

А. В. ГУРЕВИЧ, А. Б. ШВАРЦБУРГ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН
В ИОНОСФЕРЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1973

530.1

Г 95

538.566+621.391.21

Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург. Монография. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1973 г.

Одна из важнейших особенностей плазмы состоит в том, что нелинейные эффекты проявляются в ней уже в сравнительно небольших по величине электромагнитных полях. Книга посвящена систематическому изложению теории нелинейных явлений, возникающих при распространении радиоволн в ионосферной плазме. В ней рассматривается возмущение плазмы радиоволнами — нагрев электронов и ионов, изменение ионизационного баланса, высокочастотный пробой, возбуждение неустойчивости. Подробно обсуждаются эффекты самовоздействия плоских радиоволн: нелинейное изменение их поглощения, фазы и поляризации, автомодуляция и автодеמודуляция волн, деформация импульсов, генерация волн-гармоник, изменение условий отражения. Особое внимание уделено распространению в нелинейной среде узких пучков радиоволн, их самофокусировке и дефокусировке. Отдельная глава посвящена исследованию эффектов нелинейного взаимодействия волн: кросс-модуляции, взаимодействию коротких импульсов, взаимной фокусировке и дефокусировке пучков радиоволн, генерации комбинационных частот. Значительное место занимает систематическое изложение кинетики столкновительной плазмы, находящейся как в однородном, так и в неоднородном переменном электрическом поле: определение вида функций распределения электронов и ионов, вычисление кинетических коэффициентов.

Рисунков 74, таблиц 20, библиография 283 названия.

Александр Викторович Гуревич, Александр Борисович Шварцбург

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

М., 1973 г., 272 стр. с илл.

Редактор *В. А. Григорова*

Техн. редакторы *Е. Н. Земская, А. П. Колесникова* Корректор *Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 9/Х 1972 г. Подписано к печати 1/II 1973 г. Бумага 60×90¹⁶/₁₆, тип. № 1, Физ. печ. л. 17. Условн. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 16,83. Тираж 3150 экз. Т-00746. Цена книги 1 р. 67 к. Заказ № 349

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгения Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Г $\frac{0232-1708}{042(02)-73}$ 113-72

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-----------------------	---

Глава I ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Данные о структуре ионосферы	7
§ 2. Особенности нелинейных явлений в ионосфере	10
2.1 Механизмы нелинейности	10
2.2. Качественный характер нелинейных явлений	12

Глава II ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПЛАЗМЕ

§ 3. Однородное переменное электрическое поле в плазме	16
3.1. Электронный ток. Электронная проводимость и диэлектрическая проницаемость	17
3.2. Температура электронов	20
3.3. Ионный ток. Нагрев электронов и ионов	29
§ 4. Неоднородное электрическое поле в плазме	34
4.1. Основные уравнения	34
4.2. Кинетические коэффициенты	41
4.3. Распределение концентрации и температур в плазме	45
4.4. Дрейф электронов и ионов	49
4.5. Плазменные резонансы	52
§ 5. Воздействие радиоволн на ионосферу	57
5.1. Баланс ионизации в ионосфере	57
5.2. Эффективная частота соударений электронов и ионов. Доля те- ряемой энергии	61
5.3. Температуры электронов и ионов в ионосфере	67
5.4. Нагрев ионосферы в переменном электрическом поле	69
5.5. Возмущение концентрации электронов и ионов	71
5.6. Дополнительная ионизация ионосферы	77
5.7. Возбуждение неустойчивости ионосферы	83

Глава III САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ РАДИОВОЛН

§ 6. Упрощение исходных уравнений	85
6.1. Нелинейное волновое уравнение	85
6.2. Нелинейная геометрическая оптика плоской волны	86

§ 7.	Влияние нелинейности на амплитуду и фазу волны	89
7.1.	Самовоздействие слабой волны	89
7.2.	Самовоздействие сильной волны	91
7.3.	Самовоздействие волн при дополнительной ионизации	99
§ 8.	Изменение модуляции волны	106
8.1.	Слабая волна	106
8.2.	Изменение амплитудной модуляции сильной волны	108
8.3.	Фазовая модуляция	113
8.4.	Нелинейное искажение формы импульса	115
8.5.	Термоионизационные колебания	116
§ 9.	Генерация волн-гармоник и изменение поляризации волны	119
9.1.	Утроение частоты	120
9.2.	Нелинейное изменение эллипса поляризации	122
§ 10.	Нелинейные явления в области отражения радиоволн	125
10.1.	Нелинейная стоячая волна в однородной плазме	126
10.2.	Отражение волны в неоднородной плазме	128
10.3.	Влияние теплопроводности	132
10.4.	Движущиеся возмущения. Релаксационные колебания	136
§ 11.	Самовоздействие плоских волн в ионосфере	144

Глава IV

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ РАДИОВОЛН

§ 12.	Упрощение нелинейного волнового уравнения	150
§ 13.	Геометрическая оптика двумерных пучков	154
13.1.	Автомодельные решения	155
13.2.	Возникновение особенностей	158
13.3.	Распад пучка	162
13.4.	Произвольные двумерные пучки	164
§ 14.	Геометрическая оптика осесимметричных пучков	170
14.1.	Осевая особенность	171
14.2.	Параболический пучок	174
§ 15.	Нелинейная дифракция	176
15.1.	Канализация двумерного пучка	176
15.2.	Канализация осесимметричного пучка	178
15.3.	Область пересечения лучей	180
§ 16.	Пучки радиоволн в дефокусирующей среде	181
16.1.	Параболические пучки	182
16.2.	Простые волны. Пересечение лучей	183
§ 17.	Самовоздействие пучков радиоволн в ионосфере	185
17.1.	Дефокусировка пучков в E - и F_1 -слоях	186
17.2.	Фокусировка пучков в слое F_2	189

Глава V

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАДИОВОЛН

§ 18.	Кроссмодуляция	194
18.1.	Слабые волны	194
18.2.	Сильная возмущающая волна	200
18.3.	Резонансные эффекты вблизи электронной гирочастоты	204
§ 19.	Взаимодействие немодулированных волн	206
19.1.	Взаимодействие коротких импульсов	206
19.2.	Изменение поглощения волны, распространяющейся в возмущенной области плазмы	212
19.3.	Взаимная дефокусировка и фокусировка радиоволн	213
19.4.	Генерация волн с комбинационными частотами	219

Глава VI

КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 20. Кинетическое уравнение	221
20.1. Упрощение кинетического уравнения для электронов	222
20.2. Преобразование интеграла столкновений электронов	226
§ 21. Функция распределения электронов	237
21.1. Сильно ионизованная плазма	238
21.2. Слабо ионизованная плазма	247
21.3. Произвольная степень ионизации. Об элементарной теории	255
§ 22. Плазма в неоднородном электрическом поле	257
Литература	266

ПРЕДИСЛОВИЕ

Возможность сильного воздействия радиоволн на ионосферу, появившаяся в результате быстрого роста мощности и направленности излучения передающих радиостанций, усилила в современной физике интерес к изучению нелинейных явлений при распространении радиоволн в ионосфере. Теоретическому исследованию этой проблемы посвящена настоящая монография.

Характер физических условий в ионосфере весьма разнообразен. Разнообразны и нелинейные эффекты, возникающие при распространении в плазме электромагнитных волн. Число работ, посвященных им, очень велико (см., например, библиографию в [1, 2]). Авторы не пытались поэтому ни осветить все относящиеся сюда вопросы, ни дать полный обзор существующих работ. Задача книги — указать наиболее существенные для ионосферы механизмы возникновения нелинейности и рассмотреть представляющиеся нам наиболее реальными нелинейные явления. Особое внимание уделялось при этом вопросам, в исследовании которых принимали участие сами авторы.

Глава IV написана авторами совместно, остальные части книги — в основном А. В. Гуревичем.

Авторы выражают свою признательность В. Л. Гинзбургу, чьи замечания и активная поддержка способствовали написанию этой книги, А. Л. Крылову, Л. П. Питаевскому, А. А. Рухадзе, Е. Е. Цедилиной за ряд важных замечаний и помощь в отборе материала, Л. В. Парийской за проведение сложных и трудоемких численных расчетов, Н. Е. Никулкиной за помощь в оформлении рукописи.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Данные о структуре ионосферы

Ионосфера — часть верхней атмосферы Земли, простирающаяся от высоты 60 км до высот порядка 1000 км. В этой области атмосфера представляет собой частично ионизованный газ — плазму. Структура и свойства ионосферы сильно меняются с высотой. Процессы, протекающие в ионосфере, тесно связаны с волновым и корпускулярным излучением Солнца, с процессами в магнитосфере и вариациями магнитного поля Земли, с движениями верхней атмосферы и т. д. Этим обусловлена сильная изменчивость свойств ионосферы во времени (в течение суток, в зависимости от времени года, с одиннадцатилетним циклом солнечной активности), а также в зависимости от высоты и географической широты.

Нижнюю область ионосферы — на высотах $z = 50\text{—}80$ км — обычно называют слоем *D*. Ионизация здесь существует только в дневное время. Область на высотах 80—130 км называют слоем *E*, а свыше 150 км — слоем *F*. Иногда выделяется слой F_1 — приблизительно до 250 км, а слой F_2 — выше 250 км.

Модель ионосферы для средних широт и средней солнечной активности представлена в табл. 1.1—1.2 [3—8]. Эта модель будет в основном использована ниже при оценках и численных расчетах.

Плотность верхней атмосферы, как видно из табл. 1.1, быстро убывает с высотой. Молекулярный состав до высот 100—110 км изменяется мало. В области 100—120 км диссоциируют молекулы кислорода, $O_2 \rightarrow O + O$. На высотах ≈ 300 км диссоциирует азот. На высотах 500—600 км быстро увеличивается относительная концентрация гелия, а при $z \geq 1000$ км — водорода. При $z \geq 1500$ км атомы водорода *H* составляют большинство.

Концентрация электронов и ионов нарастает до высоты 300—400 км (табл. 1.2). При $z > 400$ км она довольно медленно спадает. Степень ионизации плазмы, очень маленькая на небольших высотах ($N/N_m = 10^{-8} - 10^{-4}$ при $z = 100\text{—}300$ км), быстро возрастает с ростом z . При $z \geq 1000$ км степень ионизации плазмы достигает десятка процентов. На больших высотах плазма почти полностью ионизована. Температуры электронов

МОЛЕКУЛЯРНЫЙ СОСТАВ ИОНОСФЕРЫ

Т а б л и ц а 1.1

z, км	День (12 ч); концентрация $N_m, \text{см}^{-3}$						T, °К
	N ₂	O ₂	He	O	H	Суммарная N_m	
60	5,5·10 ¹⁵	1,5·10 ¹⁵				7,0·10 ¹⁵	270
70	1,6·10 ¹⁵	4,2·10 ¹⁴				2,0·10 ¹⁵	200
80	2,3·10 ¹⁴	6,2·10 ¹³				2,9·10 ¹⁴	180
90	3,1·10 ¹³	8,2·10 ¹²				3,9·10 ¹³	190
100	7,7·10 ¹²	1,9·10 ¹²	5,7·10 ⁷	2,0·10 ¹¹	6,2·10 ⁴	9,6·10 ¹²	210
110	1,4·10 ¹²	3,5·10 ¹¹	3,8·10 ⁷	1,4·10 ¹¹	5,3·10 ⁴	1,9·10 ¹²	270
120	5,8·10 ¹¹	1,2·10 ¹¹	2,5·10 ⁷	7,6·10 ¹⁰	4,3·10 ⁴	7,8·10 ¹¹	360
130	2,0·10 ¹¹	3,8·10 ¹⁰	1,7·10 ⁷	3,7·10 ¹⁰	3,2·10 ⁴	2,8·10 ¹¹	460
150	4,8·10 ¹⁰	7,2·10 ⁹	1,0·10 ⁷	1,35·10 ¹⁰	2,1·10 ⁴	6,9·10 ¹⁰	670
200	4,8·10 ⁹	5,9·10 ⁸	4,9·10 ⁶	3,0·10 ⁹	1,3·10 ⁴	8,4·10 ⁹	1070
250	1,1·10 ⁹	1,2·10 ⁸	3,4·10 ⁶	1,3·10 ⁹	1,0·10 ⁴	2,5·10 ⁹	1250
300	3,2·10 ³	2,7·10 ⁷	2,7·10 ⁶	5,9·10 ⁸	9,3·10 ³	9,3·10 ⁸	1330
400	3,5·10 ⁷	2,2·10 ⁶	1,9·10 ⁶	1,6·10 ⁸	8,3·10 ³	2,0·10 ⁸	1390
500	4,4·10 ⁶	2,1·10 ⁵	1,4·10 ⁶	5,0·10 ⁷	7,6·10 ³	5,6·10 ⁷	1400
600	5,9·10 ⁵	2,1·10 ⁴	1,0·10 ⁶	1,6·10 ⁷	7,1·10 ³	1,7·10 ⁷	1400
700	8,5·10 ⁴	2,3·10 ³	8,0·10 ⁵	5,2·10 ⁶	6,6·10 ³	6,0·10 ⁶	1400
800	1,3·10 ⁴	2,7·10 ²	6,1·10 ⁵	1,8·10 ⁶	6,2·10 ³	2,4·10 ⁶	1400
900	2,1·10 ³	3,3·10 ¹	4,7·10 ⁵	6,2·10 ⁵	5,8·10 ³	1,1·10 ⁶	1400
1000	3,5·10 ²	4,3	3,7·10 ⁵	2,2·10 ⁵	5,4·10 ³	6,0·10 ⁵	1400

z, км	Ночь (24 ч); концентрация $N_m, \text{см}^{-3}$						T, °К
	N ₂	O ₂	He	O	H	Суммарная N_m	
60	5,5·10 ¹⁵	1,5·10 ¹⁵				7,0·10 ¹⁵	270
70	1,6·10 ¹⁵	4,2·10 ¹⁴				2,0·10 ¹⁵	200
80	2,3·10 ¹⁴	6,2·10 ¹³				2,9·10 ¹⁴	180
90	3,1·10 ¹³	8,2·10 ¹²				3,9·10 ¹³	190
100	7,7·10 ¹²	1,9·10 ¹²	5,7·10 ⁷	2,2·10 ¹¹	6,2·10 ⁴	9,6·10 ¹²	210
110	1,4·10 ¹²	3,5·10 ¹¹	3,8·10 ⁷	1,4·10 ¹¹	5,3·10 ⁴	1,9·10 ¹²	270
120	5,8·10 ¹¹	1,2·10 ¹¹	2,5·10 ⁷	7,6·10 ¹⁰	4,3·10 ⁴	7,8·10 ¹¹	360
130	2,0·10 ¹¹	3,7·10 ¹⁰	1,7·10 ⁷	3,7·10 ¹⁰	3,2·10 ⁴	2,7·10 ¹¹	470
150	4,8·10 ¹⁰	7,0·10 ⁹	1,0·10 ⁷	1,4·10 ¹⁰	2,2·10 ⁴	6,9·10 ¹⁰	650
200	4,7·10 ⁹	5,6·10 ⁸	5,9·10 ⁶	3,2·10 ⁹	1,6·10 ⁴	8,4·10 ⁹	850
250	7,7·10 ⁸	7,1·10 ⁷	4,3·10 ⁶	1,2·10 ⁹	1,4·10 ⁴	2,0·10 ⁹	910
300	1,4·10 ⁸	1,0·10 ⁷	3,3·10 ⁶	4,4·10 ⁸	1,3·10 ⁴	5,9·10 ⁸	930
400	6,0·10 ⁶	2,8·10 ⁵	2,1·10 ⁶	7,0·10 ⁷	1,1·10 ⁴	7,8·10 ⁷	940
500	2,8·10 ⁵	8,6·10 ³	1,3·10 ⁶	1,2·10 ⁷	1,0·10 ⁴	1,3·10 ⁷	950
600	1,5·10 ⁴	2,9·10 ²	8,7·10 ⁵	2,3·10 ⁶	9,0·10 ³	3,2·10 ⁶	950
700	8,4·10 ²	1,1·10 ¹	5,8·10 ⁵	4,4·10 ⁵	8,1·10 ³	1,0·10 ⁶	950
800	5,1·10	4,6·10 ⁻¹	3,9·10 ⁵	8,9·10 ⁴	7,3·10 ³	4,8·10 ⁵	950
900	3,4	2,1·10 ⁻²	2,6·10 ⁵	1,9·10 ⁴	6,7·10 ³	2,8·10 ⁵	950
1000	2,4·10 ⁻¹	1,0·10 ⁻³	1,8·10 ⁵	4,2·10 ³	6,1·10 ³	1,9·10 ⁵	950

Таблица 1.2

СТРУКТУРА ИОНОСФЕРЫ (ЭЛЕКТРОНЫ И ИОНЫ)

Z, км	День					Ночь					Относительная концентрация ионов $n = N_i/N$						
	$N, \text{см}^{-3}$	$T_e, \text{°K}$	$T_i, \text{°K}$	$\omega_0, \text{сек}^{-1}$	$\Omega_0, \text{сек}^{-1}$	$N, \text{см}^{-3}$	$T_e, \text{°K}$	$T_i, \text{°K}$	$\omega_0, \text{сек}^{-1}$	$\Omega_0, \text{сек}^{-1}$	NO ⁺	O ₂ ⁺	O ⁺	He ⁺	H ⁺	N ⁺	N ₂ ⁺
60	80	270	270	5·10 ⁵	2,1·10 ³	—	—	—	—	—	0,8	0,2	—	—	—	—	—
70	2·10 ²	200	200	8·10 ⁵	3,3·10 ³	—	—	—	—	—	0,8	0,2	—	—	—	—	—
80	10 ³	180	180	1,8·10 ⁶	7,5·10 ³	10	190	180	1,8·10 ⁵	7,5·10 ²	0,7	0,3	—	—	—	—	—
90	8·10 ³	200	190	5·10 ⁶	2,1·10 ⁴	60	190	190	4,4·10 ⁵	1,8·10 ³	0,65	0,35	—	—	—	—	—
100	8·10 ⁴	240	210	1,6·10 ⁷	6,7·10 ⁴	1,2·10 ³	210	210	1,9·10 ⁶	8·10 ³	0,62	0,38	—	—	—	—	—
110	1,2·10 ⁵	320	270	1,9·10 ⁷	8·10 ⁴	1,8·10 ³	270	270	2,4·10 ⁶	10 ⁴	0,55	0,45	—	—	—	—	—
120	1,3·10 ⁵	400	360	2·10 ⁷	8,4·10 ⁴	2,1·10 ⁴	360	360	2,6·10 ⁶	1,1·10 ⁴	0,39	0,60	0,01	—	—	—	—
130	1,5·10 ⁵	500	460	2,2·10 ⁷	9,2·10 ⁴	2,2·10 ³	480	470	2,7·10 ⁶	1,1·10 ⁴	0,42	0,55	0,02	—	—	—	0,01
150	3·10 ⁵	800	670	3,1·10 ⁷	1,35·10 ⁵	2,4·10 ³	670	650	2,8·10 ⁶	1,2·10 ⁴	0,45	0,41	0,13	—	—	—	0,01
200	5·10 ⁵	1300	1100	4·10 ⁷	2,2·10 ⁵	3·10 ³	900	850	3,1·10 ⁶	1,7·10 ⁴	0,045	0,045	0,90	—	—	5·10 ⁻³	5·10 ⁻³
250	1,0·10 ⁶	1700	1300	5,6·10 ⁷	3,3·10 ⁵	10 ⁴	1000	910	5,6·10 ⁶	3,3·10 ⁴	6·10 ⁻³	5·10 ⁻³	0,98	—	—	6·10 ⁻³	3·10 ⁻³
300	1,6·10 ⁶	2000	1400	7,1·10 ⁷	4,2·10 ⁵	10 ⁵	1200	930	1,8·10 ⁷	1,1·10 ⁵	—	—	0,99	—	—	0,01	—
400	1,5·10 ⁶	2400	1450	6,9·10 ⁷	4,1·10 ⁵	3·10 ⁵	1400	950	3,1·10 ⁷	1,8·10 ⁵	—	—	0,97	5·10 ⁻³	0,01	0,02	—
500	9·10 ⁵	2600	1600	5,4·10 ⁷	3,2·10 ⁵	2·10 ⁵	1500	1000	2,5·10 ⁷	1,5·10 ⁵	—	—	0,90	0,015	0,03	0,06	—
600	4·10 ⁵	2700	2100	3,6·10 ⁷	2,2·10 ⁵	1,3·10 ⁵	1600	1020	2·10 ⁷	1,2·10 ⁵	—	—	0,84	0,02	0,06	0,08	—
700	2·10 ⁵	2800	2200	2,5·10 ⁷	1,6·10 ⁵	8·10 ⁴	1700	1100	1,6·10 ⁷	1,0·10 ⁵	—	—	0,75	0,04	0,11	0,10	—
800	10 ⁵	2870	2300	1,8·10 ⁷	1,25·10 ⁵	5·10 ⁴	1800	1200	1,3·10 ⁷	9·10 ⁴	—	—	0,61	0,06	0,21	0,12	—
900	7·10 ⁴	2940	2400	1,5·10 ⁷	1,2·10 ⁵	3·10 ⁴	1900	1300	9,8·10 ⁶	7,7·10 ⁴	—	—	0,41	0,09	0,40	0,10	—
1000	5·10 ⁴	3000	2500	1,3·10 ⁷	1,2·10 ⁵	2·10 ⁴	2000	1400	8·10 ⁶	7,3·10 ⁴	—	—	0,28	0,14	0,51	0,07	—

Обозначения: N — концентрация ионов и электронов в квазинейтральной плазме, N_i — концентрация ионов;

T_e — температура электронов, T_i — температура ионов;

$\omega_0 = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$, $\Omega_0 = (4\pi e^2 N/M)^{1/2}$ — лэнгмюровская частота электронов и ионов (m и M — масса электрона и иона),

и ионов довольно плавно увеличиваются с высотой. Они сильно меняются в течение суток. На высотах 300—700 км температура электронов может в 1,5—2 раза превосходить температуру ионов.

Ионная структура ионосферы (табл. 1.2) в зависимости от широты θ меняется не очень сильно до $\theta = 55\text{--}60^\circ$. На больших широтах полная концентрация ионов в ионосфере быстрее спадает с высотой. Сильно возрастает на больших широтах относительная концентрация ионов кислорода O^+ . В области D -слоя ($z \leq 60\text{--}80$ км) заметный вклад могут внести отрицательные ионы O_2^- ; их количество в настоящее время известно недостаточно точно. Из-за изменчивости свойств ионосферы основные параметры, характеризующие распространение электромагнитных волн, тоже сильно меняются с высотой, временем суток и т. д.

Подробные сведения о структуре и свойствах ионосферы и о методах ее исследования читатель может найти в специальных монографиях [9—11] и в обширной периодической литературе.

§ 2. Особенности нелинейных явлений в ионосфере

2.1. Механизмы нелинейности.

Одна из основных особенностей плазмы состоит в том, что в ней нелинейные эффекты проявляются уже в сравнительно небольших и легко достижимых электрических полях.

В зависимости от условий в плазме можно выделить два характерных типа нелинейностей. Первый связан со столкновениями электронов, с их нагревом в электрическом поле волны. Он легко осуществляется из-за того, что длина свободного пробега электронов сравнительно велика и электрон за время одного пробега может получать от поля заметную энергию. Кроме того, передача энергии от электронов к молекулам, атомам и ионам при столкновениях затруднена из-за малости отношения массы электрона к массе этих тяжелых частиц. В результате плазменные электроны сильно разогреваются уже в сравнительно небольшом электрическом поле. Диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы становятся тогда зависящими от напряженности поля. Другими словами, электрический ток уже не пропорционален полю E . Вследствие этого электродинамические процессы в плазме и, в частности, распространение электромагнитных волн приобретают нелинейный характер (нарушается принцип суперпозиции и т. д.). Будем называть такой тип нелинейности *нагревным*. Он связан с соударениями электронов и играет основную роль в тех случаях, когда характерные размеры возмущенной электрическим полем области плазмы много больше длины свободного пробега электронов.

Второй тип нелинейности не связан с соударениями. Он играет основную роль в бесстолкновительной плазме, когда раз-

меры возмущенной полем области плазмы, напротив, много меньше длины свободного пробега электронов. Можно указать различные механизмы нелинейности в бесстолкновительной плазме. Причина одного из них в том, что неоднородное переменное электрическое поле волны оказывает давление на электроны [12, 13]. Это давление вызывает сжатие плазмы. Концентрация электронов, а с нею и диэлектрическая проницаемость плазмы становятся тогда зависящими от амплитуды электрического поля, что и обуславливает нелинейность электродинамических процессов. Такой механизм нелинейности называют обычно *стрикционным*. Причина другого механизма нелинейности — во влиянии на движение электронов магнитного поля волны. Действительно, под действием переменного электрического поля волны E электрон приобретает переменную скорость $v \sim E$. Магнитное поле волны $H \sim E$. Поэтому возникает нелинейная сила Лоренца, пропорциональная $vH \sim E^2$, которая возмущает основное движение электрона [14]. Такую нелинейность будем называть *магнитной*.

Оценим сравнительную роль различных механизмов нелинейности в ионосфере. Нагревная нелинейность приводит к нелинейному возмущению комплексной диэлектрической проницаемости (см. § 3):

$$\Delta \epsilon_n \sim (E_0/E_p)^2, \quad (2.1)$$

где E_0 — амплитуда электрического поля волны, E_p — характерное плазменное поле:

$$E_p = \left[3T \frac{m}{e^2} \delta_0 (\omega^2 + \nu_{e0}^2) \right]^{1/2} = 4,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{\delta_0 T (\omega^2 + \nu_{e0}^2)} \text{ мв/м}. \quad (2.2)$$

Здесь T — температура плазмы (в эВ), ω — циклическая частота поля, ν_{e0} — эффективная частота соударений электрона с молекулами и ионами, δ_0 — средняя доля энергии, теряемой электроном при одном соударении. Электрическое поле в численном выражении дано в мв/м.

Значения $\Delta \epsilon_n$ для радиоволн различной частоты и мощности в ионосфере приведены в табл. 2.1. Здесь W_0 — эффективная мощность излучения эквивалентного диполя*). Видно, что при реальных мощностях излучающих станций отношение $(E_0/E_p)^2 \sim \Delta \epsilon_n$ может быть порядка единицы и даже значительно больше единицы. Под воздействием столь сильных полей свойства плазмы существенно изменяются. Нелинейность определяет тогда весь характер распространения волны.

*) При оценках мощности излучения ниже предполагается, что излучающая станция расположена на Земле. Электрическое поле на высоте z вычисляется по формуле $E_0 = 300 \sqrt{W_0/z}$, где W_0 — мощность излучения эквивалентного диполя в киловаттах, z — расстояние в километрах, поле E_0 выражено в мв/м. Разумеется, для сильно направленного излучателя истинная мощность излучающей станции, создающей данное поле E_0 , много меньше мощности эквивалентного диполя.

Таблица 2.1

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ИОНОСФЕРЫ:
ТЕПЛОВЫЕ ($\Delta\epsilon_H$), СТРИКЦИОННЫЕ ($\Delta\epsilon_C$), МАГНИТНЫЕ ($\Delta\epsilon_M$)

$\omega, \text{сек}^{-1}$		$z = 100 \text{ км}$			$z = 300 \text{ км}$		
		10^7	10^8	10^8	$3 \cdot 10^7$	10^8	10^9
$W_0 = 10^2 \text{ кВт}$	$\Delta\epsilon_H$	1,1	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$4,1 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$
	$\Delta\epsilon_C$	$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^{-11}$
	$\Delta\epsilon_M$	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-8}$	10^{-7}	$3 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-9}$
$W_0 = 10^4 \text{ кВт}$	$\Delta\epsilon_H$	110	1,2	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$
	$\Delta\epsilon_C$	$8 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$
	$\Delta\epsilon_M$	$9 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$3 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-8}$
$W_0 = 10^6 \text{ кВт}$	$\Delta\epsilon_H$	$1,1 \cdot 10^4$	120	1,2	4,1	0,38	$3,8 \cdot 10^{-3}$
	$\Delta\epsilon_C$	8	$8 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$
	$\Delta\epsilon_M$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$

Стрикционная нелинейность приводит к возмущению диэлектрической проницаемости [12]:

$$\Delta\epsilon_C \approx \frac{e^2 E_0^2}{8m\Gamma\omega^2}. \quad (2.3)$$

Значения этой величины для радиоволн в ионосфере также представлены в табл. 2.1. Там же приведены значения возмущений диэлектрической проницаемости, возникающих за счет магнитной нелинейности:

$$\Delta\epsilon_M \approx \frac{eE_0}{2m\omega c}. \quad (2.4)$$

Из таблицы видно, что основную роль в ионосфере играет нелинейность, связанная с нагревом электронов в поле сильной электромагнитной волны. Поэтому в настоящей книге ей уделено основное внимание.

2.2. Качественный характер нелинейных явлений.

Рассмотрим качественно основные явления, которые могут возникнуть вследствие нагревной нелинейности при распространении в ионосфере радиоволн высокой мощности.

Изменение поглощения и модуляции волны. Разогрев электронов в поле мощной электромагнитной волны приводит, прежде всего, к изменению частоты соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами, атомами. Благодаря этому изменяется поглощение радиоволн. Частота соударений в ионосфере может как расти с ростом температуры электронов (это обычно

имеет место в нижних слоях, $z \lesssim 200$ км, где основную роль играют соударения с нейтральными частицами), так и убывать (соударения с ионами, $v_{ei} \sim (T/T_e)^{3/2}$). В первом случае поглощение резко нарастает с ростом мощности волны (при $\omega > \nu$). В результате поле сильной волны $E \gg E_p$, проникающей в глубину плазмы, не может превзойти определённого предела. Оно перестаёт зависеть от мощности волны, приходящей на границу плазмы; имеет место как бы насыщение поля в глубине плазмы. Напротив, во втором случае поглощение резко падает с ростом мощности волны, так что сильная волна проходит сквозь слой плазмы, почти не поглощаясь. Возникает как бы просветление плазмы для радиоволн высокой мощности.

Таким образом, из-за нелинейного изменения поглощения амплитуда поля мощной волны в глубине плазмы существенно нелинейно зависит от амплитуды поля волны, приходящей на границу плазмы. Поэтому, если волна на границе плазмы модулирована по амплитуде, то ее модуляция в глубине плазмы искажена.

Для сильных радиоволн ($E_0 \gtrsim E_p$) это изменение модуляции может быть очень значительным (*автодемодуляция* и *авто-модуляция* радиоволн).

Изменение преломления волны. Узкие пучки. Разогрев электронов приводит к изменению их давления в той области плазмы, где проходит радиоволна. С течением времени давление выравнивается за счет ухода электронов из нагретой области. В результате изменяется концентрация плазмы. Изменение концентрации плазмы может происходить также за счет нарушения общего баланса ионизации при нагревании плазмы. Все это приводит к нелинейному изменению показателя преломления волны.

Изменение показателя преломления волны в плазме служит причиной новых нелинейных эффектов. Искажается траектория луча, сдвигается точка отражения волны. Если нарушение баланса ионизации не существенно, то точка отражения радиоволн в ионосфере сдвигается кверху. Достаточно мощные и узкие пучки волн могут при этом пробиться сквозь слой ионосферной плазмы. Одновременно должна исказиться структура ионосферы в области, где проходит волна: концентрация электронов понижается — как бы пробивается «дыра» в ионосферном слое. В противном случае, когда определяющую роль играет изменение баланса ионизации, концентрация плазмы в возмущенной области повышается.

Нелинейность, связанная с изменением показателя преломления, оказывает особое влияние на распространение узких направленных пучков радиоволн. Уже под действием слабой нелинейности траектории лучей в пучке заметно искривляются. Пучок может тогда сфокусироваться (*самофокусировка*) или образовать волноводный канал в плазме (*каналлизация пучка*). Нелинейность может также привести к расслоению или распаду

пучка, к возникновению осциллирующей структуры в распределении интенсивности пучка.

Взаимодействие волн. Одно из наиболее важных проявлений нелинейности — нарушение принципа суперпозиции волн. Если радиоволна 2 частоты ω_2 проходит в той же области плазмы, что и мощная волна 1 частоты ω_1 , то поглощение и преломление волны 2 будет изменяться в зависимости от мощности волны 1. Имеет место, следовательно, взаимодействие радиоволн в плазме. В частности, если мощная волна 1 модулирована по амплитуде, то благодаря изменению поглощения эта модуляция может быть передана волне 2, проходящей в той же области ионосферы. Это явление носит название *кроссмодуляции* или *люксембург-горьковского эффекта*. Оно хорошо изучено на опыте и имеет практическое значение для радиовещания в диапазоне средних длин волн. Аналогичный характер носит взаимодействие коротких импульсов, которое широко используется в последние годы для исследования свойств ионосферы.

Благодаря нелинейности взаимодействуют между собой и различные нормальные компоненты поляризации радиоволн в магнитоактивной плазме. Это может приводить к нелинейному вращению эллипса поляризации, к возникновению амплитудной модуляции волн. Нелинейное взаимодействие может служить причиной генерации радиоволнами в ионосфере других видов электромагнитных волн: плазменных, магнитогидродинамических, электроакустических (нелинейная трансформация волн).

Ионизация. В поле очень мощных радиоволн электроны столь сильно разогреваются, что возникает электрический пробой газа. Тогда резко возрастает степень ионизации плазмы. Связанная с этим процессом нелинейность приводит к очень быстрому росту поглощения волны в плазме, к быстрому выходу амплитуды поля волны в режим насыщения (стр. 13). Столь же резко растет поглощение других волн, проходящих через область ионизации; это приводит к ослаблению их поля, к подавлению их сильной волной. С ионизацией связана также возможность возбуждения в поле мощной радиоволны специальных термоионизационных колебаний плазмы, приводящих, в частности, к автомодуляции волны.

Возбуждение неустойчивости. Под воздействием мощных радиоволн в возмущенной области ионосферы нарастает температура и изменяется концентрация электронов и ионов. Созданная таким образом в плазме искусственная неоднородность легко может стать неустойчивой по отношению к определенным типам волн: желобковым, дрейфовым, ионно-циклотронным и т. д. Таким образом, нагрев ионосферы в поле мощных радиоволн должен приводить к генерации новых и усилению уже существующих колебаний плазмы, к образованию осциллирующей, «турбулизованной» области. Это может существенно сказаться на условиях распространения радиоволн в возмущенной об-

ласти плазмы, приводя к их усиленному поглощению и рассеянию.

Особое значение имеют области резонансов, когда частота волны близка к какой-либо собственной частоте плазмы (например, вблизи точки отражения волны при нормальном падении на слой $\omega \approx \omega_0$). В окрестности резонансов неустойчивость плазмы быстро развивается уже в сравнительно небольших полях (параметрическая неустойчивость).

Выше отмечалось, что в настоящей книге рассматриваются эффекты, связанные главным образом с нагревной нелинейностью, играющей в ионосфере основную роль. Это, разумеется, не означает, что другие механизмы нелинейности в ионосфере не существенны. Так, стрикционная нелинейность играет важную роль при параметрической неустойчивости. Кроме того, если излучение импульсное, причем длительность импульса много меньше времени свободного пробега электрона, то нагрев очень слаб и важнее стрикционные эффекты. То же имеет место для очень узких пучков радиоволн, ширина которых меньше длины свободного пробега электронов в ионосфере. Нелинейность, связанная с влиянием на движение электрона магнитного поля волны, определяет нелинейное рассеяние радиоволн, генерацию гармоники частоты 2ω , нелинейное изменение поляризации волны. В окрестности антенны, излучающей в ионосфере, возможно сильное возбуждение собственных колебаний плазмы, и т. д. Не имея возможности изложить здесь все эти вопросы, отсылаем читателя к специальной литературе; ссылки на соответствующие работы указаны в тексте книги.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПЛАЗМЕ

§ 3. Однородное переменное электрическое поле в плазме

Рассмотрим плазму, находящуюся в однородном электрическом поле. Под воздействием электрического поля распределение по скоростям электронов и ионов плазмы перестает быть равновесным: возникает их ускоренное движение в направлении поля. Это движение тормозится за счет соударений электронов с ионами, а также с молекулами и атомами. В результате действия этих двух процессов — ускорения полем и торможения из-за соударений — в стационарном режиме устанавливается некоторое стационарное неравновесное распределение электронов и ионов по скоростям. Определение его и является задачей теории.

В общем случае для решения этой задачи необходимо использовать кинетические уравнения для функций распределения электронов и ионов. Исследованию функций распределения посвящена гл. VI. Однако для выявления физической картины, а часто и для получения достаточно точных количественных формул оказывается удобным и полезным использование значительно более простой, хотя и приближенной теории, которую мы, следуя [24, 1], будем называть элементарной. В элементарной теории пренебрегается распределением электронов и ионов по скоростям, а рассматривается некоторый «средний» электрон (или ион). Соответственно, состояние плазмы в элементарной теории характеризуется направленными скоростями «среднего» электрона и иона (v_e, v_i) и их средними энергиями или температурами T_e, T_i . По определению скоростей v_e, v_i плотность полного электрического тока j связана с ними соотношением:

$$j = -ev_e N_e + \sum_k eZ_k N_{ki} v_{ki}. \quad (3.1)$$

Здесь N_{ki} — концентрация ионов ($\sum_k Z_k N_{ki} = N_e$); суммирование идет по ионам разного сорта k с зарядом eZ_k .

Электронная и ионная температуры в элементарной теории определены соотношениями:

$$\mathcal{E}_e = \frac{3}{2} T_e; \quad \mathcal{E}_i = \frac{3}{2} T_i, \quad (3.2)$$

где \mathcal{E}_e и \mathcal{E}_i — энергия хаотического движения среднего электрона и иона. Поскольку распределение электронов и ионов по скорости далеко не всегда является максвелловским, то температуры T_e , T_i правильнее называть эффективными.

Ниже будут установлены уравнения, из которых в элементарной теории определяются v и T . Вопрос о точности элементарной теории и характере приближений, с которыми она связана, последовательным образом выясняется только на основе кинетического рассмотрения (гл. VI). Концентрация электронов и ионов в плазме в настоящем параграфе предполагается заданной. В последующих параграфах рассматриваются процессы ионизации и рекомбинации в ионосфере и учитывается влияние на них переменного электрического поля.

3.1. Электронный ток. Электронная проводимость и диэлектрическая проницаемость.

Уравнение для направленной скорости «среднего» электрона в плазме нетрудно получить, исходя из следующих соображений. На электроны действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}], \quad (3.3)$$

где \mathbf{H} — постоянное магнитное поле (действием магнитного поля радиоволны здесь пренебрегаем). Следовательно, в отсутствие трения уравнение для скорости \mathbf{v}_e имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}]. \quad (3.4)$$

Трение обусловлено соударениями электронов с другими частицами: молекулами, ионами (соударения между электронами не меняют полного импульса электронов, т. е. не меняют средней скорости \mathbf{v}_e).

Под влиянием соударений скорость \mathbf{v}_e , очевидно, должна уменьшаться. Время, в течение которого средний импульс уменьшается на $m\mathbf{v}_e$, обозначим через $\tau_v = v_e^{-1}$, где v_e — частота соударений. Тогда обусловленная соударениями сила трения между электронами и частицами сорта k , движущимися со средней скоростью \mathbf{v}_k , есть $-m\nu_{ek}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k)$, и уравнение (3.4) принимает вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}] - \sum_k m\nu_{ek}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k); \quad (3.5)$$

здесь ν_{ek} — частота соударений электронов с частицами сорта k (молекулами, ионами).

Разумеется, при разных соударениях электрона с тяжелыми частицами изменение импульса различно, так как различны параметры удара и электроны распределены по скоростям.

Поэтому время τ_v и соответственно частоты соударений ν_{ek} представляя собой некоторые средние, эффективные величины, описывающие быстроту изменения среднего импульса электрона. Вычисление ν_{ek} является задачей кинетической теории и требует знания соответствующих эффективных сечений рассеяния и распределения электронов по скоростям; это будет сделано в дальнейшем (§ 21). Здесь же важно подчеркнуть, что в очень широком классе условий можно считать, что частоты ν_{ek} не зависят от скорости v_e , а зависят лишь от температуры электронов T_e . Причина этого в том, что как в слабом, так и в сильном электрическом поле средняя скорость направленного движения электронов оказывается много меньше, чем их тепловая (хаотическая) скорость. Поэтому и частота столкновений зависит лишь от хаотической скорости, т. е. от эффективной температуры электронов. Например, при столкновениях с молекулами, если принять, что сечение столкновения q_{em} не зависит от скорости,

$$\nu_{em} = \overline{q_{em} N_m v} = \nu_{em0} \sqrt{T_e/T}. \quad (3.6)$$

Здесь ν_{em0} — число соударений электронов, когда $T_e = T$ (т. е. в отсутствие электрического поля). Аналогично, для соударений с ионами, учитывая, что q обратно пропорционально v^4 (резерфордское рассеяние), находим:

$$\nu_{ei} = \nu_{ei0} (T_i/T_e)^{3/2}. \quad (3.7)$$

Обычно средними скоростями тяжелых частиц (ионов, молекул) можно пренебречь в сравнении со средней скоростью электронов. Тогда уравнение (3.5) упрощается и принимает вид:

$$m \frac{dv_e}{dt} = -eE - \frac{e}{c} [v_e H] - m\nu_e v_e, \quad (3.8)$$

где $\nu_e = \sum_k \nu_{ek}$ — эффективная частота соударений электрона.

Рассмотрим вначале случай изотропной плазмы ($H = 0$). В отсутствие внешнего электрического поля из (3.8) получаем:

$$v_e = v_{e0} e^{-\nu_e t}. \quad (3.9)$$

Здесь и в дальнейшем учитывается, что ν_e зависит лишь от электронной температуры T_e , и принято, что T_e постоянна или же достаточно медленно меняется во времени, так что $\left| \frac{dT_e}{dt} \right| \ll \nu_e T_e$. В следующем разделе будет показано, что это условие обычно хорошо выполняется. Из (3.9) видно, что средняя скорость электронов релаксирует со временем к нулю: время релаксации $\tau_v = \nu_e^{-1}$. Это же время определяет установление стационарного значения скорости в электрическом поле.

В переменном однородном электрическом поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ из (3.8) получаем для установившегося решения:

$$\mathbf{v}_e = - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\nu_e + i\omega}{\nu_e^2 + \omega^2}. \quad (3.10)$$

Полный электронный ток в плазме

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 N \mathbf{E}}{m} \frac{\nu_e + i\omega}{\omega^2 + \nu_e^2}. \quad (3.11)$$

В линейной макроскопической электродинамике обычно вводятся диэлектрическая проницаемость ϵ и проводимость σ [25,26]:

$$\mathbf{j} = \left(-i\omega \frac{\epsilon - 1}{4\pi} + \sigma \right) \mathbf{E} = \frac{-i\omega}{4\pi} (\epsilon' - 1) \mathbf{E}, \quad \epsilon' = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (3.12)$$

В выражения для σ и ϵ , вообще говоря, вносят вклад как электроны, так и ионы. Ограничиваясь лишь электронами, можно говорить об электронной проводимости σ_e и электронной диэлектрической проницаемости ϵ_e . Сравнивая (3.11) и (3.12), находим:

$$\epsilon_e = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_e^2)}; \quad \sigma_e = \frac{e^2 N \nu_e}{m(\omega^2 + \nu_e^2)}. \quad (3.13)$$

При наличии магнитного поля \mathbf{H} плазма становится анизотропной. Проводимость и диэлектрическая проницаемость в этом случае являются тензорами. Полный ток в анизотропной среде определен выражением:

$$\mathbf{j}_s = \sum_k \left[-\frac{i\omega}{4\pi} (\epsilon_{esk} - \delta_{sk}) + \sigma_{esk} \right] \mathbf{E}_k = -\frac{i\omega}{4\pi} \sum_k (\epsilon'_{sk} - \delta_{sk}) \mathbf{E}_k, \quad (3.14)$$

$$\epsilon'_{sk} = \epsilon_{esk} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{esk},$$

где ϵ_{esk} , σ_{esk} — компоненты тензоров $\hat{\epsilon}_e$ и $\hat{\sigma}_e$, δ_{sk} — единичный тензор: $\delta_{sk} = 1$, если $s = k$, и $\delta_{sk} = 0$, если $s \neq k$.

Скорость \mathbf{v}_e в поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, определенная из уравнения (3.8), имеет в этом случае вид:

$$\mathbf{v}_e = - \frac{e}{m[\omega_H^2 + (-i\omega + \nu_e)^2]} \times$$

$$\times \left\{ \mathbf{E}(-i\omega + \nu_e) + \frac{\omega_H^2 \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{E}\mathbf{H})}{H^2(-i\omega + \nu_e)} - \omega_H \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H} \right\}. \quad (3.15)$$

Здесь $\omega_H = eH/mc$ — гиромагнитная частота.

Подставляя это выражение для \mathbf{v}_e в соотношение (3.14), находим компоненты тензоров ϵ_{esk} , σ_{esk} . Выбирая за ось z

направление \mathbf{H} , получим:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[\frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_e^2} + \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_e^2} \right], \\
 \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= i \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[\frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_e^2} - \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_e^2} \right], \\
 \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_e^2}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0, \\
 \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \frac{\omega_0^2 \nu_e}{8\pi} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_e^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_e^2} \right], \\
 \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} &= -i \frac{\omega_0^2 \nu_e}{8\pi} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_e^2} - \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_e^2} \right], \\
 \sigma_{zz} &= \frac{\omega_0^2 \nu_e}{4\pi(\omega^2 + \nu_e^2)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Из формул (3.16) видно, что в высокочастотном электрическом поле ($\omega^2 \gg \nu_e^2$) в случае, когда частота ω близка к гирочастоте ω_H , имеет место резонансное возрастание электронной проводимости, называемое обычно гиромагнитным (или циклоotronным) резонансом.

Формулы (3.13), (3.16) описывают в рамках элементарной теории электронную проводимость и диэлектрическую проницаемость плазмы. Эффективная частота соударений электронов ν_e определяется при этом формулами (3.6), (3.7). Более точное определение ν_e дается в кинетической теории. Последовательное кинетическое рассмотрение приводит также к поправкам к формулам (3.13), (3.16), которые выражаются с помощью специальных коэффициентов K_σ и K_ε (§ 21).

3.2. Температура электронов.

Уравнение для эффективной температуры электронов (3.2) можно получить, исходя из закона сохранения энергии. Электрическое поле производит над электронами плазмы в единицу времени работу $j\mathbf{E} = -eN\nu_e\mathbf{E}$, или, на один электрон, работу $-e\nu_e\mathbf{E}$. С другой стороны, электроны теряют энергию при соударениях с тяжелыми частицами. Эту энергию, отнесенную к единице времени, можно записать в виде

$$\frac{3}{2} \sum_k \delta_{ek} \nu_{ek} (T_e - T_k).$$

Здесь ν_{ek} — частота соударений электрона с тяжелыми частицами сорта k (ионами, атомами, молекулами), δ_{ek} — средняя доля

энергии, передаваемой при одном соударении. Электроны передают свою энергию тяжелым частицам, только если $T_e > T_k$; при $T_e < T_k$ имеет место обратный процесс.

Теперь можно записать баланс энергии для электронов в плазме в виде:

$$\frac{dT_e}{dt} \left(\frac{3}{2} NT_e \right) = \mathbf{jE} - \frac{3}{2} \sum_k \delta_{ek} \nu_{ek} N (T_e - T_k). \quad (3.17)$$

Если температура тяжелых частиц одинакова, то уравнение (3.17) упрощается:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3} e \mathbf{v}_e \mathbf{E} - \delta \nu_e (T_e - T), \quad (3.18)$$

где

$$\delta = \frac{1}{\nu_e} \sum_k \delta_{ek} \nu_{ek}, \quad \nu_e = \sum_k \nu_{ek}. \quad (3.19)$$

Здесь ν_e — средняя скорость электрона, определенная уравнением (3.8). Уравнения (3.8), (3.18) составляют замкнутую систему уравнений, определяющих среднюю направленную скорость электронов \mathbf{v}_e и их температуру T_e . Очень существенно, что в стационарных условиях в плазме δ всегда много меньше единицы*). Благодаря этому даже в сильном электрическом поле стационарная тепловая (хаотическая) скорость электрона $\nu_{Te} = \sqrt{2T_e/m}$ оказывается всегда много больше его направленной скорости ν_e .

Рассмотрим некоторые частные решения уравнений (3.18), (3.8).

В отсутствие электрического поля, если произведение $\delta \nu_e$ не зависит от T_e , имеем:

$$T_e = T + (T_{e0} - T) e^{-\delta \nu_e t}. \quad (3.20)$$

Здесь T_{e0} — температура электронов в начальный момент времени $t = 0$. Из (3.20) видно, что время релаксации температуры электронов $\tau_T = 1/\delta \nu_e$. Заметим, что согласно (3.9) время релаксации средней направленной скорости электронов $\tau_v = 1/\nu_e$. Поскольку $\delta \ll 1$, то время релаксации направленной скорости электронов всегда много меньше, чем время релаксации температуры.

Рассмотрим теперь изотропную плазму ($\mathbf{H} = 0$) в постоянном электрическом поле \mathbf{E} . В этом случае средняя скорость

*) В слабо ионизованной плазме в одноатомных газах при невысокой электронной температуре ($T_e \leq 1$ эв) обычно $\delta \sim 2m/M \sim 10^{-4} - 10^{-5}$. В тех же условиях в молекулярных газах $\delta \sim 10^{-3}$. С ростом электронной температуры растет и δ (из-за увеличения роли неупругих столкновений). Однако при этом увеличивается степень ионизации плазмы. Все более существенную роль начинают тогда играть столкновения с ионами, благодаря которым значение δ вновь понижается. Подробнее о величине δ см. § 5 и § 21.

электронов согласно (3.10) равна

$$\mathbf{v}_e = -e\mathbf{E}/m\nu_e,$$

так что уравнение (3.18) для температуры электронов T_e принимает вид:

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 E^2}{m\nu_e} - \delta\nu_e (T_e - T).$$

Его решение при δ, ν_e , не зависящих от T_e :

$$T_e = T + \frac{2}{3} \frac{e^2 E^2}{m\delta\nu_e^2} + \left(T_{e0} - T - \frac{2}{3} \frac{e^2 E^2}{m\delta\nu_e^2} \right) e^{-\delta\nu_e t}.$$

Отсюда видно, что при $t \gg \tau_T$ температура электронов в плазме устанавливается на стационарном, не зависящем от начальной температуры T_{e0} уровне:

$$T_e = T + \frac{2e^2 E^2}{3m\delta\nu_e^2}. \quad (3.21)$$

Установившееся значение температуры электронов растет пропорционально квадрату напряженности электрического поля. Оно увеличивается также с уменьшением доли теряемой электронами энергии δ .

В переменном электрическом поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (3.22)$$

(удобнее перейти к вещественным величинам) для средней скорости \mathbf{v}_e из (3.8), (3.10) при ν_e , не зависящем от T_e , находим:

$$\mathbf{v}_e = \frac{-e\mathbf{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_e^2)} (\nu_e \cos \omega t + \omega \sin \omega t). \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23), (3.22) в уравнение (3.18), получаем для температуры электронов:

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 E_0^2}{3m(\omega^2 + \nu_e^2)} (\nu_e + \nu_e \cos 2\omega t + \omega \sin 2\omega t) - \delta\nu_e (T_e - T). \quad (3.24)$$

Установившееся решение этого уравнения при δ и ν_e , не зависящих от T_e , имеет вид:

$$T_e = T + \frac{e^2 E_0^2}{3m\delta(\omega^2 + \nu_e^2)} + \frac{e^2 E_0^2}{3m(\omega^2 + \nu_e^2)} \left[\frac{\delta\nu_e^2 - 2\omega^2}{4\omega^2 + \delta^2\nu_e^2} \cos 2\omega t + \frac{2\omega\nu_e}{4\omega^2 + \delta^2\nu_e^2} \sin 2\omega t \right]. \quad (3.25)$$

В случае очень низких частот

$$2\omega \ll \delta\nu_e, \quad \omega\tau_T \ll 1 \quad (3.26)$$

с точностью до малых членов порядка $\omega/\delta v_e$ отсюда следует:

$$T_e = T + \frac{2e^2 E_0^2}{3m\delta v_e^2} \cos^2 \omega t. \quad (3.27)$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.21) для случая постоянного электрического поля, видим, что при условии (3.26) температура электронов квазистационарна. Так и должно быть, поскольку условие (3.26) означает, что время релаксации для температуры электронов $1/\delta v_e$ много меньше, чем время $1/\omega$, характеризующее быстроту изменения поля.

В другом предельном случае

$$\omega \gg \delta v_e \quad (3.28)$$

с точностью до малых членов порядка $\delta v_e/\omega$, δ

$$T_e = T + \frac{e^2 E_0^2}{3m\delta(\omega^2 + v_e^2)}. \quad (3.29)$$

Таким образом, в случае (3.28) температура электронов в первом приближении постоянна во времени. Переменная составляющая T_e (частоты 2ω) имеет малую амплитуду, в $\delta v_e/\omega$ или в δ раз меньшую постоянной составляющей. Этот факт вполне понятен. Действительно, время релаксации для температуры электронов в плазме $\tau_T = 1/\delta v_e$, и при условии (3.28) температура электронов не может существенно измениться за время $1/\omega$, в течение которого меняется электрическое поле. Поэтому температура электронов устанавливается на некотором среднем, не зависящем от времени уровне, отклонения от которого малы.

Нетрудно видеть теперь, что в установившемся состоянии хаотическая скорость электрона в плазме при произвольном значении электрического поля много больше его направленной скорости. Действительно, согласно (3.21), (3.29)

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{2T_e}{m}} \gg \frac{eE_0}{m\sqrt{\delta(\omega^2 + v_e^2)}}, \quad (3.30)$$

в то время как упорядоченная скорость

$$|v_e| = \frac{eE_0}{m\sqrt{\omega^2 + v_e^2}} \leq \sqrt{\delta} v_{Te}. \quad (3.31)$$

При $\delta \ll 1$, следовательно, всегда $|v_e| \ll v_{Te}$ независимо от величины поля*).

*) Это справедливо, разумеется, лишь для установившихся распределений. В процессе установления в сильных полях это соотношение может и не выполняться. В определенных случаях установившееся решение может вообще отсутствовать (см. ниже).

Выше предполагалось, что δ и v_e не зависят от температуры электронов T_e . При учете зависимости δ и v_e от T_e решение уравнений (3.8), (3.18) нетрудно найти разложением по малым параметрам $\omega/\delta v_e$, δ (при условии (3.26)) или $\delta v_e/\omega$, δ (при условии (3.28)). В обоих случаях температура электронов в первом приближении определяется выражениями (3.21), (3.29), которые следует рассматривать теперь как уравнения для T_e . Например, при условии (3.28) температура электронов по-прежнему постоянна и определена уравнением

$$T_e = T + \frac{e^2 E_0^2}{3m\delta(T_e)[\omega^2 + v_e^2(T_e)]}. \quad (3.32)$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\delta_0}{\delta(T_e)} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{\omega^2 + v_e^2(T_e)}. \quad (3.33)$$

Здесь $v_{e0} = v_e(T_{e0})$; $\delta_0 = \delta(T_{e0})$ — число соударений и доля энергии при $T_e = T_{e0}$; E_p — характерное плазменное поле (2.2). Из формулы (3.33) видно, что если амплитуда напряженности электрического поля много меньше, чем плазменное поле ($E_0 \ll E_p$), то температура электронов лишь незначительно изменяется под воздействием поля:

$$\Delta T_e = T_e - T = e^2 E_0^2 / 3m\delta_0(\omega^2 + v_{e0}^2). \quad (3.32a)$$

Соответственно, незначительны в этом случае и изменения частоты соударений электрона, а следовательно, и проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы.

Таким образом, электрическое поле $E_0 \ll E_p$ слабо возмущает плазму: оно и будет называться *слабым*. Если же $E_0 \gtrsim E_p$, то температура электронов и другие параметры плазмы (v_e , σ_e , ϵ_e) существенно изменяются под воздействием электрического поля. Такие поля, как уже указывалось, будут называться *сильными*.

Примем, что δ не зависит от T_e . Разрешая тогда алгебраическое уравнение (3.33) в случае соударений с молекулами при не зависящем от скорости сечении соударений (3.6), находим:

$$T_e = T \left[1 + \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{2v_{e0}^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2} - 1 \right) \right]. \quad (3.34)$$

Зависимость T_e от E_0/E_p показана на рис. 3.1. Видно, что T_e в рассматриваемом случае монотонно возрастает с ростом E_0 . При высоких частотах $\omega^2 \gg v_e^2$, как ясно из (3.32),

$$T_e = T \left(1 + \frac{e^2 E_0^2}{3Tm\delta\omega^2} \right). \quad (3.35)$$

Это выражение для T_e не зависит от ν_e . Оно справедливо, следовательно, при любом характере соударений.

При низких частотах $\omega^2 \ll \nu_e^2$ возникает интересная особенность в поведении электронной температуры: связь T_e с $(E_0/E_p)^2$ может сделаться неоднозначной. Точнее, в определенной области значений амплитуды поля $E_{k2} < E_0 < E_{k1}$ одному значению E_0 может соответствовать не одно, как обычно, а три различных стационарных значения электронной температуры [27]. Зависимость T_e от E_0/E_p приобретает тогда S-образный характер, представленный на рис. 3.2.

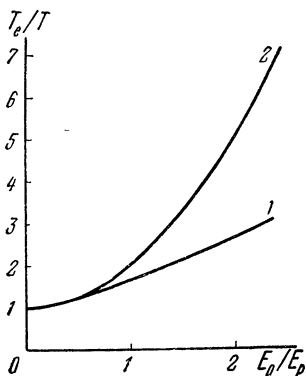


Рис. 3.1. Температура электронов при соударениях с молекулами. 1) $\omega^2 \ll \nu_{e0}^2$; 2) $\omega^2 \gg \nu_{e0}^2$.

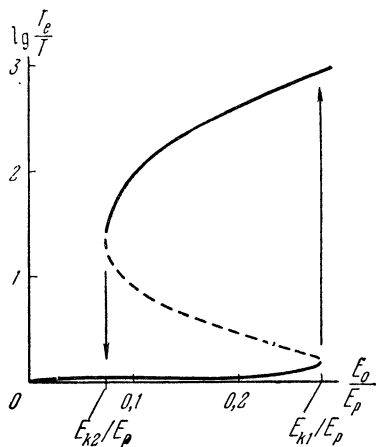


Рис. 3.2. Температура электронов при соударениях с ионами; $\omega = 0,01\nu_{e0}$.

Найдем критерий появления S-образной зависимости T_e/T от E_0/E_p . Как видно из рис. 3.2, при этом производная $d(T_e/T)/d(E_0/E_p)$ должна обращаться в бесконечность, или

$$\frac{d(E_0/E_p)}{d(T_e/T)} = 0. \quad (3.36)$$

Выражая E_0/E_p через T_e/T с помощью соотношения (3.33) и дифференцируя по T_e , переписываем критерий (3.36) в виде:

$$\delta[\omega^2 + \nu_e^2(T_e)] + \left(\frac{T_e}{T} - 1\right) \frac{d}{dT_e} [\delta(\omega^2 + \nu_e^2(T_e))] = 0. \quad (3.37)$$

Отсюда следует, что при $\delta = \text{const}$ S-образность может возникнуть только при низких частотах $\omega \ll \nu_e$, причем частота соударений $\nu_e(T_e)$ должна убывать с ростом T_e , и убывать быстрее,

чем $(T_e - T)^{-1/2}$. Условие (3.37) может выполняться в областях резкого падения сечения столкновения электрона с атомами (область эффекта Рамзауэра) [28] или падения доли теряемой энергии $\delta(T_e)$ [29], а также при соударениях с ионами (3.7).

Рассмотрим последний случай подробнее. Уравнение (3.33) имеет в этом случае вид

$$\frac{E_0^2}{E_p^2} = \left(\frac{T_e}{T_i} - 1 \right) \left[\frac{\omega^2}{v_{e0}^2} + \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{-3} \right] \left(\frac{\omega^2}{v_{e0}^2} + 1 \right)^{-1} \quad (3.38)$$

График зависимости T_e/T_i от E_0^2/E_p^2 , определяемой уравнением (3.38), при $\omega < 0,2v_{e0}$ является S-образным (рис. 3.2). В области значений $E_{k2} \leq E_0 \leq E_{k1}$ одному значению поля соответствуют три стационарных значения электронной температуры. Однако только два из них, соответствующие верхней и нижней кривым на рис. 3.2, являются устойчивыми. Состояние, соответствующее средней кривой, неустойчиво. На рисунке оно показано пунктиром. Переход из низкотемпературного стационарного состояния в высокотемпературное показан на рисунке стрелкой. Критическое поле E_{k1} , при котором происходит этот переход, определяется из соотношения (3.37). При $\omega \ll v_{e0}$ оно не зависит от частоты ω . Действительно, из (3.37) при $\omega^2 \ll v_{e0}^2$ и $v = v_{e0}(T_e/T_i)^{-3/2}$ получаем: $(T_e/T_i)_{k1} = 3/2$, и из (3.38)

$$E_{k1} = \frac{2}{\sqrt{27}} E_p. \quad (3.39)$$

Отсутствие «низкотемпературного» стационарного состояния при $E_0 \geq E_{k1}$ обусловлено тем, что энергия, сообщаемая электронам низкочастотным электрическим полем, резко растет с ростом электронной температуры, $Ej \sim v^{-1} \sim (T_e/T_i)^{3/2}$, в то время как энергия, передаваемая электронами ионам, падает, $\delta v_e (T_e - T_i) \sim T_e^{-1/2}$. Поэтому в достаточно сильном электрическом поле $E_0 \geq E_{k1}$ электроны уже не могут передать ионам всей поглощаемой ими от поля энергии, и температура электронов начинает расти. Это явление называют обычно *перегревной неустойчивостью*.

С ростом температуры падает частота соударений. После того как она станет меньше частоты поля, условие низкочастотности $\omega < v_e$ нарушается. Поэтому и оказывается возможным второе («высокотемпературное») устойчивое состояние (3.35) для сильно нагретого электронного газа, когда $v_e^2(T_e) \ll \omega^2$. Обратный переход из высокотемпературного в низкотемпературное состояние совершается в поле

$$E_{k2} = 3^{1/2} 2^{-1/3} (\omega/v_{e0})^{2/3} E_p.$$

Поле E_{k2} при $\omega/v_{e0} \ll 1$ много меньше, чем E_{k1} . Это приводит к гистерезису зависимости стационарной температуры электронов от амплитуды переменного электрического поля *).

Перегретая неустойчивость в случае соударений с ионами имеет место и в постоянном электрическом поле [168]. Соответствующее критическое значение поля

$$E_k = E_{k1}/\sqrt{2}. \quad (3.40)$$

В отличие от случая переменного поля высокотемпературное стационарное состояние при этом отсутствует (так как случай (3.35) при $\omega = 0$ реализоваться не может). Поэтому температура электронов при $E \geq E_{k1}$ в случае соударений с ионами непрерывно нарастает со временем. Столкновения с нейтральными частицами (молекулами, атомами) могут играть в постоянном поле стабилизирующую роль, благодаря им возникает высокотемпературное состояние для T_e .

Отметим, кроме того, что в рассматриваемом случае соударений с ионами в очень сильном постоянном электрическом поле, большем некоторого критического поля E_c ,

$$E > E_c = \frac{E_p}{\sqrt{\delta}} \sim \sqrt{Tm} \frac{v_e}{e}, \quad (3.41)$$

возникает неустойчивость и для средней направленной скорости электронов. В этом случае уже нельзя считать, что средняя направленная скорость много меньше хаотической (как это всегда имеет место в стационарных условиях). В результате число соударений электронов с ионами начинает существенно зависеть от направленной скорости v_e , причем ν падает с ростом $|v_e|$ пропорционально $|v_e|^{-3}$. В очень сильном поле $E > E_c$ средняя направленная скорость электронов так сильно возрастает, что роль соударений становится пренебрежимо малой и электроны начинают равномерно ускоряться полем. Подробно это явление, называемое обычно «убеганием» электронов, рассматривается в [30—33, 167]. В переменном поле эффект «убегания» отсутствует.

Выше рассматривалась лишь монотонная зависимость ν от T_e . В слабо ионизованной плазме сечение соударений электронов с молекулами может иметь и более сложный характер. Немонотонный ход зависимости ν от T_e приводит, соответственно, к сложной зависимости величины электронного тока j_e от напряженности электрического поля E . Кроме рассмотренной S -образной зависимости может, например, возникать N -образная зависимость j_e от E . Средняя часть у N -образной кривой (как и у S -образной) неустойчива (см. обзор [226]).

*) Отметим, что при учете кинетических эффектов значения критических полей E_{k1} и E_{k2} несколько изменяются. Это видно из кривой на рис. 3.2, построенной с учетом кинетических поправок [27].

Аналогичные выражения для T_e можно получить и при наличии в плазме магнитного поля. В частности, при $\omega \gg \delta v_e$ температура электронов в первом приближении постоянна. Она определяется уравнением:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{E_0^2}{E_p^2} \Phi_p, \quad (3.42)$$

$$\Phi_p = \cos^2 \beta + \frac{\sin^2 \beta}{2} (\omega^2 + v_e^2) \left[\frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + v_e^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + v_e^2} \right].$$

Здесь β — угол между \mathbf{E} и \mathbf{H} , Φ_p — поляризационный фактор. Из (3.42) видно, что в случае высокочастотного поля $\omega^2 \gg v_e^2$, если частота ω близка к гирочастоте ω_H , имеет место резонансное возрастание температуры электронов (рис. 3.3). Оно является следствием резонансного возрастания проводимости, отмечавшегося выше.

Если электрическое поле поляризовано по кругу в плоскости, ортогональной \mathbf{H} , и вектор электрического поля \mathbf{E} вращается в том же направлении, что и электроны плазмы (необыкновенная волна), то уравнение (3.42) для температуры электронов принимает вид:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{e^2 E_0^2}{3m\delta(T_e) [(\omega - \omega_H)^2 + v_e^2]}.$$

Это уравнение тождественно совпадает с (3.32), только частота поля ω заменяется разностью $\omega - \omega_H$. Отсюда следует, что в сильно ионизованной плазме ход T_e в зависимости от амплитуды поля E_0 вблизи гиромангнитного резонанса ($\omega \approx \omega_H$) обладает теми же особенностями, что и в рассмотренном выше случае

низкочастотного электрического поля при $\mathbf{H} = 0$. А именно, вблизи гирочастоты возникает та же неоднозначность и тот же гистерезис зависимости T_e от E_0^2 . Случай постоянного электрического поля теперь эквивалентен случаю строгого циклотронного резонанса $\omega = \omega_H$. В этом случае в полностью ионизованной плазме второе стационарное состояние отсутствует, так что температура электронов при $E_0 > E_{h1}$ непрерывно возрастает. Более того, в достаточно сильном электрическом поле $E_0 > E_c$ (3.41) в гиромангнитном резонансе отсутствует устойчивое состояние и для поперечной направленной скорости электронов;

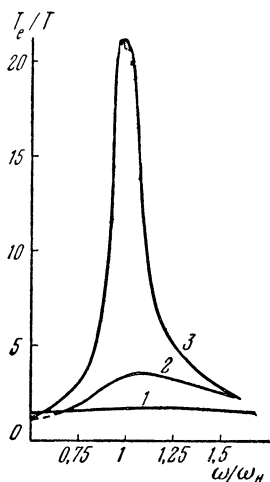


Рис. 3.3. Частотная зависимость температуры электронов; $(E_0/E_p)^2 = 0,4$. 1) $v_{e0}/\omega_H = 1$; 2) $v_{e0}/\omega_H = 0,316$; 3) $v_{e0}/\omega_H = 0,1$.

она непрерывно нарастает. Следовательно, здесь, как и в постоянном электрическом поле, имеет место «убегание» электронов.

Температура электронов T_e в переменном электрическом поле при выполнении условия (3.28) в первом приближении постоянна и определена уравнением (3.32). Возникают, однако, и переменные поправки ΔT_e частоты 2ω ; это видно, например, из формулы (3.25). При выполнении условия (3.28) амплитуда переменных поправок всегда мала в сравнении с значением стационарной температуры \bar{T}_e . Воспользовавшись этим, нетрудно получить общее выражение для ΔT_e . Например, в отсутствие магнитного поля из (3.8), (3.18) находим:

$$T_e = \bar{T}_e + \Delta T_e; \quad v_e = \bar{v}_e + \Delta v_e;$$

$$\Delta T_e = \frac{E_0^2}{E_p^2} \delta \bar{T}_e \left[\frac{\delta v_e^2 - 2\omega^2}{4\omega^2 + \delta^2 v_e^2} \cos 2\omega t + \frac{2\omega v_e}{4\omega^2 + \delta^2 v_e^2} \sin 2\omega t \right]. \quad (3.43)$$

Соответственно, поправка к току (при $\omega \gg v_e \sqrt{\delta/2}$):

$$\Delta v_e = -\frac{1}{4} \frac{eE_0}{m\omega(\omega^2 + v_e^2)} \frac{E_0^2}{E_p^2} \delta \bar{T}_e \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{\bar{T}_e} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega(3\omega^2 - 5v_e^2)}{9\omega^2 + v_e^2} \cos 3\omega t + \frac{v_e(v_e^2 - 7\omega^2)}{9\omega^2 + v_e^2} \sin 3\omega t + v_e \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right\}. \quad (3.44)$$

Здесь \bar{T}_e и \bar{v}_e определены соотношениями (3.32) и (3.23). Видно, что нелинейность приводит к появлению переменных поправок к электронному току, имеющих утроенную частоту. Кроме того, возникают нелинейные поправки к току с частотой ω . Поправка к активной составляющей ($\sim \cos \omega t$) описывает дополнительное нелинейное изменение приводимости, а поправка к индуктивной составляющей ($\sim \sin \omega t$) — изменение диэлектрической проницаемости плазмы. Сравнивая эти поправки с основными возмущениями \mathbf{e}_e и σ_e за счет изменения \bar{T}_e (3.32), (3.23), видим, что они малы — порядка $\delta v_e/\omega$.

3.3. Ионный ток. Нагрев электронов и ионов.

Пусть плазма, находящаяся в переменном электрическом поле, состоит из электронов, нескольких сортов ионов с зарядами eZ_k и массами M_k и из нейтральных молекул. В рамках элементарной теории уравнение для средней скорости ионов нетрудно получить из соображений, аналогичных изложенным в разделе 3.1 при выводе уравнения для \mathbf{v}_e . Оно имеет вид:

$$M_k \frac{d\mathbf{v}_{ik}}{dt} = eZ_k \mathbf{E} + \frac{eZ_k}{c} [\mathbf{v}_{ik} \mathbf{H}] - m v_{ek} (\mathbf{v}_{ik} - \mathbf{v}_e) - M_k \sum_p \nu_{kp} (\mathbf{v}_{ik} - \mathbf{v}_p). \quad (3.45)$$

Здесь член $mv_{eh}(v_e - v_{ih})$ описывает взаимодействие ионов с электронами, а последний член — взаимодействие с тяжелыми частицами плазмы: другими ионами, молекулами, атомами; ν_{hp} — частота соударений, v_p — средняя скорость этих частиц.

В случае трехкомпонентной плазмы, т. е. плазмы, состоящей из электронов, однозарядных ионов одного сорта и молекул, уравнения для v_i и v_e (3.8), (3.45) принимают простой вид:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_e}{dt} &= -eE - \frac{e}{c} [v_e H] - mv_{ei}(v_e - v_i) - mv_{em}v_e; \\ M \frac{dv_i}{dt} &= eE + \frac{e}{c} [v_i H] - mv_{ei}(v_i - v_e) - Mv_{im}v_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь принято, что газ молекул покоится — его скорость равна нулю. Примем, как и ранее, что частоты соударений не зависят от направленной скорости. Тогда в изотропной плазме, находящейся в переменном электрическом поле $E = E_0 e^{-i\omega t}$,

$$\begin{aligned} v_e &= - \frac{eE}{m} \frac{M(-i\omega + \nu_{im})}{mv_{ei}(-i\omega + \nu_{em}) + M(-i\omega + \nu_{im})(-i\omega + \nu_{ei} + \nu_{em})}; \\ v_i &= eE \frac{-i\omega + \nu_{em}}{mv_{ei}(-i\omega + \nu_{em}) + M(-i\omega + \nu_{im})(-i\omega + \nu_{ei} + \nu_{em})}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Отделяя теперь мнимую и действительную части, можно найти электронную и ионную проводимости и диэлектрические проницаемости плазмы. Существенно учесть при этом, что обычно $Mv_{im} \gg mv_{em}$. Благодаря этому первым членом в знаменателе в формулах (3.47) можно пренебречь. Выражения для σ_e и ϵ_e совпадают тогда с формулами (3.13), полученными в пренебрежении движением ионов. Для σ_i , ϵ_i имеем:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= 1 - \frac{\Omega_0^2 [\omega^2 - \nu_{im}\nu_{ei} + \nu_{em}(\nu_{ei} + \nu_{em})]}{[-\nu_{im}(\nu_{ei} + \nu_{em}) + \omega^2]^2 + \omega^2(\nu_{ei} + \nu_{em} + \nu_{im})^2}; \\ \sigma_i &= \frac{\Omega_0^2}{4\pi} \frac{\nu_{em}\nu_{im}(\nu_{ei} + \nu_{em}) + \omega^2(\nu_{ei} + \nu_{im})}{[-\nu_{im}(\nu_{ei} + \nu_{em}) + \omega^2]^2 + \omega^2(\nu_{ei} + \nu_{em} + \nu_{im})^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь $\Omega_0 = (4\pi e^2 N/M)^{1/2}$. Сравнивая выражения (3.48) и (3.13), видим, что ионная проводимость в отсутствие магнитного поля всегда много меньше электронной проводимости.

Это утверждение справедливо и при наличии в плазме постоянного магнитного поля, если только частота переменного электрического поля не слишком низка (см. условие (3.50)). Если же $\omega \leq (\Omega_H \omega_H)^{1/2}$, где $\Omega_H = eH/Mc$, то движение ионов становится существенным. В случае постоянного электрического поля ($\omega = 0$) компоненты тензоров электронной и ионной проводимости плазмы, определенные из уравнений (3.46), имеют

вид (см., например, [34]):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ezz} &= \frac{\omega_0^2}{4\pi(\nu_{em} + \nu_{ei})}, \\ \sigma_{exx} = \sigma_{eyy} &= \frac{\omega_0^2}{4\pi A} \left[\nu_{ei} + \nu_{em} \left(1 + \frac{\Omega_H^2}{\nu_{im}^2} \right) \right], \\ \sigma_{exy} = -\sigma_{eyx} &= -\frac{\omega_0^2}{4\pi A} \omega_H \left[1 + \frac{m\nu_{ei}}{M\nu_{im}} + \frac{\Omega_H^2}{\nu_{im}^2} \right]; \end{aligned} \right\} (3.49a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{izz} &= \frac{\Omega_0^2 \nu_{em}}{4\pi \nu_{im} (\nu_{ei} + \nu_{em})}, \\ \sigma_{ixx} = \sigma_{iyy} &= \frac{\Omega_0^2}{4\pi A \nu_{im}} (\nu_{em}^2 + \nu_{em} \nu_{ei} + \omega_H^2), \\ \sigma_{ixy} = -\sigma_{iyx} &= \frac{\Omega_0^2 \Omega_H}{4\pi A \nu_{im}^2} \left(\nu_{em}^2 + \frac{M}{m} \nu_{ei} \nu_{im} + \omega_H^2 \right), \end{aligned} \right\} (3.49б)$$

$$A = (\nu_{em} + \nu_{ei})^2 + \omega_H^2 \left(1 + 2 \frac{m\nu_{ei}}{M\nu_{im}} + \frac{\Omega_H^2}{\nu_{im}^2} \right).$$

Здесь приведены компоненты полного тензора проводимости $\sigma'_{sk} = \sigma_{sk} - \frac{i\omega}{4\pi} (\epsilon_{sk} - \delta_{sk})$. Видно, что компонента ионного тока вдоль магнитного поля много меньше электронной. Поперечные же компоненты ионного тока малы только при условии $\nu_{im}(\nu_{ei} + \nu_{em}) \gg \omega_H \Omega_H$. В достаточно сильном магнитном поле это условие не выполняется (в ионосфере, при $z > 100$ км), и поперечный ток ионов здесь может быть больше поперечного тока электронов. В переменном электрическом поле при $\omega > \Omega_H$ поперечные компоненты ионной проводимости уменьшаются; при

$$\omega^2 \gg \omega_H^2 \frac{m}{M} \frac{\nu_{em}}{\nu_{im}} \quad (3.50)$$

они всегда много меньше соответствующих компонент электронной проводимости. Иначе говоря, в переменном электрическом поле при выполнении условия (3.50) ионный ток мал в сравнении с электронным током.

Уравнение для эффективной температуры ионов (3.2) легко получить, используя закон сохранения энергии, как это делалось выше для температуры электронов. Оно имеет вид:

$$\frac{dT_{ik}}{dt} = \frac{2}{3} e Z_k \nu_{ik} \mathbf{E} - \delta_{ei} \nu_{ek} (T_{ik} - T_e) - \sum_p \delta_p \nu_{pk} (T_{ik} - T_p). \quad (3.51)$$

Здесь член $\delta_{ei}v_{ek}(T_{ih} - T_e)$ определяет энергию, передаваемую при соударениях ионами электронам, а последний член — нейтральным частицам плазмы; v_{pk} — частота соударений, δ_p — средняя доля энергии, теряемой ионом при одном ударе.

Рассмотрим для примера нагрев трехкомпонентной изотропной плазмы ($\mathbf{H} = 0$). Ионный ток в этом случае всегда много меньше электронного. Поэтому работой ионного тока можно пренебречь. Уравнения (3.18), (3.51) для температур электронов и ионов принимают тогда вид:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3} e v_e \mathbf{E} - \delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) - \delta_{em} v_{em} (T_e - T); \quad (3.52)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) - v_{im} (T_i - T). \quad (3.53)$$

Здесь $\delta_{im} = \delta_p$ для простоты положено равным единице. T — температура молекул; примем ее постоянной, не зависящей от времени.

В высокочастотном электрическом поле ($\omega \gg \delta_{em} v_{em} + \delta_{ei} v_{ei}$) температуры электронов и ионов в первом приближении по δ , $\delta v/\omega$ стационарны (ср. (3.32)) и определены трансцендентными уравнениями:

$$\frac{e^2 E_0^2}{3m} = [\delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) + \delta_{em} v_{em} (T_e - T)] \frac{\omega^2 + (v_{ei} + v_{em})^2}{v_{ei} + v_{em}}, \quad (3.54)$$

$$\delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) = v_{im} (T_i - T). \quad (3.55)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$T_i = \frac{\delta_{ei} v_{ei} T_e + v_{im} T}{\delta_{ei} v_{ei} + v_{im}}. \quad (3.56)$$

Отсюда следует, что температура ионов T_i заключена между температурой электронов T_e и температурой нейтральных молекул T . В частности, если $v_{im} \gg \delta_{ei} v_{ei}$, то T_i близка к T :

$$T_i = T + \Delta T_i; \quad \Delta T_i = \frac{\delta_{ei} v_{ei}}{v_{im}} (T_e - T). \quad (3.56a)$$

Определенная уравнениями (3.54), (3.55) зависимость температур электронов и ионов от амплитуды поля E_0 имеет в основном монотонно растущий вид (типа изображенного на рис. 3.1). Возможен, однако, и S-образный характер кривых. Последний случай осуществляется при низкой частоте ω и достаточно высокой степени ионизации плазмы. Действительно, примем для простоты, что δ_{em} , v_{em} и v_{im} не зависят от температур электронов и ионов. Тогда температура ионов определена формулой (3.56). Подставляя это выражение в (3.54),

получаем:

$$\frac{e^2 E_0^2}{3m} = (T_e - T) \left[\frac{\delta_{ei} v_{ei} v_{im}}{\delta_{ei} v_{ei} + v_{im}} + \delta_{em} v_{em} \right] \frac{\omega^2 + (v_{ei} + v_{em})^2}{v_{ei} + v_{em}}. \quad (3.57)$$

Учитывая, что $v_{ei}(T_e) = v_{ei}(T) (T_e/T)^{-3/2}$ (см. (3.7)), находим отсюда, что при достаточно высокой степени ионизации плазмы (когда $\delta_{ei} v_{ei}(T) \gg v_{im}$, $v_{ei}(T) \gg v_{em}$) зависимость температуры электронов от амплитуды поля действительно S-образна. При этом в низкотемпературном состоянии при $\omega \ll v_{ei}$, $v_{ei} \gg v_{em}$, $\delta_{ei} v_{ei} \gg v_{im}$ температура T_e определена уравнением

$$\left(\frac{T_e}{T} - 1 \right) \left(\frac{T}{T_e} \right)^{3/2} = \frac{e^2 E_0^2}{3mT (v_{im} + \delta_{em} v_{em}) v_{ei}(T)}. \quad (3.58)$$

Приравнявая, как и выше, нулю производную $\frac{dE_0^2}{d(T_e/T)}$, находим критическое значение температуры электронов и амплитуды электрического поля, при которых низкотемпературное состояние становится неустойчивым:

$$T_e = 3T; \quad E_{k1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{mT}{e^2} (v_{im} + \delta_{em} v_{em}) v_{ei}(T)}. \quad (3.59)$$

Температура ионов в низкотемпературном состоянии близка к температуре электронов. В высокотемпературном состоянии она значительно ниже, чем T_e . При этом с ростом E_0 температура ионов убывает, стремясь при больших значениях E_0 к температуре нейтралов. В то же время температура электронов растет пропорционально E_0^2 .

Отметим в заключение, что в настоящем разделе предполагалось, что для ионов, как и для электронов, частота столкновений зависит лишь от температуры (т. е. от хаотической скорости) и не зависит в первом приближении от средней направленной скорости v_i . В случае электронов это было обусловлено малостью δ — доли средней энергии, теряемой электроном при одном соударении (см. (3.31)). Для ионов доля теряемой энергии не мала. Однако благодаря большой массе иона его направленная скорость в электрическом поле невелика. В то же время хаотическая скорость ионов растет с ростом амплитуды поля E_0 из-за нагрева ионов при столкновениях с электронами. Благодаря этому указанное предположение $|v_i| \ll v_{Ti}$ в переменном поле оказывается справедливым при выполнении условия (3.50), а в постоянном поле — при $E < E_c$ (3.41), т. е. в тех же условиях, что и для электронов. При невыполнении условия $E < E_c$ зависимость частоты соударений от направленной скорости ионов в постоянном поле становится суще-

ственной; что приводит к явлению «убегания» ионов [35, 36]. Такой же эффект в магнитном поле возникает при гиромагнитном резонансе для ионов ($\omega = \Omega_H$).

§ 4. Неоднородное электрическое поле в плазме

4.1. Основные уравнения.

