C})$, или кватернионному проективному пространству соответствующей размерности, или плоскости Кели (см. замечание (v) разд. 1.7). Только что указанные многообразия снабжены, подобно комплексному проективному пространству (см. замечание (v) разд. 7.5), естественной структурой нормальных однородных пространств.

(По этому поводу см. Berger M., *Les variétés riemanniennes $\frac{1}{4}$-pincées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, 14 (1960), 161–170.)

Для нечетной размерности n теорема остается справедливой с более слабым условием (2) вместо (1) (см. Klingenberg W., *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung*, Annali di Matematica, 60 (1963), 49–59). Неизвестно, может ли быть уменьшена дальше граница $\frac{1}{4}$ в случае нечетной размерности (см. разд. 7.9).

Так как на компактном топологическом многообразии размерности $\leqslant 3$ существует, с точностью до эквивалентности, единственная дифференциальная структура, то при $n=2,3$ многообразие M даже диффеоморфно S^n. В разд. 7.9 мы кратко рассмотрим вопрос, можно ли в общем случае заменить в теореме о сфере гомеоморфность диффеоморфностью.

Теперь докажем теорему в предположении (1) прямым построением гомеоморфизма, при помощи атласа из двух нормальных карт с надлежащим образом выбранными „полюсами“. Нам понадобятся некоторые предварительные рассуждения. Следующее предложение, представляющее также и самостоятельный геометрический интерес, было впервые доказано Берже в случае неотрицательной кривизны.

Лемма 1

Усл. *M — полное риманово многообразие неотрицательной кривизны. Пусть $p, q \in M$ — точки, для которых функция $\rho(p', q)$ достигает относительного максимума при $p' = p$.*

Утв. *Для каждого $v \in M_p$, $v \neq 0$, существует геодезическая c: $[0, \beta] \to M$, удовлетворяющая условиям $c(0) = p$, $c(\beta) = q$, $L(c) = \rho(p, q)$ и $\langle v, \dot{c}(0)\rangle \geqslant 0$, т. е.*

$$\measuredangle(v, \dot{c}(0)) \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Док. Можно считать, что $\|v\| = 1$. Рассмотрим нормальную геодезическую c: $[0, \beta_v] \to M$, удовлетворяющую условиям $c_v(0) = p$, $\dot{c}_v(0) = v$, выбрав при этом $\beta_v > 0$ столь малым, чтобы было $\rho(p, c_v(s)) = s$, $c_v(s) \neq q$ и $\rho(c_v(s), q) \leqslant \rho(p, q)$ для всех $s \in [0, \beta_v]$. Тогда по теореме Хопфа–Ринова существует геодезическая c_s: $[0, \beta] \to M$, соединяющая $c_v(s)$ с q, причем $L(c_s) = \rho(c_v(s), q)$. Пусть, далее, B — достаточно большой шар в метрике M с центром в p, в котором расположены все рассматриваемые геодезические; тогда при оценке углов всех треугольников с вершинами p, q, $c_v(s)$ по формуле (19) разд. 6.4 можно пользоваться некоторой нижней границей $\varkappa < 0$ кривизны M на компактном множестве $\bar{B}$

(см. замечания (i) и (ii) разд. 6.4). Поскольку $\cos \measuredangle(-\dot{c}_v(s), \dot{c}_s(0)) = -\left\langle \dot{c}_v(s), \frac{\dot{c}_s(0)}{\|\dot{c}_s(0)\|} \right\rangle$, из (19) разд. 6.4, полагая $\alpha = \sqrt{-\varkappa}$, получаем

$$\operatorname{ch} \alpha \rho(p, q) \leqslant \operatorname{ch} \alpha \rho(c_v(s), q) \operatorname{ch} \alpha s + \\ + \operatorname{sh} \alpha \rho(c_v(s), q) \operatorname{sh} \alpha s \left\langle \dot{c}_v(s), \frac{\dot{c}_s(0)}{\|\dot{c}_s(0)\|} \right\rangle.$$

Согласно выбору c_v, имеем $\rho(c_v(s), q) \leqslant \rho(p, q)$, откуда

$$(1 - \operatorname{ch} \alpha s) \operatorname{ch} \alpha \rho(c_v(s), q) \leqslant \operatorname{sh} \alpha \rho(c_v(s), q) \operatorname{sh} \alpha s \left\langle \dot{c}_v(s), \frac{\dot{c}_s(0)}{\|\dot{c}_s(0)\|} \right\rangle$$

и

$$-\frac{\operatorname{sh} \alpha s}{1 + \operatorname{ch} \alpha s} \operatorname{cth} \alpha \rho(c_v(s), q) \leqslant \left\langle \dot{c}_v(s), \frac{\dot{c}_s(0)}{\|\dot{c}_s(0)\|} \right\rangle. \tag{4}$$

Так как множество чисел $\|\dot{c}_s(0)\|$ ограничено, в интервале $(0, \beta_v)$ существует такая последовательность $s_\nu \to 0$, что $\dot{c}_{s_\nu}(0)$ сходятся в TM к некоторому вектору $w \in M_p$. Тогда c_{s_ν} сходятся к геодезической c, заданной формулой $c(t) = \exp(tw)$, с началом p и концом q, причем в силу (4) получаем

$$\left\langle v, \frac{\dot{c}(0)}{\|\dot{c}(0)\|} \right\rangle = \lim_{\nu \to \infty} \left\langle c_v(s_\nu), \frac{\dot{c}_{s_\nu}(0)}{\|\dot{c}_{s_\nu}(0)\|} \right\rangle \geqslant \\ \geqslant -\lim_{\nu \to \infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha s_\nu}{1 + \operatorname{ch} \alpha s_\nu} \operatorname{cth} \alpha \rho(c_v(s_\nu), q) = 0.$$

Лемма доказана.

Покроем теперь многообразие M нашей теоремы двумя n-мерными клетками, т. е. двумя подмножествами, гомеоморфными $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $B_\eta(p)$ открытый шар метрики M радиуса η с центром в точке p.

Лемма 2

Усл. *M — полное односвязное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$; для всех его касательных плоскостей σ выполнено неравенство $\frac{1}{4} < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$.*

Утв. *Существуют такие точки $p, q \in M$, что для любой точки $r \in M$ либо $\rho(p, r) < \pi$, либо $\rho(q, r) < \pi$, так что выполняется*

$$B_\pi(p) \cup B_\pi(q) = M. \tag{5}$$

Заметим, что при более слабом условии $\frac{1}{4} \leqslant K_\sigma \leqslant 1$ утверждение (5) оказывается неверным. В самом деле, это условие выполнено для комплексного проективного пространства $M = P^n(\mathbb{C})$ $(n > 1)$, которое имеет всего лишь диаметр $\rho_M = \pi$ (см. замечание (v) разд. 7.5). Между тем для любых двух точек $p, q \in M$ пересечение соответствующих множеств раздела $C(p) = C(q) =$

$= P^{n-1}(\mathbb{C})$ в M непусто, и потому существует точка $r \in C(p) \cap C(q)$, для которой $\rho(p, r) = \rho(q, r) = \pi$.

Док. По теореме Мейерса M компактно. Выберем такие точки $p, q \in M$, что $\rho(p, q) = \rho_M < 2\pi$. Пусть, например, $\rho(p, r) \geqslant \pi$, можно считать, что $r \neq q$. Рассмотрим геодезические c_0: $[0, 1] \to M$, с началом q и концом r, и c_1: $[0, 1] \to M$, с началом r и концом q, для которых $L(c_0) = \rho(q, r)$, $L(c_1) = \rho(r, p)$ и $\gamma_0 = \sphericalangle(-\dot{c}_1(1), \dot{c}_2(0)) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Согласно (1) разд. 7.7, $\rho(p, q) = \rho_M \geqslant \pi$. Так как γ_0 — угол в вершине p треугольника $\Delta = (c_0, c_1, c_2)$ с вершинами p, q, r, то из следствия (8) разд. 6.4 теоремы сравнения Топоногова получаем $\rho(q, r) = L(c_0) < \pi$, что и доказывает лемму.

Согласно (1) разд. 7.7, шары $B_\pi(p)$ и $B_\pi(q)$ в соотношении (5) являются даже диффеоморфными образами евклидовых шаров радиуса π в M_p и M_q с центром в 0, при экспоненциальном отображении. Известна теорема, согласно которой топологическое многообразие, представимое в виде объединения двух n-мерных клеток, гомеоморфно S^n. Тем самым мы, по существу, уже доказали теорему о сфере вместе с леммой 2. Однако, в данной ситуации можно построить гомеоморфизм $M \to S^n$ особенно простым и геометрически естественным способом; поэтому мы проведем прямое построение.

Лемма 3

Усл. *M — полное односвязное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$; для всех касательных к M плоскостей σ удовлетворяются неравенства $\frac{1}{4} < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$; p, q — „диаметральные“ точки M, т. е. $\rho(p, q) = \rho_M$.*

Утв. *„Экватор“ $C\{r\colon \rho(p, r) = \rho(r, q)\}$, рассматриваемый как подпространство M, есть $(n-1)$-мерное топологическое многообразие, гомеоморфное S^{n-1}, и каждая исходящая из p или q нормальная геодезическая пересекает C в точности один раз на расстоянии $< \pi$. Множество C разбивает M на два подпространства $W_0 \subset B_\pi(p)$, $W_1 \subset B_\pi(q)$, для которых $W_0 \cup W_1 = M$, $W_0 \cap W_1 = C$. Далее, можно построить канонические гомеоморфизмы h_0: $D^n \to W_0$, h_1: $D^n \to W_1$, для которых $h_0(S^{n-1}) = h_1(S^{n-1}) = C$.*

Из доказательства легко видеть, что C оказывается даже дифференцируемым подмногообразием M, и что в качестве h_0, h_1 можно взять диффеоморфизмы (см. по этому поводу разд. 7.9).

Док. Согласно (1) разд. 7.7, отображения $\exp_p$, $\exp_q$ диффеоморфно отображают открытые шары U_π, V_π в M_p, M_q радиуса π с центром в 0 соответственно на $B_\pi(p)$, $B_\pi(q)$.

Вследствие (5) имеем $C \subset [B_\pi(p) \cap B_\pi(q)]$. Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi(r) = \rho(p, r) - \rho(q, r)$ на M, множество $C = \varphi^{-1}(0)$ компактно вместе с M. Для каждой нормальной геодезической c: $[0, \pi] \to M$ с начальной точкой p функция $\varphi \circ c$, как мы сейчас покажем, строго монотонно возрастает. В самом деле, если $0 \leqslant t < t' \leqslant \pi$, то из неравенства треугольника получаем сначала $\rho(q, c(t')) < \rho(q, c(t)) + \rho(c(t), c(t'))$, причем равенство исключается, так как в противном случае $c(t)$ и, следовательно, p принадлежали бы образу кратчайшей геодезической, соединяющей q с $c(t')$, вопреки условию $\rho(p, q) = \rho_M$. Отсюда следует

$$\varphi \circ c(t) = \rho(p, c(t)) - \rho(q, c(t)) = \rho(p, c(t')) - \rho(c(t), c(t')) - \\ - \rho(q, c(t)) < \rho(p, c(t')) - \rho(q, c(t')) = \varphi \circ c(t').$$

Поскольку $\varphi \circ c(0) < 0$, $\varphi \circ c(\pi) > 0$ и $\varphi \circ c$ непрерывна, существует в точности одно значение $t \in (0, \pi)$, для которого $c(t) \in C = \varphi^{-1}(0)$:

Если c начинается в точке q, то $\varphi \circ c$ строго убывает, так как $-\varphi \circ c$ строго возрастает. Положим $W_0 = \{r: \varphi(r) \leqslant 0\} \subset B_\pi(p)$, $W_1 = \{r: \varphi(r) \geqslant 0\} \subset B_\pi(q)$. Если ι_0: $M_p \to \mathbb{R}^n$, ι_1: $M_q \to \mathbb{R}^n$ — линейные изометрии, то $g_0 = \iota_0 \circ (\exp|_{U_\pi})^{-1}$, $g_1 = \iota_1 \circ (\exp|_{U_\pi})^{-1}$ гомеоморфно отображают шары $B_\pi(p)$, $B_\pi(q)$ соответственно на некоторые окрестности точки 0 в $\mathbb{R}^n$. Обозначим снова через D^n стандартную n-мерную клетку $\{a: \|a\| \leqslant 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ с краем $\partial D^n = S^{n-1}$. Непрерывное отображение $f_i^{-1}(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, где $x \in g_i(C)$, согласно предыдущим рассуждениям, биективно и, следовательно, является гомеоморфизмом подпространства $g_i(C) \subset \mathbb{R}^n$ на S^{n-1} (непрерывность обратного отображения f_i вытекает из того, что $g_i(C)$ $(i = 1, 2)$ вместе с C компактно, а S^{n-1} — хаусдорфово пространство). Продолжим f_i по радиусам до гомеоморфизма F_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, полагая $F_i(a) = \left\| f_i\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right) \right\| a$ при $a \neq 0$ и $F_i(0) = 0$. Тогда F_i гомеоморфно отображает D^n на $g_i(W_i)$, и можно определить отображения h_i: $D^n \to W_i$ по формуле $h_i = g_i^{-1} \circ F_i|_{D^n}$, что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы о сфере. Утверждение теоремы вытекает из леммы 3 и следующего общего предложения:

Лемма 4

Усл. *M — топологическое многообразие размерности n. Пусть h_0, h_1: $D^n \to M$ — гомеоморфизмы D^n на подпространства $h_0(D^n)$, $h_1(D^n)$ пространства M, причем $h_0(D^n) \cup h_1(D^n) = M$ и $h_0(D^n) \cap h_1(D^n) = h_0(S^{n-1}) = h_1(S^{n-1})$.*

Утв. *M гомеоморфно S^n.*

Док. Рассмотрим для $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ стереографические проекции: x из северного полюса и y из южного полюса (см. замечание (iii) разд. 1.1). Южная полусфера $S^n_- = \{a: a \in S^n, a_{n+1} \leqslant 0\}$ гомеоморфно отображается с помощью x на D^n, а северная $S^n_+ = \{a: a \in S^n, a_{n+1} \geqslant 0\}$ — с помощью y, причем x и y совпадают на экваторе $S^n_- \cap S^n_+$, образом которого является край S^{n-1} шара D^n. Продолжим теперь гомеоморфизм $f = h_1^{-1} \circ h_0$: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ по радиусам до гомеоморфизма F: $D^n \to D^n$, полагая $F(a) = \|a\| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ при $a \neq 0$ и $F(0) = 0$. Получаем гомеоморфизмы Φ_-: $h_0 \circ x$, $\Phi_+ = h_1 \circ F \circ y$, отображающие соответственно S^n_- на $h_0(D^n)$ и S^n_+ на $h_1(D^n)$, причем Φ_- и Φ_+ совпадают на $S^n_- \cap S^n_+$. Поэтому можно построить отображение Φ: $S^n \to M$, полагая $\Phi(r) = \Phi_-(r)$ при $r \in S^n_-$ и $\Phi(r) = \Phi_+(r)$ при $r \in S^n_+$, отображение Φ непрерывно и биективно. Так как S^n компактна и M — хаусдорфово пространство, то и Φ^{-1} непрерывно. Следовательно, Φ — гомеоморфизм.

Если в условии леммы 4 M — дифференцируемое многообразие и h_0, h_1 — дифференцируемые вложения, то не обязательно существует диффеоморфизм $S^n \to M$; для этого необходимо и достаточно, чтобы „перекручивание“ $h_1^{-1} \circ h_0$: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ могло быть продолжено до диффеоморфизма F: $D^n \to D^n$, что, вообще говоря, невозможно при $n \geqslant 7$. С помощью F легко построить диффеоморфизм $S^n \to M$, „сглаживая“ отображение Φ предыдущего доказательства в окрестности экватора S^n.

Укажем еще несколько иной путь доказательства теоремы о сфере, прямо опирающийся на теорию Морса и не использующий теоремы о сравнении углов из разд. 6.4. При этом, однако, получается непосредственно лишь утверждение о гомотопическом типе M.

Компактное n-мерное дифференцируемое многообразие M, имеющее гомотопический тип S^n, называется *гомотопической сферой*. Необходимое и достаточное условие, при котором M является гомотопической сферой, состоит в равенстве нулю гомотопических групп $\pi_k(M)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (или, что то же самое, связность и односвязность M, а также тривиальность групп гомологий $H_k(M)$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$). Как недавно доказано Смейлом, гомотопическая сфера M диффеоморфна S^n, за исключением, может быть, случаев $\dim M = 3, 4$. Этот результат представляет подтверждение гипотезы Пуанкаре в ее естественном многомерном обобщении. (См. Милнор Дж., *Теорема об h-кобордизме*, М., 1969.)

Рассмотрим полное риманово многообразие M и такие точки $p, q \in M$, что пространство путей $\Omega M = \Omega_{pq}$ не вырождено

(см. разд. 7.6). Напомним в связи с этим, что все пространства путей Ω_{pq} гомотопически эквивалентны друг другу, каковы бы ни были точки p, q. Из теоремы 2 разд. 7.6 легко следует, что

$$\Omega M \sim e_{k_1} \cup e_{k_2} \cup \ldots \cup e_{k_i} \cup \ldots. \tag{6}$$

Пространство ΩM имеет гомотопический тип CW-комплекса с конечным или счетным числом клеток e_{k_i}, приклеиваемых последовательно друг к другу с помощью соответствующих отображений; если $c_1, \ldots, c_i, \ldots$ — геодезические в ΩM, $E(c_1) \leqslant \ldots \leqslant E(c_i) \leqslant \ldots$, то $k_i = \operatorname{Ind} c_i$, $k_1 = 0$. При этом пространство $X = e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_i} \cup \ldots$ снабжено слабой топологией: X представляется в виде $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i = e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_i}$ и открытыми считаются те множества $U \subset X$, для которых $U \cap X_i$ открыты при всех $i = 1, 2, \ldots$. В общем случае в правой части (6) оказывается бесконечное число клеток размерности k, например $\Omega S^1 \sim e_0 \cup e_0 \cup \ldots$. Если, однако, $\dim M \geqslant 2$ и кривизна M по отношению ко всем касательным плоскостям σ удовлетворяет неравенствам $K_\sigma \geqslant \varkappa > 0$, то, как следует из теоремы сравнения Морса — Шенберга, в правой части (6) содержится конечное число клеток каждой размерности $k \geqslant 0$. Согласно замечанию (i) разд. 6.2, это же справедливо и при более слабом предположении, что кривизна Риччи многообразия M везде не меньше некоторого положительного числа. Например, в силу замечания (i) разд 4.6 имеем

$$\Omega S^n \sim e_0 \cup e_{n-1} \cup \ldots \cup e_{i(n-1)} \cup \ldots,$$

и из замечания (v) разд. 7.5 легко вытекает, что

$$\Omega P^n(\mathbb{C}) \sim e_0 \cup e_1 \cup e_{2n} \cup e_{2n+1} \cup \ldots \cup e_{2in} \cup e_{2in+1} \cup \ldots,$$

где $n \geqslant 1$ и $i = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда нетрудно найти гомологии пространств ΩS^n, $\Omega P^n(\mathbb{C})$.

Пусть теперь M — риманово многообразие, удовлетворяющее предположениям теоремы о сфере. Возьмем $p \in M$, выберем число $\alpha > 0$, удовлетворяющее неравенствам $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \leqslant \alpha < 2\pi$, и найдем, согласно лемме разд. 7.7, такую точку $q \in M$, что Ω_{pq} не вырождено и $\rho(p, q) < 2\pi - \sqrt{\alpha}$. В силу (1) разд. 7.7 пространство Ω^{α}_{pq} содержит только одну (а именно, кратчайшую) геодезическую индекса 0, но тогда, согласно разд. 6.2, все остальные геодезические Ω_{pq} имеют индекс $\geqslant n - 1$. Из (6) имеем $\Omega M \sim e_{k_1} \cup e_{k_2} \cup \ldots \cup e_{k_i} \cup \ldots$, где $k_1 = 0$ и $k_i \geqslant n - 1$ при $i \geqslant 2$. Отсюда получается тривиальность приведенных групп гомологий: $\tilde{H}_{k-1}(\Omega M) = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. По теореме Гуревича имеем также $\pi_{k-1}(\Omega M) = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, а по определению гомотопических групп $\pi_k(M) \cong \pi_{k-1}(\Omega M)$, $k \geqslant 1$;

следовательно, $\pi_k(M)=0$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, и M — гомотопическая сфера.

Сделаем в заключение еще одно замечание о проблеме диаметра. Если кривизна полного риманова многообразия M имеет положительную нижнюю границу, то его диаметр ρ_M ограничен сверху, в то время как нижняя граница ρ_M, естественно, не может быть указана. Как видно из следующего ниже результата Берже, соответствующее ограничение ρ_M снизу накладывает сильные ограничения на топологическое строение M.

Теорема

Усл. *M — полное односвязное риманово многообразие размерности $n\geqslant 2$; для всех касательных к M плоскостей σ кривизна $K_\sigma\geqslant\delta>0$; диаметр $\rho_M>\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$.*

Утв. *M есть гомотопическая сфера, и, значит, M гомеоморфно S^n, во всяком случае, при $n\neq 3,4$.*

Заметим, что по теореме Майерса M компактно, и в условиях теоремы

$$\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\geqslant\rho_M>\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Утверждение теоремы можно рассматривать как обобщение (в гомотопическом смысле) теоремы Топоногова о диаметре (см. разд. 7.3), а также теоремы о сфере, поскольку из ее условий вытекают (нетривиальным образом, в силу (1) разд. 7.7) условия предыдущей теоремы.

Заметим еще, что при более слабом условии $\rho_M\geqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ утверждение теряет силу, как показывает опять же пример комплексного проективного пространства.

Док. Возьмем точки p, $r\in M$, для которых $\rho(p,r)=\rho_M$. Пусть η — радиус инъективности $\exp_p$, $0<\eta\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, и U — такая окрестность точки p в M, что $\rho(p,q)<\eta$, $\rho(q,r)>\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ и $\frac{\cos\sqrt{\delta}\,\rho(q,r)}{\cos\sqrt{\delta}\,\rho(p,r)}>\cos\sqrt{\delta}\,\eta$ для всех $q\in U$.

Покажем, что при $q\in U$ пространство Ω_{pq} не содержит геодезической c_2, для которой $\eta\leqslant L(c_2)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. В самом деле, в противном случае рассмотрим обобщенный треугольник $\triangle=(c_0,c_1,c_2)$ с вершинами p, q, r и кратчайшими геодезическими $c_0\in\Omega_{qr}$, $c_1\in\Omega_{rp}$; при этом выберем c_1 по лемме 1 таким образом, чтобы угол $\triangle$ при вершине p удовлетворял условию $\gamma_0\leqslant\frac{\pi}{2}$. Можно

применить к $\triangle$ теорему Топоногова о сравнении углов, тогда из (7) разд. 6.4 получаем $\cos a_0 \geqslant \cos a_1 \cos a_2$, где $a_i = \sqrt{\delta}\, L(c_i)$. Следовательно, имеет место

$$\frac{\cos \sqrt{\delta}\, \rho(q, r)}{\cos \sqrt{\delta}\, \rho(p, r)} = \frac{\cos a_0}{\cos a_1} \leqslant \cos a_2 = \cos \sqrt{\delta}\, L(c_2) \leqslant \cos \sqrt{\delta}\, \eta,$$

вопреки выбору точки q. Возьмем теперь такую точку $q \in U$, чтобы пространство Ω_{pq} было невырожденным (см. лемму разд. 7.7). Тогда все геодезические из Ω_{pq}, кроме кратчайшей индекса 0, оказываются длиннее $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ и имеют по теореме Морса – Шенберга индекс $\geqslant n-1$. Но тогда, как мы видели, из (6) следует, что M – гомотопическая сфера.