Рассмотрим неоднородное по амплитуде переменное электрическое поле в плазме. Электрическое поле нагревает плазму. Распределение температур электронов и ионов в таком поле становится неоднородным. Благодаря этому возникает градиент давления, который приводит к появлению потоков частиц, а в конечном счете и к возникновению неоднородного распределения концентраций электронов и ионов. Для описания этих процессов естественно воспользоваться макроскопическими уравнениями переноса для концентраций и температур электронов и ионов:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_e = q, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_i = q, \quad (4.2)$$

$$N_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + \mathbf{j}_e \nabla T_e + \operatorname{div} \mathbf{g}_e = R_e, \quad (4.3)$$

$$N_i \frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{j}_i \nabla T_i + \operatorname{div} \mathbf{g}_i = R_i. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.1)–(4.4), как и уравнения (3.17), (3.51), рассматривавшиеся в предыдущем параграфе, являются фактически уравнениями баланса, выражающими законы сохранения числа частиц (электронов и ионов) и их энергии. Здесь $q = q_i - q_r$ — число пар электронов и ионов, образующихся за счет ионизации (q_i) и исчезающих за счет объемной рекомбинации (q_r) в 1 см^3 в 1 сек ; $3/2 R_e$ и $3/2 R_i$ — количество энергии, получаемой и теряемой электронами и ионами в 1 см^3 в 1 сек . При наличии неоднородности возникают и потоки, переносящие частицы и энергию. В уравнениях (4.1)–(4.4) \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_i — плотности потоков электронов и ионов, \mathbf{g}_e и \mathbf{g}_i — потоки тепла; отношение теплоемкостей c_p/c_v принято для ионов, как и для электронов, равным единице.

Важно, что при появлении неоднородности в плазме возникают и связанные с ней электрические и магнитные поля. Поэтому уравнения (4.1)–(4.4) должны быть дополнены уравнениями Максвелла для поля. Примем, что давление электронно-ионной компоненты плазмы много меньше плотности энергии внешнего магнитного поля:

$$(N_e T_e + N_i T_i) \ll H^2/8\pi \quad (4.5)$$

и что скорость распространения возмущений меньше альфвеновской скорости. Тогда возмущениями магнитного поля можно пренебречь. Электрическое поле E_c , возникающее из-за наличия неоднородности в плазме, определяется при этом уравнением Пуассона:

$$\nabla E_c = -4\pi e(N_e - N_i). \quad (4.6)$$

Примем далее, что неоднородность слабая:

$$\begin{aligned} l \left| \frac{d}{dx} (E_0^2, N_e, N_i, T_e, T_i) \right| &\ll (E_0^2, N_e, N_i, T_e, T_i); \\ v^{-1} \left| \frac{d}{dt} (E_0^2, N_e, N_i, T_e, T_i) \right| &\ll (E_0^2, N_e, N_i, T_e, T_i), \end{aligned} \quad (4.7)$$

т. е. что амплитуда переменного электрического поля в плазме E_0 , концентрации и температуры электронов и ионов мало меняются на длине свободного пробега электронов и ионов l или за время их свободного пробега v^{-1} (*). В этом случае направленные скорости электронов и ионов малы в сравнении с их тепловыми скоростями. Плотности потоков электронов и ионов пропорциональны тогда градиентам концентрации и температуры. Поэтому они могут быть представлены в виде:

$$j_e = -\frac{\hat{\sigma}_e}{e} E_c - \hat{D}_e \nabla N_e - \hat{D}_{Te} \frac{N_e}{T_e} \nabla T_e - \hat{D}_{ei} \nabla N_i - \hat{D}_{Tei} \frac{N_i}{T_i} \nabla T_i, \quad (4.8)$$

$$j_i = \frac{\hat{\sigma}_i}{e} E_c - \hat{D}_i \nabla N_i - \hat{D}_{Ti} \frac{N_i}{T_i} \nabla T_i - \hat{D}_{ie} \nabla N_e - \hat{D}_{Tie} \frac{N_e}{T_e} \nabla T_e, \quad (4.9)$$

$$g_e = -\hat{\kappa}_e \nabla T_e - \hat{\kappa}_{ei} \nabla T_i - \hat{\beta}_e j_e - \hat{\beta}_{ei} j_i, \quad (4.10)$$

$$g_i = -\hat{\kappa}_i \nabla T_i - \hat{\kappa}_{ie} \nabla T_e - \hat{\beta}_{ie} j_e - \hat{\beta}_i j_i. \quad (4.11)$$

Здесь $\hat{\sigma}_e$, \hat{D}_e и \hat{D}_{Te} — тензоры проводимости, диффузии и термодиффузии для электронов, $\hat{\sigma}_i$, \hat{D}_i , \hat{D}_{Ti} — те же тензоры для ионов; \hat{D}_{ei} , \hat{D}_{Tei} , \hat{D}_{ie} , \hat{D}_{Tie} — соответствующие тензоры взаимной диффузии и термодиффузии; $\hat{\kappa}_e$, $\hat{\kappa}_i$ и $\hat{\kappa}_{ei}$, $\hat{\kappa}_{ie}$ — тензоры теплопроводности и взаимной теплопроводности для электронов и ионов; $\hat{\beta}_e$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ei}$, $\hat{\beta}_{ie}$ — тензоры термосилы.

При наличии, например, градиента концентрации ионов возникает поток ионов, который, благодаря столкновениям, увлекает за собой и электроны. Это обстоятельство и отражают

*) Следует подчеркнуть, что условия (4.7), по существу, определяют возможность использования в плазме системы уравнений (4.1)–(4.4). Если, например, амплитуда E_0 сильно меняется на длине пробега, $l \left| \frac{dE_0^2}{dx} \right| \gg E_0^2$, то существенную роль играет стрикционная сила (сила Миллера) [12, 13], не учтенная в уравнениях. В условиях (4.7) эта сила мала в сравнении с градиентом давления $\nabla(N_e T_e + N_i T_i)$.

члены взаимной диффузии, взаимной термодиффузии, взаимной теплопроводности *). Тензоры взаимной диффузии, однако, не независимы, а связаны с $\hat{\sigma}_e$ и \hat{D}_e , $\hat{\sigma}_i$ и \hat{D}_i соотношениями:

$$\hat{D}_{ei} = \frac{T_i}{T_e} \hat{D}_e - \frac{T_i}{e^2 N_e} \hat{\sigma}_e, \quad \hat{D}_{ie} = \frac{T_e}{T_i} \hat{D}_i - \frac{T_e}{e^2 N_i} \hat{\sigma}_i. \quad (4.12)$$

Вывод соотношений (4.12) приведен в § 22.

Коэффициенты переноса удовлетворяют соотношениям симметрии Онзагера (см., например, [37], § 122). Так, в отсутствие магнитного поля при $T_e = T_i = T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_e}{\partial T} &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial N_e} (N_e D_{Te} + N_i D_{Tei}), & \frac{\partial D_{ei}}{\partial T} &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial N_i} (N_e D_{Te} + N_i D_{Tei}), \\ \frac{\partial D_e}{\partial N_i} &= \frac{\partial D_{ei}}{\partial N_e}, & \frac{\partial D_i}{\partial N_e} &= \frac{\partial D_{ie}}{\partial N_i}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial N_i} (N_i D_{Ti} + N_e D_{Tie}), \quad \frac{\partial D_{ie}}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial N_e} (N_i D_{Ti} + N_e D_{Tie}).$$

При невысокой степени ионизации плазмы, когда определяющую роль играют соударения с нейтральными частицами, тензоры взаимной диффузии, термодиффузии и теплопроводности электронов и ионов несут существенны. Выражения (4.8) — (4.11) при этом упрощаются:

$$\mathbf{j}_e = -\frac{\hat{\sigma}_e}{e} \mathbf{E}_c - \hat{D}_e \nabla N_e - \hat{D}_{Te} \frac{N_e}{T_e} \nabla T_e, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{j}_i = \frac{\hat{\sigma}_i}{e} \mathbf{E}_c - \hat{D}_i \nabla N_i - \hat{D}_{Ti} \frac{N_i}{T_i} \nabla T_i, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{g}_e = -\hat{\kappa}_e \nabla T_e - \hat{\beta}_e \mathbf{j}_e, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{g}_i = -\hat{\kappa}_i \nabla T_i - \hat{\beta}_i \mathbf{j}_i. \quad (4.17)$$

Соотношения (4.12) переходят при этом в соотношения Эйнштейна:

$$\hat{\sigma}_e = \frac{e^2 N_e}{T_e} \hat{D}_e, \quad \hat{\sigma}_i = \frac{e^2 N_i}{T_i} \hat{D}_i, \quad (4.18)$$

*) Следует иметь в виду, что в реально интересующих нас случаях концентрации нейтральных молекул в плазме много больше концентрации заряженных частиц, $N_m \gg N_e, N_i$. Это справедливо фактически во всей ионосфере. При этом условии постоянства полного давления, необходимое для протекания рассматриваемых здесь диффузионных процессов, всегда обеспечивается малыми возмущениями концентрации молекул и поэтому движение молекул не сказывается на взаимной диффузии электронов и ионов. Если же плазма имеет высокую степень ионизации, $N_m \leq N_e, N_i$ (точнее, $T N_m \leq T_e N_e + T_i N_i$), то изменение давления существенно и необходимо учитывать движение нейтральных молекул [34].

Заметим также, что важная особенность низкотемпературной плазмы состоит в том, что сечение соударений между заряженными частицами на несколько порядков больше, чем сечение соударений с нейтралими. Благодаря этому взаимодействие заряженных частиц между собой, в частности их взаимное увлечение, существенно уже при низких степенях ионизации.

а соотношения Онзагера (4.13) принимают вид:

$$\frac{dD_e}{dT_e} = \frac{D_{Te}}{T_e}, \quad \frac{dD_i}{dT_i} = \frac{D_{Ti}}{T_i}. \quad (4.18a)$$

Выражения для тензоров переноса в элементарной теории приведены в следующем разделе. Строгий вывод уравнений (4.8)—(4.11) или (4.14)—(4.17) дается в кинетической теории. При этом выводятся и точные выражения для тензоров переноса (см. § 22).

Заметим, что при выполнении условий (4.7) можно пренебречь вторым членом в левой части уравнений (4.3), (4.4) ($j_e \nabla T_e$, $j_i \nabla T_i$), а также не учитывать нагрева плазмы полем \mathbf{E}_c . Система уравнений (4.1)—(4.4), (4.8)—(4.11) становится при этом квазилинейной.

Упрощение исходных уравнений. Перейдем теперь к упрощению системы уравнений (4.1)—(4.4), (4.6), (4.8)—(4.11). Первое важное упрощение связано с возможностью использования условия квазинейтральности. Дело в том, что при сравнительно больших масштабах неоднородностей, характерные размеры которых велики в сравнении с дебаевским радиусом $R_D = \sqrt{T_e/4\pi e^2 N}$, т. е. при выполнении условия

$$R_D |\nabla N| \ll N, \quad (4.19)$$

плазма квазинейтральна. Иначе говоря, концентрации электронов и ионов в ней приближенно равны друг другу:

$$N_e \approx N_i. \quad (4.20)$$

В этом случае уравнения непрерывности для электронов и ионов (4.1), (4.2) можно заменить одним уравнением для их совместной концентрации $N_e = N_i = N$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = q. \quad (4.21)$$

Очевидно, что это возможно лишь при выполнении дополнительного условия

$$\nabla j_e = \nabla j_i = \nabla \mathbf{j}. \quad (4.22)$$

Условие (4.22) может быть удовлетворено выбором продольного электрического поля \mathbf{E}_c . Следовательно, дополнительное условие (4.22) следует теперь рассматривать как уравнение, определяющее электрическое поле \mathbf{E}_c и заменяющее, таким образом, уравнение Пуассона (4.6). Последнее при заданном поле \mathbf{E}_c определяет разность в концентрациях ионов и электронов; необходимую для создания поля. В силу условия (4.19) эта разность составляет лишь малую часть от N порядка $\left(\frac{R_D |\nabla N|}{N}\right)^2$. С такой точностью выполняется, следовательно,

условие квазинейтральности (4.20). В ионосфере дебаевский радиус $R_D \sim (0,1 \div 1)$ см. Он всегда мал в сравнении с характерными размерами неоднородностей.

Второе упрощение связано с тем, что поток тепла определяется главным образом теплопроводностью $\kappa \nabla T$. Это также связано с условием квазинейтральности. Действительно, из уравнения (4.22) следует, что диффузионные потоки электронов j_e и ионов j_i одного порядка, хотя коэффициент диффузии для электронов D_e в $\sqrt{M/m}$ раз больше, чем коэффициент диффузии ионов. Причина этого — в действии электрического поля. Электронная неоднородность, благодаря большей подвижности электронов, стремится расплыться быстрее, чем ионная. Однако при этом нарушилась бы квазинейтральность. В результате возникает электрическое поле, заставляющее электроны и ионы диффундировать с одной скоростью. Условия квазинейтральности определяют, таким образом, характер диффузионного процесса в плазме, который идет, вообще говоря, со скоростью порядка скорости диффузии ионов (амбиполярная диффузия [38]). При диффузии поперек сильного магнитного поля тот же процесс затормаживает движение ионов, заставляя их идти со скоростью электронов (см., например, [227]).

Теплопроводность не связана условиями квазинейтральности и идет значительно быстрее (в $\sqrt{M/m}$ раз). Это означает, что в уравнениях (4.3), (4.4) и в выражениях для потока энергии (4.10), (4.11) главной является теплопроводность $\nabla(\kappa_e \nabla T_e)$. Остальными членами, описывающими процессы переноса, в формулах (4.10), (4.11) и в уравнениях (4.3), (4.4) можно в сравнении с нею пренебречь*).

Таким образом, при выполнении условий (4.5), (4.7), (4.19) распределение в неоднородной плазме плотности электронов и ионов, их температур и продольного электрического поля E_c описывается уравнениями:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = q, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_e = \operatorname{div} \mathbf{j}_i = \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{j}_e = -\frac{\hat{\sigma}_e}{e} \mathbf{E}_c - \hat{D}_{ee} \nabla N - \hat{D}_{Te} \frac{N}{T_e} \nabla T_e - \hat{D}_{Tei} \frac{N}{T_i} \nabla T_i, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{j}_i = \frac{\hat{\sigma}_i}{e} \mathbf{E}_c - \hat{D}_{ii} \nabla N - \hat{D}_{Ti} \frac{N}{T_i} \nabla T_i - \hat{D}_{Tie} \frac{N}{T_e} \nabla T_e, \quad (4.26)$$

*) Существенно также, что правая часть уравнений (4.1), (4.2) медленно изменяется во времени. Это изменение характеризуется временем жизни электрона, которое обычно много больше, чем, например, время релаксации температуры $1/\delta\nu$.

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{\nabla(\hat{\kappa}_e \nabla T_e)}{N} + \frac{2}{3N} (\mathbf{E} \hat{\sigma}_{e\omega} \mathbf{E}) - \delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) - \delta_{em} v_{em} (T_e - T_m) + \frac{2}{3N} Q, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\nabla(\hat{\kappa}_i \nabla T_i)}{N} + \frac{2}{3N} (\mathbf{E} \hat{\sigma}_{i\omega} \mathbf{E}) - \delta_{ei} v_{ei} (T_i - T_e) - v_{im} (T_i - T_m). \quad (4.28)$$

В выражениях для потоков \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_i учтено, что $N_e = N_i = N$.
Здесь

$$\hat{D}_{ee} = \hat{D}_e \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) - \frac{T_i}{e^2 N} \hat{\sigma}_e, \quad (4.29)$$

$$\hat{D}_{ii} = \hat{D}_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) - \frac{T_e}{e^2 N} \hat{\sigma}_i. \quad (4.30)$$

В этих формулах тензоры \hat{D}_{ei} и \hat{D}_{ie} исключены с помощью соотношений (4.12). Далее, \mathbf{E} — переменное электрическое поле частоты ω , вызывающее нагрев плазмы и создающее в ней неоднородность, $\hat{\sigma}_\omega$ — проводимость плазмы на частоте ω . Правые части уравнений (4.27), (4.28) фактически уже рассматривались в предыдущем параграфе; Q/N — энергия, сообщаемая в среднем электрону плазмы в единицу времени другими источниками нагрева (например, энергия фотоэлектронов, идущая на нагрев ионосферы); δ_{im} положено равным единице.

В отсутствие магнитного поля нагревом ионов и ионной теплопроводностью в уравнении (4.28) можно пренебречь. При наличии в плазме магнитного поля то же справедливо для переменного электрического поля \mathbf{E} достаточно высокой частоты (3.50), а также для неоднородностей, имеющих достаточно большой поперечный размер R_\perp :

$$\kappa_{i\perp} / NR_\perp^2 (\delta_{ei} v_{ei} + v_{im}) \ll 1. \quad (4.31)$$

При выполнении условий (4.31), (3.50) уравнение (4.28) для температуры ионов совпадает с уравнением (3.53).

Электрическое поле. Дальнейшее упрощение уравнений связано с возможностью прямого определения и исключения стационарного (или квазистационарного) потенциального электрического поля \mathbf{E}_c . Это поле определяется уравнением (4.24). Примем вначале, что токи \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_i (4.25), (4.26) могут быть представлены в градиентной форме:

$$\mathbf{j}_e = \nabla \psi_e, \quad \mathbf{j}_i = \nabla \psi_i. \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, что

$$\text{rot } \mathbf{j}_e = \text{rot } \mathbf{j}_i = 0. \quad (4.33)$$

Решение уравнения (4.24) при граничных условиях $\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_i = 0$ при $r \rightarrow \infty$ с учетом (4.33), очевидно, имеет вид:

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_i. \quad (4.34)$$

Подставляя в это равенство выражения (4.25), (4.26) для токов j_e , j_i , определяем электрическое поле \mathbf{E}_c . Так, при $\mathbf{H} = 0$:

$$\mathbf{E}_c = -\frac{e}{\sigma_e + \sigma_i} \times \left[(D_{ee} - D_{ii}) \nabla N + \frac{N}{T_e} (D_{Te} - D_{Tie}) \nabla T_e + \frac{N}{T_i} (D_{Tei} - D_{Ti}) \nabla T_i \right]. \quad (4.35)$$

Исключая теперь с помощью (4.35) электрическое поле из уравнения (4.23), переписываем его в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} - \nabla \left\{ D_a \nabla N + \frac{N}{T_e} D_{Tea} \nabla T_e + \frac{N}{T_i} D_{Tia} \nabla T_i \right\} &= q; \quad (4.36) \\ D_a &= \frac{\sigma_e D_{ii} + \sigma_i D_{ee}}{\sigma_e + \sigma_i}, \quad D_{Tea} = \frac{\sigma_e D_{Tie} + \sigma_i D_{Te}}{\sigma_e + \sigma_i}, \\ D_{Tia} &= \frac{\sigma_e D_{Ti} + \sigma_i D_{Tei}}{\sigma_e + \sigma_i}, \quad D_{Tea} = k_{Tea} D_a, \quad D_{Tia} = k_{Tia} D_a. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Здесь D_a — коэффициент амбиполярной диффузии плазмы с учетом условия квазинейтральности (4.19), (4.20) [38]. Соответственно D_{Tea} , D_{Tia} — электронный и ионный коэффициенты амбиполярной термодиффузии, k_{Tea} , k_{Tia} — амбиполярные термодиффузионные отношения.

Уравнения (4.36), (4.27), (3.53) составляют при выполнении условия (4.32) замкнутую систему уравнений, описывающих распределение концентрации электронов и ионов и их температур в неоднородной и нестационарной квазинейтральной плазме при $\mathbf{H} = 0$. Здесь сделаны все возможные упрощения.

В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{H} = 0$) условия (4.32) часто выполняются. Например, при $T_e = T_i = T$ токи j_e и j_i можно представить в форме:

$$\mathbf{j}_e = -\frac{\sigma_e}{e} \mathbf{E}_c + \nabla \chi_e(N_e, N_i, T), \quad \mathbf{j}_i = \frac{\sigma_i}{e} \mathbf{E}_c + \nabla \chi_i(N_e, N_i, T). \quad (4.38)$$

Действительно, из (4.8), (4.9) видно, что кинетические коэффициенты

$$D_e = \frac{\partial \chi_e}{\partial N_e}, \quad D_{ei} = \frac{\partial \chi_e}{\partial N_i}, \quad \frac{N_e D_{Te} + N_i D_{Ti}}{T} = \frac{\partial \chi_e}{\partial T} \quad \text{и т. д.,}$$

а условия типа $\frac{\partial^2 \chi_e}{\partial N_e \partial T} = \frac{\partial^2 \chi_e}{\partial T \partial N_e}$, необходимые для записи токов в форме (4.38), являются как раз соотношениями Онзагера (4.13). Рассматривая теперь $\text{rot } \mathbf{j}_e$ и $\text{rot } \mathbf{j}_i$, находим, что условия (4.32) всегда выполняются, если $\nabla N_e \parallel \nabla T_e \parallel \nabla T_i$.

Заметим также, что условия (4.32) выполнены для одномерных неоднородностей (когда все величины зависят лишь

от одной переменной), для сферически и цилиндрически симметричных неоднородностей и т. д. Напротив, при наличии магнитного поля условия (4.32), а следовательно и равенство (4.34), позволяющее прямо исключить из уравнений электрическое поле \mathbf{E}_c , справедливы только в специальных случаях: неоднородность строго вдоль или строго поперек магнитного поля, одномерная неоднородность (все величины зависят лишь от одной переменной). В общем же случае вихревые токи не равны нулю и уравнение (4.24) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно потенциала φ_c ($\mathbf{E}_c = \nabla\varphi_c$). Возможность возникновения вихревых токов составляет важную особенность амбиполярной диффузии плазмы в магнитном поле [34].

4.2. Кинетические коэффициенты.

Элементарная теория. Для приближенного вычисления тензоров проводимости, диффузии и термодиффузии в неоднородной плазме можно воспользоваться элементарной теорией (см. § 3). В элементарной теории направленная скорость «среднего» электрона в однородной плазме описывается уравнением (3.8). Учтем, что в неоднородной плазме на электроны действует еще и сила, вызванная наличием градиента электронного давления p_e . Уравнение (3.8) в слабо ионизованной плазме в отсутствие магнитного поля принимает тогда вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - m\nu_e\mathbf{v}_e - \frac{1}{N}\nabla p_e. \quad (4.39)$$

В стационарных условиях ($d\mathbf{v}_e/dt = 0$) скорость \mathbf{v}_e равна:

$$\mathbf{v}_e = -\frac{e}{m\nu_e}\mathbf{E} - \frac{1}{m\nu_e N}\nabla p_e.$$

Учитывая, что $\mathbf{j}_e = N\mathbf{v}_e$ и $p_e = NT_e$, находим отсюда:

$$\mathbf{j}_e = -\frac{eN}{m\nu_e}\mathbf{E} - \frac{T_e}{m\nu_e}\nabla N - \frac{N}{m\nu_e}\nabla T_e.$$

Сравнивая это выражение с (4.14), приходим к следующим выражениям для коэффициентов переноса:

$$\sigma_e = \frac{e^2 N}{m\nu_e}, \quad D_e = \frac{T_e}{m\nu_e}, \quad D_{Te} = \frac{T_e}{m\nu_e}. \quad (4.40)$$

Здесь ν_e — частота соударений электронов с молекулами.

Из (4.40) видно, что соотношения симметрии (4.18а) для коэффициентов D_e и D_{Te} удовлетворяются только в том случае, когда ν_e не зависит от T_e . Это вполне понятно, так как соотношения Онзагера — результат точной кинетики, а элементарная теория — приближенная, она справедлива лишь с точностью до множителя порядка единицы. Поэтому при

$v_e = v_e(T_e)$ правильнее записать выражение для D_{Te} в виде

$$D_{Te} = k_{Te} \frac{T_e}{m v_e} = k_{Te} D_e. \quad (4.41)$$

Здесь k_{Te} — термодиффузионное отношение; в элементарной теории $k_{Te} = 1$. Из соотношений (4.18а) следует, что

$$k_{Te} = 1 - \frac{T_e}{v_e} \frac{dv_e}{dT_e}. \quad (4.42)$$

Строгий расчет с помощью кинетической теории подтверждает этот результат (см. § 22).

При наличии магнитного поля из уравнения

$$-e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] - m v_e \mathbf{v}_e - \frac{1}{N} \nabla p_e = 0$$

находится стационарная скорость электронов (ср. (3.15)):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e = \frac{e}{m(\omega_H^2 + v_e^2)} \left\{ -v_e \mathbf{E} - \frac{\omega_H^2}{v_e} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{E}\mathbf{H})}{H^2} + \omega_H \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H} \right\} + \\ + \frac{1}{mN(\omega_H^2 + v_e^2)} \left\{ -v_e \nabla p - \frac{\omega_H^2}{v_e} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H}\nabla p)}{H^2} + \omega_H \frac{[\nabla p \mathbf{H}]}{H} \right\}. \end{aligned}$$

Поток $\mathbf{j}_e = N \mathbf{v}_e$. Сравнивая это выражение для потока с (4.14), находим компоненты тензоров $\hat{\sigma}_e$, \hat{D}_e , \hat{D}_{Te} . Продольные компоненты совпадают с (4.40). Поперечные компоненты тензора проводимости:

$$\sigma_{exx} = \sigma_{eyy} = \frac{e^2 N v_e}{m(\omega_H^2 + v_e^2)}, \quad \sigma_{exy} = -\sigma_{eyx} = \frac{-e^2 N \omega_H}{m(\omega_H^2 + v_e^2)}. \quad (4.43)$$

Компоненты тензора \hat{D}_e связаны с соответствующими компонентами тензора $\hat{\sigma}_e$ соотношениями Эйнштейна (4.18). Тензор \hat{D}_{Te} в элементарной теории совпадает с \hat{D}_e .

Точно такие же выражения получаются и для тензоров ионного переноса в слабо ионизованной плазме $\hat{\sigma}_i$, \hat{D}_i , \hat{D}_{Ti} , — нужно только заменить в (4.40), (4.43) m , $-e$, T_e , v_{em} , ω_H на соответствующие величины для ионов: M , e , T_i , v_{im} , Ω_H .

При произвольной степени ионизации плазмы необходимо учитывать как соударения с нейтральными молекулами, так и соударения с ионами. Уравнения (3.46) для скоростей электронов \mathbf{v}_e и ионов \mathbf{v}_i в стационарных условиях при учете градиентов давления ∇p_e и ∇p_i принимают вид:

$$\begin{aligned} -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] - m v_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - m v_{em} \mathbf{v}_e - \frac{1}{N} \nabla p_e = 0, \\ e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] - m v_{ei} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - M v_{im} \mathbf{v}_i - \frac{1}{N} \nabla p_i = 0. \end{aligned}$$

Разрешая их, можно найти тензоры проводимости, диффузии, термодиффузии. Тензоры электронной и ионной проводимости по-прежнему даны формулами (3.49). Тензор диффузии (4.29), (4.30) (см. [34, 39]):

$$\left. \begin{aligned} (D_{ee})_{xx} &= (D_{ee})_{yy} = \frac{B_1 T_e + B_2 T_i}{mA}, \\ (D_{ee})_{xy} &= - (D_{ee})_{yx} = - \frac{\omega_H (B_3 T_e + B_4 T_i)}{mA}, \\ (D_{ee})_{zz} &= \frac{T_e + B_4 (T_e + T_i)}{mv_e}, \quad (D_{ii})_{zz} = \frac{v_{ei} T_e + v_e T_i}{Mv_{im} v_e}, \\ (D_{ii})_{xx} &= (D_{ii})_{yy} = \frac{B_7 T_e + B_6 T_i}{MAv_{im}}, \\ (D_{ii})_{xy} &= - (D_{ii})_{yx} = - \frac{\Omega_H (T_e v_{ei} - B_5 T_i)}{mv_{im} A}, \end{aligned} \right\} (4.44)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= v_e \left(1 + \frac{\Omega_H^2}{v_{im}^2} \right) + \frac{mv_{ei}^2}{Mv_{im}}, \quad B_2 = v_{ei} \left(\frac{\Omega_H^2}{v_{im}^2} + \frac{mv_{ei}}{Mv_{im}} \right), \\ B_3 &= 1 + \frac{\Omega_H^2}{v_{im}^2} + 2 \frac{mv_{ei}}{Mv_{im}}, \quad B_4 = \frac{mv_{ei}}{Mv_{im}}, \quad B_5 = \frac{m(\omega_H^2 + v_e^2 - v_{ei}^2)}{Mv_{im}}, \\ B_6 &= v_{ei}^2 + (1 + B_4)(\omega_H^2 + v_e^2 - v_{ei}^2), \quad B_7 = v_e v_{ei} + (v_{ei} + 2v_{em}) B_5, \\ A &= v_{ei}^2 + (\omega_H^2 + v_e^2 - v_{ei}^2) B_3, \quad v_e = v_{ei} + v_{em}. \end{aligned}$$

Тензоры термодиффузии и взаимной термодиффузии для электронов и ионов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (D_{Te})_{xx} &= (D_{Te})_{yy} = \frac{B_1 T_e}{mA}, \quad (D_{Te})_{xy} = - (D_{Te})_{yx} = - \frac{\omega_H B_3 T_e}{mA}, \\ (D_{Te})_{zz} &= \frac{(1 + B_4) T_e}{mv_e}, \quad (D_{Tei})_{zz} = \frac{B_4 T_i}{mv_e}, \\ (D_{Tei})_{xx} &= (D_{Tei})_{yy} = \frac{B_2 T_i}{mA}, \quad (D_{Tei})_{xy} = - (D_{Tei})_{yx} = - \frac{\omega_H B_4 T_i}{mA}, \\ (D_{Ti})_{xx} &= (D_{Ti})_{yy} = \frac{B_6 T_i}{MAv_{im}}, \quad (D_{Ti})_{xy} = - (D_{Ti})_{yx} = \frac{\Omega_H T_i B_5}{MAv_{im}}, \\ (D_{Ti})_{zz} &= \frac{T_i}{Mv_{im}}, \quad (D_{Tie})_{zz} = \frac{T_e}{Mv_{im}}, \\ (D_{Tie})_{xx} &= (D_{Tie})_{yy} = \frac{B_7 T_e}{MAv_{im}}, \quad (D_{Tie})_{yx} = - \frac{\Omega_H T_e v_{ei}}{MAv_{im}}. \end{aligned} \right\} (4.45)$$

Тензоры теплопроводности в элементарном приближении имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (\chi_e)_{xx} = (\chi_e)_{yy} &= \frac{NT_e v_e}{m(\omega_H^2 + v_e^2)}, & (\chi_e)_{zz} &= \frac{NT_e}{mv_e}, \\ (\chi_e)_{xy} = -(\chi_e)_{yx} &= \frac{NT_e}{m} \frac{\omega_H}{\omega_H^2 + v_e^2}, & (\chi_i)_{zz} &= \frac{NT_i}{Mv_i}, \\ (\chi_i)_{xx} = (\chi_i)_{yy} &= \frac{NT_i v_i}{M(\Omega_H^2 + v_i^2)}, & (\chi_i)_{xy} = -(\chi_i)_{yx} &= \frac{NT_i \Omega_H}{M(\Omega_H^2 + v_i^2)}, \\ v_i &= v_{im} + v_{ii}, & v_e &= v_{ei} + v_{em}. \end{aligned} \right\} (4.46)$$

Полностью ионизованная плазма. Как видно из формул (4.44), коэффициенты продольной диффузии $(D_{ee})_{zz}$, $(D_{ii})_{zz}$ стремятся к бесконечности при $v_{im}, v_{em} \rightarrow 0$. Иначе говоря, в полностью ионизованной плазме продольная амбиполярная диффузия невозможна. Причина этого в том, что для диффузии необходимо существование полного давления, $\nabla p = 0$ [24]. Если плазма частично ионизована, то это условие обеспечивается за счет возмущения нейтральных молекул: $\nabla p = \nabla(p_e + p_i) + \nabla p_m = 0$. В полностью ионизованной плазме $\nabla p_m = 0$, следовательно $\nabla(p_e + p_i) = T_e \nabla N_e + T_i \nabla N_i = 0$. Учитывая, что в силу квазинейтральности $\nabla N_e = \nabla N_i = \nabla N$, видим, что условие $\nabla p = 0$ выполнено лишь при $\nabla N = 0$.

Вместо уравнений (4.25), (4.26) в полностью ионизованной плазме удобнее пользоваться уравнениями:

$$\begin{aligned} -\nabla(N_e T_e) - eN_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{cN_e} [\mathbf{j}_e \mathbf{H}] \right) + \mathbf{R} &= 0, \\ -\nabla(N_i T_i) + eN_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{cN_i} [\mathbf{j}_i \mathbf{H}] \right) - \mathbf{R} &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь \mathbf{R} — сила трения электронов и ионов, пропорциональная разности их скоростей $\frac{\mathbf{j}_e}{N_e} - \frac{\mathbf{j}_i}{N_i}$. Уравнения (4.47) вырождены: складывая их, приходим к соотношению (при $N_e = N_i$):

$$\frac{\partial}{\partial z} (N_e T_e + N_i T_i) = 0. \quad (4.48)$$

Ось z направлена параллельно \mathbf{H} . Это условие должно выполняться независимо от величин $\mathbf{j}_e, \mathbf{j}_i$.

В сильно замагниченной плазме ($\omega_H \gg v_{ei}$) (какой, в частности, является ионосфера в области F -слоя) выражения для силы трения и коэффициентов переноса имеют вид:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{mv_{ei}} \left(\frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{1,96} + \mathbf{j}_{\perp} \right) - 0,71 N \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{N v_{ei}}{\omega_H} \left[\frac{H \nabla T_e}{H} \right]. \quad (4.49)$$

Знаки параллельности и перпендикулярности в индексах означают компоненты вдоль и поперек магнитного поля, ν_{ei} — эффективная частота соударений электронов с ионами (21.11). Далее:

$$\mathbf{g}_e = 0,47 T_e \mathbf{j}_{\parallel} + \frac{T_e \nu_{ei}}{\omega_H H} [\mathbf{H} \mathbf{j}_{\perp}] - \kappa_{e\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{3} \frac{N T_e}{m H \omega_H} [\mathbf{H} \nabla T_e], \quad (4.50)$$

$$\kappa_{e\parallel} = 2,08 \frac{N T_e}{m \nu_{ei}}, \quad \kappa_{e\perp} = 3,1 \frac{N T_e \nu_{ei}}{m \omega_H^2}.$$

Поток тепла ионов

$$\mathbf{g}_i = -\kappa_{i\parallel} \nabla T_i - \kappa_{i\perp} \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{3} \frac{N T_i}{M \Omega_H H} [\mathbf{H} \nabla T_i], \quad (4.51)$$

$$\kappa_{i\parallel} = 2,6 \frac{N T_i}{M \nu_{ii}}, \quad \kappa_{i\perp} = \frac{4}{3} \frac{N T_i \nu_{ii}}{M \Omega_H^2}. \quad (4.52)$$

Здесь ω_H , Ω_H — гиромагнитные частоты для электронов и ионов, ν_{ii} — частота соударений между ионами.

Приведенные в этом разделе коэффициенты переноса рассчитаны в кинетической теории [40]. Видно, что они отличаются от соответствующих элементарных выражений множителями порядка единицы.

4.3. Распределение концентрации и температур в плазме.

Рассмотрим возмущение плазмы, вызываемое стационарным неоднородным по амплитуде переменным электрическим полем $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$. В отсутствие магнитного поля в стационарных условиях уравнения (4.36), (4.27), (3.53) принимают вид:

$$-\nabla_{\xi} \left[\gamma \left(\nabla_{\xi} N + \frac{N}{T_e} k_{Tea} \nabla_{\xi} T_e + \frac{N}{T_i} k_{Tia} \nabla_{\xi} T_i \right) \right] = \tau_N (q_i - q_r), \quad (4.53)$$

$$\frac{N_0}{N} \nabla_{\xi} (\alpha \nabla_{\xi} T_e) = \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E_p} \right)^2 T_{e0} - \frac{\delta_{ei} \nu_{ei}}{\delta \nu} (T_e - T_i) - \frac{\delta_{em} \nu_{em}}{\delta \nu} (T_e - T) + \frac{2}{3} \frac{Q}{N \delta \nu}, \quad (4.54)$$

$$\nu_{im} (T_i - T) - \delta_{ei} \nu_{ei} (T_e - T_i) = 0. \quad (4.55)$$

Здесь мы перешли к безразмерным переменным

$$\xi = \mathbf{r} / R_0, \quad (4.56)$$

где R_0 — характерный размер неоднородности в плазме, создаваемой переменным полем \mathbf{E}_0 ; $\delta \nu = \delta_{ei} \nu_{ei} + \delta_{em} (T_{e0}) \nu_{em} (T_{e0})$; T_{e0} , T_{i0} — температуры электронов и ионов в отсутствие поля \mathbf{E}_0 ; τ_N — среднее время жизни электрона, определяющееся процессами рекомбинации,

$$\tau_N = \left(\frac{dq_r}{dN} \right)^{-1}, \quad (4.57)$$

q_r — число электронов, исчезающих в 1 см^3 в 1 сек за счет объемной рекомбинации. Далее, γ и α — характерные безразмерные параметры:

$$\gamma = \frac{D_a \tau_N}{R_0^2} = \left(\frac{L_N}{R_0} \right)^2, \quad L_N = \sqrt{D_a \tau_N}; \quad (4.58)$$

$$\alpha = \frac{\kappa_e}{N_0 \delta v R_0^2} = \left(\frac{L_T}{R_0} \right)^2, \quad L_T = \sqrt{\frac{\kappa_e}{N_0 \delta v}}; \quad (4.59)$$

L_N и L_T — характерные пространственные длины, определяющие роль неоднородности концентрации и температуры.

Можно составить еще одно характерное безразмерное отношение:

$$\eta = \frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{L_T}{L_N} \right)^2. \quad (4.60)$$

Перейдем теперь к анализу решений системы уравнений (4.53) — (4.55). Рассмотрим следующие случаи.

1. Неоднородность большого размера:

$$R_0 \gg L_N, \quad R_0 \gg L_T, \quad \text{или} \quad \gamma \ll 1, \quad \alpha \ll 1. \quad (4.61)$$

Решение уравнений (4.53) — (4.55) находится разложением по степеням параметров α, γ . В первом приближении левой частью уравнений (4.53), (4.54) можно пренебречь, и уравнения (4.53) — (4.55) сводятся к уравнениям однородной плазмы, рассматривавшимся в предыдущем параграфе. Таким образом, система (4.53) — (4.55) в условиях (4.61) оказывается локально-однородной. В следующем приближении из уравнений (4.53) — (4.55) нетрудно найти поправку к локально-однородному решению; она мала (порядка α, γ).

2. Неоднородность среднего размера:

$$L_T \ll R_0 \ll L_N, \quad \text{или} \quad \gamma \gg 1, \quad \alpha \ll 1. \quad (4.62)$$

Такой случай возможен лишь при $\eta \ll 1$ (4.60). Температура плазмы оказывается по-прежнему локально-однородной. Распределение концентрации, напротив, определяется процессами переноса. Разлагая решение уравнения (4.53) в ряд по степеням $1/\gamma$, находим, что в первом приближении

$$\nabla N + \frac{N}{T_e} k_{Tea} \nabla T_e + \frac{N}{T_i} k_{Tia} \nabla T_i = 0, \quad (4.63)$$

где, согласно (4.37),

$$k_{Tea} = \frac{\sigma_e D_{Te} + \sigma_i D_{Te}}{\sigma_e D_{ii} + \sigma_i D_{ee}}, \quad k_{Tia} = \frac{\sigma_e D_{Ti} + \sigma_i D_{Te}}{\sigma_e D_{ii} + \sigma_i D_{ee}}. \quad (4.64)$$

Это уравнение определяет гидродинамически равновесное распределение плазмы ($j = 0$).

В частности, в полностью ионизованной плазме, как следует непосредственно из (4.48), условие гидродинамического равновесия (4.63) имеет вид:

$$N = \frac{N_0 (T_{e0} + T_{i0})}{T_e + T_i}. \quad (4.65)$$

Иначе говоря, в полностью ионизованной плазме условием гидродинамического равновесия является постоянство полного давления электронов и ионов: $p = N(T_e + T_i) = \text{const}$.

При низкой степени ионизации плазмы, когда несущественны соударения электронов с ионами, взаимной термодиффузией в выражениях (4.64) можно пренебречь ($D_{Tei}, D_{Tie} \rightarrow 0$). Используя тогда соотношения Эйнштейна (4.18), переписываем (4.63) в виде:

$$\nabla N + \frac{N k_{Te}}{T_e + T_i} \nabla T_e + \frac{N k_{Ti}}{T_e + T_i} \nabla T_i = 0; \quad k_{Te} = \frac{D_{Te}}{D_e}, \quad k_{Ti} = \frac{D_{Ti}}{D_i}. \quad (4.66)$$

Если коэффициенты термодиффузии у электронов и ионов одинаковы,

$$k_{Te} = k_{Ti} = k, \quad (4.67)$$

то уравнение гидродинамического равновесия принимает вид [41, 198]:

$$N = N_0 \left(\frac{T_{e0} + T_{i0}}{T_e + T_i} \right)^k. \quad (4.68)$$

В частности, для соударений упругих шариков $k = 1/2$ (см. § 22).

Таким образом, условия гидродинамического равновесия приводят к постоянству общего давления ионизованной компоненты $N(T_e + T_i)$ только в полностью ионизованной плазме. В общем случае давление ионов и электронов не постоянно: избыток давления уравнивается действием термосилы, связанной с термодиффузионным переносом [41].

Итак, в случае неоднородности среднего размера (4.62) концентрация плазмы в первом приближении определена условием гидродинамического равновесия (4.63), а температура локально-однородна. Следующее приближение приводит к поправкам порядка α, γ^{-1} .

3. Неоднородность малого размера:

$$R_0 \ll L_N, \quad R_0 \ll L_T. \quad (4.69)$$

В этом случае концентрация плазмы определяется по-прежнему условием гидродинамического равновесия, а температура электронов — уравнением теплопроводности (4.54). В основной зоне, возмущенной переменным полем $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, потери энергии электронов при соударениях в силу условия (4.69) несущественны и уравнение (4.54) принимает простой вид (оно записано здесь

в размерных переменных \mathbf{r}):

$$\nabla(\kappa \nabla T_e) = A \delta(\mathbf{r}), \quad (4.70)$$

где

$$A = -NT_{e0} \int \frac{E_0^2(\mathbf{r})}{E_p^2} d^3\mathbf{r}. \quad (4.71)$$

Учтем, что $\kappa = \kappa(T_e)$; в общем случае $\kappa(T_e) = \kappa[T_e, N(T_e), T_i(T_e)]$, где $N(T_e)$ и $T_i(T_e)$ определены уравнениями (4.55), (4.63).

Вводя поэтому $\lambda = \int \kappa(T_e) dT_e$, переписываем уравнение (4.70): $\Delta \lambda = A \delta(\mathbf{r})$ и находим его решение в виде:

$$\lambda = \int_{T_{e0}}^{T_e} \kappa dT_e = -\frac{A}{4\pi r}. \quad (4.72)$$

Это выражение справедливо при $r < L_T$; при больших значениях r возмущение температуры убывает экспоненциально (см. (5.36)).

Совершенно аналогична ситуация и в плазме, находящейся в постоянном магнитном поле \mathbf{H} . Те же длины L_T (4.59) и L_N (4.58) определяют здесь условия установления локально-однородного или же гидродинамически равновесного распределения плазмы. Причина состоит в том, что диффузия и теплопроводность в плазме вдоль магнитного поля не зависят от поля и определяются теми же выражениями, что и в изотропной плазме.

Поперечные компоненты тензоров теплопроводности электронов и ионов (4.46) с ростом H быстро убывают. Поэтому в сильно замагниченной плазме, если $\omega_H \gg v_e$, поперечная теплопроводность электронов несущественна и уравнение (4.54) для стационарной температуры электронов принимает вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x_{\parallel}} \left(\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x_{\parallel}} \right) &= \\ &= \frac{e^2 E_0^2(\mathbf{r}) v_e}{3m\omega^2} - \delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) - \delta_{em} v_{em} (T_e - T) + \frac{2Q}{3N}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Здесь x_{\parallel} — координата вдоль \mathbf{H} . Температура ионов при выполнении условия (4.31) по-прежнему определяется уравнением (4.55).

Уравнения для концентрации плазмы N и электрического поля E_c (4.23), (4.24) в стационарных условиях принимают вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_e = \operatorname{div} \mathbf{j}_i = q_i - q_r. \quad (4.74)$$

Потоки \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_i определены согласно (4.25), (4.26). Исключить поле E_c и свести эти уравнения к уравнениям амбиполярной диффузии (4.36), (4.53) в анизотропной плазме в общем случае нельзя.

Локально-однородное распределение N , справедливое при выполнении условий (4.61), определяется по-прежнему уравнением баланса ионизации $q_i = q_r$. Гидродинамически равновесное распределение, справедливое при условии (4.62), определяется уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_e = \operatorname{div} \mathbf{j}_i = 0. \quad (4.75)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда поперечный размер неоднородности поля R_{\perp} достаточно велик:

$$\frac{R_{\perp}^2 D_{i\parallel}}{(L_T^2 + R_{\parallel}^2) D_{i\perp}} \gg 1. \quad (4.76)$$

Здесь R_{\parallel} — продольный размер неоднородности, $D_{i\parallel}$ и $D_{i\perp}$ — коэффициенты продольной и поперечной диффузии ионов. В этом случае поперечная диффузия незначительна. Условие равновесия (4.75) переписывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\parallel}} j_{e\parallel} = \frac{\partial}{\partial x_{\parallel}} j_{i\parallel}, \quad j_{e\parallel} = j_{i\parallel}. \quad (4.77)$$

Здесь $j_{e\parallel}$ и $j_{i\parallel}$ — продольные компоненты токов. Уравнение (4.77) тождественно уравнению (4.34) в изотропной плазме. Электрическое поле поэтому определяется формулой (4.35), а условия равновесия (4.77) принимают вид простого уравнения (4.63). Таким образом, в условиях (4.76) гидродинамическое равновесие в плазме в магнитном поле определяется теми же выражениями, что и в изотропной плазме.

4.4. Дрейф электронов и ионов.

Выше предполагалось, что газ электронов и ионов в плазме покоится по отношению к постоянному магнитному полю \mathbf{H} . В реальных условиях часто имеется дрейф заряженных частиц относительно \mathbf{H} , вызванный, например, движением нейтрального газа, гравитационным полем, внешним электрическим полем, неоднородностью магнитного поля. Скорости дрейфа электронов \mathbf{v}_{e0} и ионов \mathbf{v}_{i0} в однородной плазме определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{e0} = \mathbf{v}_m - \frac{\hat{\sigma}_e}{eN_e} \left\{ \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_m \mathbf{H}] - \frac{mg}{e} \right\} - \\ - \frac{\hat{\sigma}_{HeT_e}}{2e^2N} \left\{ \frac{[\mathbf{H}, \nabla H]}{H^2} + \frac{[\mathbf{H}, (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H}]}{H^3} \right\}, \\ \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_m + \frac{\hat{\sigma}_i}{eN_i} \left\{ \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_m \mathbf{H}] + \frac{Mg}{e} \right\} + \\ + \frac{\hat{\sigma}_{HiT_i}}{2e^2N_i} \left\{ \frac{[\mathbf{H}, \nabla H]}{H^2} + \frac{[\mathbf{H}, (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H}]}{H^3} \right\}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Здесь v_m — скорость нейтральных молекул, E_0 — внешнее электрическое поле, g — укорение силы тяжести. Учитывая, что $v_0 = j/N$, выражения (4.78) можно получить непосредственно из (4.8), (4.9), подставляя вместо E_c эффективную силу, действующую на электроны и ионы [230, 231]. Тензоры $\hat{\sigma}_{He}$ и $\hat{\sigma}_{Hi}$ в приближении элементарной теории совпадают с тензорами $\hat{\sigma}_e$ и $\hat{\sigma}_i^*$.

Возмущение плазмы неоднородным электрическим полем при наличии дрейфа по-прежнему описывается уравнениями (4.1) — (4.4). Нужно только учесть, что дрейф вносит поправки в выражения для потоков (4.8) — (4.11): к плотности тока электронов и ионов добавляются члены $(Nv_0)_{ei}$, а к плотности потока энергии — члены $(Nv_0T)_{ei}$. Выражения для потоков принимают вид:

$$j_e = N_e v_{0e} - \frac{\hat{\sigma}_e}{e} E_c - \hat{D}_e \nabla N_e - \hat{D}_{Te} \frac{N_e}{T_e} \nabla T_e - \hat{D}_{ei} \nabla N_i - \hat{D}_{Tei} \frac{N_i}{T_i} \nabla T_i,$$

$$j_i = N_i v_{0i} + \frac{\hat{\sigma}_i}{e} E_c - \hat{D}_i \nabla N_i - \hat{D}_{Ti} \frac{N_i}{T_i} \nabla T_i - \hat{D}_{ie} \nabla N_e - \hat{D}_{Tie} \frac{N_e}{T_e} \nabla T_e,$$

$$(4.79)$$

$$g_e = N_e v_{0e} T_e - \hat{\kappa}_e \nabla T_e - \hat{\kappa}_{ei} \nabla T_i - \hat{\beta}_{eI} j_e - \hat{\beta}_{ei} j_i,$$

$$g_i = N_i v_{0i} T_i - \hat{\kappa}_i \nabla T_i - \hat{\kappa}_{ie} \nabla T_e - \hat{\beta}_{ie} j_e - \hat{\beta}_{iI} j_i.$$

Соответствующие изменения следует внести и в уравнения (4.23) — (4.28). Мы не будем здесь останавливаться на анализе решений этих уравнений (см. [34]). Отметим лишь, что дрейф слабо сказывается на структуре неоднородностей, если

$$R_{\perp} v_0^{-1} (D_a/R_{\parallel}^2 + \tau_N^{-1}) \gg 1. \quad (4.80)$$

Здесь v_0 — скорость дрейфа электронов или ионов, R_{\perp} — характерный размер неоднородности в направлении, ортогональном к дрейфу, τ_N — время жизни электрона, R_{\parallel} — характерный размер неоднородности вдоль H . Если условие (4.80) не выполнено, дрейф существенно влияет на структуру возмущенной области.

Дрейф оказывает важное влияние на устойчивость неоднородной плазмы (**). Пусть, например, функции $N_0(\mathbf{r})$, $T_{e0}(\mathbf{r})$, $T_{i0}(\mathbf{r})$ описывают распределение плазмы, удовлетворяющее стационарным уравнениям (4.23) — (4.28), (4.79). Это стационарное распределение может, однако, быть неустойчивым. Для анализа устойчивости следует рассмотреть релаксацию малых возмущений концентрации δN и температур δT_e , δT_i . Уравнения (4.23) — (4.28), (4.79) при этом линеаризуются. Если, кроме того, огра-

*) Отличие тензоров $\hat{\sigma}_{He}$ и $\hat{\sigma}_{Hi}$ от $\hat{\sigma}_e$ и $\hat{\sigma}_i$ связано с тем, что эффективная сила, действующая на частицу, движущуюся в неоднородном магнитном поле, зависит от ее скорости, $F_H \sim v^2$. Это сказывается на виде кинетических коэффициентов K_{σ} .

**) Теория устойчивости неоднородной плазмы излагается в ряде обзоров и монографий [208, 220—222].

ничиться анализом возмущений, характерные размеры которых l/k малы в сравнении с размером неоднородности,

$$k^{-1}|\nabla N_0| \ll N_0, \quad (4.81)$$

то можно воспользоваться разложением произвольного возмущения δN , δT_e , δT_i в интеграл Фурье по \mathbf{r} и t . Задача об устойчивости сводится тогда к анализу дисперсионного уравнения системы (4.23)–(4.28), (4.79).

Рассмотрим для примера случай, когда неоднородность сильно вытянута вдоль магнитного поля, $N_0 = N_0(\mathbf{r}_\perp)$, так что продольным переносом можно пренебречь. Процессами переноса поперек \mathbf{H} , как обычно, также пренебрегаем. Уравнения (4.23), (4.24), (4.79) тогда принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(N\mathbf{v}_{e0} + N\mathbf{v}_{i0}) - \frac{1}{2e} \nabla \hat{\sigma}_- \nabla \varphi_c &= q_i - q_r, \\ \frac{1}{e} \nabla \hat{\sigma} \nabla \varphi_c &= \nabla(N\mathbf{v}_{e0} - N\mathbf{v}_{i0}). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Здесь обозначено $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_e + \hat{\sigma}_i$, $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i$ и $\nabla \varphi_c = \mathbf{E}_c$.

Пусть функции $N_0(\mathbf{r}_\perp)$ и $\varphi_{c0}(\mathbf{r}_\perp)$ описывают стационарное распределение возмущенной плазмы и удовлетворяют стационарным уравнениям (4.82). Для малых отклонений от стационарного распределения $\delta N(\mathbf{r}_\perp, t)$, $\delta \varphi_c(\mathbf{r}_\perp, t)$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial N} (N\mathbf{v}_{e0} + N\mathbf{v}_{i0}) \nabla \delta N - \frac{1}{2e} \nabla \delta N \frac{\partial \hat{\sigma}_-}{\partial N} \nabla \varphi_{c0} - \\ - \frac{1}{2e} \nabla N_0 \frac{\partial \hat{\sigma}_-}{\partial N} \nabla \delta \varphi_c - \frac{\sigma_{\perp}}{2e} \Delta \delta \varphi_c &= -\frac{\delta N}{\tau_N}, \\ \frac{1}{e} \nabla N_0 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \nabla \delta \varphi_c + \frac{1}{e} \nabla \delta N \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \nabla \varphi_{c0} + \frac{1}{e} \sigma_{\perp} \Delta \delta \varphi_c &= \\ &= \nabla \delta N \frac{\partial}{\partial N} (N\mathbf{v}_{e0} - N\mathbf{v}_{i0}). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Здесь τ_N — время жизни электрона (4.57). Рассматривая лишь возмущения, размер которых мал в сравнении с размером неоднородности (4.81), и принимая, что δN , $\delta \varphi_c \sim \sim \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - i\omega t)$, приходим к дисперсионному уравнению, определяющему действительную и мнимую часть частоты ω :

$$\begin{aligned} \text{Re } \omega &= \frac{k_\perp}{2e} \left[e \frac{\partial}{\partial N} (N\mathbf{v}_{e0} + N\mathbf{v}_{i0}) - \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \nabla \varphi_{c0} \right] + \\ &+ B \left[\sigma_{\perp} \sigma_{\perp} - k_\perp^4 + \left(\nabla N_0 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \mathbf{k}_\perp \right) \left(\nabla N_0 \frac{\partial \hat{\sigma}_-}{\partial N} \mathbf{k}_\perp \right) \right], \\ \text{Im } \omega &= -\frac{1}{\tau_N} + k_\perp^2 B \left[\nabla N_0 \left(\sigma_{\perp} - \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \mathbf{k}_\perp - \sigma_{\perp} \frac{\partial \hat{\sigma}_-}{\partial N} \mathbf{k}_\perp \right) \right], \\ B &= \frac{k_\perp}{2e} \left[\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \nabla \varphi_{c0} - e \frac{\partial}{\partial N} (N\mathbf{v}_{e0} - N\mathbf{v}_{i0}) \right] \left[\sigma_{\perp}^2 k_\perp^4 + \left(\nabla N_0 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial N} \mathbf{k}_\perp \right)^2 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, сильно ионизованную плазму, $\omega_H \gg v_{ei} \gg v_{em}$, $\Omega_H \gg v_{im}$. В этом случае, как следует из (3.49),

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx-} = \frac{e^2 N v_{im}}{m \omega_H \Omega_H}, \quad \sigma_{xy} = \frac{e^2 N v_{im}^2}{m \omega_H \Omega_H^2}, \quad \sigma_{xy-} = -2 \frac{e^2 N}{m \omega_H}.$$

Наибольшими оказываются перекрестные компоненты тензора $\hat{\sigma}$. Мнимая часть частоты ω определяется при этом выражением:

$$\text{Im } \omega = \gamma = -\frac{1}{\tau_N} + \frac{\Omega_H \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_1}{v_{im} N_0 k_\perp^2} \left(k_{\perp y} \frac{\partial N_0}{\partial x} - k_{\perp x} \frac{\partial N_0}{\partial y} \right). \quad (4.84)$$

Здесь \mathbf{v}_1 — скорость, пропорциональная изменению концентрации плазмы N_0 в неоднородности:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial N} (N \mathbf{v}_{i0} - N \mathbf{v}_{e0}) + \frac{1}{e} \frac{\partial \hat{\sigma}_\perp}{\partial N} \nabla \Phi_{c0}.$$

Если $\gamma < 0$, то малые возмущения затухают; если $\gamma > 0$, то возмущения нарастают, т. е. неоднородность неустойчива. Из формулы (4.84) видно, что γ становится положительным, если

$$\frac{\Omega_H}{v_{im}} v_1 \tau_N \frac{|\nabla N_0|}{N_0} > 1. \quad (4.85)$$

Первыми нарастают возмущения с $\mathbf{k}_\perp \parallel \mathbf{v}_1$ в области, где максимален $|\nabla N_0|$. Значения k_\perp ограничены снизу условием (4.81), а сверху — условием $k_\perp \rho_{Hi} \ll 1$, где ρ_{Hi} — ларморовский радиус иона. Из формулы (4.85) видно, что важное влияние на устойчивость оказывает величина времени жизни электрона τ_N . С ростом τ_N устойчивость плазмы ослабевает.

4.5. Плазменные резонансы.

В § 3.2 было показано, что при приближении частоты переменного электрического поля к гиромагнитной частоте электронов ω_H (или ионов Ω_H) возмущение плазмы полем резонансно возрастает. Аналогичное усиление взаимодействия электрического поля с плазмой возникает и при приближении частоты поля к другим резонансам, т. е. к другим собственным частотам плазмы (см. [209], §§ 3, 4). Разумеется, резонансные частоты ярко выражены лишь при условии, что столкновения электронов или ионов достаточно редки, $\omega_{\text{рез}} \gg \nu$.

В окрестности резонансов резко возрастает поглощение поля плазмой и происходит эффективная трансформация радиоволн в другие волны: при $\omega \sim \omega_0$ — в плазменные ([1], § 20), при $\omega \sim \omega_H$ — в электронные циклотронные [250].

Здесь будут рассмотрены характерные нелинейные явления в резонансах, возникающие вследствие усиленного воздействия на плазму резонансного электрического поля.

Неоднозначность и гистерезис. В § 3.2 было показано, что при учете нелинейности в гиромагнитном резонансе $\omega \approx \omega_H$ зависимость температуры электронов от амплитуды переменного электрического поля приобретает неоднозначный характер и возникает гистерезис*). В изотропной плазме аналогичные эффекты возникают и в плазменном резонансе, т. е. вблизи плазменной частоты $\omega \approx \omega_0$ ([98, 251]; [15], § 18).

Действительно, рассмотрим продольное переменное электрическое поле \mathbf{E} в плазме. Примем, как обычно, что плазма квазинейтральна. Уравнения Максвелла для поля принимают в этом случае простой вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (4.86)$$

Здесь $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ — вектор электрической индукции, ϵ — диэлектрическая проницаемость плазмы (3.13). Из (4.86) следует, что

$$D = \operatorname{const} = C; \quad E = C/\epsilon. \quad (4.87)$$

Если частота соударений мала ($\nu_e \rightarrow 0$), то, как ясно из (4.87), напряженность электрического поля резонансно возрастает при приближении ω к ω_0 .

Учтем теперь, что с ростом напряженности электрического поля усиливаются и вызываемые им возмущения температуры и концентрации электронов плазмы:

$$\Delta T_e = \frac{E_0^2}{E_p^2} T_{e0}, \quad \Delta N = \gamma_1 \frac{N_0}{T_{e0}} \Delta T_e. \quad (4.88)$$

Здесь принято, что рассматриваемая неоднородность — большого или среднего размера (4.61), (4.62), так что возмущение концентрации связано с возмущениями температуры локальными соотношениями (4.88). Вид коэффициента γ_1 зависит от условий в плазме (см. (4.68), (4.65)). Обычно $|\gamma_1| \sim 1$ (см. § 5.5).

Учитывая, что $N = N_0 + \Delta N$, и подставляя выражение (4.88) в формулы (3.13), (4.87), приходим к следующему нелинейному уравнению для напряженности электрического поля:

$$(\epsilon_0 + \beta E_0^2) E = C, \quad \text{где} \quad \beta = -\frac{\gamma_1}{E_p^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_e^2}. \quad (4.89)$$

Здесь ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость невозмущенной плазмы, E_0 — амплитуда поля \mathbf{E} . Умножая это уравнение на комплексно сопряженное, получаем:

$$(\epsilon_0 + \beta E_0^2)^2 E_0^2 = |C|^2 = C_0^2. \quad (4.90)$$

*) В отсутствие магнитного поля или при $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ такие же эффекты появляются при $\omega^2 < \nu_e^2$ (см. § 3.2). В этом случае роль резонансного поля играет постоянное электрическое поле, резонансная частота $\omega \rightarrow 0$.

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для амплитуды вынужденных колебаний ангармонического осциллятора [100]. Заметим также, что то же уравнение (4.90) справедливо и в бесстолкновительной плазме [98]. В этом случае концентрация электронов возмущена за счет стрикционных эффектов [12—15]; изменяется лишь вид константы β .

Уравнение (4.90) — кубическое относительно E_0^2 . Разрешая его относительно ε_0 , находим

$$\varepsilon_0 = -\beta E_0^2 \pm \sqrt{C_0^2/E_0^2}. \quad (4.91)$$

Зависимость E_0^2 от ε_0 согласно (4.90), (4.91) показана на рис. 4.1 для $\beta > 0$. Значение ε_k определяется из условия $d\varepsilon_0/dE_0^2=0$. Имеем:

$$\varepsilon_k = -\frac{3}{2^{2/3}}\beta^{1/3}C_0^{2/3}; \quad E_{k1}^2 = \left(\frac{C_0}{2\beta}\right)^{2/3}; \quad E_{k2}^2 = 2^{1/3}\left(\frac{C_0}{\beta}\right)^{2/3}. \quad (4.92)$$

При $\varepsilon_0 < \varepsilon_k$ одному значению частоты ω (т. е. одному значению ε_0) соответствуют три значения амплитуды поля в плазме, а следовательно, и три значения T_e , N . Состояние, соответствующее пунктирной кривой, неустойчиво (ср. рис. 3.2). При изменении частоты переменного поля в окрестности резонанса переход из нижнего состояния в верхнее совершается при $\varepsilon = \varepsilon_k$ (стрелка на рис. 4.1), а обратный переход из верхнего состояния в нижнее — при меньших значениях ε_0 (пунктирная стрелка), т. е. возникает гистерезис зависимости параметров плазмы от частоты (или амплитуды) поля. Отметим, что область многозначной зависимости в случае $\beta > 0$ лежит при отрицательных значениях $\varepsilon_0 < 0$, а в случае $\beta < 0$ — при $\varepsilon_0 > 0$.

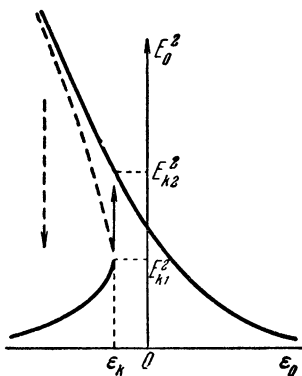


Рис. 4.1. Амплитуда поля в плазменном резонансе.

Расслоение плазмы. Выше, как и в § 3, рассматривались эффекты вбли-

зи резонанса в пространственно однородной плазме. При учете неоднородности в области резонансов возникает расслоение плазмы [226, 252, 260].

Рассмотрим стационарное уравнение для температуры электронов в плазме с учетом неоднородности. Оно имеет вид (4.27), (4.73):

$$-\frac{d}{dx}\left(k_e \frac{dT_e}{dx}\right) = \frac{e^2 E_0^2 v_e}{3m(\omega'^2 + v_e^2)} - \delta_e v_{ei}(T_e - T_i) - \delta_m v_{em}(T_e - T_m) = F(T_e). \quad (4.93)$$

Изменением концентрации $N(x)$ здесь для простоты пренебрегается, $k_e = \kappa_e/N$. Нас интересуют области резонансов, т. е. $\omega'^2 = \omega^2 \leq v_e^2$ в изотропной плазме или же $\omega'^2 = (\omega - \omega_H)^2 \leq v_e^2$ в плазме в магнитном поле, причем в последнем случае E_0^2 — компонента поля, ортогональная к \mathbf{H} и вращающаяся в направлении вращения электронов (необыкновенная волна) (см. (3.42)).

Уравнение (4.93) нетрудно проинтегрировать в общем виде. Вводя $\psi = \int k_e dT_e$, преобразуем левую часть уравнения:

$$-\frac{d}{dx} \left(k_e \frac{dT_e}{dx} \right) = -\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{1}{k_e} \frac{d\psi}{dx} \frac{d}{dT_e} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) = -\frac{1}{2k_e} \frac{d}{dT_e} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2. \quad (4.94)$$

Подставляя теперь (4.94) в (4.93) и интегрируя по dT_e , а также учитывая, что $\frac{d\psi}{dx} = k_e \frac{dT_e}{dx}$, имеем:

$$k_e^2 \left(\frac{dT_e}{dx} \right)^2 = -\Phi(T_e), \quad \text{где} \quad \Phi(T_e) = 2 \int F k_e dT_e. \quad (4.95)$$

Решение этого уравнения:

$$x - x_0 = \int \frac{k_e dT_e}{\sqrt{-\Phi(T_e)}}.$$

Для анализа полученного решения удобно воспользоваться механической аналогией. Если принять, что ψ — координата частицы q , а x — время t , то уравнение (4.95) $\dot{q}^2 = -\Phi(q)$ описывает движение частицы в поле с потенциалом $\Phi(q)$. Характер решения определяется, таким образом, видом потенциала $\Phi(q)$, который показан в различных случаях на рис. 4.2.

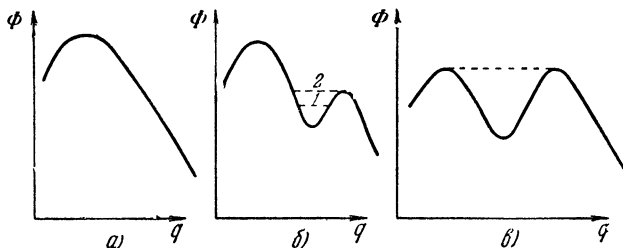


Рис. 4.2. Потенциал $\Phi(q)$.

В случае однозначности, когда уравнение $d\Phi/dq \sim F(T_e) = 0$ имеет один корень, потенциал $\Phi(q)$ имеет вид, представленный на рис. 4.2, а (так как $d^2\Phi/dq^2 < 0$). Ход $T_e(x)$ в этом случае показан на рис. 4.3, а.

В области неоднозначности (гистерезиса) появляется новый горб у функции $\Phi(q)$ (рис. 4.2, б). В области между горбами частица может осциллировать (пунктир 1 на рис. 4.2, б), и

соответственно появляется осциллирующее решение $T_e(x)$ (рис. 4.3, б). При приближении к минимуму амплитуда осцилляций T_e убывает и осцилляции близки к синусоидальным. Точка минимума $\Phi(q)$ соответствует как раз неустойчивому среднему состоянию T_e (действительно, уравнение $F = d\Phi/dq = 0$ имеет в области неоднозначности три корня, два из которых — максимумы, а третий — средний — минимум). Вблизи минимума всегда возникают осциллирующие распределения температуры. При значительном отступлении от минимума амплитуды осцилляций возрастают, они становятся нелинейными и в конце концов принимают вид отдельных пиков (солитонов). Этот предельный случай показан на рис. 4.3, в (соответствующий уровень дает пунктир 2 на рис. 4.2, б) *). Амплитуда осцилляций

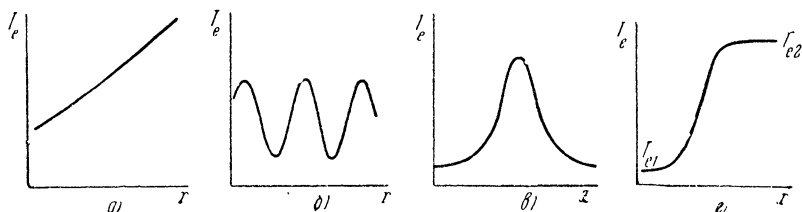


Рис. 4.3. Температура электронов.

не превосходит разности температур между устойчивыми состояниями.

С изменением амплитуды поля E_0 (или частоты ω вблизи резонансной частоты) относительная высота максимумов $\Phi(q)$ изменяется. При некотором значении $E_0 = E_{0k}$ высоты максимумов сравниваются, и в этом особом случае возможно состояние, показанное пунктиром на рис. 4.2, в, которое соответствует плавному переходу из первого (нижнего) устойчивого состояния для температуры во второе (верхнее) (рис. 4.3, г).

Таким образом, в области неоднозначности (гистерезиса) возникают осцилляторные состояния плазмы. Осцилляции T_e сопровождаются, естественно, осцилляциями N (хотя они для простоты и не учитывались выше). При больших амплитудах осцилляций плазма как бы распадается, расслаивается. Характерный масштаб расслоения — порядка L_T (4.59).

Аналогичное расслоение возникает в области плазменного резонанса [253]. Расслоение плазмы в области плазменных резонансов возникает и под действием стрикционных сил [16, 212]. Это явление называют обычно параметрической (а при $v_e = 0$ распадной) неустойчивостью [17—23, 211—217]. Характерный

*) Рассматривая не только покоящиеся, но и движущиеся с постоянной скоростью v_0 распределения, можно показать, что при данном значении поля E_0 в области неоднозначности существует целый спектр солитонов. Их форма и амплитуда однозначно зависят от скорости солитона v_0 .

масштаб расслоения при параметрической неустойчивости — порядка дебаевского радиуса. Сбударения электронов в этом случае препятствуют неустойчивости. Она возникает лишь в достаточно сильном поле при $E_0 > E_{п}$, где $E_{п}$ — пороговая амплитуда переменного электрического поля. Минимальное значение $E_{п}$ при $\omega \approx \omega_0$ определено выражением

$$E_{п}^2 = 16\pi N T_i \frac{\nu_e}{\omega_0} F. \quad (4.96)$$

Фактор F зависит от отношения T_e/T_i и от характера неустойчивости. Для расслоения (аперiodическая неустойчивость) $F = 1 + T_e/T_i$ [20, 261]. При возбуждении волн (периодическая неустойчивость) $F = 1,72$ при $T_e = T_i$, $F = 1,76$ при $T_e = 2T_i$ [271].

§ 5. Воздействие радиоволн на ионосферу

5.1. Баланс ионизации в ионосфере.

Процессы ионизации и рекомбинации в ионосфере весьма разнообразны из-за разнообразия химического состава ионосферы и агентов ионизации. Исследованию этих вопросов посвящено в последние годы большое число работ, результаты которых суммированы в целом ряде обзоров и монографий [42—45, 9, 11]. Мы здесь ограничимся кратким качественным описанием основных процессов и приведем лишь наиболее простые уравнения баланса ионизации.

Ионизация и рекомбинация.

Дневная ионосфера образуется в основном под воздействием ультрафиолетового и рентгеновского излучения Солнца ($\lambda \leq 1300 \text{ \AA}$). Спектр излучения Солнца в этой области сплошной, но он имеет ряд сильно выделенных линий: линии лаймановской серии водорода (в особенности L_α и L_β) и линии некоторых многозарядных ионов (HeII , CIII , OVI , SiIII , SiII , OII , OIII , MgX , HeI). Ультрафиолетовый спектр довольно стабилен. Им определяется ионизация в E - и F -слоях ионосферы. На рис. 5.1 приведена интенсивность ионизации при зенитном угле Солнца 30° [55]. Здесь q_i — число ионов O^+ , N_2^+ и O_2^+ , образующихся в 1 см^3 в 1 сек . Максимальная скорость ионообразования приходится на высоты 100—200 км.

Рентгеновское излучение сильно меняется в зависимости от активности Солнца. Оно дает значительный вклад в ионизацию

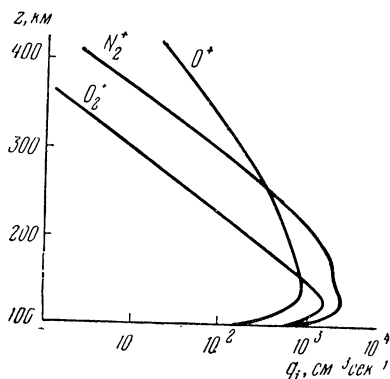
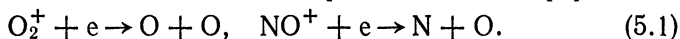


Рис. 5.1. Интенсивность фотоионизации в ионосфере.

нижней части слоя E и слоя D (в E -слое $\lambda \sim 10-100 \text{ \AA}$, в D -слое $\lambda \sim 1-10 \text{ \AA}$). В ионизацию нижней части слоя D (ниже 60 км) основной вклад вносят корпускулярные потоки. На полярных широтах вклад корпускулярных потоков в ионизацию ионосферы более значителен. Ночная ионизация в E -слое поддерживается за счет рассеянного в геокороне ультрафиолетового излучения [47], метеорной и корпускулярной ионизации, а также за счет натекания плазмы из более высоких слоев ионосферы.

Ультрафиолетовое и рентгеновское излучение Солнца приводит к образованию в слоях E и F основных ионов O^+ , O_2^+ , N_2^+ . Затем в результате серии ионно-атомных реакций основные ионы трансформируются в наблюдаемые обычно ионы NO^+ , N^+ , O^+ и др. (см. табл. 1.2).

Основным процессом рекомбинации в ионосфере служит диссоциативная рекомбинация [48]: молекулярный ион соединяется с электроном и при этом диссоциирует на атомы. Наиболее существенные диссоциативные реакции в ионосфере:



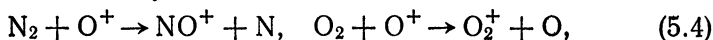
Количество электронов, рекомбинирующих в 1 см^3 в 1 сек , можно представить в виде αN^2 . Уравнение баланса ионизации для электронов принимает тогда вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_i - \alpha N^2. \quad (5.2)$$

Здесь $q_i = q_{iO} + q_{iO_2} + q_{iN_2}$ — полная интенсивность ионизации (q_{iO} , q_{iO_2} , q_{iN_2} — интенсивность ионизации атомов O , N_2 и O_2), α — эффективный коэффициент диссоциативной рекомбинации. Поскольку рекомбинация определяется процессами (5.1), то

$$\alpha = \alpha_1 n_{NO^+} + \alpha_2 n_{O_2^+}, \quad (5.3)$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты диссоциативной рекомбинации ионов NO^+ и O_2^+ , $n_{NO^+} = N_{NO^+}/N$; $n_{O_2^+} = N_{O_2^+}/N$ — относительные концентрации ионов NO^+ и O_2^+ . Последние определяются уравнениями ионного баланса [49]. Учитывая реакции между основными ионами и молекулами N_2 и O_2 ,



записываем уравнения ионного баланса в виде:

$$\frac{\partial N_{O_2^+}}{\partial t} = q'_{iO_2} + \beta_2 N_{O_2} N_{O^+} - \alpha_2 N_{O_2^+} N, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial N_{O^+}}{\partial t} = q'_{iO} - \beta_1 N_{O^+} N_{N_2} - \beta_2 N_{O^+} N_{O_2}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial N_{NO^+}}{\partial t} = \beta_1 N_{O^+} N_{N_2} - \alpha_1 N_{NO^+} N + q'_{iNO}, \quad (5.7)$$

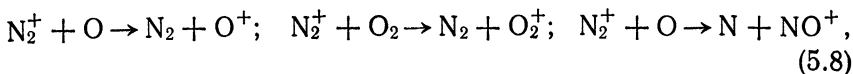
где

$$N = N_{O^+} + N_{O_2^+} + N_{NO^+}, \quad (5.7a)$$

$$q'_{iO} = q_{iO} + p_1 N_O, \quad q'_{iO_2} = q_{iO_2} + p_2 N_{O_2}, \quad q'_{iNO} = p_3 N_O,$$

$$p_k = \gamma_k q_{iN_2} / [(\gamma_1 + \gamma_3) N_O + \gamma_2 N_{O_2}].$$

Здесь учтены реакции ионов N_2^+ с молекулами O_2 и O :



характеризующиеся коэффициентами γ_1 , γ_2 и γ_3 :

$$\frac{\partial N_{N_2^+}}{\partial t} = q_{iN_2} - \gamma_1 N_O N_{N_2^+} - \gamma_2 N_{O_2} N_{N_2^+} - \gamma_3 N_O N_{N_2^+}.$$

Эти реакции протекают быстро, так как коэффициенты γ_1 , γ_2 , γ_3 велики [42]. Благодаря этому концентрация ионов N_2^+ всегда близка к стационарной:

$$N_{N_2^+} = q_{iN_2} / [(\gamma_1 + \gamma_3) N_O + \gamma_2 N_{O_2}].$$

Концентрация $N_{N_2^+}$ мала (в силу того, что велики коэффициенты γ), т. е. реакции (5.8) приводят фактически к исчезновению ионов N_2^+ в ионосфере (см. табл. 1.2). С другой стороны, те же реакции (5.8) приводят к появлению дополнительных ионов O^+ , O_2^+ и NO^+ . Это и учитывают перенормированные коэффициенты рождения ионов q'_{iO} , q'_{iO_2} и q'_{iNO} в уравнениях (5.5)–(5.7). Разумеется,

$$q'_{iO} + q'_{iO_2} + q'_{iNO} = q_{iO} + q_{iO_2} + q_{iN_2} = q_i,$$

т. е. полная интенсивность ионизации остается неизменной.

Далее, β_1 и β_2 в уравнениях (5.5)–(5.7) — коэффициенты ионных реакций (5.4). Например, $\beta_1 N_{O^+} N_{N_2}$ определяет число ионов NO^+ , появляющихся в 1 см^3 в 1 сек за счет первой реакции (5.4). В слое F , согласно [44], $\beta_1 = 3 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$, $\beta_2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$. В слое E значения коэффициентов β существенно ниже, порядка $10^{-13} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$ [44, 9].

Коэффициенты α_1 и α_2 [44, 50]: в слое E $\alpha_1 = 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$; в слое F $\alpha_1 = (3-5) \cdot 10^{-8}$, $\alpha_2 = (2-5) \cdot 10^{-8}$.

Зависимость коэффициентов α от температуры изучалась как теоретически [51], так и экспериментально. Данные экспериментов суммированы в [9, 50, 232]. Падение α с ростом T_e при $T_e \sim 10^3-10^4^\circ$ определяется выражением: $\alpha \sim T_e^{-\lambda}$, где λ

меняется примерно от $1/2$ до $3/2$. Согласно [232, 233]

$$\alpha_1 \approx 5 \cdot 10^{-7} \left(\frac{300^\circ}{T_e} \right)^{1,2}, \quad \alpha_2 \approx 2,2 \cdot 10^{-7} \left(\frac{300^\circ}{T_e} \right)^{0,7}. \quad (5.9)$$

В [50] отмечается, что лабораторные измерения (для тех же условий, что и в ионосфере) приводят к большим значениям α , чем в ионосфере.

Мы рассмотрели здесь процессы с участием основных ионов. Процессы с образованием других ионов (H^+ , He^+) детально рассмотрены в [49]. В D -слое важную роль играет прилипание электронов и, соответственно, кинетика с образованием и рекомбинацией отрицательных ионов [42—45].

Баланс ионизации. Уравнения (5.2), (5.5) — (5.7) определяют баланс ионизации в E - и F -слоях ионосферы. В стационарных условиях определяем из (5.5) — (5.7) концентрации ионов:

$$N_{O^+} = \frac{q'_{iO}}{\beta_1 N_{N_2} + \beta_2 N_{O_2}}, \quad N_{NO^+} = \frac{q'_{iO} \beta_1 N_{N_2}}{\alpha_1 N (\beta_1 N_{N_2} + \beta_2 N_{O_2})} + \frac{q'_{iNO}}{\alpha_1 N}, \quad (5.10)$$

$$N_{O_2^+} = \frac{q'_{iO_2} + q'_{iO} \beta_2 N_{O_2} (\beta_1 N_{N_2} + \beta_2 N_{O_2})^{-1}}{\alpha_2 N},$$

а из уравнения (5.7a) — концентрацию электронов:

$$N = \frac{1}{2} \left\{ N_{O^+} + \sqrt{(N_{O^+})^2 + 4 \left[\frac{q'_{iNO} + \beta_1 N_{N_2} N_{O^+}}{\alpha_1} + \frac{q'_{iO} + \beta_2 N_{O_2} N_{O^+}}{\alpha_2} \right]} \right\}, \quad (5.11)$$

где концентрация N_{O^+} определена формулой (5.10). Как ясно из (5.10), величина в квадратных скобках под корнем представляет собой произведение $(N_{O_2} + N_{NO_2^+})N$. В F -слое этот член много меньше, чем $(N_{O^+})^2$, так что здесь

$$N \approx N_{O^+} = \frac{q'_{iO}}{\beta_1 N_{N_2} + \beta_2 N_{O_2}}.$$

Уравнение баланса ионизации (5.2) при этом принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q'_{iO} - \beta N, \quad \beta = \beta_1 N_{N_2} + \beta_2 N_{O_2}. \quad (5.12)$$

В E -слое, напротив, $N_{O^+} \ll N_{O_2^+} + N_{NO^+}$ (см. табл. 1.2), и здесь

$$N = \left[\frac{q'_{iO_2}}{\alpha_2} + \frac{q'_{iNO}}{\alpha_1} + \frac{q'_{iO} (\beta_1 N_{N_2} / \alpha_1 + \beta_2 N_{O_2} / \alpha_2)}{\beta_1 N_{N_2} + \beta_2 N_{O_2}} \right]^{1/2}. \quad (5.13)$$

Коэффициенты диссоциативной рекомбинации α падают с ростом температуры электронов согласно (5.9). Поэтому из формулы (5.13) видно, что концентрация электронов в E -слое растет с ростом температуры электронов.

Полученные выражения характеризуют, естественно, лишь локальный баланс ионизации. Они справедливы, если процессами переноса ионизации за счет диффузии, термодиффузии или дрейфа можно пренебречь. В F -слое процессы переноса оказываются существенными. Ими и определяется область максимума концентрации в F -слое: выше максимума определяющую роль играет перенос, ниже — ионизационный баланс [52].

5.2. Эффективная частота соударений электронов и ионов. Доля теряемой энергии.

Эффективная частота соударений электронов. Для определения частоты соударений электронов с нейтральными молекулами необходимо знать эффективное сечение рассеяния (см. § 21.1). Последнее определяется из эксперимента или с помощью квантовомеханических расчетов [53, 54] (когда достаточно хорошо известен характер взаимодействия электрона с молекулами). На рис. 21.1 (стр. 241) приведены усредненные результаты измеренных на опыте сечений соударения электронов с основными компонентами ионосферы [33, 55]. Используя эти сечения в формуле (21.7) и выполняя интегрирование, можно определить эффективную частоту соударений электронов с молекулами ν_{em} . Приближенные выражения для ν_{em} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \nu_{eN_2} &= 2,9 \cdot 10^{-7} N_{N_2} T_e (1 + T_e^{1/2})^{-1}, \\ \nu_{eO_2} &= 1,6 \cdot 10^{-8} \cdot N_{O_2} T_e^{1/2} [1 + 4,5 T_e^{1/2}], \\ \nu_{em} &= 1,23 \cdot 10^{-7} T_e^{5/6} N_m \quad (N_m = N_{N_2} + N_{O_2}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\nu_{eO} = 3,0 \cdot 10^{-8} N_O T_e^{1/2}, \quad \nu_{eH} = 4,9 \cdot 10^{-8} N_H T_e^{1/2}, \quad \nu_{eHe} = 5,0 \cdot 10^{-8} N_{He} T_e^{1/2}. \quad (5.15)$$

Здесь T_e выражена в эв, N_m — в $см^{-3}$, ν — в $сек^{-1}$; ν_{em} — частота соударений с молекулами воздуха. В (5.15) сечения соударений электронов с атомами кислорода, водорода, гелия принимались постоянными, равными соответственно

$4\pi q_O = 3,3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$, $4\pi q_H = 5,4 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$, $4\pi q_{He} = 5,5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$, и частота соударений определялась как для соударений упругих шариков (21.9) с $\pi a^2 = 4\pi q$.

Полная частота соударений электрона в многокомпонентной плазме равна сумме эффективных частот соударений с различными компонентами:

$$\nu_e = \sum_k \nu_{ek}.$$

Вклад соударений электронов с различными компонентами ионосферы и полная эффективная частота соударений для различных высот приведены в табл. 5.1. При расчете использовались

Таблица 5.1

ЭФФЕКТИВНЫЕ ЧАСТОТЫ СОУДАРЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ИОНОСФЕРЕ

$Z, \text{ км}$	День; эффективные частоты соударений $\nu, \text{ сек}^{-1}$							$I_{ei}, \text{ см}$
	ν_{eN_2}	ν_{eO_2}	ν_{eHe}	ν_{eO}	ν_{eH}	ν_{em}	ν_{ei}	
60	$3,1 \cdot 10^7$	$6,1 \cdot 10^6$	—	—	—	$3,7 \cdot 10^7$	0,95	$1,1 \cdot 10^7$
70	$7,0 \cdot 10^6$	$1,3 \cdot 10^6$	—	—	—	$8,3 \cdot 10^6$	3,4	$2,6 \cdot 10^3$
80	$9,2 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$	—	—	—	$1,1 \cdot 10^6$	19	$4,4 \cdot 10^5$
90	$1,3 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	—	—	—	$1,6 \cdot 10^5$	$0,12 \cdot 10^3$	$7,3 \cdot 10^4$
100	$4,0 \cdot 10^4$	$7,2 \cdot 10^3$	0,41	$1,0 \cdot 10^3$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^4$	$0,84 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^4$
110	$9,6 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^3$	0,31	$7,0 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^4$	$0,85 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^4$
120	$4,9 \cdot 10^3$	$6,5 \cdot 10^2$	0,25	$4,2 \cdot 10^2$	$4,1 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^3$	$0,58 \cdot 10^3$	$2,4 \cdot 10^4$
130	$2,2 \cdot 10^3$	$2,4 \cdot 10^2$	0,19	$2,5 \cdot 10^2$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^3$	$0,44 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^4$
150	$7,1 \cdot 10^2$	84	0,14	$1,1 \cdot 10^2$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^2$	$0,48 \cdot 10^3$	$3,9 \cdot 10^4$
200	$1,1 \cdot 10^2$	9,6	$8,5 \cdot 10^{-2}$	31	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^2$	$0,44 \cdot 10^3$	$5,3 \cdot 10^4$
250	30	2,3	$6,5 \cdot 10^{-2}$	15	$1,9 \cdot 10^{-4}$	47	$0,65 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^4$
300	10	0,59	$5,6 \cdot 10^{-2}$	7,3	$1,9 \cdot 10^{-4}$	18	$0,81 \cdot 10^3$	$3,4 \cdot 10^4$
400	1,3	$5,5 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	2,2	$1,8 \cdot 10^{-4}$	3,5	$0,59 \cdot 10^3$	$5,2 \cdot 10^4$
500	0,17	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	0,69	$1,7 \cdot 10^{-4}$	0,90	$0,30 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^5$
600	$0,24 \cdot 10^{-1}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	0,23	$1,6 \cdot 10^{-4}$	0,27	$0,14 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^5$
700	$0,35 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	0,098	69	$4,8 \cdot 10^5$
800	$0,55 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	34	$9,8 \cdot 10^5$
900	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$9,8 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	24	$1,4 \cdot 10^6$
1000	$0,15 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	17	$2,0 \cdot 10^6$

$Z, \text{ км}$	Ночь; эффективные частоты соударений $\nu, \text{ сек}^{-1}$							$I_{ei}, \text{ см}$
	ν_{eN_2}	ν_{eO_2}	ν_{eHe}	ν_{eO}	ν_{eH}	ν_{em}	ν_{ei}	
60	—	—	—	—	—	—	—	—
70	—	—	—	—	—	—	—	—
80	$9,2 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$	—	—	—	$1,1 \cdot 10^6$	0,23	$3,6 \cdot 10^7$
90	$1,3 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	—	—	—	$1,6 \cdot 10^5$	1,1	$7,4 \cdot 10^6$
100	$3,5 \cdot 10^4$	$6,5 \cdot 10^3$	0,39	$8,3 \cdot 10^2$	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^4$	18	$5,2 \cdot 10^5$
110	$8,0 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$	0,30	$6,8 \cdot 10^2$	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^4$	16	$6,6 \cdot 10^5$
120	$4,4 \cdot 10^3$	$5,5 \cdot 10^2$	0,23	$4,2 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$5,4 \cdot 10^3$	13	$9,9 \cdot 10^5$
130	$2,0 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^2$	0,18	$2,3 \cdot 10^2$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^3$	9,8	$1,4 \cdot 10^6$
150	$6,5 \cdot 10^2$	56	0,12	$1,0 \cdot 10^2$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^2$	6,7	$2,0 \cdot 10^6$
200	72	6,5	$8,2 \cdot 10^{-2}$	27	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^2$	5,8	$3,2 \cdot 10^6$
250	13	0,90	$6,3 \cdot 10^{-2}$	10	$2,0 \cdot 10^{-4}$	25	16	$1,2 \cdot 10^6$
300	2,9	0,15	$5,4 \cdot 10^{-2}$	4,3	$2,0 \cdot 10^{-4}$	7,4	115	$1,9 \cdot 10^5$
400	0,14	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	0,73	$1,9 \cdot 10^{-4}$	0,90	270	$8,8 \cdot 10^4$
500	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	0,13	$1,7 \cdot 10^{-4}$	0,16	160	$1,4 \cdot 10^5$
600	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	100	$2,5 \cdot 10^5$
700	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	56	$4,6 \cdot 10^5$
800	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$9,2 \cdot 10^{-9}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	34	$7,8 \cdot 10^5$
900	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \cdot 10^{-10}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	19	$1,4 \cdot 10^6$
1000	$7,4 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-11}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	12	$2,3 \cdot 10^6$

модели ночной и дневной ионосферы, представленные в табл. 1.1, 1.2. Видно, что на высотах до 150 км днем и до 250 км ночью основную роль играют соударения с молекулами, т. е. плазма здесь слабо ионизована. Напротив, на высотах $z \geq 300$ км всегда доминируют соударения с ионами; здесь плазма сильно ионизована. В табл. 5.1 приведены также длины свободного пробега электронов l_{ei} для $e-i$ соударений.

Зависимость эффективной частоты соударений электронов от температуры T_e для различных высот в ионосфере приведена в табл. 5.2. С ростом T_e частота соударений с ионами падает и граница, разделяющая область «слабо ионизованной» ($\nu_{ei} < \nu_{em}$) и «сильно ионизованной» ($\nu_{ei} > \nu_{em}$) плазмы, сдвигается вверх.

Т а б л и ц а 5.2
ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТЫ СОУДАРЕНИЙ ν (сек⁻¹)
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОНОВ В ИОНОСФЕРЕ (ДЕНЬ)

$T_e, \text{ эВ}$	$z = 100 \text{ км}$		$z = 150 \text{ км}$		$z = 200 \text{ км}$		$z = 300 \text{ км}$	
	ν_{em}	ν_{ei}	ν_{em}	ν_{ei}	ν_{em}	ν_{ei}	ν_{em}	ν_{ei}
0,0207	$4,8 \cdot 10^4$	850						
0,03	$6,2 \cdot 10^4$	520						
0,05	$9,8 \cdot 10^4$	260						
0,1	$1,8 \cdot 10^5$	97	$1,1 \cdot 10^3$	350				
0,2	$3,2 \cdot 10^5$	38	$2,0 \cdot 10^3$	130	$2,2 \cdot 10^2$	220	20	670
0,3	$4,5 \cdot 10^5$	21	$2,8 \cdot 10^3$	75	$3,1 \cdot 10^2$	120	27	350
0,4	$5,8 \cdot 10^5$	14	$3,5 \cdot 10^3$	50	$3,9 \cdot 10^2$	82	38	250
0,5	$6,9 \cdot 10^5$	11	$4,2 \cdot 10^3$	37	$4,7 \cdot 10^2$	61	38	190

Средняя доля энергии, теряемой электроном при соударениях. Соударения электронов с ионами носят обычно упругий характер. В этом случае средняя доля теряемой электроном энергии $\delta = \delta_{уп} = 2m/M$ (см. § 21). То же значение имеет δ и при упругих соударениях электронов с нейтральными атомами и молекулами. В ионосфере $\delta_{уп} \sim (2-3) \cdot 10^{-5}$. Однако при взаимодействии электронов с нейтральными частицами важную роль играют и неупругие процессы, сопровождающиеся возбуждением ротационных, колебательных и оптических уровней. Поэтому для вычисления δ необходимо знать эффективные сечения всех неупругих процессов, существенных в ионосфере (см. формулу (21.8)). В настоящее время достаточно полно они известны еще не во всех случаях.

При невысокой температуре электронов ($T_e \leq 0,1 \text{ эВ}$) основную роль играет возбуждение вращательных уровней молекул. В этом случае доля энергии, теряемой электроном при одном ударе, мала и можно воспользоваться для δ выражением (21.14). Согласно [29, 56] для азота и кислорода тогда

получается:

$$\delta_{eN_2}^r = 5,2 \cdot 10^{-6} \frac{(1 + 3T_e^{1/2})}{T_e^{3/2}}, \quad \delta_{eO_2}^r = 2,5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{T_e(1 + 3,9T_e^{1/2})}. \quad (5.16)$$

Здесь δ^r — доля энергии, теряемая на возбуждение вращательных уровней, T_e выражено в эв. При $T_e > 0,1$ эв существенную роль играет уже возбуждение колебательных, а при $T_e \geq \geq (0,3-1)$ эв — оптических уровней. Некоторые выражения, определяющие потери энергии электрона в этих случаях, приведены в [57]. Отметим, что оптические переходы тонкой структуры приводят к тому, что в атомных газах оптические потери могут быть заметны и при невысоких температурах $T_e \leq 0,1$ эв. В этом случае по-прежнему доля энергии, теряемой при одном ударе, мала и можно использовать формулу (21.14). В частности, в атомном кислороде согласно [58]

$$\delta_{eO} = 6,6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{TT_e^{1/2}} \quad (5.17)$$

(температуры нейтралов T и электронов T_e выражены в эв).

Результаты лабораторных измерений δ для молекулярных водорода, кислорода, азота [59—61] приведены в табл. 5.3*). Температура газов в эксперименте $T = 290^\circ$. Специальная проверка при меньших T не обнаружила заметного изменения δ [62]. Как видно из таблицы, для всех газов характерно, что δ не очень сильно изменяется с ростом T_e от комнатных температур до температур порядка 1 эв. При более высоких значениях T_e величина δ резко возрастает. Для смеси газов δ находится по формуле

$$\delta = \frac{\sum_k \delta_{ek} \nu_{ek}}{\sum_k \nu_{ek}}, \quad (5.18)$$

где ν_{ek} и δ_{ek} — частота соударений и доля передаваемой энергии для газа сорта k . Расчет δ для воздуха по данным кислорода и азота хорошо согласуется с результатами непосредственного измерения δ в воздухе, приведенными в табл. 5.3. В той же таблице 5.3 приведены и результаты расчета δ_{em} на различных высотах в ионосфере. Расчет проводился по формуле (5.18): значения δ для молекулярного азота N_2 и кислорода O_2 взяты из табл. 5.3 и формул (5.16) (при $T_e < 0,1$ эв), значение δ для атомарного кислорода вычислялось по формуле (5.17).

Экспериментальные измерения δ в ионосфере дают для нижней части E-слоя ($z \approx 90$ км, $T_e \approx 300^\circ$) величину $\delta \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

Частота соударений ионов. При взаимодействии ионов с нейтральными молекулами при низких температурах $T \sim 300^\circ K$

*) Зависимость δ от T_e по результатам измерений последующих авторов [63] в общем достаточно хорошо согласуется с данными работ [59—61].

Таблица 5.3

СРЕДНЯЯ ДОЛЯ ЭНЕРГИИ, ТЕРЯЕМОЙ ЭЛЕКТРОНОМ
ПРИ СОУДАРЕНИИ С НЕЙТРАЛЬНЫМИ МОЛЕКУЛАМИ

T_e		$\delta_{em} \cdot 10^3$			
в град	в эв	H_2 $\delta_{уп} = 5,4 \cdot 10^{-4}$	O_2 $\delta_{уп} = 3,4 \cdot 10^{-5}$	N_2 $\delta_{уп} = 3,9 \cdot 10^{-5}$	Воздух $\delta_{уп} = 3,8 \cdot 10^{-5}$
1 000	0,086	2,5	3,7	0,47	0,9
2 000	0,172	2,2	6,7	0,36	1,2
3 000	0,258	2,2	8,6	0,33	1,6
4 000	0,344	2,5	9,0	0,32	1,7
5 000	0,430	3,0	8,7	0,34	1,7
6 000	0,516	3,4	8,2	0,38	1,7
7 000	0,602	3,9	7,7	0,45	1,7
8 000	0,688	4,4	7,2	0,60	1,7
9 000	0,774	4,8	6,8	0,82	1,8
10 000	0,86	5,3	6,6	1,15	2,0

$\delta \cdot 10^3$ для ионосферы (день)

T_e , град	$z = 100$ км	$z = 150$ км	$z = 200$ км	$z = 300$ км	$z = 500$ км
300	2,5	—	—	—	—
350	2,0	—	—	—	—
450	1,55	—	—	—	—
750	0,85	—	—	—	—
1 000	1,10	1,18	—	—	—
2 000	1,34	1,17	1,07	0,99	—
3 000	1,57	1,24	1,04	0,91	0,98
4 000	1,61	1,29	1,04	0,86	0,94
5 000	1,50	1,20	1,01	0,82	0,79
6 000	1,54	1,18	1,05	0,80	0,73
7 000	1,54	1,19	1,07	0,82	0,70
8 000	1,59	1,27	1,09	0,89	0,70
9 000	1,72	1,41	1,24	1,10	0,73
10 000	1,94	1,68	1,41	1,22	0,80

Таблица 5.4

	$\beta_{im} \cdot 10^{10}$, см ³ /сек		$\beta_{im} \cdot 10^{10}$, см ³ /сек		$\beta_{im} \cdot 10^{10}$, см ³ /сек
O^+ , N_2	5,1	NO^+ , N_2	9,0	H^+ , N_2	2,4
O^+ , O_2	4,5	NO^+ , O	7,6	H^+ , He	4,3
O^+ , He	2,2	NO^+ , H	21	He^+ , O	4,5
O^+ , H	2,6	NO^+ , He	6,4	He^+ , H	7,7
NO^+ , O_2	8,3	H^+ , O_2	2,7	He^+ , N_2	4,1

основную роль играет поляризация молекул. В этом случае частота соударений в первом приближении не зависит от температуры и имеет вид [64]

$$v_{im} = \beta_{im} N_m,$$

где N_m — концентрация молекул. Значения коэффициента β_{im} для различных взаимодействий даны в табл. 5.4.

При взаимодействии ионов и молекул одного сорта (например, O^+ и O) важную роль играет процесс перезарядки. Эффективная частота соударений для этого процесса может быть приближенно представлена в виде:

$$v_{im} = \beta_{im}^0 (T_i + T)^{1/2} N_m.$$

Значения β_{im}^0 для разных типов перезарядки даны в табл. 5.5.

Таблица 5.5

	O^+, O	O_2^+, O_2	H^+, H	He^+, He	N_2^+, N_2	N^+, N
$\beta_{im}^0 \cdot 10^9,$ $см^3/сек \cdot эв^{1/2}$	1,8	1,2	11	3,3	2,3	1,8

Таблица 5.6

ЭФФЕКТИВНЫЕ ЧАСТОТЫ ν (сек⁻¹) СОУДАРЕНИЙ ИОНОВ В ИОНОСФЕРЕ

$z,$ км	День					Ночь	
	ν_{NO^+m}	ν_{O^+m}	$l_{im}, см$	ν_{ii}	$l_{ii}, см$	ν_{ii}	$l_{ii}, см$
60	$6,0 \cdot 10^6$	$3,5 \cdot 10^6$	10^{-2}	0,003	$2,1 \cdot 10^7$	—	—
70	$1,8 \cdot 10^6$	$1,0 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^{-2}$	0,01	$5,1 \cdot 10^6$	—	—
80	$2,6 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{-1}$	0,05	$8,9 \cdot 10^5$	0,001	$6,9 \cdot 10^7$
90	$3,5 \cdot 10^4$	$2,0 \cdot 10^4$	1,8	0,39	$1,3 \cdot 10^5$	0,004	$14,5 \cdot 10^6$
100	$7,3 \cdot 10^3$	$4,9 \cdot 10^3$	7,5	3,0	$1,8 \cdot 10^4$	0,055	$9,8 \cdot 10^5$
110	$1,7 \cdot 10^3$	$9,3 \cdot 10^2$	36	3,2	$1,9 \cdot 10^4$	0,058	$1 \cdot 10^6$
120	$6,8 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^2$	2,3	$3,0 \cdot 10^4$	0,045	$1,6 \cdot 10^6$
130	$2,4 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^2$	1,9	$4,2 \cdot 10^4$	0,035	$2,2 \cdot 10^6$
150	58	36	$1,7 \cdot 10^3$	2,0	$4,8 \cdot 10^4$	0,022	$4,4 \cdot 10^6$
200	7,1	5,2	$1,3 \cdot 10^4$	2,5	$6,8 \cdot 10^4$	0,020	$6 \cdot 10^6$
250	2,1	1,8	$4,3 \cdot 10^4$	3,9	$4,8 \cdot 10^4$	0,078	$2 \cdot 10^6$
300	0,76	0,75	$1,1 \cdot 10^5$	5,5	$3,5 \cdot 10^4$	0,67	$2,3 \cdot 10^5$
400	0,15	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^6$	5,0	$3,9 \cdot 10^4$	1,9	$8,3 \cdot 10^4$
500	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^6$	2,7	$7,7 \cdot 10^4$	1,2	$1,4 \cdot 10^5$
600	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^7$	0,82	$2,8 \cdot 10^5$	0,77	$2,1 \cdot 10^5$
700	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^7$	0,43	$5,9 \cdot 10^5$	0,40	$3,9 \cdot 10^5$
800	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^8$	0,22	$1,2 \cdot 10^6$	0,25	$7,3 \cdot 10^5$
900	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-4}$.	0,20	$2 \cdot 10^6$	0,21	$1,4 \cdot 10^6$
1000	$4 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$.	0,16	$2,9 \cdot 10^6$	0,13	$2,3 \cdot 10^6$

Эффективные частоты соударений для ионов NO^+ и O^+ в ионосфере на различных высотах приведены в табл. 5.6. В E -слое основную роль играют упругие соударения ионов с молекулами, в F -слое — перезарядка ионов O^+ . В таблице приведены также длины свободного пробега ионов l_{im} и l_{ii} для соударений $i - m$ и $i - i$.

Доля теряемой энергии при упругих соударениях ионов с молекулами $\delta_{im} = 2M_i / (M_i + M_m)$. При $M_i = M_m$ имеем: $\delta_{im} = 1$ [24, 197, 71].

5.3. Температуры электронов и ионов в ионосфере.

Нагрев электронов при фотоионизации. В момент ионизации атома солнечным ультрафиолетом выбитый электрон получает довольно значительную энергию ϵ_f :

$$\epsilon_f = \hbar\omega - \epsilon_i. \quad (5.19)$$

Здесь ϵ_i — энергия ионизации, $\hbar\omega$ — энергия кванта. Энергию ϵ_f электрон теряет при соударениях с нейтральными атомами, а также передает электронам плазмы, что и определяет нагрев электронного газа. Благодаря этому температура электронов и ионов в дневной ионосфере поддерживается более высокой, чем температура нейтральных молекул. Энергия ионизации основных компонент ионосферы и соответствующие им длины волн приведены в табл. 5.7.

Таблица 5.7

	NO	O ₂	O	H	N	N ₂	He
$\lambda_i, \text{Å}$	1340	1026	911	910	853	796	504
$\epsilon_i, \text{эв}$	9,25	12,1	13,6	13,6	14,5	15,6	24,8

Энергия, приобретаемая электроном при ионизации с основного уровня, определяется соотношением (5.19). Однако возможны и другие ионизационные состояния, когда часть энергии кванта идет на возбуждение иона. Учитывая спектр солнечного ультрафиолета, его поглощение и вероятности различных ионизационных состояний, можно рассчитать для выбранной модели ионосферы количество и энергетический спектр выбитых фотоэлектронов [65]. В среднем (грубо) на высотах выше 150 км он оказывается типа максвелловского с $T_e \approx 5 \text{ эв}$. Отклонения от средней кривой, однако, значительны. Имеется, в частности, характерный пик в распределении фотоэлектронов при $\epsilon_f \sim 20\text{--}30 \text{ эв}$, связанный с солнечной резонансной линией He II 304 Å. На высоте ниже 150 км характер спектра фотоэлектронов существенно изменяется, все большую роль начинают играть энергичные электроны с $\epsilon_f \approx 20\text{--}30 \text{ эв}$.

Энергия, полученная электронами при фотоионизации, частично идет на нагрев электронного газа, а частично на возбуждение молекул.

На рис. 5.2 показана $\Delta\epsilon_f$ — энергия, передаваемая в среднем одним фотоэлектроном электронам плазмы [66]. Умножая $\Delta\epsilon_f$ на q_i — полное число ионов, образующихся в 1 см^3 в 1 сек , находим среднюю энергию, передаваемую фотоэлектронами электронам основной плазмы, т. е. идущую на нагрев электронов плазмы:

$$Q = q_i \Delta\epsilon_f. \quad (5.20)$$

Ход Q в зависимости от высоты z представлен для примера на рис. 5.3. Как видно из рисунка, интенсивность нагрева электронов Q всегда имеет максимум в районе 150 км , связанный с

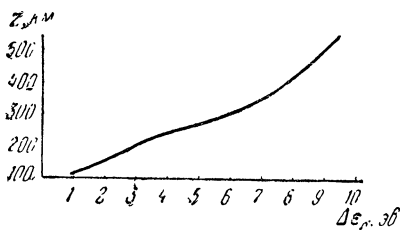


Рис. 5.2. Энергия, передаваемая одним фотоэлектроном электронам ионосферы.

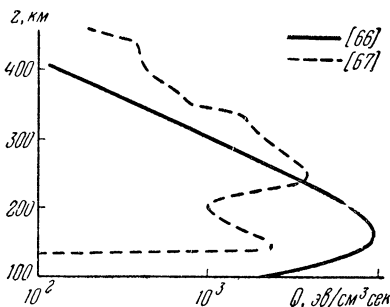


Рис. 5.3. Энергия, выделяемая фотоэлектронами в ионосфере.

ходом интенсивности фотоионизации: на больших высотах ослабевает ионизация, а ниже энергично падает доля энергии, передаваемой фотоэлектроном электронам плазмы. На высотах свыше 300 км длина свободного пробега фотоэлектронов столь велика, что необходимо учитывать уже неоднородность плазмы. С этим связана возможность появления второго максимума в Q (пунктирная кривая на рис. 5.3): фотоэлектроны, приходящие из высоких слоев ионосферы, плазмосферы и сопряженных точек, передают электронам плазмы свою энергию в основном вблизи максимума ионосферного слоя, т. е. при $z \sim 300 \text{ км}$ [67].

Температуры электронов и ионов. Температуры электронов и ионов в ионосфере при нагреве лишь за счет фотоэлектронов определяются уравнениями (3.52), (3.53), только вместо омического нагрева Ej следует учесть нагрев фотоэлектронами Q . В стационарных условиях

$$\begin{aligned} \delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) + \delta_{em} v_{em} (T_e - T) &= 2Q/3N, \\ \delta_{ei} v_{ei} (T_e - T_i) - v_{im} (T_i - T) &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Разрешая уравнения (5.21), можно определить температуры

электронов и ионов [66, 67]. На небольших высотах температуры электронов (до ≈ 150 км) и ионов (до ≈ 600 км) близки к температуре нейтральных молекул. В этом случае их можно определить по формулам:

$$T_e = T + \Delta T_e, \quad T_i = T + \Delta T_i;$$

$$\Delta T_i = \frac{\delta_{ei} \nu_{ei}}{\delta_{ei} \nu_{ei} + \nu_{im}} (T_e - T), \quad (5.22)$$

$$\Delta T_e = \frac{2Q}{3N} \frac{\delta_{ei} \nu_{ei} + \nu_{im}}{\delta_{ei} \nu_{ei} \nu_{im} + \delta_{em} \nu_{em} (\delta_{ei} \nu_{ei} + \nu_{im})}.$$

На высотах свыше 300—400 км существенный вклад начинает вносить теплопроводность.

Здесь рассмотрен лишь нагрев электронов и ионов ионосферы за счет фотоионизации. Существуют и другие источники нагрева: высыпание энергичных частиц из областей радиационных поясов или хвоста магнитосферы, нагрев под действием стационарного или квазистационарного электрического поля. Последний процесс может приводить в F -слое к резкому росту электронной и ионной температур типа рассмотренного в разделе 3.3 [68, 69].

5.4. Нагрев ионосферы в переменном электрическом поле.

Нагрев в D- и E-слоях. На небольших высотах (в слоях D и E) нагрев ионов мало существен, так как здесь $\nu_{im} \gg \delta_{ei} \nu_{ei}$ и

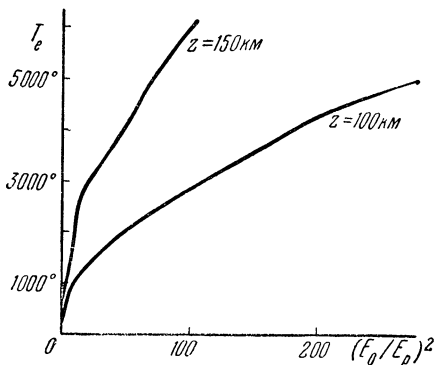


Рис. 5.4. Температура электронов в ионосфере.

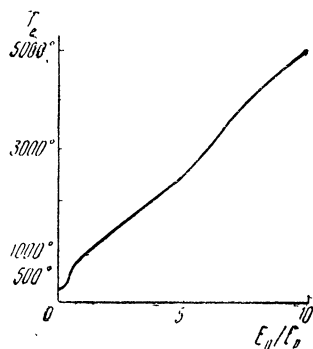


Рис. 5.5. Температура электронов при гирорезонансе; $z = 100$ км.

ионы очень энергично передают молекулам получаемую от электронов энергию. В этих областях $T_i = T + \Delta T_i$, где ΔT_i определено формулой (3.56а). Уравнение (3.52) для T_e принимает вид:

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 E^2 \nu_{em}}{3m(\omega^2 + \nu_{em}^2)} K_{\sigma} \left(\frac{\omega}{\nu_{em}} \right) - \delta_{em} \nu_{em} (T_e - T). \quad (5.23)$$

Здесь учтено, что передачей энергии электронов ионам на рассматриваемых высотах всегда можно пренебречь; плазма фактически слабо ионизована. Учтены также кинетические поправки к σ (выраженные множителем $K\sigma$; см. § 21.1).

Определенная с помощью (5.23) зависимость T_e от $(E_0/E_p)^2$ в нижней ионосфере представлена на рис. 5.4. Из рисунка видно, что температура электронов энергично растет с ростом амплитуды поля до значений $E_0/E_p \sim 5$. В дальнейшем рост T_e ослабевает из-за возрастания доли теряемой энергии δ_{em} , связанного с возбуждением нейтральных молекул.

Уравнение (5.23) справедливо лишь в том случае, когда электрическое поле волны параллельно магнитному полю Земли. В общем случае необходимо использовать уравнение (3.42) и нагрев зависит от поляризации волны. В частности, для волны, поляризованной по кругу в плоскости, ортогональной к \mathbf{H} , справедливо уравнение (5.23) с $\omega \rightarrow \omega' = \omega \pm \omega_H$. Если $\omega = \omega_H$, то для необыкновенной волны ($\omega = \omega - \omega_H$) имеет место гироманнитный резонанс. Зависимость T_e от E_0/E_{p0} в условиях гирорезонанса $\omega = \omega_H$ изображена на рис. 5.5 ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$). Здесь E_{p0} — плазменное поле (2.2) при $\omega = 0$. Видно, что к значительному нагреву могут привести уже весьма слабые поля, $E_0 \sim E_{p0} \sim 1 \text{ мВ/м}$. Однако создание таких полей на гирочастоте в глубине ионосферы затруднительно из-за сильного затухания радиоволн. Характер зависимости T_e/T от частоты волны ω в окрестности гирорезонанса вполне аналогичен представленному на рис. 3.3.

Нагрев в F-слое. На высотах $z \gtrsim 600 \text{ км}$ становится существенным и нагрев ионов. В общем случае здесь необходимо учитывать неоднородность плазмы, так что температуры электронов и ионов определяются общими уравнениями

(4.23) — (4.28). На высотах ниже максимума F-слоя процессами переноса можно пренебречь, и уравнения (4.27), (4.28) принимают вид

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 E^2 \nu_e K \sigma}{3m(\omega^2 + \nu_e^2)} - \delta_{em} \nu_{em} (T_e - T) - \delta_{ei} \nu_{ei} (T_e - T_i) + \frac{2Q}{3N}, \quad (5.24)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \delta_{ei} \nu_{ei} (T_e - T_i) - \nu_{im} (T_i - T).$$

Здесь принято, что частота поля $\omega^2 \gg \omega_H^2$. Результат расчета стационарных температур электронов и ионов в зависимости от напряженности электрического поля для $z = 300 \text{ км}$ представ-

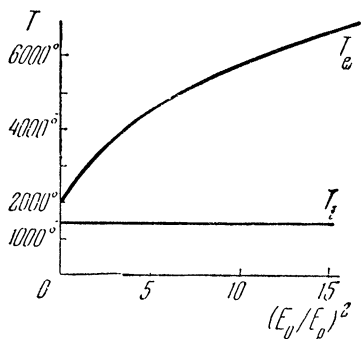


Рис. 5.6. Температуры электронов и ионов в F-слое.

лён на рис. 5.6. Величина Q выбрана равной $1,7 \cdot 10^4$ эв/см³сек. При этом $T_{e0} = 2000^\circ$, $T_{i0} = 1350^\circ$. Из рисунка видно, что значительный нагрев электронов при $z = 300$ км возможен в полях $E_0 \sim E_p$. Температура ионов растет здесь еще слабо, но на высотах ≥ 600 км она нарастает до значений, близких к T_e .

5.5. Возмущение концентрации электронов и ионов.

Под воздействием переменного электрического поля радиоволн температура электронов в возмущенной области ионосферы возрастает. С ростом T_e изменяется и эффективный коэффициент рекомбинации α . В частности, в E -слое ионосферы α падает с ростом T_e . Благодаря этому концентрация электронов и ионов под воздействием переменного электрического поля возрастает. Этот рост N , однако, ограничен влиянием процессов переноса, роль которых в области максимума F -слоя оказывается более существенной, чем изменение коэффициента рекомбинации. Вследствие этого в районе максимума F -слоя и выше него имеет место падение концентрации электронов при нагреве плазмы переменным электрическим полем [71—73, 234, 254].

Локально-однородное возмущение плазмы (область слоев E и F_1). Предположим вначале, что размер возмущенной области достаточно велик, так что процессами переноса можно пренебречь. В этом случае нагрев электронов и изменение концентрации носят тот же характер, что и в однородной плазме. Возмущение температуры электронов было рассмотрено выше. Возмущение концентрации электронов связано с изменением коэффициентов рекомбинации $\alpha = \alpha(T_e)$.

Учитывая (5.10), можно переписать формулу (5.11) в виде:

$$\frac{N(T_e)}{N(T_{e0})} = \frac{1}{2} \left\{ n_{O^+} + \sqrt{n_{O^+}^2 + 4n_{O_2^+} \frac{\alpha_2(T_{e0})}{\alpha_2(T_e)} + 4n_{N_2^+} \frac{\alpha_1(T_{e0})}{\alpha_1(T_e)}} \right\}. \quad (5.25)$$

Здесь T_{e0} , $N(T_{e0}) = N_0$, n_{O^+} , $n_{O_2^+}$, $n_{N_2^+}$ — температура и концентрация электронов и относительные концентрации ионов в невозмущенной плазме.

Формула (5.25) определяет изменение концентрации электронов при нагреве электронов в поле сильных радиоволн в пренебрежении процессами переноса. В частности, в случае слабого возмущения изменение температуры электронов в ионосфере определяется формулой

$$\frac{\Delta T_e}{T_{e0}} = \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2 \varphi; \quad \varphi = \frac{\varphi_p}{\varphi_T}. \quad (5.26)$$

Здесь φ_p — поляризационный фактор (3.42), а φ_T — фактор неизотермичности:

$$\varphi_T = \frac{(\delta\nu)}{\delta_0\nu_{e0}} + \frac{T_{e0} - T}{\delta_0\nu_{e0}} \frac{d}{dT_e} (\delta\nu); \quad (\delta\nu) = \delta_{em}\nu_{em} + \frac{\delta_{ei}\nu_{ei}\nu_{im}}{\delta_{ei}\nu_{ei} + \nu_{im}}. \quad (5.27)$$

Поле E_p определено согласно (2.2) с $\delta_0 = \delta(T_{e0})$ и $v_{e0} = v_{ei}(T_{e0}) + v_{em}(T_{e0})$. Фактор φ_T отличен от единицы вследствие неизоэнергичности ионосферы ($T_{e0} \neq T$). Для возмущения концентрации из (5.25) находим:

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \gamma_1 \frac{\Delta T_e}{T_{e0}}; \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_1 n_{NO^+} + \lambda_2 n_{O_2^+}}{2 - n_{O^+}}, \quad (5.28)$$

где согласно (5.9) $\lambda_1 = 1,2$; $\lambda_2 = 0,7$. Зависимость коэффициента γ_1 от высоты z для дневной ионосферы показана в табл. 5.8. Из таблицы видно, что γ_1 остается близким к 0,5 до 160—170 км; затем он быстро падает и при $z > 200$ км практически равен нулю. Приблизительно можно считать, что $\gamma_1 = 0,5$ при $z \leq 180$ км, $\gamma_1 = 0$ при $z > 180$ км. Формула (5.28) может использоваться вплоть до значений $\Delta T_e/T_{e0} \approx 1$.

Т а б л и ц а 5.8

$z, \text{ км}$	γ_1	$z, \text{ км}$	γ_1	$z, \text{ км}$	γ_1
60	0,55	110	0,49	160	0,42
70	0,55	120	0,45	170	0,36
80	0,53	130	0,45	180	0,27
90	0,51	140	0,445	190	0,16
100	0,505	150	0,44	200	0,08

Таким образом, нарушение ионизационно-рекомбинационного баланса за счет нагрева электронов существует только на высотах < 200 км. Причина этого заключается в том, что нагрев электронов может изменить лишь количество молекулярных ионов NO^+ и O_2^+ . На высотах $z > 180$ —200 км относительная концентрация таких ионов незначительна. Основную роль здесь играют ионы O^+ , концентрация которых не зависит от температуры электронов (5.10). Поэтому изменение T_e слабо сказывается в этой области на общем числе ионов или электронов N .

Влияние процессов переноса (область слоя F_2). Рассмотрим теперь стационарное возмущение ионосферной плазмы в неоднородном поле с учетом процессов переноса: диффузии, термодиффузии, теплопроводности [254]. Примем, что волна слабая, $E_0^2 < E_p^2$, так что вызываемые ею возмущения невелики: $\Delta N < N_0$, $\Delta T_e < T_{e0}$. Линеаризуя уравнения (4.73), (4.53) (учтено соотношение (4.77)) и исключая температуру ионов T_i с помощью (4.55), получаем следующую систему уравнений:

$$L_N^2 \frac{d^2 \Delta N}{dx_{\parallel}^2} + L_N^2 \frac{\cos \theta}{H_0} \frac{d \Delta N}{dx_{\parallel}} + k_T L_N^2 \frac{N_0}{T_{e0}} \frac{d^2 \Delta T_e}{dx_{\parallel}^2} = \Delta N - \gamma_1 \frac{N_0}{T_{e0}} \Delta T_e; \quad (5.29)$$

$$L_T^2 \frac{d^2 \Delta T_e}{dx_{\parallel}^2} = \Delta T_e - T_{e0} \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2 \varphi. \quad (5.30)$$

Таблица 5.9

	$z, \text{ км}$	$\tau_N, \text{ сек}$	$D_a, \text{ см}^2/\text{сек}$	$k_e = \nu_e / N_e, \text{ см}^2/\text{сек}$	$L_T, \text{ см}$	$L_N, \text{ см}$	η
День	100	52	$1,2 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^8$	$2,8 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^3$	1,38
	120	41	$3,2 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^{10}$	$3,5 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^4$	8,50
	150	35	$7,6 \cdot 10^7$	$1,4 \cdot 10^{11}$	$4,1 \cdot 10^5$	$5,2 \cdot 10^4$	62,2
	200	32	$1,7 \cdot 10^9$	$5,6 \cdot 10^{11}$	$1,7 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^5$	55,4
	250	$1,4 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^9$	$6,1 \cdot 10^{11}$	$2,5 \cdot 10^6$	$9,2 \cdot 10^5$	7,42
	300	$4,9 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^{10}$	$6,1 \cdot 10^{11}$	$2,8 \cdot 10^6$	$2,8 \cdot 10^6$	1,0
	400	$4,5 \cdot 10^3$	$7,2 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{12}$	$4,9 \cdot 10^6$	$1,7 \cdot 10^7$	0,083
	500	$3,7 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^{11}$	$2,2 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^7$	$9,8 \cdot 10^7$	0,0104
	600	$2,8 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^{12}$	$9,5 \cdot 10^{12}$	$2,2 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^8$	0,0013
Ночь	100	$2 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^5$	$7,5 \cdot 10^8$	$2,5 \cdot 10^3$	$2,0 \cdot 10^4$	0,015
	120	$1,5 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^6$	$1,0 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^4$	0,24
	150	$1,6 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^7$	$1,3 \cdot 10^{11}$	$4,1 \cdot 10^5$	$3,1 \cdot 10^5$	1,75
	200	60	$1,5 \cdot 10^9$	$1,2 \cdot 10^{12}$	$3,1 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^5$	27
	250	$4 \cdot 10^2$	$6,1 \cdot 10^9$	$3,7 \cdot 10^{12}$	$1,03 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^6$	41,5
	300	$2,2 \cdot 10^3$	$2,4 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$9,9 \cdot 10^6$	$7,2 \cdot 10^6$	1,89
	400	$5 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^{11}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$6,0 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^7$	0,0045
	500	$1,1 \cdot 10^6$	$6,5 \cdot 10^{11}$	$1,4 \cdot 10^{12}$	$1,1 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^{-4}$

Здесь x_{\parallel} — координата в направлении \mathbf{H} . Характерные длины L_N и L_T определены согласно (4.58), (4.59); для ионосферы они приведены в табл. 5.9. Термодиффузионное отношение k_T

$$k_T = k_{Tea} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\delta v_{ei}}{v_{im} + \delta v_{ei}} k_{Tia}, \quad (5.31)$$

где k_{Tea} , k_{Tia} определены согласно (4.64). Далее, $H_0 = (T_e + T_i)/Mg$ — нормальная высота для ионов, g — ускорение силы тяжести (учтено влияние гравитационного поля на распределение плазмы (4.78), (4.79)).

Заметим, что при выводе уравнений (5.29), (5.30) предполагалось, что N_0 и T_{e0} не зависят от x_{\parallel} . В реальных ионосферных условиях N_0 и T_{e0} зависят от высоты z , т. е. от $x_{\parallel} \cos \theta$, где θ — угол между вертикалью и направлением магнитного поля. Уравнения (5.29), (5.30) справедливы поэтому лишь при условии, что размер неоднородности ΔN или ΔT_e меньше $L/\cos \theta$, где L — характерный размер для изменения $N_0(z)$, $T_{e0}(z)$.

Решение уравнения (5.30) при граничных условиях $\Delta T_e \rightarrow 0$ при $x_{\parallel} \rightarrow \infty$, записывается в виде:

$$\Delta T_e = \frac{T_{e0}\Phi}{2L_T E_p^2} \left\{ e^{-x_{\parallel}/L_T} \int_{-\infty}^{x_{\parallel}} E_0^2(\mathbf{r}_{\perp}, x'_{\parallel}) e^{x'_{\parallel}/L_T} dx'_{\parallel} + e^{x_{\parallel}/L_T} \int_{x_{\parallel}}^{\infty} E_0^2(\mathbf{r}_{\perp}, x'_{\parallel}) e^{-x'_{\parallel}/L_T} dx'_{\parallel} \right\}. \quad (5.32)$$

Решение уравнения (5.29) для возмущений концентрации имеет аналогичный вид:

$$\Delta N = \frac{1}{L_N(k_1 + k_2)} \left\{ e^{-k_1 x_{\parallel}/L_N} \int_{-\infty}^{x_{\parallel}} \psi(x'_{\parallel}) e^{k_1 x'_{\parallel}/L_N} dx'_{\parallel} + \right. \\ \left. + e^{k_2 x_{\parallel}/L_N} \int_{x_{\parallel}}^{\infty} \psi(x'_{\parallel}) e^{-k_2 x'_{\parallel}/L_N} dx'_{\parallel} \right\}, \quad (5.33)$$

где

$$\psi = \gamma_1 \frac{N_0}{T_{e0}} \Delta T_e + k_T L_N^2 \frac{N_0}{T_{e0}} \frac{d^2 \Delta T_e}{dx_{\parallel}^2} = \\ = \frac{N_0}{T_{e0}} \left(\gamma_1 + k_T \frac{L_N^2}{L_T^2} \right) \Delta T_e - k_T N_0 \varphi \frac{L_N^2}{L_T^2} \cdot \frac{E_0^2}{E_p^2}, \quad (5.34) \\ k_1 = \sqrt{1 + \frac{L_N^2 \cos^2 \theta}{4H_0^2}} + \frac{L_N \cos \theta}{2H_0}, \\ k_2 = \sqrt{1 + \frac{L_N^2 \cos^2 \theta}{4H_0^2}} - \frac{L_N \cos \theta}{2H_0}.$$

Выражения (5.32) — (5.34) определяют возмущения ΔT_e и ΔN при произвольной зависимости амплитуды возмущающего поля E_0^2 от x_{\parallel} . Если поле E_0^2 слабо зависит от x_{\parallel} , т. е. мало меняется на характерных длинах L_T и L_N :

$$\frac{L_T}{E_0^2} \left| \frac{dE_0^2}{dx_{\parallel}} \right| \ll 1, \quad \frac{L_N}{E_0^2} \left| \frac{dE_0^2}{dx_{\parallel}} \right| \ll 1, \quad (5.35)$$

то в формулах (5.32) — (5.34) можно вынести E_0^2 из-под знака интегрирования и выражения (5.32) — (5.34) для ΔT_e и ΔN переходят в (5.26) — (5.28). Если, напротив, длина L_T велика, так что выполнено условие, противоположное (5.35), то поле E_0^2 в формуле (5.32) имеет резкий максимум в некоторой точке $x_{\parallel 0}$ и формула (5.32) принимает вид (ср. (4.72)):

$$\Delta T_e = \frac{T_{e0} \varphi \mathcal{K}}{2L_T E_p^2} \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{x_{\parallel} - x_{\parallel 0}}{L_T} \right\} & \text{при } x_{\parallel} > x_{\parallel 0}, \\ \exp \left\{ \frac{x_{\parallel} - x_{\parallel 0}}{L_T} \right\} & \text{при } x_{\parallel} < x_{\parallel 0}, \end{cases} \quad \mathcal{K} = \int E_0^2(x_{\parallel}) dx_{\parallel}. \quad (5.36)$$

Видно, что максимальное значение ΔT_e убывает в сравнении с (5.26) пропорционально $\Delta x_{\parallel}/2L_T$, где Δx_{\parallel} — характерная ширина распределения $E_0^2(x_{\parallel})$. Для возмущения концентрации в

тех же условиях при $L_N^2 \gg L_T^2$ из формулы (5.33) получаем:

$$\Delta N = -k_T \frac{N_0}{T_{e0}} \Delta T_e. \quad (5.37)$$

Из табл. 5.9 видно, что при $z \leq 200$ —250 км размеры L_N и L_T невелики. Здесь обычно выполнено условие (5.35) и справедливо локально-однородное приближение, рассматривавшееся в предыдущем разделе. При $z \geq 300$ км размер L_N очень быстро увеличивается. В районе максимума F -слоя и выше него он становится больше характерных размеров возмущенной радиоволны области. В этом случае в возмущенной зоне устанавливается гидродинамически равновесное распределение концентрации (5.37) (см. также (4.65), (4.68)).

Возмущения концентрации на оси гауссовского пучка $E^2 = E_0^2(y, z) \exp(-x_{\parallel}^2/a^2)$, рассчитанные по формулам (5.32) — (5.34), показаны на рис. 5.7. Из кривых видно, что на высотах ниже

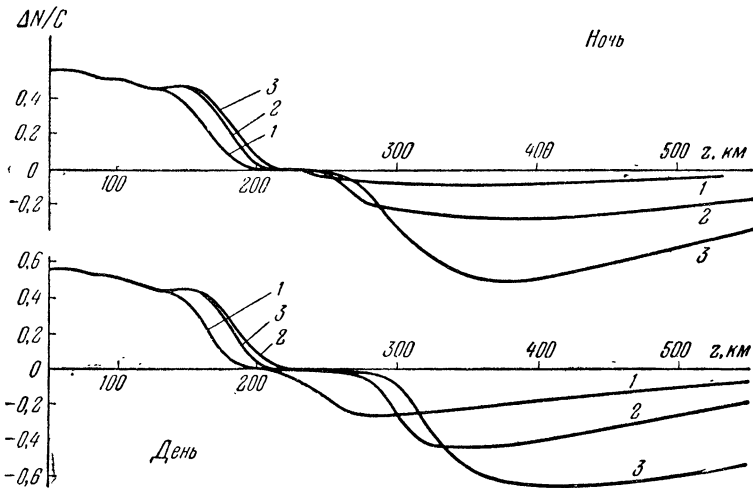


Рис. 5.7. Возмущения концентрации на оси пучка $\Delta N/C$, где $C = N_0 \Phi E_0^2/E_p^2$. Кривым 1, 2, 3 соответствует эффективная ширина пучка $a = 10, 30$ и 100 км.

180—200 км концентрация электронов возрастает под воздействием поля волны, как это и следует из формулы (5.28). В области высот $200 \text{ км} \leq z \leq (250\text{—}270) \text{ км}$ возмущения концентрации электронов незначительны. В области максимума F -слоя и выше него эти возмущения вновь нарастают. При этом концентрация N уменьшается под воздействием поля волны*). Это

*) Подчеркнем, что и сама величина $E_0^2(y, z)/E_p^2$ существенно изменяется с высотой z . В частности, она сильно возрастает в области отражения волны (так как $E_0^2 \sim 1/\sqrt{\epsilon_0}$), что приводит к значительному усилению возмущения в этой области (см. § 10).

область, где устанавливается гидродинамически равновесное распределение плазмы (5.37).

В плоскости, ортогональной к оси z , при $a > L_N, L_T$ (т. е. на небольших высотах) возмущение ΔN и ΔT_e повторяют распределение поля E . При $L_T \gg a$ оно вытягивается в направлении магнитного поля H . Если при этом поле H горизонтально ($\theta = \pi/2$), то картина симметрична относительно оси пучка ($x_{\parallel} = 0$). Этот случай изображен на рис. 5.8, где показан вид возмущенной области в плоскости xy , ортогональной к направлению распространения осесимметричного пучка z , для различных значений отношения $(L_T \sin \theta)/a$. Видно, что при малых значениях отношения

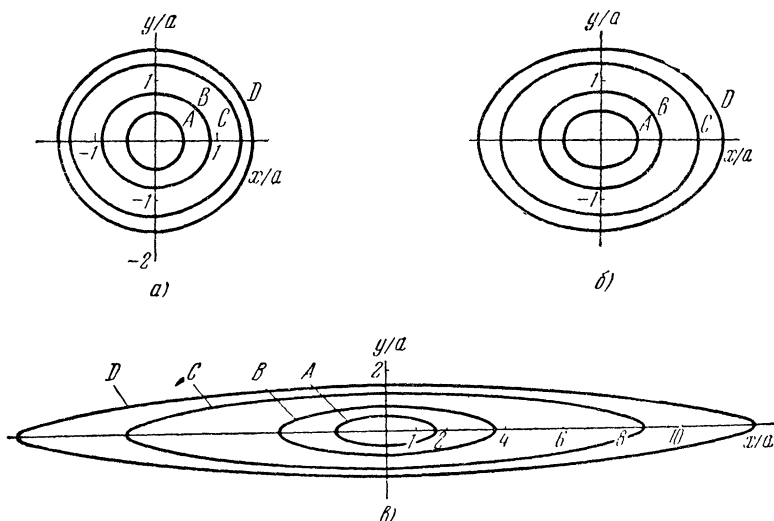


Рис. 5.8. Кривые возмущения концентрации $\Delta N = \text{const}$ в плоскости, ортогональной к оси пучка. а) $\frac{L_T \sin \theta}{a} = 0,2$; б) $\frac{L_T \sin \theta}{a} = 0,5$; в) $\frac{L_T \sin \theta}{a} = 5$.

Обозначения кривых А, В, С, D соответствуют значениям $\Delta N/\Delta N(0) = 0,8; 0,5; 0,2$ и $0,1$. Здесь $\Delta N(0)$ — возмущение на оси пучка.

$(L_T \sin \theta)/a \ll 1$ возмущенная область, как и пучок, осесимметрична. Процессы переноса в этом случае несущественны и структура возмущенной области совпадает с структурой пучка; распределение температуры и концентрации при этом локально-однородно. Если же отношение $(L_T \sin \theta)/a \gg 1$, то возникает сильная анизотропия в распределении возмущения: возмущенная область вытягивается в направлении магнитного поля. Если $\theta \neq \pi/2$, то в плоскости $z = \text{const}$ возникает асимметрия, связанная с тем, что возмущение распространяется вдоль оси x_{\parallel} . Поэтому при $\theta \neq \pi/2$ оно смещается по высоте z на $x_{\parallel} \cos \theta$, вызывая асимметрию возмущения в горизонтальной плоскости xy .

Отметим особый случай, когда радиоволны распространяются в направлении магнитного поля H . В этом случае теплопроводность мало существенна, так что возмущения температуры электронов всегда определены локальными выражениями (5.26). Возмущения концентрации при $z \leq 250-300$ км также определяются локальным балансом ионизации (5.28). В области максимума слоя и выше него становится существенной диффузия. Однако размер неоднородности $\Delta N(z)$ здесь такой же, как и в основной плазме $N_0(z)$, так что строгое решение можно получить лишь численно.

Подчеркнем также, что поскольку концентрация плазмы в F -слое в возмущенной волной области плазмы убывает (5.37), то достаточно мощный и сильно направленный пучок радиоволн как бы пробивает F -слой, образуя «дыры» в слоисто-однородном распределении плотности плазмы [71, 72]. Наиболее сильное воздействие оказывают при этом радиоволны с частотой, близкой к критической частоте слоя.

При конкретных расчетах этих явлений необходимо учитывать поглощение волн и ослабление пучка в области отражения [235], а для достаточно мощных и узких пучков — и их самовоздействие. Важную роль может сыграть и возможность возбуждения неустойчивости плазмы (см. § 5.7). Отметим также, что здесь рассматриваются только установившиеся, стационарные возмущения ΔT_e и ΔN . Время установления температуры — порядка $1/\delta\nu_e$, время установления N обычно много больше — порядка τ_N или a^2/D_a .

5.6. Дополнительная ионизация ионосферы.

Выше рассматривалось изменение концентрации электронов и ионов N в ионосфере, возникающее в результате изменения коэффициента рекомбинации и условий гидродинамического равновесия при нагреве плазмы в переменном электрическом поле радиоволн. Эти изменения N в общем невелики. В очень сильных электрических полях, однако, могут проявиться новые механизмы ионизации, действие которых приведет к резкому росту степени ионизации плазмы. Они и будут кратко обсуждены в настоящем разделе.

Ионизация ускоренными электронами (неизотермическая ионизация). В очень сильном электрическом поле может стать существенной дополнительная ионизация ионосферы за счет соударений ускоренных полей электронов с нейтральными молекулами (атомами) [74]. Уравнение баланса ионизации для электронов (5.2) принимает при этом вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_i + \nu_{\text{ion}} N - \beta N_m N - \alpha N^2 + \delta_c N_m N_- + \gamma N_- . \quad (5.38)$$

Здесь ν_{ion} — частота ионизации молекул быстрыми электронами.

Расчет частоты ν_{ion} проводится в рамках кинетической теории (§ 21.2). Согласно (21.50)

$$\nu_{\text{ion}} = (\nu_{\text{ion}})_0 \exp \left[- \frac{3m^2 (A\omega^2 + B)}{e^2 E_0^2} \right]. \quad (5.39)$$

Для воздуха и нижней ионосферы согласно (21.51), (21.52)

$$A = 2,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^2 \text{сек}^{-2}, \quad B = 5,5 N_m^2 \text{ см}^8 \text{сек}^{-4},$$

$$(\nu_{\text{ion}})_0 = 1,3 \cdot 10^{-9} N_m \left(\frac{\varepsilon_i}{T_e} \right)^{3/2} \frac{e^4 E_0^4}{m^4 (A\omega^2 + 2B)^2} \text{ см}^3 \text{сек}^{-1}. \quad (5.40)$$

Здесь T_e — эффективная температура электронов, определенная формулами (21.39), (21.49), $\varepsilon_i = 12,1 \text{ эв}$ — энергия ионизации молекул кислорода O_2 . В интересующих нас условиях $\varepsilon_i/T_e \approx 10$. Отметим, что в экспоненте в формуле (5.39) стоит всегда большая величина, поэтому зависимость ν_{ion} от E_0 , ω и N_m определяется в основном экспоненциальным членом.

Третий член в правой части уравнения (5.38) описывает прилипание электронов к молекулам. Здесь β — коэффициент прилипания. При низких энергиях электронов $\mathcal{E} \sim 0,1 \text{ эв}$ наиболее существенно прилипание электронов к молекулам кислорода при тройных столкновениях. В этом случае $\beta = KN_{\text{O}_2}$, где N_{O_2} — концентрация молекул кислорода. Коэффициент K имеет максимум $K_{\text{max}} \approx 5 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6 \text{сек}^{-1}$ при $\mathcal{E} \sim 0,1 \text{ эв}$ [200].

Согласно [44] среднее значение $K = 1,4 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6 \text{сек}^{-1}$. При больших энергиях электронов $\geq 1 \text{ эв}$ наиболее существенно диссоциативное прилипание. Коэффициент диссоциативного прилипания в воздухе β порядка $10^{-12} - 10^{-11} \text{ см}^3 \text{сек}^{-1}$ при $\mathcal{E} \approx 1 - 3 \text{ эв}$ [201].

Четвертый член в уравнении (5.38) описывает диссоциативную рекомбинацию (§ 5.1), два последних — отлипание электронов от отрицательных ионов при соударениях и под действием фотонов. Согласно [202] $\delta_e = 4 \cdot 10^{-20} \text{ см}^3 \text{сек}^{-1}$. Для дневных условий в D -слое $\gamma = 0,4 \text{ сек}^{-1}$, в ночных условиях $\gamma \sim 0$.

Прилипание играет важную роль в ионосфере на высотах $z \leq 60 - 80 \text{ км}$. Образуются отрицательные ионы. При определении баланса ионизации в стационарных условиях необходим, вообще говоря, полный анализ с учетом ионной кинетики, в частности, рекомбинации положительных и отрицательных ионов. Здесь же мы учтем, что процесс отлипания — медленный, так что при не слишком длительном воздействии поля сильной волны на плазму ($\Delta t \ll (\delta_e N_m)^{-1}$) его можно не учитывать. На небольших высотах $z < 80 \text{ км}$ несуществен и процесс рекомбинации. Уравнение (5.38) принимает тогда простой вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q_i + \nu_{\text{ion}} N - \beta N_m N. \quad (5.41)$$

Из этого уравнения видно, что при малой частоте ν_{ion} (если $\nu_{\text{ion}} \ll \beta N_m$) роль дополнительной ионизации несущественна.

Напротив, если $v_{10n} \gg \beta N_m$, концентрация электронов лавинно нарастает, возникает электрический пробой газа. С учетом выражений (5.39), (5.40) для v_{10n} условие возникновения пробоя запишется в виде:

$$E_0 \geq E_k, \quad E_k = \frac{(3x_0)^{1/2} m}{e} (A\omega^2 + B)^{1/2}, \quad (5.42)$$

где константа x_0 определена соотношением:

$$x_0^2 e^{x_0} \approx \frac{3,6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}}{\beta} \left(\frac{A\omega^2 + 2B}{A\omega^2 + B} \right)^2.$$

Здесь E_k — критическое поле пробоя в воздухе. Формула (5.42) достаточно хорошо согласуется с данными лабораторных измерений [75, 76]. Поле E_k в зависимости от высоты z в атмосфере представлено на рис. 5.9. Из рисунка и формул (5.42), (5.40) видно, что поле E_k быстро убывает с высотой (пропорционально N_m), пока частота поля ω не сравнивается с $v_0 = (B/A)^{1/2} \approx 1,6 \cdot 10^{-7} N_m$. После этого поле E_k почти не зависит от N_m .

Если $E_0 \geq E_k$, то концентрация электронов в плазме резко возрастает. Сказанное, однако, относится лишь к плазме, находящейся в заданном периодическом электрическом поле. Если же пробой осуществляется бегущими радиоволнами, как это имеет место в ионосфере, то следует учесть, что с ростом концентрации электронов столь же резко растет и поглощение волны.

Интенсивность волны за счет поглощения быстро спадает, что приводит к известной стабилизации: концентрация электронов при $E_0 \geq E_k$ растет не слишком сильно. Это один из примеров «самовоздействия» волны в плазме (подробнее см. § 7.3).

Изотермическая ионизация. Выше предполагалось, что разогреваются только электроны. На небольших высотах $z \leq 60$ км важную роль может сыграть нагрев нейтрального газа [272]. Действительно, при высоких температурах нейтрального газа существенной становится изотермическая ионизация. Степень изотермической ионизации, т. е. ионизации газа в условиях термодинамического равновесия, определяется формулой Саха [37]:

$$N = N_m \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/4} e^{-\epsilon_i/2T}. \quad (5.43)$$

Здесь T — температура газа, ϵ_i — энергия ионизации. Из табл. 5.7 (стр. 67) видно, что наименьший потенциал

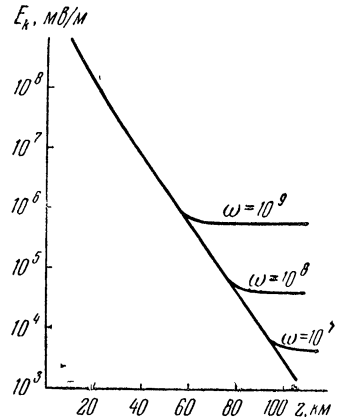


Рис. 5.9. Критическое поле пробоя в верхней атмосфере.

ионизации — у молекул NO. Они поэтому играют основную роль. Количество молекул NO в воздухе приблизительно выражается формулой [78]

$$N_{\text{NO}} \approx \frac{N_m}{50} \exp\left(-\frac{0,26}{T}\right), \quad (5.44)$$

где N_m — полная концентрация молекул в воздухе, T — температура в эв. Подставляя (5.43) в (5.44) и учитывая, что $N_m = p_0/T$, где p_0 — давление невозмущенного газа (это соотношение следует из условий гидродинамического равновесия нагретой области в воздухе), находим:

$$N \approx \frac{\sqrt{p_0}}{7} T^{1/4} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-4,76/T} \approx \sqrt{p_0} T^{1/4} \exp\left(41 - \frac{4,76}{T}\right) \quad (5.45)$$

(давление p_0 выражено в атмосферах, температура T — в эв). Отсюда следует, что уже при $T \approx 0,25-0,3$ эв концентрация электронов при $p_0 \sim 10^{-3}-10^{-1}$ атм (т. е. на высотах 50—20 км) достигает 10^8-10^{11} см⁻³.

Нагретая область атмосферы, естественно, остывает, теряет энергию. Потери тепла осуществляются за счет молекулярной теплопроводности, излучения и ветров. Поток энергии, уходящей из нагретой области за счет теплопроводности,

$$S_m = \kappa_m \nabla T \sim \frac{\kappa_m (T - T_0)}{R_0}. \quad (5.46)$$

Здесь κ_m — коэффициент молекулярной теплопроводности (в воздухе при температурах порядка 10^3 градусов $\kappa_m \sim 10^4$ эрг/см·сек·град), R_0 — характерный размер сильно нагретой области, T — температура разряда, T_0 — температура невозмущенного газа.

Излучение при низких температурах T и малых давлениях p_0 , а также при не слишком больших размерах нагретой зоны R_0 свободно выходит из области разряда. Потери энергии на излучение носят в этом случае объемный характер:

$$J = \sigma_f T^4 f. \quad (5.47)$$

Здесь J — энергия, излучаемая 1 см³ газа в 1 сек, $\sigma_f = 5,67 \cdot 10^{-4}$ эрг/см²·сек·град⁴ — постоянная Стефана — Больцмана, $f = 1/l(T, p_0)$, где l — характерная длина. Численные расчеты [79] показывают, что для воздуха при низких температурах ($\sim 10^3$ °) и давлениях ($p_0 \sim 0,1-0,001$ атм) имеем $f \approx 2 \cdot 10^{-15} T^3 p_0^{3/2}$ см⁻¹; здесь T — в градусах, p_0 — в атмосферах.

Наконец, поток энергии, теряемой за счет действия ветра,

$$S_v = N_m v_n T = \frac{T}{T_0} v_n p_0. \quad (5.48)$$

Здесь v_n — нормальная к границе разряда компонента скорости ветра в невозмущенном газе.

Высокая температура газа может поддерживаться за счет омических потерь энергии мощной радиоволны. Пусть W_0 — полная мощность, теряемая радиоволной в области разряда. Приравнявая ее суммарной мощности потерь (5.46), (5.47), приходим к соотношению

$$4\pi R_0 \kappa_m T + \frac{4}{3} \pi R_0^3 J = W_0, \quad (5.49)$$

приближенно определяющему размер разряда R_0 . Здесь мы для простоты приняли разряд сферическим и пренебрегли влиянием ветров. Заметим, что если волна, вызвавшая разряд, — сходящаяся и если

$$R_0 \gg \Delta_c, \quad (5.50)$$

где Δ_c — глубина проникновения поля в плазму (см. § 7.3), то она фактически полностью диссипирует в разряде. В этом случае W_0 — полная мощность волны.

При низких температурах разряда концентрация электронов N мала и поглощение волны незначительно; при высоких температурах N велико и возникает сильное отражение радиоволны. Наиболее эффективная с точки зрения поглощения энергии температура разряда T_n определяется приближенно соотношением

$$\frac{4\pi e^2 N(T_n)}{m\omega^2} \approx 1. \quad (5.51)$$

Отсюда, учитывая экспоненциальную зависимость N от T (5.45), находим:

$$T_n = \frac{0,22 \text{ эв}}{1 - 0,093 \ln(\omega/10^9) + 0,023 \ln(p_0/10^{-2})}. \quad (5.52)$$

Здесь ω — в сек^{-1} , p_0 — в атм . Это соотношение и приводит к характерным температурам $T_n \approx 0,2-0,3 \text{ эв}$ при $\omega \sim 10^8-10^{10}$.

Соотношения (5.49), (5.50), (5.52) приближенно определяют температуру, размер и условия существования разряда. Заметим, что при выполнении соотношений (5.51), (5.52) $\Delta_c \approx c/v_e$. Соотношение (5.50) определяет тогда минимальный размер разряда

$$R_{0 \min} \approx \alpha c/v_e, \quad (5.53)$$

а соотношение (5.49) — минимальную мощность волны, создающей разряд:

$$W_{0 \min} \approx \frac{4\pi \alpha c}{v_e} \left[\kappa_m T + \frac{\alpha^2}{3} \frac{c^2}{v_e^2} J \right]. \quad (5.54)$$

Здесь константа $\alpha \approx 2-3$. При $v_e \approx 10^9 \text{ сек}^{-1}$, $p_0 \approx 0,01 \text{ атм}$, $T \approx 3000^\circ$ минимальный размер $R_{0 \min} = 1 \text{ м}$, а минимальная мощность $W_{0 \min} \approx 5 \text{ квт}$. При $v_e = 10^8 \text{ сек}^{-1}$, $p_0 = 0,001 \text{ атм}$, $T = 3000^\circ$ имеем $R_{0 \min} \approx 10 \text{ м}$, $W_{0 \min} \approx 200 \text{ квт}$. Минимальная мощность $W_{0 \min}$ быстро нарастает с увеличением высоты z . Одновременно увеличивается минимальный размер разряда.

С ростом диссипируемой мощности волны размер разряда растет (см. (5.49)). При малых значениях $W_0 \ll W_1$, где

$$W_1 \approx \frac{8\sqrt{3} \pi (\kappa_m T)^{3/2}}{J^{1/2}}, \quad R_{01} \approx \left(3\kappa_m \frac{T}{J}\right)^{1/2}, \quad (5.55)$$

размер R_0 линейно растет с W_0 ; при этом $R_0 \ll R_{01}$. При больших значениях $W_0 \gg W_1$, напротив, $R_0 > R_{01}$; при этом $R_0 \sim W_0^{1/3}$. В первом случае определяющую роль играют потери на теплопроводность, во втором — потери на излучение. Значения W_1 и R_{01} растут с уменьшением температуры и давления: $W_1 \sim T^{-2} p_0^{-3/4}$, $R_{01} \sim T^{-3} p_0^{-3/4}$. При $T = 3000^\circ$, $p_0 = 0,01$ атм имеем $R_{01} \approx 2$ м, $W_1 \approx 15$ квт.

Остановимся теперь на условиях, при которых справедливы предположения об изотермическом характере разряда. Прежде всего выше предполагалось, что плазма находится в состоянии, близком к термодинамически равновесному. Это справедливо, если температура электронов T_e близка к температуре нейтрального газа T , т. е. если поле волны E_0 меньше характерного плазменного поля E_p . Учитывая, что для сферической волны $E_0 \approx (2W_0/cR_0^2)^{1/2}$, находим, что условие изотермичности ограничивает мощность волны соотношением

$$W_0 < \frac{3}{2} \frac{mcT\delta(\omega^2 + \nu_e^2)}{e^2} R_0^2. \quad (5.56)$$

Здесь размер разряда R_0 определен соотношением (5.49). Видно, что при достаточно больших значениях R_0 (т. е. при достаточно больших значениях W_0) соотношение (5.56) нарушается.

Отметим, что изотермичность нарушается также вследствие выхода излучения из зоны разряда. Роль этого процесса, как и влияние нагрева электронов при значительных отклонениях T_e от T , может быть исследована лишь при детальном кинетическом анализе. Следует, кроме того, отметить, что здесь рассматриваются фактически не условия пробоя, а условия поддержания уже существующей в газе ионизации.

Важно также, что выше мы пренебрегли влиянием ветров. Как видно из (5.48), (5.49), это справедливо лишь при

$$v_n < \frac{\kappa_m T_0}{\rho_0 R_0} \left(1 + \frac{JR_0^2}{3\kappa_m T}\right).$$

Нетрудно видеть, что это условие для высот 20—60 км приводит к весьма сильным ограничениям для скорости ветра, $v_n \leq 1$ м/сек. В реальных условиях верхней атмосферы скорость ветра в среднем на порядок больше. При таких больших скоростях v_n потери, связанные с ветрами, очень велики, они подавляют ионизацию. Приведенные выше оценки справедливы,

поэтому, только в условиях, когда нагреваемая область перемещается в атмосфере вместе с ветром, т. е. когда нагревающий плазму радиолуч перемещается вслед за нагреваемой областью.

5.7. Возбуждение неустойчивости ионосферы.

При энергичном воздействии радиоволн на ионосферу можно ожидать усиления и возбуждения в возмущенной области различных колебаний плазмы. Это, естественно, должно сказаться на условиях распространения как самих волн, вызвавших возмущение, так и на других волнах, распространяющихся в возмущенной области. Возникает усиленное (так называемое аномальное) поглощение и рассеяние волн. Поэтому вопрос о возбуждении неустойчивости ионосферной плазмы в переменном электрическом поле радиоволн представляет особый интерес.

Естественно выделить два характерных вида неустойчивостей. Первый связан с общим возмущением состояния ионосферной плазмы, с созданием в ней искусственных неоднородностей. Действительно, выше было показано, что под воздействием поля сильных радиоволн в ионосфере могут существенно измениться температуры электронов и ионов, концентрация плазмы. В прогретой радиоволнами области плазмы возникает, таким образом, искусственно созданная неоднородность T_e, T_i, N . Такая неоднородность в магнитном поле при наличии дрейфа электронов и ионов легко может стать неустойчивой (см. § 4.4).

Рассмотрим, например, случай, когда неоднородность сильно вытянута вдоль магнитного поля, т. е. когда ионосфера прогревается пучком радиоволн, направленным вдоль H . В этом случае критерий неустойчивости определяется условием (4.85):

$$\frac{\Omega_H}{\nu_{im}} \tau_N v_0 \frac{|\Delta N|}{N_0} \frac{|\nabla N_0|}{N_0} > 1.$$

Здесь учтено, что $v_1 \sim v_0 (\Delta N/N_0)$, где v_0 — скорость дрейфа, ΔN — возмущение концентрации электронов $\left(\frac{\Delta N}{N_0} \sim \frac{E_0^2}{E_p^2}\right)$, τ_N — время жизни электрона. Величина $(\Omega_H/\nu_{im})\tau_N$ приведена в таблице:

$z, \text{ км}$	100	150	200	250	300	400
$\frac{\Omega_H}{\nu_{im}} \tau_N, \text{ сек}; \begin{cases} \text{день} \\ \text{ночь} \end{cases}$	5 2 · 10 ²	10 ² 5 · 10 ²	1,5 · 10 ³ 3 · 10 ³	1,5 · 10 ⁴ 5 · 10 ⁴	1,5 · 10 ⁵ 7 · 10 ⁵	10 ⁷ 10 ⁸

Учитывая, что в ионосфере $v_0 \sim 10-10^2 \text{ м/сек}$, находим, что при характерном размере неоднородности $N_0/|\nabla N_0| \approx 50 \text{ км}$

условия возбуждения рассматриваемой неустойчивости выполняются днем на высотах $z \gtrsim 200\text{--}250$ км, ночью при $z \gtrsim 150\text{--}250$ км.

В общем случае могут возбуждаться также дрейфовые и гравитационные волны. На высотах порядка 100 км при больших скоростях электронного дрейфа возможно возбуждение ионно-звуковых волн, а на больших высотах — циклотронных колебаний плазмы.

Второй тип неустойчивостей — это неустойчивости, непосредственно связанные с наличием в плазме сильного переменного электрического поля, с распространением в ней радиоволн. Примеры таких неустойчивостей — расслоение плазмы и параметрическая неустойчивость в области плазменных резонансов — были указаны в § 4.5. Оценки пороговой амплитуды электрического поля по формуле (4.96) для параметрической неустойчивости при $\omega \approx \omega_0$ в ионосфере приведены в табл. 5.10. Из таблицы видно, что пороговые значения амплитуды поля для параметрической неустойчивости в ночных условиях сравнительно невелики, так что эта неустойчивость вполне может осуществляться в области отражения радиоволн в реальных условиях ионосферы. Она, по-видимому, наблюдалась в экспериментах Ютло, Коэна и др. [236, 273, 279].

Таблица 5.10

ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ
ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

z , км	День		Ночь	
	ω , сек ⁻¹	$E_{\text{п}}$, мв/м	ω , сек ⁻¹	$E_{\text{п}}$, мв/м
100	$1,6 \cdot 10^7$	730	$2 \cdot 10^6$	270
150	$2,6 \cdot 10^7$	290	$2,6 \cdot 10^6$	72
200	$4,0 \cdot 10^7$	290	$3,1 \cdot 10^6$	33
250	$5,7 \cdot 10^7$	410	$6 \cdot 10^6$	27
300	$7,3 \cdot 10^7$	520	$1,8 \cdot 10^7$	83
400	—	—	$3 \cdot 10^7$	165

Другие неустойчивости, связанные с распространением в ионосферной плазме радиоволн, будут рассмотрены ниже в соответствующих разделах. Это — термоионизационная неустойчивость (§ 8.5), релаксационная неустойчивость (§ 10.4), неустойчивости, приводящие к расслоению пучков радиоволн (§ 13.3).

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ РАДИОВОЛН

§ 6. Упрощение исходных уравнений

Распространение электромагнитных волн в среде описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\epsilon} - 1}{4\pi} \mathbf{E} \right). \quad (6.5)$$

Здесь $\hat{\sigma}$ и $\hat{\epsilon}$ — операторы проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы; магнитная проницаемость неионизованной среды принята равной единице. Применяя операцию rot к уравнению (6.3) и воспользовавшись (6.1), (6.5), приходим к следующему уравнению электрического поля волны:

$$\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\sigma} \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = 0. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) нелинейное, так как тензоры $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\sigma}$, вообще говоря, зависят от \mathbf{E} .

6.1. Нелинейное волновое уравнение.

Примем, что частота волны ω достаточно велика, так что время $1/\omega$, в течение которого существенно меняется поле, много меньше характерного времени установления средней энергии (или температуры) электронов в плазме ($1/\delta v_e$):

$$\omega \gg \delta v_e. \quad (6.7)$$

В ионосфере, как отмечалось выше, условие (6.7) обычно хорошо выполнено. В этом случае, как показано в § 3.2, температура электронов в сильном переменном электрическом поле волны может значительно отличаться от своего невозможного значения. Важно, однако, что T_e устанавливается на

постоянном, не зависящем от времени уровне; периодически меняющиеся поправки к нему малы — имеют амплитуду порядка $\delta v/\omega$ (3.43). Точно так же ведут себя проводимость и диэлектрическая проницаемость плазмы (3.44). Это означает, что решение уравнения (6.6) можно искать методом последовательных приближений, разлагая его в ряд по степеням малого параметра $\delta v_e/\omega$ [80]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots; \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(1)} + \hat{\sigma}^{(2)} + \dots; \quad \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^{(1)} + \hat{\epsilon}^{(2)} + \dots$$

Подставляя это разложение в (6.6), учтем, что в первом приближении проводимость $\hat{\sigma}$ и диэлектрическая проницаемость среды $\hat{\epsilon}$ постоянны во времени. В этом приближении волна, пришедшая на границу плазмы, сохраняет свою частоту ω , и уравнение (6.6) сводится к волновому уравнению:

$$\Delta \mathbf{E}^{(1)} - \text{grad div } \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon}' \mathbf{E}^{(1)} = 0 \quad \left(\text{где } \hat{\epsilon}' = \hat{\epsilon}^{(1)} + i \frac{4\pi\hat{\sigma}^{(1)}}{\omega} \right). \quad (6.8)$$

Выражения для тензоров $\hat{\epsilon}^{(1)}$ и $\hat{\sigma}^{(1)}$ или для тензора $\hat{\epsilon}'$ проанализированы в предыдущей главе. Тензоры зависят от T_e , т. е. от амплитуды $|\mathbf{E}^{(1)}|$. Благодаря этому уравнение (6.8) нелинейное, что, разумеется, существенно отличает его от рассматриваемого обычно линейного волнового уравнения.

В следующем приближении:

$$\Delta \mathbf{E}^{(2)} - \text{grad div } \mathbf{E}^{(2)} - \frac{4\pi\hat{\sigma}^{(1)}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^{(2)}}{\partial t} - \frac{\hat{\epsilon}^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}^{(2)}}{\partial t}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{j}^{(2)} = \hat{\sigma}^{(2)} \mathbf{E}^{(1)} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon}^{(2)} \mathbf{E}^{(1)}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\epsilon}'^{(2)} \mathbf{E}^{(1)}].$$

Здесь тензоры $\hat{\sigma}^{(1)}$, $\hat{\epsilon}^{(1)}$, $\hat{\epsilon}'^{(2)}$ и ток $\mathbf{j}^{(2)}$ зависят только от $\mathbf{E}^{(1)}$. Поэтому уравнение (6.9) для электрического поля гармоники $\mathbf{E}^{(2)}$ линейное. Частота волны $\mathbf{E}^{(2)}$ совпадает с частотой нелинейной поправки к току $\mathbf{j}^{(2)}$, т. е. равна сумме или разности частоты основной волны ω и частот основных переменных поправок к проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы $\hat{\sigma}^{(2)}$, $\hat{\epsilon}^{(2)}$.

Аналогичным образом можно получить уравнения и для последующих гармоник.

6.2. Нелинейная геометрическая оптика плоской волны.

Волновое уравнение (6.8) достаточно сложно. Из линейной теории известно, что оно может быть существенно упрощено в случае, когда среда слабо неоднородна, т. е. когда свойства среды мало меняются на длине волны. В этом случае справедливо приближение геометрической оптики. Волновое поле в этом приближении представляется в виде совокупности лучей (пучка лучей), характеризующихся в каждой точке определенной интенсивностью и направлением распространения. Анало-

гичное приближение геометрической оптики может быть построено и для нелинейного волнового уравнения (6.8).

В силу наличия двух независимых состояний поляризации волны в геометрической оптике часто приходится рассматривать волновое поле, состоящее в каждой точке из двух или нескольких лучей. В линейной теории эти лучи независимы (кроме особых областей, где неприменима геометрическая оптика). В нелинейной же теории, напротив, различные лучи всегда взаимосвязаны. Это существенно усложняет многолучевую нелинейную геометрическую оптику. Поэтому мы ограничимся главным образом рассмотрением нелинейных явлений в однолучевых геометрико-оптических системах.

Рассмотрим плоско-слоистую среду, т. е. примем, что свойства плазмы меняются лишь в одном направлении z (т. е. $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(z)$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(z)$). Волну будем считать плоской, распространяющейся в направлении z и имеющей одну нормальную компоненту линейной поляризации. Тогда существенна лишь одна компонента тензоров проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы, и волновое уравнение (6.8) принимает вид:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'(z, |E|) E = 0. \quad (6.10)$$

Здесь $\epsilon' = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Граничное условие:

$$E|_{z=0} = E(0). \quad (6.11)$$

Решение уравнения (6.10), естественно, представляется в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Рассмотрим лишь одну бегущую волну. Иначе говоря, будем искать решение уравнения (6.10) в виде

$$E(z) = E_1(z) \exp \left\{ i \int k dz - \frac{\omega}{c} \int \kappa dz \right\}. \quad (6.12)$$

Здесь k — волновой вектор:

$$k = \frac{\omega}{c} n; \quad (6.13)$$

n и κ — показатели преломления и поглощения волны:

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{Re} \sqrt{\epsilon'(z)} = \left[\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2} \right]^{1/2}, \\ \kappa &= \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon'(z)} = \left[-\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В частности, если $\epsilon \gg 4\pi\sigma/\omega$, то

$$n = \sqrt{\epsilon}, \quad \kappa = \frac{2\pi\sigma}{\omega \sqrt{\epsilon}}. \quad (6.15)$$

Подставляя выражение (6.12) в уравнение (6.10), приходим к следующему уравнению для $E_1(z)$:

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + 2i \sqrt{\epsilon'} \frac{dE_1}{dz} + \frac{iE_1}{2\sqrt{\epsilon'}} \frac{d\epsilon'}{dz} = 0. \quad (6.16)$$

Если выполнено условие

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{d\epsilon'}{dz} (\epsilon')^{-3/2} \ll 1, \quad (6.17)$$

то членом $d^2 E_1/dz^2$ в уравнении (6.16) можно пренебречь. Из него тогда следует, что

$$E_1(z) = E(0) (\epsilon')^{-1/4},$$

где $E(0)$ — поле на границе плазмы (6.11). Таким образом, в приближении геометрической оптики

$$E(z) = \frac{E(0)}{(\epsilon')^{1/4}} \exp\left(i \int_0^z \sqrt{\epsilon'} dz\right). \quad (6.18)$$

Это соотношение является в нелинейной теории интегральным уравнением, так как само ϵ' зависит от амплитуды поля $|E(z)|$. Переходя в (6.18) к $E_0(z) = |E(z)|$, переписываем его в виде:

$$E_0(z) = \frac{E_0(0)}{(n^2 + \kappa^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{\omega}{c} \int_0^z \kappa dz\right), \quad (6.19)$$

где $n = n[z, E_0(z)]$; $\kappa = \kappa[z, E_0(z)]$. Вдали от точки отражения волны $n \gg \kappa$; кроме того, при этом зависимость коэффициента преломления от амплитуды поля обычно мало существенна, $n \neq n(E_0)$. В этом случае уравнение (6.19) упрощается и его удобно переписать в дифференциальной форме:

$$\frac{dE_0}{dz} + \frac{E_0}{2n} \frac{dn}{dz} + \frac{\omega}{c} \kappa E_0 = 0. \quad (6.20)$$

Уравнения (6.19), (6.20) представляют собой уравнения нелинейной геометрической оптики для плоской волны, распространяющейся нормально к слою плазмы. В отличие от линейной теории, показатели поглощения и преломления волны зависят здесь от ее амплитуды E_0 . Заметим, что в сильном поле, когда $\epsilon' = \epsilon'(|E|)$, для выполнения условия (6.17) необходимо, чтобы

$$\kappa/n \ll 1, \quad (6.21)$$

§ 7. Влияние нелинейности на амплитуду и фазу волны

Рассмотрим распространение плоской волны в слое плазмы. Волна распространяется в направлении z (нормальное падение на слой). Амплитуда поля волны в плазме в приближении геометрической оптики описывается уравнением (6.20) или (6.19).

7.1. Самовоздействие слабой волны.

Примем вначале, что волна, пришедшая на границу плазмы, слабая ($E_0^2 \ll E_p^2$) [81—83]. В этом случае вызываемые ею в плазме возмущения малы. Соответственно малы и нелинейные эффекты, так что при решении уравнения (6.20) можно воспользоваться теорией возмущений, считая первое приближение линейным:

$$E_0 = E_1(z) + E_2(z) + \dots, \quad E_1(z) = \frac{E_0(0)}{\sqrt{n_0(z)}} \exp\left(-\frac{\omega}{c} \int_0^z \kappa_0(z) dz\right), \quad (7.1)$$

где $n_0(z)$ и $\kappa_0(z)$ — линейные показатели преломления и поглощения среды. Подставляя разложение (7.1) в уравнение (6.20), получим:

$$\frac{dE_2}{dz} + \frac{E_2}{2n_0} \frac{dn_0}{dz} + \frac{\omega}{c} \kappa_0 E_2 = -E_1 R, \\ R = \frac{\omega}{c} \left(\frac{d\kappa}{dT_e} \right)_{T_{e0}} \Delta T_e(E_1) + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{dn}{dT_e} \right)_{T_{e0}} \frac{\Delta T_e(E_1)}{n_0} \right]. \quad (7.2)$$

Здесь учтено, что нелинейность обусловлена нагревом электронов плазмы в поле волны, ΔT_e — возмущение температуры электронов под воздействием поля, T_{e0} — температура электронов в невозмущенной плазме. Изменение температуры электронов приводит к соответствующему изменению концентрации и частоты соударений электронов, а, следовательно, и показателей поглощения и преломления волны.