7.9. Обзор

Задачи римановой геометрии, которыми мы занимались, рассматриваются в более общем контексте дифференциальной геометрии в обзоре: Chern S. S., *The geometry of G-structures*, Bull. AMS, 72 (1966), 167–219. Кроме этой весьма содержательной работы, укажем еще на собрание нерешенных задач: Kobayashi S. and Eells J., *Problems in differential geometry*, Proceedings US-Japan Seminar on Differential Geometry, Kyoto (1965), 167–177.

Римановы многообразия с везде положительной (неотрицательной) или везде отрицательной (неположительной) кривизной представляют с локальной точки зрения естественное обобщение пространственных форм. Исследование их строения, в сравнении с соответствующими стандартными геометриями, надо рассматривать как важную задачу римановой геометрии. Было приложено много усилий в направлении топологической или хотя бы гомотопической классификации полных римановых многообразий положительной кривизны. Эти исследования начались с классического до сих пор не решенного вопроса Х. Хопфа: существует ли на дифференцируемом многообразии $S^2 \times S^2$ риманова метрика положительной кривизны? В этой области до сих пор известно очень мало, не известно также, можно ли деформировать каноническую метрику произведения $S^2 \times S^2$ (неотрицательной кривизны) в метрику положительной кривизны. Можно предположить, по аналогии с соответствующей теоремой для случая отрицательной кривизны (см. замечание (vi) разд. 7.2), что на произведении компактных дифференцируемых многообразий M, N не существует метрики строго положительной кривизны (см. задачу Чжэня в замечании (iv) разд. 7.3).

Все известные до сих пор примеры односвязных компактных римановых многообразий положительной δ-ограниченной кривизны

диффеоморфны однородным пространствам G/H. Точнее говоря, встречаются лишь симметрические пространства ранга 1, а именно сферы S^n с максимальным значением $\delta = 1$, проективные пространства $P^n(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{H})$ и $P^2(\mathrm{Ca})$ с максимальным $\delta = \frac{1}{4}$, а также два „исключительных пространства" типа $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{SU}(2)$ в размерности 7 и $\mathrm{SU}(5)/\mathrm{Sp}(2) \times S^1$ в размерности 13, с надлежащими представлениями H в G. Оба последних многообразия, как нормальные однородные пространства, имеют положительную кривизну; для нормальных метрик на $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{SU}(2)$ максимальное значение δ, согласно Элиассону (Eliasson), равно $\frac{1}{37}$, тогда как в случае $\mathrm{SU}(5)/\mathrm{Sp}(2) \times S^1$ точная оценка кривизны не известна.

Обратно, используя теоремы о классификации групп Ли, можно показать, что из всех односвязных нормальных однородных пространств только пространства перечисленных выше типов диффеоморфии могут иметь всюду положительную кривизну (см. Berger M., *Les variétés Riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1961), 179–246). Представляется маловероятным, чтобы перечисленные примеры исчерпывали все типы диффеоморфии односвязных компактных римановых многообразий положительной кривизны.

Утверждение теоремы о сфере может быть усилено. Классы эквивалентности дифференциальных структур на топологическом многообразии S^n при $n \neq 4$ взаимно однозначно соответствуют элементам некоторой абелевой группы Γ^n; как вычислили Милнор, Смейл и другие, $\Gamma^n = 0$ при $1 \leqslant n \leqslant 6$, далее, например, $\Gamma^7 = \mathbb{Z}_{28}$, $\Gamma^8 = \mathbb{Z}_2$, $\Gamma^{11} = \mathbb{Z}_{992}$. При этом обычной дифференциальной структуре на S^n соответствует нулевой элемент Γ^n.

Существует универсальная последовательность чисел δ_k, $\frac{1}{4} = \delta_1 < \ldots < \delta_k < \delta_{k+1} < \ldots < 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 1$, обладающая следующим свойством: пусть M — односвязное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$ с δ-ограниченной кривизной, и $\delta > \delta_k$, тогда M гомеоморфно S^n, и дифференциальная структура M характеризуется элементом некоторой подгруппы Γ^n_k группы Γ^n, причем $\Gamma^n = \Gamma^n_1 \supset \Gamma^n_2 \supset \ldots$ и $\Gamma^n_k = 0$ при $k \geqslant n-2$.

В частности, отсюда следует, что при $\delta > \delta_{n-2}$ многообразие M диффеоморфно стандартной сфере S^n; известно, например, что $\delta_5 \leqslant 0{,}819$ и $\delta_9 \leqslant 0{,}916$. По этому вопросу см.: Gromoll D., *Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären*, Math. Annalen, 164 (1966), 353–371. Доказательство последней теоремы состоит в некотором итерационном процессе, при котором „перекручивание" $h_1^{-1} \circ h_0$ карт h_0, h_1 на экваторе

(лемма 3 разд. 7.8), по существу определяющее дифференциальную структуру M в Γ^n, последовательно „развязывается"; это достигается усовершенствованием примененных выше построений (см. также лемму 4 разд. 7.8). Несколько иным методом, не дающим, впрочем, количественных оценок, Калаби (Calabi) получил аналогичный результат. Возможно, что при увеличении размерности n необходимо выбирать δ все ближе к 1, чтобы можно было однозначно охарактеризовать кривизной тип диффеоморфии M. Некоторым оправданием для такого предположения может служить то обстоятельство, что уже порядок группы Γ^n очень быстро растет при увеличении n. С другой стороны, неизвестны примеры метрик положительной кривизны на экзотических сферах. Брискорн (Brieskorn) и другие описали многие из этих сфер очень простыми уравнениями, как аффинно алгебраические подмногообразия евклидовых пространств с действительной коразмерностью 3, но во всех этих случаях индуцированная метрика принимает оба знака. В первом, принадлежащем Милнору, явном представлении экзотических семимерных сфер в виде дифференцируемого расслоения $M^7 \to S^4$ со слоем S^3 и структурной группой $SO(4)$ построение метрик постоянной кривизны на M^7 представляется также весьма трудным. Далее, из теоремы о сфере возникает проблема: верно ли, что при достаточно большом $\delta < 1$ из $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$ следует, что M диффеоморфно действительному проективному пространству $P^n(\mathbb{R})$? Как показал Салливан (Sullivan), для некоторых размерностей n существует даже бесконечное множество гомеоморфных $P^n(\mathbb{R})$ дифференцируемых многообразий, попарно не диффеоморфных друг другу. Если даже ограничиться задачей найти необходимые условия, которым должны удовлетворять алгебраические инварианты гомотопического типа компактного риманова многообразия положительной кривизны, то и в этом отношении известно мало результатов, кроме перечисленных выше. В принципе теория гармонических дифференциальных форм Ходжа — де Рама может быть использована для вывода предложений о числах Бетти b_k многообразия M; применяемые при этом методы изложены в книге: Яно К. и Бохнер С., *Кривизна и числа Бетти*, М., 1957. Этим способом, например, получается $b_1 = 0$, что вытекает, впрочем, из теоремы Мейерса, согласно которой $\pi = \pi_1(M)$ — конечная группа, следовательно, $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \pi/[\pi, \pi]$ конечна и $H_1(M, \mathbb{Q}) = 0$ ($\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел).

Лучший результат в этом направлении состоит в том, что $b_2 = 0$, если $\delta > \frac{2m-2}{8m-5}$, где размерность многообразия M — нечетное число $n = 2m+1$ (см. Berger M., *Les variétés Riemanniennes dont la courbure satisfait certaines conditions*, Proc. Intern. Congress Math. (1962), 447—456). Например, для размерности $n = 5$

с помощью двойственности Пуанкаре находим, что при $\delta > \frac{2}{11}$ имеет место $b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = b_3 = 0$ и M оказывается „рациональной гомологической сферой", т. е. $H_k(M, \mathbb{Q}) = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant 3$. В более высоких размерностях этот результат дает, однако, все меньше по сравнению с теоремой о сфере.

Особенно важным инвариантом M является *эйлерова характеристика* $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$. Если $\dim M = n$ нечетна, из двойственности Пуанкаре $b_k = b_{n-k}$ следует $\chi_M = 0$. Для четных размерностей уже давно существует предположение, что $\chi_M > 0$, если кривизна M ограничена снизу положительным числом.

При $n = 2$ многообразие M диффеоморфно S^2 или $P^2(\mathbb{R})$, так что $\chi_M = 2$, соответственно $\chi_M = 1$. При $n = 4$ имеем $b_1 = b_3 = 0$, $\chi_M = b_0 + b_2 + b_4 = 2 + b_2 \geqslant 2$. По обобщенной теореме Гаусса — Бонне χ_M можно представить в виде интеграла от n-формы на M, выражающейся только через компоненты тензора кривизны (M предполагается ориентируемым). Однако до сих пор лишь при $n \leqslant 4$ удалось определить знак интегрируемой формы по знаку кривизны, и проблема эйлеровой характеристики по-прежнему остается открытой.

Как заметил Вайнштейн (Weinstein), для любой четной размерности n и данного $\delta > 0$ существует лишь конечное число различных гомотопических типов римановых многообразий положительной δ-ограниченной кривизны. В самом деле, согласно замечанию (ii) разд. 7.5, радиус выпуклости M не меньше $\frac{\pi}{4}$, диаметр же не больше $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, $\delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$, поэтому легко построить покрытие M ограниченным (не зависящим от M) числом сильно выпуклых шаров, и нерв этого покрытия гомотопически эквивалентен M. Для нечетных размерностей соответствующее утверждение справедливо в лучшем случае, если M односвязно (см., например, замечание (iii) разд. 7.3).

Пусть M — риманово многообразие с краем. M называется *выпуклым*, если вторая основная форма по отношению к полю внешних единичных нормалей неотрицательна вдоль края ∂M. Выпуклость является необходимым условием для полноты M в том смысле, что любые две точки M можно соединить в M кратчайшей геодезической. В качестве примера может служить n-мерный шар $D^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, или любой замкнутый шар метрики S^n, радиус которого $\leqslant \frac{\pi}{2}$ (см. замечание (ii) разд. 5.2).

На каждом компактном дифференцируемом многообразии M с краем ∂M существуют такие римановы метрики, при которых M выпукло, а ∂M является даже вполне геодезическим подмногообразием.

Пусть теперь M — компактное выпуклое риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$ с положительной кривизной, и $\partial M \neq \emptyset$; тогда можно показать, что пары пространств $(M, \partial M)$, (D, S^{n-1}) гомотопически эквивалентны. В силу теоремы об h-кобордизме M диффеоморфно D^n при $n \neq 3, 4, 5$. Отсюда, например, следует, что метрика произведения на $M = S^2 \times D^2$ (неотрицательной кривизны) не может быть аппроксимирована метрикой положительной кривизны без нарушения границы $\partial M = S^2 \times S^1$ (см. Gromoll D., *Convex Riemannian manifolds*, University of California, Berkeley, препринт).

Конечно, рассматривались также и римановы многообразия положительной кривизны, несущие дополнительные структуры. Это прежде всего келеровы многообразия, т. е. голоморфные римановы многообразия с параллельной комплексной структурой. Они весьма интересны с геометрической стороны, и имеются исследования, посвященные глобальному строению их кривизны. Стандартной моделью для сравнения служит здесь комплексное проективное пространство $P^n(\mathbb{C})$ постоянной голоморфной кривизны (см. замечание (v) разд. 7.5). По этим вопросам см.: Goldberg S. J., *Curvature and homology*, Academic Press (1963), New York, а также Kobayashi S. and Nomizu K., *Foundations of differential geometry* II, Interscience Publishers (1969), New York — London. Характерными работами в указанном направлении являются: Bishop B. L. and Goldberg S. J., *On the second cohomology group of a Kaehler manifold of positive curvature*, Proc. AMS (1961), 350—356, и Kobayashi S., *Topology of positively pinched Kaehler manifolds*, Tohoku Math. J. 15 (1963), 121—139. Далее, следует указать работу: Cheeger J., *Comparison and finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Thesis (1967), Princeton University. В этой работе содержатся, между прочим, некоторые новые аспекты методов сравнения, примененных в последних двух параграфах.

В заключение еще раз укажем две проблемы, в особенности важные для дальнейшего изучения римановых многообразий положительной кривизны: получение возможно более точных результатов о гомологиях таких многообразий и поиски новых типов диффеоморфии.

§ 8. Приложение

8.1. Вспомогательная функция

Введем для точек $a \in \mathbb{R}^n$ „кубическую“ норму $\|a\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a^i|$. Пусть J_r $(r > 0)$ обозначает открытый куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 и длиной ребра $2r$, $J_r = \{a: \|a\| < r\}$.

Мы построим дифференцируемую функцию $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \psi(a) &= 1 \quad \text{при} \quad a \in \bar{J}_1, \\ 0 < \psi(a) &< 1 \quad \text{при} \quad a \in J_2 \setminus \bar{J}_1, \\ \psi(a) &= 0 \quad \text{при} \quad a \in \mathbb{R}^n \setminus J_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Существование такой функции важно для многих глобальных задач на C^∞-многообразиях. Легко видеть, что аналитических функций со свойствами (1) не существует.

Рассмотрим сначала для $\alpha < \beta$ функцию $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t-\alpha}+\frac{1}{t-\beta}} & \text{при} \quad t \in (\alpha, \beta), \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Функция h дифференцируема и $h(t) > 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$, $D^k h|_\alpha = D^k h|_\beta = 0$ при $k = 0, 1, \ldots$.

Определим, далее, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\varphi(t) = \frac{\int\limits_\alpha^t h(\tau)\, d\tau}{\int\limits_\alpha^\beta h(\tau)\, d\tau}.$$

Тогда φ дифференцируема, $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant \alpha$, $0 < \varphi(t) < 1$ при $t \in (\alpha, \beta)$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geqslant \beta$, причем на (α, β) функция $\varphi(t)$ строго возрастает. Возьмем, в частности, $\alpha = -2$, $\beta = -1$ и определим функцию $\bar{\psi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, полагая $\bar{\psi}(t) = \varphi(t)$ при $t \leqslant 0$, $\bar{\psi}(t) = \varphi(-t)$

при $t>0$; тогда $\bar{\psi}$ дифференцируема и

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t)&=1 \quad \text{при} \quad |t|\leqslant 1,\\ 0<\bar{\psi}(t)&<1 \quad \text{при} \quad 1<|t|<2,\\ \bar{\psi}(t)&=0 \quad \text{при} \quad |t|\geqslant 2. \end{aligned}$$

Теперь можно построить требуемую функцию $\psi\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ по формуле

$$\psi(a)=\prod_{i=1}^{n}\bar{\psi}(a^i),$$

и ψ имеет перечисленные в (1) свойства.

8.2. Некоторые топологические понятия

Пусть M — топологическое пространство. Покрытие $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ пространства M называется *локально конечным*, если у каждой точки M есть окрестность, пересекающая лишь конечное число множеств U_α. Покрытие $(V_\beta)_{\beta\in B}$ пространства M называется *вписанным* в покрытие $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, если каждое множество V_β содержится в некотором U_α. Пространство M называется *паракомпактным*, если M хаусдорфово и если для каждого открытого покрытия M существует вписанное в него локально конечное открытое покрытие.

Если M паракомпактно и $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие M, то существует такое локально конечное покрытие $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$, что $V_\alpha\subset U_\alpha$ при всех $\alpha\in A$. В самом деле, построим сначала локально конечное открытое покрытие $(W_\beta)_{\beta\in B}$, вписанное в $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, и зададим отображение $\lambda\colon B\to A$, удовлетворяющее условию $W_\beta\subset U_{\lambda(\beta)}$; тогда множества $V_\alpha=\bigcup\limits_{\beta\in\lambda^{-1}(\alpha)} W_\beta$ образуют требуемое покрытие.

Теорема

Усл. *M — локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой.*

Утв. *M паракомпактно.*

Таким образом, любое топологическое многообразие паракомпактно.

Док. Выберем базис $\{G_i\colon i=1, 2, \ldots\}$ топологии пространства M, для которого $\bar{G}_i$ компактны. Построим последовательность компактных множеств $C_i\subset M$, исчерпывающую M и такую, что C_i состоит из внутренних точек C_{i+1}, $i=1, 2, \ldots$. Для этого положим $C_1=\bar{G}_1$. Если C_i уже построено и $G_i\subset C_i$, то возьмем

наименьшее число k, для которого $C_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} G_j = V_i$, и положим $C_{i+1} = \bar{V}_i \cup \bar{G}_{i+1}$.

Пусть теперь $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие M. Покроем каждое компактное множество $C_i \setminus C^0_{i-1}$ ($C_i = \varnothing$ при $i \leqslant 0$) конечным числом открытых множеств $W_{i1}, \ldots, W_{ir_i}$, таких, что каждое $W_{i\rho_i}$ принадлежит некоторому U_α, а также открытому множеству $C^0_{i+1} \setminus C_{i-2}$. Покрытие $(W_{i\rho_i})$ вписано в (U_α) и локально конечно, так как по построению каждое $W_{i\rho_i}$ пересекает лишь конечное число множеств вписанного покрытия.

Следствие

Усл. *M — дифференцируемое многообразие.*

Утв. *Для каждого открытого покрытия $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ многообразия M существует вписанное в него локально конечное покрытие $(W_\iota)_{\iota \in I}$, такое, что для любого $\iota \in I$ множество W_ι есть область определения некоторой карты x_ι, причем:*

(a) $$x_\iota(W_\iota) = J_3,$$

(b) *множества $x_\iota^{-1}(J_1)$ покрывают M.*

Док. Рассуждаем так же, как при доказательстве теоремы, но при этом выбираем в качестве $W_{i\rho_i}$ область определения карты $x_{i\rho_i}$ так, чтобы было выполнено (a) и чтобы множества $x_{i1}^{-1}(J_1), \ldots, x_{ir_i}^{-1}(J_1)$ составляли покрытие $C_i \setminus C^0_{i-1}$.

Каждое паракомпактное пространство нормально. Это нетрудно доказать, проверив сначала, что пространство регулярно. Таким образом, топологическое многообразие нормально.

8.3. Разложение единицы

Пусть M — дифференцируемое многообразие и φ — неотрицательная функция на M. Носителем φ называется множество $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{p\colon \varphi(p) > 0\}}$. Дифференцируемым *разложением единицы* на M называется семейство $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ неотрицательных дифференцируемых функций на M, для которого $(\operatorname{supp} \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ представляет локально конечное покрытие M, и $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$ для всех $p \in M$. Последняя сумма имеет смысл, так как для каждой точки p лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Теорема

Усл. *M — дифференцируемое многообразие.*

Утв. *Для каждого открытого покрытия $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ многообразия M существует такое дифференцируемое разложение единицы $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ на M, что* $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$, *т. е. носители составляют вписанное покрытие.*

Док. Согласно следствию теоремы 8.2, существует такое локально конечное открытое покрытие $(W_\iota)_{\iota\in I}$, вписанное в $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, что для каждого $\iota\in I$ множество W_ι является областью определения некоторой карты x_ι на M, причем $x_\iota(W_\iota)=J_3$ и множества $x_\iota^{-1}(J_1)$ покрывают M. Пусть ψ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — функция, построенная в разд. 8.1. Определим дифференцируемые функции ψ_ι: $M\to\mathbb{R}$, полагая $\psi_\iota(p)=\psi\circ x_\iota(p)$ для $p\in W_\iota$, $\psi_\iota(p)=0$ для $p\in M\setminus W_\iota$. Пусть, далее, λ: $I\to A$ — отображение, удовлетворяющее условию $W_\iota\subset U_{\lambda(\iota)}$, тогда множества $V_\alpha=\bigcup\limits_{\iota\in\lambda^{-1}(\alpha)} W_\iota$ составляют локально конечное открытое покрытие $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$, вписанное в $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. Определим для $\alpha\in A$ дифференцируемые функции f_α: $M\to\mathbb{R}$ по формуле $f_\alpha(p)=\sum\limits_{\iota\in\lambda^{-1}(\alpha)}\psi_\iota(p)$ и положим $\varphi_\alpha(p)=\dfrac{f_\alpha(p)}{\sum\limits_{\varkappa\in A} f_\varkappa(p)}$, где сумма в знаменателе конечна и положительна.

Следствие

Усл. *M — дифференцируемое многообразие; G — открытое подмножество M; A — замкнутое подмножество M, $A\subset G$; f: $G\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция.*

Утв. *Существует такая дифференцируемая функция g: $M\to\mathbb{R}$, что $g|_A=f|_A$ и $g(p)=0$ при $p\in M\setminus G$.*

В частности, существует дифференцируемая функция φ: $M\to\mathbb{R}$, для которой $\varphi(p)=1$ при $p\in A$ и $\varphi(p)=0$ при $p\in M\setminus G$.

Док. Рассмотрим открытое покрытие $(G, M\setminus A)$ пространства M и построим, согласно теореме, разложение единицы (φ_1, φ_2), для которого $\operatorname{supp}\varphi_1\subset G$ и $\operatorname{supp}\varphi_2\subset M\setminus A$. Продолжим f до произвольной функции $\bar{f}$: $M\to\mathbb{R}$ и положим $g=\varphi_1\bar{f}$. Так как $\varphi_2|_A=0$, имеем $\varphi_1(p)=0$ при $p\in A$, следовательно, $g|_A=f|_A$. Далее, g дифференцируема, так как $g(p)=0$ при $p\in M\setminus\operatorname{supp}\varphi_1\supset M\setminus G$ и $g|_G$ дифференцируема.

8.4. Теоремы из теории дифференциальных уравнений

В этом разделе формируются две основные теоремы, известные из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 1 (Существование решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и дифференцируемая зависимость от начальных условий)

Усл. *G — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$; $F\colon G \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Для каждой точки $a \in G$ существуют окрестность W точки a, открытый интервал $J \subset \mathbb{R}$ с центром в точке 0 и дифференцируемое отображение $\psi\colon J \times W \to G$, такие, что*

$$\psi(0, u) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, u) = F \circ \psi(t, u) \tag{2}$$

для всех $u \in W$ и $t \in J$.

Дифференцируемый путь $\psi\colon J \to G$ называется интегральным путем системы дифференциальных уравнений F, если $\frac{d\psi^i}{dt} = F^i \circ \psi$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, для каждой точки $u \in W$ дифференцируемый путь $\psi_u\colon J \to G$, заданный формулой $\psi_u(t) = \psi(t, u)$, есть интегральный путь F.

Теорема 2 (Теорема единственности)

Усл. *G — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$; $F\colon G \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение.*

Утв. *Если ψ, $\tilde{\psi}\colon J \to G$ — интегральные пути F, причем $\psi(t_0) = \tilde{\psi}(t_0)$ для некоторого $t_0 \in J$, то $\psi = \tilde{\psi}$.*

8.5. Интегральные пути векторных полей

Пусть M — дифференцируемое многообразие и X — дифференцируемое векторное поле на M. Если J — открытый интервал, то дифференцируемый путь $\varphi\colon J \to M$ называется *интегральным путем* поля X, если

$$\dot{\varphi} = X \circ \varphi,$$

где $\dot{\varphi} = \varphi_* D$ — касательное поле к φ. Перенесем сначала на многообразия теорему существования (см. разд. 8.4).

Лемма 1

Усл. *M — дифференцируемое многообразие; X — дифференцируемое векторное поле на M.*

Утв. *Для каждой точки $q \in M$ существуют окрестность V точки q, открытый интервал $J \subset \mathbb{R}$ с центром 0 и дифференцируемое отображение Φ: $J \times V \to M$, такие, что*

$$\Phi(0, p) = p, \tag{1}$$

$$\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p} = X \circ \Phi(t, p) \tag{2}$$

при всех $p \in V$ и $t \in J$, где $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p}$ есть касательный вектор $i_{p*}D_t$ к $J \times V$ в точке (t, p), i_p: $J \to J \times V$ — инъекция, заданная формулой $i_p(t) = (t, p)$.