Интегрируя уравнение (7.2) с граничным условием $E_2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, имеем:

$$E_2(z) = -E_1(z) \int_0^z R dz. \quad (7.3)$$

Таким образом, амплитуда поля волны в плазме $E_0(z)$ при учете нелинейности дается выражением

$$E_0(z) = E_1(z) \left[1 - q - \frac{1}{2n_0} \left(\frac{dn}{dT_e} \right)_{T_{e0}} \Delta T_e(E_1) \right], \\ q = \int_0^z \Delta T_e[E_1(z)] \frac{\omega}{c} \left(\frac{d\kappa}{dT_e} \right)_{T_{e0}} dz. \quad (7.4)$$

Здесь $E_1(z)$ — амплитуда поля волны в линейном приближении. Коэффициент q характеризует влияние нелинейности на поле слабой волны (поскольку $dn/dT_e \sim N_0$, то последний член в (7.4) исчезает при выходе волны из плазмы, т. е. при $N_0 \rightarrow 0$; зато он важен в области отражения, где $n_0 \rightarrow 0$; см. § 10).

Получим конкретные выражения для коэффициента q , для чего произведем некоторые упрощения. Рассмотрим область вдали от точки отражения волны, когда изменением показателя преломления можно пренебречь (самовоздействие в области отражения волны рассмотрено в § 10). В этом случае при $n_0 \gg \kappa_0$, как следует из (6.15), (3.13),

$$\kappa = \frac{2\pi e^2 N v_e}{m\omega n_0 (\omega^2 + v_e^2)}, \quad (7.5)$$

где v_e — эффективная частота соударений электрона. Под воздействием электрического поля волны увеличивается температура электронов T_e ; благодаря этому меняется частота соударений v_e и концентрация электронов в плазме N . Соответственно:

$$\left(\frac{d\kappa}{dT_e} \right)_{T_{e0}} = \left\{ \frac{2\pi e^2 N (\omega^2 - v_e^2)}{m\omega (\omega^2 + v_e^2)^2 n_0} \left(\frac{dv_e}{dT_e} \right) + \frac{2\pi e^2 v_e}{m\omega (\omega^2 + v_e^2) n_0} \left(\frac{dN}{dT_e} \right) \right\}_{T_{e0}}. \quad (7.6)$$

Учтем теперь, что согласно (3.32а), (7.1)

$$\Delta T_e(E_1) = \frac{e^2 E_0^2(0)}{3m\delta_0 (\omega^2 + v_{e0}^2) n_0(z)} \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_0^z \kappa_0(z_1) dz_1\right), \quad (7.7)$$

где $\delta_0 = \delta(T_{e0})$, $v_{e0} = v_e(T_{e0})$. Примем также, что $v_{e0} \neq v_{e0}(z)$ и что $\frac{dN}{dT_e} = \gamma_1 \frac{N}{T_{e0}}$, где γ_1 — постоянная (см. § 5.5). В этом случае интегрирование в формуле (7.4) можно провести аналитически. Подставляя (7.6), (7.7) в (7.4) и интегрируя, находим:

$$q = \left[\frac{E_0(0)}{E_p} \right]^2 \frac{1}{n_0} \left[\frac{T_{e0}}{2v_{e0}} \left(\frac{dv_e}{dT_e} \right)_{T_{e0}} \frac{\omega^2 - v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} + \frac{\gamma_1}{2} \right] (1 - e^{-2K}), \quad (7.8)$$

$$K = \frac{\omega}{c} \int_0^z \kappa_0(z_1) dz_1.$$

Отсюда видно, что коэффициент q пропорционален $[E_0(0)/E_p]^2$, т. е. разложение (7.1) действительно справедливо только для слабого поля. По мере удаления волны от границы плазмы q нарастает, стремясь к постоянной величине, когда полное поглощение волны в плазме K становится достаточно большим: $K \geq 1$. Знак q может быть как положительным (волна ослабевает из-за нелинейности), так и отрицательным (волна усиливается) в зависимости от соотношения между частотой волны ω

и частотой соударений v_{e0} , а также от характера зависимости v_e от T_e и N от T_e . Напомним, что при соударениях с молекулами обычно $dv_e/dT_e > 0$, а при соударениях с ионами $dv_e/dT_e < 0$ (см. § 3.1), так что характер воздействия нелинейности на амплитуду поля волны существенно зависит от степени ионизации плазмы.

Поправки к фазе волны определяются при учете влияния нелинейности на показатель преломления волны:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int_0^z [n(E_1^2) - n_0] dz - \frac{1}{4} \text{Im}(\epsilon'(E_1^2) - \epsilon_0'). \quad (7.9)$$

Последний член учитывает изменение фазы за счет $\sqrt{\epsilon'}$ в (6.18). Подставляя сюда выражение (6.14) для n , используя формулы (3.13), (3.6), (3.32a) для σ , ϵ , v_e , T_e и (7.1) для $E_1^2(z)$ и проведя интегрирование по z , можно вычислить нелинейную поправку к фазе. В частности, в тех же предположениях, в которых проведен аналитический расчет q (7.8), находим*):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{E_0(0)}{E_p} \right]^2 \left[\frac{\omega v_{e0}}{\omega^2 + v_{e0}^2} + \gamma_1 + \left(\frac{\kappa_0}{n_0} \right) \frac{\omega^2 - v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} \right] (1 - e^{-2K}). \quad (7.10)$$

Здесь $\overline{\kappa_0/n_0}$ — среднее значение κ_0/n_0 на пути волны в возмущенной области плазмы.

7.2. Самовоздействие сильной волны.

Перейдем теперь к рассмотрению самовоздействия сильных волн, т. е. не будем ограничивать амплитуду поля волны [80]. Уравнение (6.19), описывающее амплитуду волны в плазме, можно проинтегрировать численно. Результаты соответствующих расчетов для ионосферы будут обсуждены в § 11. Здесь же рассмотрим простые модели, позволяющие получить аналитические выражения для поля $E_0(z)$. Примем, что волна распространяется вдали от точки отражения, так что $n = n_0 \neq n_0(z)$. Вторым членом в уравнении (6.20) тогда можно

*) В работе [81], где впервые было вычислено возмущение фазы слабой волны высокой частоты ($\omega \gg v_{e0}$), оно имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{E_0(0)}{E_p} \right]^2 \left(\frac{45\pi}{128} \frac{v_{e0}}{\omega} + \frac{\kappa_0}{n_0} \right) (1 - e^{-2K}). \quad (7.11)$$

Сравнивая формулы (7.10) и (7.11), видим, что первый член в (7.11) отличается на множитель $45\pi/128 \approx 1,1$. Причина этого расхождения в том, что здесь при расчетах мы для простоты используем выражения элементарной теории для σ и ϵ . Эти выражения, как показано в § 21, являются лишь первым приближением к более точным формулам кинетической теории. Более точный расчет должен учесть кинетические поправки K_σ , K_ϵ . В [81] расчет проводился с помощью кинетической теории; это и служит причиной расхождения.

пренебречь, и оно принимает вид:

$$\frac{dE_0}{dz} + \frac{\omega}{c} \kappa(z, E_0) E_0 = 0. \quad (7.12)$$

Коэффициент поглощения волны κ и в случае сильного поля дается выражением (7.5). Чтобы выделить здесь нелинейность, перепишем его в виде:

$$\kappa(z, E_0) = \kappa_0(z) \frac{N(T_e)}{N_0} \frac{v_e(T_e)}{v_{e0}} \frac{(\omega^2/v_{e0}^2) + 1}{\frac{\omega^2}{v_{e0}^2} + \frac{v_e^2(T_e)}{v_{e0}^2}}. \quad (7.13)$$

Здесь $\kappa_0(z)$ — коэффициент поглощения волны в линейной теории, $v_e(T_e) = v_{em} + v_{ei}$ — эффективная частота соударений. Зависимость v_e и N от T_e и зависимость стационарной электронной температуры от амплитуды поля E_0 определены в гл. II. Примем, что $\delta = \text{const}$, а частота соударений в невозмущенной плазме v_{e0} и температуры T_{e0} , T не зависят от z , причем $T_{e0} = T$. В этом случае уравнение (7.12) можно проинтегрировать.

Слабо ионизованная плазма. Рассмотрим вначале случай слабо ионизованной плазмы, когда основную роль играют соударения с молекулами — твердыми шариками. Отношение $v_e(T_e)/v_{e0}$ в этом случае равно $\sqrt{T_e/T}$ (см. (3.6)). В уравнении (7.13) удобно тогда вместо E_0 использовать новую переменную $\tau = \sqrt{T(E_0)/T}$. Зависимость стационарной температуры электронов T_e от поля E_0 определяется соотношением (3.33), которое в новых переменных принимает вид:

$$\tau^2 - 1 = \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2}. \quad (7.14)$$

Дифференцируя соотношение (7.14), находим:

$$\frac{1}{E_0} \frac{dE_0}{dz} = \frac{d\tau}{dz} \frac{\tau(\omega^2 + 2v_{e0}^2 \tau^2 - v_{e0}^2)}{(\tau^2 - 1)(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)}. \quad (7.15)$$

Подставив это выражение в (7.12) с учетом (7.13), получим:

$$\frac{d\tau}{dz} \left(\frac{1}{\tau^2 - 1} + \frac{2v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} \right) + \frac{\omega}{c} \kappa_0(z) \frac{N(\tau^2)}{N_0} = 0. \quad (7.16)$$

В этом разделе рассматривается случай, когда концентрация электронов не меняется в поле волны, $N(\tau^2)/N_0 = 1$. Тогда решение уравнения (7.16) имеет вид:

$$\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \exp\left(\frac{4v_{e0}^2 \tau}{\omega^2 + v_{e0}^2}\right) = C \exp(-2K), \quad (7.17)$$

где K — полное линейное поглощение волны в плазме от границы плазмы ($z = 0$) до рассматриваемой точки z (см. (7.8)).

На границе плазмы ($z = 0$) амплитуда волны равна $E_0(0)$. Следовательно,

$$C = \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1} \exp\left(\frac{4\nu_{e0}^2 \tau_0}{\omega^2 + \nu_{e0}^2}\right), \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{T_e [E_0(0)]}{T}}. \quad (7.18)$$

Из (7.17) видно, что τ_0 — это максимальное значение τ : с ростом z , точнее, с ростом $K = \int_0^z \kappa_0 dz$, величина τ монотонно убывает. В глубине плазмы, при $K \gg 1$, τ стремится к единице, т. е. волна становится слабой, как это и должно быть.

Решение (7.17) определяет τ в каждой точке z внутри плазмы. Зная $\tau(z)$, из (7.14) легко определить искомую амплитуду $E_0(z)$. Ее удобно представить в виде

$$E_0(z) = E_0(0) e^{-K} P. \quad (7.19)$$

P — множитель, показывающий, каков результат самовоздействия волны в плазме. В слабом поле $P = 1 - q$ и близок к единице (см. § 7.1). В общем случае P зависит от амплитуды волны на границе плазмы, от частоты и глубины проникновения волны в плазму:

$$P = P\left(\frac{E_0(0)}{E_p}, \frac{\omega}{\nu_{e0}}, K\right). \quad (7.20)$$

Выражение для множителя самовоздействия имеет простой вид в глубине плазмы, т. е. при $K \gg 1$. В самом деле, как ясно из (7.14), $\tau(z)$ в этом случае близко к единице. Из (7.17) находим:

$$\tau(z) = 1 + 2 \exp\left(-\frac{4\nu_{e0}^2}{\omega^2 + \nu_{e0}^2}\right) C e^{-2K}. \quad (7.21)$$

С другой стороны, из (7.14) следует, что при $\tau \rightarrow 1$

$$E_0 = E_p \sqrt{2} \sqrt{\tau - 1}.$$

Подставляя сюда $\tau - 1$ из (7.21), имеем:

$$E_0 = 2E_p \sqrt{C} \exp\left[-\frac{2\nu_{e0}^2}{\omega^2 + \nu_{e0}^2} - K\right]. \quad (7.22)$$

Следовательно, при $K \gg 1$

$$P = 2 \frac{E_p}{E_0(0)} \sqrt{\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1}} \exp\left[\frac{2\nu_{e0}^2 (\tau_0 - 1)}{\omega^2 + \nu_{e0}^2}\right]. \quad (7.23)$$

Из (7.23) видно, что при высокой частоте волны $\omega^2 \gg 2\nu_{e0}^2 (\tau_0 - 1)$ множитель самовоздействия меньше единицы. Это вполне понятно, так как при высокой частоте волны коэффициент поглощения растет с ростом T_e , т. е. с ростом амплитуды E_0 . При этом в очень сильном поле $E_0(0) \gg E_p$, т. е.

$\tau_0 \gg 1$, множитель P убывает с ростом $E_0(0)$ пропорционально $E_p/E_0(0)$. В этом случае амплитуда волны, проходящей в глубину плазмы, не растет с ростом $E_0(0)$, а стремится к постоянной, не зависящей от $E_0(0)$ величине:

$$E_0(z) \rightarrow 2E_p \exp(-K).$$

Имеет место как бы эффект насыщения: поглощение волны столь сильно растет с ростом ее амплитуды, что амплитуда проходящей в глубину плазмы волны не зависит от ее значения на границе плазмы (рис. 7.1, кривая 1).

При выполнении обратного условия $\omega^2 \ll 2v_{e0}^2\tau_0$ множитель P в глубине плазмы, напротив, сильно растет с ростом $E_0(0)$. Естественно, так и должно быть, ведь коэффициент поглощения волны низкой частоты $\omega < v_{e0}$ падает с ростом T_e . При этом в очень сильном поле множитель самовоздействия

$$P = 2 \frac{E_p}{E_0(0)} \exp \left[2 \sqrt{\left(\frac{v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} \right)^{3/2} \frac{E_0(0)}{E_p}} \right] \quad (7.24)$$

экспоненциально растет с ростом $E_0(0)$ (рис. 7.1, кривая 2).

Из (7.23), (7.24) следует, что при $\omega^2 \gg v_{e0}^2$ множитель самовоздействия с ростом $E_0(0)/E_p$ вначале падает, а затем растет. Минимальное значение P :

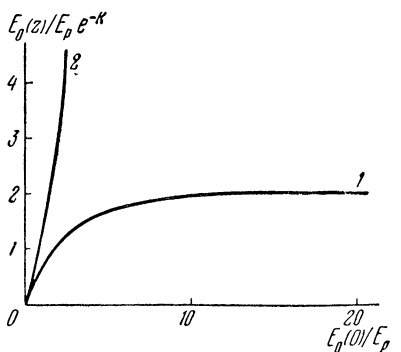


Рис. 7.1. Амплитуда поля волны в глубине плазмы.

$$P_{\min} = \frac{2v_{e0}^3}{\omega(\omega^2 + v_{e0}^2)} \exp \left[\frac{2(\omega^2 - v_{e0}^2)}{\omega^2 + v_{e0}^2} \right]. \quad (7.25)$$

Оно достигается при

$$\left(\frac{E_0(0)}{E_p} \right)_{\min} = \frac{\omega \sqrt{\omega^4 - v_{e0}^4}}{v_{e0}^3}. \quad (7.26)$$

С ростом частоты значение P_{\min} падает пропорционально $(v_{e0}/\omega)^3$. Зависимость множителя самовоздействия в глубине плазмы (при $K \gg 1$) от амплитуды поля на границе плазмы и от частоты волны изображена на рис. 7.2 и 7.3.

Выше проанализировано выражение для множителя самовоздействия в глубине плазмы ($K \gg 1$); оно справедливо при выполнении условия

$$K(z) > 1 + \frac{2v_{e0}^2(\tau_0 - 1)}{\omega^2 + v_{e0}^2}.$$

Это условие определяет толщину характерного слоя плазмы, в котором волна является сильной и оказывает сильное влияние на среду. Изменение P в характерном слое определяется общими формулами (7.17), (7.19). Простое предельное выражение для P получается при высоких частотах ($\omega^2 \gg 2\nu_{e0}^2\tau_0$):

$$P = \frac{2E_p}{E_0(0)} \sqrt{\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1}} \frac{1}{1 - \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1} \exp(-2K)}, \quad \tau_0 = \sqrt{1 + \left(\frac{E_0(0)}{E_p}\right)^2}. \quad (7.27)$$

Отсюда видно, что множитель самовоздействия при высоких частотах резко убывает с ростом K . При этом чем сильнее поле,

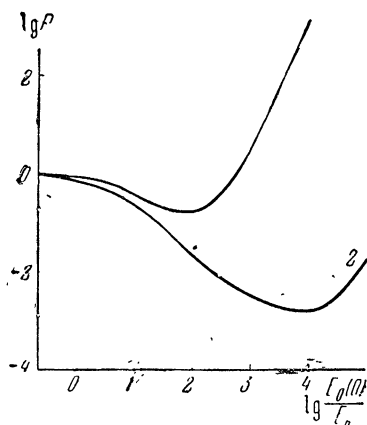


Рис. 7.2. Множитель самовоздействия. 1) $\omega/\nu_{e0} = 4,2$; 2) $\omega/\nu_{e0} = 20$.

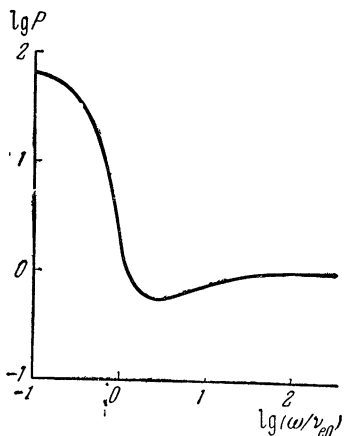


Рис. 7.3. Частотная зависимость множителя самовоздействия; $E_0(0)/E_p = 20$.

тем быстрее убывает P , так что толщина характерного слоя не зависит от $E_0(0)$ (она определяется условием $K \gg 1$, см. (7.27)).

Выше для простоты принималось, что частота соударений электрона с нейтральными частицами растет с ростом температуры электронов как $\sqrt{T_e/T}$ (соударения упругих шариков). В действительности зависимость частоты соударений с молекулами от температуры более сложна (см. §§ 5.2; 21). В частности, в воздухе и в нижней ионосфере частота соударений электрона пропорциональна $(T_e/T)^{5/6}$ (5.14). Расчет эффектов самовоздействия в этом случае вполне аналогичен проведенному выше. Переходя, как и ранее, в уравнении (7.12) вместо E к новой переменной $\tau = \sqrt{T_e/T}$, определенной соотношением

$$\tau^2 - 1 = \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\omega^2 + \nu_{e0}^2}{\omega^2 + \nu_{e0}^2\tau^{10/3}},$$

приходим вместо (7.16) к следующему уравнению для $\tau(z)$:

$$\frac{d\tau}{dz} \left[\frac{8}{3} v_{e0}^2 \tau^{2/3} + \frac{\tau^{2/3}}{\tau^2 - 1} v_{e0}^2 + \frac{\omega^2}{\tau^{2/3} (\tau^2 - 1)} \right] = -(\omega^2 + v_{e0}^2) \frac{\omega}{c} \kappa_0.$$

Интегрируя его, находим в неявном виде функцию $\tau(z)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{1}{\omega^2 + v_{e0}^2} \left(\frac{8}{5} v_{e0}^2 \tau^{5/3} + v_{e0}^2 I_1(\tau) + \omega^2 I_2(\tau) \right) \right] = \\ & = \left(\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{1}{\omega^2 + v_{e0}^2} \left(\frac{8}{5} v_{e0}^2 \tau_0^{5/3} + v_{e0}^2 I_1(\tau_0) + \omega^2 I_2(\tau_0) - K(z) \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь, как обычно, τ_0 — значение τ на границе плазмы (при $E_0 = E_0(0)$), $K(z)$ — полное поглощение слабой волны, функции $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$ определены соотношениями

$$I_1(\tau) = \int_1^\tau \frac{dx (x^{2/3} - 1)}{x^2 - 1}, \quad I_2(\tau) = \int_1^\tau \frac{dx (x^{-2/3} - 1)}{x^2 - 1}.$$

Амплитуду поля волны в плазме по-прежнему можно представить в виде (7.19). Для множителя самовоздействия в глубине плазмы ($K \gg 1$) получаем:

$$P = \sqrt{2} \frac{E_p}{E_0(0)} \exp \left[\frac{v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} \left(\frac{8}{5} (\tau_0^{5/3} - 1) + I_1(\tau_0) \right) + \frac{\omega^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} I_2(\tau_0) \right]. \quad (7.28)$$

Отсюда видно, например, что в высокочастотном поле в глубине плазмы имеет место эффект «насыщения»:

$$E = \sqrt{2} E_p \exp [I_2(\tau \rightarrow \infty) - K(z)]. \quad (7.29)$$

Множитель самовоздействия низкочастотной волны ($\omega^2 \ll v_{e0}^2$) экспоненциально растет с ростом амплитуды поля:

$$P = \sqrt{2} \frac{E_p}{E_0(0)} \exp \left\{ \frac{8}{5} (\tau_0^{5/3} - 1) + I_1(\tau_0) \right\}.$$

Поправки к фазе, вызванные самовоздействием сильной волны ($\Delta\varphi$), вычисляются аналогично. Подставляя в (7.9) полученное выражение для $E_0(z)$ (7.17) — (7.19), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v_{e0}\tau_0}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{v_{e0}\tau}{\omega} + \\ + \overline{\left(\frac{\kappa_0}{n_0} \right)} \left\{ \frac{\tau_0 (\omega^2 + v_{e0}^2)}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2} - \frac{\tau (\omega^2 + v_{e0}^2)}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} \right\}. \quad (7.30) \end{aligned}$$

Здесь $\tau = \tau(z)$ определяется, как и ранее, формулой (7.17), а $\overline{(\kappa_0/n_0)}$ — среднее значение κ_0/n_0 на пути волны к возмущенной области плазмы. Как ясно из (7.30), изменения фазы плоской

волны за счет самовоздействия незначительны как при высоких, так и при низких частотах. Наибольшего значения (порядка $\pi/2$) $\Delta\varphi$ достигает при $\omega^2 \gg v_{e0}^2$ в достаточно сильном поле, когда $\omega^2 \ll v_{e0}^2 \tau_0^2$.

Сильно ионизованная плазма. Рассмотрим теперь случай сильно ионизованной плазмы, когда основную роль играют соударения электронов с ионами (3.7). Для простоты примем, что частота столкновений ионов с нейтралами достаточно высока, $v_{im} \gg \delta_{ei} v_{ei}$. В этом случае, как ясно из (3.56), температура ионов близка к температуре нейтральных частиц, т. е. не зависит от амплитуды поля E_0 . Отметим, что в сильно ионизованной изотропной плазме может распространяться только высокочастотная волна $\omega \gg v_{e0}$, поскольку $\omega \gtrsim \omega_0 \gg v_{e0}$, где ω_0 — ленгмюровская частота плазмы, а соотношение $\omega_0 \gg v_{e0}$ всегда выполнено в силу условия (20.35). В этом случае выражение для температуры электронов имеет простой вид (3.35):

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2. \quad (7.31)$$

Учитывая теперь конкретный вид частоты столкновений с ионами (3.7) и проводя в уравнении (7.12) те же преобразования, что и в предыдущем разделе, находим его решение в неявном виде:

$$\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \exp\left(\frac{2\tau^3}{3} + 2\tau\right) = \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1} \exp\left(\frac{2\tau_0^3}{3} + 2\tau_0 - 2K\right), \quad (7.32)$$

$$\tau = \sqrt{1 + (E_0^2/E_p^2)}. \quad (7.33)$$

В глубине плазмы при $K \gtrsim (\tau_0^3 - 1)/3$ получаем отсюда:

$$E_0 = E_0(0) P e^{-K}, \quad (7.34)$$

$$P = 2 \frac{E_p}{E_0(0)} \sqrt{\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1}} \exp\left\{\frac{\tau_0^3 - 1}{3} + \tau_0 - 1\right\}. \quad (7.35)$$

Отсюда видно, что множитель самовоздействия исключительно быстро растет с ростом амплитуды поля. Волна как бы пробивается в глубину плазмы. Это видно из рис. 7.4.

Коэффициент прохождения волны сквозь слой плазмы «толщины» $K_s = \frac{\omega}{c} \int_s \kappa_0 ds$ (т. е. отношение амплитуды волны, прошедшей сквозь слой, к амплитуде волны, падающей на слой) с ростом $E_0(0)/E_p$ быстро приближается к единице (рис. 7.5). Сильная волна при

$$E_0(0) > E_k = 1,5 \sqrt[3]{K_s} E_p \quad (7.36)$$

проходит сквозь слой практически без затухания. Из рис. 7.5 видно, что эффект «просветления плазмы» сильной волной

очень резкий, так что поле E_h , определенное формулой (7.36), является как бы критическим для поглощения волны в слое «толщины» K_s .

Поправки к фазе волны невелики:

$$\Delta\varphi = -C \frac{v_{e0}}{\omega} \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_0^2} \right); \quad C = \left(\frac{9\pi^4}{16} \frac{\omega}{v_{e0}} \right)^{1/3}. \quad (7.37)$$

Коэффициент C представляет собой поправку к элементарному расчету, полученную с помощью кинетической теории [80]. В случае соударений с ионами, как видим, он значителен. Отметим, что при соударениях с ионами изменение фазы $\Delta\varphi$ имеет другой знак, чем в случае соударений с молекулами.

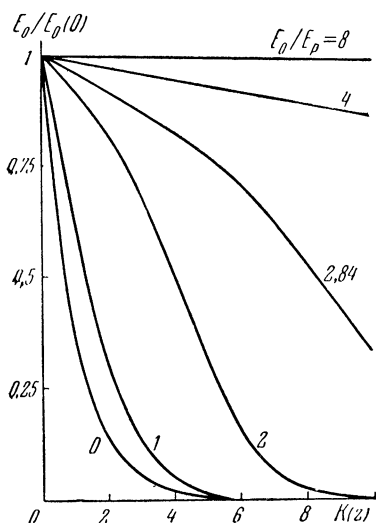


Рис. 7.4. Амплитуда поля волны в плазме при соударениях с ионами. Значения $E_0(0)/E_p$ указаны около кривых.

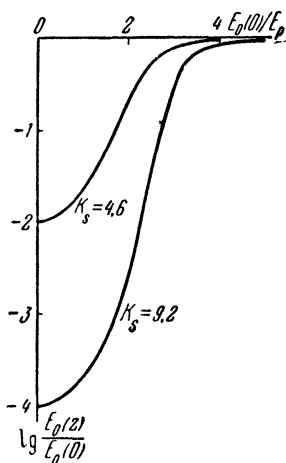


Рис. 7.5. Коэффициент прохождения.

Изменение концентрации плазмы. Выше мы пренебрегали изменением концентрации плазмы. С учетом зависимости $N(T_e)$ эффекты самовоздействия сохраняют свой характер, но численно значение множителя самовоздействия может при этом измениться [71]. Принимая в уравнении (7.16) изменение концентрации плазмы согласно (5.25), (5.28),

$$\frac{N(T_e)}{N_0} = \left(\frac{T_e}{T} \right)^{\gamma_1}, \quad (7.38)$$

получим:

$$\frac{d\tau}{dz} \left[\frac{1}{\tau^2 - 1} + \frac{2v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2} \right] + \frac{\omega}{c} \kappa_0(z) \tau^{2\gamma_1} = 0. \quad (7.39)$$

Решение этого уравнения при $\gamma_1 = 0,5$ (см. табл. 5.8) имеет вид:

$$(\tau^2 - 1)\tau^{2a} = (\tau_0^2 - 1)\tau_0^{2a} \exp[-2K], \quad (7.40)$$

где

$$a = \frac{v_{e0}^2 - \omega^2}{v_{e0}^2 + \omega^2}, \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{T_e(E_0)}{T_e}}, \quad K = \frac{\omega}{c} \int_0^z \kappa_0 dz. \quad (7.41)$$

Множитель самовоздействия P в глубине плазмы определяется в рассматриваемом случае выражением

$$P = \frac{E_p}{E_0} \sqrt{\tau_0^2 - 1} \tau_0^a. \quad (7.42)$$

Отсюда следует, что для сильной волны высокой частоты $\omega^2 \gg v_{e0}^2$ множитель самовоздействия

$$P = \frac{E_p}{E_0(0)}. \quad (7.43)$$

Иначе говоря, для сильной волны высокой частоты, как и ранее, имеет место эффект «насыщения» поля в плазме: в глубине плазмы ($K > 1$) амплитуда поля волны не превосходит $E_0 \exp[-K(z)]$, независимо от величины поля на границе плазмы $E_0(0)$. Для сильной волны низкой частоты $P = 1$. В этом случае рост концентрации плазмы компенсирует уменьшение коэффициента поглощения волны из-за роста температуры электронов. Благодаря этому эффекту самовоздействия в сильном низкочастотном поле ($\omega^2 \ll v_{e0}^2$) оказываются подавленными.

7.3. Самовоздействие волн при дополнительной ионизации.

Неизотермическая ионизация. В достаточно сильном электрическом поле $E \approx E_k$ возможен резкий рост концентрации электронов и ионов, вызванный дополнительной ионизацией плазмы быстрыми электронами (см. § 5.6). Это оказывает существенное влияние на характер эффектов самовоздействия. Концентрация электронов в плазме с учетом дополнительной ионизации определяется уравнением баланса (5.41). В стационарных условиях

$$q_i - \nu_r N + N\nu_{\text{ion}} = 0. \quad (7.44)$$

Здесь q_i — число электронов, образующихся в 1 сек в единице объема за счет ионизации внешним источником (см. § 5.1), $\nu_r = \beta N_m$ — частота рекомбинации, ν_{ion} — частота дополнительной ионизации (5.39). Частоту ν_{ion} удобно записать в виде:

$$\nu_{\text{ion}} = \nu_r \exp \left\{ Q \left[1 - \frac{E_k^2}{E^2} \right] \right\}. \quad (7.45)$$

Здесь E — амплитуда поля волны, $Q = \ln[(\nu_{\text{ion}})_0/\nu_r]$ — величина порядка 10 (см. § 5.6). Будем считать Q константой, т. е.

пренебрежем зависимостью Q от E и z (это возможно с логарифмической точностью). Далее, $E_k(z)$ — критическое поле пробоя, определенное формулой (5.42). Поле E_k в нижней ионосфере убывает с высотой z (см. рис. 5.9).

Предположим, что $E_k(z)$ убывает быстрее, чем амплитуда поля волны $E(z)$,

$$\frac{1}{E_k} \frac{dE_k}{dz} = \left| \frac{1}{N_m} \frac{dN_m}{dz} \right| \frac{BA^{-1}}{\omega^2 + BA^{-1}} \gg \frac{\omega}{c} \kappa, \quad (7.46)$$

и что $E(0)$ — поле волны при малых z — меньше критического, $E_k(z=0) > E(0)$. Тогда в некоторой точке z_0 поле волны сравняется с критическим, $E(z_0) = E_k(z_0)$. Концентрация плазмы в окрестности этой точки z_0 может значительно возрасти.

Действительно, пусть волна распространяется в плазме в направлении z . Амплитуда поля вновь определена уравнениями (7.12), (7.13). Концентрация плазмы определена при этом уравнением (7.44). Из (7.44), (7.45) следует простое выражение для стационарной концентрации электронов и ионов:

$$N = \frac{N_0(z)}{1 - \exp \left[Q \left(1 - \frac{E_k^2(z)}{E^2} \right) \right]}. \quad (7.47)$$

Здесь $N_0 = q_i/v_r$ — концентрация плазмы в отсутствие возмущающего поля. При $E^2 \ll E_k^2(z)$ концентрация $N = N_0(z)$. При $E \approx E_k(z)$ концентрация плазмы может существенно возрасти.

Уравнение (7.12) с учетом выражений (7.13), (7.47) принимает вид:

$$\frac{dE}{dz} = - \frac{\omega}{c} \kappa_0(z) \frac{v_e(T_e)}{v_{e0}} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{\omega^2 + v_e^2(T_e)} \frac{1}{1 - \exp \left[Q \left(1 - \frac{E_k^2(z)}{E^2} \right) \right]}. \quad (7.48)$$

Здесь $T_e = T_e(E)$; она определена уравнением (3.32). При $z \ll z_0$ последний множитель в правой части уравнения (7.48) близок к единице и оно совпадает с уравнением (7.16) при $N(\tau)/N_0 = 1$, решения которого рассмотрены в предыдущем разделе. Вблизи точки $z = z_0$ и за ней этот множитель, напротив, играет определяющую роль. Решение уравнения (7.48) при $z \gtrsim z_0$ естественно искать в виде ряда:

$$E = E_k(z) + E_1(z) + \dots \quad (7.49)$$

Подставляя разложение (7.49) в уравнение (7.48), находим поле $E_1(z)$:

$$E_1(z) = \frac{\omega}{c} \kappa(T_{ek}) \frac{E_k^2}{2Q \frac{dE_k}{dz}}; \quad \kappa(T_{ek}) = \kappa_0 \frac{v_e(T_{ek})}{v_{e0}} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{\omega^2 + v_e^2(T_{ek})}. \quad (7.50)$$

Здесь $T_{ek} = T_e(E_k)$. В силу условия (7.46) поле $|E_1| \ll |E_k|$. Отметим, что $E_1 < 0$ (так как $dE_k/dz < 0$), т. е. установившееся поле E и при $z \gg z_0$ остается всегда немного ниже, чем $E_k(z)$. При достаточно больших z условие (7.46) нарушается (вследствие падения $B \sim N_m^2(z)$ (5.40)) и поле E_1 по величине становится сравнимым с $E_k(z)$.

Подставляя выражения (7.49), (7.50) в соотношение (7.47), определяем изменение концентрации:

$$\frac{N}{N_0} = \begin{cases} \left\{ 1 - \exp \left[Q \left(1 - \frac{E_k^2(z)}{E^2} \right) \right] \right\}^{-1} & \text{при } z < z_0, \\ \left\{ -\frac{\omega}{c} \kappa_0 \frac{v_e(T_e)}{v_{e0}} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{\omega^2 + v_e^2(T_e)} \frac{1}{E_k} \frac{dE_k}{dz} \right\}^{-1} & \text{при } z \geq z_0. \end{cases} \quad (7.51)$$

Заметим, что невозмущенная концентрация $N_0 = q_i v_r^{-1}$ является, вообще говоря, функцией z . В частности, в ионосфере N_0 растет с высотой z . Зависимость N/N_0 от z согласно (7.51) представлена на рис. 7.6. Видно, что перед точкой $z = z_0$ отношение N/N_0 резко увеличивается. Характерный размер области резкого нарастания N

$$\Delta z \approx \left(\frac{\omega}{c} \kappa(T_{ek}) Q \right)^{-1}. \quad (7.52)$$

Максимальное значение

$$\left(\frac{N}{N_0} \right)_{\max} \approx \left(-\frac{\omega}{c} \kappa(T_{ek}) \frac{1}{E_k} \frac{dE_k}{dz} \right)^{-1}. \quad (7.53)$$

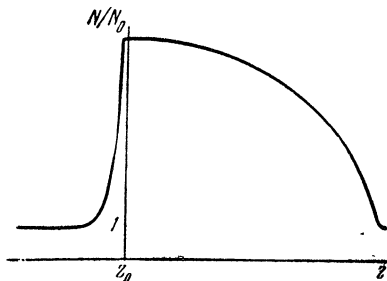


Рис. 7.6. Рост концентрации плазмы в окрестности критической точки z_0 .

При $z > z_0$ отношение N/N_0 медленно убывает с ростом z . Общая ширина области повышенной ионизации определена условием

$$\Delta z = \frac{H_0}{2} \ln \left[\left(\frac{N}{N_0} \right)_{\max} \frac{v_e^2(T_{ek})}{\omega^2 + v_e^2(T_{ek})} \right]. \quad (7.54)$$

Здесь H_0 — расстояние, на котором существенно изменяется поле $E_k(z)$, пропорциональное концентрации молекул в плазме (принимается, что $N_m = N_{m0} \exp(-z/H_0)$, $H_0 = T/Mg$ — высота однородной атмосферы).

Таким образом, при приближении z к z_0 , т. е. при приближении амплитуды поля плоской волны E_0 к критическому полю E_k , концентрация электронов в слабо неоднородной плазме быстро возрастает. При этом, однако, резко растет и поглощение волны, так что поле E_0 остается всегда несколько меньше, чем

E_h . Отметим, что поскольку $E_h \gg E_p$, то еще до точки z_0 существенную роль могут сыграть эффекты самовоздействия, рассмотренные в предыдущем разделе [46]. Расчеты неизотермической ионизации для сходящейся волны проведены в [77].

Изотермическая ионизация. В § 5.6 было показано, что в достаточно плотных газах ионизация может возникать за счет общего повышения температуры газа. Система находится в состоянии, близком к термодинамически равновесному. Температуры электронов и ионов близки к температуре нейтральных молекул. Нагрев газа осуществляется за счет джоулевых потерь энергии волны. Равновесная температура газа T при учете молекулярной теплопроводности, излучения и джоулева нагрева описывается уравнением

$$-\nabla(\kappa_m \nabla T) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 - J. \quad (7.55)$$

Здесь κ_m — молекулярная теплопроводность, J — объемное излучение (5.47), σ — проводимость (3.13). Проводимость пропорциональна концентрации электронов, которая определена формулой Саха (5.43), (5.45). Граничные условия к уравнению (7.55): $T = T_0$ при $r \rightarrow \infty$, где T_0 — температура невозмущенного газа. Поле волны определено волновым уравнением (6.8).

Уравнения (6.8), (7.55) совместно с выражениями (5.43), (5.45), (5.47), (3.13) образуют полную систему, определяющую структуру изотермического разряда. Это существенно нелинейная система уравнений. При сравнительно невысоких температурах T отношение ϵ_i/T в формулах (5.43), (5.45) много больше единицы. Поэтому нелинейность системы (6.8), (7.55) определяется главным образом экспоненциальным членом в (5.43), (5.45), а в предэкспоненциальном множителе в (5.43), (5.45), как и в выражении для v_e , обычно можно с достаточной точностью пренебрегать изменением T . Изменения $J(T)$, вообще говоря, более существенны, однако в основной области разряда ими в первом приближении также можно пренебречь. В этом приближении

$$N = n_0 \exp(-\epsilon_i/2T), \quad (7.56)$$

где величина n_0 , как и остальные величины v_e , J , — константа, зависящая от некоторой характерной температуры T_n .

Переходя к решению уравнений (6.8), (7.55), пренебрежем излучением и, кроме того, примем для простоты, что волна является сферически симметричной, сходящейся к точке $r = 0$. Уравнения (6.8), (7.55) переписутся в этом случае в виде [272]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \kappa_m \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{1}{2} \sigma E_0^2, \quad (7.57)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 n E_0^2) = \frac{4\pi\sigma}{c} E_0^2. \quad (7.58)$$

Здесь мы воспользовались приближением геометрической оптики для волнового уравнения (см. (12.10)), n — коэффициент преломления волны. Приближение геометрической оптики, как будет показано ниже, в рассматриваемой задаче справедливо лишь при $\omega > \nu_e$. В этом случае, учитывая (7.56),

$$n = \left(1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)^{1/2} = \left[1 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{2T}\right)\right]^{1/2}. \quad (7.59)$$

Введем характерную температуру T_n , определенную условием $n(T_n) \approx 0$, т. е.

$$T_n = \frac{\varepsilon_i}{2 \ln(4\pi e^2 n_0 / m\omega^2)}, \quad (7.60)$$

и безразмерные переменные:

$$\theta = \frac{\varepsilon_i(T - T_n)}{2T_n^2}, \quad \xi = \frac{r}{\Delta_c}, \quad q = \frac{E_0^2}{E_n^2}. \quad (7.61)$$

Здесь E_n — характерное поле, а Δ_c — глубина скин-слоя:

$$\Delta_c = \frac{c}{4\pi\sigma_n}, \quad E_n^2 = \frac{4\kappa_n T_n^2}{\sigma_n \varepsilon_i \Delta_c^2} = \frac{64\pi^2 \sigma_n \kappa_n T_n^2}{c^2 \varepsilon_i}, \quad (7.62)$$

$\sigma_n = \sigma(T_n)$, $\kappa_n = \kappa_m(T_n)$. Уравнения (7.57), (7.58) переписутся тогда в виде ($\kappa = \kappa_m(\theta)/\kappa_n$):

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \kappa \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -q e^\theta, \quad \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \sqrt{1 - e^\theta} q) = q e^\theta. \quad (7.63)$$

Примем, что размер разряда R_0 много больше глубины скин-слоя Δ_c . В этом случае энергия поля диссипирует в тонком слое толщины Δ_c у поверхности разряда R_0 [237, 238]. Можно выделить четыре области: область вне разряда ($\theta_0 - \theta \gg 1$), где поглощения волны нет, так как $N \rightarrow 0$ и тепло свободно распространяется от источника; область переходного слоя с толщиной порядка Δ_c у границы разряда, где диссипирует энергия волны; область внутри разряда, где поглощения энергии нет, так как $E_0 \rightarrow 0$ и температура постоянна, $\theta = \theta_0$; наконец, вблизи центра разряда при $\xi \rightarrow 0$ поле вновь возрастает и здесь температура θ также может нарасти.

В области вне разряда ($\theta \rightarrow -\infty$) члены в правой части в уравнениях (7.63) не существенны. Поэтому здесь

$$q = \frac{q_0 \xi_0^2}{\xi^2}, \quad \int \kappa d\theta = -\frac{p \xi_0^2}{\xi} \quad (7.64)$$

или в размерных переменных

$$E_0^2 = \frac{2W_0}{cr^2}, \quad \int_{T_0}^T \kappa_m dT = -\frac{S_0 R_0^2}{r}. \quad (7.65)$$

Здесь W_0 — общая мощность излучения, S_0 — поток теплоты. Учтено, что при $r \rightarrow \infty$ температура газа задана и равна T_0 . Поток S_0 и размер разряда R_0 определяются при шивании с решением в переходном слое.

Толщина переходного слоя $\Delta_c \ll R_0$, т. е. $\Delta\xi = \xi_0 - \xi \ll \xi_0$. Поэтому здесь естественно перейти к переменной $x = \xi_0 - \xi$. Уравнения (7.63) принимают при этом вид:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -qe^\theta, \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{1 - e^\theta} q) = -qe^\theta. \quad (7.66)$$

Граничные условия к уравнениям (7.66):

$$\theta \rightarrow \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dx} \rightarrow 0, \quad q \rightarrow 0 \quad \text{внутри разряда (при } x \rightarrow +\infty); \quad (7.67)$$

$$q \rightarrow q_0, \quad \frac{d\theta}{dx} \rightarrow p_0, \quad \theta \rightarrow p_0 x \quad \text{вне разряда (при } x \rightarrow -\infty). \quad (7.68)$$

Уравнения (7.66) с граничными условиями (7.67), (7.68) интегрировались численно. Результат расчета для $\theta_0 = -0,2$ показан на рис. 7.7. Видно, что температура θ при $x > 0$ (т. е.

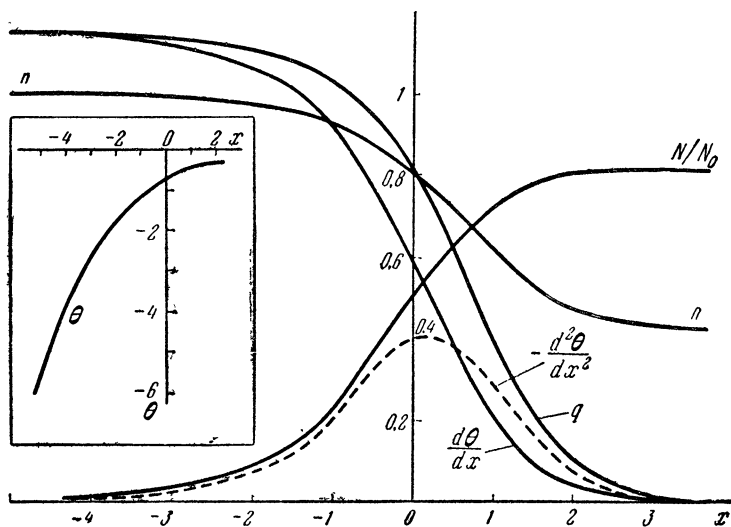


Рис. 7.7. Характеристики переходного слоя.

в глубь разряда) быстро стремится к постоянному значению $\theta_0 = -0,2$. Поле волны q и поток тепла $d\theta/dx$ при $x > 0$ экспоненциально падают. С ростом $|x|$ при $x < 0$ поле q и поток тепла выходят на константы q_0 и p_0 ; при этом всегда $q_0 = p_0$ (в рассматриваемом случае $\theta_0 = -0,2$ имеем $q_0 = p_0 = 1,15$). Концентрация плазмы N/N_0 , где $N_0 = m\omega^2/4\pi e^2$, в области $x > 0$ быстро выходит на константу, а в области $x < 0$ резко

падает, так что разряд, фактически, существует лишь при $x > 0$, т. е. при $r < R_0$. Переходный слой является, следовательно, границей разряда. На рисунке показана вторая производная $-d^2\theta/dx^2$, пропорциональная интенсивности тепловыделения. Видно, что тепло действительно выделяется только в переходном слое.

Нетрудно видеть, что в области $x \ll -1$, т. е. $\xi = \xi_0 - x$, $\xi_0 > -x > 1$, найденное решение совпадает с (7.64), (7.65), если

$$q_0 = 2W_0/cE_n^2R_0^2, \quad S_0 = -2\kappa_n T_n^2 \rho_0 / \Delta_c \epsilon_i. \quad (7.69)$$

Кроме того, учитывая, что максимальная температура в разряде $\theta_{\max} = \theta_0$, т. е.

$$T_{\max} = T_n + \theta_0 T_n^2 / 2\epsilon_i, \quad (7.70)$$

находим из (7.65) при $r = R_0$, $T = T_{\max}$, что

$$R_0 = -\frac{1}{S_0} \int_{T_0}^{T_{\max}} \kappa_m dT. \quad (7.71)$$

При $|\theta_0| \lesssim 1$ температуру T_{\max} в этом соотношении можно с достаточной точностью считать равной T_n .

Т а б л и ц а 7.1

q_0	θ_0	q_0	θ_0	q_0	θ_0
1,800	-0,01	1,146	-0,2	0,404	-1,0
1,718	-0,02	0,847	-0,4	0,138	-2,0
1,558	-0,05	0,651	-0,6	0,00800	-5,0
1,382	-0,1	0,510	-0,8		

Итак, решение уравнений (7.66) в переходном слое при заданном q_0 определяет значения температуры θ_0 и потока ρ_0 . Зависимость θ_0 от q_0 приведена в табл. 7.1. Существенно, что всегда в отсутствие отражения

$$\rho_0 = q_0. \quad (7.72)$$

Таким образом, при заданной мощности излучения W_0 , определяя с помощью (7.69), (7.72) параметры q_0 , ρ_0 и из табл. 7.1 параметр θ_0 , можно по формулам (7.69)–(7.71) найти все характеристики разряда. В частности, из (7.71) с учетом (7.72), (7.69), (7.62) следует, что

$$R_0 = \frac{W_0}{4\pi} \left[\int_{T_0}^{T_{\max}} \kappa_m dT \right]^{-1}; \quad S_0 = -\frac{W_0}{4\pi R_0^2}. \quad (7.73)$$

Точная формула (7.73) для радиуса сферического разряда (при $J \rightarrow 0$) находится в соответствии с приближенным соотношением (5.49).

Рассмотрим теперь область в глубине разряда. Здесь $\theta = \theta_0$ и уравнение (7.63) сразу интегрируется:

$$q = q_0 \xi^{-2} \exp[-a(\xi_0 - \xi) + b], \quad a = e^{\theta_0} [1 - e^{\theta_0}]^{-1/2}, \quad b \sim 1. \quad (7.74)$$

Отсюда видно, что в области значений $\xi \leq 2/a$ поле вновь начинает возрастать. Температура θ начинает нарастать при $\xi < 1/a$.

Условия применимости использованного здесь приближения геометрической оптики имеют вид (6.17), (6.21). Учитывая, что плазма наиболее резко изменяется в области переходного слоя, получаем, что

$$\frac{v_e}{2\omega} \frac{e^{\theta_0}}{(1 - e^{\theta_0})^{1/2}} \leq 1, \quad \frac{v_e}{2\omega} \frac{\rho_0 e^{2\theta_0}}{(1 - e^{\theta_0})^{3/2}} \ll 1. \quad (7.75)$$

Эти условия ограничивают не только частоту, но и мощность волны (так как при $q_0 \gg 1$ $\theta_0 \rightarrow 0$). Геометрическую оптику нельзя использовать, в частности, при $\omega \ll v_e$. Этот случай подробно рассмотрен в теории индукционного разряда [237—239] и исследован в лабораторных экспериментах [274, 275]. Отметим также, что при учете излучения ($J \neq 0$) возможно расслоение разряда [272].

§ 8. Изменение модуляции волны

Рассмотрим теперь распространение в плазме радиоволн, модулированных по амплитуде. Пусть на границу плазмы ($z = 0$) приходит волна, модулированная по амплитуде низкой частотой:

$$E|_{z=0} = E_0(0) [1 + \mu_0 \cos \Omega t]. \quad (8.1)$$

Такая волна при ее распространении в плазме вызывает как постоянные, так и периодически меняющиеся во времени с низкой частотой Ω возмущения проводимости и диэлектрической проницаемости. Постоянные возмущения, как мы видели выше, сказываются на полном поглощении и фазе волны. Благодаря переменным возмущениям ϵ и σ изменится ее модуляция.

8.1. Слабая волна.

Примем вначале, что волна слабая, $E_0^2 \ll E_p^2$. Амплитуду поля волны в плазме можно разыскивать тогда методом возмущений [81—84]. Повторяя разложение, проведенное в разде-

ле 7.1 для немодулированной волны, имеем

$$E_0(z, t) = E_1(z, t) + E_2(z, t), \quad (8.2)$$

$$E_1(z, t) = \frac{E_0(0)}{\sqrt{n_0(z)}} (1 + \mu_0 \cos \Omega t) \exp \left\{ -\frac{\omega}{c} \int_0^z \kappa_0(z) dz \right\}. \quad (8.3)$$

Здесь $E_1(z, t)$, как и ранее, — амплитуда поля волны в плазме в линейном приближении. С учетом нелинейности поле волны и при наличии модуляции дается выражением (7.3). Изменяются только возмущения температуры электронов ΔT_e . Из (3.18), (8.3) следует, что ΔT_e определяется в нашем случае уравнением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_0 v_{e0}} \frac{d \Delta T_e}{dt} + \Delta T_e &= \frac{e^2 E_1^2}{3m\delta_0(\omega^2 + v_{e0}^2)} = \\ &= \frac{E_0^2(0)}{E_p^2} \frac{T_{e0}}{n_0} e^{-2K} \left(1 + \frac{\mu_0^2}{2} + 2\mu_0 \cos \Omega t + \frac{\mu_0^2}{2} \cos 2\Omega t \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Интегрируя это уравнение, находим возмущения температуры электронов:

$$\begin{aligned} \Delta T_e &= \left[\frac{E_0(0)}{E_p} \right]^2 \frac{T_{e0}}{n_0} e^{-2K} \left\{ 1 + \frac{\mu_0^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu_0}{\Omega^2 + (\delta_0 v_{e0})^2} [(\delta_0 v_{e0})^2 \cos \Omega t + \Omega \delta_0 v_{e0} \sin \Omega t] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_0^2}{2[4\Omega^2 + (\delta_0 v_{e0})^2]} [(\delta_0 v_{e0})^2 \cos 2\Omega t + 2\Omega \delta_0 v_{e0} \sin 2\Omega t] \right\}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Подставляя это выражение в (7.3), находим поле $E_2(z, t)$. Амплитуда поля модулированной волны в плазме при учете нелинейности (8.2) представляется тогда в виде:

$$\begin{aligned} E_2(z, t) &= E_{0\mu}(z) [1 + \mu_0(1 - \alpha_\Omega) \cos(\Omega t + \varphi_\Omega) - \mu_{2\Omega} \cos(2\Omega t + \varphi_{2\Omega}) - \\ &\quad - \mu_{3\Omega} \cos(3\Omega t + \varphi_{3\Omega})]. \end{aligned}$$

Здесь $E_{0\mu}(z)$ — не меняющаяся во времени часть поля; она определяется формулами (7.4), (7.8), если заменить в (7.8) $[E_0(0)]^2$ на

$$[E_0(0)]^2 \left(1 + \frac{\mu_0^2}{2} + \frac{\mu_0^2 (\delta_0 v_{e0})^2}{\Omega^2 + (\delta_0 v_{e0})^2} \right).$$

Далее, α_Ω — поправка к глубине модуляции волны на основной частоте Ω :

$$\alpha_\Omega = q \left[\frac{2(\delta_0 v_{e0})^2(1 - \mu_0^2/2)}{\Omega^2 + (\delta_0 v_{e0})^2} + \frac{\mu_0^2}{4} \frac{(\delta_0 v_{e0})^2}{(\delta_0 v_{e0})^2 + 4\Omega^2} \right]; \quad (8.6)$$

Φ_Ω — поправка к фазе модуляции на основной частоте:

$$\Phi_\Omega = q\mu_0 \left[\frac{2\Omega^2}{\Omega^2 + (\delta_0 v_{e0})^2} + \frac{\mu_0^2 \Omega^2}{(\delta_0 v_{e0})^2 + 4\Omega^2} \right]. \quad (8.7)$$

Здесь величина q определена по-прежнему формулой (7.8). Однако членом $\sim \gamma_1$ в (7.8) при этом следует пренебречь, так как изменения концентрации характеризуются значительным временем τ_N и при $\Omega\tau_N \gg 1$ они не могут сказаться на модуляции волны. Далее, $\mu_{2\Omega}$, $\mu_{3\Omega}$ и $\Phi_{2\Omega}$, $\Phi_{3\Omega}$ — коэффициенты и фаза модуляции на частотах 2Ω и 3Ω , появляющиеся в результате самовоздействия волны:

$$\begin{aligned} \mu_{2\Omega} &= \frac{3}{2} \mu_0^2 q \delta_0 v_{e0} \sqrt{\frac{(\delta_0 v_{e0})^2 + \frac{25}{9} \Omega^2}{[(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2][(\delta_0 v_{e0})^2 + 4\Omega^2]}}, \\ \mu_{3\Omega} &= \frac{\mu_0^3 q}{4} \frac{\delta_0 v_{e0}}{\sqrt{4\Omega^2 + (\delta_0 v_{e0})^2}}; \\ \Phi_{2\Omega} &= \text{arctg} \frac{\Omega}{\delta_0 v_{e0}} \frac{10\Omega^2 + 4v_{e0}^2}{9\Omega^2 + 3v_{e0}^2}, \quad \Phi_{3\Omega} = \text{arctg} \frac{2\Omega}{\delta_0 v_{e0}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что изменения модуляции слабой волны пропорциональны $[E_0(0)/E_p]^2$. Такого же порядка искажения модуляции волны за счет генерации обертонов основной частоты модуляции. Заметим, что искажения модуляции пропорциональны еще и глубине модуляции основной волны $\mu_{2\Omega} \sim \mu_0^2$, $\mu_{3\Omega} \sim \mu_0^3$; поэтому они существенны лишь при достаточно больших значениях μ_0 . Модуляция на основной частоте может как возрастать ($q < 0$), так и убывать ($q > 0$). Первый случай (авто-модуляция волны), как видно из формул (8.6), (7.8), осуществляется в слабо ионизованной плазме для низкочастотных волн $\omega < v_{e0}$, а высокочастотные волны ($\omega > v_{e0}$) в слабо ионизованной плазме демодулируются (см. (7.8)).

8.2. Изменение амплитудной модуляции сильной волны.

Низкая частота модуляции. Самовоздействие сильной волны $E_0(0) \gtrsim E_p$ приводит к сильному искажению ее модуляции [85]. Рассмотрим прежде всего квазистационарный случай, когда частота модуляции так низка, что амплитуда волны в плазме изменяется существенно лишь за время, которое много больше времени релаксации температуры электронов:

$$\Omega \ll \delta_0 v_{e0}. \quad (8.8)$$

Для напряженности поля волны в плазме, естественно, справедливо выражение (7.19):

$$E(z, t) = E|_{z=0} P e^{-\kappa z}, \quad (8.9)$$

где $E|_{z=0}$ — амплитуда на границе плазмы (8.1). Эта амплитуда медленно меняется во времени с частотой Ω . Соответственно, изменяется и амплитуда $E(z, t)$: в общем случае она является сложной периодической функцией времени. Ее можно, следовательно, представить в виде:

$$E = E_0(z) [1 + \mu_\Omega(z) \cos \Omega t + \mu_{2\Omega}(z) \cos 2\Omega t + \dots]. \quad (8.10)$$

Для того чтобы составить полное представление о характере модуляции волны в плазме, нужно определить амплитуду каждой гармоники $\mu_\Omega(z)$, $\mu_{2\Omega}(z)$, что, в общем случае, сложно. Мы ограничимся вначале анализом выражения для эффективной глубины модуляции волны в плазме μ , которая определяется естественным образом как

$$\mu(z) = \frac{E_{\max}(z) - E_{\min}(z)}{E_{\max}(z) + E_{\min}(z)}. \quad (8.11)$$

Здесь $E_{\max} = E[E_0(0)(1 + \mu_0), z]$ — максимальное и $E_{\min} = E[E_0(0)(1 - \mu_0), z]$ минимальное значения, которые принимает амплитуда поля волны, изменяясь во времени в точке z .

Простое выражение получается из (8.11) при $\mu_0 \ll 1$. Действительно, разлагая $E(\mu_0)$ в (8.11) в ряд по степеням μ_0 и ограничиваясь первыми членами разложения, имеем:

$$\mu = \mu_0 \left[\frac{E_0(0)}{E} \frac{\partial E}{\partial E_0(0)} \right]_{\mu_0=0}. \quad (8.12)$$

Теперь остается найти величину $\partial E / \partial E_0(0)$ при $\mu_0 = 0$, т. е. для немодулированной волны. Согласно (7.12), (7.13) в слабо ионизованной плазме при $N \neq N(T_e)$

$$f(E) = \int \frac{dE}{E} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2}{\tau} = f[E_0(0)] - K(z),$$

где $\tau(E)$, $K(z)$ определены формулами (7.14), (7.8). Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial E_0(0)} = \frac{\tau}{\tau_0} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} \frac{E}{E_0(0)}, \quad (8.13)$$

где $\tau_0 = \tau[E_0(0)]$. Поэтому

$$\mu = \mu_0 \frac{\tau}{\tau_0} \frac{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2}. \quad (8.14)$$

Переходя к анализу формулы (8.14), заметим, что, как ясно из (7.14), τ — монотонно возрастающая функция E . Поэтому на границе плазмы, где $E = E_0(0)$, τ максимально и равно τ_0 . В глубине плазмы τ монотонно убывает до значения $\tau = 1$. Из (8.14) следует поэтому, что при высокой частоте ($\omega^2 \gg v_{e0}^2 \tau_0^2$) глубина модуляции волны в плазме уменьшается вследствие самовоздействия — волна демодулируется. При этом в глубине

плазмы, где $K \gg 1$,

$$\mu = \mu_0 / \tau_0. \quad (8.15)$$

Отсюда видно, что демодуляция сильной высокочастотной волны может быть очень значительной (даже полной при $\tau_0 \gg 1$). При низкой частоте ($\omega^2 \ll \nu_{e0}^2$), напротив, μ возрастает. В глубине плазмы

$$\mu = \mu_0 \tau_0. \quad (8.16)$$

Графики зависимости μ/μ_0 от $E_0(0)/E_p$ и ω/ν_{e0} изображены на рис. 8.1 и 8.2. При $\omega > \nu_{e0}$ глубина модуляции немонотонно зависит от $E_0(0)/E_p$; минимальное значение

$$\mu_{\min} = \mu_0 \frac{2\omega\nu_{e0}}{\omega^2 + \nu_{e0}^2}$$

достигается при $E_{0 \min} = E_p \sqrt{(\omega^2/\nu_{e0}^2) - 1}$ (аналогичную зависимость от $E_0(0)/E_p$ имеет множитель самовоздействия, см. (7.25)).

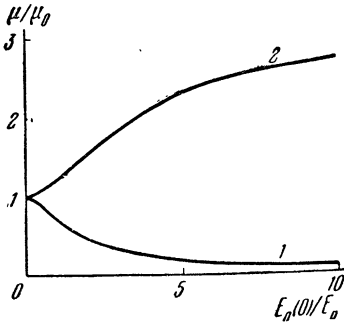


Рис. 8.1. Глубина модуляции волны в плазме. 1) $\omega \gg \nu_{e0}$; 2) $\omega \ll \nu_{e0}$.

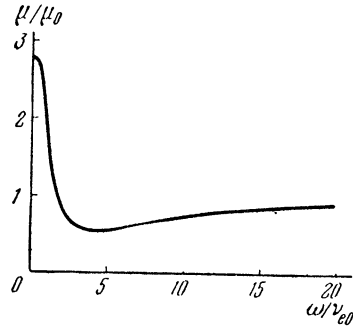


Рис. 8.2. Частотная зависимость глубины модуляции.

В общем случае, когда μ_0 не мало, глубина модуляции волны в плазме определяется выражением (8.11). Построенная с помощью формулы (8.11) зависимость μ от μ_0 изображена на рис. 8.3. Из рисунка видно, что при $\mu \leq 0,5$; $\mu_0 \leq 0,5$ зависимость μ от μ_0 близка к линейной. В этих условиях справедлива, следовательно, формула (8.14). Из рисунка видно также, что относительное изменение глубины модуляции (т. е. отклонение μ/μ_0 от единицы) наиболее сильно при малых μ_0 и невелико при больших значениях μ_0 . В частности, при $\mu_0 \rightarrow 1$ отношение μ/μ_0 всегда близко к 1.

Искажения модуляции, напротив, незначительны при малых μ_0 и очень велики (в сильных полях) при $\mu_0 \rightarrow 1$. Вследствие этого в последнем случае интересно знать не только глубину модуляции μ , но и амплитуды отдельных гармоник модуляции μ_Ω , $\mu_{2\Omega}$, $\mu_{3\Omega}$ (8.10). Их можно определить, произведя гармо-

нический анализ кривой $E(z, t)$ (8.9), изображающей форму модуляции сигнала в плазме. Характерные кривые, изображающие форму модуляции сильных радиоволн в плазме при $\mu_0 = 1$, приведены на рис. 8.4.

Произвольная частота модуляции. Выше рассматривалось изменение модуляции волны в плазме в случае низкой частоты модуляции (8.8). При произвольной частоте Ω необходимо решать совместно нестационарное уравнение для температуры электронов (3.18) с уравнением для амплитуды поля волны (7.12)

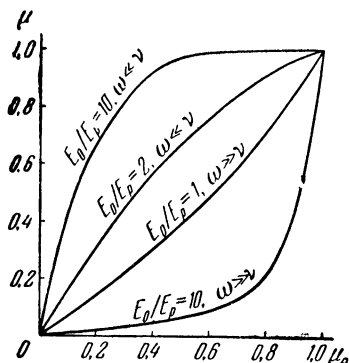


Рис. 8.3. Глубина модуляции в плазме в зависимости от глубины модуляции падающей волны.

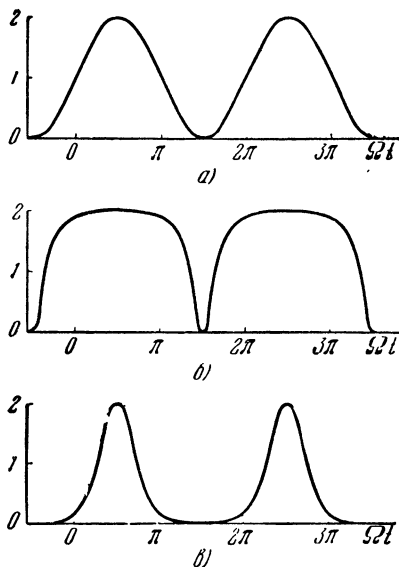


Рис. 8.4. Искажение формы модуляции; $E_0(0)/E_p = 10$, $\mu_0 = 1$. а) Волна на границе плазмы. б) Волна в глубине плазмы, $\omega \gg \nu_{e0}$. в) Волна в глубине плазмы, $\omega \ll \nu_{e0}$.

[86]. В слабо ионизованной плазме ($\nu_e \sim \sqrt{T_e/T}$) эти уравнения принимают вид:

$$\frac{dE}{dz} + \frac{\omega}{c} \kappa_0(z) E \frac{\tau(\omega^2 + \nu_{e0}^2)}{\omega^2 + \nu_{e0}^2 \tau^2} = 0, \quad (8.17)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \frac{\delta_0 \nu_{e0}}{2} (\tau^2 - 1) = \frac{e^2 E^2}{6mT} \frac{\nu_{e0}}{\omega^2 + \nu_{e0}^2 \tau^2}. \quad (8.18)$$

Здесь, как обычно, $\tau = \sqrt{T_e/T}$. На границе плазмы

$$E|_{z=0} = E_0(0) [1 + \mu \cos \Omega t]. \quad (8.19)$$

Рассмотрим случай малых $\mu_0 \ll 1$. Решение уравнений (8.17), (8.18) можно искать тогда в виде:

$$E = E(z) [1 + \mu(z) \cos(\Omega t - \varphi(z))] \quad (8.20)$$

(членом порядка μ_0^2 пренебрегаем). Подставляя (8.20) в уравнение (8.18) и интегрируя его по t , имеем:

$$\tau = \tau(z) + \mu \frac{\delta_0 v_{e0} [\tau^2(z) - 1]}{\sqrt{\Omega^2 + [\delta' v_{e0} \tau(z)]^2}} \cos(\Omega t - \varphi - \varphi'), \quad (8.21)$$

где

$$\delta' = \delta_0 \left[1 + \frac{v_{e0}^2 [\tau^2(z) - 1]}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2(z)} \right], \quad \text{tg } \varphi' = \frac{\Omega}{\delta' v_{e0} \tau(z)}. \quad (8.22)$$

Здесь $\tau(z)$ и $E(z)$ — значения τ и E для немодулированных волн, определенные соотношениями (7.17), (7.14).

Подставляя (8.21), (8.20) в уравнение (8.17) и отделяя временную переменную, приходим к следующей системе уравнений, определяющей глубину (μ) и фазу (φ) модуляции:

$$\frac{d(\mu \cos \varphi)}{dz} + \frac{\omega}{c} \kappa_0 \mu \cos(\varphi + \varphi') \frac{(\tau^2 - 1) \delta_0 v_{e0}}{\sqrt{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2}} \frac{(\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2)(\omega^2 + v_{e0}^2)}{(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)^2} = 0, \quad (8.23)$$

$$\frac{d(\mu \sin \varphi)}{dz} + \frac{\omega}{c} \kappa_0 \mu \sin(\varphi + \varphi') \frac{(\tau^2 - 1) \delta_0 v_{e0}}{\sqrt{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2}} \frac{(\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2)(\omega^2 + v_{e0}^2)}{(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)^2} = 0. \quad (8.24)$$

Граничные условия, как следует из (8.19):

$$\mu|_{z=0} = \mu_0, \quad \varphi|_{z=0} = 0. \quad (8.25)$$

Воспользовавшись соотношениями (7.16), заменяем теперь в (8.23), (8.24) переменную z на τ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\mu \cos \varphi) &= \\ &= \mu \cos(\varphi + \varphi') \frac{\delta_0 v_{e0}}{\sqrt{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2}} \frac{(\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2)(\omega^2 + 2v_{e0}^2 \tau^2 - v_{e0}^2)}{(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\mu \sin \varphi) &= \\ &= \mu \sin(\varphi + \varphi') \frac{\delta_0 v_{e0}}{\sqrt{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2}} \frac{(\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2)(\omega^2 + 2v_{e0}^2 \tau^2 - v_{e0}^2)}{(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Чтобы отделить теперь в уравнениях (8.26), (8.27) искомые функции μ и φ , умножаем (8.26) на $\mu \cos \varphi$, а (8.27) на $\mu \sin \varphi$ и, складывая полученные выражения, приходим к уравнению:

$$\frac{d\mu}{d\tau} = \mu \frac{(\delta' v_{e0} \tau)^2}{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2} \frac{\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2}{\tau(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)} \quad (8.28)$$

(здесь использованы также выражения (8.22) для φ' , δ'). Решение этого уравнения с граничным условием (8.25):

$$\mu(z) = \mu_0 \exp \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau(z)} \frac{(\delta' v_{e0} \tau)^2}{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2} \frac{\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2}{\tau (\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)} d\tau \right\}. \quad (8.29)$$

Аналогично, умножая (8.26) на $\sin \varphi$, а (8.27) на $\cos \varphi$ и вычитая (8.27) из (8.26), приходим к уравнению, из которого определяется φ :

$$\varphi(z) = \int_{\tau_0}^{\tau(z)} \frac{\delta' v_{e0} \Omega}{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2} \frac{\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} d\tau. \quad (8.30)$$

При $\Omega \ll \delta_0 v_{e0}$ выражения (8.29), (8.30) совпадают с (8.14), как это и должно быть. Из (8.29) ясно также, что с ростом частоты Ω влияние самовоздействия волны в плазме на ее модуляцию всегда ослабевает: $|\mu - \mu_0|$ с ростом Ω уменьшается. Например, при $\Omega \gg \delta' v_{e0} \tau_0$ разность $|\mu - \mu_0|$ убывает как $(\delta' v_{e0} / \Omega)^2$. Следовательно, рассмотренные в предыдущем разделе выражения для μ показывают всегда максимальное возможное изменение модуляции волны за счет ее самовоздействия в плазме.

В случае волны высокой частоты $\omega^2 \gg v_{e0}^2$ из (8.29), (8.30) получаем простое выражение для глубины и фазы модуляции:

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{(\delta' v_{e0} \tau)^2 + \Omega^2}{(\delta' v_{e0} \tau_0)^2 + \Omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\Omega}{\delta' v_{e0} \tau_0} - \arctg \frac{\Omega}{\delta' v_{e0} \tau}. \quad (8.31)$$

Зависимость μ/μ_0 и φ от $\Omega/\delta' v_{e0}$ изображена на рис. 8.5. Из рисунка видно, что возмущения глубины модуляции монотонно убывают с ростом Ω . Сдвиг фазы φ немонотонно зависит от Ω . Он мал как при низких ($\Omega \ll \delta' v_{e0}$), так и при высоких ($\Omega \gg \delta' v_{e0}$) частотах модуляции. Максимальное значение

$$\varphi_{\max} = \arctg \sqrt{\tau_0/\tau} - \arctg \sqrt{\tau/\tau_0}$$

достигается при $\Omega_{\max} = \delta' v_{e0} \sqrt{\tau_0/\tau}$.

8.3. Фазовая модуляция.

В разделах 7.1, 7.2 было показано, что за счет самовоздействия плоской волны в плазме меняются как ее амплитуда, так и фаза ($\Delta\varphi$). Следовательно, при распространении в плазме волны, модулированной по амплитуде, должна возникнуть за счет нелинейности фазовая модуляция.

В случае низких частот модуляции (8.8) $\Omega \ll \delta_0 v_{e0}$ фазовую модуляцию можно определить непосредственно из формулы (7.30), показывающей изменение фазы волны $\Delta\varphi$ в зависимости от амплитуды поля на границе плазмы. Необходимо только

учесть, что амплитуда поля на границе плазмы меняется со временем согласно (8.1). Следовательно, и фаза $\Delta\varphi$ периодически меняется со временем с частотой Ω . При малом μ_0 , разлагая $\Delta\varphi$ в (7.30) по степеням μ_0 и ограничиваясь первым членом разложения, имеем:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi|_{\mu_0=0} + \mu_0 \left[E_0(0) \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_0(0)} \right] \cos \Omega t + \dots \quad (8.32)$$

Первый член в этом выражении дает постоянный сдвиг фазы. Поэтому индекс фазовой модуляции равен

$$\beta = \mu_0 \left[E_0(0) \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_0(0)} \right], \quad (8.33)$$

где зависимость $\Delta\varphi[E_0(0)]$ определена формулой (7.30).

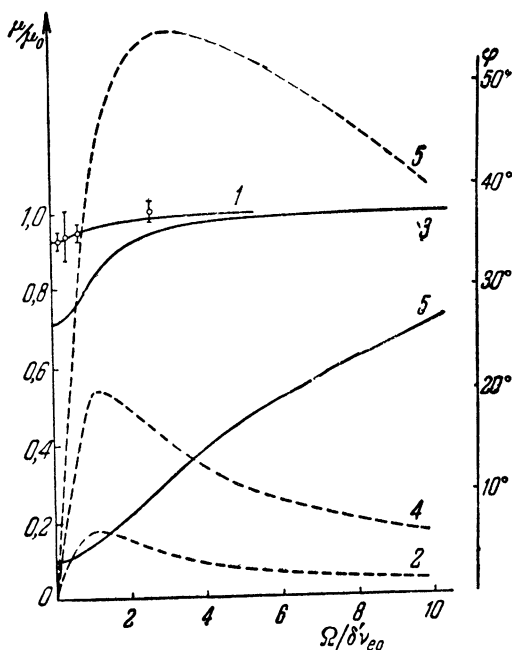


Рис. 8.5. Зависимость глубины и фазы (пунктир) от частоты модуляции. Кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям $E_0(0)/E_p = 0,4; 0,75; 1; 1,73$ и 10. Точки — результаты эксперимента [102].

В общем случае выражение (8.33) довольно сложное. Оно упрощается в глубине плазмы ($K(z) \gg 1$, $\tau(z) \rightarrow 1$):

$$\beta = \mu_0 \frac{\tau_0^2 - 1}{\tau_0} \frac{\omega v_{e0}}{\omega^2 + 2v_{e0}^2 \tau_0^2 - v_{e0}^2} \left[1 + \left(\frac{x_0}{n_0} \right) \frac{(\omega^2 + v_{e0}^2)(\omega^2 - v_{e0}^2 \tau_0^2)}{\omega v_{e0} (\omega^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2)} \right]. \quad (8.34)$$

Здесь $\overline{\kappa_0/n_0}$ — среднее значение отношения показателей поглощения и преломления в области распространения волны. Из (8.34) следует, что индекс фазовой модуляции невелик как при высоких ($\omega^2 \gg v_{e0}^2 \tau_0^2$), так и при низких частотах ($\omega^2 \ll v_{e0}^2$). Пренебрежем, для простоты, вторым членом в квадратных скобках. Из (8.34) следует тогда, что максимальное значение β в зависимости от ω достигается при $\omega_{\max} = v_{e0} \sqrt{2\tau_0^2 - 1}$:

$$\beta_{\max} = \mu_0 \frac{\tau_0^2 - 1}{2\tau_0 \sqrt{2\tau_0^2 - 1}}. \quad (8.35)$$

Значение β_{\max} растет с ростом $\tau_0 = \sqrt{\frac{T_e [E_0(0)]}{T}}$, т. е. с ростом амплитуды поля на границе плазмы. При больших $\tau_0 \gg 1$ достигается оптимальное значение $\beta_{\max} = \mu_0/2 \sqrt{2}$.

8.4. Нелинейное искажение формы импульса.

Рассмотрим, как за счет нелинейности деформируется прямоугольный радиоимпульс. Известно, что импульс деформируется и в линейном приближении за счет дисперсии скорости волн [1]. Будем, однако, рассматривать распространение вдали от точки отражения ($n \sim 1$) и считать, что длительность импульса t_1 достаточно велика, $t_1 \gg \sqrt{\frac{\pi z}{c} \frac{d^2}{d\omega^2} [\omega n(\omega)]}$, так что линейный процесс мало существен. Итак, пусть амплитуда поля волны на границе плазмы имеет вид:

$$E|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > t_1, \\ E_0(0) & \text{при } 0 \leq t < t_1. \end{cases} \quad (8.36)$$

В случае слабого поля решение уравнения (6.20) с граничным условием (8.36) по-прежнему дается формулами (7.1), (7.3), где возмущение температуры ΔT_e определено уравнением (3.18):

$$\frac{1}{\delta_0 v_{e0}} \frac{d\Delta T_e}{dt} + \Delta T_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \text{ и } t > t_1 + t_0, \\ \left[\frac{E_0(0)}{E_p} \right]^2 T_{e0} \frac{e^{-2K}}{n_0} & \text{при } t_0 < t < t_0 + t_1. \end{cases} \quad (8.37)$$

Здесь t_0 — момент включения поля в точке z , который, естественно, определяется временем прохождения волны от границы плазмы до рассматриваемой точки z :

$$t_0 = \frac{1}{c} \int_0^z n_0^{-1}(z_1) dz_1. \quad (8.38)$$

Мы пренебрегли здесь дисперсионным эффектом. Интегрируя уравнение (8.37), находим возмущение температуры ΔT_e (показанное на рис. 19.1, стр. 207) и амплитуду волны в плазме:

$$E(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \text{ и } t > t_0 + t_1, \\ E_1(z) [1 - q(1 - e^{-\delta_0 v_{e0}(t-t_0)})] & \text{при } t_0 < t < t_0 + t_1. \end{cases} \quad (8.39)$$

Величина q определена по-прежнему формулами (7.4), (7.8).

Из формулы (8.39) видно, что в течение времени $t - t_0 \sim 1/\delta_0 v_{e0}$ амплитуда поля в плазме нарастает (при $q < 0$) или убывает (при $q > 0$). При $t - t_0 \gg 1/\delta_0 v_{e0}$ устанавливается стационарное состояние (8.4). Если $t_1 \leq (\delta_0 v_{e0})^{-1}$, то прямоугольный импульс значительной амплитуды ($E_0(0) \sim E_p$) сильно деформируется за счет нелинейности. Физическая причина этой деформации вполне понятна: поглощение волны в плазме при учете нелинейности зависит от температуры электронов. Последняя же устанавливается не сразу, а за время $(\delta_0 v_{e0})^{-1}$, в течение которого разогреваются электроны. Это приводит к изменению поглощения волны в течение времени установления $(\delta_0 v_{e0})^{-1}$, следовательно, и к деформации импульса. В частности, передний фронт импульса проходит в неразогретой, невозмущенной плазме. Поэтому амплитуда его определяется всегда лишь линейным поглощением.

Совершенно аналогичен процесс деформации импульса в случае сильного поля $E_0(0) \gtrsim E_p$ (см. [73]). Для расчета также следует использовать уравнения (8.17), (8.18) с граничным условием (8.36). Отметим, что приближенно форма импульса и в этом случае описывается формулой (8.39), если заменить в ней q на $(1 - P)$, где P — множитель самовоздействия в стационарном поле, подробно рассматривавшийся в § 7.

8.5. Термоионизационные колебания.

Под воздействием поля очень сильной волны изменяется концентрация плазмы за счет дополнительной ионизации молекул быстрыми электронами (см. разделы 5.6 и 7.3). При этом плазма может стать неустойчивой: в ней развиваются особые термоионизационные колебания. Одновременно волна, вызвавшая возмущение, приобретает амплитудную модуляцию с частотой термоионизационных колебаний. Возникает самомодуляция сильной волны [229].

Действительно, рассмотрим плазму, находящуюся в поле очень сильной волны, когда существенна дополнительная неизотермическая ионизация. Стационарное распределение плазмы в этом случае рассмотрено в § 7.3. Концентрация плазмы сильно возрастает при $E_0 \sim E_k$. Исследуем теперь устойчивость стационарного состояния. Для этого рассмотрим малые возмущения плотности плазмы ΔN , температуры электронов ΔT_e и ампли-

туды электрического поля волны ΔE . Они описываются линейризованными уравнениями (4.36), (4.27), (7.12):

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 \Delta N}{\partial z^2} - D_{Tea} \frac{N}{T_e} \frac{\partial^2 \Delta T_e}{\partial z^2} = -\nu_1 \Delta N - \nu_{\text{ion}} \frac{dF}{dT_e} N \Delta T_e, \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial \Delta T_e}{\partial t} - k_e \frac{\partial^2 \Delta T_e}{\partial z^2} = -\nu_2 \Delta T_e + \gamma \frac{\Delta E}{E_0}, \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial z} = -\frac{\omega}{c} \kappa \Delta E - \frac{\omega}{c} \frac{\kappa}{N} E_0 \Delta N - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} E_0 \Delta T_e, \quad (8.42)$$

$$\nu_1 = \nu_r + N \frac{\partial \nu_r}{\partial N} - \nu_{\text{ion}}, \quad \nu_2 = \delta \nu_e + (T_e - T) \left(\nu_e \frac{d\delta}{dT_e} + \frac{2\omega^2}{\omega^2 + \nu_e^2} \frac{d\nu_e}{dT_e} \right),$$

$$\gamma = 2(T_e - T) \delta \nu_e = \frac{2e^2 E_0^2 \nu_e}{3m(\omega^2 + \nu_e^2)}, \quad k_e = \kappa_e / N.$$

Здесь $\nu_r = q_r / N$ — частота рекомбинации, ν_{ion} — частота ионизации молекул быстрыми электронами (5.39). Она представлена здесь в виде:

$$\nu_{\text{ion}} = (\nu_{\text{ion}})_0 \exp[-F(T_e)].$$

Фактор $F(T_e)$ в случае высокочастотного возмущающего поля $\omega^2 \gg \nu_e^2$ равен e_i / T_e , где e_i — энергия ионизации. В общем случае $F(T_e)$ может значительно отличаться от e_i / T_e (*). Существо, что всегда $F(T_e) \gg 1$ и $dF/dT_e < 0$.

Далее, в уравнениях (8.40) — (8.42) пренебрегается зависимостью от z основных стационарных величин $N(z)$, $T_e(z)$, $E_0(z)$. Это справедливо, если характерный размер рассматриваемых возмущений мал в сравнении с размером неоднородности:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Delta N} \frac{\partial \Delta N}{\partial z} \right| &\gg \frac{1}{R_N} = \left| \frac{1}{N} \frac{dN}{dz} \right|, \\ \left| \frac{1}{\Delta T_e} \frac{\partial \Delta T_e}{\partial z} \right| &\gg \frac{1}{R_T} = \left| \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dz} \right|, \\ \left| \frac{1}{\Delta E} \frac{\partial \Delta E}{\partial z} \right| &\gg \frac{\omega}{c} \kappa = \left| \frac{1}{E_0} \frac{dE_0}{dz} \right|. \end{aligned} \quad (8.43)$$

В этих условиях решение линейных уравнений (8.40) — (8.42) можно искать, как обычно, разложением в интеграл Фурье по z и t .

*) Здесь рассматриваются нестационарные процессы. Поэтому нельзя пользоваться для ν_{ion} формулой (5.39), справедливой лишь в стационарных условиях. Для точного определения ν_{ion} нужно решать нестационарное кинетическое уравнение. Приближенно можно ограничиться рассмотрением температуры электронов. Такое приближение оказывается достаточным в случае высокочастотного поля $\omega^2 \gg \nu^2(v)$ при $\delta \neq \delta(v)$, когда функция распределения электронов близка к максвелловской (см. § 21).

Подставляя в (8.40) — (8.42) ΔN , ΔT_e и ΔE в виде:

$$f = \int \exp(-i\Omega t + ikz) f_k dk d\Omega, \quad f = \Delta N, \Delta T_e, \Delta E, \quad (8.44)$$

приходим к дисперсионному соотношению:

$$\begin{aligned} (-i\Omega + D_a k^2 + \nu_1) \left[\left(ik + \frac{\omega}{c} \kappa \right) (-i\Omega + k_e k^2 + \nu_2) + \gamma \frac{\omega}{c} \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} \right] - \\ - \gamma \frac{\omega}{c} \kappa \left(\nu_{\text{ion}} \frac{dF}{dT_e} + \frac{D_{Tea}}{T_e} k^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Здесь κ — коэффициент поглощения волны, $k_e = \kappa_e/N$ — коэффициент теплопроводности электронов (4.27), (4.46). Учтем, что в силу условия (8.43) $|k| \gg \frac{\omega}{c} \kappa$. Из (8.45) тогда находим:

$$\Omega^2 + i\Omega(A + iB) + iC - D = 0, \quad \Omega = -\frac{i}{2}(A \pm R) + \frac{1}{2}(B \pm Q). \quad (8.46)$$

$$A = \nu_1 + \nu_2 + (k_e + D_a) k^2, \quad B = -\gamma \frac{\omega}{ck} \frac{\partial \kappa}{\partial T_e},$$

$$C = \gamma \frac{\omega}{ck} \left[(\nu_1 + D_a k^2) \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} - \kappa \left(\nu_{\text{ion}} \frac{dF}{dT_e} + D_{Tea} \frac{k^2}{T_e} \right) \right],$$

$$D = (\nu_2 + k_e k^2)(\nu_1 + D_a k^2), \quad R = -2^{-1/2} \left[(b^4 + a^4)^{1/2} + b^2 \right]^{1/2},$$

$$Q = -2^{-1/2} \left[(b^4 + a^4)^{1/2} - b^2 \right]^{1/2}, \quad b^2 = A^2 - B^2 - 4D,$$

$$a^2 = -2(AB + 2C).$$

При не очень высоких амплитудах поля мнимая часть частоты меньше нуля: $\text{Im } \Omega < 0$. В этом случае колебания всегда затухают. При больших значениях амплитуды E_0 , однако, $\text{Im } \Omega$ может обратиться в нуль и изменить знак. В этом случае стационарное состояние плазмы неустойчиво, возбуждаются колебания. Условие возникновения неустойчивости:

$$\text{Im } \Omega = 0,$$

или $-A = R$, $C^2 + ABC = A^2 D$, т. е.

$$\begin{aligned} k^2 \nu_1 (\nu_2 + k_e k^2)^3 = -\gamma^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left[-\kappa \nu_{\text{ion}} \frac{dF}{dT_e} + \nu_1 \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} - \frac{\kappa D_{Tea}}{T_e} k^2 \right] \times \\ \times \left[(\nu_2 + k_e k^2) \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} + \kappa \nu_{\text{ion}} \frac{dF}{dT_e} \right]. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Здесь учтено, что всегда $D_a \ll k_e$, $\nu_1 \ll \nu_2$ (см. табл. 5.9). Отсюда видно, что первыми возбуждаются длинные волны ($k \rightarrow 0$). При малых k процессы диффузионного переноса несущественны и условие (8.47) переписывается в виде:

$$k = \frac{\gamma \omega}{c(\nu_2 + k_e k^2)} \left| \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} \right| \left[-1 + q \frac{\nu_{\text{ion}}}{\nu_1} \right]^{1/2}, \quad q = \kappa \frac{dF}{dT_e} / \frac{\partial \kappa}{\partial T_e}. \quad (8.48)$$

Отсюда видно, что условие возбуждения неустойчивости выполнено, если

$$qv_{\text{лон}} > v_1. \quad (8.49)$$

Иначе говоря, необходимо, чтобы была значительная дополнительная ионизация, т. е. чтобы поле волны было достаточно сильным. Кроме того, поскольку

$$\frac{dF}{dT_e} < 0 \text{ и } \frac{\partial \kappa}{\partial T_e} = \frac{\kappa}{v_e} \frac{dv_e}{dT_e} \frac{\omega^2 - v_e^2}{\omega^2 + v_e^2},$$

то из (8.48), (8.49) следует, что неустойчивость возникает только при низких частотах $v_e > \omega$ (если, разумеется, $dv_e/dT_e > 0$).

Частота возбуждающихся колебаний

$$\text{Re } \Omega = \frac{1}{2}(B + Q). \quad (8.50)$$

Учитывая, что $A^2 \gg B^2 \gg D$, C , находим отсюда характерную частоту колебаний:

$$|\text{Re } \Omega| = (DB + AC)/(A^2 + B^2) = v_1 \left[-1 + q \frac{v_{\text{лон}}}{v_1} \right]^{1/2}. \quad (8.51)$$

Рассматриваемые колебания определяются последовательными изменениями температуры и ионизации плазмы. Их естественно назвать поэтому термоионизационными колебаниями. Они тесно связаны с присутствием в плазме сильной электромагнитной волны. Поле волны при возбуждении термоионизационных колебаний, как ясно непосредственно из формул (8.44), оказывается промодулированным по амплитуде с частотой Ω . Этот процесс можно назвать термоионизационной самомодуляцией волны.

§ 9. Генерация волн-гармоник и изменение поляризации волны

Возмущения диэлектрической проницаемости и проводимости, вызываемые электрическим полем волны частоты ω в плазме, при $\omega \gg \delta v_e$ в основном постоянны во времени. Однако имеются и переменные поправки к σ и ϵ частоты 2ω , т. е. переменные поправки к току частоты 3ω и ω . Эти поправки при условии (6.7) малы: они имеют порядок $\delta v_e/\omega$. Поэтому волна, распространяясь в нелинейной среде, в основном сохраняет свою частоту ω . Благодаря наличию переменных поправок частоты 3ω в среде могут генерироваться волны-гармоники частоты 3ω [81, 86—92]. Нелинейные поправки к току на частоте ω приводят для эллиптически поляризованной волны к вращению эллипса поляризации.

9.1. Утроение частоты.

При распространении волн частоты ω в плазме вследствие нелинейности возникают поправки к току частоты 3ω . В приближении элементарной теории эти поправки $j_{3\omega}^{(2)}$ имеют вид (3.44):

$$j_{3\omega}^{(2)} = j_{0+}^{(2)} e^{3i\omega t} + j_{0-}^{(2)} e^{-3i\omega t}, \quad (9.1)$$

$$j_{0+}^{(2)} = \frac{\delta E_0^2}{8E_p^2} \frac{\bar{T}_e}{v_e} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{\bar{T}_e} \frac{3\omega^2 - 5v_e^2 - iv_e(v_e^2 - 7\omega^2)}{9\omega^2 + v_e^2} j_0^{(1)}, \quad j_{0-}^{(2)} = j_{0+}^{(2)*}.$$

Здесь $j_{0+}^{(2)*}$ — величина, комплексно сопряженная с $j_{0+}^{(2)}$; $j_0^{(1)} = \sigma_0 \mathbf{E}$ — амплитуда тока проводимости на основной частоте ω . К такому же виду тока $j_{3\omega}^{(2)}$ приводит и более строгий кинетический расчет. Изменяются лишь выражения для амплитуд $j_{0+}^{(2)}$, $j_{0-}^{(2)}$.

Наличие в плазме тока $j_{3\omega}^{(2)}$ приводит к генерации соответствующей волны-гармоники $\mathbf{E}^{(2)}$ частоты 3ω . Поле волны $\mathbf{E}^{(2)}$ в плазме определяется уравнением (6.9). Подставляя выражение (9.1) в (6.9) и принимая, что $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_+^{(2)} e^{3i\omega t} + \mathbf{E}_-^{(2)} e^{-3i\omega t}$, приходим к следующему уравнению для амплитуды $\mathbf{E}_+^{(2)}$:

$$\Delta \mathbf{E}_+^{(2)} - \text{grad div } \mathbf{E}_+^{(2)} + \left[\frac{9\omega^2 \epsilon_1}{c^2} + i \frac{4\pi\sigma_1}{c^2} 3\omega \right] \mathbf{E}_+^{(2)} = i \frac{12\pi\omega}{c^2} j_{0+}^{(2)}. \quad (9.2)$$

Здесь σ_1 и ϵ_1 — проводимость и диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте 3ω . Аналогичный вид имеет и уравнение для комплексно сопряженной амплитуды $\mathbf{E}_-^{(2)}$.

Примем для простоты, что плазма изотропна и что волна распространяется в направлении z . Уравнение (9.2) переписывается тогда в виде

$$\frac{d^2 E_+^{(2)}}{dz^2} + \left[\frac{9\omega^2 \epsilon_1}{c^2} + i \frac{4\pi\sigma_1}{c^2} 3\omega \right] E_+^{(2)} = i \frac{12\pi\omega}{c^2} j_{0+}^{(2)}. \quad (9.3)$$

На границе плазмы $z = 0$ гармоника частоты 3ω отсутствует. При больших z вне области взаимодействия волна $E_+^{(2)}$ распространяется лишь в направлении z . Таким образом, граничные условия к уравнению (9.3) таковы:

$$E_+^{(2)}|_{z=0} = 0, \quad E_+^{(2)}|_{z \rightarrow \infty} = C e^{ikz}. \quad (9.4)$$

Будем для простоты считать, что σ_1 и ϵ_1 в левой части (9.3) не зависят от z . Решение уравнения (9.3) складывается тогда из решения неоднородного уравнения

$$E_+^{(2)} = \frac{6\pi\omega}{c^2 k^2} \left\{ e^{ikz} \int_0^z j_{0+}^{(2)} e^{-ik_2 z_1} dz_1 - e^{-ik_2 z} \int_z^\infty j_{0+}^{(2)} e^{ik_2 z_1} dz_1 \right\} \quad (9.5)$$

и однородного решения

$$E_0^{(2)} = C_1 e^{ik_2 z} + C_2 e^{-ik_2 z} \quad (9.6)$$

с произвольными константами C_1 и C_2 . Здесь k_2 — комплексный волновой вектор волны частоты 3ω :

$$k_2 = \frac{3\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 + i \frac{4\pi\sigma_1}{3\omega}}. \quad (9.7)$$

Выбирая константы C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить граничным условиям (9.4), находим:

$$E_+^{(2)} = \frac{6\pi\omega}{c^2 k_2} \left\{ e^{ik_2 z} \left[\int_0^z j_{0+}^{(2)} e^{-ik_2 z_1} dz_1 - \int_0^\infty j_{0+}^{(2)} e^{ik_2 z_1} dz_1 \right] + e^{-ik_2 z} \int_z^\infty j_{0+}^{(2)} e^{ik_2 z_1} dz_1 \right\}. \quad (9.8)$$

Аналогичное решение получается и для амплитуды $E_-^{(2)} = E_+^{(2)*}$.

Из (9.8) видно, что амплитуда гармоники $E^{(2)}(z)$ эффективно нарастает лишь на малом расстоянии порядка длины волны вблизи границы плазмы. В дальнейшем изменение ее носит осциллирующий характер. На больших расстояниях в глубине плазмы, там, где возмущения, вызываемые основной волной, уже слабы, для амплитуды гармоники $E^{(2)}$ получаем:

$$|E^{(2)}|_{z \rightarrow \infty} = \frac{24\pi\omega}{c^2 k_2} e^{-K_2} \left| \int_0^\infty j_0^{(2)} \sin(k_2 z) dz \right|. \quad (9.9)$$

Здесь $K_2(z)$ — полное поглощение волны частоты 3ω от границы плазмы до рассматриваемой точки z :

$$K_2(z) = \frac{3\omega}{c} \int_0^z \kappa(3\omega) dz.$$

Амплитуда волны-гармоники при выполнении условия (6.7) всегда много меньше амплитуды основной волны — порядка $\delta v_e / \omega$. С понижением частоты основной волны ω амплитуда гармоники растет. Она может сделаться значительной в сильных полях $E_0 \gtrsim E_p$ при $\omega \sim \delta v_e$. Амплитуды более высоких гармоник с частотами $5\omega, 7\omega, \dots$ уменьшаются по степеням параметра $\delta v_e / \omega$.

Здесь рассматривается исключительно нелинейность, связанная с нагревом электронов в поле волны. Другие механизмы нелинейности также могут приводить к появлению волн-гармоник. В частности, в неоднородной плазме может генерироваться

вторая гармоника [93, 94]. Механизм ее генерации связан с рассеянием радиоволны на генерируемых ею же колебаниях плазмы. Аналогичный нелинейный эффект имеет место и в однопордной магнитоактивной плазме [93].

9.2. Нелинейное изменение эллипса поляризации.

Нелинейный ток $j^{(2)}$ имеет и поправки $j_{\omega}^{(2)}$ на частоте основной волны ω (3.44), которые определяют дополнительные изменения проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы. Эти изменения малы по сравнению с основными возмущениями σ и ϵ за счет изменения \bar{T}_e . Поэтому они, вообще говоря, не существенны. Однако ток $j_{\omega}^{(2)}$ носит анизотропный характер, что может проявиться при распространении эллиптически поляризованных волн. Действительно, в линейном приближении эллиптически поляризованная волна, распространяясь в изотропной плазме, не меняет своей поляризации. Основные нелинейные возмущения $\epsilon(\bar{T}_e)$ и $\sigma(\bar{T}_e)$ носят скалярный характер и потому они также не влияют на поляризацию волны. Нелинейные же поправки $j_{\omega}^{(2)}$ анизотропны. Они могут изменить поэтому соотношение между фазами компонент поляризации, что приведет в конечном счете к изменению эллипса поляризации. Это явление и будет рассмотрено в настоящем разделе*).

Поправки к току для волны эллиптической поляризации. Определим вначале нелинейные поправки к току для эллиптически поляризованной волны. Примем, что плоская волна, распространяющаяся в направлении z , поляризована по эллипсу в плоскости xy , ортогональной z :

$$E_x = E_{x0} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right), \quad E_y = E_{y0} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (9.10)$$

Здесь φ — сдвиг фазы между компонентами E_x и E_y .

Уравнения движения электрона в поле волны (9.10) в изотропной плазме ($H = 0$) в приближении элементарной теории имеют вид (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} + \nu_e(T_e) v_x &= -\frac{eE_{x0}}{m} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right), \\ \frac{dv_y}{dt} + \nu_e(T_e) v_y &= -\frac{eE_{y0}}{m} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned} \quad (9.11)$$

где температура T_e определена уравнением (3.18). Решение уравнений (9.11), (3.18) в условиях (6.7) находится, как обычно, методом последовательных приближений. В первом приближении температура $T_e = \bar{T}_e$ постоянна. Тогда частота соударе-

*) Нелинейное вращение эллипса поляризации при других механизмах нелинейности рассмотрено в [95, 96].

ний электрона v_e также постоянна, и из (9.11) имеем:

$$v_x^{(1)} = - \frac{eE_{x0}}{m[\omega^2 + v_e^2]} \left\{ \cos \omega t \left[v_e \cos \frac{\varphi}{2} - \omega \sin \frac{\varphi}{2} \right] + \right. \\ \left. + \sin \omega t \left[v_e \sin \frac{\varphi}{2} + \omega \cos \frac{\varphi}{2} \right] \right\}, \quad (9.12)$$

$$v_y^{(1)} = - \frac{eE_{y0}}{m(\omega^2 + v_e^2)} \left\{ \cos \omega t \left[v_e \cos \frac{\varphi}{2} + \omega \sin \frac{\varphi}{2} \right] + \right. \\ \left. + \sin \omega t \left[\omega \cos \frac{\varphi}{2} - v_e \sin \frac{\varphi}{2} \right] \right\}.$$

Определим теперь осциллирующую поправку к температуре ΔT_e . Составляя с помощью (9.10), (9.12) произведение $\mathbf{E}v^{(1)}$ и подставляя его в уравнение для температуры (3.18), найдем:

$$\Delta T_e = - \frac{E_0^2}{E_p^2} \delta \bar{T}_e \{ \cos 2\omega t [T_c \cos \varphi - \mathcal{H} T_s \sin \varphi] + \\ + \sin 2\omega t [T_s \cos \varphi + \mathcal{H} T_c \sin \varphi] \}, \quad (9.13)$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{E_{x0}^2 - E_{y0}^2}{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}, \quad E_0^2 = E_{x0}^2 + E_{y0}^2, \quad T_c = \frac{\delta v_e^2 - 2\omega^2}{4\omega^2 + \delta^2 v_e^2}, \quad T_s = \frac{2\omega v_e}{4\omega^2 + \delta^2 v_e^2}.$$

Подставим в (9.11) $v_e(T_e) = v_e(\bar{T}_e) + (\partial v_e / \partial T_e)_{\bar{T}_e} \Delta T_e$, где ΔT_e определено согласно (9.13), и найдем из (9.11) поправку к скорости электрона $v^{(2)}$ на частоте основной гармоники ω :

$$v_{x,y}^{(2)} = E_{0x,y} \frac{F}{4\pi e N} \left[(a \pm \alpha) \cos \left(\omega t \mp \frac{\varphi}{2} \right) + (b \pm \beta) \sin \left(\omega t \mp \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \quad (9.14)$$

Здесь знак плюс относится к компоненте $v_x^{(2)}$, знак минус — к компоненте $v_y^{(2)}$;

$$F = \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{E_p^2} \frac{\delta \omega_0^2 \bar{T}_e}{\omega^2 + v_e^2} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{\bar{T}_e}; \quad (9.15)$$

$$a = T_c(1 + \cos 2\varphi) - \mathcal{H} T_s \sin 2\varphi, \quad b = T_s(1 + \cos 2\varphi) + \mathcal{H} T_c \sin 2\varphi, \quad (9.16)$$

$$\alpha = T_s \sin 2\varphi + \mathcal{H} T_c(1 - \cos 2\varphi), \quad \beta = \mathcal{H} T_s(1 - \cos 2\varphi) - T_c \sin 2\varphi.$$

Как видно из (9.16), функции a и b симметричны по отношению к преобразованию $\varphi \rightleftharpoons -\varphi$; $E_{x0} \rightleftharpoons E_{y0}$; функции α , β антисимметричны при этом преобразовании.

Из (9.15) и (9.16) можно найти нелинейную поправку к току, наведенному полем волны: $\mathbf{j}_\omega^{(2)} = eNv^{(2)}$. Ток $\mathbf{j}_\omega^{(2)}$ содержит

как часть, совпадающую по фазе с полем $\left(\sim \cos\left(\omega t \pm \frac{\varphi}{2}\right)\right)$, так и часть, сдвинутую по фазе на $\pi/2$ $\left(\sim \sin\left(\omega t \pm \frac{\varphi}{2}\right)\right)$.

Поворот эллипса поляризации. Нелинейная поправка к комплексной диэлектрической проницаемости ϵ' , вносимая током $j_{\omega}^{(2)}$, зависит от φ . Эта анизотропия приводит к зависимости сдвига фаз между компонентами поляризации от интенсивности волны и к повороту эллипса поляризации. Волновое уравнение (6.8), (6.9) в изотропной плазме с учетом тока $j_{\omega}^{(2)}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_{\omega}^{(2)}}{\partial t}. \quad (9.17)$$

Электрическое поле \mathbf{E} поляризовано в плоскости xy .

Для упрощения вычислений примем, что $\epsilon' \neq \epsilon'(z)$ (это справедливо для слабой волны в изотропной плазме). Учитывая, что нелинейная поправка в правой части (9.17) всегда мала, естественно искать решение методом Ван-дер-Поля, т. е. выделяя в поле волны его быстро меняющуюся часть $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(z, t) \exp(ikz)$, где $k = (\omega/c) \sqrt{\epsilon'}$, $\mathbf{E}_0(z, t)$ — медленно меняющаяся функция z . Представим функцию $\mathbf{E}_0(z, t)$ в виде:

$$E_{0x, y} = A_{x, y}(z) \cos \left[\omega t + \psi(z) \pm \frac{\varphi(z)}{2} \right]. \quad (9.18)$$

Здесь функции $A_{x, y}(z)$ описывают нелинейные изменения амплитуды; $\psi(z)$ дает набег фазы волны, связанный с нелинейной фазовой модуляцией, $\varphi(z)$ — сдвиг фазы между компонентами поляризации. Подставляя (9.18) в (9.17), получим уравнение для $\varphi(z)$, пренебрегая вторыми производными:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{IF}{c \sqrt{\epsilon'}} \beta. \quad (9.19)$$

Изменение φ определяется, как видно отсюда, антисимметричной функцией β .

Для решения (9.19) учтем, что из-за малости нелинейных поправок к проводимости изменение амплитуды волны в основном определяется линейным затуханием:

$$A_{x, y}(z) = A_0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa z}. \quad (9.20)$$

Подставляя (9.20) и β из (9.16) в уравнение (9.19) и интегрируя от $\varphi_0 = \varphi(z=0)$ до φ и от $z=0$ до z , получим в неявном виде зависимость φ от z *):

$$\ln \left(\frac{1 - T_c / \mathcal{K} T_s \operatorname{tg} \varphi}{1 - T_c / \mathcal{K} T_s \operatorname{tg} \varphi_0} \right) = \frac{2FTc}{\omega \operatorname{Im} \epsilon'} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{2\omega}{c} \kappa z \right) \right\}. \quad (9.21)$$

*) Функция $\psi(z)$, содержащая малый множитель δ , мала в сравнении с нелинейным набегом фазы, обусловленным T_e .

Как следует из (9.10), большая полуось эллипса наклонена к оси x под углом θ , определяемым из равенства

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{E_{x0}E_{y0} \cos \varphi}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2}. \quad (9.22)$$

Учитывая условие (6.7), сдвиг фазы φ можно представить в виде $\varphi = \varphi_0 + \alpha$, где $\alpha \ll \pi/2$. Учтем, что $\omega \gg \delta\nu_e$. Тогда при $\varphi_0 = \pi/2$ из (9.21), (9.22) следует:

$$\alpha = \frac{\mathcal{K} \nu_e}{\omega^2} \frac{F}{\operatorname{Im} \epsilon'} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \kappa z\right) \right], \quad \theta = \frac{E_{x0}E_{y0}\alpha}{2(E_{x0}^2 - E_{y0}^2)}. \quad (9.23)$$

Таким образом, при распространении эллиптических поляризованной волны в плазме эллипс поляризации поворачивается на угол θ . Отметим, что при переходе от $\varphi_0 = \pi/2$ к $\varphi_0 = -\pi/2$ сдвиг фазы α и угол θ также меняют знак.

§ 10. Нелинейные явления в области отражения радиоволн

Выше рассматривались нелинейные явления при распространении радиоволн в плазме вдали от области отражения волны. В этих условиях изменение диэлектрической проницаемости среды под воздействием поля волны оказывается мало существенным. Главную роль играет изменение поглощения волны. В окрестности точки отражения, напротив, наиболее существенно изменение диэлектрической проницаемости среды, поскольку сама точка отражения z_0 определяется, как известно, из условия $\epsilon(z_0) = 0$. Поэтому в настоящем параграфе мы и будем рассматривать в основном лишь изменение ϵ , считая частоту волны высокой ($\omega \gg \nu_e$), а среду — непоглощающей:

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sigma \rightarrow 0. \quad (10.1)$$

Диэлектрическая проницаемость изменяется вследствие изменения плотности плазмы под воздействием поля волны, $N = N(T_e)$, $T_e = T_e(E)$.

В области отражения волны имеются всегда как падающая, так и отраженная волны. Поэтому нельзя ограничиться рассмотрением одной бегущей волны, как это делалось выше, а следует учесть взаимодействие падающей и отраженной волн. В линейном приближении в области отражения образуется стоячая волна [1, § 17]. Аналогичная стоячая волна возникает и при учете нелинейности. Однако форма профиля волны, ее длина и другие параметры зависят теперь от амплитуды поля.

Наконец, в области отражения $\epsilon \rightarrow 0$ и амплитуда поля радиоволны возрастает $\sim \epsilon^{-1/4}$. Еще сильнее возрастает здесь продольное поле частоты ω_0 . Поскольку частота волны ω близка к ω_0 , то возможна параметрическая неустойчивость, приводящая

к энергичному росту ионно-звуковых и плазменных волн (см. § 4.5). Поэтому приводимые ниже результаты справедливы лишь при условии, что амплитуда поля волны меньше порогового поля E_{Π} (4.96) (см. табл. 5.10).

10.1. Нелинейная стоячая волна в однородной плазме.

Рассмотрим нелинейную волну высокой частоты $\omega > \nu_e$ в однородной плазме. Волновое уравнение (6.8) имеет тогда вид:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\epsilon_0 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta T_e \right] E = 0, \quad (10.2)$$

$$\Delta T_e = T_{e0} (E_0/E_p)^2. \quad (10.3)$$

Здесь ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость невозмущенной полем среды. Второй член в квадратных скобках — нелинейный: это поправка к ϵ_0 , вызванная влиянием поля на плазму. Для простоты волна принята слабой, $E_0^2 \ll E_p^2$; для возмущений температуры электронов ΔT_e использована формула (3.35).

Пусть в точке $z = 0$ диэлектрическая проницаемость ϵ_0 изменится скачком и становится равной ϵ_1 , где $\epsilon_1 < 0$ (точнее, $\epsilon_1 < \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta T_e$). В этом случае волна отражается от границы $z = 0$ и в области $z < 0$ образуется стоячая волна*). Введя вместо z и E_0 безразмерные функции

$$t = \frac{z\omega}{c}, \quad y = \frac{E_0}{E_p} \sqrt{-\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} T_{e0}}, \quad (10.4)$$

перепишем уравнение (10.2) в виде:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\epsilon_0 + y^2) y = 0. \quad (10.5)$$

Здесь учтено, что в стоячей волне поле действительное, т. е. $|y|^2 = y^2$, и принято, что $\partial N/\partial T_e < 0$ (см. (5.37)); в противном случае (5.28) член y^2 имеет противоположный знак. Уравнение (10.5) интегрируется заменой y'' на $\frac{1}{2y} \frac{d}{dt} (y')^2$. Получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{C - \epsilon_0 y^2 - \frac{y^4}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 + 2\epsilon_0 + a^2)}. \quad (10.6)$$

Здесь C — константа интегрирования. В последнем выражении вместо нее введена постоянная a ($2C = a^2(2\epsilon_0 + a^2)$), имею-

*) Поглощением волн здесь пренебрегаем. Нелинейные волны в однородной плазме при учете поглощения рассмотрены в [97].

щая смысл амплитуды колебаний поля. Интегрирование уравнения (10.6) дает:

$$t = t_1 F\left(\frac{1}{\sqrt{2(1+\tau_0)}}, \varphi\right), \quad \sin \varphi = \frac{y}{a} \frac{\sqrt{2(1+\tau_0)}}{\sqrt{1+2\tau_0 + \frac{y^2}{a^2}}}, \quad (10.7)$$

где

$$t_1 = 1/2 \sqrt{a^2 + \varepsilon_0}, \quad \tau_0 = \varepsilon_0/a^2.$$

Здесь $F(k, \varphi)$ — эллиптический интеграл первого рода. Формула (10.7) определяет в неявном виде зависимость y от t . Вид этой функции при различных значениях параметра $\tau_0 = \varepsilon_0/a^2$ представлен на рис. 10.1. При больших положительных значениях отношения τ_0 , т. е. при малой амплитуде волны, профиль

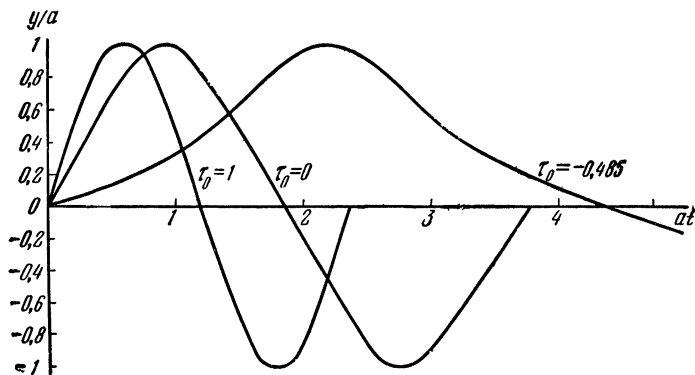


Рис. 10.1. Профиль стоячей волны в однородной плазме.

волны близок к синусоидальному. Нелинейное искажение профиля волны, как видно из рисунка, усиливается с уменьшением τ_0 . Особенно сильно оно при $\tau_0 \rightarrow -1/2$: профиль волны принимает тогда вид отдельных импульсов. Любопытно, что условие $\tau_0 < 0$ соответствует $\varepsilon < 0$, т. е. без учета нелинейности волна вообще бы не могла распространяться в среде. Под воздействием поля концентрация электронов падает и волна как бы пробивает себе путь в плазме. Предельное отрицательное значение τ_0 , при котором еще в выражении (10.7) $\sin \varphi \leq 1$ и возможно распространение:

$$\tau_k = -1/2. \quad (10.8)$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{0k} = -\frac{a^2}{2} = \frac{2\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}} T_{e0} \frac{E_{0c}^2}{E_p^2}.$$

При $\tau_0 < \tau_k$ или $\varepsilon < \varepsilon_{0k}$ волна уже не может пройти в плазму. С увеличением амплитуды стоячей волны E_{0c} критическое значение ε_{0k} растет по модулю пропорционально E_{0c}^2 .

Длина стоячей волны в плазме:

$$\lambda = \frac{4c}{\omega \sqrt{\epsilon_0 + a^2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2(1 + \tau_0)}}\right). \quad (10.9)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $a \rightarrow 0$ параметр $\tau_0 \rightarrow \infty$ и $\lambda = \lambda_0 = 2\pi c/\omega \sqrt{\epsilon_0}$, т. е. влияние нелинейности несущественно. Оно усиливается с уменьшением τ_0 . При $\tau_0 = 0$ имеем $\lambda = 7,42 \frac{c}{\omega a}$. При $\tau_0 \rightarrow -1/2$ длина стоячей волны λ стремится к бесконечности.

10.2. Отражение волны в неоднородной плазме.

Рассмотрим теперь отражение волны в неоднородной плазме. Будем считать, что плазма слоисто-неоднородна, $N = N(z)$, и волна распространяется нормально к слою. Тогда точка отражения волны z_0 в линейном приближении определена условием:

$$\epsilon(z_0) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z_0)}{m\omega^2} = 0. \quad (10.10)$$

Под воздействием электрического поля волны концентрация электронов изменяется. Это приводит к нелинейному сдвигу точки отражения волны. Весьма важно, что амплитуда поля волны сильно возрастает в области отражения, и это приводит к усилению нелинейных эффектов. Это видно уже из формул (7.4), (7.8). Действительно, показатель преломления $n_0(z)$, стоящий в знаменателе в выражениях (7.4), (7.8), стремится к нулю при приближении к области отражения волны.

Рассмотрим случай слабого поля, $E_0^2 \ll E_p^2$. Учтем, кроме того, что в окрестности точки отражения волны диэлектрическая проницаемость ϵ_0 — линейная функция z :

$$\epsilon_0(z) = (z - z_0) \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial z}\right)_{z_0} = - (z - z_0) \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{z_0}. \quad (10.11)$$

Уравнение (10.2) в безразмерных переменных

$$t = (z_0 - z) \left[\frac{4\pi e^2}{mc^2} \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{z_0} \right]^{1/3}, \quad (10.12)$$

$$y = \frac{|E|}{E_p} \left(\frac{4\pi e^2}{mc^2}\right)^{1/6} \left[-T_{e0} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}} \right]^{1/2} \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{z_0}^{-1/3}$$

принимает тогда вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + ty + y^3 = 0. \quad (10.13)$$

Здесь принято, как и в разделе 10.1, что $(\partial N/\partial T_e)_{T_{e0}} < 0$. В этом случае точка отражения волны за счет нелинейности

сдвигается выше точки z_0 , волна как бы пробивается в глубь плазмы. В обратном случае, когда $(\partial N/\partial T_e)_{T_{e0}} > 0$, концентрация электронов, напротив, возрастает под действием поля волны и точка отражения сдвигается вниз; последний член в уравнении (10.13) при этом изменяет знак.

Численное решение. Уравнение (10.13) интегрировалось численно. При этом разыскивалось решение, обращающееся в

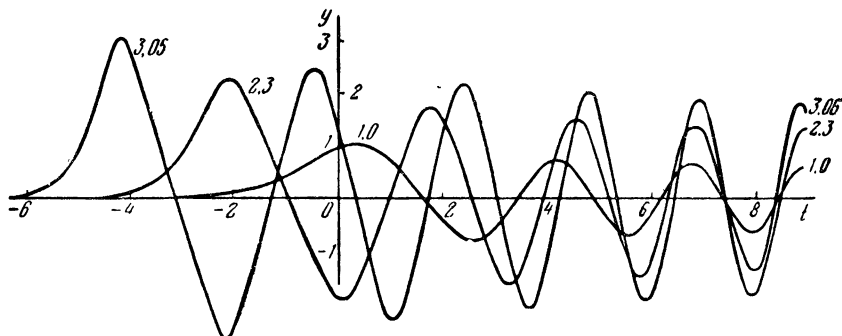


Рис. 10.2. Распределение поля в окрестности точки отражения волны. Возле кривых указаны значения параметра a_{\max} — максимальной амплитуды поля волны.

ноль при $t \rightarrow -\infty$, что соответствует отражению волны. Результаты расчета $y(t)$ представлены на рис. 10.2 для различных значений параметра a_{\max} — максимальной амплитуды поля волны. При малых значениях a_{\max} найденное решение совпадает с функцией Эйри*). Из рисунка видно, что с ростом амплитуды волна сдвигается, проникая все глубже в плазму.

Определим нелинейный сдвиг точки отражения. В линейной теории в точке отражения $\epsilon = 0$, т. е. вторая производная $d^2y/dt^2 = 0$. Естественно и в нелинейном случае определить точку отражения волны t_0 как точку перед первым максимумом, в которой $\epsilon = 0$, т. е. $t_0 = -y^2$ и $d^2y/dt^2 = 0$. Зависимость t_0 от a_{\max} представлена на рис. 10.3 (сплошная кривая). Видно, что с ростом максимальной амплитуды поля точка отражения волны сдвигается в глубину плазмы (пропорционально a_{\max}^2).

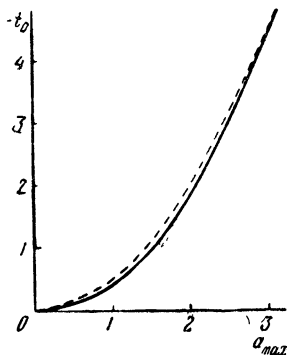


Рис. 10.3. Сдвиг точки отражения.

*) Вблизи точки отражения $t = 0$ в уравнении (10.13) всегда важна нелинейная поправка y^3 . Решение уравнения (10.13) существенно, поэтому, для широкого класса задач [98, 99, 276].

Адиабатическое приближение. Установим теперь, как максимальная амплитуда a_{\max} связана с амплитудой поля $a(t)$ вдали от точки отражения t_0 , при

$$t - t_0 \gg T, \quad (10.14)$$

где T — период колебаний. Воспользуемся для этого механической аналогией. Уравнение (10.13) описывает движение нелинейного осциллятора под действием силы $F(y, t) = -(t + y^2)y$. Если выполнено условие (10.14), то сила F мало меняется при изменении t в течение периода колебаний. В этом случае решение уравнения (10.13) вблизи заданного значения t определяется выражениями (10.6), (10.7) с $\varepsilon_0 = t$. Кроме того, сохраняется адиабатический инвариант [100, § 49]:

$$I = \oint v dy, \quad (10.15)$$

где $v = dy/dt$ — скорость частицы. Используя в нашем случае выражение (10.6) для dy/dt , получаем:

$$I = 2\sqrt{2} \int_0^a \sqrt{(a^2 - y^2)(a^2 + 2t + y^2)} dy = 2\sqrt{2} a^2 \Psi\left(\frac{t}{a^2}\right), \quad (10.16)$$

$$\Psi(\tau) = \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)(1 + 2\tau + x^2)} dx.$$

Т а б л и ц а 10.1

τ	Ψ	τ	Ψ	τ	Ψ
-0,5	0,3333	0,2	1,0048	1,2	1,4989
-0,4	0,5075	0,4	1,1212	1,6	1,6542
-0,3	0,6212	0,6	1,2263	2,0	1,7961
-0,2	0,7159	0,8	1,3231	2,5	1,9599
-0,1	0,7984	1,0	1,4132	3,0	2,1110
0	0,8726				

Функция $\Psi(\tau)$ (10.16) представлена в табл. 10.1. При $\Psi = 1/3$ значение $\tau = -1/2$. При $\tau \gg 1$

$$\Psi(\tau) = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + 2\tau}, \quad \tau(\Psi) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4\Psi}{\pi} \right)^2 - 1 \right]. \quad (10.17)$$

Здесь $\tau(\Psi)$ — функция, обратная $\Psi(\tau)$. Зависимость амплитуды a от t , как ясно из (10.16), определяется в неявном виде соотношением

$$t = a^2 \tau(\Psi), \quad \Psi = I/2^{3/2} a^2, \quad (10.18)$$

где I — константа. Учтем теперь, что максимальное значение амплитуды поля a_{\max} достигается при минимальном значении $t = t_{\min}$. При этом согласно (10.8) $\tau_{\min} = -1/2$. Следовательно, $\Psi = 1/3$, $t_{\min} = -a_{\max}^2/2$, $1/2 \sqrt{2} a_{\max}^2 = 1/3$. Отсюда

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{3} a_{\max}^2. \quad (10.19)$$

Учитывая (10.18), (10.19), приходим к следующему соотношению, определяющему амплитуду поля в плазме $a(t)$ в приближении сохранения адиабатического инварианта:

$$t = a^2 \tau \left(\frac{a_{\max}^2}{3a^2} \right). \quad (10.20)$$

Заметим, что если известна амплитуда поля a_1 при некотором большом значении $t_1 \gg a_1^2$, то максимальная амплитуда, как ясно из (10.17), (10.20),

$$a_{\max} = a_1 \sqrt{\frac{3\pi}{4} \left(\frac{2t_1}{a_1^2} + 1 \right)^{1/4}}. \quad (10.21)$$

Для сдвига точки отражения волны получаем:

$$t_0 = -\frac{a_{\max}^2}{2} = -\frac{3\pi}{8} a_1^2 \left(\frac{2t_1}{a_1^2} + 1 \right)^{1/2}. \quad (10.22)$$

Он показан пунктиром на рис. 10.3. Видно хорошее согласие с результатом численного решения.

Форма осцилляций в окрестности произвольной точки $t = t_2$ в адиабатическом приближении определяется формулами (10.7) с $\varepsilon_0 = t_2$ и амплитудой $a(t_2)$, определенной согласно (10.20).

При переходе к линейному случаю использованное здесь приближение сохранения адиабатического инварианта эквивалентно приближению геометрической оптики. Действительно, полагая в (10.16) $a \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, имеем $I = \pi \sqrt{t} a^2$, или, полагая $\sqrt{t}/\sqrt{\pi} = a_0$, получаем $a = a_0 t^{-1/4}$. Это совпадает с результатом линейной геометрической оптики. Кроме того, при $a \rightarrow 0$ из (10.7) следует, что колебания имеют синусоидальную форму.

Таким образом, приближенные решения нелинейного волнового уравнения в случае двухмодовых или двухволновых систем, имеющие характер решений геометрической оптики в линейных системах, могут быть построены рассмотренным здесь методом с использованием сохранения адиабатического инварианта.

В частности, при произвольной зависимости ε от z и $|\mathbf{E}|^2$ (при выполнении условий геометрической оптики) в случае стоячей волны приближенное решение уравнения (10.2) может быть найдено следующим образом. Вначале решаем уравнение

(10.2) при постоянном $z = z_0$:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \varepsilon(z_0, E^2) E = 0, \quad \frac{dE}{dz} = \pm 2 \left[C - \int \varepsilon(z_0, E^2) E dE \right]^{1/2} \quad (10.23)$$

и находим профиль колебаний в зависимости от амплитуды поля (т. е. от константы C). Затем используем сохранение адиабатического инварианта

$$I = \int_0^{E_0} dE \left[C - \int \varepsilon(z, E^2) E dE \right]^{1/2}.$$

Соотношение $I = \text{const}$ определяет уже изменение амплитуды поля E_0 в зависимости от z .

10.3. Влияние теплопроводности.

Выше принималось, что концентрация и температура в данной точке z зависят непосредственно от амплитуды поля волны в той же точке, т. е. что имеют место локальные соотношения типа (5.28), (5.37) для $T_e(E)$ и $N(E)$. Полученное решение показывает, однако, что амплитуда поля сильно меняется на длине волны в плазме

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon_0(z)}. \quad (10.24)$$

Соответственно изменяются концентрация и температура электронов. Поэтому, если теплопроводность в плазме достаточно велика, то она может оказаться существенной и осцилляции T_e и N сгладятся.

Изменение температуры электронов в неоднородном электрическом поле описывается уравнением (5.30):

$$L_T \frac{d^2 \Delta T_e}{dz^2} - \Delta T_e = - T_{e0} \frac{E^2}{E_p^2}. \quad (10.25)$$

Здесь $L_T = \sqrt{\kappa_0 / N} \delta v$, $\kappa_0 = \kappa_e(T_{e0})$ — коэффициент теплопроводности, фактор ϕ принят равным единице. Если теплопроводность достаточно мала, так что

$$L_T^2 \varepsilon_0(z) / \lambda_0^2 \ll 1, \quad (10.26)$$

то первым членом в уравнении (10.25) можно пренебречь и оно тождественно соотношению (10.3), использованному выше. Если же условие (10.26) не выполнено, то возмущения температуры и концентрации электронов существенно изменяются за счет теплопроводности.

В общем случае следует совместно решать уравнения (10.25) и (10.2) для амплитуды электрического поля и возмущений температуры электронов. Их решение получено выше в предельном случае (10.26), когда связь T_e с E носит локальный характер (10.3).

Рассмотрим теперь обратный предельный случай

$$L_T^2 \epsilon_0(z) / \lambda_0^2 \gg 1, \quad (10.27)$$

когда теплопроводность играет главную роль в уравнении (10.26) [101]. В этом случае осцилляции ΔT_e и ΔN сглаживаются. Диэлектрическая проницаемость плазмы ϵ тогда мало меняется на длине волны, и в первом приближении можно воспользоваться приближением геометрической оптики для решения волнового уравнения (10.2):

$$E^2(z) = \begin{cases} \frac{4E_0^2}{V_\epsilon(z)} \sin^2\left(\frac{\omega}{c} \int_0^z \epsilon dz\right) & \text{при } z \leq z_1, \\ 0 & \text{при } z > z_1. \end{cases} \quad (10.28)$$

Здесь принято, что $z = z_1$ — точка отражения волны, т. е. что $\epsilon(z_1) = 0$; E_0 — амплитуда волны на границе плазмы (при $\epsilon = 1$). Существенно, что в нашем случае ϵ зависит от поля волны, так что решение (10.28) носит формальный характер. Подставляя формальное решение (10.28) в уравнение (10.25) для возмущений температуры электронов и учитывая, что периодические члены в (10.28) при выполнении условия (10.27) усредняются, приходим к следующему уравнению для ΔT_e :

$$\begin{aligned} L_T^2 \frac{d^2 \Delta T_e}{dz^2} - \Delta T_e &= - \frac{2E_0^2}{E_p^2} \frac{T_{e0}}{V_\epsilon} = \\ &= - \frac{2E_0^2}{E_p^2} T_{e0} \left[(z_0 - z) \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_0 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}} \Delta T_e \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

В последнем уравнении, как и ранее, использована линеаризация $N(z, T_e)$ в окрестности точки отражения (10.11) с учетом малых возмущений ϵ за счет изменения температуры электронов (10.2). Перейдем в (10.29) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} x &= \left(\beta \frac{E_0}{E_p}\right)^{-4/3} \epsilon(z) = \\ &= \left(\beta \frac{E_0}{E_p}\right)^{-4/3} \left[\frac{z_0 - z}{N_0} \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial N}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}} \frac{\Delta T_e}{N_0} \right], \quad t = \frac{z_1 - z}{L_T}, \end{aligned} \quad (10.30)$$

где

$$\beta = \frac{T_{e0}}{N_0} \left(\frac{\partial N}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}}, \quad N_0 = N(z_0) = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2}. \quad (10.31)$$

Уравнение (10.29) переписывается тогда в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x + x_0 - at - \frac{2}{V_x}. \quad (10.32)$$

Здесь α — характерный безразмерный параметр:

$$\alpha = \frac{L_T}{N_0} \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{E_0}{E_p} \beta \right)^{-4/3}. \quad (10.33)$$

Значение α зависит от соотношения между градиентом концентрации электронов в плазме, теплопроводностью и амплитудой поля волны. Величина x_0 определяет сдвиг точки отражения волны за счет нелинейности:

$$x_0 = \frac{z_1 - z_0}{N_0} \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{E_0}{E_p} \beta \right)^{-4/3} = \alpha t_1, \quad (10.34)$$

где z_1 — точка отражения волны при учете нелинейности, z_0 — точка отражения волны в линейном приближении, определенная формулой (10.10).

Граничные условия к уравнению (10.32):

$$x_{t \rightarrow 0} = 0, \quad x|_{t \rightarrow \infty} = \alpha, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t \rightarrow 0} = \alpha + x_0. \quad (10.35)$$

Первое из этих условий следует из определения величины $x \sim \varepsilon(z)$ (диэлектрическая проницаемость обращается в нуль при $z = z_1$, т. е. при $t = 0$). Два других условия вытекают из требования, чтобы решения уравнения теплопроводности (10.25) оставались ограниченными при $z \rightarrow \pm\infty$. Уравнение (10.32) с тремя граничными условиями (10.35) определяет не только ход функции $x(t)$, но и константу x_0 , т. е. сдвиг точки отражения волны.

Рассмотрим вначале случай, когда градиент концентрации электронов в невозмущенной плазме велик, $\alpha \gg 1$. В этом случае решение уравнения (10.32) естественно искать в виде $x = \alpha t + x_1$. Из (10.32) получаем тогда:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = x_1 + x_0 - \frac{2}{\sqrt{\alpha t + x_1}}. \quad (10.36)$$

Это уравнение решаем методом последовательных приближений. В первом приближении, учитывая, что $\alpha \gg 1$, пренебрежем под корнем величиной x_1 в сравнении с αt . С учетом граничных условий (10.35) получаем:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \{ -1 + e^t [1 - \Phi(\sqrt{t})] + e^{-t} f(\sqrt{t}) \}, \quad (10.37)$$

где

$$\Phi(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-t_1^2} dt_1, \quad f(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{t_1^2} dt_1;$$

при этом из (10.35)

$$x_0 = \left(\frac{dx_1}{dt} \right)_{t \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (10.38)$$

Следующее приближение дает лишь поправку порядка α^{-2} . Таким образом, сдвиг точки отражения волны в рассматриваемом случае $\alpha \gg 1$ определяется выражением

$$z_1 - z_0 = \left(\beta \frac{E_0}{E_p} \right)^2 \left[\frac{\pi N_0^3}{L_T (\partial N / \partial z)_0^3} \right]^{1/2}. \quad (10.39)$$

На рис. 10.4 представлена диэлектрическая проницаемость плазмы с учетом нелинейности $x(z) = \varepsilon(z) (\beta E_0 / E_p)^{-4/3}$ в зависимости от расстояния z [величина $d = \varepsilon_0(z) (\beta E_0 / E_p)^{-4/3}$ пропорциональна $z_0 - z$ (10.11)]. Точка отражения волны z_1 определена условием $\varepsilon(z_1) = 0$. Из рисунка видно, что сдвиг точки отражения увеличивается с уменьшением α , т. е. с уменьшением градиента концентрации $(\partial N / \partial z)_0$.

В обратном случае, когда градиент концентрации мал,

$$\alpha \ll 1, \quad (10.40)$$

можно пренебречь в уравнении (10.32) членом αt . Тогда оно легко интегрируется. Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = [(x + x_0)^2 - 8 \sqrt{x} + C]^{1/2}. \quad (10.41)$$

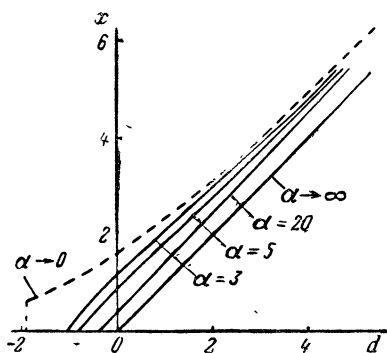


Рис. 10.4. Возмущение диэлектрической проницаемости.

Первое и третье граничные условия (10.35) при $\alpha = 0$ дают, что при $x = 0$ $dx/dt = 0$. Отсюда следует, что $C = 0$.

Второе условие (10.35) при $\alpha = 0$ показывает, что при $t \rightarrow -\infty$ производная dx/dt стремится к нулю, т. е. x стремится к постоянной величине x_∞ . Следовательно, при $x \rightarrow x_\infty$ правая часть уравнения (10.41) должна обращаться в нуль пропорционально $x - x_\infty$. Это приводит к двум алгебраическим соотношениям для констант x_0 и x_∞ :

$$(x_0 + x_\infty)^2 - 8x_\infty^{1/2} = 0, \quad (10.42)$$

$$x_\infty^{3/2} + x_0 x_\infty^{1/2} - 2 = 0. \quad (10.43)$$

Определяя x_0 из (10.43) и подставляя его в (10.42), находим x_∞ , а затем и x_0 :

$$x_\infty = 2^{-2/3}, \quad x_0 = 3 \cdot 2^{-2/3}. \quad (10.44)$$

Сдвиг точки отражения волны при $\alpha \rightarrow 0$ максимален (см. пунктирную кривую на рис. 10.4); он равен

$$z_1 - z_0 = 3 \cdot 2^{-2/3} \left(\beta \frac{E_0}{E_p} \right)^{4/3} N(z_0) \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)_0^{-1}. \quad (10.45)$$

При $(\partial N/\partial z) \rightarrow 0$ точка отражения волны сдвигается на большое расстояние. Такой случай осуществляется, в частности, при распространении волны в слое плазмы, если частота волны близка к критической частоте слоя ω_{c0} , где

$$\omega_{c0} = \sqrt{4\pi e^2 N_{\max}/m}; \quad (10.46)$$

ω_{c0} — лэнгмюровская частота для максимальной концентрации электронов в слое N_{\max} . В линейном приближении условие прохождения волны сквозь слой плазмы естественно имеет вид: $\omega \geq \omega_{c0}$. С учетом нелинейности оно запишется в виде:

$$\omega \geq \omega_c = \omega_{c0} \left[1 - 3 \cdot 2^{-5/3} \left(\beta \frac{E_0}{E_p} \right)^{4/3} \right]. \quad (10.47)$$

Таким образом, частота волн, которые могут проходить сквозь слой плазмы, за счет нелинейности уменьшается на $\Delta\omega$, где

$$\Delta\omega = \frac{3\omega_{c0}}{2^{5/3}} \beta^{4/3} \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^{4/3}. \quad (10.48)$$

С увеличением амплитуды поля сдвиг частоты $\Delta\omega$ растет пропорционально $E_0^{4/3}$. Сказанное, разумеется, относится лишь к тому случаю, когда плотность плазмы убывает с ростом температуры электронов. В противном случае, напротив, критическая частота возрастает с ростом амплитуды поля.

Из формул (10.45), (10.30) следуют выражения для возмущения плазмы в области отражения слабой волны ($E_0^2 \ll E_p^2$) при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\Delta N = (z_1 - z_0) \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)_0 = 3 \cdot 2^{-2/3} \left(\beta \frac{E_0}{E_p} \right)^{4/3}, \quad \Delta T_e = T_{e0} \frac{\Delta N}{(\partial N/\partial T_e) T_{e0}}. \quad (10.49)$$

Возмущение существенно возрастает в сравнении с возмущением вдали от точки отражения, когда $\Delta N, \Delta T_e \sim (E_0/E_p)^2$.

10.4. Движущиеся возмущения. Релаксационные колебания.

Выше рассматривались лишь стационарные возмущения плазмы, вызываемые радиоволной в области ее отражения. Такая стационарная картина существует, однако, не всегда. В возмущенной области могут возникать движения и развиваться незатухающие колебания плазмы. Пример таких колебаний — термоионизационные колебания, возникающие при очень сильном нагреве плазмы, — был рассмотрен в § 8.5. В области отражения, как будет показано ниже, колебания могут развиваться и при не очень сильном возмущении плазмы. Существенно, что в области отражения поле волны возрастает и

благодаря этому увеличивается поглощение волны *). Это обстоятельство, как будет показано ниже, может служить причиной появления движущихся возмущений ионизации и релаксационных колебаний плазмы [277].

Однородная плазма. Рассмотрим малые возмущения температуры электронов ΔT_e и ионизации ΔN плазмы. Линеаризуя уравнения (4.36), (4.27) и пренебрегая нагревом ионов (что справедливо, если $v_{im} \gg \delta_{ei} v_{ei}$, см. (3.56)), имеем:

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 \Delta N}{\partial z^2} - D_{Tea} \frac{\partial^2 \Delta T_e}{\partial z^2} \frac{N_0}{T} = \left(\frac{\partial q^*}{\partial N} \right)_0 \Delta N + \left(\frac{\partial q^*}{\partial T_e} \right)_0 \Delta T_e, \quad (10.50)$$

$$\frac{\partial \Delta T_e}{\partial t} - k_e \frac{\partial^2 \Delta T_e}{\partial z^2} = -\delta v_e \Delta T_e + B \delta(z - z_1).$$

Здесь, как обычно, $k_e = \kappa_e / N$, $q^* = q_i - q_r$ определяет ионизационный баланс. В уравнении для ΔT_e учтено лишь поглощение волны вблизи точки отражения $z = z_1$. Здесь $1,5B$ — поток поглощаемой энергии на один электрон: $B = \frac{2}{3} \frac{dW}{ds} N_0^{-1}$, где $W(s)$ — полная поглощаемая мощность, ds — элемент площади в плоскости, ортогональной направлению распространения волны, $N = N_0(z_1)$ — концентрация плазмы в точке отражения, $\delta(x)$ — дельта-функция. Для простоты пренебрегается другими источниками нагрева электронов: принято, что $\Delta T_e = T_e - T$, т. е. что в отсутствие поля волны $T_e = T$, где T — температура молекул и ионов.

Будем разыскивать решения уравнений (10.50) в виде бегущих волн: $\Delta N, \Delta T_e \sim f(z + v_0 t)$. Уравнения (10.50) переписываются тогда в виде:

$$v_0 \frac{d \Delta N}{d \xi} - D_a \frac{d^2 \Delta N}{d \xi^2} - D_{Tea} \frac{N_0}{T} \frac{d^2 \Delta T_e}{d \xi^2} = \left(\frac{\partial q^*}{\partial N} \right)_0 \Delta N + \left(\frac{\partial q^*}{\partial T_e} \right)_0 \Delta T_e, \quad (10.51)$$

$$v_0 \frac{d \Delta T_e}{d \xi} - k_e \frac{d^2 \Delta T_e}{d \xi^2} = -\delta v_e \Delta T_e + B \delta(\xi), \quad (10.52)$$

$$\xi = z - z_1 = z - z_0 + v_0 t. \quad (10.53)$$

Рассмотрим вначале однородное уравнение (10.52) (без последнего члена). Подставляя в него

$$\Delta T_e = C e^{-k \xi}, \quad (10.54)$$

находим:

$$k^2 + k \frac{v_0}{k_e} - \frac{\delta v_e}{k_e} = 0, \quad k_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4k_e \delta v_e}}{2k_e}. \quad (10.55)$$

*) Возмущение плазмы в области отражения радиоволн особенно усиливается при возникновении параметрической неустойчивости (см. § 4.5). В этом случае волна может почти полностью поглощаться в тонком слое плазмы в окрестности точки отражения [22].

Учтем теперь последний член в (10.52). Он равен нулю всюду, кроме точки $\xi = 0$. В этой точке вторая производная $\frac{d^2 \Delta T_e}{d\xi^2}$ обращается в бесконечность, а первая производная терпит разрыв:

$$\left. \frac{d \Delta T_e}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow +0} - \left. \frac{d \Delta T_e}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow -0} = - \int \frac{B}{k_e} \delta(\xi - z_1) d\xi = - \frac{B}{k_e}. \quad (10.56)$$

Отсюда следует, что искомое решение уравнения (10.52) имеет вид:

$$\Delta T_e = C \begin{cases} e^{-k_1 \xi} & \text{при } \xi > 0, \\ e^{-k_2 \xi} & \text{при } \xi < 0; \end{cases} \quad (10.57)$$

$$C = B(v_0^2 + 4\delta v_e k_e)^{-1/2}, \quad \xi = z - z_0 + v_0 t.$$

Рассмотрим теперь уравнение (10.51). Его решение следует искать в виде:

$$\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2.$$

Здесь ΔN_1 — решение однородной части уравнения (10.51):

$$\Delta N_1 = \begin{cases} C_3 e^{-k_3 \xi} & \text{при } \xi > 0, \\ C_4 e^{-k_4 \xi} & \text{при } \xi < 0. \end{cases} \quad (10.58)$$

$$D_a k^2 + k v_0 + \left(\frac{\partial q^*}{\partial N} \right)_0 = 0, \quad k_{3,4} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4D_a (\partial q^*/\partial N)_0}}{2D_a}.$$

Здесь $\left(\frac{\partial q^*}{\partial N} \right)_0 = \left(\frac{\partial q_l}{\partial N} \right)_0 - \left(\frac{\partial q_r}{\partial N} \right)_0$, причем всегда $\left(\frac{\partial q^*}{\partial N} \right)_0 < 0$ (в противном случае в плазме имеется ионизационная неустойчивость). Поэтому $k_3 > 0$, $k_4 < 0$ и возмущение ΔN_1 , как и ΔT_e , убывает с ростом $|\xi|$. Далее, ΔN_2 — вынужденное решение:

$$\Delta N_2 = C \Delta T_e = -B \begin{cases} A(k_1) e^{-k_1 \xi} & \text{при } \xi > 0, \\ A(k_2) e^{-k_2 \xi} & \text{при } \xi < 0; \end{cases} \quad (10.59)$$

$$A(k) = \frac{D_{Tea} \frac{N_0}{T} k^2 + \left(\frac{\partial q^*}{\partial T_e} \right)_0}{D_a k^2 + v_0 k + \left(\frac{\partial q^*}{\partial N} \right)_0} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 4\delta v_e k_e}}.$$

Константы C_3 и C_4 определяются из условий непрерывности ΔN и скачка производной $d \Delta N / d\xi$ при $\xi = 0$. Первое из этих условий дает:

$$C_3 - BA(k_1) = C_4 - BA(k_2). \quad (10.60)$$

Интегрируя по $d\xi$ уравнение (10.51) в малой окрестности точки $\xi = 0$ и учитывая непрерывность ΔN и ΔT_e и скачок

производной $(d\Delta T_e/d\xi)_0$, определенный формулой (10.56), имеем:

$$\begin{aligned} -D_a \left\{ \left(\frac{d\Delta N}{d\xi} \right)_{+0} - \left(\frac{d\Delta N}{d\xi} \right)_{-0} \right\} = \\ = D_{Tea} \frac{N_0}{T} \left\{ \left(\frac{d\Delta T_e}{d\xi} \right)_{+0} - \left(\frac{d\Delta T_e}{d\xi} \right)_{-0} \right\} = \frac{-BD_{Tea}N_0}{Tk_e}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Учитывая теперь конкретный вид $\Delta N(\xi)$ (10.58), (10.59), приходим ко второму соотношению:

$$\begin{aligned} -C_3k_3 + BA(k_1)k_1 + C_4k_4 - Bk_2A(k_2) = \frac{BN_0k_T}{k_eT}, \\ k_T = k_{Tea} = \frac{D_{Tea}}{D_a}. \end{aligned} \quad (10.60a)$$

Из (10.60), (10.60a) следует:

$$\begin{aligned} C_3 = \frac{B}{k_4 - k_3} \left\{ \frac{k_T}{k_e} \frac{N_0}{T} + (k_2 - k_4)A(k_2) - (k_1 - k_4)A(k_1) \right\}, \\ C_4 = \frac{B}{k_4 - k_3} \left\{ \frac{k_T}{k_e} \frac{N_0}{T} + (k_2 - k_3)A(k_2) - (k_1 - k_3)A(k_1) \right\}. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Полученные выражения полностью определяют искомое решение.

Вид функций $\Delta N(\xi)$ и $\Delta T_e(\xi)$ показан на рис. 10.5. Точкой отражения радиоволны, как следует из (10.53), является точка $\xi = 0$, т. е.

$$z = z_1 = z_0 - v_0 t. \quad (10.63)$$

Она движется навстречу возмущающей волне со скоростью v_0 . В точке отражения $\varepsilon(\omega) = 0$, т. е.

$$1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} (N_0 + \Delta N_{\xi=0}) = 0. \quad (10.64)$$

Подставляя сюда $\Delta N_{\xi=0}$ из (10.58), (10.59), (10.62), имеем:

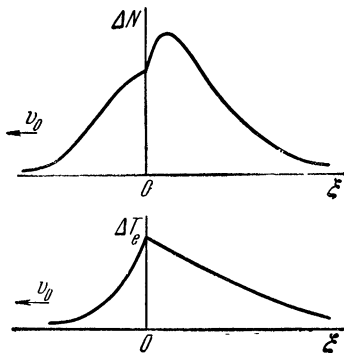
$$\begin{aligned} \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} - N_0 = \\ = \frac{BD_a}{\sqrt{v_0^2 - 4D_a(\partial q/\partial N)_0}} \left\{ (k_4 - k_2)A(k_2) - (k_3 - k_1)A(k_1) - \frac{k_T}{k_e} \frac{N_0}{T} \right\}. \end{aligned} \quad (10.65)$$

Это соотношение определяет скорость v_0 . Из (10.65) следует, что рассматриваемые здесь решения существуют лишь в области прозрачности: $\omega^2 > \omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0/m$.

Переходя к анализу выражения (10.65), примем вначале, что

$$v_0^2 \ll 4\delta v_e k_e. \quad (10.66)$$

Это условие обычно выполнено в силу того, что коэффициент электронной теплопроводности в плазме велик в сравнении с коэффициентом амбиполярной диффузии, $k_e \gg D_a$ (см. табл. 5.9). Соотношение (10.65) в этом случае упрощается и принимает вид:



$$q = \frac{1 + \alpha\eta}{\sqrt{y^2 + \eta}} \left\{ \frac{1}{1 + y + \sqrt{y^2 + \eta}} + \frac{1}{1 - y + \sqrt{y^2 + \eta}} - \frac{2}{1 + \alpha\eta} \right\},$$

$$y = \frac{v_0 L_T}{2D_a}. \quad (10.67)$$

Здесь η , α и q — безразмерные параметры:

$$\eta = \left(\frac{L_T}{L_N} \right)^2, \quad \alpha = - \frac{T (\partial q^* / \partial T_e)_0}{k_T N_0 (\partial q^* / \partial N)_0},$$

$$q = \left(\frac{m\omega^2}{4\pi e^2 N_0} - 1 \right) \frac{4k_e T}{Bk_T L_T}, \quad (10.68)$$

Рис. 10.5. Форма движущихся неоднородностей.

L_T и L_N — характерные пространственные размеры (4.58), (4.59). Соотношение (10.67) нетрудно разрешить. При этом получаем следующее выражение для скорости неоднородности:

$$v_0^2 = \frac{4D_a^2}{L_T^2} \left\{ \frac{[\pm \sqrt{A^2 - 16q\eta(1-\alpha)} - A]^2}{16q^2} - \eta \right\}, \quad (10.69)$$

где $A = q(1 + \eta) + 2(1 - \alpha\eta)$.

Выражение в квадратных скобках в формуле (10.69) должно быть больше нуля, q также больше нуля. Поэтому решение

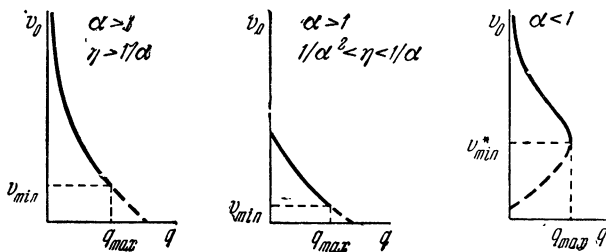


Рис. 10.6. Скорость неоднородности.

существует лишь при $\eta > \alpha^{-2}$. Зависимость скорости v_0 от q (т. е. от поглощаемой мощности и от $\Delta N = (m\omega^2/4\pi e^2) - N_0$) показана на рис. 10.6. Из рисунка видно, что если $\eta > 1/\alpha$, то скорость $v_0 \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow 0$, т. е. при $\omega \rightarrow \omega_0$. С ростом q скорость v_0 уменьшается.

Важно, что v_0 не может сделаться равной нулю. Действительно, в случае покоящейся неоднородности концентрация плазмы $N = N_0 + \Delta N(\xi)$ в точке отражения волны $\xi = 0$ имеет минимум*). Но в этом случае волна не может дойти до точки отражения и такие решения невозможны. Необходимо, чтобы ход $\Delta N(\xi)$ вблизи точки отражения $\xi = 0$ в области $z < 0$ (т. е. с той стороны, откуда приходит волна) был монотонным. Это приводит к условию $(\partial \Delta N / \partial \xi)_{\xi \rightarrow 0} \geq 0$, которое и определяет минимальную возможную скорость неоднородности v_{\min} . Используя решение (10.58) — (10.62), находим, что при выполнении условия (10.66) скорость v_{\min} определена кубическим уравнением:

$$y_m^3 - \frac{1}{4} \frac{(\alpha\eta - 1)[1 + \eta(\alpha + 2)]}{1 + \alpha\eta} y_m^2 + \frac{\eta(\eta - 1)}{2} y_m - \frac{\eta^2(\eta - 1)(\alpha^2\eta - 1)}{4(1 + \alpha\eta)} = 0, \quad (10.70)$$

$$y_m = \frac{v_{\min} L_T}{2D_a}.$$

Если $\alpha \geq 1$, то q (при фиксированных α и η) с уменьшением v_0 монотонно нарастает от $q = 0$ до значения q_{\max} , определенного формулами (10.67), (10.70) (см. рис. 10.6). Если же $\alpha < 1$, то, как видно из рис. 10.6, q нарастает с уменьшением v_0 лишь до некоторого значения q_{\max} , а затем оно убывает. Значение q_{\max} дается формулой (10.67) при $v_0 = v_{\text{ин}}^*$. Скорость v_{\min}^* определена условием $\left(\frac{\partial q}{\partial v_0}\right)_{\alpha, \eta} = 0$. Из (10.69) получаем:

$$v_{\min}^{*2} = \frac{4D_a^2}{L_T^2} \left\{ \left[\frac{\eta(1 - \alpha) + \sqrt{\eta^2(1 - \alpha)^2 + \eta(1 + \eta)(1 - \alpha) \frac{(\alpha\eta - 1)}{2}}}{\alpha\eta - 1} \right]^2 - \eta \right\}. \quad (10.71)$$

Выражение в квадратных скобках должно быть больше нуля. Поэтому v_{\min}^* существует лишь при $\alpha < 1$.

На рис. 10.7 показана область существования движущихся возмущений при различных значениях параметра α . Кривая 1 на этих рисунках соответствует $q = 0$, кривая 2 — скорости v_{\min} . Область существования движущихся возмущений заштрихована.

*) Причина образования минимума в том, что, согласно условию (10.61), скачок производной ΔN противоположен по знаку скачку производной ΔT_e . Поскольку температура ΔT_e всегда имеет максимум при $\xi = 0$, то концентрация ΔN при $v_0 = 0$ должна иметь в этой точке минимум. Физическая природа этого в том, что в области $\xi \sim 0$, где велики градиенты $d^2 \Delta T_e / d\xi^2$ и $d^2 \Delta N / d\xi^2$, главную роль играют диффузионные процессы, приводящие к установлению гидродинамически равновесной конфигурации. Если при этом $k_T > 0$, то возмущения концентрации и температуры противоположны по знаку (см. (5.37)).

На крайнем справа рисунке показана штрих-пунктиром зависимость v_{\min}^* от η .

Выше предполагалось, что скорость v_0 не очень велика (10.66). Это условие выполнено, если $y^2 \ll (k_e/D_a)^2$. Из рисунков видно, что при малых значениях q это условие может и не выполняться. Полагая поэтому $q \rightarrow 0$, находим непосредственно из (10.65):

$$v_0 = \frac{2D_a}{L_T q^{1/3}} \left(\frac{k_e}{2D_a} \right)^{2/3} \left\{ \alpha \eta - 1 + \frac{D_a}{k_e} (\alpha - 1) \right\}^{1/3}. \quad (10.72)$$

Это выражение справедливо при $y^2 \gg (k_e/D_a)^2$, $y = v_0 L_T / 2D_a$. Видно, что скорость v_0 при $\eta > \alpha^{-1}$ по-прежнему неограниченно возрастает при $q \rightarrow 0$. Это, разумеется, справедливо, лишь если применимы уравнения (10.50), т. е. при $v_0 < c_{зв}$, где $c_{зв}$ — скорость звука в плазме.

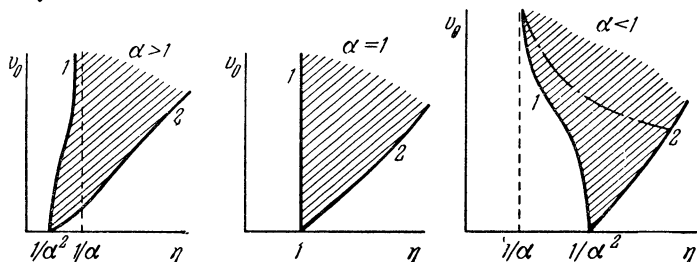


Рис. 10.7. Область существования движущихся неоднородностей.

Физический смысл рассматриваемых здесь решений прозрачен. Поглощение волны вблизи точки отражения приводит к нагреву, а следовательно и к изменению концентрации плазмы. Благодаря этому точка отражения волны сдвигается. Если концентрация нарастает с увеличением температуры электронов ($q > 0$), то возмущенная область перемещается вниз, навстречу волне, вызывающей возмущение плазмы. Так возникает движущееся возмущение плазмы. Аналогичное движение фронта ионизации возникает при изотермической ионизации в поле плоской волны [238, 275].

Слабо неоднородная плазма. Выше предполагалось, что концентрация плазмы N_0 постоянна. Примем теперь, что плазма слабо неоднородна, т. е. N медленно зависит от z . В этом случае среду можно рассматривать как локально-однородную, т. е. при анализе характера возмущения плазмы электромагнитной волной использовать однородные решения, считая лишь, что параметры среды медленно меняются в зависимости от z . Начальная точка отражения волны z_0 определена условием $N(z_0) = m\omega^2/4\pi e^2$. Вблизи нее слой можно считать линейной

функцией z , т. е. ,

$$\frac{m\omega^2}{4\pi e^2} - N_0 = N(z_0) - N(z) = \left(\frac{dN}{dz} \right)_0 (z_0 - z), \quad (10.73)$$

$$q = \beta (z_0 - z), \quad \beta = \frac{1}{N(z_0)} \left(\frac{dN}{dz} \right)_0 \frac{4k_e T}{Bk_T L_T}.$$

Если $\eta > \alpha^{-1}$, то, как следует из предыдущего анализа (см. рис. 10.6), вблизи точки отражения $q \rightarrow 0$ появляется возмущение, которое перемещается в сторону меньших z со скоростью v_0 , определенной формулами (10.69), (10.72). По мере удаления от точки z_0 параметр q возрастает, а скорость v_0 уменьшается. На рис. 10.6 этому движению соответствует перемещение точки сверху вниз. Когда возмущение достигает некоторой точки z_k , скорость v_0 сравнивается с v_{\min} или с v_{\min}^* . Возмущение концентрации достигает тогда максимального значения q_{\max} , при котором еще может существовать движущееся возмущение. После этого возмущение распадается. Тогда волна вновь проходит до начальной точки отражения, и здесь опять возникает движущееся возмущение. Перемещаясь навстречу волне, оно вновь достигает точки z_k , распадается там, и процесс повторяется сначала.

Таким образом, в неоднородной плазме в поле сильной волны возбуждаются незатухающие колебания, сопровождающиеся последовательной генерацией и исчезновением движущихся возмущений и осцилляциями точки отражения волны (от $z = z_0$ до $z = z_k$). Их естественно назвать релаксационными колебаниями (ср. [219]). Для возникновения колебаний необходимо, чтобы возмущение было достаточно велико:

$$\frac{\alpha B N(z_0)}{T (k_e \delta v_e)^{1/2}} > L_T \left(\frac{dN}{dz} \right)_0. \quad (10.74)$$

Частота релаксационных колебаний определяется временем распространения возмущения от точки z_0 до точки z_k :

$$\omega = 2\pi \left[\int_{z_k}^{z_0} \frac{dz}{v_0(z)} \right]^{-1} = \frac{16\pi T D_a \delta v_e}{Bk_T J} \frac{1}{N(z_0)} \left(\frac{dN}{dz} \right)_0, \quad (10.75)$$

$$J = \int_0^{q_{\max}} \frac{dq}{y(q)}, \quad y = \frac{v_0 L_T}{2D_a}.$$

Здесь учтено, что точка z_k определена выражением $z_k = z_0 - (q_{\max}/\beta)$, где q_{\max} — максимальное значение q (при данных α и η), определенное формулой (10.67) при $v_0 = v_{\min}$ (10.70) или $v_0 = v_{\min}^*$ (10.71); зависимость $y(q)$ дается формулой (10.69). Отсюда видно, что частота колебаний убывает с ростом поглощаемой мощности и с уменьшением градиента $(dN/dz)_0$.

Заметим, что вблизи точки отражения волны скорость перемещающихся возмущений растет и может в принципе превысить скорость звука. В этом случае здесь будут генерироваться ударные волны ионизации.

§ 11. Самовоздействие плоских волн в ионосфере

Обсудим теперь роль нелинейных эффектов самовоздействия при распространении радиоволн в ионосфере. Она существенно различна в зависимости от длины волны. Соответственно удобно, как обычно, выделить радиоволны средневолнового, коротковолнового и длинноволнового диапазонов.

Средние волны ($200 \text{ м} < \lambda < 2000 \text{ м}$, $10^6 < \omega < 10^7$). Плазменное поле для таких волн в нижней части слоя E относительно невелико: $E_p \approx 30 \frac{\omega}{10^6} \text{ мв/м}$. Поэтому сравнительно легко здесь достигаются значения E_0 , приводящие к заметным нелинейным эффектам. При больших мощностях радиостанций амплитуда поля средних волн E_0 сравнивается с плазменным полем E_p и может даже значительно превосходить его. Численные оценки нелинейных эффектов самовоздействия при вертикальном распространении в ионосфере для волн различной частоты и мощности приведены в табл. 11.1. Здесь P — множитель самовоздействия (7.19), показывающий, как изменяется амплитуда волны за счет ее самовоздействия в ионосфере. Отношение μ/μ_0 показывает, как изменяется глубина модуляции волны. W , как обычно, — эффективная мощность эквивалентного диполя (см. сноску на стр. 11).

Таблица 11.1
ЭФФЕКТЫ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В ИОНОСФЕРЕ

ω , сек ⁻¹	W , квт	E_0/E_p	P	μ/μ_0
10^6	100	1,14	0,94	0,94
	500	2,54	0,92	0,98
	1000	3,56	0,93	1,07
	5000	8,05	1,12	1,21
$2 \cdot 10^6$	100	0,65	0,93	0,87
	500	1,45	0,78	0,68
	1000	2,02	0,69	0,62
	5000	4,52	0,49	0,55
$3 \cdot 10^6$	100	0,43	0,96	0,92
	500	0,95	0,86	0,75
	1000	1,35	0,76	0,64
	5000	3,04	0,49	0,43

Из таблицы видно, что роль самовоздействия для мощных радиоволн средневолнового диапазона может быть довольно значительной. Например, при изменении мощности излучающей станции частоты 500 кГц от $W^{(1)} = 1000$ кВт до $W^{(2)} = 5000$ кВт амплитуда волны, отраженной от ионосферы, возрастает, как ясно из таблицы, только в 1,44 раза:

$$\frac{E_0^{(2)} P [E_0^{(2)}]}{E_0^{(1)} P [E_0^{(1)}]} = 1,44.$$

Если бы можно было пренебречь эффектами самовоздействия, то для того, чтобы добиться такого же увеличения амплитуды отраженной волны, нужно было бы увеличить мощность передающей станции не в 5 раз, а всего лишь в 2 раза. Существенно изменяется и искажается за счет самовоздействия и модуляция волны. Интересно отметить, что наиболее «сильными» (при одинаковой амплитуде поля) являются радиоволны, частота которых близка к эффективной частоте соударений электронов в нижней части слоя E ($\omega \sim \nu_e \sim 10^6$). Однако эффекты самовоздействия для таких волн ослаблены благодаря тому, что множитель самовоздействия P и изменение модуляции μ/μ_0 при $\omega \sim \nu_e$ немонотонно зависят от мощности волны (см. §§ 7.2 и 8.2).

В табл. 11.1 приведены оценки эффектов самовоздей-

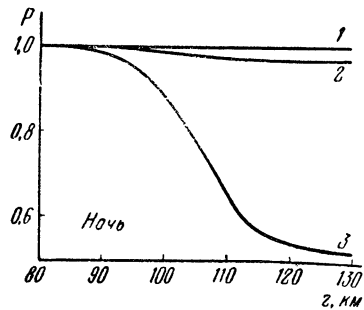
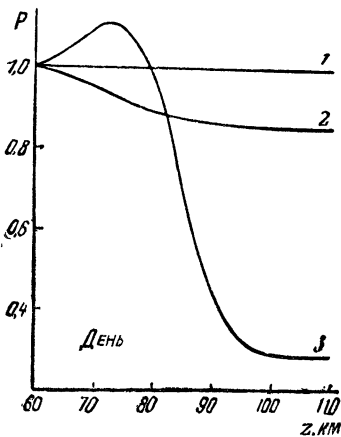


Рис. 11.1. Множитель самовоздействия в ионосфере для волны с частотой $f = 5$ МГц.

ствия в изотропной плазме. Для волн рассматриваемого диапазона частот это строго справедливо только для обыкновенной волны при поперечном распространении. В общем же случае существенно сказывается влияние магнитного поля Земли. Для низкочастотных волн $\omega \sim 10^6 - 3 \cdot 10^6$ оно приводит к ослаблению эффектов самовоздействия. Однако для необыкновенной волны при $\omega \approx \omega_H \sim 10^7$ эффекты самовоздействия вновь усиливаются благодаря гиромагнитному резонансу. Это видно из рис. 11.1—

11.3, где приведены результаты численного расчета самовоздействия при распространении в ионосфере радиоволн различной частоты f [86]. Рассматривался случай продольного распространения необыкновенной волны. Кривые 1 на рисунках соответствуют значению амплитуды поля волны на границе ионосферы

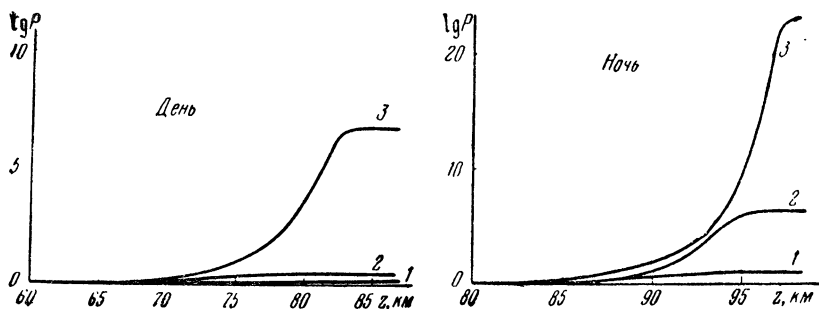


Рис. 11.2. Множитель самовоздействия в ионосфере при гирорезонансе, $f = f_H = 1,5$ Мгц.

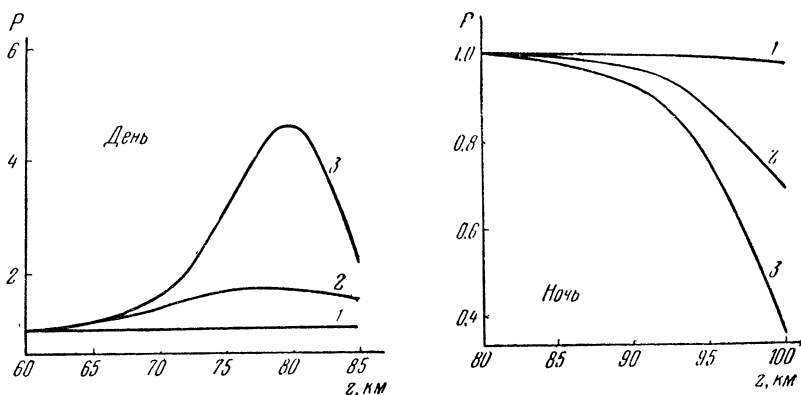


Рис. 11.3. Множитель самовоздействия в ионосфере для волны с частотой $f = 500$ кГц.

$E_0 = 50$ мв/м, кривые 2 — $E_0 = 500$ мв/м, кривые 3 — $E_0 = 5000$ мв/м. Гирочастота $f_H = \omega_H/2\pi$ принималась равной 1,5 Мгц.

Из рисунков видно, что для волны резонансной частоты $f = f_H$ множитель самовоздействия монотонно растет по мере проникновения волны в глубину плазмы (ср. (7.24)). Волна как бы пробивает себе путь в глубину ионосферы. Правда, благодаря очень большому поглощению волна при $f = f_H$ быстро затухает в начале слоя. Эффекты самовоздействия помогают сильной волне продвинуться на 5—10 км в глубину ионосферы. Для

волн на нерезонансных частотах $f = 500$ кГц и $f = 5$ МГц множитель самовоздействия существенно ближе к единице. Он может как возрастать, так и убывать по мере проникновения волны в плазму.

На рис. 11.4 приведена средняя энергия (или эффективная температура) электронов в поле волны $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 = T_e/T$. Видно, что значительный нагрев плазмы на гирочастоте ночью возможен уже при $E_0 = 50$ мВ/м. В этом случае эффект имеет ярко выраженный резонансный характер — на других частотах при том же значении амплитуды поля волны нагрева практически нет. В дневных условиях, а также при больших значениях поля волны гирорезонанс выражен слабее.

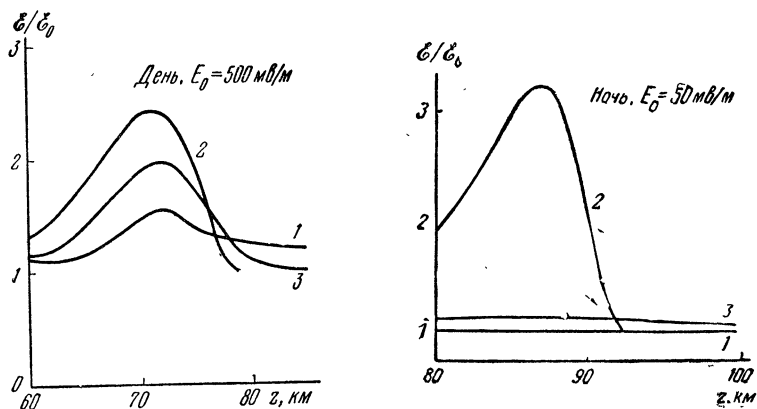


Рис. 11.4. Нагрев электронов в ионосфере. Кривые 1 и 3 соответствуют частотам 5 МГц и 500 кГц, кривая 2 — частоте $f = f_H = 1,5$ МГц.

Напоминаем, что здесь рассматривается лишь продольное распространение волны. При поперечном распространении к наибольшему возмущению ионосферы при $\omega \ll \omega_H$ приводит обыкновенная волна. Заметим, что выше не учитывались вызываемые волной возмущения плотности плазмы. Это справедливо, если полная длительность радиопульса меньше, чем время жизни электрона τ_N (для ионосферы время τ_N приведено в табл. 5.9). В противном случае при значительном нагреве ионосферы стационарной волной следует ожидать и заметного увеличения концентрации плазмы (§ 5.5). Гораздо более быстрого увеличения N в нижней ионосфере ($z \approx 70-80$ км) можно ожидать при распространении очень сильных радиоволн, поле которых превышает критическое поле пробоя E_k (см. §§ 5.6 и 7.3). В этом случае могут возбуждаться термоионизационные колебания (§ 8.5).