Для каждой точки $p \in V$ путь Φ_p: $J \to M$, заданный формулой $\Phi_p(t) = \Phi(t, p)$, является, очевидно, интегральным путем X. Отображение Φ называется *локальным потоком* векторного поля X. Интегральные пути Φ_p называются также „линиями тока" X, а отображения Φ_t: $V \to M$, заданные формулой $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$, — „фронтами потока" Φ.

Док. Возьмем на M карту x с областью определения $U \ni q$. Положим $G = x(U)$, $a = x(q)$ и зададим отображение F: $G \to \mathbb{R}^n$ формулой $F(u) = (Xx^1, \ldots, Xx^n)|_{x^{-1}(u)}$. Согласно теореме 1 разд. 8.4, существуют окрестность W точки a, открытый интервал $J \subset \mathbb{R}$ с центром 0 и дифференцируемое отображение ψ: $J \times W \to G$, для которых выполняются соотношения (1) и (2) разд. 8.4. Теперь можно положить $V = x^{-1}(W)$ и определить Φ: $J \times V \to M$ по формуле $\Phi(t, p) = x^{-1} \circ \psi(t, x(p))$. Соотношения (1) и (2) теперь проверяются непосредственно.

Приведем еще теорему единственности для многообразий.

Лемма 2

Усл. *M — дифференцируемое многообразие; X — дифференцируемое векторное поле на M.*

Утв. *Если φ, $\tilde{\varphi}$: $J \to M$ — интегральные пути X и для некоторого $t_0 \in J$ выполняется $\varphi(t_0) = \tilde{\varphi}(t_0)$, то $\varphi = \tilde{\varphi}$.*

Док. Пусть $J_0 \subset J$ — наибольший содержащий t_0 интервал, на котором φ и $\tilde{\varphi}$ совпадают. Ясно, что J_0 замкнут в J, так как φ, $\tilde{\varphi}$ непрерывны и M — хаусдорфово пространство. Покажем, что J_0 также открыт в J. Пусть $t_1 \in J_0$, так что $\varphi(t_1) = \tilde{\varphi}(t_1)$. Построим карту x с областью определения $U \ni \varphi(t_1)$ и положим $G = x(U)$. Рассмотрим отображение F: $G \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $F(u) = (Xx^1, \ldots, Xx^n)|_{x^{-1}(u)}$. Определим в некотором открытом интервале $J_1 \subset J$, содержащем точку t_1 и удовлетворяющем условию $\varphi(J_1) \subset U$, дифференцируемые пути ψ, $\tilde{\psi}$: $J_1 \to G$ по формулам $\psi(t) = x \circ \varphi(t)$, $\tilde{\psi}(t) = x \circ \tilde{\varphi}(t)$. Очевидно, ψ, $\tilde{\psi}$ есть интегральные

пути системы дифференциальных уравнений F, причем $\psi(t_1) = \tilde{\psi}(t_1)$. По теореме единственности отсюда следует $\psi = \tilde{\psi}$ и, значит, $\varphi|_{J_1} = \tilde{\varphi}|_{J_1}$. Поэтому $J_1 \subset J_0$ и J_0 открыто в J. Поскольку $t_0 \in J_0$ и J связно, имеет место $J_0 = J$, что и доказывает лемму.

Из теоремы единственности непосредственно вытекает, что локальный поток поля X на $J \times V$ определяется однозначно, потому что однозначно определены линии тока.

8.6. Максимальный поток векторного поля

Каждое векторное поле однозначно определяет „максимальный“ поток.

Лемма

Усл. *Пусть M — дифференцируемое многообразие; X — дифференцируемое векторное поле на M. Для каждой точки $p \in M$ построим открытый интервал $J_p \subset \mathbb{R}$, содержащий 0, и однозначно определенный (в силу леммы 2 разд. 8.5) максимальный интегральный путь Φ_p: $J_p \to M$ поля X, удовлетворяющий условию $\Phi_p(0) = p$. „Максимальность“ при этом означает, что не существует собственного продолжения Φ_p до интегрального пути X.*

Утв. *Существуют однозначно определенное открытое множество $W \subset \mathbb{R} \times M$ и однозначно определенное дифференцируемое отображение Φ: $W \to M$, для которых*

$$J_p \times \{p\} = (\mathbb{R} \times \{p\}) \cap W \quad \text{при} \quad p \in M, \tag{1}$$

$$\Phi(t, p) = \Phi_p(t) \quad \text{при} \quad (t, p) \in W. \tag{2}$$

В частности, для всех $p \in M$ имеем $\{0\} \times M \subset W$ и $\Phi(0, p) = p$. Далее, $\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p} = X \circ \Phi(t, p)$ для $(t, p) \in W$. Отображение Φ называется *максимальным потоком* векторного поля X. Максимальные интегральные пути Φ_p поля X суть линии тока Φ. Заметим, что может не существовать никакого открытого интервала $J \subset \mathbb{R}$, содержащего нуль, для которого $J \times M \subset W$, т. е. движение всего многообразия M вдоль линий тока с заданной векторным полем X скоростью может оказаться невозможным ни в каком интервале времени. Соответствующие примеры можно построить уже на $\mathbb{R}$. Если существует такой содержащий 0 открытый интервал J, что $J \times M \subset W$ (это верно, например, для компактного M), то, очевидно, $W = \mathbb{R} \times M$, поскольку в этом случае каждый интегральный путь можно продолжить на всю $\mathbb{R}$.

Док. Ясно, что $W = \bigcup_{p \in M} J_p \times \{p\}$, так что W однозначно определено. Вследствие (2) однозначно определено также и отображение Φ: $W \to M$. Остается показать, что полученное таким образом множество W открыто в $\mathbb{R} \times M$ и отображение Φ дифференцируемо.

Пусть $p \in M$ и J — множество всех таких $t \in J_p$, что точка (t, p) имеет в $\mathbb{R} \times M$ принадлежащую W окрестность, в которой Φ дифференцируемо. Так как $0 \in J$, J — непустое. В самом деле, согласно лемме 1 разд. 8.5, существует локальный поток Φ': $J' \times V' \to M$, для которого $(0, p) \in J' \times V'$, причем $J' \times V' \subset W$ и $\Phi' = \Phi|_{J' \times V'}$, поскольку линии тока Φ' суть интегральные пути поля X.

По построению интервал J открыт в J_p. Мы покажем, что J также замкнут в J_p, и из связности J_p будет следовать $J = J_p$, что равносильно утверждению леммы.

Пусть t_0 — предельная точка J в J_p. Рассмотрим для точки $\Phi_p(t_0)$ локальный поток Φ'': $J'' \times V'' \to M$, такой, что $0 \in J''$ и $\Phi_p(t_0) \in V''$. Так как t_0 — предельная точка J в J_p и интегральный путь Φ_p непрерывен, существует такое $t_1 \in J$, что $t_0 - t_1 \in J''$ и $\Phi_p(t_1) \in V''$. Тогда для $t - t_1 \in J''$ и $\Phi(t_1, q) \in V''$, как мы покажем,

$$\Phi(t, q) = \Phi''(t - t_1, \Phi(t_1, q)). \tag{3}$$

В самом деле, $\Phi''(t - t_1, \Phi(t_1, q)) = \Phi''_{\Phi(t_1, q)}(t - t_1) = \Phi''_{\Phi_q(t_1)}(t - t_1)$. Отображение $t \to \Phi''_{\Phi_q(t_1)}(t - t_1)$ есть интегральный путь поля X, совпадающий с Φ_q в точке t_1. Вследствие соотношения $\Phi_q(t) = \Phi(t, q)$ отсюда получается (3).

Итак, Φ определено и дифференцируемо в некоторой окрестности $J_1 \times V$ точки (t_1, p), причем $\Phi(t_1, V) \subset V''$. Построим такую окрестность J_0 точки $t_0 \in \mathbb{R}$, что $t - t_1 \in J''$ при $t \in J_0$. Тогда $J_0 \times V$ есть окрестность точки (t_0, p) в $\mathbb{R} \times M$ и $J_0 \times V \subset W$. В силу (3) отображение Φ дифференцируемо на $J_0 \times V$, откуда $t_0 \in J$.

8.7. Теорема о продолжении

Следующий критерий важен для выяснения, максимальны ли интегральные пути некоторого векторного поля или же они могут быть продолжены.

Лемма (Теорема о продолжении)

Усл. *M — дифференцируемое многообразие; X — дифференцируемое векторное поле на M; φ: $[\alpha, \beta] \to M$ — интегральный путь поля X. Пусть, далее, $t_\nu \in [\alpha, \beta)$, $\lim_{\nu \to \infty} t_\nu = \beta$ и последовательность образов $p_\nu = \varphi(t_\nu)$ имеет предельную точку $p \in M$.*

Утв. (a) *Для каждой окрестности U точки p существует такое $s \in [\alpha, \beta)$, что для всех $t \in [s, \beta)$ выполняется $\varphi(t) \in U$ (иначе говоря, $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = p$). Таким образом, φ можно продолжить до непрерывного отображения $\bar{\varphi}\colon [\alpha, \beta] \to M$, полагая $\bar{\varphi}(\beta) = p$.*
(b) *Если $c\colon J \to M$ — максимально определенный путь поля X, для которого $c(\beta) = p$, то $[\alpha, \beta] \subset J$ и $c|_{[\alpha, \beta]} = \bar{\varphi}$.*

Док. Докажем (a). Предположим, что существует такая окрестность U точки p и такая последовательность $\tau_\nu \in [\alpha, \beta)$, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \tau_\nu = \beta$ и $\varphi(\tau_\nu) \notin U$ при всех ν. Очевидно, можно при этом выбрать в качестве U область определения некоторой карты x, для которой $x(p) = 0$. Выберем числа $\delta > \varepsilon > 0$ таким образом, чтобы замкнутый шар $\bar{B}_\delta \subset \mathbb{R}^n$ с центром в 0 радиуса δ целиком принадлежал $x(U)$. Далее, выберем из последовательностей t_ν, τ_ν подпоследовательности t_{ν_i}, τ_{ν_i}, для которых $t_{\nu_i} < \tau_{\nu_i} < t_{\nu_{i+1}}$, $\varphi(t_{\nu_i}) \in x^{-1}(B_\varepsilon)$, $\varphi(\tau_{\nu_i}) \notin x^{-1}(B_\delta)$. Так как φ непрерывно, существует наименьшее число $s_i \in [t_{\nu_i}, \tau_{\nu_i}]$, для которого $\varphi(s_i) \in x^{-1}(\bar{B}_\delta \setminus B_\delta)$, так что $\varphi([t_{\nu_i}, s_i]) \subset x^{-1}(\bar{B}_\delta)$. Обозначая через ρ функцию расстояния в $\mathbb{R}^n$, имеем $\int\limits_{t_{\nu_i}}^{s_i} \| \widehat{x \circ \varphi}(t) \| dt \geqslant \rho(x \circ \varphi(t_{\nu_i}), x \circ \varphi(s_i))$. Из неравенства треугольника следует

$$\rho(x \circ \varphi(t_{\nu_i}), x \circ \varphi(s_i)) \geqslant \rho(0, x \circ \varphi(s_i)) - \rho(0, x \circ \varphi(t_{\nu_i})) \geqslant \delta - \varepsilon,$$

откуда

$$\int_{t_{\nu_i}}^{s_i} \| x_* \dot{\varphi}(t) \| dt \geqslant \delta - \varepsilon > 0,$$

и окончательно имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{\nu_i}}^{s_i} \| x_* \dot{\varphi}(t) \| dt \geqslant k(\delta - \varepsilon). \tag{1}$$

Далее, непрерывная функция $\| x_* X \|\colon U \to \mathbb{R}$ ограничена на компактном множестве $x^{-1}(\bar{B}_\delta)$. С другой стороны, $\dot{\varphi} = X \circ \varphi$, так как φ — интегральный путь. Следовательно, функция $\| x_* \dot{\varphi} \|$ ограничена на $\varphi^{-1}(x^{-1}(\bar{B}_\delta))$; пусть, например, $\| x_* \dot{\varphi}(t) \| < \mu$ при $t \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [t_{\nu_i}, s_i]$.

Откуда получается

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{\nu_i}}^{s_i} \| x_* \dot{\varphi}(t) \| dt \leqslant \sum_{i=1}^{k} (s_i - t_{\nu_i}) \mu \leqslant \mu(\beta - \alpha),$$

что противоречит (1) при достаточно больших k.

Докажем (b). Так как при $t \in [\alpha, \beta)$ выполняется $\dot{\varphi}(t) = X_{\varphi(t)}$, из непрерывности X и $\bar{\varphi}$ следует $\lim\limits_{t \to \beta} \dot{\varphi}(t) = \lim\limits_{t \to \beta} X_{\varphi(t)} = X_{\bar{\varphi}(\beta)}$. Если продолжить $\bar{\varphi}$ до отображения $\tilde{\varphi}$: $J \to M$, полагая $\tilde{\varphi}(t) = c(t)$ при $t \in J \setminus [\alpha, \beta]$, то, как мы покажем, $\tilde{\varphi} = c$. В самом деле, $\tilde{\varphi}$ непрерывно, а в $J \setminus \{\beta\}$ — дифференцируемо; при $t \neq \beta$ имеем $\dot{\tilde{\varphi}}(t) = X_{\tilde{\varphi}(t)}$ и, кроме того, $\lim\limits_{t \to \beta} \dot{\tilde{\varphi}}(t) = X_{\tilde{\varphi}(\beta)}$. Покажем, что $\tilde{\varphi}$ дифференцируемо в точке β и $\dot{\tilde{\varphi}}(\beta) = X_{\tilde{\varphi}(\beta)}$. Достаточно проверить, что для карты x_* определенной в окрестности точки p, функции $x^i \circ \tilde{\varphi}$ один раз дифференцируемы в точке β и что $Dx^i \circ \tilde{\varphi}|_\beta = Dx^i \circ c|_\beta$. Тогда $\dot{\tilde{\varphi}} = X \circ \tilde{\varphi}$ окажется дифференцируемым до любого порядка. Поскольку $x^i \circ \varphi$ непрерывна в точке β, из теоремы о среднем значении имеем $\dfrac{x^i \circ \tilde{\varphi}(\beta) - x^i \circ \tilde{\varphi}(t)}{\beta - t} = Dx^i \circ \tilde{\varphi}(\xi)$, причем $\xi \in (t, \beta)$ при $t < \beta$ и соответственно $\xi \in (\beta, t)$ при $\beta < t$.

Итак, $Dx^i \circ \tilde{\varphi}(\beta) = \lim\limits_{\xi \to \beta} Dx^i \circ \tilde{\varphi}(\xi)$, и $\dot{\tilde{\varphi}}(\beta) = X_{\tilde{\varphi}(\beta)} = X_{c(\beta)}$.

Если M — компактное дифференцируемое многообразие и X — дифференцируемое векторное поле на M, то мы снова приходим к уже доказанному в разд. 8.6 предложению, согласно которому каждый максимальный интегральный путь φ поля X определен на всей $\mathbb{R}$. В самом деле, область определения φ есть прежде всего непустой открытый интервал в $\mathbb{R}$, который в силу леммы замкнут в $\mathbb{R}$, поскольку каждая последовательность в M имеет предельную точку. Итак, каждое векторное поле на M полно (см. разд. 8.8).

8.8. Однопараметрические группы диффеоморфизмов

Пусть M — дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое отображение Φ: $\mathbb{R} \times M \to M$ называется *однопараметрической группой* диффеоморфизмов на M, если отображение Φ_t: $M \to M$ ($t \in \mathbb{R}$), построенное по формуле $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$, удовлетворяют условиям

$$\Phi_0 = \mathrm{id}, \tag{1}$$

$$\Phi_{t_1 + t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}, \tag{2}$$

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Так как $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t = \Phi_0 = \mathrm{id}$, отображения Φ_t суть диффеоморфизмы M на M; Φ можно рассматривать как „дифференцируемый" гомоморфизм группы Ли $\mathbb{R}$ в группу диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}\, M$. Отображение Φ определяет дифференцируемое векторное поле X на M по формуле $X_p = \Phi_* \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{0,\,p}$ и является максимальным потоком поля X, а Φ_t есть линии тока Φ (см. разд. 8.6).

Говорят, что Φ индуцирует поле X.

Для заданного на M дифференцируемого векторного поля X („инфинитезимального преобразования") не существует, вообще говоря, однопараметрической группы преобразований, индуцирующей X. Векторное поле X называется *полным*, если максимальный поток X есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов M. В этом случае каждый интегральный путь X можно продолжить на $\mathbb{R}$.

Обратно, если каждый интегральный путь X можно продолжить на $\mathbb{R}$, то поле X, как мы сейчас покажем, полно. В самом деле, в этом случае максимальный поток X есть дифференцируемое отображение $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$, причем справедливы соотношения

$$\Phi(0,\, p) = p, \tag{3}$$

$$\Phi(t_1 + t_2,\, p) = \Phi(t_1,\, \Phi(t_2,\, p)); \tag{4}$$

(3) выполнено по определению максимального потока X, (4) же вытекает из теоремы единственности, так как при фиксированных p, t_2 отображения $t \to \Phi(t + t_2,\, p)$ и $t \to \Phi(t,\, \Phi(t_2,\, p))$ суть интегральные пути X, проходящие при $t = 0$ через точку $\Phi(t_2,\, p)$. Из (3) и (4) вытекают равенства (1), (2).

В частности, максимальный поток дифференцируемого векторного поля на компактном дифференцируемом многообразии M есть всегда однопараметрическая группа диффеоморфизмов M.

Добавление

Некомпактные пространства неотрицательной кривизны

В. А. ТОПОНОГОВ

В предлагаемой читателю книге „Риманова геометрия в целом" изучаются компактные римановы пространства с теми или иными ограничениями на риманову кривизну. Однако в последнее время был получен ряд важных результатов в геометрии некомпактных римановых пространств неотрицательной кривизны.

Изложению этих результатов посвящается это добавление. Теоремы и методы доказательства, излагаемые здесь, заимствованы из работ Д. Громола, В. Мейера и В. А. Топоногова.

В § 1 излагаются результаты, описывающие поведение геодезических на некомпактных римановых многообразиях M_+ (M_0) положительной (соответственно неотрицательной) римановой кривизны.

В § 2 определяются и изучаются абсолютно выпуклые множества в пространстве M_+.

В § 3 находится оценка снизу для радиуса инъективности M_+ (M_0) (см. разд. 5.2) через верхнюю границу римановой кривизны. Для M_+ эта оценка совпадает с оценкой, полученной в разд. 7.5 для компактных пространств четной размерности.

В § 4 доказывается принадлежащая Громолу и Мейеру замечательная теорема, согласно которой многообразие M_+ размерности $\geqslant 5$ гомеоморфно евклидову пространству.

В последнем параграфе изучаются многообразия M_0, содержащие прямые линии, т. е. такие геодезические, каждая дуга которых есть кратчайшая. О таком многообразии доказывается, что оно есть прямое метрическое произведение евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ и некоторого риманова многообразия M_0'.

Двумерные римановы многообразия M_+ и M_0 впервые подробно изучались Кон-Фоссеном, который доказал в этом случае теоремы 1, 2, 3, 8 и 9 дополнения. Основным средством доказательства в работах Кон-Фоссена была теорема Гаусса — Бонне и ее обобщения, полученные им же. Некоторые частные случаи пространств M_+ были рассмотрены И. А. Соколенко. Ею были получены результаты § 3 для римановых пространств M_+ с полюсом.

Заметим, что доказательства результатов, содержащихся в этом добавлении, опираются в основном на те или иные теоремы

сравнения (см. § 6 книги). Обозначения, которыми мы будем пользоваться, по возможности совпадают с обозначениями книги.

Через M обозначается полное некомпактное бесконечно дифференцируемое риманово многообразие, а через M_+ (M_0) — риманово многообразие M, у которого риманова кривизна в каждой точке и в каждом двумерном направлении положительна (неотрицательна). Расстояние между точками $p \in M$ и $q \in M$ (в смысле определения в разд. 5.1) будем обозначать через $\rho_M(p, q)$ или просто через pq; кратчайшую, соединяющую точки p и q, обозначим также через pq; длину пути σ в M — через $L(\sigma)$.

Для пути γ: $[\alpha, \beta] \to M$ будем обозначать через $\dot{\gamma}(t)$ касательный вектор к этому пути в точке t. Если γ — геодезическая, то γ предполагается нормальной, если не оговорено противное. Если ABC — треугольник в M, то через $A'B'C'$ мы будем обозначать треугольник на евклидовой плоскости, у которого длины сторон равны длинам соответствующих сторон треугольника ABC.

§ 1. Свойства геодезических в полных некомпактных римановых пространствах неотрицательной римановой кривизны

Результаты этого параграфа в основном принадлежат Д. Громолу и В. Мейеру.

1.1. Будем говорить, что геодезическая $c(t)$: $[0, \infty] \to M$ есть *луч*, если при любых t_1 и t_2 геодезическая $c|_{[t_1, t_2]}$ есть кратчайшая в M. Точку $c(0)$ назовем вершиной луча.

Лемма 1

Утв. *Каждая точка $p \in M$ является вершиной некоторого луча.*
Док. Так как пространство M некомпактно, то существует последовательность точек $q_n \in M$, такая, что $pq_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

В силу полноты M для каждой точки q_n существует кратчайшая pq_n.

Пусть τ_n — единичный вектор, касательный к pq_n в точке p. Из компактности единичной сферы в M_p следует существование такой подпоследовательности чисел n_k, что существует $\lim\limits_{n_k \to \infty} \tau_{n_k} = \tau_0$.

Рассмотрим геодезическую $c(t)$: $[0, \infty) \to M$, исходящую из p в направлении вектора τ_0.

Докажем, что $c(t)$ есть луч. Для этого достаточно доказать, что $c|_{[0, t_0]}$ есть кратчайшая при любом t_0.

Пусть n_{k_0} настолько велико, что $pq_{n_{k_0}} \geqslant t_0$ при $n_k \geqslant n_{k_0}$. На кратчайшей pq_{n_k} при $n_k \geqslant n_{k_0}$ возьмем точку a_{n_k} так, чтобы $pa_{n_k} = t_0$. В силу построения $c(t)$ кратчайшие pa_{n_k} сходятся к $c|_{[0, t_0]}$. Значит, $c|_{[0, t_0]}$ есть кратчайшая, так как является пределом последовательности кратчайших.

1.2. В нижеследующих леммах выясняется поведение геодезических в M_+ и M_0.

Лемма 2

Утв. *Для каждого компактного множества $C \subset M_+$ существует компактное множество $D \supset C$, такое, что любая геодезическая с концами в $M_+ \setminus D$, пересекающая C, имеет индекс $\geqslant (m-1)$.*

Построение множества D.

Пусть $C_t = \{q \in M\colon \rho_\mu(q, C) \leqslant t\}$. Так как C есть компактное множество и M_+ – полное риманово многообразие, то C_t есть также компактное множество. Обозначим через $K(p, \omega)$ риманову кривизну M_+ в точке p в двумерном направлении ω. Пусть

$$\bar{m}(t) = \min_{p \in C_t,\ \omega \in M_p} K(p, \omega). \tag{1}$$

Функция $\bar{m}(t)$ есть непрерывная положительная функция при $0 \leqslant t < \infty$.