Указанные здесь эффекты самовоздействия в ионосфере могут иметь значение при рассмотрении вопросов радиовещания

на средних волнах при больших мощностях передающих станций. В самом деле, например, вследствие самовоздействия в плазме волн высокой частоты ($\omega^2 \gg \nu_e^2$) амплитуда прошедшего через ионосферу сигнала очень медленно нарастает с ростом мощности излучающей станции, а глубина модуляции в то же время падает. Более того, когда волна становится очень сильной ($E_0^2 \gg E_p^2$), амплитуда отраженной волны вообще перестает расти с ростом мощности излучения, а глубина модуляции стремится к нулю. Отсюда ясно, что невыгодно увеличивать мощность таких станций выше определенного предела. Последний определяется величиной допустимых искажений модуляции. Экспериментально эффекты самовоздействия в ионосфере наблюдались Кингом [102] (см. рис. 8.5), Виленским и др. [103—105].

Короткие волны ($\lambda < 200$ м, $\omega > 10^7$). Плазменное поле E_p для таких волн весьма велико: $E_p \sim 300\text{—}4000$ мв/м. Поэтому радиоволны коротковолнового диапазона остаются слабыми, $E_0^2 \ll E_p^2$, даже при значительных эффективных мощностях передающих станций. Исключение могут составить очень узкие, специально сфокусированные пучки, которые обсуждаются в следующей главе.

Наиболее существенный нелинейный эффект для плоских коротких волн — сдвиг точки отражения волны. Оценка его величины для волн различной частоты и амплитуды приведена в табл. 11.2 *). Из таблицы видно, что этот эффект может быть

Таблица 11.2

E_0 , мв/м	Сдвиг точки отражения радиоволны Δz , км			Сдвиг критической частоты F -слоя $\Delta \omega_c / \omega_c$
	$\omega = 3 \cdot 10^7$	$\omega = 6 \cdot 10^7$	$\omega = 10^8$	
10	0,7	0,2	0,1	$6 \cdot 10^{-4}$
10^2	12	4,6	2,3	$1,5 \cdot 10^{-2}$
$3 \cdot 10^2$	40	20	12	0,1

значителен лишь при высокой эффективной мощности $W \geq 10^4$ квт ($E_0 \geq 10^2$ мв/м). В таблице приведен также нелинейный сдвиг критической частоты F -слоя, определенный по формуле (10.48). Видно, что при $W \geq 10^4$ квт сдвиг критической частоты ω_c становится заметным. В окрестности точки отражения коротких волн в тех же условиях возникает парамет-

*) При численных оценках принималось, что $z \approx 300$ км, $T_e = 2000^\circ$, $\delta = 0,8 \cdot 10^{-4}$. Изменение концентрации плазмы вследствие нагрева электронов возможно лишь при достаточно длительном воздействии волны. При этом в зависимости от размера возмущенной области возможно как уменьшение, так и увеличение $N(T_e)$ (см. § 5.5).

рическая неустойчивость (см. § 5.7, табл. 5.10). Значительное возмущение ионосферы при $\omega \sim \omega_c$ наблюдалось в [236, 279].

Длинные волны ($\lambda > 2000$ м, $\omega < 10^6$). Плазменное поле E_p для длинных волн невелико; в нижней части E-слоя $E_p \approx 30-50$ мв/м. В D-слое $E_p \approx 300$ мв/м. Поэтому для мощных волн длинноволнового диапазона эффекты самовоздействия в ионосфере могут играть существенную роль. При этом самовоздействие собственно длинных волн (2 км $< \lambda < 20$ км; $10^6 > \omega > 10^5$) носит, в общем, тот же характер, что и самовоздействие низкочастотных средних волн $\omega \sim 10^6$, подробно рассмотренное выше. Для очень длинных радиоволн $\omega \leq 10^5$ положение существенно меняется; такие волны распространяются в волноводе Земля — ионосфера и не описываются приближением геометрической оптики [4, 106—108]. Необходимо особое рассмотрение влияния нелинейных эффектов на волноводное распространение низкочастотной волны, которое пока не проведено.

Для оценки роли нелинейных эффектов можно воспользоваться результатами расчетов и измерений амплитуды поля волны E_0 на различных расстояниях R от передающей станции. Так, при $\omega = (1-2) \cdot 10^5$ и $W = 1$ квт согласно [4] имеем:

$R, \text{ км}$	200	1000	2000	3000
$E_0, \text{ мв/м}$	2	0,5	0,2	0,1

Поскольку $E \sim \sqrt{W}$, то при $W \sim 10^3$ квт амплитуда электрического поля низкочастотных волн в ионосфере сравнима с E_p . Таким образом, при $W > 1000$ квт нелинейность может существенно сказаться на поглощении низкочастотных волн.

Еще одна особенность нелинейных эффектов для очень длинных волн связана с тем, что частота этих волн невелика. В то время как для средних и коротких радиоволн амплитуды волн-гармоник, возникающих в плазме, малы в силу условия (6.7): $\delta v_e \ll \omega$, для длинных волн они могут быть значительно больше. Для сверхдлинных волн δv_e и ω вообще одного порядка, так что самовоздействие сильных сверхдлинных волн с частотой $\omega \leq 10^3 - 10^4$ может привести к заметному искажению их частотного спектра. Это может сказаться, в частности, на частотном спектре атмосфериков, интегральная мощность которых обычно велика: $W \sim 10^5 - 10^6$ квт.

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ РАДИОВОЛН

В предыдущей главе было рассмотрено самовоздействие плоской волны в плазме. Здесь мы рассмотрим те же вопросы для узкого сильно направленного пучка радиоволн.

Исследование нелинейных явлений в узких пучках представляет особый интерес, так как наибольшая интенсивность радиоволн в плазме (в частности, в ионосфере) достигается как раз в сильно направленных пучках. В линейном приближении пучок волн всегда может быть представлен в виде совокупности плоских волн, распространяющихся в разных направлениях. Нелинейность приводит к нарушению принципа суперпозиции. Благодаря этому возникают новые особенности в распространении пучка волн.

Действительно, концентрация плазмы, а следовательно и показатель преломления волн n , возмущены в области распространения пучка. Это приводит к искривлению траекторий лучей. Они могут собираться — весь пучок при этом сжимается, фокусируется, — это *самофокусировка* пучка. Возможен и обратный процесс нелинейного расширения пучка — *дефокусировка*. Оба эти случая могут осуществляться в ионосфере.

§ 12. Упрощение нелинейного волнового уравнения

Распространение в плазме радиоволны частоты ω с учетом самовоздействия описывается нелинейным волновым уравнением (6.8):

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon}'(\mathbf{E}) \mathbf{E} = 0. \quad (12.1)$$

Примем для простоты, что плазма изотропна. В этом случае комплексная диэлектрическая проницаемость ϵ является скаляром, и ее можно представить в виде:

$$\epsilon' = \epsilon_0(z) + \epsilon_2(\mathbf{r}, \mathbf{E}) + i\epsilon_1.$$

Здесь z — направление распространения волны, ϵ_0 и $\epsilon_1 = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ — действительная и мнимая части линейной диэлектрической проницаемости в неоднородной среде; ϵ_2 — нелинейная добавка, конкретный вид которой зависит от физического

механизма нелинейности. Ниже будем всегда считать, что нелинейная добавка ϵ_2 мала в сравнении с основными членами. В этом случае

$$\epsilon_2 = -\frac{\omega_0^2}{N\omega^2} \left(\frac{\partial N}{\partial E_0^2} \right) E_0^2, \quad |\epsilon_2| \ll \epsilon_0. \quad (12.2)$$

Здесь принято, что $\omega^2 \gg \nu_e^2$. Зависимость концентрации электронов N от амплитуды неоднородного электрического поля E_0 определена выше (§ 4 и § 5). В частности, в ионосфере N может как расти, так и убывать с увеличением E_0 (см. § 5.5). Влиянием нелинейности на поглощение волны здесь для простоты пренебрегается.

Предположим теперь, что на длине волны ϵ мало меняется за счет неоднородности плазмы и нелинейных эффектов. В этом случае уравнение (12.1) можно упростить, используя, как и в § 9.2, метод Ван-дер-Поля. Идея метода состоит в том, что в поле волны, распространяющейся в направлении z , выделяются быстро и медленно меняющаяся части, точнее, это поле представляется в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{e} E(\mathbf{r}) \exp \left[i \left(\int_0^z k dz - \omega t \right) \right] + \text{компл. сопр.} \right\}. \quad (12.3)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0(z)}$ — модуль волнового вектора, определенно для линейного приближения, \mathbf{e} — единичный вектор поляризации. При представлении поля в виде (12.3) предполагается, что амплитуда поля $E(\mathbf{r})$ меняется значительно медленнее, чем фаза,

$$\lambda \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \ll E.$$

Амплитуда $E(\mathbf{r})$ изменяется за счет поглощения волны и слабого отличия поля волны от плоского, возникающего из-за нелинейности, дифракции и неоднородности среды. Примем вначале для простоты, что поляризация постоянна, $\mathbf{e} \neq \mathbf{e}(\mathbf{r})$.

Подставляя (12.3) в (12.1), найдем для $E(\mathbf{r})$ скалярное уравнение:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} + iE \frac{dk}{dz} + \Delta_{\perp} E + \frac{\omega^2}{c^2} (i\epsilon_1 + \epsilon_2) E = 0, \quad (12.4)$$

где Δ_{\perp} — оператор Лапласа в плоскости ρ , ортогональной к направлению распространения пучка z .

Здесь будет рассматриваться случай слабой нелинейности $\epsilon_2 \ll \epsilon_0$, существенной только для узких волновых пучков. Поэтому мы будем рассматривать узкие пучки, т. е. пучки, эффективная ширина которых a много меньше характерной длины вдоль пучка, на которой амплитуда существенно изменяется

за счет нелинейности (R_H) или же неоднородности $\left(\epsilon_0 \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial z}\right)^{-1}\right)$ плазмы:

$$a \ll R_H, \quad a \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} \ll \epsilon_0$$

(величина R_H будет определена ниже). В этом случае член $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$ в уравнении (12.4) много меньше, чем $\Delta_{\perp} E$, так что в первом приближении по $\frac{a}{R_H}$, $\frac{a}{\epsilon_0} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z}$ им можно пренебречь. Вместо (12.4) тогда получаем:

$$\Delta_{\perp} E + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} + iE \frac{dk}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} (i\epsilon_1 + \epsilon_2) E = 0. \quad (12.4a)$$

Решение этого уравнения будем разыскивать в виде:

$$E = E_0 \exp(iks). \quad (12.5)$$

Функция $s(z, \rho)$ определяет сдвиг фаз между двумя точками в плоскости ρ , ортогональной к направлению распространения пучка z ; при этом одна из точек лежит на оси пучка, а другая — на расстоянии ρ от оси. Величина ks является добавкой к эйконалу, возникающей из-за деформации волнового фронта в нелинейной и неоднородной среде. Подставляя (12.5) в (12.4a) и отделяя действительную и мнимую части, найдем:

$$\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} s)^2 = -\frac{s}{k} \frac{dk}{dz} + \frac{\epsilon_2}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2k^2 E_0} \Delta_{\perp} E_0, \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial E_0^2}{\partial z} + \frac{E_0^2}{k} \frac{dk}{dz} + (\nabla_{\perp} E_0^2) (\nabla_{\perp} s) + E_0^2 \Delta_{\perp} s + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} E_0^2 = 0. \quad (12.7)$$

Уравнение (12.6) является уравнением эйконала в слабо нелинейной слабо неоднородной среде с учетом дифракционного расплывания пучка; оно описывает деформацию волнового фронта и изменение фазовой скорости волны в пучке. Применяя к уравнению (12.6) операцию ∇_{\perp} , перепишем его в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + (\mathbf{u} \nabla_{\perp}) \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{u}}{k} \frac{dk}{dz} + \frac{1}{2\epsilon_0} \nabla_{\perp} \epsilon_2 + \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{k^2 E_0} \Delta_{\perp} E_0 \right). \quad (12.8)$$

Здесь $\mathbf{u} = \nabla_{\perp} s$ — вектор, лежащий в плоскости ρ , ортогональной к направлению распространения пучка. Он дает проекцию направления распространения луча на плоскость ρ . Если все векторы \mathbf{u} направлены к оси пучка, то лучи сходятся, т. е. пучок фокусируется. Если же векторы \mathbf{u} направлены от оси, то пучок расходится. Первый член в правой части уравнения (12.8) описывает искривление траекторий лучей — рефракцию, вызванную неоднородностью среды. Второй член описывает рефракцию за счет нелинейности. Третий приближенно учитывает дифракционные эффекты.

В предельном случае плоской волны ($\Delta_{\perp} E_0 = 0$) в отсутствие нелинейности ($\varepsilon_2 = 0$) и неоднородности ($dk/dz = 0$) решение уравнения (12.8), естественно, имеет вид $\mathbf{u} = \text{const} = \mathbf{u}_0$. В неоднородной среде ($dk/dz \neq 0$) из (12.8) следует известный из линейной геометрической оптики закон преломления плоских волн. В отсутствие нелинейности ($\varepsilon_2 = 0$) и неоднородности ($dk/dz = 0$) получаем из (12.8) параболическое уравнение, используемое в приближенной теории дифракции [109—112].

Уравнение (12.7) описывает изменение амплитуды поля в пучке. Физический смысл этого уравнения становится ясен, если записать его в виде баланса потока энергии. Действительно, учтем, что групповая скорость волн $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и показатель затухания κ в линейной теории даются выражениями:

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = c \sqrt{\varepsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k}, \quad \kappa = \frac{1}{2} \frac{e_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \quad (12.9)$$

Уравнение баланса энергии волны в линейной теории имеет вид:

$$\text{div}(\mathbf{v}_{\text{гр}} E_0^2) + 2 \frac{\omega}{c} \kappa \mathbf{v}_{\text{гр}} E_0^2 = 0. \quad (12.10)$$

Подставляя сюда выражения (12.9) для $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и κ , нетрудно убедиться, что линейное уравнение баланса энергии (12.10) тождественно уравнению (12.7). Таким образом, нелинейность в рассматриваемом здесь приближении никак не сказывается на уравнении баланса энергии (12.7), (12.10).

Скалярное уравнение (12.7) для амплитуды поля получено в предположении, что волна линейно поляризована и что вектор поляризации $\mathbf{e} \neq \mathbf{e}(\mathbf{r})$. Это, очевидно, справедливо для двумерного пучка $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, z)$, если напряженность \mathbf{E} поляризована в направлении оси y (TE -волна). Действительно, в этом случае $\varepsilon(z, E^2) = \varepsilon(z, x)$ и направление поляризации не может измениться при распространении волны, что позволяет обобщить уравнения (12.7), (12.8) на случай произвольной зависимости ε от E^2 [281]. Близкая ситуация и в осесимметричном пучке $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho, z)$, поляризованном по \mathbf{e}_{ρ} . Правда, в этом случае $\varepsilon = \varepsilon(\rho, z)$ и, вообще говоря, должна появиться компонента поля по z . Однако в узких пучках при $|\mathbf{u}| \ll 1$ всегда $E_z \ll E_{\rho}$, так что $E^2 \approx E_{\rho}^2$. Поэтому скалярное уравнение (12.7) справедливо для узких осесимметричных пучков. В общем же случае для волн эллиптической поляризации в изотропной среде, а также для волн в анизотропной среде необходимо использовать векторные уравнения.

Если ширина пучка велика в сравнении с длиной волны, то в уравнениях (12.6), (12.8) можно пренебречь членом $\frac{1}{2} \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{k^2 E_0} \Delta_{\perp} E_0 \right)$, описывающим дифракционные эффекты. Действительно, член $(1/2k^2 E_0) \Delta_{\perp} E_0$ имеет порядок $1/2k^2 a^2$, где a — эффективная ширина пучка. Сравняя его с нелинейным

членом $\varepsilon_2/2\varepsilon_0$, убеждаемся, что если

$$\left(a \frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2 = \frac{4\pi^2 a^2 \varepsilon_2}{\lambda^2} \gg 1, \quad (12.11)$$

то дифракционным членом в (12.6), (12.8) можно пренебречь. Без этого члена уравнения (12.7), (12.8) описывают распространение пучка радиоволн в приближении геометрической оптики. Иначе говоря, пучок радиоволн может в этом случае рассматриваться как пучок лучей, имеющих в каждой точке среды определенную интенсивность I и определенное направление \mathbf{u} (точнее, \mathbf{u} — проекция направления распространения луча на плоскость, ортогональную к оси пучка). При этом уравнение (12.7) по-прежнему выражает баланс потока энергии или интенсивности лучей, а уравнение (12.8) описывает изменение направлений лучей, составляющих пучок.

В однородной ($dk/dz = 0$) непоглощающей ($\kappa = 0$) слабо нелинейной среде уравнения геометрической оптики принимают вид:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + \nabla_{\perp}(\mathbf{u}I) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + (\mathbf{u}\nabla_{\perp})\mathbf{u} - \beta\nabla_{\perp}I = 0. \quad (12.12)$$

Здесь учтено, что в случае слабой нелинейности $\varepsilon_2 \sim E_0^2 \sim I$ (см. (12.2)):

$$\varepsilon_2 = \gamma E_0^2 = 2\beta\varepsilon_0 I. \quad (12.13)$$

Уравнения геометрической оптики (12.12) справедливы в однородной изотропной среде для узких пучков волн, линейно поляризованных в плоскости, ортогональной к направлению распространения пучка.

§ 13. Геометрическая оптика двумерных пучков

Изменение интенсивности и направлений лучей в пучке описывается уравнениями (12.12). Характер нелинейных эффектов существенно зависит при этом от знака нелинейной поправки к диэлектрической проницаемости, т. е. от знака параметра β в (12.13). Если $\beta > 0$, то пучок под действием нелинейного «давления» среды стремится сжаться, сфокусироваться. В этом случае естественно говорить о «фокусирующей» среде. В обратном случае $\beta < 0$ пучок, напротив, стремится расширяться, и такую среду естественно назвать «дефокусирующей». Здесь и в § 14 будет рассматриваться фокусирующая среда ($\beta > 0$), в § 16 — дефокусирующая ($\beta < 0$); значения параметра β в ионосфере указаны в § 17.

Рассмотрим цилиндрическую волну, распространяющуюся в направлении оси z . Ось y направим по образующей. В этом случае интенсивность пучка не зависит от y , $I = I(x, z)$. Направления лучей в плоскости, ортогональной к оси z , имеют лишь одну компоненту $u_x(x, z)$. Такие пучки называют двумерными.

Удобно перейти в уравнениях (12.12) к безразмерным функциям:

$$\omega = \frac{I}{I_0}, \quad u = \frac{u_x}{\sqrt{\beta I_0}}, \quad t = \frac{z}{a} \sqrt{\beta I_0}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad (13.1)$$

где I_0 — характерное значение интенсивности (обычно I_0 — максимальное значение интенсивности на границе плазмы), a — характерный размер пучка по оси x (ширина пучка на границе). Из (13.1) видно, что по оси z характерный размер $R_n = a/\sqrt{2\beta I_0}$. Длину R_n называют длиной нелинейности. Уравнения (12.12) в переменных (13.1) принимают вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (13.2)$$

(штрих при x здесь и в дальнейшем для простоты опускается).

Пучок распространяется в направлении $z > 0$, т.е. $t > 0$. Граничные условия к уравнениям (13.2) задаются в плоскости $z = 0$, т.е. $t = 0$. Они имеют вид

$$\omega(0, x) = \omega_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad (13.3)$$

где функции $\omega_0(x)$ и $u_0(x)$ являются заданными распределениями интенсивности и направлений лучей в пучке на границе $t = 0$. Функции $\omega_0(x)$ и $u_0(x)$ должны быть аналитическими функциями x .

Отметим, что уравнения (13.2) вполне подобны уравнениям Эйлера, описывающим произвольные одномерные движения идеального сжимаемого газа при отношении теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v = 2$ [113]. Роль плотности газа играет в уравнениях (13.2) относительная плотность энергии волн ω , роль скорости — наклон лучей. Важное отличие уравнений (13.2) от уравнений Эйлера связано с изменением знака давления. В гидродинамике давление всегда стремится расширить плотный поток. В рассматриваемом же здесь случае фокусирующей среды нелинейное давление, напротив, стремится сжать пучок. Изменение знака давления приводит к изменению характера уравнений: система (13.2) является эллиптической, в отличие от уравнений гидродинамики, которые, как известно, являются гиперболическими. Несмотря на это, общее сходство уравнений позволяет при решении задач геометрической оптики в ряде случаев существенно использовать методы гидродинамики. Отметим, что уравнения (13.2), как и уравнения гидродинамики при $\gamma = 2$, обладают бесконечным числом независимых законов сохранения [121].

13.1. Автономные решения.

Преобразованием переменных система (13.2) может быть сведена к линейной. Действительно, будем рассматривать ω и

u как переменные, а x и t — как неизвестные функции. Преобразуем уравнения (13.2) к новым переменным. Для этого запишем в них частные производные в виде якобианов:

$$\frac{\partial(\omega, x)}{\partial(t, x)} + u \frac{\partial(t, \omega)}{\partial(t, x)} + \omega \frac{\partial(t, u)}{\partial(t, x)} = 0, \quad (13.4)$$

$$\frac{\partial(u, x)}{\partial(t, x)} + u \frac{\partial(t, u)}{\partial(t, x)} - \frac{\partial(t, \omega)}{\partial(t, x)} = 0. \quad (13.5)$$

Здесь учтено, что якобиан

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(t, x)} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \text{причем} \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Умножая теперь (13.4), (13.5) на $\partial(t, x)/\partial(\omega, u)$ и раскрывая якобианы, получим:

$$\frac{\partial x}{\partial u} - u \frac{\partial t}{\partial u} + \omega \frac{\partial t}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial u} + u \frac{\partial t}{\partial \omega} - \frac{\partial x}{\partial \omega} = 0. \quad (13.6)$$

Эти уравнения для функций $x(u, \omega)$ и $t(u, \omega)$ являются линейными.

Уравнения (13.6) для x и t однородны относительно ω и u^2 . Поэтому их частные решения можно искать в виде полиномов, однородных по степеням ω и u^2 [114].

Примем вначале, что x — четная функция u :

$$x_n = \sum_{k=0}^n a_{nk} u^{2k} \omega^{n-k}, \quad t_n = u^{-1} \sum_{k=1}^n b_{nk} u^{2k} \omega^{n-k}. \quad (13.7)$$

Подставляя эти выражения в (13.6) и приравнивая члены при одинаковых степенях $u^{2h} \omega^{n-h}$, приходим к рекуррентным соотношениям

$$b_{nk} = \frac{n-k+1}{2k-1} (a_{nk-1} - b_{nk-1}),$$

$$a_{nk} = \frac{(3k-n-1)(n-k+1)}{2k(2k-1)} (a_{nk-1} - b_{nk-1}),$$

связывающим коэффициенты a_{nk} и b_{nk} . Полагая $a_{n0} = 1$, $b_{n0} = 0$, находим последовательно функции x_n и t_n — частные решения уравнений (13.6):

$$x_1 = \omega + \frac{u^2}{2}, \quad t_1 = u \quad (13.8)$$

$$x_2 = \omega^2 - \frac{u^4}{2}, \quad t_2 = 2u\omega - \frac{2}{3}u^3 \quad (13.9)$$

$$x_3 = \omega^3 - \frac{3}{2}\omega^2 u^2 - \frac{3}{2}\omega u^4 + \frac{u^6}{4}, \quad t_3 = 3u\omega^2 - 3\omega u^3 + \frac{3u^5}{10} \quad (13.10)$$

и т. д.

Каждое из полученных решений отвечает определенным граничным условиям. Найдем их. Граничные условия к уравнениям (13.2) задаются в плоскости $t = 0$ и имеют вид (13.3).

При $u = 0$, как ясно из (13.8)—(13.10), условие $t = 0$ удовлетворяется для всех решений x_h, t_h . Иначе говоря, каждое из решений (13.8)—(13.10) описывает распространение плоскопараллельного пучка $u_0(x) = 0$ с различным начальным распределением интенсивности: $w_0(x) = x$ для решения x_1, t_1 ; $w_0(x) = x^{1/2}$ для x_2, t_2 ; $w_0(x) = x^{1/3}$ для x_3, t_3 и т. д. Принимая во внимание естественное физическое условие $w \geq 0$, следует рассматривать решения (13.8)—(13.10) лишь в области $w > 0$.

Таким образом, каждое из решений (13.8)—(13.10) описывает изменение интенсивности плоскопараллельного пучка. Рассмотрим, например, линейный пучок, т. е. примем, что при $t = 0$

$$w_0(x) = x, \quad u_0(x) = 0. \quad (13.11)$$

Решение x_1, t_1 удовлетворяет граничным условиям (13.11) и уравнениям (13.6). Следовательно, оно справедливо и при любом t . Из (13.8)—(13.10) тогда следует, что

$$w(x, t) = x - t^2/2, \quad u(x, t) = t. \quad (13.12)$$

Отсюда видно, что распределение интенсивности при любых t остается линейным, т. е. решение (13.12) носит автомодельный характер. Траектории лучей определены уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u. \quad (13.13)$$

Подставляя сюда u из (13.12), находим, что $x = x_0 + t^2/2$, где x_0 — начальная координата луча. Ход лучей показан на рис. 13.1. Видно, что благодаря нелинейному «давлению» лучи поворачивают в сторону роста интенсивности.

Нетрудно убедиться, что и при произвольном n решение x_n, t_n (13.7) также является автомодельным — его можно представить в виде:

$$w = t^{2/(2n-1)} f_{1n}(\tau), \quad u = t^{1/(2n-1)} f_{2n}(\tau), \quad \tau = \frac{x}{t^{2n/(2n-1)}}. \quad (13.14)$$

Это означает, что распределение интенсивности в пучке вида $\alpha_2 x^{1/2}, \alpha_3 x^{1/3}, \dots$ также смещается, не меняя своей формы, — изменяются с t лишь коэффициенты $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ *).

Выше был рассмотрен случай, когда x — четная функция u . Аналогичным образом, в том случае, когда x — нечетная

*). Следует отметить, что профиль $w \sim x^{1/n}$ имеет особенность при $x \rightarrow 0$, $d w/d x \rightarrow \infty$. В окрестности особой точки рассматриваемое решение не справедливо (см. § 13.2).

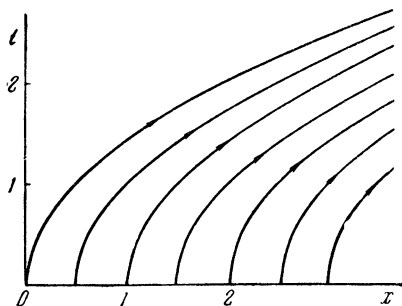


Рис. 13.1. Ход лучей у линейного края пучка.

функция u , полагая

$$x_n = u \sum_{k=0}^n a_{nk} u^{2k} \omega^{n-k}, \quad t_n = \sum_{k=0}^n b_{nk} u^{2k} \omega^{n-k} \quad (13.15)$$

и подставляя эти выражения в (13.6), можно найти для каждого n коэффициенты a_{nk} и b_{nk} . В результате имеем:

$$x_1 = u \left(\omega + \frac{2}{3} u^2 \right), \quad t_1 = -\omega + u^2, \quad (13.16)$$

$$x_2 = u \left(\omega^2 + \frac{\omega u^2}{2} - \frac{u^4}{5} \right), \quad t_2 = -\frac{\omega^2}{2} + \frac{3}{2} u^2 \omega - \frac{u^4}{4}, \quad (13.17)$$

$$x_3 = u \left(\omega^3 - \frac{3}{5} \omega u^4 + \frac{2}{35} u^6 \right), \quad t_3 = -\frac{\omega^3}{3} + 2\omega^2 u^2 - \omega u^4 + \frac{u^6}{15} \quad (13.18)$$

и т. д. Эти решения также являются автомодельными функциями $\omega(x, t)$ и $u(x, t)$:

$$\omega(x, t) = t^{1/n} f_{1n}(\tau), \quad u(x, t) = t^{1/2n} f_{2n}(\tau), \quad \tau = xt^{-(2n+1)/2n}. \quad (13.19)$$

13.2. Возникновение особенностей.

Выше был построен набор частных решений уравнений (13.2), (13.6). Важно, что уравнения (13.6) для функций $x(u, \omega)$, $t(u, \omega)$ — линейные. Это означает, что не только функции x_n , t_n , но и произвольные их линейные комбинации

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n(u, \omega), \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_n(u, \omega) \quad (13.20)$$

удовлетворяют уравнениям (13.6). Полученный класс решений характеризуется бесконечным рядом констант C_1, C_2, \dots, C_n или же произвольной разлагающейся в ряд функцией.

Действительно, рассмотрим плоскопараллельный пучок, т. е. примем, что при $t = 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x). \quad (13.21)$$

Согласно (13.7), (13.8) — (13.10) при $u = 0$ имеем $x_n = \omega^n$. Поэтому, разложив в ряд Тэйлора функцию $x_0(\omega)$, обратную $\omega_0(x)$,

$$x_0(\omega) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \omega^n, \quad C_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n x_0(\omega)}{\partial \omega^n} \right)_{\omega=0}, \quad (13.22)$$

мы определяем константы C_n . Иначе говоря, формулы (13.20), (13.8) — (13.10) с коэффициентами C_n , определенными согласно (13.22), дают в неявном виде решение уравнений (13.2), удовлетворяющее граничным условиям (13.21).

Найденный класс решений уравнений геометрической оптики аналогичен простым волнам в гидродинамике идеальной сжимаемой жидкости. Важно, что, как и для простой волны, развитие решения (13.20) приводит к постепенному искажению профиля пучка и возникновению на нем особых точек [114]. Классификации возникающих особенностей и выяснению их физического смысла посвящен настоящий раздел.

Пересечение боковых лучей. Пусть распределение интенсивности плоскопараллельного пучка на начальной плоскости $t = 0$ определено кубической кривой (при $\omega > 0$):

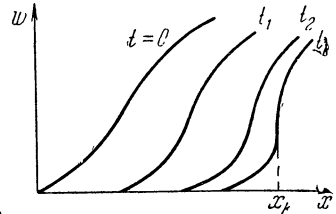
$$x_0(\omega) = \alpha\omega - \gamma\omega^2 + \omega^3, \quad u_0(x) = 0. \quad (13.23)$$

Соответствующий начальный профиль пучка $\omega_0(x)$ показан на рис. 13.2 (кривая $t = 0$). Согласно (13.22), (13.20), решение уравнений (13.23) является комбинацией трех автомодельных решений (13.8) — (13.10) x_1, t_1 ; x_2, t_2 и x_3, t_3 :

$$x = \alpha\left(\omega + \frac{u^2}{2}\right) - \gamma\left(\omega^2 - \frac{u^4}{4}\right) + \left(\omega^3 - \frac{3}{2}\omega^2u^2 - \frac{3}{2}\omega u^4 + \frac{u^6}{4}\right), \quad (13.24)$$

$$t = \alpha u - 2\gamma u\left(\omega - \frac{u^2}{3}\right) + 3u\left(\omega^2 - \omega u^2 + \frac{u^4}{10}\right). \quad (13.25)$$

Изменение интенсивности $\omega(x)$ при различных t , определяемое формулами (13.24), (13.25), показано на рис. 13.2. Видно, что граница пучка смещается в сторону нарастания интенсивности, ход $\omega(x)$ при этом становится все более крутым. При некотором значении $t = t_k$, $x = x_k$ производная $\partial\omega/\partial x$ обращается в бесконечность — возникает особенность. Условия возникновения особенности:



$$\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}\right)_t = 0. \quad (13.26)$$

Рис. 13.2. Возникновение боковой особенности $0 < t_1 < t_2 < t_k$.

Выражая здесь с помощью (13.24), (13.25) производные $(\partial x/\partial \omega)_t$ и $(\partial^2 x/\partial \omega^2)_t$, приходим к алгебраическим уравнениям, определяющим значения u и ω в особой точке:

$$\left(\alpha - 2\gamma\omega + 3\omega^2 - 3\omega u^2 - \frac{3}{2}u^4\right)^2 + u^2(3u^2 - 6\omega + 2\gamma)(2\alpha + 2\gamma u^2 - 2\gamma\omega - 9\omega u^2) = 0, \quad (13.27)$$

$$\begin{aligned} & - A^3(2\gamma - 6\omega + 3u^2) - A^2u^2\left[12(\omega + u^2)(2\gamma - 6\omega + 3u^2) + \right. \\ & \left. + 6\left(\alpha + 2\gamma u^2 - 3\omega^2 - 6\omega u^2 + \frac{3}{2}u^4\right)\right] + Au^2(2\gamma - 6\omega + 3u^2) \times \\ & \times \left[(2\gamma - 6\omega + 3u^2)\left(\alpha + 6\gamma u^2 - 3\omega^2 - 18\omega u^2 + \frac{15}{2}u^4\right) + \right. \\ & \left. + 2(2\gamma - 6\omega + 9u^2)\left(\alpha + 2\gamma u^2 - 3\omega^2 - 6\omega u^2 + \frac{3u^4}{2}\right)\right] - \\ & - 2u^4(2\gamma - 6\omega + 3u^2)^2(2\gamma - 9\omega + 3u^2) \times \\ & \times \left(\alpha + 2\gamma u^2 - 3\omega^2 - 6\omega u^2 + \frac{3u^4}{2}\right) = 0, \quad (13.28) \end{aligned}$$

$$A = \alpha - 2\gamma\omega + 2\gamma u^2 + 3\omega^2 - 9\omega u^2 + \frac{3}{2}u^4.$$

Их аналитическое решение нетрудно найти при условии $\Delta = \alpha - (\gamma^2/3) \ll \alpha$, когда крутизна начального фронта велика. В этом случае $\omega_k = \frac{\gamma}{3} + \frac{\Delta}{2\gamma}$, $u_k^2 = \frac{\Delta}{\gamma}$ и координаты особой точки $x_k = \gamma^3/27$, $t_k = 2\Delta^{3/2}/3\gamma^{1/2}$. До особой точки $t = t_k$ функции $\omega(x, t)$ и $u(x, t)$ однозначны, после нее в определенной области $x \sim x_k$ они принимают три значения. Особенность носит «кубичный» характер $\omega \sim (x - x_k)^{1/3}$, $u \sim (x - x_k)^{1/3}$. Этот случай аналогичен обычному «перехлесту» простой волны в гидродинамике ([113], § 94).

Причина возникновения особенности вполне понятна. Действительно, в рассматриваемом здесь случае начальный профиль имеет точку перегиба $\omega_n = \gamma/3$, где максимален градиент интенсивности $\partial\omega/\partial x$ (см. рис. 13.2). В этом месте максимально, следовательно, и «давление» нелинейной среды. Оно смещает лучи и постепенно продавливает пучок. В особой точке лучи пучка начинают пересекаться и при $t > t_k$ образуется целая область пересечения лучей.

Пересечение лучей на оси пучка. Исследуем теперь поведение пучка вблизи оси, т. е. вблизи максимума его интенсивности. Воспользуемся для этого автомодельными решениями второго класса (13.16)–(13.18). Рассмотрим, например, функции $x = x_2 - \alpha x_1$; $t = t_2 - \alpha t_1$, где x_1, t_1 и x_2, t_2 определены согласно (13.16), (13.17). Иначе говоря, пусть

$$x = u \left(\omega^2 - \alpha\omega + \frac{\omega u^2}{2} - \frac{2}{3} \alpha u^2 - \frac{u^4}{5} \right), \quad (13.29)$$

$$t = -\frac{\omega^2}{2} + \alpha\omega + \frac{3}{2} u^2 \omega - \alpha u^2 - \frac{u^4}{4}. \quad (13.30)$$

Рассмотрим приосевую область пучка — малые значения $x \rightarrow 0$. Из (13.29) следует тогда, что $u \sim x \rightarrow 0$. Пренебрегая поэтому в уравнениях (13.29), (13.30) членами порядка u^3, u^4 , находим:

$$\omega = \omega_0 - \frac{(3\omega_0 - 2\alpha)x^2}{2\omega_0^2(\alpha - \omega_0)^3}, \quad u = -\frac{x}{\omega_0(\alpha - \omega_0)}, \quad \omega_0 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 2t}.$$

Интегрируя уравнение (13.13), определяем траектории приосевых лучей:

$$x = x_0 \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 2t_0}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 2t}}. \quad (13.31)$$

Ход функций $\omega(x)$, $u(x)$ и траектории лучей вблизи оси пучка представлены при различных значениях t на рис. 13.3, 13.4. Из рисунков и формулы (13.31) видно, что с ростом t лучи сжимаются к оси пучка. Интенсивность в максимуме пучка при этом возрастает, т. е. пучок фокусируется.

Важно, что интенсивность ω — гладкая функция x только при $t \leq \alpha^2/2$. При $t = t_k = \alpha^2/2$ на оси пучка возникает осо-

бность. Максимальное значение (при $t = t_k$) $w_{\max} = \alpha$. В точке $t = t_k$, как видно из рис. 13.4, приосевые лучи начинают пересекать ось пучка. Условия возникновения особенности на оси пучка:

$$x = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_t = 0. \quad (13.32)$$

Вблизи особой точки $t = t_k$: $|x| \rightarrow 0$, а поэтому $u \rightarrow 0$, $w = \alpha - \Delta w$. Из (13.29), (13.30) тогда следует, что

$$w = \alpha - \alpha^{-1/4} |x|^{1/2}, \quad u = -\alpha^{-3/4} |x|^{1/2} \operatorname{sign} x. \quad (13.33)$$

Осевая особенность не имеет аналога в гидродинамике простых волн.

Если все лучи пучка пересекают ось одновременно (при одном значении $t = t_k$), то фокусировка точечная. Интенсивность пучка в фокусе возрастает при этом до бесконечности. Такой случай осуществляется, однако, только для параболического пучка (см. § 13.4). В общем же случае первыми пересекаются приосевые лучи, т. е. возникает рассматриваемая здесь осевая особенность. Она ограничивает интенсивность в фокусе пучка

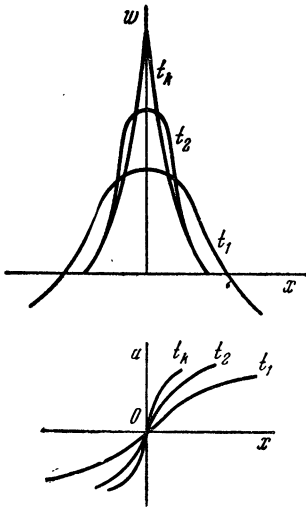


Рис. 13.3. Возникновение осевой особенности $t_k > t_2 > t_1$.

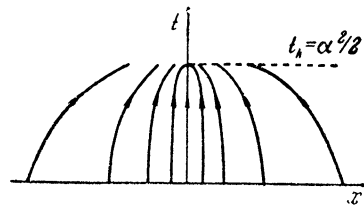


Рис. 13.4. Ход лучей вблизи оси пучка.

и играет при нелинейной фокусировке двумерных пучков роль, аналогичную абберации в линзах.

Таким образом, с развитием гладкого начального профиля пучка ход интенсивности искажается и возникают особенности, связанные с возможностью пересечения лучей, распространяющихся в нелинейной среде. Вблизи особых точек $\frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow \infty$, $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \infty$, так что условия применимости геометрической оптики вблизи этих точек нарушаются. Указанные здесь основные типы особенностей: боковая — внутри пучка $[w \sim (x - x_k)^{1/3}$,

$u \sim (x - x_k)^{1/2}$ и осевая — в максимуме на оси пучка [$w \sim |x|^{1/2}$, $u \sim |x|^{1/2} \text{sign } x$].

После особых точек возникают области пересечения лучей — многолучевые области. Уравнения (13.2) в этих областях неприменимы.

13.3. Распад пучка.

Развитие малых возмущений однородного пучка. Частное однородное решение уравнений (13.2) имеет вид: $w(x, t) = w_0$; $u(x, t) = u_0$, где w_0 и u_0 — произвольные постоянные. Рассмотрим, как развивается малое возмущение интенсивности или направлений лучей в однородном пучке, т. е. в плоской волне [115—117]. Примем, что

$$w = w_0 + \Delta w(x, t), \quad u = u_0 + \Delta u(x, t). \quad (13.34)$$

Подставляя выражения (13.34) в уравнения (13.2) и линеаризуя их, получаем:

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + w_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} - \frac{\partial \Delta w}{\partial x} = 0. \quad (13.35)$$

Решение линейных уравнений (13.34) естественно искать путем разложения неизвестных функций Δw и Δu в интеграл Фурье по x и t :

$$\Delta w = \int (\Delta w)_{k\omega} e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega, \quad \Delta u = \int (\Delta u)_{k\omega} e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega. \quad (13.36)$$

Подставляя выражения (13.36) в (13.35), приходим к дисперсионному уравнению, определяющему связь k и ω :

$$(\omega - ku_0)^2 + k^2 w_0 = 0. \quad (13.37)$$

Отсюда

$$\omega = ku_0 \pm ik \sqrt{w_0}. \quad (13.38)$$

Подставляя это выражение в (13.36), видим, что малые возмущения экспоненциально нарастают с t :

$$(\Delta u)_{k\omega} \sim (\Delta w)_{k\omega} \sim \exp(k \sqrt{w_0} t).$$

Пусть, например, плоская волна на границе плазмы имеет слабую пространственную модуляцию амплитуды:

$$\Delta w(x, 0) = \Delta w_0 \cos kx, \quad \Delta u(x, 0) = 0, \quad u_0(x) = 0. \quad (13.39)$$

Решение уравнений (13.35) с граничными условиями (13.39):

$$\Delta w(x, t) = \Delta w_0 \cos kx \operatorname{ch} k \sqrt{w_0} t, \quad \Delta u(x, t) = -\Delta w_0 \sin kx \operatorname{sh} k \sqrt{w_0} t. \quad (13.40)$$

Отсюда видно, что модуляция с ростом t экспоненциально усили-

вается, пучок стремится расслоиться, распасться. Быстрота нарастания возмущения по t растет с уменьшением его размера по x .

Возникновение новых максимумов интенсивности. Выше была рассмотрена неустойчивость однородного пучка, возникающая из-за нарастания небольших возмущений интенсивности. Для неоднородного пучка ситуация, вообще говоря, иная. Здесь уравнения (13.2), как показано в разделе 13.2, справедливы лишь до момента возникновения особенности, т. е. при $t \leq t_k$. За конечное «время» $t < t_k$ очень малые возмущения не успевают сильно возрасти, так что формально неоднородный пучок устойчив. Однако он весьма чувствителен к изменениям начального профиля и легко может расслоиться [118].

Пусть, например, начальный профиль интенсивности плоскопараллельного пучка в окрестности заданной точки $x = 0$ имеет вид:

$$\omega_0(x) = \omega_0 + \alpha x + \gamma x^3, \quad u_0(x) = 0. \quad (13.41)$$

Рассмотрим, как он искажается по мере распространения лучей в нелинейной среде, т. е. с ростом t .

Решение уравнений (13.2) при небольших значениях t можно искать в виде ряда по степеням t :

$$\omega(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x) t^k, \quad u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) t^k. \quad (13.42)$$

Подставляя выражения (13.42) в (13.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , устанавливаем рекуррентные соотношения для функций $\omega_k(x)$ и $u_k(x)$:

$$\begin{aligned} \omega_k(x) &= -\frac{1}{k} \frac{d}{dx} \sum_{p=0}^{k-1} \omega_p u_{k-1-p}, \\ u_k(x) &= \frac{1}{k} \frac{d}{dx} \left[\omega_{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{k-1} u_p u_{k-1-p} \right]. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Полагая здесь k последовательно равным 1, 2, ..., можно выразить функции $\omega_k(x)$ и $u_k(x)$ через начальные функции $\omega_0(x)$, $u_0(x)$.

Подставляя, в частности, (13.41) в формулы (13.42), (13.43), находим, что при малых значениях t распределение интенсивности и направлений лучей в пучке (13.41) описывается выражениями:

$$\omega = \omega_0 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + x(\alpha - 3\gamma\omega_0 t^2) + \gamma x^3 - \frac{3}{2} \gamma (3\omega_0 + \alpha) x^2 t^2 - \frac{15}{2} \gamma^2 t^2 x^4, \quad (13.44)$$

$$u = t(\alpha + 3\gamma x^2) - \gamma t^3 [\omega_0 - 3x(\omega_0 + \alpha) + 16\gamma x^2].$$

Профиль интенсивности согласно (13.44) при разных t представлен на рис. 13.5. Видно, что пучок постепенно становится более пологим в окрестности рассматриваемой точки $x = 0$. При $t = t_k = \sqrt{\alpha/3\gamma w_0}$ ($\alpha \rightarrow 0$) образуется точка перегиба ($x_k = \alpha/2$). Затем появляется новый максимум в распределении интенсивности. С ростом t его относительная высота растет. Пучок начинает распадаться. В точке перегиба

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_t = 0. \quad (13.45)$$

Условие (13.45) и является условием распада пучка. Заметим, что в этой точке горизонтального перегиба якобиан $\frac{\partial(u, w)}{\partial(t, x)} = 0$.

Обратный якобиан $\frac{\partial(t, x)}{\partial(u, w)}$ обращается при этом в бесконечность. Точки горизонтального перегиба являются, таким образом, особыми точками для преобразования системы (13.2) к линейным уравнениям (13.6).

Ряды (13.42), (13.43) удобно использовать и в других случаях при численном интегрировании уравнений (13.2). Рассмотрим, например, плоскопараллельный пучок с начальным профилем интенсивности

$$w_0(x) = (1 - x^2)(x^4 - x^2 + 1), \quad u_0(x) = 0. \quad (13.46)$$

Подставляя (13.46) в (13.43), находим коэффициенты $w_{2k}(x)$, $u_{2k+1}(x)$ (коэффициенты $w_{2k+1} = u_{2k} = 0$). Ряд (13.42) был протабулирован численно. Профили интенсивности пучка (13.46) при различных значениях t представлены на рис. 13.6. Видно, что до $t \approx 0,3$ пучок медленно сжимается к оси. При $t > 0,3$ рост интенсивности на оси пучка ускоряется. При $t > 0,38$ пучок начинает расслаиваться, характерный размер расслоения $\Delta x = (0,2 - 0,3)a$.

13.4. Произвольные двумерные пучки.

Преобразование годографа. Рассмотрим теперь общую задачу о распространении произвольного двумерного пучка электромагнитных волн в слабо нелинейной среде. Уравнения (13.2), описывающие распространение пучка, как и в гидродинамике ([113], § 98), можно свести к одному линейному уравнению второго порядка. Введем функцию

$$\psi = S - ix + t\left(\frac{u^2}{2} - w\right). \quad (13.47)$$

где эйконал $S = \int u dx$. Будем рассматривать ψ как функцию переменных u и w . Из определения функции ψ следует тогда, что

$$d\psi = -x du + t d\left(\frac{u^2}{2} - w\right) = -t dw + (ut - x) du.$$

Сравнивая это соотношение с равенством $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial w} dw + \frac{\partial\psi}{\partial u} du$, находим, что

$$t = -\frac{\partial\psi}{\partial w}, \quad x = -u \frac{\partial\psi}{\partial w} - \frac{\partial\psi}{\partial u}. \quad (13.48)$$

Если функция $\psi(u, w)$ известна, то соотношения (13.48) определяют в неявном виде зависимость u и w от координат x и

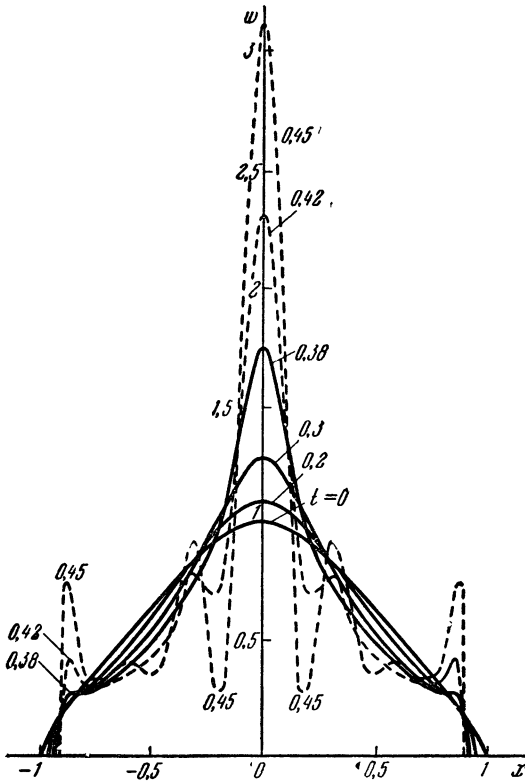


Рис. 13.6. Расслоение пучка.

џ. Уравнение для ψ получается непосредственной подстановкой соотношений (13.48) в уравнение непрерывности (13.2а) (уравнение (13.2б) обращается при этом в тождество):

$$\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial\psi}{\partial p} \right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0, \quad p = \sqrt{w}, \quad v = \frac{u}{2}. \quad (13.49)$$

Граничные условия (13.3) задаются на плоскости $t = 0$ в виде начального распределения интенсивности $\omega_0(x)$ и направлений лучей в пучке $u_0(x)$. В нашем случае они принимают вид:

$$\rho^2 = \omega_0(x), \quad v = \frac{u_0(x)}{2}. \quad (13.50)$$

Эти условия определяют в неявном виде в пространстве ρv некоторую осесимметричную поверхность S . На этой поверхности

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}\right)_S = 0, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)_S = -2x_0(\rho^2), \quad (13.51)$$

где $x_0(\omega)$ — функция, обратная $\omega_0(x)$.

Функция Ψ описывается уравнением Лапласа (13.49). Поэтому имеется прямая аналогия задач о распространении произвольных плоских пучков в нелинейной среде с краевыми задачами электростатики. Условия (13.51) означают, что на некоторой осесимметричной поверхности S радиальная компонента «напряженности» $E_\rho = \partial \Psi / \partial \rho$ равна нулю, а компонента «напряженности» вдоль оси v , $E_v = \partial \Psi / \partial v$, является заданной функцией от ρ .

Общее решение уравнения (13.49) находится интегрированием в комплексной плоскости ρv [119] или же путем разложения решения в ряд по собственным функциям оператора Лапласа, в частности по сплюснутым сфероидальным гармоникам [114]. Например, для плоскопараллельного пучка $u_0(x) = 0$ с начальным распределением интенсивности

$$\omega_0(x) = \text{ch}^{-2}x \quad (13.52)$$

решение (13.48), (13.49) имеет следующий вид [116, 114]:

$$x(\omega, t) = \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) + ut, \quad (13.53)$$

$$u = -2\omega t \sqrt{1 - \frac{1}{\tau^2}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{1 + t^2 \omega^2}{\omega}}. \quad (13.54)$$

Зависимость $\omega(x)$ при различных значениях t , определенная формулами (13.53), (13.54), изображена на рис. 13.7. Из рисунка видно, что резкое нарастание интенсивности вблизи оси пучка при $t \rightarrow 0,5$ сопровождается быстрой деформацией начального профиля пучка. При $t = 0,5$, $\omega = 2$, $u = 0$ на оси пучка возникает особая точка. Это нетрудно установить, воспользовавшись непосредственно условиями (13.32), определяющими момент появления осевой особенности. Разлагая решение (13.53), (13.54) в ряд по степеням ω и u вблизи особой точки, представляем его в виде:

$$x = M(x_2 - \alpha x_1), \quad t = \dot{M}(t_2 - \alpha t_1), \quad (13.55)$$

где $M = 1/8$, $\alpha = \omega_{\max} = 2$. Здесь $x_1, t_1; x_2, t_2$ — автомодельные решения (13.8), (13.9). Таким образом, поведение пучка

в окрестности осевой особенности тождественно рассмотренному в § 13.2.

Для плоскопараллельного пучка с гауссовским профилем начального распределения интенсивности

$$\omega_0(x) = \exp(-x^2), \quad u_0(x) = 0 \quad (13.56)$$

решение получено численно путем табулирования ряда (13.42), (13.43). Профили интенсивности пучка при различных значениях t проведены на рис. 13.8. Видно, что при $t > 0,50$ рост

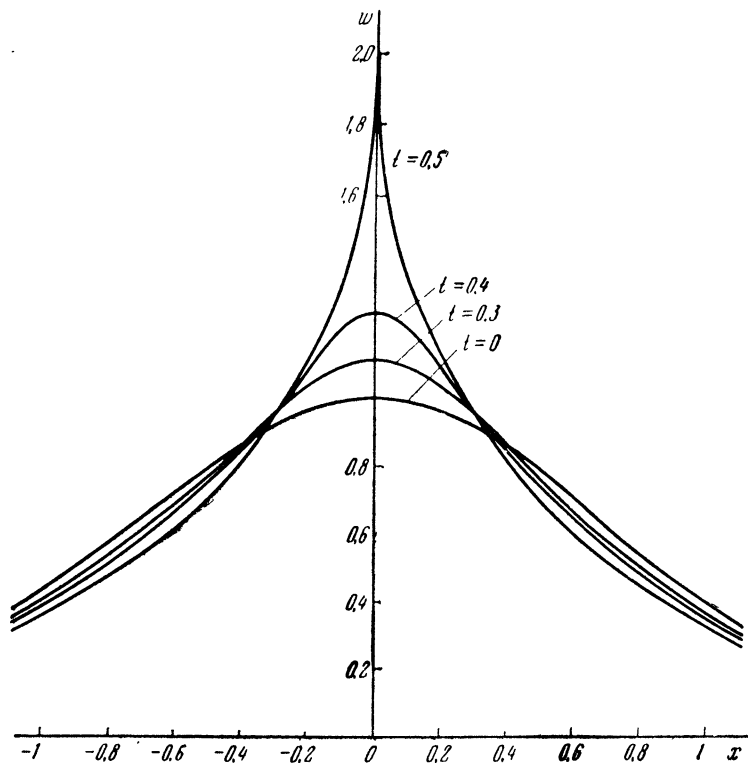


Рис. 13.7. Фокусировка плоскопараллельного пучка с $\omega_0(x) = \text{ch}^{-2} x$.

интенсивности на оси сильно ускоряется. При этом, однако, ухудшается и сходимость ряда (13.42), что свидетельствует о приближении к особой точке. Ход функций $\omega(x, t)$, $u(x, t)$ в окрестности осевой особой точки определяется согласно (13.55) константами M и ω_{\max} . Сшивая аналитическое решение (13.55) с численным при $t = 0,50$; $0,52$, находим: $M = 0,13$, $\omega_{\max} = 2,2$. Особенность возникает при $t_{\phi} = 0,54$. Максимальное значение интенсивности в особой точке $\omega_{\max} = 2,2$. Ход решения в окрестности особенности показан на рис. 13.8 пунктиром.

Из рассмотренных примеров видно, что интенсивность двумерного пучка возрастает за счет самофокусировки примерно в 2 раза. Этот вывод подтверждается и более общим анализом [114].

Параболические пучки. Пусть интенсивность пучка на границе $t=0$ распределена по параболическому закону, а направления лучей — по линейному:

$$\omega_0(x) = 1 - x^2, \quad u_0(x) = bx. \quad (13.57)$$

Такое распределение начальных направлений $u_0(x)$ соответствует централизованному пучку, свободно расходящемуся из

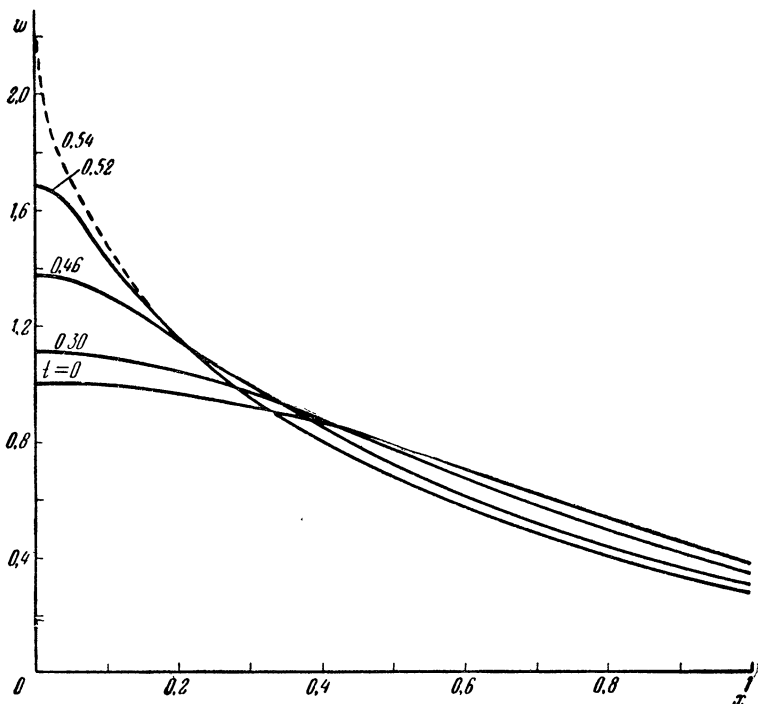


Рис. 13.8. Фокусировка плоскопараллельного пучка с $\omega_0(x) = e^{-x^2}$.

точки $t = -1/b$ (при $b > 0$) или сходящемуся к точке $t = 1/b$ (при $b < 0$). В частности, при $b=0$ пучок плоскопараллельный. Отметим, что распределение интенсивности $\omega_0(x)$ не удовлетворяет физическому условию $\omega \geq 0$, так что рассматриваемое в этом разделе решение носит формальный характер.

Параболический пучок при любом t сохраняет свой начальный профиль [120]. Действительно, будем искать решение уравнений (13.2) в виде:

$$\omega = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{x^2}{f^2} \right), \quad u = x\varphi, \quad (13.58)$$

где $f = f(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Подставляя выражения (13.58) для $\omega(x, t)$ и $u(x, t)$ в уравнения (13.2), находим, что они удовлетворяются, если $\varphi(t) = f^{-1} \frac{df}{dt}$, а функция $f(t)$ определена уравнением

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\frac{2}{f^2}. \quad (13.59)$$

Граничные условия (13.57) принимают при этом вид:

$$f|_{t=0} = 1, \quad \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = b. \quad (13.60)$$

Интегрируя уравнение (13.59) с граничными условиями (13.60), имеем:

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{\frac{4}{f} + b^2 - 4},$$

$$f_{10}^{1/2} (1 - f_{10})^{1/2} - f_1^{1/2} (1 - f_1)^{1/2} + \arcsin f_1^{1/2} - \arcsin f_{10}^{1/2} = \frac{t}{4} (4 - b^2)^{3/2}, \quad (13.61)$$

$$f_1 = f \left(1 - \frac{b^2}{4} \right), \quad f_{10} = f_1(0) = 1 - \frac{b^2}{4}.$$

Эти выражения определяют в неявном виде функцию $f(t)$. Здесь принято, что $b < 2$.

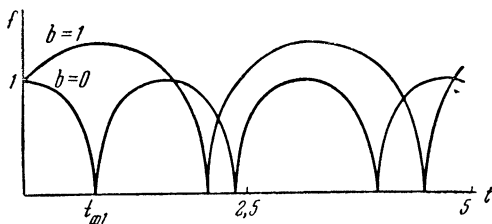


Рис. 13.9. Эффективная ширина параболического пучка.

Функция $f(t)$ представлена на рис. 13.9 для различных значений параметра b . Важно, что $f(t)$ может уменьшаться с ростом t и в некоторых точках t_{ϕ} обращаться в нуль. Пучок при этом фокусируется в точку. Ход интенсивности на оси пучка при $b = 0$ представлен на рис. 13.10. В точках фокуса интенсивность бесконечна. Интересно, что пучок периодически фокусируется и дефокусируется. В среднем он как бы канализуется. Период осцилляций

$$T = \frac{\pi}{2(1 - b^2/4)^{3/2}}. \quad (13.62)$$

В частности, период осцилляций плоскопараллельного пучка $T = \pi/2$, его первая фокальная точка $t_{\phi 1} = \pi/4$. Следует отметить, что фокальные точки — особые. За этими точками, однако,

не возникает области пересечения лучей. Это означает, что параболическое решение, вообще говоря, сохраняет смысл и после фокальных точек.

Выше предполагалось, что $b < 2$. При $b > 2$ функция $f(t)$ определена в неявном виде выражением:

$$f_1^{1/2} (f_1 + 1)^{1/2} - f_{10}^{1/2} (f_{10} + 1)^{1/2} - \ln \left[\frac{f_1^{1/2} + (1 + f_1)^{1/2}}{f_{10}^{1/2} + (1 + f_{10})^{1/2}} \right] = \frac{t}{4} (b^2 - 4)^{3/2}, \quad (13.63)$$

$$f_1 = f \left(\frac{b^2}{4} - 1 \right), \quad f_{10} = f_1(0) = \frac{b^2}{4} - 1.$$

Расходящийся пучок при $b > 2$ не фокусируется. При больших $t \gg 1$ он свободно расходится: $f(t) = t(b^2 - 4)^{1/2}$. В отсутствие нелинейности $f(t) = bt$. Отсюда видно, что нелинейность уменьшает угол расходимости пучка в $(1 - 4/b^2)^{1/2}$ раз. Для

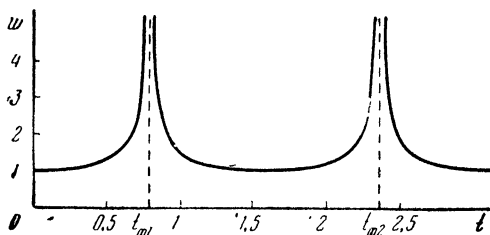


Рис. 13.10. Интенсивность в максимуме параболического пучка.

сходящегося пучка лучей положение фокуса сдвигается в сторону меньших t :

$$t_{\phi} = \frac{1}{(b^2 - 4)^{3/2}} \left\{ b(b^2 - 4)^{1/2} - 4 \ln \left[\frac{b}{2} + \left(\frac{b^2}{4} - 1 \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (13.64)$$

В отсутствие нелинейности $t_{\phi} = 1/b$.

§ 14. Геометрическая оптика осесимметричных пучков

Осесимметричные пучки естественно рассматривать в цилиндрических координатах z, ρ, φ ; ось z направлена по оси пучка, ρ и φ — цилиндрические координаты в плоскости, ортогональной к оси. Интенсивность и направления лучей в осесимметричном пучке не зависят от φ . Примем, кроме того, что имеется лишь радиальная компонента, $u_{\rho} = u$ (т.е. пучок «потенциальный», $u_{\varphi} = 0$)*). В этом случае уравнения (12.12)

*) В силу близости уравнений геометрической оптики к уравнениям гидродинамики для них справедлива теорема Гельмгольца о сохранении числа вихрей [122]. Это означает, что пучки, являющиеся безвихревыми на границе $u_{\varphi} = 0$, остаются безвихревыми в любой точке среды.

в безразмерных переменных (13.1) принимают простой вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}(uw) + \frac{uw}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0. \quad (14.1)$$

На границе $t = 0$ профиль интенсивностей и направлений лучей — заданные функции ρ :

$$w|_{t=0} = w_0(\rho), \quad u|_{t=0} = u_0(\rho). \quad (14.2)$$

Функции $w_0(\rho)$ и $u_0(\rho)$ — аналитические; они могут зависеть лишь от четных степеней ρ .

14.1. Осевая особенность.

В § 13 при рассмотрении двумерных пучков было показано, что по мере проникновения в глубь нелинейной среды профиль пучка становится все более крутым и в некоторой точке x_k, t_k «опрокидывается» — в нем возникают особенности, связанные с пересечением лучей. Аналогичные особенности возникают и в осесимметричном пучке. При этом, поскольку в окрестности особой точки ρ_k, t_k градиенты $\partial w/\partial \rho, \partial u/\partial \rho$ велики, то осесимметричный (да и всякий другой) пучок в окрестности особенности ничем не отличается от плоского ($x = \rho - \rho_k \ll \rho_k$). Поэтому характер «боковой» особенности в осесимметричном пучке в точности тот же, что и в плоском пучке (§ 13.2). То же относится и к явлениям распада пучка (§ 13.3).

Исключение составляет особенность на оси пучка, возникающая при пересечении приосевых лучей, так как при $\rho \rightarrow 0$ уравнения (14.1) не сводятся к уравнениям (13.2). Эта особенность в осесимметричном пучке, как и в двумерном, связана с фокусировкой: она ограничивает в рамках геометрической оптики интенсивность пучка в фокусе. Для рассмотрения ее удобно, как и в § 13.1, произвести преобразование годографа, т.е. рассматривать в уравнениях (14.1) ρ и t как функции независимых переменных w, u . Те же преобразования, что и в § 13.1, приводя тогда к следующим уравнениям для функций $\rho(u, w), t(u, w)$:

$$\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} - u \frac{\partial t}{\partial u} + w \frac{\partial t}{\partial w} \right) + uw \left(\frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial w} \right) = 0, \quad (14.3)$$

$$\frac{\partial t}{\partial u} + u \frac{\partial t}{\partial w} - \frac{\partial \rho}{\partial w} = 0.$$

В отличие от уравнений (13.6) для двумерного пучка, эти уравнения нелинейные.

Будем искать решение уравнений (14.3) в виде ряда по степеням u, w (ср. (13.15)):

$$\rho = u \sum a_{pk} w^k u^{2p}, \quad t = \sum b_{pk} w^k u^{2p}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (14.3) и приравнявая члены при одинаковых степенях u , w , находим:

$$\rho = Mu \left(w^2 - \alpha w + \frac{5}{2} u^2 w - \frac{3}{2} \alpha u^2 \right), \quad t = M \left(-\frac{w^2}{4} + \frac{5wu^2}{4} + \frac{\alpha w}{2} - \frac{3\alpha u^2}{4} \right). \quad (14.4)$$

Здесь $M = a_{20}$, $\alpha = a_{10}/a_{20}$ — произвольные постоянные. Учтено, что нас интересует лишь приосевая область и поэтому можно ограничиться малыми значениями u .

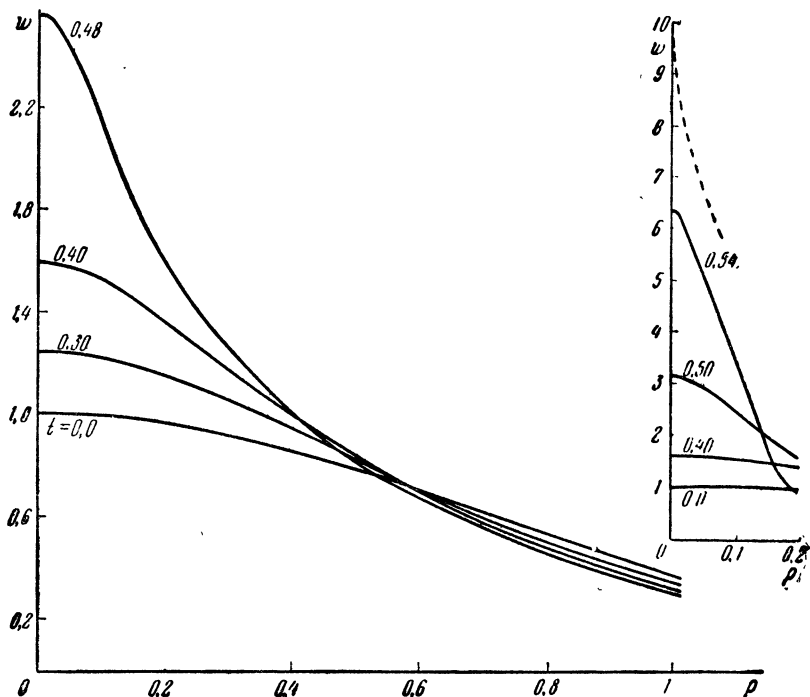


Рис. 14.1. Фокусировка параллельного осесимметричного пучка.

Из (14.4) следует, что при $t < t_k = M\alpha^2/4$

$$w = w_0 - \frac{(5w_0 - 3\alpha)\rho^2}{2M^2w_0^2(w_0 - \alpha)^3}, \quad u = \frac{\rho}{Mw_0(w_0 - \alpha)}, \quad w_0 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4t/M}.$$

При $t = t_k = M\alpha^2/4$ на оси пучка возникает особенность. В окрестности особой точки ($t = t_k$, $\rho = 0$, $w_0 = \alpha$)

$$w = \alpha - 2^{1/4}\alpha^{-1/4}\sqrt{\rho/M}, \quad u = -2^{-1/4}\alpha^{-3/4}\sqrt{\rho/M}. \quad (14.5)$$

Условия возникновения осевой особенности имеют вид (13.32):

$$\rho = 0, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial w} \right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)_t = 0. \quad (14.6)$$

Отсюда видно, что характер осевой особенности в осесимметричном пучке тот же, что и в двумерном пучке (13.33). Особенность на оси может возникать и в отсутствие осевой симметрии у трехмерного пучка. Она имеет тот же квадратичный характер.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. Численные решения уравнений (14.1), как и в случае двумерных пучков, удобно искать в виде ряда (13.42). Рекуррентные соотношения для функций $w_n(\rho)$, $u_n(\rho)$ при этом принимают вид

$$w_n(\rho) = -\frac{1}{n\rho} \times \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \sum_{p=0}^{n-1} w_p u_{n-1-p} \right), \quad (14.7)$$

$$u_n(\rho) = \frac{1}{n} \times \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(w_{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} u_p u_{n-1-p} \right). \quad (14.8)$$

Результаты расчета для параллельного гауссовского пучка

$$w_0(\rho) = \exp(-\rho^2), \quad u_0(\rho) = 0 \quad (14.9)$$

показаны на рис. 14.1. Сшивая численное решение с аналитическим вблизи оси пучка (14.4), находим константы $M = 0,024$, $\alpha = 9,6$ в формулах (14.4). Особенность на оси возникает при $t_h = 0,547$. Максимальное значение интенсивности $w_{\max} \approx 9,6$. Ход интенсивности в окрестности особенности показан на рис. 14.1 пунктиром.

Аналогичное решение для параллельного пучка с граничным распределением интенсивности

$$w_0(\rho) = (1 - \rho^2)(\rho^4 - \rho^2 + 1), \quad u_0(\rho) = 0 \quad (14.10)$$

представлено на рис. 14.2. Видно, что в осесимметричном пучке (как и в двумерном пучке с аналогичным начальным профилем интенсивности (13.46)) при $t > 0,38$ начинают появляться новые максимумы в распределении интенсивности и пучок распадается, превращаясь в систему колец. Расстояние между

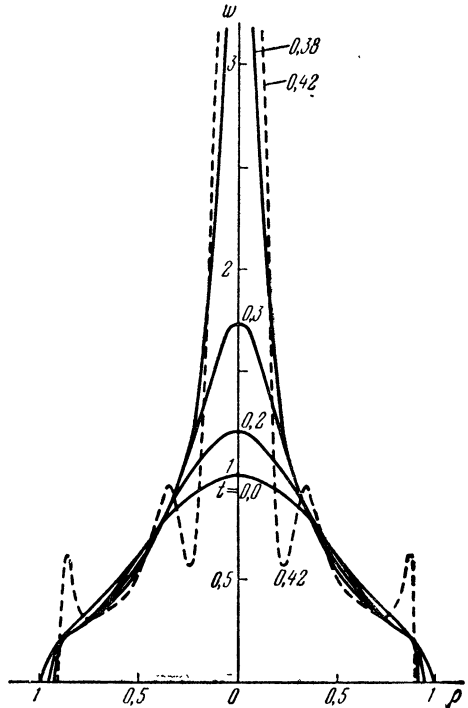


Рис. 14.2. Расслоение осесимметричного пучка.

максимумами порядка $0,2a$, где a — начальная ширина пучка.

Численные расчеты показывают, что к моменту возникновения осевой особенности интенсивность на оси пучка возрастает на порядок за счет самофокусировки.

14.2. Параболический пучок.

Выше было показано, что двумерный пучок всегда сохраняет параболическое распределение интенсивности и фокусируется в точку. Такими же свойствами обладает и осесимметричный пучок [120].

Пусть на границе плазмы ($t = 0$) пучок параболический:

$$\omega_0(\rho) = 1 - \rho^2, \quad u_0 = b\rho. \quad (14.11)$$

Заметим, что в размерных переменных ρ , z граничные условия (14.11) имеют вид:

$$I = I_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right), \quad u = \frac{\rho}{R_0}. \quad (14.12)$$

Пучок центрированный — все лучи выходят из точки $\rho = 0$, $z = -R_0$. Если $R_0 \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$ — пучок плоскопараллельный. Начальное распределение интенсивности (14.11) не удовлетворяет физическому условию $\omega \geq 0$, так что рассматриваемое здесь параболическое решение, как и в случае двумерного пучка, носит формальный характер.

В отсутствие нелинейности ($\beta \rightarrow 0$) решением уравнений (12.12), (14.1) с граничными условиями (14.11) является сферическая волна:

$$\omega = \frac{1}{(bt+1)^2} \left[1 - \frac{\rho^2}{(bt+1)^2}\right], \quad u = \frac{b\rho}{(bt+1)}. \quad (14.13)$$

При учете нелинейности, разыскивая автомодельное решение

$$\omega(\rho, t) = \frac{1}{f^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{f^2}\right), \quad u = \rho\varphi(t), \quad (14.14)$$

приходим к следующему уравнению для функции $f(t)$:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\frac{2}{f^3}, \quad \varphi = \frac{1}{f} \frac{df}{dt}. \quad (14.15)$$

Граничные условия (14.11) при $t=0$ переписываются в виде:

$$f(0) = 1, \quad \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = b. \quad (14.16)$$

Интегрируя один раз уравнения (14.15), имеем:

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{C + \frac{2}{f^2}}. \quad (14.17)$$

Решение уравнения (14.17):

$$f^2(t) = Ct^2 + 2C_1t + \frac{C_1^2 - 2}{C}, \quad (14.18)$$

где C_1 и C — произвольные постоянные. Учитывая граничные условия (14.16), находим, что $C_1 = b$, $C = b^2 - 2$. Отсюда видно, что при $b > \sqrt{2}$, функция $f(t)$ нигде не обращается в нуль, т.е. при $b > \sqrt{2}$ пучок не фокусируется, хотя и расходится слабее, чем в отсутствие нелинейности.

Если же $b < \sqrt{2}$, то производная df/dt обращается в нуль при $f = f_m = (1 - b^2/2)^{-1/2}$. Следовательно, f_m является в этом случае максимальной шириной расходящегося пучка. Она достигается при $t_m = b/(2 - b^2)$. При $t > t_m$ пучок сжимается. Он фокусируется в точке

$$t_{\phi 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - b}. \quad (14.19)$$

Интенсивность в точке фокуса бесконечна. В ней пересекаются одновременно все лучи пучка. После точки фокуса производная df/dt изменяет знак. Решение уравнения (14.17) может быть формально продолжено за точку фокуса $t > t_{\phi 1}$. Оно по-прежнему имеет вид (14.18), причем $C = b^2 - 2$. Постоянная C_1 определяется из условия $f = 0$ при $t = t_{\phi 1}$; $df/dt > 0$ при $t > t_{\phi 1}$. Это дает $C_1^{(1)} = 2\sqrt{2} + b$. Пучок вновь расходится и сжимается. Во второй фокусной точке $t_{\phi 2}$ производная df/dt вновь изменяет знак; значение константы C_1 при $t > t_{\phi 2}$: $C_1^{(2)} = 4\sqrt{2} + b$, и т. д. Таким образом, при $b < \sqrt{2}$, как и в случае двумерного параболического пучка, имеет место периодическое расширение и фокусировка пучка. В среднем пучок как бы канализуется. Это видно из рис. 14.3, на котором представлены функция $f(t)$ и ход интенсивности на оси плоскопараллельного параболического пучка ($b=0$). Период осцилляций равен

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{2 - b^2}. \quad (14.20)$$

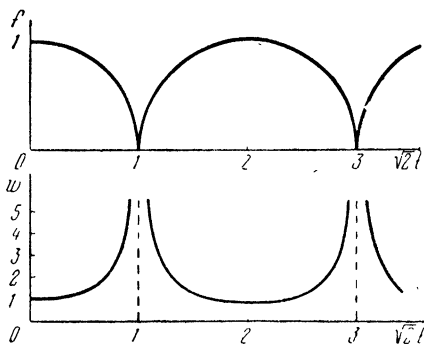


Рис. 14.3. Характеристики параболического осесимметричного пучка.

В случае плоскопараллельного пучка $T = \sqrt{2}$, первая фокусная точка $t_{\phi 1} = 1/\sqrt{2}$.

Аналогично в случае сходящихся пучков ($b < 0$). Если $|b| > \sqrt{2}$, то имеется лишь один фокус:

$$t_{\phi} = \frac{1}{|b| + \sqrt{2}}. \quad (14.21)$$

В отсутствие нелинейности $t_{\phi} = 1/|b|$. Формула (14.21) определяет нелинейный сдвиг точки фокуса. Если $|b| < \sqrt{2}$, то пучок периодически фокусируется и дефокусируется. Отметим, что фокусировка пучков эллиптического сечения с параболическим распределением интенсивности рассмотрена в [123].

§ 15. Нелинейная дифракция

В предыдущих параграфах самовоздействие пучков радиоволн рассматривалось в приближении геометрической оптики. Такое приближение справедливо, если поперечный размер пучка велик в сравнении с длиной волны λ , точнее, если выполнено условие (12.11):

$$\frac{c}{\omega w \sqrt{\beta I_0} \epsilon_0^{1/2}} |\nabla w| \ll 1. \quad (15.1)$$

Для достаточно узких пучков условие (15.1) нарушается. Оно не выполняется, кроме того, вблизи особых точек и за ними — в области пересечения лучей. В этих случаях нельзя пренебрегать членом $\frac{1}{2k^2} \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{E_0} \Delta_{\perp} E_0 \right)$ в уравнении (12.8), описывающую дифракцию.

Учет дифракционных эффектов приводит к новым особенностям нелинейного распространения узкого пучка радиоволн. Важнейшие из них — точечная самофокусировка («схлопывание») осесимметричного пучка [133] и возможность канализации: пучок при учете нелинейности и дифракции может образовывать в среде однородный канал, в котором распространяется волна [124—126, 263].

15.1. Канализация двумерного пучка.

Распространение двумерного пучка в однородной непоглощающей среде при учете дифракции описывается уравнениями (12.8), (12.7):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{w}} \frac{\partial^2 \sqrt{w}}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (15.3)$$

Здесь по-прежнему $w = \frac{I}{I_0}$, $u = \frac{1}{\sqrt{\beta I_0}} \frac{\partial s}{\partial x}$, $t = \frac{z}{a} \sqrt{\beta I_0}$ и введено

$$\delta = \frac{c^2}{2\beta I_0 \omega^2 a^2 \epsilon_0}. \quad (15.4)$$

Безразмерный параметр δ характеризует роль дифракционных эффектов.

Будем искать однородное по z , т. е. не зависящее от t , решение уравнений (15.2), (15.3). Из (15.2), (15.3) имеем в этом случае:

$$i\omega = C_0, \quad \frac{u^2}{2} - \omega - \frac{\delta}{V\bar{\omega}} \frac{d^2 V\bar{\omega}}{dx^2} = -C_1. \quad (15.5)$$

Здесь C_0 и C_1 — произвольные постоянные. Общее решение уравнений (15.5) можно записать в неявном виде:

$$u = \frac{C_0}{\omega}, \quad \frac{dV\bar{\omega}}{dx} = \frac{1}{V\bar{\delta}} \sqrt{C_1\omega - \frac{C_0^2}{2\omega} - \frac{\omega^2}{2} + C_2},$$

$$\frac{x}{V\bar{\delta}} = \int_0^A \left[C_1 p^2 - \frac{C_0^2}{2p^2} - \frac{p^4}{2} + C_2 \right]^{-1/2} dp, \quad A = V\bar{\omega}. \quad (15.6)$$

Функция $\omega(x)$, описываемая формулой (15.6), является в общем случае периодической осциллирующей функцией x . Электромагнитное поле заполняет при этом все пространство.

Особый интерес представляет случай $C_0 = 0$, $C_2 = 0$. Произведя интегрирование в (15.6) при $C_0 = 0$, $C_2 = 0$, находим:

$$A = V\bar{\omega} =$$

$$= V\bar{\omega}_{\max} \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\max}}{\delta}} \right). \quad (15.7)$$

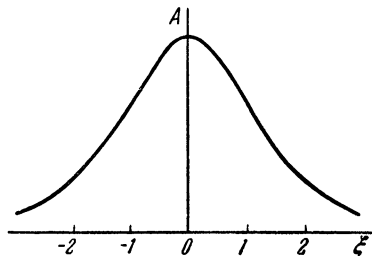


Рис. 15.1. Распределение амплитуды поля в двумерном канале.

Здесь A — безразмерная амплитуда поля волны, $\omega_{\max} = 4C_1$ — максимальное значение безразмерной интенсивности ω , которое достигается при $x = 0$. Принимая, что I_0 в (15.4) — максимальная плотность энергии в пучке $I_0 = I_{\max}$, имеем: $\omega_{\max} = 1$. Из (15.7) видно, что при больших значениях x интенсивность пучка экспоненциально падает с ростом x .

Вид функции $A(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{4\delta}$ представлен на рис. 15.1. Самовоздействие привело к канализации пучка. С ростом I_0 канал сужается $\sim 1/\sqrt{I_0}$. Мощность пучка (на единицу длины)

$$W = c \sqrt{\varepsilon_0} a I_0 \int \omega dx = 4 \sqrt{\delta \varepsilon_0} c a I_0. \quad (15.8)$$

Отсюда, учитывая (15.4), находим I_0 :

$$I_0 = \frac{\pi^2 \beta W^2}{2c^2 \lambda_0^2}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Зная мощность пучка W , можно из этого соотношения определить максимальную интенсивность I_0 . Таким образом, вид

самоканализовавшегося пучка полностью определяется его мощностью.

Отметим, что здесь, как обычно, рассматривался лишь случай слабой нелинейности (12.13): $\epsilon_2 = \gamma E_0^2$. Канализованное решение нетрудно найти и при произвольной зависимости $\epsilon(E_0^2)$ [125, 136]. Самоканализовавшееся решение для непрозрачной плазмы ($\epsilon_0 < 0$) рассмотрено в [137].

15.2. Канализация осесимметричного пучка.

Распространение в однородной среде осесимметричного безвихревого пучка при учете дифракции описывается уравнениями:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}(uw) + \frac{uw}{\rho} = 0, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial \rho} - \delta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{V\overline{w}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V\overline{w}}{\partial \rho} \right) \right] = 0. \quad (15.10)$$

Будем искать однородное по t решение уравнений (15.9), (15.10) [263, 126]. Естественно, кроме того, принять, что отсутствует поток энергии в направлении, ортогональном к оси пучка. В этом случае $u = 0$, и из (15.10) получаем:

$$-w - \frac{\delta}{V\overline{w}} \frac{d^2 V\overline{w}}{d\rho^2} - \frac{\delta}{\rho V\overline{w}} \frac{dV\overline{w}}{d\rho} = -C, \quad (15.11)$$

где C — произвольная постоянная. В переменных

$$A = \sqrt{w/C}, \quad \rho_1 = \rho \sqrt{C/\delta} \quad (15.12)$$

уравнение (15.11) принимает вид:

$$\frac{d^2 A}{d\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{dA}{d\rho_1} - A + A^3 = 0. \quad (15.13)$$

Будем искать канализовавшиеся распределения интенсивности. Тогда граничные условия к уравнению (15.13) принимают вид:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho_1 \rightarrow \infty, \\ A = \text{const} \quad \text{при} \quad \rho_1 \rightarrow 0, \quad \text{или} \quad \frac{dA}{d\rho_1} = 0 \quad \text{при} \quad \rho_1 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Первое из условий (15.14) есть условие канализации. Второе условие — требование ограниченности амплитуды на оси пучка. На больших расстояниях $\rho_1 \rightarrow \infty$ благодаря первому из условий (15.14) нелинейным членом A^3 в уравнении (15.13) можно пренебречь. Оно сводится тогда к уравнению Бесселя, которое определяет асимптотическое поведение решения при $\rho_1 \rightarrow \infty$:

$$A = C_1 \sqrt{\pi/2\rho_1} e^{-\rho_1}, \quad (15.15)$$

Условие ограниченности безразмерной амплитуды при $\rho_1 \rightarrow 0$ приводит к целому ряду решений уравнения (15.13), характеризующихся различными значениями $A_0 = A(\rho = 0)$ и соответствующих различным модам образованного пучком волновода. Численное решение уравнения (15.13) дает для основной моды [126] $A_0 = 2,2$. Следует подчеркнуть, что истинная амплитуда поля на оси пучка при этом произвольна — она характеризуется произвольной постоянной C (15.12). Основная

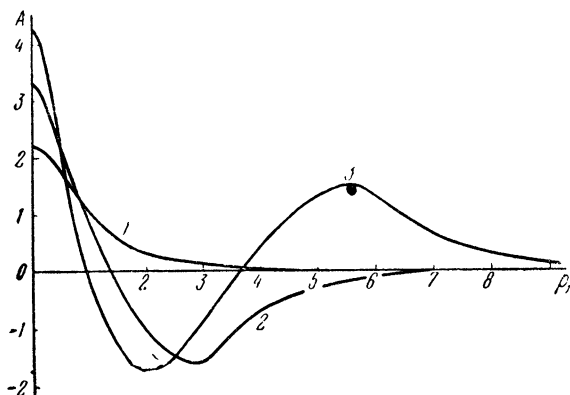


Рис. 15.2. Распределение амплитуды поля в осесимметричном канале. Возле кривых указаны моды нелинейного волновода.

мода представлена на рис. 15.2 (кривая 1). С ростом максимальной плотности энергии I_0 пучок сужается, совершенно аналогично двумерному пучку, рассматривавшемуся выше. Существенно, что мощность канализовавшегося осесимметричного пучка не зависит от его амплитуды:

$$W_1 = c \sqrt{\epsilon_0} 2\pi I_0 a^2 \int_0^\infty A^2 \rho d\rho = \frac{5,763}{\pi^2} \frac{\lambda_0^2 \tau}{\beta}. \quad (15.16)$$

Это значение определяет минимальную (критическую) мощность самоканализующегося пучка.

Вторая и третья моды также представлены на рис. 15.2 (кривые 2 и 3) [127, 128]. Они имеют вид затухающих осцилляций амплитуды. Значения амплитуды на оси пучка $A_n(\rho = 0)$ для высших мод: $A_2 = 3,3$; $A_3 = 4,1$; $A_4 = 4,6$. Мощность канализовавшегося пучка, соответственно,

$$W_2 = 6,4W_1, \quad W_3 = 16,5W_1, \quad W_4 = 30,8W_1,$$

где W_1 — мощность основной моды (15.16). При больших значениях номера моды n мощность пучка растет как $(2n^2 - 1)$.

Аналогичные решения для векторных полей и других типов нелинейности получены в [129, 264, 265].

15.3. Область пересечения лучей.

В §§ 13, 14 рассмотрено нелинейное распространение пучков лучей в рамках геометрической оптики. Вследствие самовоздействия траектории лучей искривляются. В некоторой точке они начинают пересекаться. В этой точке возникает особенность в распределении интенсивности и направлений лучей в пучке. Такая особенность возникает, в частности, на оси пучка, в области фокуса. Вблизи особенности $\partial w/\partial x \rightarrow \infty$. Условия применимости геометрической оптики (15.1) здесь нарушаются и необходимо учитывать дифракционные члены.

Важно, что за особой точкой появляется, а в дальнейшем все расширяется область, в которой лучи пучка пересеклись. В этой области существенна интерференция лучей, и здесь также нельзя пренебрегать членом $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{w}} \frac{\partial^2 \sqrt{w}}{\partial x^2} \right]$ в уравнении (15.3). При учете этого члена особенность в распределении интенсивности двумерного пучка, разумеется, не может появиться. Вместо этого $\partial w/\partial x$ достигает в окрестности особой точки x_h некоторого максимального значения $(\partial w/\partial x)_{\max} \sim \delta^{-1/2}$, после чего на профиле пучка начинают появляться осцилляции и развивается осцилляторная структура. Это и есть область пересечения лучей; осцилляции появляются вследствие интерференции лучей. Область, занятая ими, постепенно расширяется. Этот процесс показан на рис. 15.3, где приведены результаты

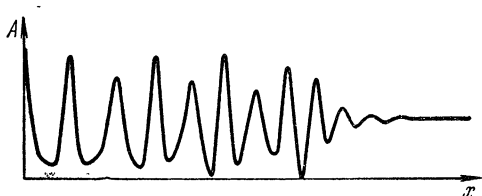


Рис. 15.3. Структура поля в области пересечения лучей.

численного решения уравнений (15.2), (15.3) с граничным условием при $t = 0$: $w_0(x) = 1 + \exp(-x^2/a^2)$, $u_0(x) = 0$. С ростом t осцилляторная область постепенно развивается, захватывая все большую часть пучка [130].

Рассматривая динамику осциллирующей области пучка, интересно, прежде всего, знать характер изменения средних (усредненных по осцилляциям) величин: средней интенсивности, амплитуды колебаний, среднего направления лучей. Общие уравнения переноса, описывающие (при определенных предположениях) изменение средних величин в осциллирующих структурах, приведены в [131, 132]. Существенно, что уравнения эти оказываются гиперболическими. Это означает, что после

развития осцилляций общая тенденция к сжатию (самофокусировке) пучка, которую мы видели в гладких структурах (§§ 13, 14), исчезает. На краю пучка, в области, где $\bar{\omega} \rightarrow 0$, после развития осцилляций образуются отдельные самоканализовавшиеся структуры (15.7). При дальнейшем развитии двумерного пучка каналы постепенно расходятся, и асимптотически пучок распадается на систему отдельных каналов [240]. Могут, однако, возникать и более сложные конфигурации соединенных между собой и осциллирующих каналов.

Интенсивность на оси двумерных пучков растет только до возникновения особенности в геометрической оптике. В осесимметричных пучках картина существенно иная. Численные расчеты [241, 242] показали, что в осесимметричном пучке интенсивность растет и после достижения осевой особенности. При кубичной нелинейности, т. е. в рамках уравнений (15.9), (15.10), приосевая часть пучка может фокусироваться в точку, интенсивность на оси при этом неограниченно возрастает. Этот процесс называют обычно «схлопыванием» пучка [133, 243, 244]. Фактически рост интенсивности при «схлопывании» пучка, разумеется, ограничен из-за изменения характера нелинейности, нелокальности и других процессов. Пройдя точку фокуса, пучок расходится, но затем он может вновь сфокусироваться, образуя многофокусную структуру [210], вполне аналогичную последовательной фокусировке параболических пучков (см. рис. 14.3).

Более подробное изложение современного состояния этих вопросов, а также некоторые результаты численных исследований читатель может найти в обзорах [116, 133—135].

§ 16. Пучки радиоволн в дефокусирующей среде

Распространение узких пучков радиоволн в однородной нелинейной дефокусирующей среде в приближении геометрической оптики по-прежнему описывается уравнениями (12.12), только теперь $\beta < 0$. Уравнения (12.12) в переменных (13.2) (с заменой β на $-|\beta|$) тождественны уравнениям Эйлера в гидродинамике с показателем адиабаты, равным 2. Это означает, что при исследовании распространения пучков радиоволн в дефокусирующей среде можно полностью использовать методы и решения гидродинамики. Мы приведем здесь, поэтому, лишь некоторые наиболее простые решения. Отметим, что уравнения нелинейной геометрической оптики в дефокусирующей среде, как и уравнения Эйлера, носят гиперболический характер, так что их решения допускают произвольные слабые разрывы (т. е. разрывы производных $\partial w/\partial x$, $\partial u/\partial x$). Это существенно отличает их от рассматривавшихся в §§ 13, 14 эллиптических уравнений для фокусирующей среды, допускающих только аналитические решения.

16.1. Параболические пучки.

В фокусирующей среде оказались выделенными пучки параболического профиля: такой профиль сохранялся в каждом сечении пучка, т.е. изменение формы пучка в среде носило автомодельный характер (§§ 13.4 и 14.2). Аналогичными особенностями обладают параболические пучки и в дефокусирующей среде. Действительно, рассмотрим осесимметричный параболический пучок. Иначе говоря, примем, что при $z = 0$ пучок представляет собой расходящуюся центрированную сферическую волну с параболическим распределением интенсивности:

$$I|_{z=0} = I_0 \begin{cases} 1 - (\rho^2/a^2) & \text{при } \rho \leq a, \\ 0 & \text{при } \rho \geq a, \end{cases} \quad u_\rho|_{z=0} = \frac{\rho}{R_0}, \quad u_\varphi|_{z=0} = 0.$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Учтено, что уравнения допускают слабые разрывы. Тогда и при любом другом ρ пучок сохраняет параболический вид:

$$I(z, \rho) = \frac{I_0}{f^2} \begin{cases} 1 - (\rho^2/a^2 f^2) & \text{при } \rho \leq af, \\ 0 & \text{при } \rho \geq af, \end{cases} \quad u_\rho(z, \rho) = \varphi(z) \rho, \quad u_\varphi = 0. \quad (16.1)$$

Подставляя (16.1) в (12.12), приходим к следующим уравнениям для $f(z)$ и $\varphi(z)$:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 2|\beta| \frac{I_0}{f^3}, \quad \varphi(z) = \frac{d \ln f}{dz} \quad (16.2)$$

(ср. (14.15)). Граничные условия с учетом (16.1), (16.2) переписываются в виде:

$$\varphi|_{z=0} = \frac{1}{R_0}, \quad f|_{z=0} = 1, \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1}{R_0}. \quad (16.3)$$

Решение уравнений (16.2) с граничными условиями (16.3) имеет вид:

$$f = \left[\left(1 + \frac{z}{R_0} \right)^2 + \frac{2|\beta|I_0}{a^2} z^2 \right]^{1/2}. \quad (16.4)$$

В отсутствие нелинейности (14.13): $f = 1 + (z/R_0)$. Из формулы (16.4) видно, что за счет нелинейности угол между направлением крайнего луча и осью пучка — угол расходимости пучка $\theta = adf/dz$ — увеличивается с ростом z . При больших значениях $z \gg a/\sqrt{|\beta|I_0}$

$$\theta = \sqrt{\theta_0^2 + 2|\beta|I_0}, \quad (16.5)$$

где $\theta_0 = a/R_0$ — угол расходимости пучка при $z = 0$. Соответственно возрастает за счет нелинейности в $(1 + 2|\beta|I_0/\theta_0^2)^{1/2}$ раз радиус пучка. Интенсивность на оси пучка убывает в $(1 + 2|\beta|I_0/\theta_0^2)$ раз. Для параллельного пучка ($\theta_0 = 0$) максимальный угол расходимости

$$\theta = \sqrt{2|\beta|I_0}. \quad (16.6)$$

Аналогичное решение может быть получено и для параболического двумерного пучка. Распределение интенсивности и направлений лучей в таком пучке при любом z может быть представлено в виде (см. (13.58)):

$$I(x, z) = \begin{cases} \frac{I_0}{f(z)} \left(1 - \frac{x^2}{f^2 a^2}\right) & \text{при } x \leq fa, \\ 0 & \text{при } x > fa, \end{cases} \quad u_x = \frac{x}{R_0} \frac{d \ln f}{dz}. \quad (16.7)$$

Функция $f(z)$ определена при этом в неявном виде уравнением:

$$f_1^{1/2} (f_1 - 1)^{1/2} - f_{10}^{1/2} (f_{10} - 1)^{1/2} + \ln \frac{f_1^{1/2} + \sqrt{f_1 - 1}}{f_{10}^{1/2} + \sqrt{f_{10} - 1}} = 2z \frac{\sqrt{|\beta| I_0 f_{10}^3}}{a}, \quad (16.8)$$

$$f_1 = f_{10} f, \quad f_{10} = 1 + \frac{a^2}{4R_0^2 |\beta| I_0}.$$

Угол расходимости двумерного пучка при больших $z \gg a/\sqrt{|\beta| I_0}$:

$$\theta = \sqrt{\theta_0^2 + 4|\beta| I_0}, \quad \theta_0 = a/R_0. \quad (16.9)$$

16.2. Простые волны. Пересечение лучей.

Рассмотрим теперь более общий класс решений уравнений (12.12) для двумерных пучков ($I = I(x, z)$, $u_x = u_x(x, z)$, $u_y = 0$), эквивалентный простым волнам Римана в гидродинамике [113]. А именно, будем искать решение в виде $u = u(I)$. Подставляя это выражение в уравнения (12.12), получим:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + u(I) \frac{\partial I}{\partial x} + I \frac{\partial u}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial I} \left(\frac{\partial I}{\partial z} + u \frac{\partial I}{\partial x} \right) + |\beta| \frac{\partial I}{\partial x} = 0. \quad (16.10)$$

Эти уравнения совместны с исходным требованием $u = u(I)$ при условии

$$\left(\frac{\partial I}{\partial z} \right)_I + \tau(I) \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)_I = 0, \quad (16.11)$$

где I в индексе показывает, что дифференцирование идет при постоянном I , $\tau(I)$ — произвольная функция I . Решение уравнения (16.11): I постоянно на характеристиках, определяемых уравнением $dx/dz = \tau$, т. е.

$$x = \tau z + P(\tau), \quad (16.12)$$

где $P(\tau)$ — произвольная функция. Подставляя теперь (16.12) в (16.10), получаем:

$$\frac{du}{dI} (u - \tau) + |\beta| = 0, \quad u - \tau + I \frac{du}{dI} = 0. \quad (16.13)$$

Учитывая, что $\tau = \tau(I)$ и, следовательно, $I = I(\tau)$, $u = u(\tau)$, получаем вместо (16.13):

$$(u - \tau) \frac{dI}{d\tau} + I \frac{du}{d\tau} = 0, \quad (u - \tau) \frac{du}{d\tau} + |\beta| \frac{dI}{d\tau} = 0. \quad (16.14)$$

Решение этих уравнений:

$$I = \frac{1}{|\beta|} \left(C - \frac{\tau}{3} \right)^2, \quad u = \frac{2}{3} \tau + C. \quad (16.15)$$

Отметим также тривиальные решения:

$$I = I_0, \quad u = u_0; \quad I = 0, \quad u = \tau.$$

Таким образом, полученные решения описываются формулами (16.15) и постоянны на прямых (16.12), где $P(\tau)$ — произвольная функция.

Из (16.15) следует, что для основного решения

$$I(u) = \frac{1}{|\beta|} \left(\frac{3}{2} C - \frac{u}{2} \right)^2 = I_0 \left(1 \pm \frac{u}{2\sqrt{|\beta|I_0}} \right)^2, \quad C = \pm \frac{2}{3} \sqrt{|\beta|I_0}, \quad (16.16)$$

т. е.

$$u = \frac{2}{3} (\tau + \sqrt{|\beta|I_0}), \quad I = I_0 \left(\frac{2}{3} - \frac{\tau}{3\sqrt{|\beta|I_0}} \right)^2. \quad (16.17)$$

Поэтому, если на границе $z = 0$ интенсивность I и направления лучей u связаны соотношением (16.16), то решение уравнений (12.12) имеет вид (16.17). Функция $P(\tau)$ определяется при этом с помощью граничной функции $u_0(x) = u(x, z = 0)$. Действительно, из (16.12), (16.15) следует, что при $z = 0$

$$x = P(\tau) = X \left(\frac{2\tau}{3} + C \right), \quad (16.18)$$

где $X(u_0)$ — функция, обратная $u_0(x)$. Пусть, например,

$$u_0(x) = \pm \frac{2\sqrt{|\beta|I_0} (x/a)^2}{1 + (x/a)^2}, \quad I_0(x) = \frac{I_0}{[1 + (x/a)^2]^2}. \quad (16.19)$$

Граничные условия (16.19) удовлетворяют соотношению (16.16). Следовательно, решение уравнений (12.12) с граничными условиями (16.19) дается формулами (16.17). При этом τ связано с x и z соотношением (16.12), где функция $P(\tau)$, как ясно из (16.18), имеет вид

$$P(\tau) = \pm \frac{a(\tau + \sqrt{|\beta|I_0})^{1/2}}{(2\sqrt{|\beta|I_0} - \tau)^{1/2}}. \quad (16.20)$$

Подставляя (16.20) в (16.12), приходим к кубическому уравнению для τ , которое и определяет окончательно функцию $\tau(x, z)$.

Вид функции $I(x)$ при различных значениях z ($t = z\sqrt{|\beta|I_0}/a$) показан для этого случая на рис. 16.1. Видно, что распределение интенсивности не только расширяется, но и деформируется с ростом z . При $z = z_k = 1,6a/\sqrt{|\beta|I_0}$ в точке $x = x_k = 1,5a$ профиль пучка опрокидывается. Иначе говоря, при $z > z_k$ вблизи точки x_k лучи пересекаются. Возникает область вблизи x_k , где одновременно присутствуют три луча (пунктир на рис. 16.1). Вследствие интерференции лучей их суммарная интенсивность в этой области осциллирует. Характерный размер осцилляций

$$\Delta x = \lambda/\sqrt{|\beta|I_0}, \quad (16.21)$$

где λ — длина радиоволны.

Воспользовавшись методом характеристик (см. [113], можно построить общее решение уравнений (12.12) для двумерного пучка. Возникновение областей пересечения лучей зависит при этом от вида начального профиля интенсивности и направлений лучей. Для слабо расходящегося центрированного пучка опрокидывание обычно имеет место в том случае, когда начальный профиль $I_0(x)$ обладает точкой перегиба. За точкой опрокидывания в области пересечения лучей, как и в случае фокусирующей среды, развивается осцилляторная структура. Здесь существенны дифракционные эффекты (ср. § 15.3). Вблизи точки опрокидывания уравнения (12.12) при учете дифракционного члена сводятся к уравнению Кортевега — де-Вриза. Анализ решений этого уравнения проведен в [245—247, 135].

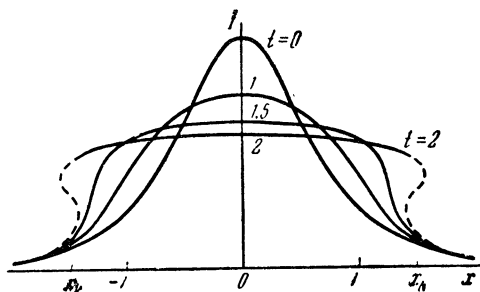


Рис. 16.1. Опрокидывание профиля интенсивности пучка.

§ 17. Самовоздействие пучков радиоволн в ионосфере

Эффекты самовоздействия узких пучков существенно зависят от характера возмущения концентрации электронов полем радиоволны. В нижней ионосфере — до высот 200—250 км — концентрация электронов возрастает под воздействием поля (§ 5.5). Здесь пучки радиоволн дефокусируются. В верхней ионосфере ($z \gtrsim 250$ —300 км), напротив, концентрация падает с ростом мощности волны. Это — фокусирующая область. Целесообразно поэтому рассмотреть отдельно эффекты самовоздействия пучков радиоволн в нижней и в верхней ионосфере.

17.1. Дефокусировка пучков в E- и F₁-слоях.

Рост концентрации электронов в нижних слоях ионосферы под воздействием поля волны определен выражениями (5.26), (5.28). Они справедливы, если $E_0 \leq E_p$ и ширина пучка a больше характерных длин L_N и L_T (табл. 5.9).

Учитывая формулы (12.2), (12.3) и то, что плотность энергии высокочастотного поля в плазме

$$I = (2 - \epsilon_0) E_0^2 / 8\pi \quad (17.1)$$

([1], § 22), приходим к следующему выражению для параметра β :

$$\beta = - \frac{4\pi\omega_0^2\gamma_1}{\omega^2(1 - \omega_0^4/\omega^4)E_p^2}. \quad (17.2)$$

Здесь учтено, что $\epsilon_0 = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, т.е. принято, что частота волны достаточна велика: $\omega^2 \gg \nu_e^2$, $\omega^2 \gg \omega_H^2$ (при выполнении этого условия можно считать среду в первом приближении изотропной). При этом фактор φ в формуле (5.26) при $T \approx T_{e0}$ равен единице. Параметр γ_1 приведен в табл. 5.8.

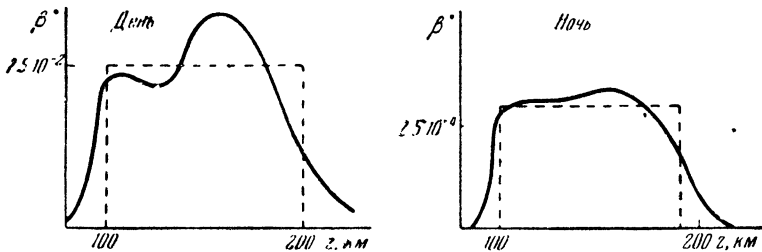


Рис. 17.1. Параметр β^* в ионосфере.

Зависимость параметра $\beta^* = \beta \left(\frac{\omega}{10^8}\right)^4 \left(1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right) \frac{1}{(\sigma/M)^2}$ от высоты z в ионосфере показана на рис. 17.1 (сплошные кривые). Пунктирные кривые построены по формулам:

$$\begin{aligned} \text{День: } \beta^* &= \begin{cases} \beta_0^* = 2,5 \cdot 10^{-2} & \text{при } 100 \text{ км} \leq z \leq 200 \text{ км,} \\ 0 & \text{при } z \leq 100, z > 200 \text{ км;} \end{cases} \\ \text{Ночь: } \beta^* &= \begin{cases} \beta_0^* = 3 \cdot 10^{-4} & \text{при } 100 \text{ км} \leq z \leq 190 \text{ км,} \\ 0 & \text{при } z \leq 100, z > 190 \text{ км.} \end{cases} \end{aligned} \quad (17.3)$$

Таким образом, в грубом приближении (17.3) слой ионосферы от высоты 100 км до 200 км днем (или 190 км ночью)

при $\omega^4 \gg \omega_0^4$ можно рассматривать как однородную дефокусирующую плазму, т.е. при описании нелинейного самовоздействия узких пучков использовать результаты, приведенные в предыдущем параграфе*). От ≈ 200 км до 250—300 км возмущения концентрации электронов в ионосфере слабы (см. § 5.5, рис. 5.7), и здесь нелинейным самовоздействием волны можно пренебречь.

Рассмотрим эффекты дефокусировки для такой упрощенной модели [218]. Угол расходимости осесимметричного пучка θ изменяется за счет дефокусировки: $\theta = a \frac{df}{dz}$, где $f(z)$ описывается выражением (16.4). Имеем ($R_0 = R$, $a = \theta_0 R$, $z = R_1$, $|\beta| = \beta_0$):

$$\theta = \theta_0 \left[1 + \frac{R_1}{R} + \frac{R_1}{R} \frac{2\beta_0 I_0}{\theta_0^2} \right] \left[\left(1 + \frac{R_1}{R} \right)^2 + \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \frac{2\beta_0 I_0}{\theta_0^2} \right]^{-1/2}. \quad (17.4)$$

Здесь R — расстояние, пройденное лучом до входа в дефокусирующую область ионосферы,

$$R = \sqrt{R_e^2 \cos^2 \alpha + 2R_e z_0} - R_e \cos \alpha \quad (17.5)$$

(R_e — радиус Земли, α — угол между осью пучка и вертикалью в месте излучения, $z_0 \approx 100$ км), R_1 — расстояние, пройденное в области нелинейности, θ_0 — начальный угол расходимости пучка, а I_0 — плотность энергии в максимуме пучка на границе области нелинейности:

$$I_0 = \frac{E_0^2}{8\pi}, \quad \beta_0 I_0 = \frac{\beta_0^* E_0^2}{8\pi} \left(\frac{10^8}{\omega} \right)^4. \quad (17.6)$$

E_0 — амплитуда поля в максимуме пучка. Для параболического пучка

$$E_0^2 = 16W e^{-2K} / ca^2. \quad (17.7)$$

Здесь W — полная мощность излучения, K — поглощение волны в нижней ионосфере до 100—110 км (поглощением на больших высотах здесь пренебрегается), $a = R\theta_0$ — ширина пучка на высоте $z_0 = 100$ км в ионосфере. Сравнивая (17.7) с (2.2), находим, что при $z = 100$ км ($T = 210^\circ$, $\delta_0 = 2,5 \cdot 10^{-3}$)

$$\frac{E_0}{E_p} = \left(\frac{W e^{-2K}}{2 \cdot 10^3 \text{ кВт}} \right)^{1/2} \left(\frac{10 \text{ км}}{a} \right) \left(\frac{10^8 \text{ сек}^{-1}}{\omega} \right). \quad (17.8)$$

На рис. 17.2 показано изменение угла расходимости пучка (17.4) на траекториях 1 и 2, показанных на рисунке сверху,

*) Исключения составляют области вблизи каустики, где плотность энергии волны существенно возрастает.

в зависимости от мощности и направленности излучения. Видно, что если $\beta_0 I_0 / \theta_0^2 \gg 1$, то пучок может существенно дефокусироваться. При сильной дефокусировке $2\beta_0 I_0 R_1^2 / a^2 \gg 1$ максимальный угол расходимости пучка равен

$$\theta_{\max} = \sqrt{2\beta_0 I_0} = C_{\max} \left(\frac{10^8}{\omega} \right) \frac{E_0}{E_p}. \quad (17.9)$$

Здесь константа $C_{\max} = 0,14$ (день); $C_{\max} = 0,016$ (ночь). Учитывая ограничение $E_0 \leq E_p$, видим, что для широких пучков с $\theta_0 \gg C_{\max}(10^8/\omega)$ нелинейная дефокусировка незначительна, независимо от мощности пучка.

Расширение пучка приводит к изменению амплитуды сигнала в точке приема. Это видно из рис. 17.3, где показано изменение мощности принимаемого сигнала W_1 в зависимости от $I^* = 2\beta_0 I_0 / \theta_0^2 (2 + R_1/R)^2$; величина I^* пропорциональна мощности излучения W . Пунктиром изображен линейный рост W_1 на оси пучка. Сплошная кривая 1 — рост мощности сигнала на оси при учете нелинейной дефокусировки. Видно, что нелинейность

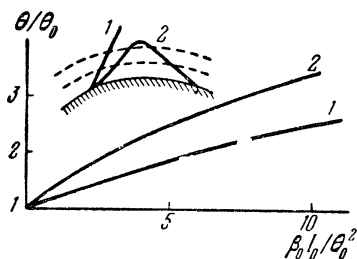


Рис. 17.2. Увеличение угла расходимости пучка.

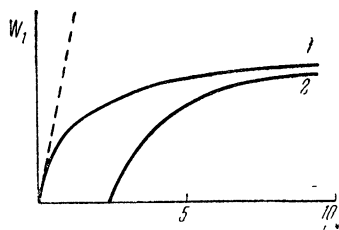


Рис. 17.3. Мощность принимаемого сигнала.

приводит к ослаблению роста W_1 . Иная картина для точек, удаленных от оси пучка на расстояние $\rho > \rho_0 = \theta_0(2R + R_1)$. В линейном приближении здесь сигнала нет. Он появляется лишь при достаточно большом значении W из-за нелинейного расширения пучка (кривая 2; $\rho = 2\rho_0$).

Вполне аналогичный характер носит и дефокусировка двумерных пучков. Отметим, что максимальный угол расходимости двумерного пучка

$$\theta_{\max} = 2 \sqrt{\beta_0 I_0} = \sqrt{2} C_{\max} \left(\frac{10^8}{\omega} \right) \frac{E_0}{E_p}, \quad (17.10)$$

т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше, чем у осесимметричных пучков. Если профиль пучка при дефокусировке опрокидывается, то в области пересечения присутствуют одновременно три луча, идущих по разным траекториям. Это приводит к осцилляциям интенсивности с характерным размером (16.21), т. е. должно приводить

в точке приема к сильным флуктуациям амплитуды сигнала федингового типа *).

Рассматриваемый здесь эффект дефокусировки усиливается в области каустики, где возрастает амплитуда поля E_0 , в особенности в области $\epsilon_0 \rightarrow 0$, где резонансно возрастает и величина β (17.2). В этих случаях, однако, нельзя ограничиться рассмотрением однородной среды, как это было сделано выше. Здесь не учитывалась также дефокусировка, вызванная рассеянием волны на неоднородностях ионосферы. В сильном поле $E_0 \geq E_p$ неоднородности могут увеличиться, что приведет к росту рассеяния. Этот механизм нелинейной дефокусировки качественно отличается от рассмотренного выше. Он может стать особенно существенным при возбуждении неустойчивости в возмущенной волной плазме.

Отметим, что дефокусировка может привести к захвату части энергии волны в ионосферный волновой канал; это существенно для сверхдального распространения коротких радиоволн [262].

17.2. Фокусировка пучков в слое F_2 .

В области максимума слоя F_2 и выше него ионосфера является фокусирующей средой. Важно, однако, что характерная длина L_T в этой области весьма велика (см. табл. 5.9). Благодаря этому существенны процессы переноса, так что связь возмущений диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ с амплитудой поля E_0 далеко не всегда носит локальный характер (12.2).

Если выполнены условия (4.62):

$$a < L_N \sin \alpha, \quad a > L_T \sin \alpha \quad (17.11)$$

(α — угол между осью пучка и направлением магнитного поля \mathbf{H}), то теплопроводность незначительна и возмущение концентрации плазмы описывается локальными формулами (5.37), (5.26). В этом случае, учитывая (12.2), (12.13), (17.1), находим:

$$\beta = \frac{4\pi\omega_0^2 k_T}{\omega^2 (1 - \omega_0^4/\omega^4) E_p^2},$$

$$\beta I_0 = 1,7 k_T \frac{\omega_0^2/\omega^2}{1 - \omega_0^4/\omega^4} \left(\frac{W e^{-2K}}{2 \cdot 10^3 \text{ квт}} \right) \left(\frac{10 \text{ км}}{a} \right)^2 \left(\frac{10^8 \text{ сек}^{-1}}{\omega} \right)^2 \left(\frac{2 \cdot 10^9 \text{ град}}{T_{e0}} \right) \left(\frac{10^{-4}}{\delta} \right).$$

(17.12)

*) Выделим в плоскости, ортогональной к оси пучка, направление, параллельное проекции магнитного поля \mathbf{H} . Отметим, что характерный размер осцилляций Δx (16.21) невелик: обычно $\Delta x \ll L_N, L_T$. Благодаря этому в направлении, параллельном проекции \mathbf{H} , нелинейность должна слабо сказываться на структуре осцилляций; они определяются интерференцией лучей. В направлении же, ортогональном к проекции \mathbf{H} , нелинейность более существенна.

Здесь W — полная мощность излучения, K — поглощение волны в нижней ионосфере. При численной оценке в (17.12) принималось, что пучок параболический. Значения параметра βI_0 для станций различной частоты, мощности и радиуса пучка на высоте $z \approx 300$ км приведены в табл. 17.1. При оценках ионосфера в области F -слоя считалась однородной с $N = 10^6$, $T_{e0} = 2000^\circ$,

Таблица 17.1
САМОВОЗДЕЙСТВИЕ УЗКИХ ПУЧКОВ В СЛОЕ F_2

	$\dot{\omega} = 10^8 \text{ сек}^{-1}$			$\dot{\omega} = 10^9 \text{ сек}^{-1}$		$\dot{\omega} = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$	
$W, \text{ кВт}$	10^2	10^3	10^4	10^3	10^4	10^3	10^4
$a, \text{ км}$	10	10	10	3,1	3,1	1	0,31
βI_0	$3 \cdot 10^{-2}$	0,3	3	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$R_H, \text{ км}$	40	13	4	$1,3 \cdot 10^2$	40	$1,3 \cdot 10^3$	40
$\Delta x, \text{ м}$	120	30	10	120	40	400	40
$\beta_1 \mathcal{H}_0$	$7 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-2}$	0,7	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-7}$
$R_{H1}, \text{ км}$	80	25	8	350	110	$6 \cdot 10^3$	350

$\delta = 10^{-4}$, $k_T = T_{e0}/(T_{e0} + T_{i0}) = 0,6$. Величина $R_H = a/\sqrt{2\beta I_0}$ в табл. 17.1 — это «нелинейная длина», — характерный размер в направлении распространения пучка, на котором становится существенной нелинейная самофокусировка (см. §§ 13, 14). Естественно, что эффекты самофокусировки могут быть значительны, только если характерный размер слоя ионосферной плазмы $\Delta z \approx 200$ км больше, чем длина R_H . Из таблицы видно, что для достаточно мощных и узких пучков условия фокусировки выполняются. Это означает, что для таких пучков справедливы выводы, полученные в §§ 13—15; пучки фокусируются, возникают особенности на профиле интенсивности, затем появляется область пересечения лучей, где интенсивность сильно осциллирует вследствие интерференции. Характерный размер для осцилляций и ширины каналов $\Delta x = \lambda/\sqrt{\beta I_0}$ также представлен в табл. 17.1.

Важно, что эффекты самофокусировки значительны только в случае достаточно узких пучков с $a \leq 10$ км. В то же время длина L_T на высотах 300—500 км, как видно из табл. 5.9, порядка 30—100 км. Это означает, что условия локальности (17.11) выполнены только для пучков, распространяющихся практически вдоль магнитного поля, $\alpha \rightarrow 0$. В общем же случае важны процессы переноса. При этом возмущения ΔN и ΔT_e определяются сложными формулами (5.32) — (5.34).

Более существенным для верхней ионосферы является поэтому предельный случай, обратный (4.62), — случай сильной нелокальности, когда

$$a \ll L_N \sin \alpha, \quad a \ll L_T \sin \alpha. \quad (17.13)$$

В этом случае возмущения концентрации определены по-прежнему формулой (5.37), а возмущения температуры — формулой (5.36); они уже не несут локального характера. Заменяя локальный член (12.2) возмущениями (5.37), (5.36) в уравнениях (12.12), приходим вместо (12.12) к следующим нелокальным уравнениям нелинейной геометрической оптики:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x I) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y I) = 0, \quad (17.14)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad (17.15)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = 0. \quad (17.16)$$

Здесь ось x направлена параллельно проекции магнитного поля \mathbf{H} на плоскость xy , ортогональную к оси пучка (ось z), ось y ортогональна к плоскости zH . Далее:

$$\mathcal{K} = \int I dx, \quad (17.17)$$

$$\beta_1 = \beta / 2L_T \sin \alpha. \quad (17.18)$$

Чтобы найти решение уравнений (17.14) — (17.16), проинтегрируем (17.14) по dx . Получим:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}(u_y \mathcal{K}) = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = 0. \quad (17.19)$$

Система уравнений (17.19) тождественна уравнениям нелинейной геометрической оптики для двумерного пучка (13.2). Далее, решение уравнения (17.15) есть, очевидно:

$$u_x(x, z) = u_{x0} [x - u_x z]. \quad (17.20)$$

Наконец, при известных функциях $u_x(x, z)$ и $u_y(y, z)$ решение уравнения (17.14) легко находится методом характеристик:

$$I(x, z) = I_0(x, z) \exp \left\{ - \int_{z_0}^z dz' \left[\frac{\partial u_x(z', x(z'))}{\partial x} + \frac{\partial u_y(z', y(z'))}{\partial y} \right] \right\}. \quad (17.21)$$

Здесь характеристики $x(z)$ и $y(z)$ определены уравнениями

$$\frac{dx}{dz} = u_x, \quad \frac{dy}{dz} = u_y \quad (17.22)$$

с граничными условиями $x = x_0$, $y = y_0$ при $z = 0$. Таким образом, задача сводится фактически к решению уравнений двумерного пучка (17.19).

Параметр β_1 для верхней ионосферы, определенный согласно (17.12), (17.18), имеет вид:

$$\beta_1 = \frac{2\pi\omega_0^2 k_T}{\omega^2 L_T \sin \alpha (1 - \omega_0^4/\omega^4) E_p^2} = \beta_{10} f(z), \quad (17.23)$$

где

$$\beta_{10} = 14 \left(\frac{10^8 \text{ сек}^{-1}}{\omega} \right)^4 \left(\frac{10^{-4}}{\delta} \right) \frac{k_T}{\sin \alpha (1 - \omega_0^4/\omega^4)} \frac{\text{см}^2 \text{ град}}{(\text{вольт})^2}, \quad \bar{f}(z) = \frac{N_0}{L_T T_{e0}}.$$

Среднее значение $\bar{f}(z)$ в слое F_2 ионосферы:

$$\bar{f} \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-4} \text{ град}^{-1} (\text{день}), \quad \bar{f} \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-4} \text{ град}^{-1} (\text{ночь}). \quad (17.24)$$

Эффективная толщина фокусирующего слоя порядка 200 км.

Таким образом, вдали от резонанса ($\omega_0^4/\omega^4 \ll 1$) можно использовать приближение (17.24). В этом приближении ионосфера (в направлении y , ортогональном к плоскости zH) подобна однородному фокусирующему слою с $\beta_1 = \beta_{10} \bar{f}$. Решение уравнений (17.19) в этом слое совершенно аналогично решениям для двумерного пучка, исследованным в § 13.

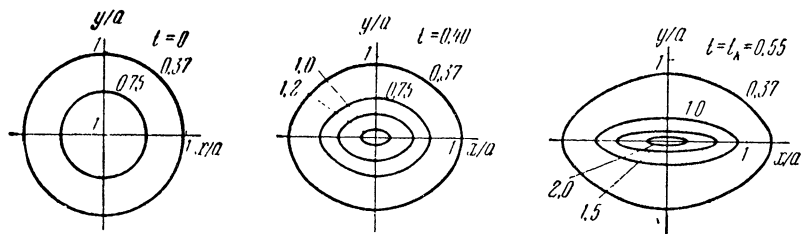


Рис. 17.4. Распределение интенсивности в плоскости, ортогональной к оси пучка.

Рассмотрим для примера гауссовский осесимметричный пучок, приходящий на нижнюю границу фокусирующей зоны ($z = z_0$):

$$I(x, y)|_{z=z_0} = I_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (17.25)$$

$$u_x|_{z=z_0} = \frac{x}{R_0}, \quad u_y|_{z=z_0} = \frac{y}{R_0}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{H}|_{z=z_0} = I_0 a \sqrt{\pi} \exp(-y^2/a^2) = \mathcal{H}_0 \exp(-y^2/a^2), \quad (17.26)$$

и в переменных (13.1)

$$t = \sqrt{\beta_1 \mathcal{H}_0} (z - z_0)/a, \quad u = u_y / \sqrt{\beta_1 \mathcal{H}_0}, \quad \omega = \mathcal{H}/\mathcal{H}_0 \quad (17.27)$$

решение уравнений (17.19) с граничными условиями (17.25), (17.26) тождественно рассмотренному в § 13.4. Для $u(x, z)$ и $I(x, y, z)$ при этом получаем из (17.20), (17.21), (17.25):

$$u(x, z) = \frac{x}{R_0 + z - z_0}, \quad I(x, y, z) = \frac{R_0 I_0 \omega(y, z)}{R_0 + z - z_0} \exp\left\{-\frac{R_0^2 x^2}{a^2 (R_0 + z - z_0)^2}\right\}, \quad (17.28)$$

где функция ω показана на рис. 13.8 (стр. 168).

Изменение структуры параллельного ($R_0 \rightarrow \infty$) пучка по мере проникновения его в глубину плазмы согласно (17.28) показано на рис. 17.4. Здесь приведены сечения пучка в плоскости xy , ортогональной к оси пучка z . На рисунке представлены кривые $I/I_0 = \text{const}$ (значения констант указаны на рисунке) для различных значений параметра t . Видно, что по мере проникновения в нелинейную среду пучок теряет первоначальную осевую симметрию: он сплющивается в направлении y (ортогональном к плоскости zH) и вытягивается в направлении x (параллельном проекции H на плоскость xy). Интенсивность на оси пучка нарастает. Она достигает максимума $I_{\text{max}}/I_0 = 2,2$ при $t = t_k = 0,55$, т. е. $z_k = z_0 + 0,55a/\sqrt{\beta_1 \mathcal{K}_0}$, когда на линии $y = 0$ возникает особенность (ср. § 13.4). В этом месте лучи пучка начинают пересекаться, и при $z > z_k$ в окрестности линии $y = 0$ развивается осцилляторная структура. Характерная ширина осцилляций $\Delta y = \lambda/\sqrt{\beta_1 \mathcal{K}_0}$.

Значения параметра $\beta_1 \mathcal{K}_0$ и характерной нелинейной длины $R_{\text{нл}} = a/\sqrt{2\beta_1 \mathcal{K}_0}$ для пучков волн различной частоты, мощности и начальной ширины приведены в табл. 17.1. Для эффективной фокусировки в ионосфере необходимо, чтобы величина $R_{\text{нл}}$ была меньше, чем $\Delta z \approx 200$ км. Сравнивая значения $\beta_1 \mathcal{K}_0$ с $\beta_1 I_0$ и длины $R_{\text{нл}}$ с $R_{\text{н}}$, видим, что учет нелокальности хотя и ослабляет, но не подавляет самофокусировки узких пучков в F -слое ионосферы.

Заметим, что в резонансной области $\omega \approx \omega_0$, как видно из (17.12), (17.23), эффекты самофокусировки усиливаются. С другой стороны, в той же резонансной области $\omega \approx \omega_0$ могут усилиться под действием поля волны флуктуации плотности в ионосфере, рассеивающие волну и тем самым препятствующие фокусировке (§ 5.7).

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАДИОВОЛН

Возмущения, вызываемые в плазме мощной радиоволной, сказываются и на других волнах, распространяющихся в возмущенной области. Это приводит к взаимодействию радиоволн. Характерные явления взаимодействия радиоволн в ионосфере будут рассмотрены в настоящей главе.

Если мощная волна модулирована по амплитуде низкой частотой Ω , то промодулированными оказываются возмущения, вызываемые ею в плазме, а, следовательно, и другие волны, прошедшие через возмущенную область. Это явление называют обычно кроссмодуляцией (перекрестной модуляцией) или люксембург-горьковским эффектом. Оно наблюдается при распространении радиоволн в ионосфере и имеет практическое значение для радиовещания в диапазоне средних волн [2, 140—142, 148—154]. Близким к кроссмодуляции по своему характеру оказывается и явление взаимодействия коротких импульсов, используемое для экспериментального исследования ионосферы.

Мощные немодулированные радиоволны также возмущают плазму; благодаря этому изменяются поглощение и фаза других радиоволн, распространяющихся в возмущенной области. Возмущение, вызываемое мощным пучком радиоволн, приводит к образованию в плазме искусственной неоднородности, которая может, например, фокусировать другие радиоволны. Наконец, помимо постоянных во времени возмущений в плазме возникают и переменные возмущения, меняющиеся с частотой, кратной частоте волны. В силу этого при распространении других радиоволн в среде должны возникать волны с комбинационными частотами.

§ 18. Кроссмодуляция*18.1. Слабые волны.*

Чтобы рассчитать величину эффекта кроссмодуляции, необходимо вначале определить величину низкочастотных возмущений, вызываемых в плазме мощной волной (волной E_1), а затем уже найти, как эти возмущения скажутся на другой волне (волне E_2), распространяющейся в возмущенной области. Здесь будет вначале рассмотрен случай изотропной плазмы и относи-

тельно слабой возмущающей волны ($E_{10} \ll E_p$), когда ее самодействие не существенно [2, 138—142].

На границе плазмы (при $z = 0$) амплитуда поля возмущающей волны

$$E_{10} = E_1(0) (1 + \mu_0 \cos \Omega t). \quad (18.1)$$

В плазме в точке z в приближении геометрической оптики

$$E_1(z) = \frac{E_1(0)}{\sqrt[4]{\epsilon_1(z)}} e^{-K_1} (1 + \mu_0 \cos \Omega t), \quad (18.2)$$

где $\epsilon_1(z)$ — диэлектрическая проницаемость для волны E_1 в точке z ,

$$K_1(z) = \frac{\omega}{c} \int_0^z \kappa_1(z) dz$$

— поглощение волны в слое*). Вызванные действием поля (18.2) периодически меняющиеся с низкой частотой Ω возмущения температуры электронов T_e и частоты столкновений ν_e в слабо ионизованной плазме были вычислены в § 8.1 (формула (8.5)):

$$\frac{\Delta_{\Omega} T_e}{T_{e0}} = \frac{2\mu_0 E_1^2(0) e^2}{3T_{e0} m \delta_0 (\omega^2 + \nu_{e0}^2) \sqrt{\epsilon_1(z)}} e^{-2K_1(z)} \times \\ \times \left\{ \frac{\delta_0 \nu_{e0} \cos(\Omega t - \varphi_{\Omega})}{V(\delta_0 \nu_{e0})^2 + \Omega^2} + \frac{\mu_0 \delta_0 \nu_{e0} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega})}{4V(\delta_0 \nu_{e0})^2 + 4\Omega^2} \right\}, \quad (18.3)$$

$$\Delta_{\Omega} \nu_e = \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta_{\Omega} T_e, \quad \text{tg } \varphi_{\Omega} = \frac{\Omega}{\delta_0 \nu_{e0}}, \quad \text{tg } \varphi_{2\Omega} = \frac{2\Omega}{\delta_0 \nu_{e0}}. \quad (18.4)$$

Поле E_1 слабое, поэтому возмущения $\Delta_{\Omega} T_e$ и $\Delta_{\Omega} \nu_e$ малы: $\Delta_{\Omega} T_e \ll T_{e0}$, $\Delta_{\Omega} \nu_e \ll \nu_{e0}$.

Амплитуда любой другой слабой волны, которую для простоты считаем немодулированной, в точке z , разумеется, также определяется выражением

$$E_2(z) = \frac{E_2(0)}{\sqrt[4]{\epsilon_2(z)}} e^{-K_2(z)}, \quad K_2(z) = \frac{\omega_2}{c} \int_0^z \kappa_2 dz, \quad (18.5)$$

где $\epsilon_2(z)$ — диэлектрическая проницаемость, κ_2 — коэффициент поглощения волны E_2 .

Коэффициент поглощения зависит от частоты соударений. Поэтому при распространении волны E_2 в возмущенной области плазмы часть коэффициента поглощения периодически

*) Здесь принято, что частота модуляции достаточно низка: $\Omega \ll c/\Delta z$, так что сдвигом фазы модуляции за время распространения волны в возмущенной области Δz можно пренебречь. В ионосфере, принимая $\Delta z \sim 10$ км, видим, что это условие выполнено лишь при $\Omega \ll 10^4 - 10^5$.

меняется во времени. Выделяя эту изменяющуюся во времени часть κ_2 ,

$$\kappa_2 = \kappa_2(v_{e0}) + \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \Delta \Omega v_e, \quad (18.6)$$

и подставляя (18.6) в (18.5), находим, что амплитуда волны, прошедшей сквозь возмущенный слой плазмы по пути S , может быть представлена в виде:

$$E_2 = E_2(0) \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int_S \kappa_2 ds \right\} \left\{ 1 - \frac{\omega_2}{c} \int_S \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta \Omega T_e ds \right\}, \quad (18.7)$$

где $\Delta \Omega T_e$ — переменная часть возмущений электронной температуры в плазме, определенная формулой (18.3) *). Отсюда видно, что волна E_2 после прохождения возмущенного слоя оказывается промодулированной по амплитуде частотами Ω и 2Ω , т. е. имеет вид:

$$E_2 = C \{ 1 - \mu_\Omega \cos(\Omega t - \varphi_\Omega) - \mu_{2\Omega} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \}. \quad (18.8)$$

При этом глубина и фаза кроссмодуляции определяются выражениями:

$$\mu_\Omega = \frac{\omega_2}{c} \int_S \frac{2\mu_0 e^2 E_1^2(0)}{3m \delta_0 (\omega^2 + v_{e0}^2)} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \frac{\delta_0 v_{e0}}{\sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}} \frac{e^{-2K_1(s)}}{\sqrt{\epsilon_1(z)}} ds, \quad (18.9)$$

$$\mu_{2\Omega} = \frac{\omega_2}{4c} \int_S \frac{2\mu_0^2 e^2 E_1^2(0)}{3m \delta_0 (\omega^2 + v_{e0}^2)} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \frac{\delta_0 v_{e0}}{\sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + 4\Omega^2}} \frac{e^{-2K_1(s)}}{\sqrt{\epsilon_1(z)}} ds, \quad (18.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_\Omega = \Omega / \delta_0 v_{e0}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{2\Omega} = 2\Omega / \delta_0 v_{e0}. \quad (18.11)$$

Чтобы найти окончательные выражения для глубины кроссмодуляции, необходимо еще провести в формулах (18.9), (18.10) интегрирование по ds . Примем при этом вначале, что обе волны E_1 и E_2 падают на плазму нормально (т. е. что нормали к фронтам волн направлены по оси z , вдоль которой

*) В выражении (18.7) положено

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int_S \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta \Omega T_e ds \right\} = \\ = 1 - \frac{\omega_2}{c} \int_S \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta \Omega T_e ds. \end{aligned}$$

Поэтому формула (18.7) справедлива, только если глубина кроссмодуляции существенно меньше единицы.

изменяются свойства плазмы). Возмущенным тогда является слой плазмы, расположенный от начала слоя ($z = 0$) до точки отражения волны $E_1(z = z_{01})$. Эту точку будем для простоты считать лежащей значительно ниже точки отражения волны E_2 , так что в возмущенной области $\epsilon_2(s) = 1$. Тогда, учитывая, что согласно (7.5)

$$\kappa_2(s) = \kappa_2(z) = \frac{2\pi e^2 N(z) v_{e0}}{m\omega_2(\omega_2^2 + v_{e0}^2) \sqrt{\epsilon_2(z)}},$$

находим:

$$\frac{\omega_2}{c} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \frac{1}{\omega_1^2 + v_{e0}^2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1(z)}} = \frac{\omega_2^2 - v_{e0}^2}{(\omega_2^2 + v_{e0}^2)^2} \frac{\omega_1}{c v_{e0}} \kappa_1(z), \quad (18.12)$$

где $\kappa_1(z)$ — показатель поглощения волны E_1 .

Примем теперь также, что температура электронов плазмы T_{e0} и частота соударений v_{e0} в возмущенной области не изменяются с изменением z (для высокочастотных волн $\omega_2^2 \gg v_{e0}^2$ последнее предположение не является необходимым). Тогда, подставляя (18.12) в (18.9) и учитывая, что $\frac{\omega_1}{c} \kappa_1 = \frac{dK_1(z)}{dz}$ и что волну вплоть до точки ее отражения можно с достаточной степенью точности представить в виде суммы падающей и отраженной волн, легко проводим интегрирование по ds :

$$\begin{aligned} \mu_\Omega &= \int_S \frac{2\mu_0 e^2 E_1^2(0)}{3m\delta_0} \frac{\delta_0 v_{e0}}{\sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}} \frac{\omega_2}{c} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \frac{1}{\omega_1^2 + v_{e0}^2} \frac{e^{-2K_1(s)}}{\sqrt{\epsilon_1(z)}} ds = \\ &= \frac{2\mu_0 e^2 E_1^2(0)}{3m \sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \frac{\omega_2^2 - v_{e0}^2}{(\omega_2^2 + v_{e0}^2)^2} \times \\ &\times \left[\int_0^{z_{01}} \frac{\omega_1}{c} \kappa_1(z) e^{-2K_1(z)} dz + e^{-2K_1(z_{01})} \int_0^{z_{01}} \frac{\omega_1}{c} \kappa_1(z) e^{-2K_1(z)} dz \right] = \\ &= \frac{\mu_0 e^2 E_1^2(0) (\omega_2^2 - v_{e0}^2)}{3m (\omega_2^2 + v_{e0}^2)^2 \sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \left[1 - e^{-2K_1^0} \right]. \quad (18.13) \end{aligned}$$

Здесь принято, что обе волны распространяются вертикально;

$$K_1^0 = 2K_1(z_{01}) = 2 \frac{\omega_1}{c} \int_0^{z_{01}} \kappa_1(z) dz$$

— полное поглощение волны E_1 в плазме. В формуле (18.13) не учтено, что обычно не только падающий, но и отраженный луч волны E_2 проходит через возмущенную область; это приводит, естественно, к удвоению глубины кроссмодуляции. Для глубины кроссмодуляции на частоте 2Ω получается

аналогичное (18.13) выражение; глубина кроссмодуляции на второй гармонике всегда существенно меньше, чем μ_Ω :

$$\mu_{2\Omega} = \frac{\mu_0}{4} \sqrt{\frac{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}{(\delta_0 v_{e0})^2 + 4\Omega^2}} \mu_\Omega. \quad (18.14)$$

Формулы (18.13), (18.14) нетрудно обобщить на случай наклонного падения волн E_1 и E_2 на плазму, воспользовавшись теоремами о связи поглощения при наклонном падении с поглощением при нормальном падении ([1], § 29). Так, если угол падения волны E_2 на слой равен ψ_2 , то нужно умножить μ_Ω , $\mu_{2\Omega}$ в (18.13), (18.14) на $\cos \psi_2$ и заменить ω_2 на $\omega_2 \cos \psi_2$. При падении волны E_1 под углом ψ_1 в случае $\omega_1^2 \gg v_{e0}^2$ достаточно умножить μ_Ω , $\mu_{2\Omega}$ на $\cos \psi_1$. Таким образом, например, выражение для μ_Ω с учетом прохождения отраженного луча E_2 через возмущенную область при $v_e = v_{e0} \sqrt{T_e/T_{e0}}$ запишется в виде:

$$\mu_\Omega = \frac{\mu_0 e^2 E_1^2(0)}{3T_{e0} m} \frac{\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 - v_{e0}^2}{(\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 + v_{e0}^2)^2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \frac{v_{e0}}{\sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}} [1 - e^{-2K_1^0}]. \quad (18.15)$$

Из формул (18.15), (18.13) видно, что глубина кроссмодуляции на частоте Ω пропорциональна глубине модуляции возмущающей волны и ее мощности. Глубина кроссмодуляции при $\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 \gg v_{e0}^2$ возрастает также с ростом угла падения волны

E_2 на слой плазмы. Это справедливо, разумеется, лишь до тех пор, пока точка отражения волны E_2 продолжает оставаться выше точки отражения волны E_1 ; в противном случае с изменением угла ψ_2 существенно меняются и размеры области взаимодействия. Из (18.13), (18.15) видно также, что глубина кроссмодуляции максимальна при низких частотах модуляции $\Omega \ll \delta_0 v_{e0}$. При $\Omega \gg \delta_0 v_{e0}$ она убывает пропорционально $\delta_0 v_{e0}/\Omega$. Фаза кроссмодуляции (18.11) невелика при малых значениях $\Omega/\delta_0 v_{e0}$; с ростом $\Omega/\delta_0 v_{e0}$ она возрастает до $\pi/2$. Зависимость глубины и фазы кроссмодуляции от $\Omega/\delta_0 v_{e0}$ представлена на рис. 18.1; точки — результаты эксперимента [141, 149].

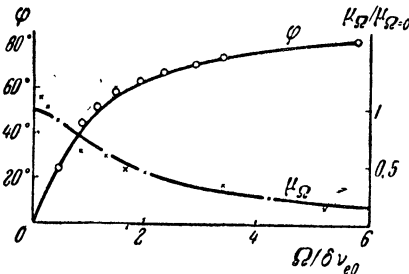


Рис. 18.1. Глубина и фаза кроссмодуляции.

Зависимость глубины кроссмодуляции от частоты возмущающей волны ω_1 определяется множителем

$$F(K_1^0) = 1 - e^{-2K_1^0}, \quad (18.16)$$

Если возмущающая волна значительно поглощается в области взаимодействия, $K_1^0 \gg 1$, то фактор F всегда близок к единице, и глубина кроссмодуляции не зависит от частоты ω_1 . В этом случае осуществляется как бы полная кроссмодуляция. Если, напротив, волна E_1 лишь незначительно поглощается в плазме, $K_1^0 \ll 1$, то глубина кроссмодуляции пропорциональна ее полному поглощению K_1^0 . Зависимость глубины модуляции от частоты ω_2 имеет вид

$$\mu_\Omega \sim \frac{\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 - v_{e0}^2}{(\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 + v_{e0}^2)^2}. \quad (18.17)$$

Выше предполагалось, что точка отражения волны E_2 лежит значительно выше, чем точка отражения возмущающей волны E_1 . Формула (18.13) справедлива и в том случае, когда это условие не выполнено, — несколько меняется только вид множителя $F(K_1^0)$ (18.16). Рассмотрим, например, обратный случай, когда точка отражения волны E_2 лежит значительно ниже точки отражения волны E_1 . Полное поглощение волны E_2 в плазме при $\omega_2^2 \gg v_{e0}^2$ (включая точку отражения z_{02}) дается формулой ([1], § 17):

$$K_2 = \frac{2\omega_2}{c} \int_0^{z_{02}} \frac{2\pi\sigma_2}{\omega_2 \sqrt{\epsilon_2}} dz = \frac{2\omega_2}{c} \left[\int_0^{z_{02}} \frac{2\pi\sigma_2}{\omega_2} dz + \int_0^{z_{02}} \frac{2\pi\sigma_2}{\omega_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} - 1 \right) dz \right]. \quad (18.18)$$

Здесь z_{02} — точка отражения волны E_2 ; σ_2 , ϵ_2 — проводимость и диэлектрическая проницаемость плазмы для волны E_2 . Первый член тождествен (18.16). Поэтому те же преобразования (18.12), (18.13) приводят и теперь к выражениям (18.13) для глубины кроссмодуляции μ_Ω , $\mu_{2\Omega}$, только фактор $F(K_1^0) = 1 - e^{-2K_1^0}$ заменяется на

$$F_1(K_1^0) = 1 - e^{-2K_1^0} + f(K_1^0), \quad (18.19)$$

где

$$f(K_1^0) = \frac{2\omega_1}{c} \int_0^{z_{02}} \kappa_1 e^{-2K_1^0} \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2}} \right) dz, \quad K_1^0 = \frac{\omega_1}{c} \int_0^{z_{02}} \kappa_1 dz. \quad (18.20)$$

Существенно, что K_1^0 теперь — полное поглощение волны E_1 до точки отражения волны E_2 . Влиянием отраженного луча E_1 на кроссмодуляцию для простоты здесь пренебрегается. Вид функции $f(K_1^0)$ несколько зависит от характера изменения плотности $N(z)$ в окрестности точки отражения волны z_{02} . Она

представлена на рис. 18.2 для различной зависимости N от z : $N = \left(\frac{z}{z_{02}}\right)^n N_0$, где $n = 1$, $n = 3$, $n \gg 1$. Там же изображен фактор $F_1(K_1^0)$ для $n = 1$. Из рисунка видно, что при $K_1^0 \sim 1$ множитель $F_1(K_1^0)$ в рассматриваемом случае достигает максимума: $F_{\max} \approx 1,6$. Высота максимума несколько меняется в зависимости от вида $N(z)$. Пунктиром на рис. 18.2 изображен фактор $F = 1 - e^{-2K_1^0}$, который, как было показано, справедлив в обратном предельном случае ($z_{02} > z_{01}$). Существенно,

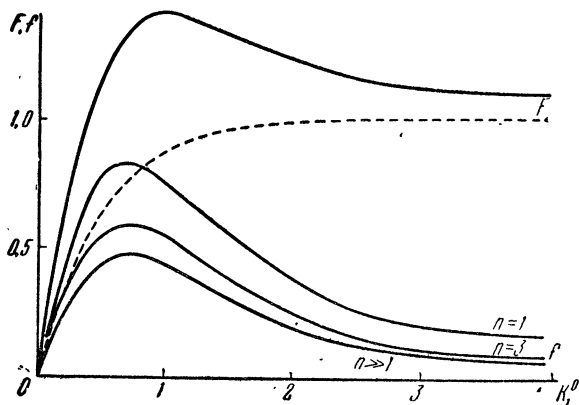


Рис. 18.2. Функции $f(K_1^0)$ и $F(K_1^0)$.

что различие между предельными функциями F и F_1 в общем невелико.

Здесь рассмотрена лишь кроссмодуляция по амплитуде. Волна E_2 может приобрести и фазовую модуляцию [144].

18.2. Сильная возмущающая волна.

Выше предполагалось, что возмущающая волна — слабая, $E_1^2(0) \ll E_p^2$. Если это условие не выполнено, то при расчете эффекта кроссмодуляции необходимо учитывать самовоздействие волны E_1 , приводящее к изменению амплитуды волны, глубины и фазы ее модуляции [143]. Как и ранее, нам нужно определить вначале возмущения, вызываемые в плазме волной E_1 , а затем уже найти, как они сказываются на другой волне E_2 , распространяющейся в возмущенной области.

Возмущения, вызываемые в плазме сильной модулированной по амплитуде волной E_1 , с учетом ее самовоздействия были определены ранее в § 8.2. Необходимо, таким образом, установить лишь, как эти возмущения влияют на волну E_2 .

Рассмотрим прежде всего случай низкой частоты модуляции, $\Omega \ll \delta v_{e0}$. Принимая, что волна E_2 — слабая, имеем:

$$E_2(z) = \frac{E_2(0)}{\sqrt[4]{\epsilon_2(z)}} \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int_S \kappa_2 ds \right\} = \\ = \frac{E_2(0)}{\sqrt[4]{\epsilon_2(z)}} \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int_S \kappa_{20} ds \right\} P_{12}. \quad (18.21)$$

Здесь κ_2 — коэффициент поглощения волны E_2 в возмущенной плазме (7.5), κ_{20} — тот же коэффициент в невозмущенной плазме; P_{12} — множитель, показывающий, как возмущающая волна E_1 влияет на волну E_2 . Учтем, что согласно (7.13) в слабо ионизованной плазме при соударениях с молекулами (твердыми шариками)

$$\kappa_2 = \kappa_{20} \frac{\tau(\omega_2^2 + v_{e0}^2)}{\omega_2^2 + v_{e0}^2 \tau^2}, \quad (18.22)$$

где $\tau = \sqrt{T_e(E_1)/T}$ — возмущение температуры электронов волной E_1 , определенное формулой (7.17). Следовательно,

$$P_{12} = \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int_S \kappa_{20} \left[\frac{\tau(\omega_2^2 + v_{e0}^2)}{\omega_2^2 + v_{e0}^2 \tau^2} - 1 \right] ds \right\}. \quad (18.23)$$

Множитель P_{12} зависит от амплитуды волны E_1 на границе плазмы $E_1(0)$. Если амплитуда $E_1(0)$ модулирована низкой частотой Ω , то модулированным оказывается и множитель P_{12} . Следовательно, он и определяет кроссмодуляцию волны E_2 . Заменяя в (18.23), согласно (18.12), $\frac{\omega_2}{c} \kappa_{20}$ на $\frac{\omega_1}{c} \kappa_{10} \frac{\omega_1^2 + v_{e0}^2}{\omega_2^2 + v_{e0}^2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$ и перейдя к интегрированию по $d\tau$ (используя соотношение (7.16) при $N \neq N(\tau)$), получим:

$$P_{12} = \exp \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \left[\frac{\omega_1^2 + v_{e0}^2}{\omega_2^2 + v_{e0}^2} \ln \frac{\tau + 1}{\tau_0 + 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\omega_1^2 + v_{e0}^2}{2(\omega_2^2 + v_{e0}^2)} \right) \ln \frac{\omega_2^2 + v_{e0}^2 \tau^2}{\omega_2^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2} + \frac{2v_{e0}^2(\tau_0 - \tau)}{\omega_2^2 + v_{e0}^2} \right] \right\}. \quad (18.24)$$

Здесь принято для простоты, что обе волны распространяются нормально к слою; $\tau_0 = \tau[E_{10}]$ — значение $\tau(E_1)$ в начале слоя плазмы ($z = 0$). Поле E_{10} — амплитуда возмущающей волны на границе плазмы; она меняется во времени согласно (18.1). Далее, $\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$ — среднее значение отношения показателей преломления в области взаимодействия.

Простое выражение для глубины кроссмодуляции μ_Ω получается отсюда при малом значении μ_0 . Действительно, как и при выводе формул (8.12), (8.14), находим:

$$\mu_\Omega = \mu_0 \left[\frac{\partial P_{12}}{\partial E_1(0)} \frac{E_1(0)}{P_{12}} \right]_{\mu_0=0} = \mu_0 \frac{\omega_1^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2}{\tau_0} \left\{ \frac{\tau_0}{\omega_2^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2} - \frac{\tau}{\omega_2^2 + v_{e0}^2 \tau^2} \right\}. \quad (18.25)$$

Отношение $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ здесь положено равным единице*).

Выражение (18.25) определяет, прежде всего, зависимость глубины кроссмодуляции μ_Ω от амплитуды (или мощности W) возмущающей волны. Строго линейный рост μ_Ω в зависимости от мощности излучающей станции W получается при этом только в случае слабого возмущающего поля $E_1^2(0) \ll E_p^2$. Действительно, например, как ясно из (18.25), при высоких частотах $\omega_1^2 \gg v_{e0}^2 \tau_0^2$, $\omega_2^2 \gg v_{e0}^2 \tau_0^2$

$$\mu_\Omega = \mu_0 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}. \quad (18.26)$$

Глубина кроссмодуляции (18.26) при высоких частотах ω_1 , ω_2 не может превзойти величины $\mu_0 \omega_1^2 / \omega_2^2$ при любой мощности возмущающей станции (кривая 1 на рис. 18.3). В случае, если

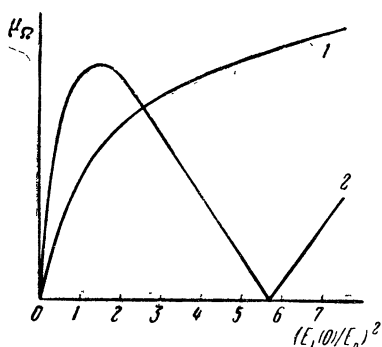


Рис. 18.3. Глубина кроссмодуляции в случае сильной возмущающей волны.

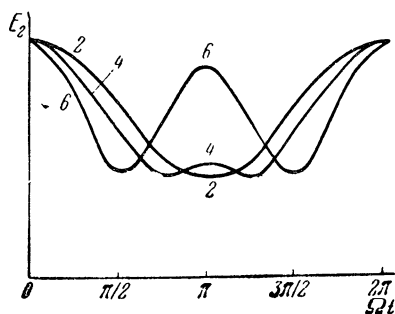


Рис. 18.4. Искажение формы модуляции. Возле кривых приведены значения $(E_1(0)/E_p)^2$.

частоту возмущающей волны E_1 нельзя считать высокой ($\omega_1^2 \ll v_{e0}^2 \tau_0^2$), рост μ_Ω в зависимости от W также слабее линейного. Однако особенно ярко нелинейная зависимость μ_Ω от W проявляется в условиях, когда нельзя считать высокой частоту

* Здесь учитывается взаимодействие волн лишь на пути волны E_2 в одну сторону. Если и отраженный луч проходит через возмущенную область, то выражение (18.25) для глубины кроссмодуляции следует, естественно, умножить на 2.

волны E_2 ($v_{e0}^2 \leq \omega_2^2 \leq v_{e0}^2 \tau_0^2$). В этом случае, как видно из кривой 2 на рис. 18.3, μ_Ω может убывать с ростом W и даже обращаться в нуль. При этом, естественно, главную роль начинает играть кроссмодуляция на частоте 2Ω , так что сам характер модуляции волны претерпевает сильные изменения.

Это можно видеть из рис. 18.4, на котором показано, как в этих условиях изменяется форма кроссмодуляции в зависимости от мощности возмущающей волны (здесь $\omega_2^2 = 2v_{e0}^2$, $\omega_1^2 = 2v_{e0}^2$, $K > 1$, $\Omega \ll \delta v_{e0}$, $\mu_0 = 1/2$; расчет проведен по формуле (18.24), значения $E_1^2(0)/E_p^2$ указаны на рисунке). Видно, что при $E_1^2(0)/E_p^2 = 6$ частота кроссмодуляции фактически равна 2Ω . Характер искажений модуляции в этом случае подобен возникающим при «перемодуляции» волн.

Формула (18.25) получена при условии, что μ_0 мало ($\mu_0 \ll 1$). В общем случае, когда μ_0 не мало, глубина кроссмодуляции определяется с помощью множителя P_{12} (18.24):

$$\mu_\Omega = \frac{P_{12} [E_1(0) (1 + \mu_0)] - P_{12} [E_1(0) (1 - \mu_0)]}{P_{12} [E_1(0) (1 + \mu_0)] + P_{12} [E_1(0) (1 - \mu_0)]}. \quad (18.27)$$

Результаты расчета μ_Ω по формуле (18.27) и с помощью простых формул (18.25) расходятся незначительно. Формула (18.25) может быть, следовательно, с хорошей точностью использована при любом значении μ_0 . Однако при больших значениях μ_0 и $E_1^2(0)/E_p^2$ сильно искажается форма кроссмодуляции (см. рис. 18.4). Выше всюду предполагалось, что глубина кроссмодуляции мала, $\mu_\Omega \ll 1$, так что

$$\exp\{-a \cos(\Omega t - \varphi_\Omega)\} = 1 - a \cos(\Omega t - \varphi_\Omega); \quad \mu_\Omega = a. \quad (18.28)$$

Это справедливо, лишь если $a \ll 1$. Очевидно, что если $a \geq 1$, то сигнал искажается, т. е. значительными становятся и следующие гармоники. При этом глубина модуляции основного тона дается выражением:

$$\mu_\Omega = 2 \frac{\int_0^{2\pi} e^{-a \cos x} \cos x dx}{\int_0^{2\pi} e^{-a \cos x} dx} = 2 \frac{I_1(a)}{I_0(a)}, \quad (18.29)$$

где I_0 и I_1 — функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядков. При $a \gg 1$ глубина модуляции $\mu_\Omega \rightarrow 2$. Столь же значительной оказывается в этом случае и глубина модуляции второй, третьей, ..., n -й гармоник, до $n \sim \sqrt{a}$. В то же время эффективная глубина кроссмодуляции, определенная формулой (18.27), оказывается равной единице. Сигнал имеет форму пиков, аналогичных изображенным на рис. 8.4.

Отметим, наконец, что выше рассмотрен лишь случай низкой частоты модуляции возмущающей станции, $\Omega \ll \delta v_{e0}$. При произвольной частоте Ω задача сложна; она упрощается в случае малых глубин модуляции возмущающей волны $\mu_0 \leq 1/2$. Тогда можно воспользоваться выражением (8.21) для периодических возмущений температуры электронов в плазме и рассчитать глубину и фазу кроссмодуляции при произвольных значениях Ω . Получающиеся при этом выражения имеют простой вид в случае высоких частот ($\omega^2 \gg v_{e0}^2$):

$$\mu_{\Omega} = \mu_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\delta v_{e0} \tau_0}{\sqrt{\Omega^2 + (\delta v_{e0} \tau_0)^2}}, \quad \text{tg } \varphi_{\Omega} = \frac{\Omega}{\delta v_{e0} \tau_0}, \quad (18.30)$$

где $\mu_{\Omega \rightarrow 0}$ — глубина кроссмодуляции при низкой частоте Ω , рассмотренная выше. Эти выражения по своей структуре близки к (18.11), (18.13), полученным выше в случае слабого поля, только вместо v_{e0} в них стоит $\tau_0 v_{e0}$.

18.3. Резонансные эффекты вблизи электронной гирочастоты.

Рассмотрим теперь случай, когда частота возмущающей волны ω_1 близка к гирочастоте ω_H [145, 143, 146]. Примем для простоты, что возмущающая волна распространяется продольно. Тогда достаточно ограничиться рассмотрением лишь необыкновенной возмущающей волны, поскольку возмущения, вызываемые обыкновенной волной, не обладают резонансными свойствами. Возмущения, вызываемые в плазме необыкновенной волной, по-прежнему даются формулой (18.3), в которой следует произвести замену

$$\frac{E_1^2(0)}{\omega_1^2 + v_{e0}^2} \quad \text{на} \quad \frac{E_{1H}^2(0)}{[(\omega_1 - \omega_H)^2 + v_{e0}^2]},$$

где $E_{1H}(0)$ — амплитуда необыкновенной возмущающей волны на границе плазмы (при $z = 0$). Аналогично, при переходе от волны E_1 к волне E_{1H} изменяется показатель поглощения:

$$\kappa_1(v_{e0}) \rightarrow \kappa_{1H}(v_{e0}) = \kappa_1(v_{e0}) \frac{\omega_1^2 + v_{e0}^2}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + v_{e0}^2}.$$

Вследствие этого преобразование (18.12), а потому и формулы (18.13), (18.15) сохраняют свой вид, если произвести в них замену $E_1(0)$ на $E_{1H}(0)$ и K_1^0 на K_{1H}^0 :

$$\mu_{\Omega} = \mu_0 \frac{e^2 E_{1H}^2(0)}{3m\Gamma_{e0}} \frac{\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 - v_{e0}^2}{(\omega_2^2 \cos^2 \psi_2 + v_{e0}^2)^2} \cos \psi_2 \cos \psi_1 \frac{v_{e0} F_1(K_{1H}^0)}{\sqrt{(\delta_0 v_{e0})^2 + \Omega^2}}, \quad (18.31)$$

где K_{1H}^0 — полное поглощение волны E_{1H} до точки отражения волны E_2 ; фактор $F_1(K_{1H}^0)$ определен формулой (18.19) и пред-

ставлен на рис. 18.2. В (18.31) для простоты принято, что волна E_2 — поперечная и обыкновенная.

Из (18.31) следует, что глубина кроссмодуляции на гирочастоте (т. е. при $\omega_1 \approx \omega_H$) не превосходит глубины кроссмодуляции на любой другой частоте ω_1 , для которой осуществляется полная кроссмодуляция: действительно, если $K_{1H}^0 \geq 1$, то $F_1 \approx 1$ и глубина кроссмодуляции (18.31) почти не зависит от ω_1 . Причина этого в том, что хотя необыкновенная волна E_{1H} при $\omega_1 \approx \omega_H$, $v_{e0} \ll \omega_H$ и вызывает очень сильное возмущение плазмы, однако сама она затухает в очень тонком слое (например, ночью в ионосфере необыкновенная волна при $\omega_1 \approx \omega_H$ затухает в слое толщиной 1—5 км [256]). Напротив, если частота ω_1 существенно отличается от гирочастоты, то хотя вызываемые ею возмущения значительно слабее, чем при $\omega_1 \approx \omega_H$, но зато возмущенный слой значительно толще. Поэтому интегральная («полная») глубина кроссмодуляции в этих случаях одинакова, если только волна E_2 проходит через весь возмущенный слой, т. е. если $K_{1H} \geq 1$.

Вместе с тем, если волна E_2 распространяется лишь в достаточно тонком слое плазмы (т. е. если мала частота ω_2 или велик угол ее падения на слой ψ_2), то «полная» кроссмодуляция будет осуществляться только для той волны E_{1H} ; частота которой близка к гирочастоте, так как только такая волна достаточно сильно затухает в тонком слое плазмы. Кроме того, как ясно из (18.31), «полная» глубина кроссмодуляции сильно растет с уменьшением ω_2 или увеличением угла ψ_2 , а именно, $\mu_Q \sim 1/\omega_2^2 \cos^2 \psi_2$. Поэтому при низких частотах ω_2 или больших углах ψ_2 при изменении частоты ω_1 вблизи гирочастоты имеет место ярко выраженный резонансный пик для глубины кроссмодуляции.

Это видно из рис. 18.5, где изображена построенная по формуле (18.31) зависимость μ_Q от ω_1 при $\omega_1 \sim \omega_H$ и $\omega_2 \cos \psi_2 \sim v_{e0}$. Резонансный пик носит одnogорбый или двугорбый характер. Двугорбость ярко выражена при $K_{1H}^0 \geq 1$, где K_{1H}^0 — полное поглощение волны E_1 при частоте $\omega_1 \approx \omega_H$ до точки отражения волны E_2 . Если волна E_2 проникает глубоко в плазму, то $K_{1H}^0 \gg 1$ и резонансный пик размывается. Поэтому при очень больших значениях K_{1H}^0 резонанс может стать незаметным, что уже отмечалось выше.

Отметим, что на форме резонансной кривой существенно сказывается поправочная функция $f(K_{1H}^0)$ в факторе F_1 (18.20), связанная с эффектами в области отражения волны E_2 . Резонансная кривая без учета $f(K_{1H}^0)$ приведена на рис. 18.5 пунктиром; она может быть только одnogорбой.

Выше предполагалось, что возмущающая волна распространяется продольно. При непродольном распространении, след-

стве влияния поляризации плазмы, резонансные эффекты имеют место уже не на гирочастоте ω_H , а на частоте $\omega_{\text{рез}}$, причем

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{\omega_H^2 + \omega_0^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_H^2 + \omega_0^2)^2}{4} - \omega_H^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha}},$$

где α — угол между нормалью к фронту волны и направлением магнитного поля [147]. Частота $\omega_{\text{рез}}$ изменяется от $\omega_{\text{рез}} = \omega_H$ при $\alpha = 0$ до $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_0^2}$ при $\alpha = \pi/2$. Следует, однако, иметь в виду, что волна на резонансной частоте затухает обычно в самом начале слоя плазмы. Поэтому, если слой не имеет резкой границы, то возмущающая волна полностью затухает в

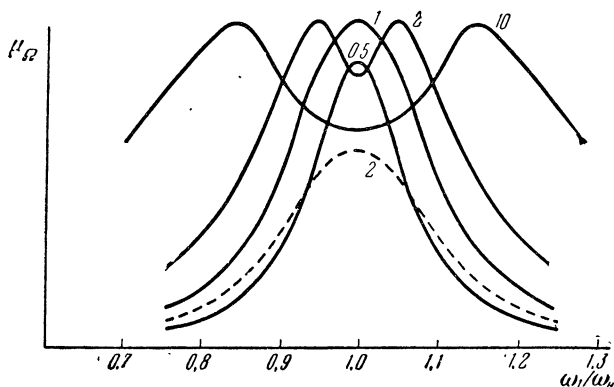


Рис. 18.5. Резонанс кроссмодуляции вблизи гирочастоты. Возле кривых приведены значения величины K_{1H}^0 .

области малых ω_0 . В этом случае отличие резонансной частоты кроссмодуляции при продольном распространении от резонансной частоты при поперечном распространении незначительно. Например, при кроссмодуляции в ионосфере из-за указанного эффекта резонансная частота сдвигается максимум на 1—2%. Возможность резонансного возмущения плазмы высокочастотной волной, модулированной по амплитуде частотой $\Omega = \omega_H$ или $\Omega = \omega_H/2$, указана в [153—155].

§ 19. Взаимодействие немодулированных волн

19.1. Взаимодействие коротких импульсов.

Мощный немодулированный импульс E_1 частоты ω_1 вызывает в плазме возмущения, которые сказываются на распространении другого импульса E_2 частоты ω_2 . Этим обусловлено взаимодействие в ионосфере радиопульсов.

Возмущения температуры электронов, вызываемые в изотропной плазме мощным импульсом E_1 , имеют вид (см. (8.37)):

$$\frac{\Delta T_e}{T_{e0}} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{E_1^2(0)}{n_1 E_p^2} e^{-2K_1(z)} \{1 - \exp[-\delta v_{e0}(t - t_0)]\} & \text{при } t_0 + t_1 \geq t \geq t_0, \\ \frac{E_1^2(0)}{n_1 E_p^2} e^{-2K_1(z)} [1 - \exp(-\delta v_{e0} t_1)] \exp[-\delta v_{e0}(t - t_1 - t_0)] & \text{при } t > t_1 + t_0. \end{cases} \quad (19.1)$$

Здесь, как обычно, $E_1(0)$ — поле возмущающей волны на границе плазмы; $K_1(z)$ — ее поглощение до рассматриваемой точки z ; t_0 — момент времени, когда передний край импульса достигает точки z ; t_1 — длительность импульса. Поле возмущающей волны принято здесь слабым ($E_1^2(0) \ll E_p^2$), а импульс — достаточно длинным, $t_1 \gg \left(\frac{\pi z}{c} \frac{d^2(n\omega)}{d\omega^2}\right)^{1/2}$, так что его самовоздействием и дисперсионным расплыванием пренебрегается. Вид возмущения ΔT_e в зависимости от времени t показан на рис. 19.1. Аналогичный характер носят, естественно, и возмущения эффективной частоты соударений электронов:

$$\Delta v_e = \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}} \Delta T_e.$$

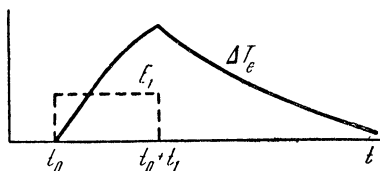


Рис. 19.1. Возмущение температуры электронов.

Они и служат причиной кросс-модуляции импульсов. Если возмущающий импульс поглощается не сильно, то существенное возмущение может вызвать и импульс, отраженный от ионосферы. В этом случае возмущение ΔT_e складывается из двух частей: прямого (19.1) и отраженного, которое также описывается формулой (19.1) (изменяется лишь величина $K_1(z) = K_{12}$ и начальный момент t_0). Ниже мы будем для простоты предполагать, что поглощение K_{12} значительно ($K_{12} \gg 1$), так что влиянием отраженного импульса можно пренебречь.

Рассмотрим теперь второй импульс E_2 на частоте ω_2 , распространяющийся в возмущенной области. Его амплитуда:

$$E_2 = E_{20}(z) \left[1 - \frac{\omega_2}{c} \int_0^z \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e}\right)_{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e}\right)_{T_{e0}} \Delta T_e dz \right]. \quad (19.2)$$

Здесь $E_{20}(z)$ — амплитуда импульса E_2 , если бы он распространялся в невозмущенной плазме, κ_2 — показатель поглощения

волны E_2 . Вторым член в квадратных скобках в (19.2) дает величину возмущения волны \bar{E}_2 , возникающего вследствие ее взаимодействия с волной E_1 . Здесь ΔT_e определено формулой (19.1).

Примем для простоты, что оба импульса E_1 и E_2 идут по направлению z . Импульс E_2 излучается в момент t_2 ; его длительность будем считать пренебрежимо малой. В зависимости от соотношения между t_2 , t_{10} и t_1 (t_{10} — момент начала излучения импульса E_1 , t_1 — его длительность) можно выделить три случая:

$$\text{I) } t_2 < t_{10}; \quad \text{II) } t_2 > t_{10} + t_1; \quad \text{III) } t_{10} < t_2 < t_{10} + t_1. \quad (19.2a)$$

В первом случае возмущающий импульс идет следом за импульсом E_2 . Он может воздействовать только на отраженную от ионосферы волну E_2 . В области, где происходит взаимодействие, импульсы идут тогда навстречу друг другу. Пусть z_1 — точка, в которой импульс E_2 встретился с передним фронтом импульса E_1 . Здесь начинается взаимодействие. Пусть далее z_0 — точка, в которой импульсы кончают взаимодействовать непосредственно и начинается так называемое последствие: импульс E_2 идет в среде, где еще не совсем релаксировало возмущение, вызванное импульсом E_1 . Полное возмущение импульса \bar{E}_2 складывается тогда из возмущения непосредственного взаимодействия и возмущения последствия. Подставляя ΔT_e из (19.1) в формулу (19.2), учитывая, что импульсы идут навстречу, и принимая, что в области взаимодействия $n_1 \approx n_2 \approx 1$, т. е. $t - t_0 = = 2(z_1 - z)/c$, $t_1 = 2(z_1 - z_0)/c$, находим:

$$\begin{aligned} M &= \frac{E_{20} - E_2}{E_{20}} = \frac{\omega_2}{c} \int_0^{z_1} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v_e} \right)_{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta T_e dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_1} D e^{-2K_1(z)} \left[1 - \exp \left(-\frac{2 \delta v_{e0}}{c} (z_1 - z) \right) \right] dz + \\ &+ \int_0^{z_0} D e^{-2K_1(z)} \left[1 - \exp(-\delta v_{e0} t_1) \right] \exp \left[-\frac{2 \delta v_{e0}}{c} (z_0 - z) \right] dz; \\ D &= \frac{E_1^2(0)}{n_1 E_p^2} \frac{\omega_2}{c} \frac{T_{e0}}{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \left(v_{e0} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v_{e0}} \right) \approx \\ &\approx \frac{E_1^2(0)}{E_p^2} \frac{\omega_2}{c} \frac{\omega_2^2 - v_{e0}^2}{\omega_2^2 + v_{e0}^2} \frac{T_{e0}}{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \kappa_2. \end{aligned} \quad (19.3a)$$

Это выражение определяет изменение амплитуды импульса E_2 за счет его взаимодействия с импульсом E_1 , т. е. глубину кросс-модуляции волны E_2 .