Определим функцию $m(t)$ равенствами

$$m(t) = \begin{cases} \bar{m}(t) & \text{при } 0 \leqslant t < \infty, \\ \bar{m}(-t) & \text{при } -\infty < t \leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\varphi'' + \frac{m(t)}{2}\varphi = 0. \tag{3}$$

Пусть $\bar{\varphi}(t)$ есть решение этого уравнения с начальными условиями $\bar{\varphi}(0) = 1$, $\bar{\varphi}'(0) = 0$. Так как $m(t)$ – положительная четная функция, то существует число $l > 0$, такое, что $\bar{\varphi}(l) = \bar{\varphi}(-l) = 0$ и $\bar{\varphi}(t) > 0$ при $-l < t < l$ (это следует из выпуклости $\bar{\varphi}$). Определим функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \bar{\varphi}(t) & \text{при } -l \leqslant t \leqslant l, \\ 0 & \text{при } t \leqslant -l,\ t \geqslant l. \end{cases} \tag{4}$$

Положим теперь $D = C_{2l}$.

Доказательство леммы 2.

Пусть $c(t)\colon [\alpha_1, \alpha_2] \to M_+$ – геодезическая, удовлетворяющая условиям леммы 2, причем $a = c(0) \in C$. В силу определения множества D имеем

$$|\alpha_1| > l,\ \alpha_2 > l. \tag{5}$$

Возьмем в M_a единичный вектор X, $\langle X, \dot{c}(0)\rangle = 0$ и обозначим через $X(t)$ вектор, полученный из X параллельным переносом вдоль дуги $c(0)c(t)$ в точку $c(t)$.

Пусть $K(t) = K(c(t), \omega)$, где ω — двумерное направление, определенное векторами $X(t)$ и $\dot{c}(t)$. Определим вдоль c: $[\alpha_1, \alpha_2] \to M_+$ векторное поле

$$\Phi(t) = X(t) \cdot \varphi(t).$$

Тогда вторая вариация для геодезической c, соответствующая векторному полю $\Phi(t)$, имеет вид (см. (4) разд. 4.1):

$$I(\Phi, \Phi) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\langle \Phi', \Phi' \rangle - \langle R(\Phi, \dot{c})\dot{c}, \Phi \rangle] dt =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\varphi'^2 - \varphi^2 \langle R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X(t) \rangle] dt = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\varphi'^2 - K(t)\varphi^2] dt.$$

Последний интеграл в силу (1) — (5) строго меньше

$$-\int_{-l}^{l} \left(\varphi'^2 - \frac{m(t)}{2}\varphi^2\right) dt = \varphi'\varphi\Big|_{-l}^{l} - \int_{-l}^{l} \varphi\left(\varphi'' + \frac{m(t)}{2}\varphi\right) dt = 0.$$

Итак,

$$I(\Phi, \Phi) < 0. \tag{6}$$

Поскольку вектор X был произвольным единичным вектором, перпендикулярным $\dot{c}(0)$, то из (6) вытекает утверждение леммы 2.

Будем говорить, что геодезическая c: $[\alpha, \beta] \to M_+$ вогнута относительно точки $a \in M_+$, если функция $f(t) = ac(t)$ не имеет точек относительного слабого минимума в интервале (α, β).

Лемма 3

Утв. *Для каждого компактного множества $C \subset M_+$ существует компактное множество $D \subset M_+$, такое, что всякая геодезическая c: $[\alpha, \beta] \to M_+$, принадлежащая C, вогнута относительно любой точки $M_+ \setminus D$.*

Док. Построим для множества C множество D, как это сделано в доказательстве леммы 2.

Предположим что лемма 3 неверна, т. е. что существует точка $a \in M_+ \setminus D$, относительно которой геодезическая c не является вогнутой. Тогда существует $t_0 \in (\alpha, \beta)$, для которого функция $f(t)$ достигает минимума. Проведем кратчайшую $ac(t_0)$, пусть c_1: $[0, \rho = ac(t_0)] \to M_+$ — ее параметризация; кратчайшая $ac(t_0)$ нормальна к c в точке $c(t_0)$, как это следует из замечания (iv) разд. 4.1.

Обозначим через $X(s)$ вектор, полученный из $\dot{c}(0)$ параллельным переносом вдоль $c_1|_{[0, s]}$ в точку $c_1(s)$. Определим вдоль c_1 векторное поле $\Phi(s) = \varphi(s)X(s)$, где $\varphi(s)$ — функция, определенная выше при доказательстве леммы 2; тогда вторая вариация

геодезической c_1, определенная векторным полем Φ, имеет вид

$$I(\Phi, \Phi) = \int_0^\rho [\langle \Phi', \Phi' \rangle - \langle R(\Phi, \dot{c}_1)\dot{c}_1, \Phi \rangle] ds =$$

$$= \int_0^\rho [\varphi'^2 - \varphi^2 \langle R(X(s), \dot{c}_1(s))\dot{c}_1(s), X(s) \rangle] ds.$$

Последний интеграл строго меньше

$$\int_0^l \left[\varphi'^2 - \frac{m(t)}{2}\varphi^2\right] ds = 0.$$

Значит, индекс геодезической c_1: $[0, \rho] \to M_+$ в задаче с одним свободным концом (изменяющимся вдоль c) и с одним закрепленным концом в точке a равен по крайней мере 1, что противоречит нашему предположению.

Лемма 4

Утв. *Для всякого компактного множества $C \subset M_+$ существует такое число λ, что длина любой геодезической, целиком лежащей в C, не превосходит λ.*

Док. Предположим противное: пусть существует последовательность геодезических c_n: $[-n, n] \to M_+$, целиком лежащих в C, и $L(c_n) = 2n$. Рассмотрим последовательность точек $c_n(0)$ и последовательность векторов $\dot{c}_n(0)$. В силу компактности C и компактности множества направлений можно из последовательности точек $c_n(0)$ и последовательности векторов $\dot{c}_n(0)$ выбрать сходящиеся подпоследовательности.

Пусть p — предельная точка и $\tau \in M_p$ — предельный вектор. Пусть c_1: $(-\infty, \infty) \to M_+$ есть геодезическая, определенная условиями $c_1(0) = p$, $\dot{c}_1(0) = \tau$. В силу построения $c_1(\mathbb{R})$ целиком лежит в C. Обозначим через B замыкание $c_1(\mathbb{R})$. Для множества C построим множество D, удовлетворяющее условиям леммы 3.

Пусть $q \in M_+ \setminus D$. Найдем в B точку a, ближайшую к q. Так как $q \in B$, то найдется последовательность чисел k, такая, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} c_1(t_k)$. Можно считать, не уменьшая общности, что последовательность векторов $\dot{c}_1(t_k)$ также сходится к некоторому вектору $\tau_0 \in M_a$. Возьмем геодезическую c_2: $(-\infty, \infty) \to M_+$, определенную условиями $c_2(0) = a$, $\dot{c}_2(0) = \tau_0$. Геодезическая c_2, с одной стороны, принадлежит множеству B, а с другой стороны, точка $c_2(0)$ является ближайшей к точке $q \in M_+ \setminus D$ вопреки утверждению леммы 3. Полученное противоречие доказывает лемму 4.

1.3. Пусть a_1a_2 — кратчайшая в M_0, c: $[0, a_1a_2] \to M_0$ — ее параметризация, p_1: $[0, \infty) \to M_0$ — луч с вершиной в точке a_1, а p_2: $[0, \infty) \to M_0$ — луч с вершиной в точке a_2.

Обозначим через α_1 угол между векторами $\dot{c}(0)$ и $\dot{p}_1(0)$, а через α_2 — угол между векторами $-\dot{c}(0)$ и $\dot{p}_2(0)$.

Лемма 5

Утв. *Если в пространстве M_0 существует такая последовательность точек q_n, что кратчайшие $a_i q_n$ сходятся к p_i, $i=1, 2$, то*

$$\alpha_1+\alpha_2\geqslant\pi \quad (\textit{см.}\ [3]).$$

Док. Обозначим через α_i^n угол треугольника $a_1 q_n a_2$ в M_0 при вершине a_i, $i=1, 2$. В силу условий леммы

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_i^n=\alpha_i, \qquad i=1, 2. \tag{7}$$

Обозначим через $\alpha_i'^n$ угол треугольника $a_1' q_n' a_2'$ при вершине a_i', $i=1, 2$. По теореме сравнения разд. 6.4

$$\alpha_i'^n\leqslant\alpha_i^n, \tag{8}$$

но, очевидно,

$$\lim(\alpha_1'^n+\alpha_2'^n)=\pi \tag{9}$$

(см., впрочем, лемму 2 § 5 ниже). Из (7), (8) и (9) следует

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1'^n+\alpha_2'^n\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1^n+\alpha_2^n\right)=\alpha_1+\alpha_2.$$

Лемма 5 доказана.

Несколько сложнее доказывается следующая лемма.

Лемма 6

Утв. *Если в пространстве M_+ существует такая последовательность точек q_n, что кратчайшие $a_i q_n$ сходятся к лучам p_i, $i=1, 2$, и ни один из лучей p_1 и p_2 не является частью другого, то $\alpha_1+\alpha_2>\pi$ (см. [3]).*

Док. Можно, очевидно, считать, что оба угла α_1, α_2 меньше π. Обозначим через α_i^n угол в треугольнике $a_1 q_n a_2$ при вершине a_i, $i=1, 2$. По условию леммы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_i^n=\alpha_i, \qquad i=1, 2. \tag{10}$$

Выберем n_0 настолько большим, что при $n>n_0$ треугольник $a_1 q_n a_2$ является невырожденным. На стороне $a_1 q_n$ на расстоянии $d>0$ от вершины a_1 возьмем точку b_n. Треугольник $a_1 b_n a_2$ невырожденный, поскольку треугольник $a_1 q_n a_2$ невырожденный. Пусть $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Обозначим через K шар радиуса

$$r=2(d+a_1a_2) \tag{11}$$

с центром в точке a_1, $K=\{q:\ q\in M_+, \rho(q, a_1)\leqslant r\}$, а через k_0 — минимум римановой кривизны по всем точкам шара K и по всем

двумерным направлениям. Применим к треугольнику $a_1b_na_2$ теоремы разд. 6.4. Из них следует, что, во-первых, периметр треугольника $a_1b_na_2$ не превосходит $2\pi/\sqrt{k_0}$, а, во-вторых, угол α_1^n не меньше чем угол $\alpha_1''^n$ при вершине a_1'' в треугольнике $a_1''b_n''a_2''$, построенном на двумерной сфере радиуса $1/\sqrt{k_0}$ с теми же длинами сторон, что и у треугольника $a_1b_na_2$:

$$\alpha_1^n \geqslant \alpha_1''^n. \tag{12}$$

Если теперь обозначить через $\bar{\alpha}_1'^n$ угол при вершине a_1' в треугольнике $a_1'b_n'a_2'$, то справедливо неравенство

$$\alpha_1''^n \geqslant \bar{\alpha}_1'^n + \delta_n, \qquad \delta_n \geqslant \delta > 0, \tag{13}$$

где δ — некоторое положительное число, которое можно оценить снизу через k_0 и длины сторон треугольника a_1ba_2.

Построим теперь на двумерной евклидовой плоскости четырехугольник $\bar{a}_1''\bar{b}_n''\bar{q}_n''\bar{a}_2''$, прикладывая друг к другу по общей стороне $b_n'a_2'$ треугольники $a_1'b_n'a_2'$ и $a_2'q_n'b_n'$. Этот четырехугольник оказывается выпуклым. В самом деле, углы при вершинах $\bar{a}_1'$ и $\bar{q}_n'$ меньше π, поскольку это углы треугольников. Угол при вершине $\bar{a}_2'$ меньше π в силу теоремы сравнения (см. разд. 6.4), а угол при вершине $\bar{b}_n'$ меньше π, так как в силу неравенства треугольника имеем $a_1b_n + b_nq_n < a_1a_2 + a_2q_n$. Кроме того, рассмотрим треугольник $a_i'q_n'a_2'$ и обозначим через $\alpha_i'^n$ его угол при вершине a_i', $i = 1, 2$. Тогда по теореме сравнения имеем

$$\alpha_i^n \geqslant \alpha_i'^n, \tag{14}$$

и по лемме А. Д. Александрова о выпуклых четырехугольниках (см. лемму 3 разд. 6.4) выполняется неравенство

$$\bar{\alpha}_1'^n \geqslant \alpha_1'^n. \tag{15}$$

Наконец,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1'^n + \alpha_2'^n\right) = \pi. \tag{16}$$

Из (12) — (16) получаем

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1'^n + \alpha_2'^n\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\bar{\alpha}_1'^n + \bar{\alpha}_2'^n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1''^n - \delta_n + \alpha_2''^n\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1^n - \delta_n + \alpha_2^n\right) = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta$$

или $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$, что и требовалось доказать.

1.4. Выведем теперь некоторые следствия из доказанных лемм.

Назовем *прямой линией* (или прямой) на M такую геодезическую c: $\mathbb{R} \to M$, что для любого интервала $[\alpha, \beta]$ сужение $c|_{[\alpha, \beta]}$ есть кратчайшая. Тогда из леммы 2 следует

Теорема 1

Утв. *На многообразии M_+ не существует прямых линий.*

Введем, далее, понятие *связности на бесконечности*. Многообразие M называется связным на бесконечности, если для любого компактного подмножества $C \subset M$ дополнение содержит лишь одну компоненту со сколь угодно удаленными от C точками.

Из теоремы 1 вытекает теперь

Следствие

Утв. *Многообразие M_+ связно на бесконечности.*

Док. Действительно, если предположить, что M_+ не связно на бесконечности, то существуют две последовательности точек a_n и b_n, таких, что $a_n b_n \to \infty$, и при любом n кратчайшая $a_n b_n$ пересекает некоторое фиксированное компактное множество C.

Пусть $p_n \in a_n b_n \cap C$ и τ_n — единичный вектор в M_{p_n}, касательный к $a_n b_n$. Выберем из последовательности точек p_n и последовательности векторов τ_n сходящиеся подпоследовательности: $\lim\limits_{n_k \to \infty} p_{n_k} = p_0$ и $\lim\limits_{n_k \to \infty} \tau_{n_k} = \tau_0$. Проведем через точку p_0 геодезическую c: $\mathbb{R} \to M_+$ в направлении вектора τ_0. Нетрудно показать, что C есть прямая вопреки уже доказанной теореме 1. Из леммы 4 следует важная

Теорема 2

Утв. *В M_+ не существует замкнутых геодезических.*

Док. Действительно, если в M_+ существует замкнутая геодезическая c, то точки M_+, ей принадлежащие, образуют компактное множество, в котором c целиком содержится, вопреки лемме 4.

В следующем параграфе будут выведены важные следствия из лемм 3, 4 и 6.

ЛИТЕРАТУРА К § 1

[1] Gromoll D. and Meyer W., On complete open manifolds of positive curvature, *Ann. of Math.*, v. 90, 1 (1969).

[2] Кон-Фоссеи С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

[3] Топоногов В. А., Теоремы о кратчайших в некомпактных римановых пространствах положительной кривизны, *ДАН СССР* (в печати).

§ 2. Выпуклые множества в M_+

2.1. Понятие выпуклого множества в M было введено в разд. 5.2. Здесь мы введем нужное в дальнейшем изложении понятие абсолютно выпуклого множества. Множество $A \subset M$ назовем *абсолютно выпуклым множеством*, если любая геодезическая, соединяющая точки $p \in A$ и $q \in A$, принадлежит A.

Множество $A \subset M$ назовем *строго абсолютно выпуклым множеством*, если оно является абсолютно выпуклым множеством и если никакая внутренняя точка геодезической, принадлежащей A, не является точкой границы A.

2.2. Пусть c: $[0, \infty) \to M_+$ есть луч с вершиной в точке $p = c(0)$. Определим множество $B_c(t)$ как открытый шар радиуса $t = c(t)\,c(0)$ с центром в точке $c(t)$: $B_c(t) = \{q\colon q \in M_+,\ c(t)\,q < t\}$. Из неравенства треугольника для метрики M_+ следует

$$B_c(t_1) \subset B_c(t_2), \quad \text{если} \quad t_1 < t_2. \tag{1}$$

Положим $B_c = \bigcup\limits_{t \geqslant 0} B_c(t)$. Множество $A_c = M_+ \setminus B_c$ назовем *орипространством* с осью c.

Лемма 1

Утв. *Для любого луча c орипространство A_c есть абсолютно строго выпуклое множество.*

Док. Множество A_c непусто, так как точка $p \in A_c$. Докажем сначала, что A_c есть абсолютно выпуклое множество. Предположим противное. Пусть c_1: $[\alpha, \beta] \to M_+$ есть дуга геодезической, концы которой $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$ лежат в A_c, а $c_1(s_0)$ при некотором $s_0 \in (\alpha, \beta)$ лежит вне A_c. Тогда найдется некоторое t_1, такое, что $c_1(s_0) \in B_c(t_1)$. Выберем, кроме того, в соответствии с леммой 4 § 1 некоторое $t_2 > t_1$ так, чтобы дуга $c_1(s)$ была вогнута относительно точки $c(t_2)$. Так как $t_2 > t_1$, то $c_1(s_0) \in B_c(t_2)$, т. е.

$$c_1(s_0)\,c(t_2) < t_2. \tag{2}$$

С другой стороны, поскольку $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$ принадлежат A_c, имеем

$$c_1(\alpha)\,c(t_2) > t_2 \quad \text{и} \quad c_1(\beta)\,c(t_2) > t_2. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует существование чисел s_1 и s_2, таких, что

$$c_1(s_1)\,c(t_2) = c_1(s_2)\,c(t_2) = t_2. \tag{4}$$

Из равенства (4) можно вывести существование такого числа s_3, для которого

$$c_1(s_3)\,c(t_2) \leqslant c_1(s)\,c(t_2) \quad \text{при} \quad s \in [s_1, s_2].$$

Но последнее неравенство противоречит выбору числа t_2 и утверждению леммы 4 § 1. Перейдем теперь к доказательству строгой выпуклости.

(α) Никакая дуга геодезической не лежит на $\dot{A}_c$ — границе орипространства A_c.

Предположим, что утверждение (α) неверно. Пусть $c_2 : [0, 1] \to M_+$ — геодезическая, целиком принадлежащая A_c. Выберем числа $s_0 > 0$ и $s_1 < 1$ так, чтобы $c_2|_{[s_0, s_1]}$ была кратчайшей. Затем найдем последовательность чисел t_n, такую, чтобы кратчайшие $c_2(s_i)\,c(t_n)$, $i = 0, 1$, сходились к некоторому лучу p_i: $[0, \infty) \to M_+$, $i = 0, 1$. Оказывается, оба луча p_0 и p_1 ортогональны c_2. В самом деле, предположим, что по крайней мере один из них, скажем p_0, не перпендикулярен c_2 и образует с c_2 угол $\alpha_0 < \pi/2$. Будем считать для определенности, что α_0 равен углу между векторами $\dot{p}_0(0)$ и $\dot{c}_2(s_0)$.

Обозначим через α_n угол между кратчайшими $c_2(s_0)\,c(t_n)$ и $c_2(s_0)\,c_2(s_1)$. Тогда имеем очевидное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Возьмем теперь на кратчайшей $c_2(s_0)\,c_2(s_1)$ точку b на расстоянии δ от $c_2(s_0)$. Пусть $\bar{c}(t_n)\,\bar{c}_2(s_0)\,\bar{b}$ — треугольник на евклидовой плоскости, у которого угол $\bar{c}(t_n)\,\bar{c}_2(s_0)\,\bar{b}$ равен α_n, $\bar{c}(t_n)\,\bar{c}_2(s_0) = c(t_n)\,c_2(s_0)$, $\bar{c}_2(s_0)\,\bar{b} = c_2(s_0)\,b$. По теореме сравнения разд. 6.4

$$c(t_n)\,b \leqslant \bar{c}(t_n)\,\bar{b}. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\bar{c}(t_n)\,\bar{b} = c(t_n)\,c_2(s_0) - \cos\alpha_n \cdot \delta + v(\delta, n), \tag{7}$$

причем $|v(\delta, n)| \leqslant s(\delta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $s(\delta) = o(\delta)$. Из (6) и (7) получаем

$$c(t_n)\,b \leqslant c(t_n)\,c_2(s_0) - \cos\alpha_n \cdot \delta + v(\delta, n). \tag{8}$$

Наконец, поскольку точки $c_2(s_0)$ и b принадлежат A_c, то

$$\lim_{n\to\infty} (c_2(s_0)\,c(t_n) - t_n) = 0, \tag{9}$$

$$bc(t_n) \geqslant t_n. \tag{10}$$

Сопоставляя (8) и (10), получаем

$$t_n \leqslant c(t_n)\,c_2(s_0) - \cos\alpha_n \cdot \delta + v(\delta, n). \tag{11}$$

Перейдем в (11) к пределу при $n \to \infty$ и, учитывая (9), получим

$$\cos\alpha_0 \cdot \delta + o(\delta) \leqslant 0. \tag{12}$$

Разделим (12) на δ и перейдем к пределу при $\delta \to 0$, тогда имеем $\cos\alpha_0 \leqslant 0$, что невозможно, так как $0 \leqslant \alpha_0 < \pi/2$. Итак, оба луча p_0

и p_1 перпендикулярны кратчайшей $c_2(s_0)c_2(s_1)$ вопреки утверждению леммы 6 § 1. Полученное противоречие доказывает утверждение (α).

Пусть теперь c_3: $[\alpha, \beta] \to M_+$ — геодезическая, у которой $c_3(\alpha) \in A_c$ и $c_3(\beta) \in A_c$. Положим $L = \{t\colon\ t \in (\alpha, \beta) = I,\ c_3(t) \in \dot{A}_c\}$; тогда

(β) L — пустое множество.

Предположим противное. Пусть L непусто. Тогда в силу (α) найдутся числа $t_1 \in I \setminus L$, $t_2 \in I \setminus L$ и $t_3 \in L$, такие, что (см. разд. 5.2)

$$t_1 < t_3 < t_2 \quad \text{и} \quad t_2 - t_1 < d_{A_c}/2. \tag{13}$$

Выберем последовательность точек $b_n \in M_+ \setminus A_c$, сходящуюся к $c_3(t_3)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c_3(t_3). \tag{14}$$

Соединим точку $c_3(t_1)$ с точкой b_n кратчайшей $c_3(t_1)\,b_n$ и продолжим ее за точку b_n до кратчайшей $c_3(t_1)\,a_n$ так, чтобы

$$c_3(t_1)\,a_n = t_2 - t_1. \tag{15}$$

Согласно (13), (15) и разд. 5.2, точка a_n непрерывно зависит от точки b_n. Поэтому имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c_3(t_2). \tag{16}$$

Так как $c_3(t_1) \in A_c \setminus \dot{A}_c$ и $c_3(t_2) \in A_c \setminus \dot{A}_c$, то в силу (16) существует n_0, для которого $a_{n_0} \in A_c \setminus \dot{A}_c$. Таким образом, мы получаем геодезическую $c_3(t_1)\,a_{n_0}$, у которой концы лежат в A_c, а внутренняя точка b_n лежит в $M_+ \setminus A_c$, что противоречит абсолютной выпуклости A_c. Таким образом, (β) доказано и строгая выпуклость A_c теперь следует из (β).

2.3. Итак, в M_+ существуют абсолютно выпуклые множества. Множество A_c может оказаться компактным, но может быть и некомпактным, как это можно показать на примерах. Оказывается, что в M_+ всегда существует компактное строго абсолютно выпуклое множество, содержащее наперед заданное компактное множество.

Пусть $p \in M_+$. Обозначим через v множество всех лучей с вершиной в точке p. Определим множества $B(p) = \bigcup\limits_{c\in v} B_c$,

$$A(p) = M_+ \setminus B(p) = \bigcap_{c\in v} (M_+ \setminus B_c) = \bigcap_{c\in v} A_c.$$

Лемма 2

Утв. *$A(p)$ есть компактное абсолютно выпуклое множество в пространстве M_+.*

В действительности $A(p)$ оказывается даже строго абсолютно выпуклым, но мы не хотим останавливаться здесь на доказательстве этого факта.

Док. Так как $A(p)$ есть пересечение абсолютно выпуклых множеств A_c, то оно само есть абсолютно выпуклое (непустое) множество. Докажем его компактность.

Если $A(p)$ некомпактное, то существует последовательность точек p_n, расстояния которых до p стремятся к бесконечности при $n \to \infty$. Пусть c_n: $[0, \alpha_n = pp_n] \to M_+$ есть кратчайшая, соединяющая p с p_n. Тогда из последовательности c_n можно, как это было сделано в § 1, извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому лучу p_0 с вершиной в p, т. е. $p_0 \in v$. Кроме того, в силу абсолютной выпуклости $A(p)$ имеем $p_0 \in A(p)$. Но C_{p_0} не содержит p_0, а поскольку $A(p) = \bigcap\limits_{c \in v} A_c$, то и $A(p)$ не содержит p_0; полученное противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3

Утв. *Всякое компактное множество $C \subset M_+$ содержится в некотором компактном абсолютно выпуклом множестве $D \subset M_+$.*

Здесь можно также усилить утверждение: D является *строго* абсолютно выпуклым.

Док. Назовем лучом, исходящим из множества C, такой луч p: $[0, \infty) \to M_+$, у которого вершина $p_0 = p(0) \in C$ и для каждого t имеет место

$$\rho(p(t), C) = p_0 p(t) = t. \qquad (17)$$

Докажем, что для любого компактного множества C существует луч, исходящий из C. Поскольку C компактно, а M_+ некомпактно, то существует последовательность точек q_n, такая, что

$$\rho(q_n, C) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть $b_n \in C$ и $q_n b_n = \rho(q_n, C)$. Существование точки b_n следует из компактности C. Рассуждая далее так же, как и при доказательстве леммы 1 § 1, покажем, что из последовательности кратчайших $b_n q_n$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому лучу p_1, исходящему из множества C. Пусть v есть множество всех лучей, исходящих из множества C. Рассмотрим множество $D = \bigcap\limits_{p \in v} A_p$. Это множество содержит C, так как каждое множество A_p содержит C, и является абсолютно выпуклым множеством. Доказательство компактности D полностью повторяет доказательство леммы 2, только понятие луча с вершиной в точке нужно заменить понятием луча, исходящего из множества C.

ЛИТЕРАТУРА К § 2

Gromoll D. and Meyer W., On complete open manifolds of positive curvature, *Ann. of Math.*, v. 90, 1 (1969).

§ 3. Радиус инъективности на многообразиях $M_+(M_0)$

3.1. В этом параграфе мы докажем для некомпактных многообразий теоремы, аналогичные теоремам, доказанным в разд. 7.5, 7.7 для компактных римановых многообразий.

Обозначим через $M_+(k_0)$ ($M_0(k_0)$) риманово многообразие $M_+(M_0)$, у которого риманова кривизна в каждой точке и в каждом двумерном направлении ограничена сверху числом k_0.

Для пространств $M_+(k_0)$ и $M_0(k_0)$ верны следующие теоремы:

Теорема 3

Утв. *Каждая геодезическая в $M_+(k_0)$, длина которой не превосходит $\pi/\sqrt{k_0}$, есть кратчайшая.*

Теорема 4

Утв. *Для каждого пространства $M_0(k_0)$ существует число r_0, такое, что любая геодезическая в $M_0(k_0)$, длина которой не превосходит r_0, есть кратчайшая.*

Из теоремы 3 следует, что радиус инъективности для любой точки пространства $M_+(k_0)$ не меньше $\pi/\sqrt{k_0}$, а из теоремы 4 вытекает, что точная нижняя грань радиусов инъективности, взятая по всем точкам пространства $M_0(k_0)$, отлична от нуля.

Теорема 3 для полных некомпактных пространств с полюсом была получена в 1962 г. И. А. Соколенко [2]. (Полюсом пространства $M_+(k_0)$ называется такая точка $p \in M_+(k_0)$, что все геодезические, выходящие из точки p, не имеют общих точек, отличных от p.)

В теореме 4 число r_0 нельзя оценить снизу через k_0. В самом деле, возьмем риманово пространство V^3_α, определенное в замечании (iii) разд. 7.5, и рассмотрим прямое метрическое произведение $M^4_0 = V^3_\alpha \times \mathbb{R}$. Максимум римановой кривизны пространства M^4_0 равен максимуму римановой кривизны пространства V^3_α. Далее, для любого числа r_0 можно так выбрать значение параметра α, что максимум кривизны V^3_α будет равен 1, и в V^3_α будет существовать замкнутая геодезическая длины меньше r_0.

3.2. Доказательство теоремы 3.

Будем доказывать теорему 3 от противного. Пусть c: $[0, l = \pi/\sqrt{k_0}] \to M_+(k_0)$ — геодезическая длины $\pi/\sqrt{k_0}$, которая не является кратчайшей. Соединим точки $c(0)$ и $c(l)$ кратчайшей $c(0)c(l)$. Совокупность геодезической c и кратчайшей $c(0)c(l)$ образует невырожденный двуугольник γ_0, периметр которого строго меньше $2\pi/\sqrt{k_0}$. Пусть A — компактное абсолютно выпу-

клое множество, содержащее γ_0, существование которого утверждается в лемме 3 § 2. Обозначим через Γ множество всех невырожденных двуугольников, вершины которых лежат в A. В силу компактности A точная нижняя грань l_0 периметров двуугольников, принадлежащих Γ, отлична от нуля, а поскольку $\gamma_0 \in \Gamma$, то имеем

$$0 < l_0 < 2\pi/\sqrt{k_0}. \tag{1}$$

Возьмем последовательность $\sigma_n \in \Gamma$, периметры которых стремятся к l_0. Нетрудно доказать, пользуясь (1) и тем, что A есть абсолютно выпуклое множество, так же как это сделано в разд. 7.5 (следствие из леммы 1), что в A существует предельный двуугольник σ_0 и что σ_0 есть периодическая геодезическая. Но, с другой стороны, теорема 2 утверждает отсутствие в $M_+(k_0)$ периодических геодезических. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

3.3. Доказательство теоремы 4.

Если теорема 4 неверна, то это значит, что в $M_0(k_0)$ существуют невырожденные двуугольники сколь угодно малого периметра. Пусть γ — невырожденный двуугольник периметра l_0, причем

$$0 < l_0 < 2\pi/\sqrt{k_0}, \tag{2}$$

а p — одна из его вершин (если γ_0 — периодическая геодезическая, то p — произвольная точка γ_0). Среди всех невырожденных двуугольников с вершиной в точке p найдем двуугольник γ_1 наименьшего периметра. Так же как в разд. 7.5 (лемма 1), можно доказать, что γ_1 есть геодезическая петля.

Обозначим через K_R замкнутый шар в $M_0(k_0)$ радиуса R с центром в точке p. Далее, среди всех геодезических петель с вершинами в K_R рассмотрим геодезическую петлю наименьшей длины; обозначим ее через $\gamma(R)$. Существование $\gamma(R)$ при $R \geqslant 2\pi/\sqrt{k_0}$ вытекает из компактности K_R и (2) (если существует более чем одна геодезическая петля наименьшей длины, то через $\gamma(R)$ обозначим любую из них).

Пусть $f(R)$ — длина $\gamma(R)$, а $q(R)$ — ее вершина (если $\gamma(R)$ — периодическая геодезическая, то $q(R)$ — произвольная точка $\gamma(R)$). Область определения функции $f(R)$ содержит интервал $[2\pi/\sqrt{k_0}, \infty)$. По определению функция $f(R)$ есть непрерывная положительная монотонно убывающая функция. Кроме того, в силу нашего предположения о существовании невырожденных двуугольников сколь угодно малого периметра имеем

$$\lim_{R\to\infty} f(R) = 0. \tag{3}$$

(α) Докажем, что $pq(R) \to \infty$, если $R \to \infty$.

В самом деле, предположим, что существует последовательность $R_k \to \infty$, такая, что $pq(R_k) \leqslant c_0$ при любом k.

Обозначим через d_k число, определенное в разд. 5.2 для шара $K = K_{c_0+f(c_0)}$. Тогда в силу (3) существует геодезическая петля γ, вершина которой лежит в K и длина которой меньше d_k, что противоречит определению числа d_k. Найдем теперь последовательность чисел $R_n \to \infty$, такую, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) кратчайшие $pq(R_n)$ сходятся к некоторому лучу p: $[0, \infty) \to$ $\to M_0(k_0)$ с вершиной в точке p;

(b) нижние левые производные числа функции $f(R)$ в точках R_n строго отрицательны.

Существование такой последовательности чисел R_n вытекает из утверждения (α), монотонности $f(R)$ и (3), причем утверждение (b) без труда получается из геометрических соображений путем построения опорных прямых к графику функции $f(R)$.

Выберем, наконец, n_0 настолько большим, чтобы, во-первых, было

$$f(R_{n_0}) < 2\pi/\sqrt{k_0}, \tag{4}$$

во-вторых, угол α между p и кратчайшей $pq(R_{n_0})$ был меньше $\pi/4$:

$$\alpha < \pi/4. \tag{5}$$

Разобьем геодезическую петлю $\gamma(R_{n_0})$ точками a_i ($i = 1, \ldots, 2k$, $a_1 = a_{2k+1} = q(R_{n_0})$) так, чтобы геодезическая $a_i a_{i+1}$ была кратчайшей при любом $i = 1, \ldots, 2k$. При этом будем считать, что точка a_k делит вместе с a_1 петлю $\gamma(R_{n_0})$ на две геодезические c_1 и c_2 равной длины. Затем на луче p выберем последовательность точек $p_m = p(t_m)$, такую, чтобы при $i = 1, \ldots, 2k$ кратчайшие $p_m a_i$ сходились к некоторому лучу p_i. Продолжим лучи p_i геодезическими $\bar{c}_i$ в направлениях, противоположных направлениям лучей p_i, и обозначим через $a_i(\delta)$ точку на $\bar{c}_i$, отстоящую от a_i на расстояние δ.

В силу (4) длины геодезических c_1 и c_2 меньше $\pi/\sqrt{k_0}$, поэтому на них нет точек, сопряженных a_1, включая и a_k (см. теорему сравнения разд. 6.2). Значит, у c_i существует окрестность U_i, такая, что любой путь, лежащий в U_i и соединяющий a_1 с a_k, имеет длину больше, чем длина c_i, $i = 1, 2$. Кроме того, отсюда же следует, что при достаточно малых δ существует единственная геодезическая $c_i(\delta)$, соединяющая $a_1(\delta)$ с $a_k(\delta)$ и лежащая в U_i. Длины геодезических $c_i(\delta)$ при достаточно малом δ также меньше $\pi/\sqrt{k_0}$, $i = 1, 2$. Поэтому на $c_i(\delta)$, $i = 1, 2$, в силу той же теоремы сравнения нет точек, сопряженных $a_1(\delta)$. Следовательно, для $c_i(\delta)$ можно найти окрестности $U_i(\delta)$ с такими же свойствами относи-

тельно $c_i(\delta)$, какими обладают U_i относительно c_i, $i=1, 2$. Кроме того, их можно выбрать еще так, чтобы было

$$\bigcap_{\delta>0} U_i(\delta) = U_i, \qquad i=1, 2. \tag{6}$$

Обозначим через $\sigma(\delta)$ замкнутый полигон, образованный кратчайшими $a_i(\delta)a_{i+1}(\delta)$ при $i=1, 2, \ldots, 2k$, а через $\sigma^1(\delta)$ и $\sigma^2(\delta)$ — полигоны, на которые полигон $\sigma(\delta)$ делится точками $a_1(\delta)$ и $a_k(\delta)$. Если выбрать δ достаточно малым, то в силу (6) полигон $\sigma^i(\delta)$, $i=1, 2$, лежит в $U_i(\delta)$ и, следовательно, его длина не меньше длины $c_i(\delta)$. Значит, длина двуугольника $\gamma(\delta)$, образованного геодезическими $c_1(\delta)$ и $c_2(\delta)$, не превосходит $L(\delta)$ — длины полигона $\sigma(\delta)$. Тем более

$$f(pa_1(\delta)) \leqslant L(\delta). \tag{7}$$

Оценим $L(\delta)$. В силу леммы 5 § 1 имеем

$$a_i(\delta)a_{i+1}(\delta) \leqslant a_ia_{i+1} + o(\delta). \tag{8}$$

Из (8) следует

$$L(\delta) \leqslant f(R_{n_0}) + o(\delta). \tag{9}$$

а из (7)

$$f(pa_1(\delta)) \leqslant f(R_{n_0}) + o(\delta). \tag{10}$$

Оценим $pa_1(\delta)$. Обозначим через φ угол в треугольнике $a_1a_1(\delta)p$ при вершине a_1. Тогда из леммы 5 § 1 и (5) следует

$$\varphi < \pi/4. \tag{11}$$

Построим, наконец, на евклидовой плоскости треугольник $\bar{a}_1\bar{a}_1(\delta)\bar{p}$, удовлетворяющий условиям: угол $\bar{a}_1(\delta)\bar{a}_1\bar{p}$ равен φ, $\bar{a}_1\bar{a}_1(\delta) = a_1a_1(\delta)$, $\bar{a}_1\bar{p} = a_1p$. Согласно теореме сравнения разд. 6.4, имеем

$$a_1(\delta)p \leqslant \bar{a}_1(\delta)\bar{p}. \tag{12}$$

Подсчитаем $\bar{a}_1(\delta)\bar{p}$:

$$\bar{a}_1(\delta)\bar{p} = \bar{a}_1\bar{p} - \cos\varphi \cdot \delta + o(\delta). \tag{13}$$

Из (11) и (12) следует

$$a_1(\delta)p \leqslant a_1p - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta + o(\delta). \tag{14}$$

Из (14), монотонности $f(R)$ и (10) получаем

$$f\left(R_{n_0} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta + o(\delta)\right) \leqslant f(R_{n_0}) + o(\delta). \tag{15}$$

Из (15) нетрудно вывести, что левое верхнее (а тем более левое нижнее) производное число функции $f(R)$ в точке R_{n_0} не меньше нуля, что противоречит выбору числа R_{n_0}.

Полученное противоречие доказывает теорему 4.

ЛИТЕРАТУРА К § 3

[1] Топоногов В. А., Теоремы о кратчайших в некомпактных римановых пространствах положительной кривизны, *ДАН СССР* (в печати).

[2] Соколенко И. А., Сферы и геодезические в римановых пространствах с полюсом, *ДАН СССР*, т. 134, 6 (1960).

§ 4. Диффеоморфность M_+ евклидову пространству

4.1. В этом параграфе доказывается теорема о диффеоморфности M_+ евклидову пространству $\mathbb{R}^m$ при $m \geqslant 5$. Доказательство этой теоремы существенно опирается на известные теоремы об h-кобордизмах из дифференциальной топологии. Сначала доказывается, что M_+^m асферично во всех размерностях (т. е. гомотопические группы пространства M_+^m тривиальны во всех размерностях). Однако отсюда еще нельзя вывести диффеоморфность M_+^m и $\mathbb{R}^m$. Оказывается, существуют даже четырехмерные многообразия, асферичные во всех размерностях и не гомеоморфные $\mathbb{R}^4$. Эти многообразия отличаются друг от друга и от евклидова пространства поведением на бесконечности. Выясняется, что многообразие M^m, асферичное во всех размерностях, только тогда гомеоморфно (и в этом случае даже диффеоморфно) евклидову пространству $\mathbb{R}^m$, когда оно „односвязно на бесконечности“ [2].

Многообразие M называется односвязным на бесконечности, если для любого компактного множества $C \subset M$ найдется компактное множество $D \supset C$, такое, что $M \setminus D$ односвязно.

Доказательству асферичности M_+ и односвязности M_+ на бесконечности посвящены следующие ниже леммы и теоремы. В пунктах 4.2—4.4 мы излагаем ряд известных построений и лемм, следуя в основном изложению в работе [3].

4.2. Пусть G — компактное выпуклое множество в пространстве M. Непрерывное отображение $p\colon S^1 \to G$ ориентированной окружности S^1 с фиксированной точкой $\bar{q}$ будем называть петлей с отмеченной точкой $q = p(\bar{q})$. Две петли p_α и p_β называются эквивалентными, если существует гомеоморфное отображение $\sigma(\alpha, \beta)\colon S^1 \to S^1$, сохраняющее ориентацию S^1, такое, что $\sigma(\alpha, \beta)(\bar{q}) = (\bar{q})$ и $p_\alpha = p_\beta \circ \sigma_{\alpha\beta}$. Класс эквивалентных кусочно дифференцируемых петель называется направленной замкнутой кривой с отмеченной точкой. Через $\Pi(G)$ обозначим множество всех замкнутых направленных кривых с отмеченной точкой в области $G \subset M$. Через $L(p)$ будем обозначать длину кривой $p \in \Pi(G)$.

Пусть $p \in \Pi(G)$ и q — отмеченная точка p. Введем на p параметризацию с помощью приведенного (пропорционального длине) параметра t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, отсчитываемого от точки q в положи-

тельном направлении p. Метрика, введенная во множестве $\Pi(G)$ стандартным образом, очевидно, удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Определим теперь на множестве $\Pi(G)$ гомотопию D_ϑ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$. Пусть d — число, соответствующее G согласно разд. 5.2. Далее, пусть $\gamma \in \Pi(G)$ и целое число q таково, что $qd_G > L(\gamma)$. Отнесем γ к приведенному параметру t. Обозначим через $\gamma(t', t'')$ дугу γ с концами в точках $\gamma(t')$ и $\gamma(t'')$, а через $\sigma(t', t'')$ — кратчайшую, соединяющую точки $\gamma(t')$ и $\gamma(t'')$. Каждому $\vartheta \in [0, 1]$ сопоставим кривую $\gamma_\vartheta = D_\vartheta(\gamma) \in \Pi(G)$, заданную формулой

$$\gamma_\vartheta = \prod_{j=0}^{q-1} \sigma\left(\frac{j}{q}, \frac{j+\vartheta}{q}\right) \cdot \gamma\left(\frac{j+\vartheta}{q}, \frac{j+1}{q}\right),$$

где под произведением кривых понимается кривая, полученная их последовательным прохождением. Так как G — выпуклое множество, то $\gamma_\vartheta \in G$. Пусть C — произвольное подмножество $\Pi(G)$, такое, что $L(\gamma) < C$ при $\gamma \in C$. Тогда для каждой кривой γ существует кривая $\gamma_\vartheta = D_\vartheta(\gamma)$ при $\gamma \in C$. Легко видеть, что γ_ϑ непрерывно зависит от (γ, ϑ), где $(\gamma \in C, 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$. Таким образом, D_ϑ является непрерывной деформацией множества C на $\Pi(G)$. Введем на каждой кривой γ_ϑ параметризацию $\gamma_\vartheta(t)$ с помощью приведенного параметра, отсчитываемого от отмеченной точки $\gamma(0) = q$. Тогда точка $\gamma_\vartheta(t)$ непрерывно зависит от (γ, ϑ, t) при $\gamma \in C$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Заметим, наконец, что $D_0(\gamma) = \gamma_0 = \gamma$ и

$$L(D_1(\gamma)) \leqslant L(D_\vartheta(\gamma)) \leqslant L(\gamma), \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1. \tag{1}$$

Определим теперь множество $\Pi_k(G)$. Будем говорить, что кривая γ принадлежит $\Pi_k(G)$, если выполняются следующие условия:

(a) $\gamma \in \Pi(G)$;

(b) γ есть полигон из кратчайших с k вершинами;

(c) длина каждого звена γ не превосходит d_G;

(d) отмеченная точка γ совпадает с одной из его вершин.

Введем во множестве $\Pi_k(G)$ метрику. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi_k(G)$. Обозначим через α_i^1 вершину, совпадающую с отмеченной точкой полигона γ_i, а через a_i^p — вершины γ_i, $i = 1, 2$; $p = 1, 2, \ldots, k$. Причем порядок вершин задается ориентацией γ_i.

Положим $\rho_{\Pi_k}(\gamma_1, \gamma_2) = \max\limits_{p=1, \ldots, k} (a_1^p, a_2^p)$. Метрика ρ_{Π_k} удовлетворяет обычным аксиомам, так что $\Pi_k(G)$ превращается в метрическое пространство. Относительно топологии $\Pi_k(G)$, определенной метрикой ρ_{Π_k}, функция $L(\gamma)$ непрерывна.

Теперь определим деформацию B_ϑ полигона $\gamma \in \Pi_k(G)$. Пусть $\gamma \in \Pi_k(G)$, а t — приведенный параметр на γ, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть вершина a_i полигона γ соответствует значению параметра t_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Обозначим, как и ранее, через $\sigma(t', t'')$ кратчай-

шую, соединяющую точки $\gamma(t')$ и $\gamma(t'')$. Каждому значению параметра ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, сопоставим полигон $\gamma_\vartheta = B_\vartheta(\gamma)$ следующим образом:

$$\gamma_\vartheta = \sigma\left(\frac{1+t_{k-1}}{2},\ 1+\vartheta\frac{t_{k-1}-1}{2}\right)\cdot\sigma\left(1+\vartheta\frac{t_{k-1}-1}{2},\ \frac{t_1}{2}\right)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{k-2}\left[\sigma\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2},\ t_i+\vartheta\frac{t_{i-1}-t_i}{2}\right)\cdot\sigma\left(t_i+\vartheta\frac{t_{i-1}-t_i}{2},\ \frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\sigma\left(\frac{t_{k-2}+t_{k-1}}{2},\ t_{k-1}+\vartheta\frac{t_{k-2}-t_{k-1}}{2}\right)\cdot\sigma\left(t_{k-1}+\vartheta\frac{t_{k-2}-t_{k-1}}{2},\ \frac{1+t_{k-1}}{2}\right).$$

При этом отмеченную точку q_ϑ на полигоне γ_ϑ определим, положив $q_\vartheta = \gamma\left(1+\vartheta\frac{t_{k-1}-1}{2}\right)$. Легко видеть, что γ_ϑ непрерывно зависит от (γ, ϑ), и если на каждой кривой γ_ϑ ввести приведенный параметр t, то точка $\gamma_\vartheta(t)$ непрерывно зависит от (γ, ϑ, t), где $\gamma \in \Pi_k(G)$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Заметим также, что q_ϑ непрерывно зависит от совокупности (γ, ϑ). Полигон $\gamma_1 = B_1(\gamma) \in \Pi_k(G)$, и γ_1 непрерывно зависит от γ в метрике $\Pi_k(G)$.

$B_1(\gamma)$ есть полигон, вершины которого лежат в серединах сторон полигона γ. Сформулируем почти очевидную лемму.

Лемма 1

Утв. *$L(B_1(\gamma)) \leqslant L(\gamma)$, причем $L(B_1(\gamma)) = L(\gamma)$ тогда и только тогда, когда γ есть периодическая геодезическая.*

4.3. Пусть $\gamma \in \Pi(G)$, $L(\gamma) < d_G$ и $\gamma(t)$ — параметризация γ. Определим следующую гомотопию p_ϑ. Каждому ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, сопоставим кривую $\gamma_\vartheta \in \Pi(G)$ следующим образом: соединим точку $q_\gamma = \gamma(0)$ с каждой точкой $\gamma(t)$ кратчайшей $q\gamma(t)$. Поскольку длина γ меньше d_G, расстояние между q и $\gamma(t)$ меньше $d_G/2$. Поэтому (см. разд. 5.2) кратчайшие $q\gamma(t)$ непрерывно зависят от t. Обозначим через $p(t, \vartheta)$ точку на кратчайшей $q\gamma(t)$, отстоящую от q на расстояние, равное $\vartheta \cdot q\gamma(t)$. Положим $\gamma_\vartheta(t) = p(t, \vartheta) = p_\vartheta(\gamma)$. Нетрудно показать, что $\gamma_\vartheta \in \Pi(G)$ при любом ϑ. Пусть C — подмножество $\Pi(G)$ и $L(\gamma) < d_G$ при $\gamma \in C$. Легко видеть, что p_ϑ есть непрерывная деформация C на $\Pi(G)$, и точка $\gamma_\vartheta(t)$ непрерывно зависит от (γ, ϑ, t). Наконец,

$$p_1(\gamma) = q_\gamma \quad \text{при любом} \quad \gamma \in C. \tag{2}$$

4.4. Нам понадобится особое покрытие сферы окружностями, которое мы будем называть правильным разбиением сферы.

Определим по индукции множество $\tilde{T}^{r-1}$ направленных окружностей γ_q на S^r, на каждой из которых фиксирована точка q, а также полиэдр $T^{r-1} \subset S^r$. При $r = 1$ сфера S^1 — окружность, выберем направление на S^1 и точку $q \in S^1$. Положим $\tilde{T}^0 = S^1$,

$T^0 = q$. Пусть для S^r правильное разбиение уже построено и определены $\tilde{T}^{r-1}$, T^{r-1}. Введем в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{r+2}$ прямоугольную декартову систему координат $(x^1, x^2, \ldots, x^{r+2})$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{r+2}$ стандартную сферу S^{r+1}. Пусть $S^r = \left\{x : \sum_{i=1}^{r+1} (x^i)^2 = 1, x^{r+2} = 0\right\}$ есть экваториальная сфера S^r сферы S^{r+1} с правильным разбиением. Пусть S^r_α — сфера, лежащая в пересечении S^{r+1} и плоскости $x^{r+2} = \alpha$. Определим гомеоморфное отображение h_α: $S^r \to S^r_\alpha$. Спроектируем сначала S^r ортогонально на плоскость $x^{r+2} = \alpha$, а затем полученную сферу $\tilde{S}^r_\alpha$ с помощью гомотетии в плоскости $x^{r+2} = \alpha$ относительно центра сферы $\tilde{S}^r_\alpha$ с коэффициентом гомотетии, равным $\sqrt{1-\alpha^2}$, переведем в S^r_α. Отображение h_α переводит семейство окружностей $\tilde{T}^{r-1}$ в аналогичное семейство $\tilde{T}^{r-1}_\alpha$ на S^r_α, составляющее правильное разбиение S^r_α, и полиэдр T^{r-1} переходит в полиэдр T^{r-1}_α.

Положим $\tilde{T}'^r = \bigcup_{-1 \leqslant \alpha \leqslant 1} \tilde{T}^{r-1}_\alpha$, $T'^r = \bigcup_{-1 \leqslant \alpha \leqslant 1} T^{r-1}_\alpha$. Присоединим к $\tilde{T}'^r$ две одноточечные кривые $p_1(0, \ldots, 0, 1)$ и $p_2(0, \ldots, 0, -1)$, которые мы будем называть одноточечными окружностями. Полученное семейство окружностей обозначим через $\tilde{T}^r$. Полиэдр T'^r также замкнем двумя точками p_1 и p_2, в результате чего получим полиэдр T^r. Итак, правильное разбиение $\tilde{T}^r$ сферы S^{r+1} и полиэдр T^r определены по индукции для каждого r. При этом на каждой окружности разбиения задана точка q и (если она не одноточечна) направление.

В следующей лемме перечислены почти очевидные свойства правильного разбиения.

Лемма 2

Утв. *Будем рассматривать* $\gamma_q \in \tilde{T}^{r-1}$ *как элемент пространства* $\Pi(S^r)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *каждая точка, принадлежащая* S^r, *принадлежит одной и только одной окружности* $\gamma_q \in \tilde{T}^{r-1}$;

(2) *отображение* $\varphi(q) = \gamma_q$ *есть гомеоморфизм* T^{r-1} *на* $\tilde{T}^{r-1} \subset \Pi(S^r)$;

(3) *пусть* $x \in S^r$ *лежит на* γ_q *и* $\psi(x) = \gamma_q$, *тогда* $\psi(x)$ *является непрерывным отображением* S^r *на* $\tilde{T}^{r-1}$.

Введем на каждой окружности γ_q правильного разбиения сферы S^r приведенную параметризацию $\gamma_q(t)$, причем точка q соответствует $t = 0$. Если теперь f есть непрерывное отображение $S^r \to G$,

то положим $p_q(t) = f(\gamma_q(t))$. Тогда $p_q(t)$ есть параметрическое представление кривой $p_f(q)$ в G. Если при этом путь $p_q(t)$ кусочно дифференцируем, то $p_f(q) \in \Pi(G)$. Пусть f — такое отображение S^r, что при любом q кривая $p_f(q) \in \Pi(G)$. Тогда f индуцирует такое (однозначно определенное) отображение p_f: $T^{r-1} \to \Pi(G)$, что для всех $q \in T^{r-1}$ имеет место $p_f(t) = f \circ \gamma_q(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

С другой стороны, если p — непрерывное отображение $T^{r-1} \to \Pi(G)$, то оно индуцирует некоторое отображение f_p: $S^r \to G$ описываемым ниже образом. Введем на кривой $p(q)$ приведенный параметр t, отсчитываемый от отмеченной точки кривой $p(q)$, и обозначим через $p(q, t)$ точку на $p(q)$, соответствующую значению параметра t. Сопоставляя точке $\gamma_q(t) \in S^r$ точку $p(q, t) \in G$, мы получим некоторое непрерывное отображение f_p: $S^r \to G$. В частности, если C_ϑ есть некоторая гомотопия, то любому непрерывному отображению p: $T^{r-1} \to G$ можно сопоставить отображение f_ϑ: $T^{r-1} \to \Pi(G)$, индуцированное отображением $C_\vartheta(p)$. Эти отображения f_ϑ определяют гомотопию C_p: $T^{r-1} \times [0, 1] \to \Pi(G)$. При этом для отображения f: $S^r \to G$ вместе с p_f существует гомотопия $f_\vartheta = (C_{p_f})_\vartheta$.

Лемма 3

Утв. *Для каждого непрерывного отображения f_0 сферы S^r в G существует гомотопное ему отображение f_1, индуцирующее отображение p_{f_1} полиэдра T^{r-1} в $\Pi(G)$.*

Док. В силу непрерывности f_0 и компактности S^r, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $\rho_{S^r}(a_1, a_2) < \delta$, то $f(a_1) f(a_2) < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} d_G$ и найдем по ε число δ_0, как указано выше. Определим непрерывные функции $t_i(q)$, $i = 1, \ldots, m$, на T^{r-1} так, чтобы было

$$|t_{i+1} - t_i| < \frac{\delta_0}{2\pi} \quad \text{при} \quad q \in T^{r-1}. \tag{3}$$

Тогда $f(\gamma_q(t_i)) f(\gamma_q(t_{i+1})) \leqslant \frac{1}{2} d_G$. К семейству кривых $p_q = p_{f(q)}$ применим деформацию D_ϑ, описанную в разд. 4.2.

Пусть $a \in S^r$, $\psi(a) = \gamma_q$, $a = \gamma_q(t)$. Положим $p_{a,\vartheta} = D_\vartheta p_{f(q)}$, $F(a, \vartheta) = p_{a,\vartheta}(t)$. Ясно, что $F(a, 0) = f_0$. Так как $p_{a,1}$ есть полигон из кратчайших в G, то $f_1 = F(a, 1)$ удовлетворяет условиям леммы.

4.5. Центральный результат этого раздела формулируется в следующей теореме:

Теорема 5

Утв. *Любое компактное выпуклое множество, не содержащее периодической геодезической, асферично во всех размерностях.*

Доказательству теоремы 5 предпошлем две леммы. Пусть $G \subset M$ — компактное выпуклое множество, p — непрерывное отображение $(r-1)$-мерного полиэдра T^{r-1} в $\Pi_k(G)$, а c — некоторое положительное число. Зафиксируем отображение $f\colon S^n \to G$ и будем для краткости писать p_q вместо $p_{f(q)}$.

Лемма 4

Утв. *Если для каждого $q \in T^{r-1}$ существует целое число r_q, для которого $L\left(B_1^{r_q}(p_q)\right) < c/2$, то существует целое число r_0, такое, что $L\left(B_1^{r_0}(p_q)\right) < c$ для всех $q \in T^{r-1}$.*

Док. Пусть $\varepsilon < c/2$. Тогда, учитывая непрерывность функции $L(p_q)$ от q, для каждого q находим на T^{r-1} такую окрестность U_q, что при $q' \in U_q$ имеем

$$\left| L\left(B_1^{r_q}(p_q)\right) - L\left(B_1^{r_q}(p_{q'})\right)\right| < \varepsilon < c/2. \tag{4}$$

Поскольку T^{r-1} компактно, то из построенного покрытия T^{r-1} окрестностями U_q можно выбрать конечное подпокрытие $U_{q_1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_m}$. Положим $r_0 = \max(r_{q_1}, r_{q_2}, \ldots, r_{q_m})$. Пусть $q \in T^{r-1}$, предположим, что $q \in U_{q_i}$, тогда из (4) следует

$$L\left(B_1^{r_{q_i}}(p_q)\right) < c/2 + L\left(B_1^{r_{q_i}}(p_{q_i})\right), \tag{5}$$

а из леммы 1

$$L\left(B_1^{r_0}(p_q)\right) < L\left(B_1^{r_{q_i}}(p_q)\right). \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем $L\left(B_1^{r_0}(p_q)\right) < c$, что и требовалось доказать.

Лемма 5

Утв. *Пусть $c > 0$, и для любого n в T^{r-1} найдется такая точка q_n, что $L\left(B_1^n(p_{q_n})\right) > c$, тогда в G существует периодическая геодезическая.*

Док. В силу предыдущей леммы в T^{r-1} существует точка q_0, такая, что $L\left(B_1^n(p_{q_0})\right) > c/2$ при любом n. Обозначим через p_n полигон $B_1^n(p_{q_0})$. Из последовательности полигонов p_n в силу компактности G можно выбрать сходящуюся подпоследовательность p_{n_k}, которую обозначим через p_k. Пусть $\bar{p}_0 = \lim\limits_{k\to\infty} p_k$ и $L_0 = L(\bar{p}_0)$, тогда

$$L\left(B_1^n(p_0)\right) \geqslant L_0 \quad \text{при любом } n. \tag{7}$$

Докажем, что $\bar{p}_0$ есть периодическая геодезическая. Если $\bar{p}_0$ — не периодическая геодезическая, то из леммы 1 следует

$$L(\bar{p}_0) - L(B_1(\bar{p}_0)) = L_0 - L(B_1(\bar{p}_0)) = \sigma > 0. \tag{8}$$

Далее, так как B_1 есть непрерывное отображение $\Pi_k(G) \to \Pi_k(G)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \subset \Pi_k(G)$ точки $\bar{p}_0$, такая, что как только $p' \in U$, то

$$|L(B_1(\bar{p}_0)) - L(B_1(p'))| < \varepsilon. \tag{9}$$

Выберем $\varepsilon < \sigma/2$ и k_0 настолько большим, чтобы выполнялось $B_1^{k_0}(p_0) \in U$. Тогда из (8) и (9) имеем

$$L(B_1^{k_0+1}(p_0)) \leqslant \varepsilon + L(B_1(\bar{p}_0)) < \sigma/2 + L_0 - \sigma = L_0 - \sigma/2,$$

что противоречит (7). Итак, $\bar{p}_0 \in G$ есть периодическая геодезическая.

Доказательство теоремы 5.

Будем вести доказательство по индукции. Асферичность G в нулевой размерности (связность G) следует из выпуклости G.

Предположим, что G асферично в размерностях 0, 1, ..., $r-1$. Докажем асферичность G в размерности r.

Пусть f_0: $S^r \to G$ — непрерывное отображение. Согласно лемме 3, f_0 гомотопно отображению f_1: $S^r \to G$, которое индуцируется некоторым отображением $\tilde{f}_1$: $T^{r-1} \to \Pi(G)$, а именно $\tilde{f}_1 = p_{f_1}$, $f = f_{\tilde{f}_1}$. Так как в G нет периодических геодезических, то из леммы 5 следует существование такого числа n_0, что $L(B_1^{n_0}(p_q)) < d_G$ при всех $q \in T^{r-1}$. Пусть $\tilde{f}_2 = B_1^{n_0} \circ \tilde{f}_1$, тогда на множестве $\tilde{f}_2(T^{r-1})$ определена гомотопия p_ϑ (см. разд. 4.3), и $\tilde{f}_2$ гомотопно отображению $\tilde{f}_3$: $T^{r-1} \to \Pi(G)$, при котором каждая точка T^{r-1} переходит в тривиальную (одноточечную) кривую.

Пусть H_ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, есть гомотопия, связывающая $\tilde{f}_1$ с $\tilde{f}_3$, тогда f_{H_ϑ}: $S^r \to G$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, есть гомотопия, связывающая $f_1 = f_{H_0}$ с таким отображением $f_3 = f_{H_1}$, что множество $f_3(\gamma_q)$ состоит из одной точки $a(q)$ для каждой $q \in T^{r-1}$. Так как по предположению индукции G асферично во всех размерностях $\leqslant r-1$, отображение a: $T^{r-1} \to G$ гомотопно постоянному по теореме Гуревича. Пусть H'_ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, есть соответствующая гомотопия, тогда $H'_\vartheta \circ \psi$: $S^r \to G$ есть гомотопия, связывающая f_3 с постоянным отображением. Отсюда f_0 гомотопно постоянному отображению, и G асферично в размерности r, что и доказывает теорему.

Теорема 6

Утв. *Пространство M_+ асферично во всех размерностях.*

Док. Пусть f_0 — произвольное непрерывное отображение $S^r \to M_+$. Так как $f_0(S^r)$ есть компактное множество в M_+, то по лемме 3

§ 2 существует компактное выпуклое (даже абсолютно выпуклое) множество $G \supset f_0(S^r)$. В M_+, как это доказано в теореме 2, нет периодических геодезических, тем более их нет в G. Применяя к G теорему 5, мы видим, что f_0 гомотопно постоянному отображению в G и, следовательно, в M_+.

4.6. Теперь перейдем к доказательству односвязности на бесконечности.

Теорема 7

Утв. *Если G — компактное абсолютно выпуклое множество в M_+, $m = \dim M_+$, то $M_+ \setminus G$ асферично в размерностях $0 \leqslant k \leqslant m-2$.*

Доказательство теоремы 7 опирается на некоторые хорошо известные факты из топологии, которые мы изложим в виде лемм.

Лемма 6

Усл. *V — открытое множество в M_+, замыкание которого $\bar{V}$ компактно; $\dim M_+ = m$; G — компактное множество, принадлежащее V.*

Утв. *В M_+ существует открытое множество U, обладающее следующими свойствами:*

(a) $\bar{U} \subset V$;

(b) $G \subset U$;

(c) $\dot{U}$ *(граница U) есть $(m-1)$-мерное подмногообразие M_+.*

Док. В пространстве M_+ определим непрерывную функцию $f(p)$ — расстояние от точки p до множества G, т. е. $f(p) = \rho(p, G)$. Пусть выполняется

$$\varepsilon = \rho(G, M_+ \setminus \bar{V}) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Аппроксимируем функцию f бесконечно дифференцируемой функцией f_0 с точностью до $\varepsilon/8$ на множестве $W = \{p\colon p \in M_+, f(p) < 2\varepsilon\}$, т. е.

$$|f(p) - f_0(p)| < \varepsilon/8, \quad \text{если} \quad p \in W. \tag{11}$$

Доказательство существования такой функции можно найти в [4, стр. 48, В]. Далее, по теореме Сарда [4, стр. 25, теорема 4] можно найти такое число λ, что λ есть регулярное значение функции $f_0(p)$ и

$$|\lambda - \varepsilon/2| < \varepsilon/8. \tag{12}$$

Теперь определим U как множество точек M_+, для которых $|f_0(p)| < \lambda$. Докажем, что $\bar{U} \subset V$. В самом деле, пусть $p \in \bar{U}$, тогда $f_0(p) < \lambda$, а из (12) имеем

$$|f_0(p)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/8 = \frac{5}{8}\varepsilon. \tag{13}$$

Из (11) и (13) получаем

$$f(p) < |f_0(p)| + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{5\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon. \qquad (14)$$

Наконец, из (14) и (10) следует $p \in V$. Теперь докажем, что $G \subset U$. Пусть $p \in V$, тогда $f(p) = 0$, поэтому из (11) следует $|f_0(p)| < f(p) + \varepsilon/8 = \varepsilon/8$, а так как, кроме того, из (12) имеем $\lambda > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3\varepsilon}{8}$, то, сопоставляя два последних неравенства и определение U, получаем $p \in U$. Наконец, так как λ — регулярное значение функции f_0, то граница $\overline{U}$ (множество $f_0^{-1}(\lambda)$) есть подмногообразие M_+ размерности $m-1$ (лемма 2 разд. 1.6). Лемма 6 доказана.

Лемма 7

Усл. *M — дифференцируемое компактное многообразие с краем N. На N задано непрерывное ненулевое векторное поле X; $m = \dim M$.*

Утв. *На M существует непрерывное векторное поле Y, обращающееся в нуль только в конечном числе точек и совпадающее с X на N.*

Док. Поскольку M есть дифференцируемое многообразие, его можно триангулировать. Пусть $\overline{K}^m = (K^m, L^{m-1}, f)$ — триангуляция пары (M, N), где K^m — некоторый m-мерный полиэдр, L^{m-1} — его граница, f — гомеоморфное отображение пары (K^m, L^{m-1}) на пару (M, N), причем отображение f на каждом m-мерном симплексе Δ^m комплекса K^m есть диффеоморфизм.

Образ при отображении f произвольного симплекса Δ^r комплекса K^m назовем криволинейным симплексом триангуляции $\overline{K}^m$ и обозначим через $\overline{\Delta}^r$. Предварительно докажем следующее утверждение:

(α) пусть Δ^{r+1} есть $(r+1)$-мерный симплекс комплекса K^m, на границе $\dot{\Delta}^{r+1}$ которого задано непрерывное ненулевое поле Z, тогда

(α_1) если $r < m-1$, то существует непрерывное ненулевое поле W на Δ^{r+1}, совпадающее с Z на $\dot{\Delta}^{r+1}$;

(α_2) если $r = m-1$, то существует непрерывное векторное поле W на Δ^{r+1}, совпадающее с Z на $\dot{\Delta}^{r+1}$ и обращающееся в нуль в единственной точке симплекса Δ^{r+1}.

В самом деле, пусть Δ_1^m есть m-мерный симплекс K^m, содержащий Δ^{r+1}. Можно считать, что Δ_1^m лежит в евклидовом m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$. Обозначим через D^m и S^{m-1} стандартный шар и стандартную сферу пространства $\mathbb{R}^m$. Возьмем единичное

векторное поле $\bar{Z}_1$ на $\dot{\Delta}^{r+1}$, равное $Z/|Z|$. Поле $\bar{Z}_1$ задает непрерывное отображение $\dot{\Delta}^{r+1}$ в S^{m-1}.

Доказательство (α_1). Если $r < m-1$, то, поскольку все гомотопические группы S^{m-1} до π_{m-2} включительно тривиальны, это отображение можно продолжить до отображения W_1 симплекса Δ^{r+1} в S^{m-1}, что, в свою очередь, задает непрерывное поле W_1 единичных векторов на Δ^{r+1}. Пусть $h(p)$ есть положительная непрерывная функция от точки на Δ^{r+1}, совпадающая с $|Z|$ на $\dot{\Delta}^{r+1}$. Тогда $W = h(p) W_1(p)$ есть искомое поле.

Доказательство (α_2). Если $r = m-1$, то отображение $\bar{Z}_1$ можно продолжить до непрерывного отображения $\bar{W}_1$ симплекса Δ^m в D^m, при котором в центр шара перейдет единственная точка симплекса Δ^m. Это отображение задает на Δ^m непрерывное векторное поле W_1. Положим $W = h(p) W_1(p)$. Поле W обладает требуемыми свойствами.

Предположим теперь, что мы построим непрерывное ненулевое векторное поле на $\bar{K}^r - r$-мерном остове триангуляции $\bar{K}^m$, которое совпадает с X на остове $\bar{L}^r$ триангуляции $\bar{L}^{m-1}$. Если $r = m-1$, возьмем произвольный симплекс $\bar{\Delta}^m$ триангуляции $\bar{K}^m$, $\bar{Z}$ — уже построенное векторное поле на его границе $\dot{\Delta}^m \subset \bar{K}^{m-1}$. Определим на симплексе $\Delta^m \subset f^{-1}(\bar{\Delta}^m)$ комплекса K^m поле $Z = f_*^{-1}(\bar{Z})$. Применим затем к Δ^m утверждение (α_2) и определим на $\bar{\Delta}^m$ поле $\bar{W} = f_*(W)$. Проделав то же самое для каждого симплекса Δ^m разбиения $\bar{K}^m$, мы получим векторное поле Y с требуемыми в лемме 7 свойствами. Если же $r < m-1$, то, произведя те же операции и воспользовавшись утверждением (α_1), мы получим непрерывное векторное поле на остове $\bar{K}^{r+1}$. Поскольку на $\bar{K}^0$ ненулевое векторное поле строится тривиально, то утверждение леммы 7 доказано.

Справедлива также следующая лемма [4, стр. 48]:

Лемма 8

Усл. *$D^{r+1} - (r+1)$-мерный замкнутый шар.*

Утв. *Для каждого отображения f_0: $D^{r+1} \to M_+$ существует гомотопное ему гладкое отображение f_1: $D^{r+1} \to M_+$.*

Доказательство леммы почти очевидно.

Доказательство теоремы 7.

Пусть f_0 — произвольное непрерывное отображение S^r в $M_+ \setminus G$. Поскольку M_+ асферично во всех размерностях, то отображение f_0: $S^r \to M_+$ можно продолжить до отображения F_0 шара D^{r+1}

в M_+, которое на границе шара — сфере S^r — совпадает с f_0. Выберем число ε настолько малым, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) $V = \{q\colon q \in M_+, \rho(q, G) < \varepsilon\}$ не пересекает $f_0(S^r)$;

(b) шар радиуса ε с центром в любой точке множества V — сильно выпуклое множество;

(c) $\varepsilon < d_G/2$.

Пусть $p \in V \setminus G$, и пусть $q(p)$ точка на G, ближайшая к p.

Докажем следующее утверждение:

(α) для каждой точки $p \in V \setminus G$ существует единственная точка $q(p)$, ближайшая к p.

В самом деле, если для некоторой точки $p_0 \in V \setminus G$ существуют различные точки $q_1(p_0)$ и $q_2(p_0)$, то шар D_{p_0} радиуса $r_0 = q_1(p_0)\, p_0 = q_2(p_0)\, p_0$ с центром в точке p_0 пересекается с G только в точках, лежащих на границе G и границе D_{p_0}. Соединим точки $q_1(p_0)$ и $q_2(p_0)$ кратчайшей c. С одной стороны, в силу сильной выпуклости шара D_{p_0} кратчайшая c, за исключением концов, лежит внутри D_{p_0}. Но, согласно абсолютной выпуклости G, c должна лежать в G. Полученное противоречие доказывает (α).

Построим теперь в области $V \setminus G$ векторное поле X. Пусть $p \in V \setminus G$; соединим p с $q(p)$ кратчайшей $c_p(t)$: $[0, 1] \to V \setminus G$. В точке p возьмем вектор $X_p = \rho(p, M_+ \setminus V) \cdot (-\dot{\gamma}_p(0))$, тогда

(β) на открытом множестве $V \setminus G$ поле X непрерывно.

В самом деле, точка $q(p)$ однозначно определяется точкой p и, значит, непрерывно зависит от p. Из разд. 5.2 и свойства (c) области V следует, что кратчайшая $c_p(t)$ и вектор $\dot{c}_p(t)$ непрерывно зависят от концов $c_p(t)$ и, следовательно, непрерывно зависят от p. Функция же $\rho(p, M_+ \setminus V)$, очевидно, непрерывна.

Утверждение, что $X \not\equiv 0$, следует из построения поля X.

Рассмотрим теперь область U со свойствами, указанными в лемме 6. На границе U возьмем поле Y, совпадающее с X. По лемме 7 продолжим поле Y до поля Z, определенного в U, так, чтобы поле Z совпадало с Y на $\dot{U}$ и обращалось в нуль лишь в конечном числе точек. Пусть это будут точки $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Определим теперь поле W на всем пространстве M_+ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad W_p = 0, \quad \text{если} \quad p \in M_+ \setminus V;\\ &\text{(b)}\quad W_p = X_p, \quad \text{если} \quad p \in V \setminus \bar{U};\\ &\text{(c)}\quad W_p = Z_p, \quad \text{если} \quad p \in U. \end{aligned}$$

Поле W непрерывно по построению. Далее, пользуясь леммой 8, отображение $F_0\colon D^{r+1} \to M_+$ можно заменить близким и гомотопным ему отображением $F_1\colon D^{r+1} \to M_+$, таким, что $p_i \notin F_1(D^{r+1})$, $i = 1, \ldots, k$. Теперь можно завершить доказательство теоремы 7.

Через каждую точку $p \in F_1(D^{r+1})$ проведем геодезическую c_p: $[0, \infty) \to M_+$, $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = W_p$. Определим отображение Φ: $D^{r+1} \times [0, \infty) \to M_+$ формулой

$$\Phi(p, t) = C_{F_1(p)}(t) \quad (p \in D^{r+1},\ t \in [0, \infty)).$$

Согласно теореме о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных, $\Phi(p, t)$ есть непрерывная функция своих аргументов. Положим $\mu = \inf_{p \in F_1(D^{r+1}) \cap \bar{U}} |Z_p|$.

Пусть G_1 — компактное абсолютно выпуклое множество, содержащее $\bar{U}$, и λ — число, определенное в лемме 4 § 1 для области G_1. Докажем, что $\Phi(p, \lambda/\mu) \cap G = \varnothing$. Действительно, рассмотрим следующие случаи:

(a) Если $p_1 = F_1(p) \in U$, то $c_{p_1}(\lambda/\mu) \in M_+ \setminus U$ по лемме 4 и в силу абсолютной выпуклости G_1.

(b) Если $p_1 = F_1(p) \in M_+ \setminus V$, то $\Phi(p, t) = F_1(p)$ по построению поля W и отображения Φ.

(c) Пусть, наконец, $p_1 = F_1(p) \in V \setminus U$, и предположим, что $c_{p_1}(t)$ при некотором $t = t_0$ попадает в G.

Продолжим геодезическую c_{p_1} от точки p_1 в направлении $-W_{p_1}$ на длину $\rho(p_1, G)$, конец этой дуги обозначим через $\bar{p}_1$. В силу построения поля W точка $\bar{p}_1$ принадлежит G; итак, существует геодезическая, у которой две точки $\bar{p}_1$ и $c_{p_1}(t_0)$ принадлежат G, а точка p_1 не принадлежит. Последнее невозможно, так как G есть абсолютно выпуклое множество. Значит, $c_{p_1}(t)$ ни при каком $t \geqslant 0$ не попадает в G.

Итак, доказано, что отображение $F_2(p) = \Phi(p, \lambda/\mu)$ отображает D^{r+1} в $M_+ \setminus G$, и отображение F_2, рассматриваемое на S^r, гомотопно f_0. Теорема 7 доказана.

Сопоставляя теперь теоремы 6, 7 и теорему 5.1 работы [2], получаем основную теорему этого параграфа

Теорема 8 (Д. Громол и В. Мейер)

Если риманова кривизна полного некомпактного риманова многообразия M_+ в каждой точке и в каждом двумерном направлении положительна, то M_+ диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^m$ при $m = \dim M_+ \geqslant 5$.

Примечание 1. Диффеоморфность M_+^2 пространству $\mathbb{R}^2$ была доказана Кон-Фоссеном [5].

Примечание 2. Авторы работы [1] утверждают, что теорема 8 справедлива для всех m. Однако доказательство этого утверждения пока не опубликовано.

ЛИТЕРАТУРА К § 4

[1] Gromoll D. and Meyer W., On complete open manifolds of positive curvature, *Ann. of Math.*, v. 90, 1 (1969).

[2] Stallings J., The piecewise-linear structure of euclidean space, *Proc. Cambridge Phill. Soc.*, v. 58, (1962), 481—488.

[3] Фет А. И., Вариационные задачи на замкнутых многообразиях, *Математический сборник*, т. 30 (72), 2 (1952).

[4] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, Труды МИАН, XVI, 1955.

[5] Кои-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

§ 5. Метрическое строение пространства M_0, содержащего прямые линии

5.1. Пусть p — прямая линия пространства M_0, $P(t)$ — нормальная параметризация p и Q — произвольная точка M_0. Будем говорить, что луч α с вершиной Q параллелен прямой p в положительном (отрицательном) направлении относительно заданной параметризации p, если существует последовательность чисел $t_n \to \infty$ ($t_n \to -\infty$), такая, что кратчайшие $p(t_n)Q$ сходятся к лучу α. Луч α, параллельный p в положительном (отрицательном) направлении, будем обозначать через $\alpha^+(Q)$ ($\alpha^-(Q)$). Прямую q назовем параллельной прямой p, если для любой точки $Q \in q$ имеем $q = \alpha^+(Q) \cup \alpha^-(Q)$. Пусть q — прямая, параллельная p. Будем говорить, что на q введена параметризация $Q(t)$, согласованная с параметризацией $P(t)$ прямой p, если $\alpha^+(Q(0))$ совпадает с геодезической $q|_{[0,\infty)}$.

5.2. В этом параграфе мы докажем, что если в M_0 существует прямая p, то через каждую точку $Q \in M_0$ можно провести единственную прямую, параллельную p. Для удобства дальнейшего изложения сформулируем предварительно ряд утверждений из элементарной геометрии в виде лемм, доказательства которых очевидны.

Лемма 1

Усл. *A_nBC_n — последовательность треугольников евклидовой плоскости, у которых длины всех сторон неограниченно увеличиваются при $n \to \infty$; углы A_n и C_n острые; расстояние от вершины B до стороны A_nC_n ограничено числом N, не зависящим от n.*

Утв. *Предельное значение угла A_nBC_n равно π.*

Лемма 2

Усл. *ABC_n — последовательность треугольников евклидовой плоскости, у которых длины сторон AC_n и BC_n неограниченно увеличиваются при $n \to \infty$.*

Утв. *Сумма предельных значений углов ABC_n и BAC_n равна π.*

Лемма 3

Утв. *В условиях и обозначениях леммы 2 предельное значение угла ABC_n равно $\pi/2$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}(AC_n - BC_n) = 0.$$

Лемма 4

Утв. *В условиях и обозначениях леммы 2 предельное значение угла ABC_n равно π тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}(AB + BC_n - AC_n) = 0.$$

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что в M_0 существует прямая линия p и задана некоторая ее параметризация $P(t)$.

Лемма 5

Утв. *Через любую точку Q пространства M_0 проходит один и только один луч $\alpha^+(Q)$ и один и только один луч $\alpha^-(Q)$, и оба эти луча лежат на одной геодезической.*

Док. (α) Докажем сначала, что через любую точку $Q\in M_0$ проходит по крайней мере один луч $\alpha^+(Q)$ и один луч $\alpha^-(Q)$. Действительно, пусть $t_n\to\infty$ — произвольная последовательность чисел. Поскольку p — прямая линия, то

$$\lim_{n\to\infty} P(t_n)\,Q = \infty. \tag{1}$$

В силу полноты пространства M_0 можно найти такую подпоследовательность чисел t_{n_k}, что существует направление l_0, предельное для кратчайших $QP(t_{n_k})$. В направлении l_0 проведем геодезическую c. Докажем, что c — луч. Пусть P — произвольная точка c. Возьмем n_{k_0} настолько большим, чтобы $QP(t_{n_k})$ было больше длины $L(P, Q)$ дуги PQ геодезической c при $n_k \geqslant n_{k_0}$. Существование такого числа n_{k_0} следует из (1). На кратчайших $QP(t_{n_k})$ возьмем точки x_{n_k} так, чтобы $Qx_{n_k} = L(P, Q)$. Кратчайшие Qx_{n_k} сходятся к некоторой кратчайшей $Q\bar{P}$, имеющей в M_0 то же направление l_0, поэтому кратчайшая $Q\bar{P}$ лежит на c и, следовательно, $\bar{P}$ совпадает с P. Значит, c есть луч $\alpha^+(Q)$, параллельный p в положительном направлении. Аналогично доказывается существование луча $\alpha^-(Q)$.

(β) Пусть Q — произвольная точка M_0. Покажем, что произвольные лучи $\alpha^+(Q)$ и $\alpha^-(Q)$, существование которых доказано в пункте (α), лежат на одной геодезической. Действительно, пусть $t_n^+\to\infty$ $(t_n^-\to-\infty)$ — последовательности чисел, для которых $\alpha^+(Q)$ $(\alpha^-(Q))$ есть пределы кратчайших $QP(t_n^+)$ $(QP(t_n^-))$.

Введем обозначения $P(t_n^+)=P_n^+$, $P(t_n^-)=P_n^-$, $P(0)=P_0$. На двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ построим четырехугольник $\overline{Q'P_n'}^+\overline{P_0'P_n'}^-$, прикладывая к стороне $P_0'Q'$ треугольника $Q'P_0'P_n'^+$ треугольник $Q'P_0'P_n'^-$ стороной $P_0'Q'$. В силу теоремы сравнения (разд. 6.4) углы $Q'P_0'P_n'^+$ и $Q'P_0'P_n'^-$ не превосходят углов $QP_0P_n^+$ и $QP_0P_n^-$. Сумма же последних углов равна π. Следовательно, угол $\overline{P_n'}^+\overline{P_0'P_n'}^-$ четырехугольника не превосходит π. Угол $\overline{P_n'}^+\overline{Q'P_n'}^-$ также не превосходит π в силу неравенства $\overline{P_n'}^+\overline{P_0'}+\overline{P_0'P_n'}^- = P_n^+P_0+P_0P_n^-=P_n^+P_n^-\leqslant \overline{P_n'}^+\overline{Q'}+\overline{Q'P_n'}^-$. Остальные два угла $\overline{Q'P_n'}^+\overline{P_0'}$ и $\overline{Q'P_n'}^-\overline{P_0'}$ не превосходят π по построению. Таким образом, четырехугольник $\overline{Q'P_n'}^+\overline{P_0'P_n'}^-$ выпуклый. Построим на $\mathbb{R}^2$ треугольник $Q''P_n''^+P_n''^-$ с теми же длинами сторон, что и у треугольника $QP_n^+P_n^-$. На стороне $P_n''^+P_n''^-$ возьмем точку P_0'', такую, чтобы выполнялось равенство $P_0''P_n''^+=P_0'P_n'^+$.

В силу леммы 3 разд. 6.4 угол $Q''P_n''^+P_0''$ не больше угла $Q'P_nP_0'$. Отсюда следует $Q''P_0''\leqslant Q'P_0'=QP_0$. Это означает, что расстояние от вершины Q'' до стороны $P_n''^+P_n''^-$ не превосходит QP_0. Кроме того, углы $P_n''^+$ и $P_n''^-$ треугольника $Q''P_n''^+P_n''^-$ при достаточно больших n — острые. Поэтому к треугольникам $Q''P_n''^+P_n''^-$ можно применить лемму 1, в которой утверждается, что предельное значение угла $P_n''^+Q''P_n''^-$ равно π. Снова используя теорему сравнения разд. 6.4, мы получаем, что предельное значение угла $P_n^+QP_n^-$ не меньше π, а следовательно, оно равно π. Но предельное значение угла $P_n^+QP_n^-$ совпадает со значением угла между $\alpha^+(Q)$ и $\alpha^-(Q)$, которое, таким образом, оказывается равным π. Утверждение пункта (β) доказано. Теперь уже нетрудно доказать остальные утверждения леммы. Пусть $\alpha_1^+(Q)$ и $\alpha_2^+(Q)$ — два луча, параллельных p в положительном направлении. Возьмем произвольный луч $\alpha^-(Q)$. Существование $\alpha^-(Q)$ доказано в пункте (α). Согласно предыдущему пункту, $\alpha_1^+(Q)\cup\alpha^-(Q)$ и $\alpha_2^+(Q)\cup\alpha^-(Q)$ — геодезические, и поскольку они имеют общую часть $\alpha^-(Q)$, то они совпадают. Отсюда следует, что совпадают и лучи $\alpha_1^+(Q)$ и $\alpha_2^+(Q)$. Таким образом, единственность луча $\alpha^+(Q)$ доказана. Аналогично доказывается единственность луча $\alpha^-(Q)$, а поскольку существование этих лучей уже было доказано в пункте (α), то лемма доказана.

Лемма 6

Утв. *Через любую точку пространства M_0 проходит одна и только одна прямая $q(Q)$, параллельная p.*

Док. Проведем через точку Q лучи $\alpha^+(Q)$ и $\alpha^-(Q)$. Эти лучи, как это следует из леммы 5, лежат на одной геодезической, которую мы обозначим через $q(Q)$. Докажем, что $q(Q)$ — прямая, параллельная p.

Возьмем на $q(Q)$ произвольную точку B. Пусть для определенности $B \in \alpha^+(Q)$. Рассмотрим треугольник $QBP(t)$. При $t \to \infty$ кратчайшие $QP(t)$ сходятся к лучу $\alpha^+(Q)$ вследствие леммы 5. Следовательно, угол $BQP(t)$ при $t \to \infty$ стремится к нулю. Отсюда и из теоремы сравнения разд. 6.4 получаем, что угол $B'Q'P'(t)$ треугольника $B'Q'P'(t)$ стремится также к нулю при $t \to 0$. Но тогда, применяя к треугольнику $B'Q'P'(t)$ лемму 2, мы получаем, что предельное значение угла $Q'B'P'(t)$ равно π. Поэтому, опять-таки вследствие теоремы сравнения разд. 6.4, предельное значение угла $QBP(t)$ также равно π. Последнее же означает, что луч $\alpha^+(B) \subset \alpha^+(Q)$. Отсюда и из леммы 5 мы получаем $\alpha^-(B) \supset \supset \alpha^-(Q)$. Таким образом, $q(Q)$ есть прямая, параллельная p. Единственность же прямой $q(Q)$ легко следует из леммы 5.

Лемма 7

Усл. *Пусть q_1 и q_2 — прямые, параллельные p; $Q_1 \in q_1$, $Q_2 \in q_2$ — точки M_0; Q_1Q_2 — кратчайшая; $P(t)$ — параметризация прямой p; $P(0) = P$. Обозначим через Q_1^+, Q_2^+ $(Q_1^-\ Q_2^-)$ предельные значения углов $P(t)\,Q_1Q_2$, $P(t)\,Q_2Q_1$ при $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$, а через $Q_1'^+$, $Q_2'^+$ $\left(Q_1'^-, Q_2'^-\right)$ предельные значения углов $P'(t)Q_1'Q_2'$, $P'(t)\,Q_2'Q_1'$ при $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$ треугольника $P'(t)\,Q_1'Q_2'$.*

Утв. *Тогда*

$$\begin{aligned} &Q_1^+ + Q_2^+ = Q_1^- + Q_2^- = \pi, \quad Q_1^+ = Q_1'^+, \ Q_2^+ = Q_2'^+, \\ &Q_1'^+ + Q_2'^+ = Q_1'^- + Q_2'^- = \pi, \quad Q_1^- = Q_1'^-, \ Q_2^- = Q_2'^-. \end{aligned} \tag{2}$$

Замечание 1. Лемма 7 справедлива и тогда, когда одна из прямых q_1 или q_2 совпадает с p.

Замечание 2. Если на q_1 и q_2 ввести параметризации $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$, согласованные с $P(t)$, и $Q_1(0) = Q_1$, $Q_2(0) = Q_2$, то, согласно лемме 5, Q_1^+, Q_1^- есть углы между Q_2Q_1 и $q_1|_{[0,\,\infty)}$, $q_2|_{(-\infty,\,0]}$, а Q_2^+, Q_2^- есть углы между Q_1Q_2 и $q_2|_{[0,\,\infty)}$, $q_2|_{(-\infty,\,0]}$.

Утверждения леммы 7 следуют из леммы 5 § 1 и леммы 2.

5.3. В этом пункте доказывается несколько утверждений „о перпендикулярности".

Лемма 8

Усл. *q_1 и q_2 — прямые, параллельные p; $Q_1 \in q_1$, $Q_2 \in q_1$ — точки M_0.*
Утв. *Если кратчайшая Q_1Q_2 перпендикулярна одной из прямых, то она перпендикулярна и другой.*

Замечание. Лемма 8 справедлива и тогда, когда одна из прямых, q_1 или q_2, совпадает с p.

Док. Предположим для определенности, что кратчайшая Q_1Q_2 перпендикулярна q_2. Тогда в обозначениях леммы 7 условия леммы 8 означают, что $Q_2^- = Q_2^+ = \pi/2$ и утверждение леммы следует из леммы 7.

Лемма 9

Усл. *q_1 и q_2 — прямые, параллельные p; $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ — параметризации q_1 и q_2, согласованные с параметризацией $P(t)$ прямой p.*
Утв. *Если кратчайшая $Q_1(0)Q_2(0)$ перпендикулярна обеим прямым q_1 и q_2, то кратчайшие $Q_1(t)Q_2(t)$ при любом t есть также общие перпендикуляры к q_1 и q_2.*

Замечание. Лемма 9 справедлива также тогда, когда одна из прямых, q_1 или q_2, совпадает с p.

Док. Пусть t_0 — произвольное число. Будем использовать обозначения леммы 7. Тогда условия запишутся в виде

$$Q_1^+(0) = Q_1^-(0) = Q_2^-(0) = Q_2^+(0) = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Требуется доказать, что

$$Q_1^+(t_0) = Q_1^-(t_0) = Q_2^-(t_0) = Q_2^+(t_0) = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Из (3) и лемм 3, 7 следует

$$\lim_{t \to \pm\infty} (P(t)\,Q_2(0) - P(t)\,Q_1(0)) = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, в силу леммы 5 предельные значения углов $Q_1(t_0)\,Q_1(0)\,P(t)$ и $Q_2(t_0)\,Q_2(0)\,P(t)$ при $t \to \pm\infty$ равны нулю. Отсюда и из теоремы сравнения разд. 6.4 следует, что предельные значения углов $Q_1'(t_0)\,Q_1'(0)\,P'(t)$ и $Q_2'(t_0)\,Q_2'(0)\,P'(t)$ треугольников $Q_1'(t_0)\,Q_1'(0)\,P'(t)$ и $Q_2'(t_0)\,Q_2'(0)\,P'(t)$ при $t \to \pm\infty$ также равны нулю. Но тогда в силу леммы 4 мы получаем

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to \pm\infty} (Q_1(t_0)\,Q_1(0) + Q_1(t_0)\,P(t) - Q_1(0)\,P(t)) = 0, \\ &\lim_{t \to \pm\infty} (Q_2(t_0)\,Q_2(0) + Q_2(t_0)\,P(t) - Q_2(0)\,P(t)) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Если учесть, что $Q_1(t_0)Q_1(0) = Q_2(t_0)Q_2(0) = t_0$, то из (10) и (11) следует

$$\lim_{t \to \pm\infty} (Q_2(t_0)P(t) - Q_1(t_0)P(t)) = 0. \tag{7}$$

В свою очередь, из (7) и леммы 3 получаем, что $Q_2'^{+}(t_0) = Q_1'^{+}(t_0) = \frac{\pi}{2}$, а отсюда и из леммы 7 следуют равенства (4). Лемма доказана.

Лемма 10

Усл. *q — прямая.*

Утв. *Для любой точки $S \in M_0$, $S \notin q$, найдется единственная точка $Q \in q$, такая, что существует кратчайшая QS, перпендикулярная q.*

Док. Найдем на прямой q точку Q, такую, что длина кратчайшей QS реализует минимум расстояния от S до прямой q. Существование такой точки следует из соотношения (1). Тогда кратчайшая QS будет перпендикулярна q. Таким образом, существование точки Q с требуемым свойством доказано. Пусть теперь $Q_1 \in q$ — произвольная точка, такая, что кратчайшая SQ_1 перпендикулярна q. Проведем через S прямую q_1, параллельную q. На q_1 и q введем согласованные параметризации $S(t)$ и $Q(t)$, $S(0) = S$, $Q(0) = Q$. Пусть $Q_1 = Q(t_0)$. Предположим для определенности, что $t_0 \geqslant 0$, тогда, в обозначениях леммы 7, из леммы 8 получаем соотношения

$$Q^+(t_0) = Q^+(0) = S^+ = Q'^{+}(t_0) = Q'^{+}(0) = S'^{+} = \frac{\pi}{2},$$

что с учетом леммы 3 дает

$$\lim_{t \to \infty} (Q(t_0)Q(t) - SQ(t)) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t \to \infty} (Q(0)Q(t) - SQ(t)) = 0. \tag{9}$$

С другой стороны, имеет место

$$Q(t)Q(0) = Q(t)Q(t_0) + Q(t_0)Q(0). \tag{10}$$

Из (8)—(10) следует, что $Q(0)Q(t_0) = 0$, т. е.

$$t_0 = 0,\ Q_1 = Q(t_0) = Q(0) = Q.$$

Таким образом, доказана единственность точки Q.

Лемма 11

Усл. *q_1 и q_2 — прямые, параллельные p; точки $Q_1 \in q_1$, $Q_2 \in q_2$ и $P \in p$ таковы, что две из трех кратчайших Q_1Q_2, Q_1P и Q_2P есть общие перпендикуляры к прямым, которые они соединяют.*

Утв. *Третья кратчайшая есть перпендикуляр к прямым, которые она соединяет.*

Док. Введем на p параметризацию $P(t)$, $P(0)=P$. Рассмотрим случай, когда кратчайшие Q_1P и Q_2P есть общие перпендикуляры к прямым q_1 и p, соответственно q_2 и p. Тогда лемма утверждает, что кратчайшая Q_1Q_2 перпендикулярна к прямым q_1 и q_2. Действительно, из условий леммы в обозначениях леммы 7 следуют равенства

$$Q_1^+ = Q_1^- = Q_2^+ = Q_2^- = Q_1'^+ = Q_1'^- = Q_2'^+ = Q_2'^- = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Из (11) с помощью леммы 9 можно получить соотношения

$$\lim_{t \to \pm\infty} (Q_1 P(t) - PP(t)) = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (Q_2 P(t) - PP(t)) = 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$\lim_{t \to \pm\infty} (Q_1 P(t) - Q_2 P(t)) = 0. \tag{14}$$

Обозначим через $\bar{Q}_1^+$, $\bar{Q}_2^+$ ($\bar{Q}_1^-$, $\bar{Q}_2^-$) предельные значения углов $P(t)Q_1Q_2$, $P(t)Q_2Q_1$ при $t \to \infty$ ($t \to -\infty$), а через $\bar{Q}_1'^+$, $\bar{Q}_2'^+$ ($\bar{Q}_1'^-$, $\bar{Q}_2'^-$) предельные значения углов $P'(t)Q_1'Q_2'$, $P'(t)Q_2'Q_1'$ треугольника $P'(t)Q_1'Q_2'$. В этих обозначениях из (14) и леммы 3 получаем

$$\bar{Q}_1'^+ = \bar{Q}_1'^- = \bar{Q}_2'^- = \bar{Q}_2'^+ = \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Далее, по теореме сравнения разд. 6.4 имеем

$$\bar{Q}_1^- \geqslant \bar{Q}_1'^-, \quad \bar{Q}_1^+ \geqslant \bar{Q}_1'^+, \quad \bar{Q}_2^- \geqslant \bar{Q}_2'^-, \quad \bar{Q}_2^+ \geqslant \bar{Q}_2'^+. \tag{16}$$

А так как

$$\bar{Q}_1^- + \bar{Q}_1^+ = \bar{Q}_2^- + \bar{Q}_2^+ = \pi, \tag{17}$$

то из (16) и (17) следует $\bar{Q}_1^- = \bar{Q}_1^+ = \bar{Q}_2^+ = \bar{Q}_2^- = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

5.4. Дадим теперь определение линейной независимости совокупности прямых. Пусть в M_0 существуют k прямых линий $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Через произвольную точку Q в силу леммы 6 можно провести k прямых $q_1(Q), q_2(Q), \ldots, q_k(Q)$, таких, что прямая $q_i(Q)$ параллельна прямой p_i. Мы будем говорить, что прямые $p_1, p_2, \ldots, p_k$ пространства M_0 линейно независимы, если в M_0 существует точка Q, для которой система касательных векторов τ_i к прямым $q_i(Q)$ в точке Q есть линейно независимая система.

Теорема 9

Утв. *Если на римановом многообразии M_0 существуют k линейно независимых прямых линий, то M_0 есть прямое метрическое произведение евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ и некоторого риманова многообразия M_0'.*

Теорема 9 при произвольных m доказана в [1], а при $m=2$ и $k=1$ совпадает с теоремой, доказанной Кон-Фоссеном в 1936 г. [2].

Док. Разобьем доказательство теоремы 9 на две части. В первой части докажем утверждение теоремы при $k=1$.

1. Пусть P — произвольная точка прямой p. Определим в пространстве M_0 множество точек $M(P)$, обладающих следующим свойством: точка Q многообразия M_0 принадлежит $M(P)$ тогда и только тогда, когда кратчайшая QP перпендикулярна p. Если P_1 и P_2 — различные точки p, то $M(P_1)$ и $M(P_2)$ не пересекаются, ибо в противном случае для некоторой точки Q две различные кратчайшие QP_1 и QP_2 были бы перпендикулярны p вопреки лемме 11.

(α) Докажем, что $M(P)$ есть дифференцируемое многообразие. Пусть $Q \in M(P)$, обозначим через $q(Q)$ прямую, параллельную p и проходящую через Q. Проведем через Q все геодезические, перпендикулярные $q(Q)$. Получим дифференцируемое подмногообразие $F(Q)$ размерности $m-1$, содержащее Q.

Пусть ρ меньше радиуса инъективности в точке Q (см. разд. 5.2). Обозначим через T_ρ шар пространства M_0 с центром в точке Q и радиуса ρ. Пусть $Z \in F(Q) \cap T_\rho$, докажем, что $Z \in M(P)$. Проведем через Z прямую $q(Z)$, параллельную p; тогда $q(Z)$ в силу леммы 8 перпендикулярна кратчайшей ZQ. С другой стороны, кратчайшая QP перпендикулярна p по определению множества $M(P)$. Таким образом, к кратчайшим ZQ, QP и ZP можно применить лемму 11. Из этой леммы следует, что кратчайшая ZP перпендикулярна p, т. е. $Z \in M(P) \cap T_\rho$. Наоборот, пусть $Z \in M(P) \cap T_\rho$. В этом случае по определению $M(P)$, ZP и QP — кратчайшие, перпендикулярные p. Но тогда, снова используя утверждение леммы 11, мы получаем, что ZQ перпендикулярна qQ, т. е. $Z \in F(Q)$. Следовательно, в достаточно малой окрестности точки Q множества $M(P)$ и $F(Q)$ совпадают. Поскольку Q — произвольная точка $M(P)$, то утверждение пункта (α) доказано.

(β) Докажем, что $M(P)$ есть вполне геодезическое подмногообразие M_0. Для этого необходимо доказать, что любая геодезическая $M(P)$ есть одновременно геодезическая M_0. Поскольку любую геодезическую можно разбить на столь малые дуги, что каждая дуга будет кратчайшей, то достаточно доказать, что любая кратчайшая $M(P)$ есть одновременно кратчайшая M_0. Мы докажем даже более сильное утверждение, а именно что всякая

кратчайшая M_0, концы которой принадлежат $M(P)$, сама целиком принадлежит $M(p)$. Действительно, пусть Q_1 и Q_2 — точки $M(P)$. Проведем в M_0 кратчайшую Q_1Q_2. Возьмем произвольную точку $Q \in Q_1Q_2$. Через Q и Q_1 проведем прямые $q(Q)$ и $q_1(Q_1)$, параллельные p. Поскольку Q_1 и Q_2 принадлежат $M(P)$, кратчайшая Q_1Q_2, согласно лемме 11, перпендикулярна $q_1(Q_1)$, но тогда по лемме 8 кратчайшая Q_1Q перпендикулярна $q(Q)$, и, снова применяя лемму 11, получаем, что кратчайшая QP перпендикулярна p, т. е. $Q \in M(P)$. Тем самым утверждение (β) доказано.

(γ) Докажем, что любая прямая q, параллельная p, пересекает $M(P)$. Действительно, возьмем на q произвольную точку Q. В силу утверждения леммы 10 на p найдется точка P_1, такая, что кратчайшая QP_1 перпендикулярна p, т. е. $Q \in M(P_1)$. Введем на p и q согласованные параметризации $P(t)$ и $Q(t)$ так, чтобы $P(0) = P_1$, $Q(0) = Q$. Пусть t_0 — такое число, что $P = P(t_0)$, тогда лемма 9 утверждает, что $Q(t_0) \in M(P)$.

(δ) Введем на прямой p некоторую параметризацию $P(t)$. Для любого t множество $M(P(t))$ есть вполне геодезическое подмногообразие. Таким образом, мы получаем однопараметрическое семейство вполне геодезических подмногообразий. Заметим, что, как это следует из определения $M(P(t))$ и леммы 8, ортогональными траекториями этого семейства служат прямые линии, параллельные p. Отсюда, согласно теореме, доказанной Эйзенхартом (см. [3, стр. 221]), следует, что все подмногообразия $M(P(t))$ изометричны друг другу и изометрия осуществляется проектированием вдоль прямых, параллельных p. Введем теперь в M_0 специальную систему координат. Пусть $Q \in M_0$, обозначим через $\bar{Q}$ точку пересечения $q(Q)$ и $M(P(0))$, а через x^m — расстояние от Q до $\bar{Q}$. Если $u^1, u^2, \ldots, u^{m-1}$ — координаты точки $\bar{Q}$ на $M(P(0))$, то точке Q сопоставим координаты $u^1, u^2, \ldots, u^{m-1}, x^m$. В этих координатах компоненты метрического тензора g_{im} пространства M_0 при $i = 1, 2, \ldots, m-1$ равны нулю в силу ортогональности геодезических, параллельных p, пространствам $M(P(t))$. Поэтому основной тензор M_0 можно записать в виде $ds^2 = g_{ik}du^i du^k + B(dx^m)^2$. Далее, в этих же координатах в силу леммы 9 уравнение $M(P(t))$ есть $x^m = t$. Поскольку, кроме того, все подмногообразия $M(P(t))$ изометричны друг другу, то g_{ik} при $i, k = 1, 2, \ldots, m-1$ не зависят от x^m (см. [3, стр. 221]). Коэффициент B, в свою очередь, равен 1, так как x^m есть длина отрезка прямой линии. Таким образом, мы получаем следующий вид основного тензора M_0:

$$ds^2 = ds_1^2 + (dx^m)^2, \tag{18}$$

где ds_1^2 — основной тензор подмногообразия $M(P(0))$. С другой стороны, определим риманово многообразие $\tilde{M}_0$ как прямое мет-

рическое произведение прямой линии и риманова многообразия $M(P(0))$. В пространстве $\tilde{M}_0$ можно ввести координаты, сопоставив точке $\tilde{Q}(\bar{Q}, x)$ координаты $u^1, u^2, \ldots, u^{m-1}, x$, где $u^1, u^2, \ldots, u^{m-1}$ — координаты точки $\bar{Q}$ в $M(P(0))$. В этих координатах основной тензор $\tilde{M}_0$ можно записать в виде

$$ds^2 = ds_1^2 + (dx^m)^2, \tag{19}$$

где ds_1^2 — основной тензор $M(P(0))$ (см. замечание (ii) разд. 3.1). Если теперь точке $Q \in M_0$ с координатами $u^1, u^2, \ldots, u^{m-1}, x^m$ сопоставить точку $\tilde{Q}$ с координатами $u^1, u^2, \ldots, u^{m-1}, x = x^m$, то полученное отображение будет в силу (18) и (19) изометричным отображением M_0 на $\tilde{M}_0$. Тем самым теорема 9 при $k = 1$ доказана.

2. Пусть теперь в M_0 существует k линейно независимых прямых линий $p_1, p_2, \ldots, p_k$. В силу определения линейной независимости можно считать, что все они проходят через одну точку P и векторы, касательные к ним в точке P, линейно независимы. Построим подмногообразие $M_1(P)$ относительно прямой p_1, как это сделано в доказательстве первой части теоремы. Тогда $M_0' = M_1(P)$ есть $(m-1)$-мерное риманово многообразие неотрицательной кривизны, а M_0 есть прямое метрическое произведение прямой и M_0'. Возьмем произвольную прямую p_α, $\alpha = 2, \ldots, k$, и спроектируем ее вдоль прямых, параллельных p_1, в пространство M_0'. Кривую, полученную в результате проекции, обозначим через $\bar{p}_\alpha$. Докажем, что кривая $\bar{p}_\alpha$ есть прямая линия пространства M_0'. Действительно, пусть в специальной системе координат, введенной при доказательстве первой части теоремы, уравнениями прямой p_α будут

$$x^m = f(s), \quad u^i = \varphi^i(s), \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

где s — нормальный параметр, отсчитываемый от P. Причем, поскольку p_α при $\alpha \geqslant 2$ не параллельны p_1, то функции $\varphi^i(s)$ не могут при всех i одновременно быть постоянными. Эти функции, как нетрудно проверить, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi^i}{ds^2} + \sum_{j=1}^{m-1} \Gamma_{kl}^i \frac{d\varphi^k}{ds}\frac{d\varphi^l}{ds} = 0, \tag{20}$$

где Γ_{kl}^i — коэффициенты связности пространства M_0'. С другой стороны, как это следует из определения кривой $\bar{p}_\alpha$, ее уравнения есть $x^m = 0$, $u^i = \varphi^i(s)$. Следовательно, кривая $\bar{p}_\alpha$ является геодезической в пространстве M_0'. Остается доказать, что любая дуга геодезической $\bar{p}_\alpha$ есть кратчайшая. Для этого нам необходимо провести некоторые дополнительные рассуждения.

Пусть q — произвольный непрерывно дифференцируемый путь пространства M_0', и пусть его уравнения имеют вид $u^i = \psi^i(s)$, где s — нормальный параметр. Рассмотрим путь $\bar{q}$ в пространстве M_0, уравнения которого в специальной системе координат определяются соотношениями $x^m = as + b$, $u^i = \psi^i(s)$, где a и b постоянны. На $\bar{q}$ и q рассмотрим дуги, определяемые неравенствами $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Пусть $\bar{l}$ и l — длины этих дуг. Тогда $\bar{l}$ и l связаны легко проверяемым соотношением

$$\bar{l}^2 = l^2 + (x^m(s_2) - x^m(s_1))^2. \tag{21}$$

Предположим теперь, что $\bar{p}_\alpha$ не есть прямая линия. Тогда существует дуга $\overline{Q_1Q_2}$ геодезической $\bar{p}_\alpha$, которая имеет длину $\bar{l}_1$, большую, чем длина l_2 кратчайшей $\bar{q}$, соединяющей точки $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$. Пусть на дуге $\overline{Q_1Q_2}$ геодезической $\bar{p}_\alpha$ параметр изменяется в пределах от s_1 до s_2. Пусть, далее, уравнениями $\bar{q}$ будут $u^i = \bar{\varphi}^i(\tau)$, где τ — параметр, пропорциональный длине, и $s_1 \leqslant \tau \leqslant s_2$. Рассмотрим кривую q в пространстве M_0, уравнения которой в специальной системе координат зададим соотношениями $x^m = f(\tau)$ и $u^i = \bar{\varphi}^i(\tau)$. Тогда кривая q будет соединять концы дуги Q_1Q_2 прямой p_α, проектирующейся в дугу $\overline{Q_1Q_2}$ геодезической $\bar{p}_\alpha$. Если l_2 — длина q, то из (21) получаем

$$l_2^2 = \bar{l}_2^2 + (f(s_2) - f(s_1))^2. \tag{22}$$

Аналогично, если l_1 — длина дуги Q_1Q_2 прямой p_α, то

$$l_1^2 = \bar{l}_1^2 + (f(s_2) - f(s_1))^2. \tag{23}$$

Поскольку $l_2 < \bar{l}_1$, из (22) и (23) получаем $l_2 < l_1$, что невозможно, так как p_α — прямая линия. Следовательно, доказано, что проекции прямых p_α есть прямые $\bar{p}_\alpha$ пространства M_0'. Кроме того, нетрудно заметить, что прямые $\bar{p}_\alpha$, $\alpha = 2, \ldots, k$, линейно независимы, ибо в противном случае прямые p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, были бы линейно зависимы, вопреки предположению. Таким образом, нами получено пространство M_0', риманова кривизна которого неотрицательна и в котором существует $k-1$ линейно независимых прямых линий. Повторяя для M_0' рассуждения, которые проведены для M_0, мы получим, что M_0' изометрично прямому метрическому произведению некоторого M_0'' и прямой линии, причем пространство M_0'' содержит $k-2$ линейно независимых прямых линий. Тем самым M_0 изометрично прямому метрическому произведению M_0'' и плоскости $\mathbb{R}^2$. Повторяя это рассуждение k раз, получаем доказательство теоремы 9.

Литература к § 5

[1] Топоногов В. А. Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии, *Сиб. мат. журнал*, т. V, 6 (1964).

[2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

[3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, М., 1948.

УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная выпуклость 306
— — строгая 306
Адамара—Картана теорема 221
Асферичность 314
Атлас 9

Бетти числа 284
Бьянки тождества 53

Вариация 140
— ломаная 123
— собственная 140
Векторное поле 32
— — вдоль отображения 63
— — касательное к многообразию 14
— — кусочно гладкое 143
— — левоинвариантное 38
— — параллельное 67
— — полное 297
Векторные поля базисные 33
— — коммутирующие 35
— — f-связанные 38
Вертикальное подпространство 58
Вершина треугольника 200
Вложение 22
Выпуклое множество 177
— — простое 177

Гаусса лемма 155
— отображение 128
— уравнения 124
Геодезическая 73
Гессе тензор 109
— форма (гессиан) 109
Гиперболоид 131
Главные кривизны 124
— направления 124
Голономия (группа голономии) 72
Гомотопическая эквивалентность 260
Гомотопия 71, 260
— (p, q) 217
Горизонтальное подпространство 58
Градиент 108

Деформация 315
Диаметр 231
Дивергенция векторного поля 109
Диффеоморфизм 13
Дифференциал функции 20
Дифференциальная структура 10

Изометрическое отображение 90
Изометрия 90
Иммерсия (погружение) 22
Индекс 166
Индексная форма 166
Интегральный путь 291
Инфинитезимальное преобразование 32

Картана структурные уравнения 65
Карта расслоения 40
— Ферми 133
Касательная компонента 104
Касательное пространство 15
— расслоение 40
Касательный вектор 14
Квазииндекс 166
Келеровы многообразия 286
Кели алгебра 31
Киллинга форма 253
Клингенберга теорема 272
Кодацци уравнения 127
Конформное отображение 10
Координаты нормальные 132
— почти нормальные 132
— Ферми 133
Кратность сопряженной точки 153
Кривизна Гаусса — Кронекера 124
— относительная 124
— римана 113
— Риччи 114
— скалярная 114
Кристоффеля символы 103

Критическая точка 23
Кручение (тензор кручения) 50

Лапласа оператор 109
Леви-Чивита параллельный перенос 102
— связность 102
Ли алгебра 35
— группа 28
Линейная связность 48
— — Леви-Чивита 102
— — полная 73
— — римановa 97
Линзовые пространства 236
Линии кривизны 124
Локально симметрические пространства 120
Луч, исходящий из множества 309

Мейерса теоремы 193, 231
Метрическое пространство 174
Многообразие 9
— аналитическое 12
— выпуклое 285
— дифференцируемое 10
— келерово 286
— римановo 88
— топологическое 9
Морса теоремы 166
Морса — Шенберга теорема 193

Накрытие 31
— универсальное 222
Нэша теорема 94

Обращения теорема 20
Однопараметрическая группа 296
Однородное пространство 30
Односвязность 220
— на бесконечности 314
Ориентации гомоморфизм 239
— накрытие 240
Ориентация 238
Орипространство 306
Ортогональная группа 253
— компонента 104
Основная форма (вторая) 124
Основной тензор второй 124
— — первый 88
Отображение дифференцируемое 7
— индуцированное 18
— связности 55

Параболоид 131
Параллелизуемость 41
Параллельный перенос 69
Параметризация по длине 96
Параметрическое представление 96
Поверхность вращения 128
Погружение (иммерсия) 22
Подмногообразие 23
— вполне геодезическое 127
Покрытие вписанное 288
— локально конечное 288
Полюс 220
Поток векторного поля 36
— — — локальный 292
— — — максимальный 293
Почти комплексная структура 256
Продолжение векторного поля 33
Проективные пространства 30
Проекция (в расслоении) 40
Произведение Ли 35
— линейных связностей 61
— метрик 89
— многообразий 27
Производная внешняя Картана 54
— ковариантная 48
Пространство путей 144
Путь дифференцируемый 15
— интегральный 291
— кусочно дифференцируемый 96
— нормальный 96
— периодический 73
— регулярный 73

Радиус выпуклости 179
— инъективности 180
Раздела множества 187
Разложение единицы 289
Ранг отображения 20
Распределение 59
Расслоение 29
— ассоциированное 39
— нормальное 135
Расслоенное пространство 32
— — нормальное 134
Расстояние 174
Рауха теорема 196
Регулярное значение 23
Регулярный прообраз 23
Риманова метрика 88
— — нормальная однородная 252
Римановo многообразие 88
— — полное 182
Римановы нормальные координаты 132
Риччи тензор 114
— тождество 98
Росток функции 13

Свертка 54
Связность на бесконечности 305
Сечение расслоения 41
Симметрическое пространство 120
Сиига лемма 242

Слой 40
Совмещениость 96
Сопряженная точка 152
Сопряженное множество 154
Спинорная группа 39
Сравнения теоремы 191
Стереографическая проекция 10
Стороны треугольника 200
Струя (sprray) 77
— геодезическая 83
Сфера гомотопическая 279

Тензорное поле 49
Theorema egregium 122, 124
Теорема Адамара—Картаиа 221
— Клингенберга 272
— Морса—Шенберга 193
— Нэша 94
— об индексе 166
— о продолжении 294
— — сфере 273
— Рауха 196
— Топоногова 201
— Хопфа—Риинова 184
— Шура 119
Теоремы Мейерса 193, 231
— Морса 166
— сравнения 191
Тождества для кривизны 110
Тор 28
Торовый узел 29
Трансверсальная регулярность 25
Трансверсальное пространство 25
Треугольник 200
— обобщенный 215
Тривиализация 29
Тривиальное расслоение 29, 40

Угловой избыток 167
Угол 89
Уитни сумма 45
Унитарная группа 255

Фазовое пространство 45
Ферми координаты 133
Фокальное множество 154
Фокус 155
Фробеииуса теория 37
Фубини — Штуди метрика 255
Фундаментальная группа 222
— матрица 222

Хопфа расслоение 31
Хопфа—Ринова теорема 184

Цилиндр 135

Четырехугольник 200

Шура теорема 110

Эйлерова характеристика 274, 285
Эйнштейна многообразие 119
— правило суммирования 34
Экспоиенциальное отображение 78
Элементарная длиина 180
Эллипсоид 131
Эллиптическая геометрия 113
Энергия 145

Якоби поле 146

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 5

Предисловие 7

§ 1. Дифференцируемые многообразия и отображения 9

1.1. Определение дифференцируемого многообразия 9
1.2. Определение дифференцируемого отображения 12
1.3. Касательные векторы и касательные пространства 14
1.4. Индуцированные отображения 18
1.5. Теоремы об отображениях 20
1.6. Подмногообразия 22
1.7. Произведение многообразий 27
1.8. Векторные поля 32
1.9. Произведение Ли векторных полей 35
1.10. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия 39

2. Линейные связности 47

2.1. Определение линейной связности 47
2.2. Тензор кручения и тензор кривизны 49
2.3. Локализация тензорных полей и линейных связностей 51
2.4. Отображение связности 55
2.5. Векторные поля вдоль отображений 63
2.6. Параллельный перенос 67
2.7. Геодезические 73
2.8. Экспоненциальное отображение струи 77
2.9. Геодезическая струя линейной связности 83

§ 3. Римановы многообразия 88

3.1. Определение риманова многообразия 88
3.2. Изометрические отображения 90
3.3. Длина дифференцируемого пути 95
3.4. Риманова связность 97
3.5. Связность Леви-Чивита 101
3.6. Тождества для кривизн и скалярные кривизны 110

3.7. Относительные кривизны 122
3.8. Различные замечания 131

§ 4. Экстремальные свойства геодезических 140

4.1. Вариации геодезической 140
4.2. Поля Якоби 146
4.3. Сопряженные точки 151
4.4. Лемма Гаусса и ее следствия 155
4.5. Индексная форма геодезической 161
4.6. Теорема Морса об индексе 166

§ 5. Римановы многообразия как метрические пространства 174

5.1. Функция расстояния риманова многообразия 174
5.2. Выпуклые множества 177
5.3. Полные римановы многообразия 182
5.4. Множество раздела риманова многообразия 186

§ 6. Теоремы сравнения 191

6.1. Теорема сравнения индексов 191
6.2. Теорема сравнения Морса — Шенберга 193
6.3. Теорема сравнения Рауха 196
6.4. Теорема Топоногова о сравнении углов 200

§ 7. Связи между кривизной и топологическим строением 217

7.1. Деформации геодезических 217
7.2. Теорема Адамара — Картана 220
7.3. Кривизна и диаметр 231
7.4. Ориентируемые многообразия 237
7.5. Радиус инъективности экспоненциального отображения в случае четной размерности 242
7.6. Основная теорема теории Морса 260
7.7. Радиус инъективности экспоненциального отображения в случае произвольной размерности 271
7.8. Теорема о сфере 273
7.9. Обзор 282

§ 8. Приложение 287

8.1. Вспомогательная функция 287
8.2. Некоторые топологические понятия 288
8.3. Разложение единицы 289
8.4. Теоремы из теории дифференциальных уравнений 291
8.5. Интегральные пути векторных полей 291
8.6. Максимальный поток векторного поля 293

8.7. Теорема о продолжении 294
8.8. Однопараметрические группы диффеоморфизмов 296

Добавление. Некомпактные пространства неотрицательной кривизны. *В. А. Топоногов* 298

§ 1. Свойства геодезических в полных некомпактных римановых пространствах неотрицательной римановой кривизны 299
§ 2. Выпуклые множества в M_+ 306
§ 3. Радиус инъективности на многообразиях M_+ (M_0) 310
§ 4. Диффеоморфность M_+ евклидову пространству 314
§ 5. Метрическое строение пространства M_0, содержащего прямые линии 326

Указатель 338