Заметим, что в воздухе (т. е. в нижней ионосфере) согласно (5.14)

$$\frac{T_{e0}}{v_{e0}} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} = \frac{5}{6}.$$

Во втором случае импульс 2 идет следом за возмущающим импульсом E_1 . Кроссмодуляции подвергается тогда лишь прямая волна E_2 и все взаимодействие носит характер последействия. Для глубины кроссмодуляции получаем:

$$M = \int_0^{z_2} D e^{-2K_1(z)} [1 - \exp(-\delta v_{e0} t_1)] \exp\{-\delta v_{e0} [t_2 - (t_{10} + t_1)]\} dz. \quad (19.3б)$$

Здесь $t_2 - (t_{10} + t_1)$ — время, на которое запаздывает импульс E_2 относительно заднего края импульса E_1 ; z_2 — точка отражения волны E_2 (или E_1); в условиях сильного взаимодействия $K_1(z_2) \gg 1$ можно считать $z_2 \rightarrow \infty$. Если пренебречь изменением δv_{e0} , v_{e0} и T_e с высотой z , то выражение (19.3б) может быть существенно упрощено. Действительно, произведя преобразования (18.12), (18.13), можно проинтегрировать в (19.3б) по dz . Тогда получаем:

$$M = D_0 [1 - \exp(-\delta v_{e0} t_1)] \exp\{-\delta v_{e0} (t_2 - t_{10} - t_1)\},$$

$$D_0 = \frac{e^2 E_1^2(0)}{6m \delta v_{e0}} \frac{\omega_2^2 - v_{e0}^2}{(\omega_2^2 + v_{e0}^2)^2} \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}}. \quad (19.3в)$$

Наконец, в третьем случае возмущающий импульс взаимодействует как с прямой, так и с отраженной волнами E_2 . Соответственно, глубина кроссмодуляции

$$M = M_1 + M_2 = \int_0^{z_1} D e^{-2K_1(z)} [1 - \exp(-\delta v_{e0} (t_2 - t_{10}))] dz +$$

$$+ \int_0^{z_2} D e^{-2K_1(z)} [1 - \exp(-\delta v_{e0} t_1)] \times$$

$$\times \exp\left[-\delta v_{e0} (t_2 + 2\tau - t_{10} - t_1 - \frac{z}{c})\right] dz. \quad (19.3г)$$

Здесь τ — групповое время распространения импульса E_2 от точки излучения до точки отражения ($\tau > z_2/c$); принято, что $t_2 + \tau > t_{10} + t_1$. Первый член в формуле (19.3г) можно преобразовать к виду (19.3в):

$$M_1 = D_0 [1 - \exp(-\delta v_{e0} (t_2 - t_{10}))]. \quad (19.3д)$$

Кроме амплитудной кроссмодуляции, при взаимодействии коротких импульсов возникает и фазовая кроссмодуляция.

Изменение фазы волны E_2 под воздействием волны E_1 определяется, очевидно, выражением:

$$M_\varphi = \frac{\omega_2}{c} \int_0^z \left(\frac{\partial n_2}{\partial v_e} \right) \left(\frac{\partial v_e}{\partial T_e} \right)_{T_{e0}} \Delta T_e dz,$$

где n_2 — показатель преломления волны E_2 . Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial n_2}{\partial v_e} \right) = \frac{v_{e0} \omega_0^2}{n_2 (\omega_2^2 + v_{e0}^2)^2} = \frac{\omega_2}{\omega_2^2 + v_{e0}^2} \kappa_2 = \frac{\omega_2 v_{e0}}{\omega_2^2 - v_{e0}^2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v_{e0}},$$

находим, что для глубины фазовой модуляции M_φ справедливы те же выражения (19.3), где D и D_0 следует заменить на

$$D_\varphi = D \frac{\omega_2 v_{e0}}{\omega_2^2 - v_{e0}^2}, \quad D_{\varphi 0} = D_0 \frac{\omega_2 v_{e0}}{\omega_2^2 - v_{e0}^2}. \quad (19.4)$$

Отсюда видно, что при $v_{e0} \sim \omega_2$ взаимодействие коротких импульсов приводит и к значительной фазовой кроссмодуляции. При $v_{e0} \ll \omega_2$ фазовая кроссмодуляция мала (ср. § 8.3). При наличии в плазме магнитного поля, как и при обычной кроссмодуляции, для взаимодействия коротких импульсов оказывается существенной поляризация обеих волн.

Важное преимущество взаимодействия импульсов состоит в том, что оно происходит в сравнительно небольшой области. Изменяя время запаздывания $t_2 - t_{10}$, можно переносить место встречи импульсов, т. е. место их эффективного взаимодействия. Анализируя характер взаимодействия, можно, таким образом, произвести локальное зондирование плазмы [161]. В ионосфере этот метод применен Фиджером [156].

В методе Фиджера слабые импульсы E_2 излучаются в два раза чаще, чем мощные импульсы E_1 . Время между излучением импульсов достаточно для полной релаксации возмущения. Поэтому, если один из импульсов E_2 взаимодействует с полем E_1 , то второй проходит в невозмущенной ионосфере. Сравнивая амплитуды и фазы возмущенного и невозмущенного импульсов, можно определить эффект взаимодействия с высокой точностью (до $M \sim 10^{-5}$). Изменяя время запаздывания импульсов, изменяют их место встречи в ионосфере и, таким образом, снимают характеристики амплитудного и фазового взаимодействия импульсов в ионосфере.

Вид такой амплитудной характеристики [255] показан на рис. 19.2. По оси ординат здесь отложена глубина кроссмодуляции M в относительных единицах, по оси абсцисс — время запаздывания $t_2 - t_{10}$. Следовательно, дважды имеет место нарастание и падение глубины кроссмодуляции с изменением времени запаздывания $t_2 - t_{10}$ (величина максимумов может при этом существенно различаться),

Сопоставим амплитудную характеристику на рис. 19.2 с формулами (19.3), описывающими взаимодействие импульсов. Левая часть кривой соответствует большим значениям $t_2 - t_{10}$ и согласно (19.2а) описывает случай II. Здесь, как видно непосредственно из формулы (19.3в), глубина кроссмодуляции M экспоненциально нарастает с уменьшением $(t_2 - t_{10})$ (все члены, кроме последнего в (19.3в), не зависят от времени запаздывания).

С уменьшением $t_2 - t_{10}$ мы переходим в область III. Здесь существенно взаимодействие как с прямым, так и с отраженным импульсом E_2 . Вначале основную роль играет взаимодействие с прямым импульсом E_2 (член M_1 в (19.3г)). Из формулы (19.3д)

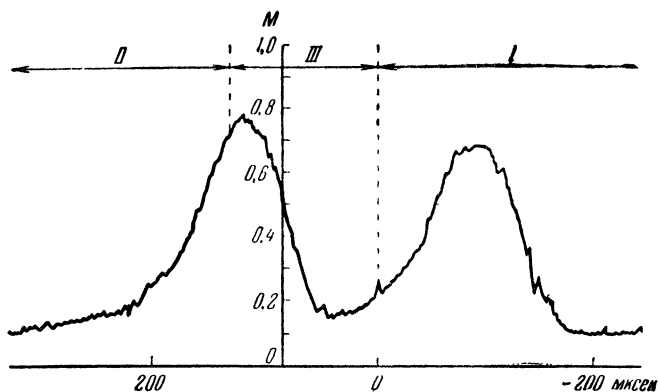


Рис. 19.2. Амплитудная характеристика взаимодействия импульсов.

видно, что M_1 убывает с уменьшением времени запаздывания $t_2 - t_{10}$, в согласии с рис. 19.2. Взаимодействие с отраженным импульсом, напротив, усиливается с уменьшением $t_2 - t_{10}$. При $t_2 - t_{10} < 0$ взаимодействие с прямым импульсом вообще прекращается и мы переходим в область I. Здесь существенно, что область наиболее сильного взаимодействия — область максимума функции D в формуле (19.3) — в грубом приближении совпадает с максимумом произведения Nv_{e0} , т. е. с высотами в ионосфере z_{\max} порядка 80—90 км ночью и 60 км днем. В начале области III импульсы встречаются при $z > z_{\max}$. С уменьшением $t_2 - t_{10}$ место встречи понижается и величина M растет. В области второго максимума функции M место встречи находится как раз вблизи высоты z_{\max} . При дальнейшем уменьшении $t_2 - t_{10}$ область взаимодействия импульсов постепенно выходит из ионосферы и глубина кроссмодуляции вновь падает.

Аналогичный вид имеет и зависимость фазовой кроссмодуляции от времени запаздывания. Ход функций M и M_{ϕ} от $t_2 - t_{10}$ зависит, как мы видели выше, не только от δv_{e0} , но и от высотного распределения частоты соударений $v_{e0}(z)$ и концентрации

$N(z)$ в нижней ионосфере. Поэтому численная обработка кри-
вых наблюдения (сопоставление формул (19.3), (19.4) с дан-
ными эксперимента) позволяет определить высотные профили
частоты соударений и концентрации электронов в нижней ионо-
сфере. В настоящее время это один из наиболее эффективных
методов исследования D -слоя ионосферы [255—257, 266—270].

19.2. Изменение поглощения волны, распространяющейся в возмущенной области плазмы.

Мощная волна E_1 частоты ω_1 вызывает, в основном, постоян-
ные во времени возмущения в плазме. Меняется, в частности,
температура электронов. Это изменение T_e сказывается на по-
глощении других волн, распространяющихся в возмущенной
области.

Предположим, что возмущающая волна E_1 распространяется
нормально к слою плазмы. В этом случае поле волны описы-
вается уравнениями (6.19), (6.20). Их решение для слабо иони-
зированной плазмы приведено в § 7.2. Температура электронов в
возмущенной области $T_e = T\tau^2(z)$, где $\tau(z)$ в неявном виде оп-
ределено уравнением (7.17). Рассмотрим теперь другую волну
 E_2 частоты ω_2 , распространяющуюся также нормально к слою в
направлении z . Эту волну будем считать слабой, ее самовоздей-
ствием пренебрежем. Амплитуда поля волны E_2 :

$$E_2(z) = \frac{E_2(0)}{\sqrt{n_2(z)}} \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int \kappa_2(z, T_e) dz \right\} = \\ = \frac{E_2(0)}{\sqrt{n_2(z)}} \exp \left\{ -\frac{\omega_2}{c} \int \kappa_{20}(z) dz \right\} P_{12}.$$

Здесь κ_{20} — показатель поглощения волны E_2 в невозмущенной
плазме, $\kappa_2(T_e)$ — тот же показатель в плазме, возмущенной
волной E_1 . Далее, P_{12} — множитель взаимодействия, показы-
вающий, как изменяется амплитуда волны E_2 под воздействием
волны E_1 . Множитель P_{12} в слабо ионизированной плазме опре-
делен формулой (18.24).

В глубине плазмы $\tau(z) \rightarrow 1$ (см. § 7.2). В этом случае взаи-
модействие волн наиболее сильное, полное. Множитель P_{12} при
полном взаимодействии равен:

$$P_{12} = \exp \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^{1/2} \left[-\frac{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2}{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2} \ln \frac{\tau_0 + 1}{2} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2}{2(\omega_2^2 + \nu_{e0}^2)} \right) \ln \frac{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2 \tau_0^2}{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2} + \frac{2\nu_{e0}^2(\tau_0 - 1)}{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2} \right]. \quad (19.5)$$

Если волна E_1 достаточно мощная, то множитель P_{12} может
играть значительную роль. Так, в случае высокочастотной

волны E_2 ($\omega_2^2 \gg v_{e0}^2 \tau_0^2$)

$$P_{12} = \left(\frac{\tau_0 + 1}{2} \right)^{-\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}}$$

Множитель взаимодействия в этом случае может быть существенно меньше единицы. Мощная волна E_1 как бы подавляет волну E_2 . Причина этого в том, что поглощение высокочастотной волны E_2 возрастает в области плазмы, нагретой сильной волной E_1 . Напротив, для низкочастотной волны E_2 поглощение в разогретой области уменьшается и здесь возможно просветление плазмы; в частности, при $\omega_2^2 \ll v_{e0}^2$, $\omega_1^2 \ll v_{e0}^2$

$$P_{12} = \left[\tau_0 \left(\frac{\tau_0 + 1}{2} \right) \right]^{-\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}} \exp \{ 2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} (\tau_0 - 1) \}. \quad (19.5a)$$

Множитель взаимодействия P_{12} — одного порядка с множителем самовоздействия P . Поэтому оценки величины P_{12} для ионосферы показывают, что для средних волн достаточно высокой мощности ($W \gtrsim 100$ кВт) эффекты взаимодействия могут играть заметную роль.

19.3. Взаимная дефокусировка и фокусировка радиоволн.

Выше было рассмотрено изменение поглощения слабой волны E_2 , связанное с нагревом электронов плазмы под воздействием мощной волны E_1 . Нагрев электронов приводит, кроме того, к изменению плотности плазмы. Благодаря этому меняется показатель преломления, что сильно сказывается на характере распространения волн, вызвавших возмущение (см. гл. IV). Естественно, что при этом изменяются и условия распространения в возмущенной зоне других волн. Траектории их лучей также искривляются, они могут дефокусироваться или фокусироваться неоднородностью, искусственно созданной в плазме мощной волной E_1 [278, 162].

Взаимная дефокусировка пучков радиоволн. Пусть два осесимметричных пучка частоты ω_1 и ω_2 распространяются в одном направлении в дефокусирующей среде. Примем, что волна E_2 слабая, так что ее влиянием на плазму можно пренебречь. Распределение интенсивностей I_1 , I_2 и направлений лучей u_1 , u_2 в пучках описывается уравнениями, аналогичными (12.12)*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_1 I_1) &= 0, & \frac{\partial I_2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2 I_2) &= 0; \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + |\beta| \frac{\partial I_1}{\partial \rho} &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} + \beta_2 \frac{\partial I_1}{\partial \rho} &= 0; \end{aligned} \quad (19.6)$$

$$\beta_2 = |\beta| \omega_1^2 / \omega_2^2.$$

*) Отметим, что однородное распределение интенсивности двух пучков в дефокусирующей среде неустойчиво [249] (как в двухпотоковой гидродинамике) и развивается осцилляторная структура. В случае слабой волны E_2 амплитуда осцилляций невелика и они не сказываются на общей динамике пучков,

Примем, что оба пучка на границе плазмы имеют параболическое распределение интенсивности (14.12). Внутри плазмы они сохраняют параболическое распределение интенсивности. При этом слабая волна E_2 не влияет на мощную волну E_1 , так что распределение интенсивности I_1 описывается по-прежнему формулами (16.1), (16.4). Распределение I_2 и u_2 имеет вид:

$$u_2 = \frac{\rho}{f_2} \frac{df_2}{dz}, \quad I_2 = \begin{cases} \frac{I_{20}}{f_2^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2 f_2^2}\right) & \text{при } \rho \leq a f_2, \\ 0 & \text{при } \rho > a f_2. \end{cases} \quad (19.7)$$

Подставляя (19.7) в уравнения (19.6) и учитывая (16.1), (16.4), находим, что функция $f_2(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \frac{f_2}{[(1 + \alpha_1 t)^2 + t^2]^2}; \quad t = \frac{\sqrt{2|\beta|I_0}}{a} z, \quad \alpha_1 = \frac{a}{R_0 \sqrt{2|\beta|I_0}}, \quad (19.8)$$

с граничными условиями

$$f_2|_{z=0} = 1, \quad \frac{df_2}{dt}\bigg|_{z=0} = \frac{a}{R_2 \sqrt{2|\beta|I_0}} = \gamma_0.$$

При замене переменной

$$t = (1 + \alpha_1^2)^{-1} [-\alpha_1 + \omega], \quad \omega = (1 - 2u)/2(u - u^2)^{1/2},$$

это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2 f_2}{du^2} + \frac{-(3/2) + 3u}{u(u-1)} \frac{df_2}{du} + \frac{k_0^2}{u(u-1)} = 0, \quad k_0^2 = \omega_1^2/\omega_2^2. \quad (19.8a)$$

Граничные условия к этому уравнению задаются при $u = u_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}}\right)$ и имеют вид:

$$f_2|_{u=u_0} = 1, \quad \frac{df_2}{du}\bigg|_{u=u_0} = -2 \sqrt{1 + \alpha_1^2} \frac{df_2}{dt}\bigg|_{u=u_0} = -2 \sqrt{1 + \alpha_1^2} \gamma_0.$$

Рассмотрим отдельно случаи $k_0^2 > 1$ и $k_0^2 < 1$. При $k_0^2 > 1$ линейно независимые решения (19.8a) имеют вид:

$$F_1 = \frac{\text{sh} \left[2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u} \right]}{\sqrt{u - u^2}}, \quad F_2 = \frac{\text{ch} \left[2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u} \right]}{\sqrt{u - u^2}}.$$

Тогда общее решение уравнения (19.8a) запишется в виде:

$$f_2 = C_1 F_1 + C_2 F_2,$$

где константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$C_1 = - \frac{2\gamma_0 \sqrt{1 + \alpha_1^2} (u_0 - u_0^2) \operatorname{ch} [2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u_0}] + (1 - 2u_0) \operatorname{ch} [2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u_0}] - \sqrt{u_0 - u_0^2} \operatorname{sh} [2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u_0}]}{V k_0^2 - 1},$$

$$C_2 = \frac{\operatorname{sh} [2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u_0}]}{V k_0^2 - 1} \left\{ 2\gamma_0 \sqrt{1 + \alpha_1^2} (u_0 - u_0^2) - \frac{1 - 2u_0}{2} \right\} + \sqrt{u_0 - u_0^2} \operatorname{ch} [2 \sqrt{k_0^2 - 1} \arcsin \sqrt{u_0}].$$

Аналогично в случае $k_0^2 < 1$. Общее решение представляется в виде:

$$f_2 = \frac{A \sin [2 \sqrt{1 - k_0^2} \arcsin \sqrt{u}]}{\sqrt{u - u^2}} + \frac{B \cos [2 \sqrt{1 - k_0^2} \arcsin \sqrt{u}]}{\sqrt{u - u^2}},$$

где

$$A = \frac{\cos [2 \sqrt{1 - k_0^2} \arcsin \sqrt{u_0}]}{\sqrt{1 - k_0^2}} \left\{ -2\gamma_0 \sqrt{1 + \alpha_1^2} (u_0 - u_0^2) + \frac{1 - 2u_0}{2} \right\} + \sqrt{u_0 - u_0^2} \sin [2 \sqrt{1 - k_0^2} \arcsin \sqrt{u_0}],$$

$$B = \frac{\sin [2 \sqrt{1 - k_0^2} \arcsin \sqrt{u_0}]}{\sqrt{1 - k_0^2}} \left\{ 2\gamma_0 \sqrt{1 + \alpha_1^2} (u_0 - u_0^2) - \frac{1 - 2u_0}{2} \right\} + \sqrt{u_0 - u_0^2} \cos [2 \sqrt{1 - k_0^2} \arcsin \sqrt{u_0}].$$

Решение уравнения (19.8) для параллельных пучков (т. е. при $\alpha_1 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $u_0 = 1/2$) показано на рис. 19.3. Видно, что f_2 растет с ростом t . Иначе говоря, пучок E_2 дефокусируется при взаимодействии с волной E_1 . Дефокусировка существенно зависит от отношения частот $\omega_1^2/\omega_2^2 = k_0^2$. При $\omega_1^2/\omega_2^2 \geq 1$

$$f_2|_{z \rightarrow \infty} = f_2|_{u \rightarrow 0} \rightarrow 2|C_2|t = 2|C_2| \sqrt{2|\beta|I_0} z/a;$$

при $\omega_1^2/\omega_2^2 \leq 1$

$$f_2|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 2|B| \sqrt{2|\beta|I_0} z/a.$$

В обоих случаях пучок E_2 вместо параллельного становится расходящимся. При низкой частоте слабой волны взаимная дефокусировка весьма сильна. Эффект резко усиливается с ростом $k_0^2 = \omega_1^2/\omega_2^2$, так как

$$2|C_2| = \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{k_0^2 - 1} \right).$$

Разумеется, уравнение (19.8), а следовательно и полученное решение, справедливы только при $z \leq af_1$, т. е. в области, занятой сильной волной E_1 . При $\omega_1^2/\omega_2^2 \gg 1$ слабая волна E_2 выталкивается из области, занятой волной E_1 .

Эффекты взаимной дефокусировки должны иметь место в нижних слоях ионосферы ($z \leq 200$ км). По своему характеру они вполне аналогичны эффектам дефокусировки, рассматривавшимся в § 17.1. Следует подчеркнуть, что эффекты дефокусировки связаны с изменением концентрации электронов. Чтобы осуществить дефокусировку, необходимы, поэтому, весьма длительные возмущающие импульсы $\Delta t_1 > \tau_N$ (см. табл. 5.9). Импульс же E_2 может быть коротким. Изменяя время излучения импульса E_2 относительно возмущающего импульса E_1 , можно получить сведения о процессе изменения концентрации электронов, т. е. о процессе рекомбинации в ионосфере. Кроме того, учитывая, что взаимодействие импульсов усиливается с уменьшением частоты ω_2 , можно, изменяя частоту ω_2 , подобрать условия, когда величина эффекта будет оптимальной. В силу этого именно взаимодействие импульсов представляет

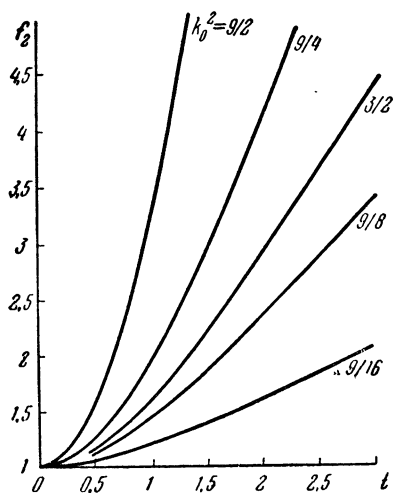


Рис. 19.3. Расширение слабого пучка.

наиболее существенным для исследования эффектов, указанных в § 17.1 (см. также [262]).

Отметим также, что здесь рассматривался только особый случай, когда взаимодействующие пучки распространяются в одном направлении. Естественно, что взаимодействие имеет место и в общем случае при пересечении пучков. Плоская волна, пересекая возмущенную область, также искажает свой фазовый фронт, что приводит к изменению распределения амплитуды поля.

Взаимная фокусировка радиоволн. Рассмотрим теперь случай фокусирующей среды, когда концентрация электронов убывает под воздействием поля мощной волны [162]. Плазму примем плоскостной, $N = N(z)$. В направлении z — нормали к слою — распространяется мощный пучок E_1 . Амплитуда поля в пучке зависит как от z , так и от x, y — координат в плоскости, ортогональной к z .

Рассмотрим теперь в возмущенной области другую волну E_2 . Примем для простоты, что волна E_2 плоская и распростра-

няется нормально к слою. Тогда в отсутствие возмущения волна E_2 всегда оставалась бы плоской; ее фаза

$$\varphi_0 = \frac{\omega_2}{c} \int n_{20}(z) dz. \quad (19.9)$$

Из-за возмущений концентрации ΔN , вызванных волной E_1 , возникают соответствующие поправки к фазе φ_0 , зависящие от x , y , z и времени t , так что плоский фронт волны искривляется:

$$n = n_{20} + \Delta n_2(x, y, z, t) = n_{20} - \frac{2\pi e^2}{m\omega_2^2 n_{20}} \Delta N(x, y, z, t), \quad (19.10)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi(x, y, z, t), \quad \Delta\varphi = - \frac{2\pi e^2}{m\omega_2 c} \int_{z_1}^z dz \frac{\Delta N(x, y, z, t)}{n_{20}(z)}.$$

Здесь принято, что траектория луча волны E_2 искривляется лишь незначительно в области взаимодействия $z_1 \leq z \leq h_0$, поэтому интегрирование по пути луча в формуле (19.10) заменено на интеграл по dz . По той же причине можно принять амплитуду волны E_2 в области взаимодействия постоянной, зависящей лишь от z (но не от x , y). Однако из-за искажений фазы (19.10) фазовый фронт волны E_2 искривился. Поэтому на выходе из возмущенной зоны $z > h_0$ волна будет расходиться (дефокусироваться) или фокусироваться (фокусироваться) или же расходить (дефокусироваться). Поле волны в точке наблюдения на оси z на расстоянии z_0 от верхней границы области взаимодействия h_0 выразится формулой [163]:

$$E_2 = A e^{i\varphi_0} \frac{\omega_2}{2\pi i c} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\exp\{i\Delta\varphi(x, y, z_0) + i\omega_2 r/c\}}{r} dx dy. \quad (19.11)$$

Здесь для простоты принято, что вне области взаимодействия $n_{20} = 1$; A — амплитуда волны на границе, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$. В отсутствие возмущения $\Delta\varphi$ амплитуда поля волны $|E_2| = A$. При возмущении фазы $\Delta\varphi$ при больших значениях r она может существенно измениться.

Предположим, что концентрация плазмы в возмущенной зоне уменьшилась под воздействием мощного луча E_1 . Это справедливо, например, в F -слое ионосферы, где для достаточно узкого возмущающего пучка E_1 согласно (4.65), (5.37) $\Delta N = -N_0 \Delta T_e / (T_{e0} + T_{i0})$. В этом случае неоднородность будет действовать как фокусирующая линза для волны E_2 . Интеграл (19.11) можно вычислять тогда по методу стационарной фазы. Разлагая фазу $\Delta\varphi(x, y)$ в ряд вблизи стационарной точки

$x = 0, y = 0$ и удерживая члены до четвертого порядка, имеем:

$$E_2 = \frac{A\omega e^{i\varphi_0}}{2\pi i z_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \sum_{m, n=0}^2 C_{mn} x^{2m} y^{2n} \right\} dx dy. \quad (19.12)$$

Здесь $x = 0, y = 0$ — точка максимума интенсивности возмущающего луча E_1 ; принято, что кубические члены отсутствуют в силу симметрии луча E_1 относительно точки $x = 0, y = 0$. Пользуясь формулой (19.10), находим коэффициенты C_{mn} :

$$C_{mn} = -\frac{2\pi e^2}{mc\omega_2} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{n_{20}(z)} \left\{ \frac{d^{m+n} \Delta N(x, y, z, t)}{d(x^2)^m d(y^2)^n} \right\}_{x=0, y=0} + \frac{\omega_2}{c} z_0^{1-2(m+n)} \alpha_{mn}; \quad (19.13)$$

$$\alpha_{00} = 1, \quad \alpha_{01} = \alpha_{10} = 1/2, \quad \alpha_{20} = \alpha_{02} = -1/8, \quad \alpha_{11} = -1/4.$$

Если коэффициенты C_{10} и C_{01} при некотором $z = z_\Phi$ обратятся в нуль, то это будет означать фокусировку первоначально плоской волны в точку z_Φ . Остающиеся в показателе экспоненты (19.12) члены четвертого порядка определяют эффективные размеры фокального пятна и, следовательно, коэффициент усиления ионосферной линзы. После того как выполнено равенство $C_{10} = C_{01} = 0$, коэффициент усиления линзы по мощности \mathcal{K} равен:

$$\mathcal{K} = \frac{|E_2|^2}{|A|^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 z_0^2 c^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ i [C_{20} x^4 + C_{11} x^2 y^2 + C_{02} y^4] \} dx dy \right|^2. \quad (19.14)$$

Перейдя в (19.14) к полярным координатам $x = \zeta \cos \theta, y = \zeta \sin \theta$, можем произвести интегрирование по $d\zeta$:

$$I = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i \zeta^4 (C_{20} \sin^4 \theta + C_{11} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{02} \cos^4 \theta)] dx dy \right| = \\ = 2 \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} (C_{20} + C_{11} t^2 + C_{02} t^4)^{-1/2} dt, \quad \mathcal{K} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 z_0^2 c^2} I^2. \quad (19.15)$$

Интеграл I сводится к эллиптическим интегралам 1-го или 2-го рода.

Конкретные оценки для ионосферы показывают, что при частоте возмущающей волны $\omega_1 \sim 10^8$, направленности пучка $\theta_0 \approx 0,02-0,05$ и эффективной мощности $W_0 \approx 5 \cdot 10^4 - 10^5$ квт может возникнуть заметная неоднородность в области максимума F -слоя (см. § 5.5), фокусирующая другие радиоволны.

В частности, для волны E_2 частоты $\omega_2 \sim 10^8$ величина коэффициента фокусировки $\mathcal{H} \sim 10^2$, фокусное расстояние $z_0 \sim 300-500$ км [162].

Эти оценки справедливы в предположении, что поле возмущающей волны E_1 не испытывает значительного изменения вследствие самофокусировки. В противном случае может возникнуть сложная осциллирующая структура возмущенной области (см. § 17.2), что естественно скажется на взаимодействии волн. Кроме того, в области F -слоя в поле мощной волны легко развиваются неустойчивости (§ 5.7), существенно изменяющие весь характер эффектов взаимодействия.

19.4. Генерация волн с комбинационными частотами.

Мощная немодулированная волна вызывает в плазме не только постоянные, но и переменные во времени возмущения с частотой $2\omega_1$. Поэтому при взаимодействии волн в плазме генерируются волны с комбинационными частотами $\omega_2 \pm 2\omega_1$ [164, 86].

Распространение волны E_2 в плазме описывается уравнением (6.6):

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_2}{\partial t} = 0. \quad (19.16)$$

Здесь, как обычно, принято, что волна E_2 распространяется в направлении z .

В результате воздействия на плазму волны E_1 частоты ω_1 в ней появляются переменные во времени возмущения частоты $2\omega_1$ (3.43). Учитывая малость переменных поправок, решаем уравнение (19.16) методом последовательных приближений: $E_2 = E_2^{(0)} + E_2^{(1)} + \dots$. В первом приближении переменными поправками к ϵ , σ пренебрегаем. Тогда волна сохраняет свою частоту ω_2 , а поле ее описывается выражением:

$$E_2^{(0)} = E_2(0) \exp[i(k_{20}z + \omega_2 t)]. \quad (19.17)$$

Здесь рассматривается лишь одна волна, бегущая в направлении оси z . Плазма для простоты принята однородной, k_{20} — комплексный волновой вектор волны E_2 :

$$k_{20} = \frac{\omega_2}{c} \sqrt{\epsilon(\omega_2) + i \frac{4\pi\sigma(\omega_2)}{\omega_2}}. \quad (19.18)$$

Подставляя (19.17) в (19.16) и учитывая переменные возмущения плазмы, получим в следующем приближении:

$$\frac{\partial^2 E_2^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \sigma_0 \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial t} - \frac{\epsilon_0 - 1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j^{(2)}}{\partial t} = 0. \quad (19.19)$$

Здесь $j^{(2)}$ — поправка к току, вызванная наличием в среде переменных возмущений частоты $2\omega_1$ (ср. (9.1)):

$$j^{(2)} = j_+^{(2)} e^{i(\omega_2 + 2\omega_1)t} + j_-^{(2)} e^{i(\omega_2 - 2\omega_1)t}. \quad (19.20)$$

Отсюда видно, что боковые волны имеют частоты $\omega_2 + 2\omega_1$ и $\omega_2 - 2\omega_1$.

Решение уравнения (19.19) с граничными условиями

$$E_2^{(1)}|_{z=0} = 0, \quad E_2^{(1)}|_{z \rightarrow \infty} = C e^{ikz} \quad (19.21)$$

имеет вид:

$$E_2^{(1)} = E_{21}^+ e^{i(\omega_2 + 2\omega_1)t} + E_{21}^- e^{i(\omega_2 - 2\omega_1)t}, \quad (19.22)$$

где

$$E_{21}^\pm(z) = -\frac{2\pi(\omega_2 \pm 2\omega_1)}{k_1^\pm c^2} \left\{ e^{ik_1^\pm z} \int_z^\infty e^{-ik_1^\pm z_1} j_\pm^{(2)} dz_1 + e^{-ik_1^\pm z} \left[\int_0^z e^{ik_1^\pm z_1} j_\pm^{(2)} dz_1 - \int_0^\infty e^{-ik_1^\pm z_1} j_\pm^{(2)} dz_1 \right] \right\}, \quad (19.23)$$

$$k_1^\pm = \frac{\omega_2 \pm 2\omega_1}{c} \sqrt{\epsilon_0(\omega_2 \pm 2\omega_1) + \frac{4\pi i \sigma_0(\omega_2 \pm 2\omega_1)}{\omega_2 \pm 2\omega_1}}; \quad (19.24)$$

k_1^\pm — комплексное волновое число для волны «боковой» частоты $\omega_2 \pm 2\omega_1$.

Для амплитуды «боковых» волн, прошедших область взаимодействия в плазме, получаем из (19.23) следующее выражение:

$$|E_{21}^\pm| = \frac{4\pi|\omega_2 \pm 2\omega_1|}{|k_1^\pm|c^2} \left| \int_0^\infty j_\pm^{(2)} \sin(k_1^\pm z) dz \right|. \quad (19.25)$$

Отношение амплитуды «боковой» волны к амплитуде основной волны E_2 по порядку величины [2]:

$$\eta = \frac{|E_{21}^\pm|}{|E_2(0)|} = 10^{-2} \frac{e^4 E_1^2(0) N v_{e0}}{m^2 \omega_1^3 (\omega_2 - 2\omega_1)^2} e^{K_0 - K_1^\pm}, \quad (19.26)$$

где K_0 и K_1^\pm — полное поглощение основной волны и «боковых» волн.

В ионосфере при мощности возмущающей станции $W_0 = 100$ квт, частотах $\omega_1 \approx \omega_2 \sim 10^6 - 10^7$ имеем: $\eta \approx 5 \cdot 10^{-6} - 10^{-8}$. В условиях резонанса $\omega_2 = 2\omega_1$ переменные поправки возрастают [164, 2]. Соответственно увеличивается и амплитуда боковых волн. При $\omega_2 = 2\omega_1 = 4 \cdot 10^6$ имеем: $\eta = 3 \cdot 10^{-5}$; при $\omega_2 = 2\omega_1 = 2 \cdot 10^6$ имеем: $\eta = 10^{-5}$. Амплитуды боковых волн растут с уменьшением частоты волн ω_1 и ω_2 . При $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \delta v_{e0}$ для сильных волн они могут стать значительными.

КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 20. Кинетическое уравнение

В кинетической теории поведение электронного или ионного газов в электрическом и магнитном полях (а также газов нейтральных атомов и молекул) описывается функциями распределения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad F_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, \mathbf{r} — координаты частиц. Функция распределения представляет собой плотность частиц в конфигурационном пространстве \mathbf{r}, \mathbf{v} . Иначе говоря, среднее число частиц в объеме $d\mathbf{r} d\mathbf{v} = dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ равно $\int f d\mathbf{r} d\mathbf{v}$. Отсюда следует, что плотность N , поток \mathbf{j} и средняя энергия частицы \mathcal{E} могут быть выражены с помощью функции f следующим образом:

$$N = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j} = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{N} \int \frac{mv^2}{2} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (20.1)$$

Здесь m — масса рассматриваемых частиц.

Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения электронов имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + S = 0. \quad (20.2)$$

Здесь S — интеграл столкновений Больцмана, описывающий изменение функции распределения электронов f при соударениях электронов между собой, а также со всеми другими частицами плазмы:

$$S = \int \int d\mathbf{v}_1 d\Omega q(u, \theta) u \{f(\mathbf{v}) F(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}') F(\mathbf{v}'_1)\}. \quad (20.3)$$

Здесь \mathbf{v}_1 — скорость той частицы, с которой соударяется электрон (назовем ее частицей 1), $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$, $q(u, \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния, \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 — скорость электрона и частицы 1 до соударения (после удара их скорости равны соответственно \mathbf{v} и \mathbf{v}_1), F — функция распределения частиц 1. Интегрирование в (20.3) проводится по скоро-

стям частицы 1 ($d\mathbf{v}_1$) и по углам рассеяния $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, причем θ — угол между $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1$.

Для электронов в плазме существенны упругие и неупругие соударения с молекулами, соударения с ионами, междуэлектронные соударения, а также соударения с различными типами волн, возбужденных в плазме. Если рассматриваются соударения между электронами, то $F = f$; благодаря междуэлектронным соударениям уравнение (20.2) нелинейное.

Кинетическое уравнение для функции распределения ионов f_i имеет тот же вид (20.2), нужно только функцию распределения электронов f заменить на f_i , заряд и массу электрона — e , m — на заряд и массу иона eZ , M .

Кинетическое уравнение для функции распределения нейтральных молекул (если они не обладают значительным электрическим или магнитным моментом) имеет вид уравнения (20.2) без третьего члена.

Взаимодействие частиц носит характер парных соударений только в случае, если плазма не сильно отклонилась от состояния равновесия. Такой случай и рассматривается ниже. Если же отклонения от состояния равновесия велики, то важную роль играет взаимодействие частиц с излучением — волнами различного типа, возбужденными в плазме. Читателей, интересующихся этими вопросами, можно отослать к специальным монографиям, посвященным кинетике плазмы [165, 166, 33, 280, 282].

20.1. Упрощение кинетического уравнения для электронов.

Кинетическое уравнение (20.2) можно упростить, используя основные особенности поведения электронов в плазме. При элементарном рассмотрении (§ 3) было показано, что тепловая (хаотическая) скорость электрона обычно много больше его средней направленной скорости. Соответственно следует ожидать, что в тех же условиях функция распределения электронов зависит, в основном, лишь от модуля скорости, а не от ее направления. Удобно поэтому выделить в функции распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ ее основную, зависящую только от модуля скорости (симметричную) часть $f_0(|\mathbf{v}|, \mathbf{r}, t)$ и направленную часть f_1 [169, 170]. Иначе говоря, удобно произвести разложение угловой части функции распределения в пространстве скоростей в ряд по шаровым функциям.

Рассмотрим вначале для простоты случай изотропной плазмы ($\mathbf{H} = 0$), а также примем, что пространственный градиент функции распределения направлен по оси z , параллельной электрическому полю \mathbf{E} . Тогда имеется лишь одно выделенное направление \mathbf{E} (т. е. ось z). Следовательно, функция распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f(v; \cos\theta_1; z; t)$, где $v = |\mathbf{v}|$ и θ_1 — угол между скоростью \mathbf{v} и осью z . Ее можно поэтому разложить в ряд

по шаровым функциям нулевого порядка, т. е. по полиномам Лежандра $P_k(\cos \theta_1)$:

$$\hat{f}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta_1) \hat{f}_k(v, z, t). \quad (20.4)$$

Подставим теперь разложение (20.4) в уравнение (20.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta_1) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial t} + v \cos \theta_1 \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta_1) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial z} - \\ & - \frac{eE}{m} \cos \theta_1 \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta_1) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial v} - \frac{eE}{mv} \sin^2 \theta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \frac{\partial P_k}{\partial(\cos \theta_1)} + S = 0. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Здесь учтено, что

$$E \frac{\partial \hat{f}}{\partial v} = E \cos \theta_1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial v} + \frac{E \sin^2 \theta_1}{v} \frac{\partial \hat{f}}{\partial(\cos \theta_1)}.$$

Умножая теперь уравнение (20.5) на $P_k(\cos \theta_1)$ и интегрируя по $d\Omega_1 = \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi$, получим следующее уравнение для функции \hat{f}_k :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial t} + v \left[\frac{k}{2k-1} \frac{\partial \hat{f}_{k-1}}{\partial z} + \frac{k+1}{2k+3} \frac{\partial \hat{f}_{k+1}}{\partial z} \right] - \\ & - \frac{eE}{m} \left\{ \frac{k+1}{(2k+3)v^{k+2}} \frac{\partial}{\partial v} [v^{k+2} \hat{f}_{k+1}] + \frac{k}{2k-1} v^{k-1} \frac{\partial}{\partial v} (v^{1-k} \hat{f}_{k-1}) \right\} + S_k = 0; \end{aligned} \quad (20.6)$$

$$S_k = \frac{2k+1}{4\pi} \int SP_k(\cos \theta_1) d\Omega_1.$$

Здесь учтена ортогональность полиномов

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl}$$

и рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} xP_k(x) &= \frac{k+1}{2k+1} P_{k+1} + \frac{k}{2k+1} P_{k-1}, \\ (1-x^2) \frac{dP_k}{dx} &= \frac{k(k+1)}{2k+1} [P_{k-1}(x) - P_{k+1}(x)]. \end{aligned}$$

При рассмотрении соударений электронов с другими частицами интеграл соударений S является линейным выражением относительно функции распределения электронов f . В этом случае, если функция распределения частиц l симметрична, т. е. $F_l = F_l(v_l)$, то интеграл S_k зависит лишь от функции \hat{f}_k . В самом деле, подставляя в интеграл соударений (20.3) разложение

(20.4), умножая его на $P_k(\cos \theta_1)$ и интегрируя по $d\Omega_1$, имеем:

$$S_k = \frac{2k+1}{4\pi} \int d\mathbf{v}_1 d\Omega \int q(u, \theta) u P_k(\cos \theta_1) \times \\ \times \left\{ F \sum_k P_k(\cos \theta) f_k - F' \sum_k P_k(\cos \theta'_1) f'_k \right\} d\Omega_1. \quad (20.7)$$

Учитывая, что $\cos \theta'_1 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \varphi_1$ (θ'_1 — угол между \mathbf{v}' и \mathbf{E}), и учитывая теорему сложения для шаровых функций:

$$P_k(\cos \theta'_1) = P_k(\cos \theta) P_k(\cos \theta_1) + \\ + 2 \sum_{m=1}^k \frac{(k-m)!}{(k+m)!} P_k^m(\cos \theta_1) P_k^m(\cos \theta) \cos m\varphi_1,$$

интегрируем в (20.7) по $d\Omega_1$. Тогда получаем:

$$S_k = \int d\mathbf{v}_1 d\Omega q(u, \theta) u \{ f_k F - F' f'_k P_k(\cos \theta) \}. \quad (20.8)$$

Полагая теперь в (20.6) последовательно $k = 0, 1, 2, \dots$, получаем вместо (20.6) следующую цепочку уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) + S_0 = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{2}{5} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) - \frac{eE}{m} \left[\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{2}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 f_2) \right] + S_1 = 0, \quad (20.9) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{3}{7} \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) - \\ - \frac{eE}{m} \left[\frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} f_1 \right) + \frac{3}{7v^4} \frac{\partial}{\partial v} (v^4 f_3) \right] + S_2 = 0$$

и т. д. Полученную цепочку уравнений можно оборвать на двух первых, если функцией f_2 можно пренебречь в сравнении с f_0 , точнее — если

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} \gg \frac{2}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 f_2), \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} \gg \frac{2}{5} \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Рассмотрим эти условия вначале для стационарной пространственно однородной задачи. Пренебрегая f_3 и учитывая, что в этом случае

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -i\omega f_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = -i\omega f_2, \quad S_1 = v f_1, \quad S_2 = v_2 f_2,$$

где $v_2 \sim v$, получаем из (20.9):

$$f_1 = \frac{eE}{m(-i\omega + v)} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad f_2 = \frac{2eE}{3m(-i\omega + v_2)} v \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{v} \frac{eE}{m(-i\omega + v)} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right].$$

Следовательно, условие обрыва цепочки (20.6)

$$\left| \frac{\partial f_0}{\partial v} \right| \gg \left| \frac{4}{15v^3} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{eE v^4}{m(-i\omega + \nu_2)} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{v} \frac{eE}{m(-i\omega + \nu)} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \right\} \right|. \quad (20.10)$$

Если ограничиться использованием этого условия для средней скорости электрона $\bar{v} \sim \sqrt{T_e/m}$ и положить $\partial/\partial v \sim 1/\bar{v}$, то условие (20.10) сведется к требованию:

$$\frac{e^2 E_0^2}{m T_e [\omega^2 + \nu_e^2(T_e)]} \ll 1. \quad (20.11)$$

Это условие, если использовать выражение (3.32) для температуры электронов, переписывается в виде

$$\delta(T_e) \frac{T_e - T}{T_e} \ll 1, \quad (20.12)$$

где $\delta(T_e)$ — средняя доля энергии, теряемой электроном при одном ударе. Таким образом, условие (20.12) оказывается фактически тождественным исходному требованию $\delta \ll 1$, которое, как уже указывалось в § 3, всегда выполнено. Разумеется, этот вывод относится лишь к средней скорости электронов. Условие (20.10) может, например, нарушиться в области очень больших градиентов функции распределения $f_0(v)$ по скорости v . При низких частотах, и особенно в постоянном электрическом поле, условие (20.10) может не выполняться в области высоких скоростей $v \gg v_{Te} = \sqrt{T_e/m}$, если частота соударений ν падает с ростом скорости электрона v . В частности, в полностью ионизованной плазме $\nu \sim v^{-3}$ и условие (20.10) не выполнено в постоянном электрическом поле, если

$$v > (E_c/E)^{1/4} v_{Te}, \quad (20.13)$$

где E_c — критическое поле Драйзера, определенное формулой (3.41). При больших скоростях $v \gg (E_c/E)^{1/4} v_{Te}$ в постоянном электрическом поле функция распределения электронов приобретает резко направленный характер [31, 167].

Плазма предполагалась выше стационарной и однородной. При условии нестационарности и неоднородности условие (20.10) следует дополнить требованиями:

$$\left| \frac{\partial f_0}{\partial t} \right| \ll \sqrt{\omega^2 + \nu^2} f_0, \quad \frac{v}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \left| \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial f_0}{\partial z} \right|, \quad (20.14)$$

где $\nu = \nu(v)$ — частота столкновений электрона, имеющего скорость v ; ω определено как $\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}$.

Аналогичное разложение функции распределения электронов проводится и при наличии в плазме постоянного магнитного поля \mathbf{H} , а также при произвольном направлении пространственного градиента функции распределения. В этом случае, выделяя

по-прежнему симметричную (зависящую лишь от модуля скорости) часть функции распределения $f_0(v, \mathbf{r}, t)$ и ее направленную часть $\frac{v}{v} \mathbf{f}_1(v, \mathbf{r}, t)$ и пренебрегая остальными членами (т. е. полагая $f = f_0 + \frac{v \mathbf{f}_1}{v}$), можно свести уравнение (20.2) к следующей системе уравнений для функций f_0 и \mathbf{f}_1 [169]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div}_r \mathbf{f}_1 - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \mathbf{f}_1) + S_0 &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \operatorname{grad}_r f_0 - \frac{e \mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{e}{mc} [\mathbf{H} \mathbf{f}_1] + \mathbf{S}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (20.15)$$

В отсутствие магнитного поля и при $\operatorname{grad}_r f$, параллельном \mathbf{E} , уравнения (20.15) тождественны первым двум уравнениям системы (20.9).

20.2. Преобразование интеграла столкновений электронов.

Переходя к анализу соударений электронов, отметим их наиболее существенную особенность: в большинстве случаев основную роль играют соударения, при которых электрон лишь незначительно изменяет свою энергию, а иногда и импульс. В подобных случаях интеграл соударений удастся упростить, используя метод Фоккера — Планка, и представить в дифференциальной форме. Рассмотрим теперь последовательно различные типы соударений электронов.

Упругие соударения с нейтральными частицами. При упругом ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую (атом, молекула) скорость ее легко изменяет свое направление; модуль скорости или энергия электрона изменяются при этом лишь незначительно. Используя это обстоятельство, можно в первом приближении в выражении (20.8) принять, что $v' = v$, $v'_1 = v_1$. Учитывая также, что скорость электрона много больше скорости молекулы (предполагается, что $T_m \ll (M/m) T_e$) и, следовательно, $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_m| \approx v$, находим из (20.8):

$$\begin{aligned} S_{mk} &= \int d\mathbf{v}_1 d\Omega q(u, \theta) u \{f_k(v) F_m(\mathbf{v}_1) - P_k(\cos \theta) f_k(v') F_m(\mathbf{v}'_1)\} = \\ &= f_k(v) \int d\mathbf{v}_1 F_m(\mathbf{v}_1) v q(v, \theta) [1 - P_k(\cos \theta)] d\Omega = v_{mk}(v) f_k(v). \end{aligned} \quad (20.16)$$

Здесь $q(v, \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния электрона,

$$v_{mk}(v) = N_m v \int q(v, \theta) [1 - P_k(\cos \theta)] d\Omega, \quad N_m = \int F(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1; \quad (20.17)$$

N_m — концентрация молекул. В частности,

$$S_{m1} = v_m(v) f_1, \quad v_m(v) = N_m v \int q(v, \theta) (1 - \cos \theta) d\Omega; \quad (20.18)$$

$\nu_m(v)$ — частота столкновений электрона. При соударении с твердым шариком радиуса a (так можно условно моделировать упругие столкновения электронов с нейтральными частицами при $q = \text{const}$), как известно, $q = a^2/4$. Тогда

$$\nu_m = \pi a^2 N_m v. \quad (20.19)$$

Соответственно в этом случае $\nu_{mk}(v) = \nu_m(v)$, так как

$\int_{-1}^1 P_k(\cos \theta) d\Omega = 0$, $k \neq 0$, и дифференциальное сечение рассеяния q не зависит от угла θ .

Из (20.16) следует, что $S_{m0} = 0$, поскольку $P_{m0}(\cos \theta) = 1$. Так и должно быть при полном пренебрежении энергообменом. Для вычисления S_{m0} нужно учесть изменение энергии или модуля скорости электрона и молекулы. Как известно из законов упругого удара (см., например, [100], § 17), скорость электрона до соударения

$$\mathbf{v}' = \frac{mv + M\mathbf{v}_1}{m + M} + n \frac{M}{M + m} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|. \quad (20.20)$$

Здесь \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 — скорость электрона и молекулы после удара, n — единичный вектор, направленный параллельно $\mathbf{v}' - \mathbf{v}_1'$. Учитывая, что $v \gg v_1 \gg (m/M)v$, имеем из (20.20):

$$\mathbf{v}' \approx n\mathbf{v} \left(1 - \frac{v_1}{v} \cos \psi\right) + \mathbf{v}_1.$$

Здесь ψ — угол между \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 . Отсюда следует, что

$$v = v' - v_1 (\cos \theta_1 - \cos \psi),$$

где θ_1 — угол между \mathbf{v}_1 и n . Далее:

$$\begin{aligned} \Delta v = v' - v &\approx v_1 (\cos \theta_1 - \cos \psi) = \\ &= v_1 (\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi). \end{aligned} \quad (20.21)$$

Здесь θ и φ — углы рассеяния (т. е. углы между n и $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}$). Используя закон сохранения энергии при ударе

$$\frac{mv'^2}{2} + \frac{Mv_1'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2},$$

находим:

$$\Delta v_1 = v_1' - v_1 = -\frac{m}{M} \frac{v}{v_1} \Delta v. \quad (20.22)$$

Интеграл столкновений S_{m0} имеет вид:

$$S_{m0} = \int d\Omega d\mathbf{v}_1 u q(u, \theta) \{f_0(v) F(\mathbf{v}_1) - f_0(v') F(\mathbf{v}_1')\}. \quad (20.23)$$

Принимая для простоты функцию распределения молекул симметричной, т. е. зависящей лишь от модуля скорости \mathbf{v}_1 , и

учитывая, что модуль скорости мало изменяется при ударе ($v \approx v'$, $v_1 \approx v'_1$), можем разложить функции

$$f_0(v') = f_0(v + \Delta v), \quad F(v'_1) = F(v_1 + \Delta v_1)$$

в ряд Тэйлора. Вместо (20.23) тогда получим:

$$S_{m0} = - \int d\Omega dv_1 \left\{ vq(v, \theta) - \frac{\partial}{\partial v} [vq(v, \theta) v_1 \cos \psi] \right\} \times \\ \times \left\{ f_0(v) \left[\Delta v_1 \frac{dF}{dv_1} + \frac{(\Delta v_1)^2}{2} \frac{d^2F}{dv_1^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[\Delta v \cdot F + (\Delta v \cdot \Delta v_1) \frac{dF}{dv_1} \right] + \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2} \frac{(\Delta v)^2}{2} F \right\}. \quad (20.24)$$

Подставив сюда выражения (20.21), (20.22) для Δv и Δv_1 , проинтегрируем по $d\Omega dv_1 = \sin \theta d\theta d\varphi v_1^2 \sin \psi dv_1 d\psi d\varphi_1$. Получим [169, 170]:

$$S_{m0} = - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta_{yn} v_m(v) \left[\frac{T_{m,ef}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right\}, \quad (20.25)$$

$$T_{m,ef} = M \int_0^\infty v_1^4 F(v_1) dv_1 \left[3 \int_0^\infty v_1^2 F(v_1) dv_1 \right]^{-1}. \quad (20.26)$$

Здесь $v_m(v)$ — частота соударений электронов с молекулами, определенная формулой (20.18), $\delta_{yn} = 2m/M$ — средняя доля энергии, теряемой электроном при одном упругом ударе; $T_{m,ef}$ — эффективная температура молекул ($T_{m,ef} = 2/3 \mathcal{E}$, где \mathcal{E} — средняя кинетическая энергия); в случае максвелловского распределения молекул $T_{m,ef} = T$.

Полученное выражение (20.25) для интеграла столкновений S_{m0} носит дифференциальный характер и может быть представлено в виде:

$$S_{m0} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 j_{m0}). \quad (20.27)$$

Здесь $j_{m0}(v)$ — поток в пространстве модуля скорости (или энергии), обусловленный упругими столкновениями электрона с молекулами:

$$j_{m0} = - \frac{1}{2} \delta_{yn} v_m(v) \left[\frac{T_{m,ef}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right]. \quad (20.28)$$

Кинетическое уравнение для функции f_0 в пространственно однородной плазме в отсутствие возмущающих полей имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \operatorname{div} j_{m0} = 0 \quad (20.29)$$

и представляет собой обычное уравнение непрерывности в пространстве скоростей. Выражение (20.28) для потока в пространстве скоростей $j_{m0}(v)$, обусловленного соударениями электронов с молекулами, имеет прозрачный физический смысл:

поток j_{m0} состоит, во-первых, из потока «переноса» или «торможения»

$$\frac{1}{2} \delta v v f_0 = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle f_0,$$

описывающего средние потери энергии электрона при соударениях, и потока «диффузии»

$$\frac{1}{2} \delta v \frac{T_{m,ef}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = \left\langle \frac{dv^2}{dt} \right\rangle \frac{\partial f_0}{\partial v},$$

который возникает при наличии градиента в распределении электронов по скоростям и связан с тем, что частицы, с которыми сталкивается электрон, сами движутся.

Сравнивая выражения (20.18) и (20.25), убеждаемся, что поправки к интегралу столкновений, связанные с изменением энергии электрона, малы — порядка $\delta_{уп} = 2m/M$. Поэтому соответствующими поправками к интегралам (20.16), (20.17) всегда можно пренебречь. Они существенны лишь в выражении для S_{m0} исключительно в силу того, что в первом приближении, пренебрегающем этими поправками, интеграл S_{m0} обращается в нуль.

Упругие соударения с ионами. Для описания упругих соударений электронов с ионами полностью применимы полученные выше общие выражения для интеграла упругих соударений с молекулами, так как вывод их дан для произвольного вида сечения $q(u, \theta)$ (использовалось при выводе лишь то, что $m \ll M$, а это всегда справедливо и для ионов). Необходимо, таким образом, лишь вычислить число соударений электрона с ионами $v_i(v)$. Для этого в выражение (20.18) следует подставить формулу Резерфорда для эффективного сечения рассеяния электрона на ионе:

$$q_i(v, \theta) = \left(\frac{Ze^2}{2mv^2} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}. \quad (20.30)$$

Тогда имеем:

$$v_i(v) = v N_i \int q_i(v, \theta) (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{2\pi N_i Z^2 e^4}{m^2 v^3} \ln \left[1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta_{\min}}{2} \right], \quad (20.31)$$

где N_i — концентрация, eZ — заряд ионов. Если рассматривать рассеяние электрона на свободном ионе, то интегрировать в (20.31) нужно от 0 до π . При этом частота соударений логарифмически расходится при малых θ . Однако в плазме ионы не совсем свободны: вследствие взаимодействия между ними и электронами поле каждого иона является кулоновским лишь до расстояний порядка дебаевского радиуса $R_D = (T_e/4\pi e^2 N)^{1/2}$. На расстояниях, больших R_D , кулоновское поле иона вследствие экранировки резко (экспоненциально) спадает (см., например, [1], § 4). Следовательно, можно считать, что R_D — это макси-

мальное расстояние, при котором еще имеет место существенное взаимодействие электрона с ионом, т. е. максимальный параметр удара. Через него может быть выражен минимальный угол рассеяния:

$$\theta_{\min} = 2 \operatorname{arctg} (Ze^2/mv^2R_D). \quad (20.32)$$

Следовательно,

$$v_i(v) = \frac{2\pi N_i e^4 Z^2}{m^2 v^3} \ln \left(1 + \frac{R_D^2 m^2 v^4}{Z^2 e^4} \right). \quad (20.33)$$

Для частот соударений $v_{ik}(v)$ (20.17) в случае соударений с ионами получаем:

$$v_{ik}(v) = \frac{k(k+1)}{2} v_i(v). \quad (20.34)$$

Существенно, что в газовой плазме параметр Λ_0

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\theta_{\min}} \approx \frac{R_D T_e}{e^2} \approx \left(\frac{T_e}{e^2 N^{1/3}} \right)^{3/2} \gg 1 \quad (20.35)$$

всегда является большой величиной (условие $T_e/e^2 N^{1/3} \gg 1$ определяет газовую плазму, т. е. плазму, в которой средняя кинетическая энергия частиц T_e много больше средней потенциальной энергии взаимодействия между ними $e^2 N^{1/3}$). Это означает, что второй член в логарифме всегда является главным. Следовательно, основной вклад в число соударений электрона с ионами вносит слабое рассеяние — рассеяние на малые углы. При одном таком ударе не только энергия, но и импульс электрона меняется незначительно. В самом деле, доля энергии, теряемая при упругом рассеянии электрона на угол θ , равна $\Delta\varepsilon = (2m/M)(1 - \cos \theta)\varepsilon$. Учитывая, что основную роль играют соударения, приводящие к рассеянию на малый угол порядка θ_{\min} , находим:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \approx \frac{2m}{M} \frac{\theta_{\min}^2}{2} \sim \frac{m}{M} \left(\frac{e^2 N^{1/3}}{T_e} \right)^3 \ll 1.$$

Аналогично, изменение импульса Δp :

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{|p - p_1|}{|p|} \approx (1 - \cos \theta_{\min}) \sim \left(\frac{e^2 N^{1/3}}{T_e} \right)^3 \ll 1.$$

Следует подчеркнуть, что хотя изменение импульса при одном ударе мало, но изменение энергии существенно меньше:

$$\frac{\dot{p} \Delta\varepsilon}{\varepsilon \Delta p} \approx \frac{m}{M}.$$

Интеграл столкновений Ландау. Выше было показано, что при соударениях электронов с ионами основной вклад вносят соударения, при которых не только энергия, но и импульс электрона меняется незначительно. Причина этого состоит в том, что кулоновские силы медленно убывают с расстоянием. Благо-

даря этому основной вклад в суммарное сечение рассеяния вносит взаимодействие частиц на больших расстояниях, приводящее лишь к слабому рассеянию.

Понятно, что импульс мало меняется не только при соударениях электронов с ионами, но и при соударениях между электронами или между ионами, т. е. при любых кулоновских соударениях. Это обстоятельство позволяет, используя метод Фоккера — Планка, упростить вид интеграла соударений (20.3) в случае кулоновского взаимодействия частиц, представив его в дифференциальной форме Ландау [171]:

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{div} \mathbf{j}, \\ j_{ik} &= 2\pi \ln \Lambda \frac{e^4 Z^2 Z_1^2}{m} \int \frac{1}{u} \left(\delta_{ik} - \frac{u_i u_k}{u^2} \right) \left[\frac{f(\mathbf{v})}{m_1} \frac{\partial F(\mathbf{v}_1)}{\partial v_{1k}} - \frac{F(\mathbf{v}_1)}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} \right] d\mathbf{v}_1, \\ u &= |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \quad \Lambda = \frac{2}{\theta_{\min}} = \frac{m R_D v^2}{Z Z_1 e^2}. \end{aligned} \quad (20.36)$$

Здесь eZ , eZ_1 — заряды сталкивающихся частиц, m , m_1 — их массы; \mathbf{j} — поток частиц в пространстве скоростей, вызванный соударениями. Его удобно записать в векторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{v}_1 \nu(u) \left\{ u^2 \left[\frac{m}{m_1} f \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_1} - F \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right] - \mathbf{u} \left[\frac{m}{m_1} f \left(\mathbf{u} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_1} \right) - F \left(\mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] \right\}, \\ \nu(u) &= \frac{4\pi Z^2 Z_1^2 e^4 N \ln \Lambda}{m^2 u^3}. \end{aligned} \quad (20.37)$$

Пусть в плазме имеется одно выделенное направление \mathbf{e} . Соответственно $f(\mathbf{v}) = f(v, \theta)$, где v — модуль скорости, θ — угол между \mathbf{v} и \mathbf{e} . В этом случае

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 j_v) + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta), \quad (20.38)$$

причем компоненты потока j_v и j_θ определены, согласно (20.37), следующими выражениями:

$$\begin{aligned} j_v &= \frac{1}{2} \left[-v f A_1 - \frac{\partial f}{\partial v} A_2 - f A_3 - \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta} A_4 \right], \\ j_\theta &= \frac{1}{2} \left[v f (B_1 + B_3) - \frac{\partial f}{\partial v} B_2 - \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta} B_4 \right]; \\ A_1 &= -\frac{m}{m_1} \int v_1 \frac{\partial F}{\partial v_1} (1 - \cos^2 \theta') \nu(u) d\mathbf{v}_1, \\ A_2 &= \int F v_1^2 (1 - \cos^2 \theta') \nu(u) d\mathbf{v}_1, \\ A_3 &= \frac{m}{m_1} \int \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \nu(u) (v \cos \theta' - v_1) \cos \psi_1 d\mathbf{v}_1, \end{aligned} \quad (20.39)$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \int F v_1 (v - v_1 \cos \theta') v(u) \cos \xi_1 dv_1, \\
 B_1 &= \frac{m}{m_1} \int \frac{\partial F}{\partial v_1} (v - v_1 \cos \theta') \cos \xi_1 v(u) dv_1, \\
 B_2 &= \int F v_1 (v - v_1 \cos \theta') \cos \xi_1 v(u) dv_1, \\
 B_3 &= \frac{m}{m_1} \int \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \left(\frac{u^2}{v v_1} \cos \gamma_1 + \cos \xi_1 \cos \psi_1 \right) v(u) dv_1, \\
 B_4 &= \int F (u^2 - v_1^2 \cos^2 \xi_1) v(u) dv_1.
 \end{aligned}$$

Здесь θ_1 — угол между скоростью v_1 и выделенным направлением e ; φ_1 — второй (азимутальный) угол, характеризующий вектор v_1 . Остальные углы связаны с ними соотношениями*):

$$\begin{aligned}
 \cos \theta' &= \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \\
 \cos \xi_1 &= -\sin \theta \cos \theta_1 + \cos \theta \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \\
 \cos \psi_1 &= -\cos \theta \sin \theta_1 + \sin \theta \cos \theta_1 \cos \varphi_1, \\
 \cos \gamma_1 &= \sin \theta \sin \theta_1 + \cos \theta \cos \theta_1 \cos \varphi_1.
 \end{aligned} \tag{20.40}$$

Рассмотрим, например, соударения электронов с ионами. Функцию распределения ионов f_i примем максвелловской:

$$f_i = N_i \left(\frac{M}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{Mv^2}{2T_i} \right). \tag{20.41}$$

Тогда, учитывая, что $v \gg v_1$, т. е. $u \approx v$, находим из (20.39)

$$\begin{aligned}
 v_i(v) &= \frac{4\pi e^1 Z^2 N_i \ln \Lambda}{m^2 v^3}, \\
 A_1 &= \frac{2m}{M} v_i(v), \quad A_2 = \frac{2T_i}{M} v_i(v), \quad B_4 = v^2 v_i(v), \\
 A_3 &= A_4 = B_1 = B_2 = B_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{20.42}$$

Подставляя эти выражения в (20.38), (20.39) и пренебрегая малыми членами порядка m/M , получаем:

$$\begin{aligned}
 S_{ei} &= -\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{2m}{M} v^2 v_i(v) \left(\frac{T_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + v f \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{v_i(v)}{2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right].
 \end{aligned} \tag{20.43}$$

Если разложить функцию распределения электронов $f(v, \theta)$ в ряд по полиномам Лежандра (20.4), то мы получим отсюда выражения (20.25), (20.17), (20.34) для интегралов $S_{eik}(f_k)$.

*) Здесь учтено, что вектор $\partial f / \partial v$ имеет две компоненты, одна из которых направлена по v , а вторая — по вектору τ , ортогональному к v , в плоскости ev ; вектор $\partial F / \partial v_1$ имеет компоненты по векторам v_1 и τ_1 , ортогональному к v_1 в плоскости ev_1 . Соответственно, θ' — угол между v и v_1 ; ψ_1 — угол между v и τ_1 ; γ_1 — угол между τ и τ_1 ; ξ_1 — угол между τ и v_1 . Формулы (20.40) выражают эти углы через θ , θ_1 и φ_1 .

При выводе интеграла соударений Ландау учитывается лишь рассеяние на малые углы. Рассеяние на большие углы добавляет в число соударений член порядка единицы, который мал в сравнении с основным логарифмическим членом ($\ln \Lambda \gg \gg 1$). К такой же поправке в равновесной плазме приводит точное решение задачи о рассеянии в дебаевском поле, а также рассмотрение не учтенного в формуле (20.36) взаимодействия на расстояниях, больших дебаевского (так называемые коллективные эффекты). При сильных отклонениях от равновесия, в особенности в турбулентной плазме, роль коллективных эффектов становится определяющей [165, 172, 173].

Следует отметить также, что выражение (20.36) получается в предположении о справедливости классической теории. Квантовые эффекты становятся заметными при $T_e \gtrsim me^4 Z^2 / \hbar^2$. Учет их приводит к поправкам под логарифмом. Поправки того же типа возникают в высокочастотном электрическом поле $\omega \gtrsim \omega_0$ и в сильном магнитном поле $\omega_H > \omega_0$ [174—176]. При $\omega \gtrsim \omega_0$, $\omega_H \gtrsim \omega_0$ эти поправки становятся существенными.

Междуэлектронные соударения. В случае соударений между электронами интеграл соударений описывается выражениями (20.36) — (20.40). Необходимо лишь учитывать, что частицы 1 — тоже электроны, т. е. функция распределения $F(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_1)$.

Если функция распределения электронов симметрична — зависит только от модуля скорости $f = f_0(v)$, то выражения (20.38), (20.39) упрощаются: ток $j_0 = 0$, коэффициенты $A_3 = A_4 = 0$, а в выражениях для коэффициентов A_1, A_2 можно произвести интегрирование по углам. Учитывая, что

$$d\mathbf{v}_1 = v_1^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 = v_1^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

(θ' — угол между \mathbf{v} и \mathbf{v}_1), находим:

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int_0^\infty v_1 \frac{\partial f_0}{\partial v_1} 2\pi v_1^2 dv_1 \int_{-\pi}^\pi (1 - \cos^2 \theta') v(u) \sin \theta' d\theta' = \\ &= \frac{8\pi v_e(v)}{N} \int_0^v v_1^2 f_0(v_1) dv_1, \quad (20.44) \\ v_e(v) &= \frac{4\pi N e^4 \ln \Lambda}{m^2 v^3}. \end{aligned}$$

Здесь $v_e(v)$ — частота междуэлектронных соударений. При выводе формулы (20.44) учтено, что

$$\begin{aligned} u &= |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| = (v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \theta')^{1/2}, \\ \int_{-\pi}^\pi \frac{(1 - \cos^2 \theta') \sin \theta' d\theta'}{(v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \theta')^{3/2}} &= \frac{4}{3} \begin{cases} v_1^{-3} & \text{при } v \leq v_1, \\ v^{-3} & \text{при } v \geq v_1. \end{cases} \quad (20.45) \end{aligned}$$

Аналогичным образом находится и другой коэффициент:

$$A_2 = \frac{8\pi v_e(v)}{3N} \left(\int_0^v v_1^4 f_0(v_1) dv_1 + v^3 \int_v^\infty v_1 f_0(v_1) dv_1 \right). \quad (20.46)$$

Интеграл междуэлектронных соударений для функции $f_0(v)$ принимает, таким образом, вид:

$$S_{0e}(f_0) = -\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[A_1(f_0) v f_0 + A_2(f_0) \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \right\}, \quad (20.47)$$

где коэффициенты $A_1(f_0)$, $A_2(f_0)$ определены формулами (20.44), (20.46).

Для быстрых ($v \gg \sqrt{T_e/m}$) и медленных ($v \ll \sqrt{T_e/m}$) электронов выражение (20.47) существенно упрощается. В первом случае можно заменить в пределе интегрирования v на ∞ . Имеем:

$$A_1 = 2\nu_e(v) = \frac{8\pi N e^4 \ln \Lambda}{m^2 v^3}, \quad A_2 = \frac{4}{3} \frac{\mathcal{E}}{m} \nu_e(v); \quad \mathcal{E} = \frac{m}{2N} \int v^2 f_0(v) dv. \quad (20.48)$$

\mathcal{E} — средняя энергия рассеивающих электронов. В случае максвелловского распределения по скоростям $\frac{2}{3} \mathcal{E} = T_e$.

Во втором случае можно, напротив, принять в пределе интегрирования, что $v \rightarrow 0$. Тогда

$$A_1 = \frac{32\pi^2 e^4 \ln \Lambda}{3m^2} f_0(0), \quad A_2 = \frac{32\pi^2 e^4 \ln \Lambda}{3m^2} u; \quad u = \int_0^\infty v_1 f_0(v_1) dv_1. \quad (20.49)$$

Для максвелловского распределения по скоростям

$$f_0(0) = \left(\frac{2\pi T_e}{m} \right)^{-3/2} N, \quad u = Nm^{1/2} (2\pi)^{-3/2} T_e^{-1/2}.$$

Заметим, что если умножить выражение (20.47) для S_{0e} на v^2 или v^4 и проинтегрировать его по всем скоростям (от 0 до ∞), то соответствующий интеграл тождественно обращается в нуль независимо от вида функции $f_0(v)$:

$$\int_0^\infty S_{0e} v^2 dv = 0, \quad \int_0^\infty S_{0e} v^4 dv = 0. \quad (20.50)$$

Эти соотношения отражают сохранение полного числа частиц и сохранение энергии при соударениях между электронами. В случае максвелловской функции $f_0(v)$ интеграл соударений (20.47) тождественно равен нулю.

Выше мы рассмотрели интеграл межэлектронных соударений лишь для симметричной части функции распределения $f_0(v)$,

При разложении функции $f(v)$ в ряд по полиномам Лежандра (20.4) интегралы S_{ke} (20.7) вследствие нелинейности будут, вообще говоря, зависеть не только от функции f_k . Однако если $f_0 \gg f_1$, то интеграл S_{0e} зависит лишь от f_0 , а интеграл для функции f_1 (как и для последующих функций f_k) можно линеаризовать. Подставляя непосредственно в (20.3) функцию распределения в виде

$$f = f_0(v) + f_1(v) \cos \theta, \quad (20.51)$$

приходим к следующему выражению для интеграла соударений S_{1e} :

$$S_{1e} = \frac{3}{4\pi} \int q_e(u, \theta) u \{ f_1(v) f_0(v_1) \cos \theta + f_1(v_1) f_0(v) \cos \theta_1 - \\ - f_1(v') f_0(v'_1) \cos \theta' - f_1(v'_1) f_0(v') \cos \theta'_1 \} dv_1 d\Omega d\Omega_1, \quad (20.52)$$

где $q_e(v, \theta)$ определено формулой (20.30) при $Z = 1$. Можно также использовать выражения (20.38)–(20.40) и провести интегрирование по углам. Интеграл соударений S_{1e} запишется тогда в интегродифференциальном виде [33, 177].

Неупругие соударения. Неупругие соударения электронов с нейтральными молекулами, атомами и ионами сопровождаются возбуждением вращательных, колебательных и оптических уровней, ионизацией, излучением при свободно-свободных переходах, различного типа рекомбинационными процессами: рекомбинация с излучением кванта, диссоциативная рекомбинация, рекомбинация при тройных соударениях, прилипание к молекулам и т. д. Важную роль играют также так называемые удары второго рода, когда энергия возбужденного состояния молекулы передается налетающему электрону.

Точный учет всех этих неупругих процессов весьма сложен, сечения их достаточно хорошо известны лишь в немногих случаях (см., например, [228]). Рассмотрим здесь два важных предельных случая: когда энергия электронов значительно больше, чем энергия возбуждаемого уровня или энергия ионизации ($\epsilon \gg \hbar\omega$), и когда, напротив, энергия электронов лишь незначительно превышает энергию возбуждения ($\epsilon - \hbar\omega \ll \epsilon$).

В первом случае выражение для интеграла неупругих соударений находится фактически так же, как и при упругих соударениях. Необходимо только учесть, что при неупругом ударе энергия, теряемая электроном, идет в основном на возбуждение молекулы, что связано с передачей энергии $\hbar\omega$ (таким образом, $v' - v = \hbar\omega/mv$). Нейтральная частица при этом просто переходит из основного состояния в возбужденное. Тогда имеем [178, 33]:

$$S_{m0}^{ny} = -\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 r_\omega \left[\frac{T_\omega}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right\}, \quad (20.53)$$

$$S_{m1}^{ny} = v\omega f_1. \quad (20.54)$$

Здесь ν_{ω} — число неупругих соударений, сопровождающихся возбуждением кванта $\hbar\omega$ (как мы будем называть передачу молекуле энергии $\hbar\omega$, идущей на возбуждение какого-то уровня);

$$\nu_{\omega}(v) = v(N_m^o + N_m^p) \int q_{\omega}(v, \theta)(1 - \cos \theta) d\Omega, \quad (20.55)$$

причем $q_{\omega}(v, \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния при неупругом соударении, N_m^o и N_m^p — числа молекул соответственно в основном и в возбужденном состояниях. Далее, $r_{\omega}(v)$ — доля энергии, теряемая в единицу времени электроном на возбуждение кванта $\hbar\omega$,

$$r_{\omega}(v) = \frac{2\hbar\omega}{mv^2} (1 - e^{-\hbar\omega/T}) N_m^o v \int q_{\omega}(v, \theta) d\Omega, \quad (20.56)$$

и T_{ω} — эффективная температура:

$$T_{\omega} = \hbar\omega \frac{\exp(-\hbar\omega/T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/T)}. \quad (20.57)$$

В случае, когда квант $\hbar\omega$ мал не только в сравнении с энергией электрона, но и в сравнении с энергией нейтральных частиц ($\hbar\omega \ll T$), эффективная температура T_{ω} равна температуре молекул T .

Во втором предельном случае, когда энергия электрона лишь немного превосходит энергию возбуждения, электрон при соответствующем неупругом соударении переходит из области больших энергий ($\varepsilon > \hbar\omega$) в область малых энергий ($\varepsilon \sim 0$) [170, 179, 180]. Поэтому при больших энергиях

$$S_{m0}^{ny} = \nu_{\omega} f_0 = N_m^o v \int q_{\omega}(v, \theta) d\Omega, \quad S_{m1}^{ny} = \nu_{\omega} f_1, \quad (20.58)$$

где ν_{ω} — полная частота возбуждений уровня $\hbar\omega$ (предполагается, что $N_m^p \ll N_m^o$). То обстоятельство, что электрон не просто исчезает, а переходит в область малых энергий ($v \sim 0$), учитывается при этом добавлением к уравнению для f_0 члена $-\frac{Q}{4\pi v^2} \delta(v)$, где

$$Q = \frac{dN}{dt} = 4\pi \int_{\hbar\omega}^{\infty} \nu_{\omega} f_0 v^2 dv. \quad (20.59)$$

Заметим также, что в тех случаях, когда могут возбуждаться не один, а несколько уровней, $S = \sum_k S_{\omega k}$.

Часть неупругих соударений — ионизация и эффективная рекомбинация — сопровождаются изменением числа электронов в плазме. В интеграл соударений для функции f_0 нужно поэтому

добавить

$$S(f_0) = \nu_r(v) f_0 - \int_{\sqrt{2e_i/m}}^{\infty} \nu_{\text{ion}}(v', v) f_0(v') v'^2 dv' + S_{\text{ion}}^{\text{ny}}; \quad (20.60)$$

первый из этих членов описывает эффективную рекомбинацию, а второй — ионизацию. Здесь $\nu_r(v)$ — частота рекомбинации электронов, имеющих скорость v . Обычно функция $\nu_r(v)$ имеет максимум при малых скоростях ($v \rightarrow 0$). Далее,

$$\nu_{\text{ion}}(v, v') = N_m^0 v' \int q_{\text{ion}}(v, v', \theta) d\Omega$$

— частота ионизации, т. е. число ионизаций, производимых в 1 сек электроном, имеющим скорость v' , и приводящих к появлению нового электрона, имеющего скорость v ; e_i — энергия ионизации. Здесь для простоты рассматривается лишь ионизация с основного уровня. Интеграл $S_{\text{ion}}^{\text{ny}}$ описывает неупругие потери энергии $\varepsilon = e_i + (mv^2/2)$ ионизирующим электроном v' .

§ 21. Функция распределения электронов

Функция распределения электронов в плазме, как показано выше, может быть представлена в виде

$$f(v, r, t) = f_0(v, r, t) + \frac{v}{v} f_1(v, r, t).$$

Система уравнений для функций f_0 и f_1 с учетом выражений для интеграла соударений, полученных в предыдущем параграфе, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div}_r f_1 - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 E f_1) = \\ = \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta_{\text{yn}} \left(\nu_m^{\text{yn}} \left[\frac{T}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] + \nu_i \left[\frac{T_i}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right) \right\} + \\ + S_{m0}^{\text{ny}}(f_0) + \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[A_1(f_0) v f_0 + A_2(f_0) \frac{df_0}{dv} \right] \right\}, \quad (21.1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \operatorname{grad}_r f_0 - \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{e}{mc} [H f_1] = -v(v) f_1 - S_{1e}(f_1). \quad (21.2)$$

Здесь $\delta_{\text{yn}} = 2m/M$, а $\nu_m^{\text{yn}}(v)$ — число упругих соударений электрона с молекулами (20.18), $\nu_i(v)$ — с ионами (20.33); $\nu(v) = \nu_m^{\text{yn}}(v) + \nu_i(v) + \nu_m^{\text{ny}}(v)$ — полное число соударений, где $\nu_m^{\text{ny}}(v)$ — число неупругих соударений электрона с молекулами, определенное по-прежнему формулой (20.18), где q — сечение неупругого соударения; $S_{m0}^{\text{ny}}(f_0)$ — интеграл неупругих соударений для функции f_0 ; $A_1(f_0)$, $A_2(f_0)$, $S_{1e}(f_1)$ — интегральные выражения, описывающие изменение функций f_0 и f_1 за счет соударений между электронами (20.44), (20.46), (20.52).

Переходя к решению уравнений (21.1), (21.2), остановимся прежде всего на одной особенности, которая будет существенно использована в дальнейшем. Как уже отмечалось в § 3, время релаксации для энергии электронов $\tau_T = 1/\delta\nu$ всегда много больше, чем время релаксации для их импульса $\tau_v = 1/\nu$. В связи с этим время релаксации для функции f_0 много больше, чем для функции f_1 . В результате функция f_0 всегда меняется во времени медленнее, чем функция f_1 ; следовательно, при интегрировании уравнения (21.2) для функции f_1 функцию f_0 можно считать в первом приближении постоянной, не зависящей от времени. Благодаря этому существенно облегчается интегрирование уравнения (21.2). Получаемое при этом простое приближенное выражение для f_1 справедливо с точностью до членов меньше или порядка δ , т. е. с той же степенью точности, с которой справедливы и сами уравнения (21.1), (21.2). Задача сводится, таким образом, к интегрированию лишь одного уравнения для функции f_0 .

В уравнении для функции f_0 последний член в правой части уравнения, обусловленный соударениями между электронами, имеет порядок $\nu_{ee}f_0$, где ν_{ee} — частота междуэлектронных соударений. Остальные члены, описывающие соударения электронов с тяжелыми частицами, имеют порядок $\delta\nu_e f_0$, где $\delta\nu_e = \delta_{em}\nu_{em} + \delta_{ei}\nu_{ei}$. Ясно, что в зависимости от соотношения между ν_{ee} и $\delta\nu_e$ вид функции f_0 определяется либо междуэлектронными соударениями, либо соударениями электронов с тяжелыми частицами. Поэтому ниже вначале будут рассмотрены отдельно оба эти существенные предельные случаи: случай сильно ионизованной плазмы, когда $\nu_{ee} \gg \delta\nu_e$, и случай слабо ионизованной плазмы, когда $\nu_{ee} \ll \delta\nu_e$ *). Решению задачи при любой концентрации электронов, т. е. при любом соотношении между ν_{ee} и $\delta\nu_e$, посвящен § 21.3. Там же устанавливается критерий для применения формул, полученных в каждом из указанных выше предельных случаев.

21.1. Сильно ионизованная плазма.

Функция распределения (максвелловское распределение). В сильно ионизованной плазме, когда $\nu_{ee} \gg \delta\nu_e$, вид функции f_0 определяется междуэлектронными соударениями. Решение уравнения (21.1) в этом случае следует искать методом последовательных приближений: $f_0 = f_{00} + f_{01} + \dots$, учитывая в нулевом

*) В полностью ионизованной плазме всегда $\nu_{ee} \gg \delta\nu_e$, так как $\delta \ll 1$, а $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$; напротив, при очень малой степени ионизации, когда концентрация электронов достаточно мала, $\nu_e \ll \delta\nu_e = \delta_{em}\nu_{em}$. В ионосфере $\delta\nu_e \sim \nu_{ee}$ на высоте 90—100 км днем и 110—150 км ночью. Таким образом, плазму в ионосфере на высотах z меньше 100 км следует считать слабо ионизованной, а при $z > 150$ км — сильно ионизованной. Термины «сильно ионизованная» и «слабо ионизованная», разумеется, имеют условный характер.

приближении, естественно, лишь соударения между электронами. В однородной плазме из (21.1) получается тогда следующая цепочка уравнений:

$$S_{0e}(f_{00}) = -\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[A_1(f_{00}) v f_{00} + A_2(f_{00}) \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \right] \right\} = 0, \quad (21.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[A_1(f_{01}) v f_{00} + A_1(f_{00}) v f_{01} + A_2(f_{01}) \frac{\partial f_{00}}{\partial v} + A_2(f_{00}) \frac{\partial f_{01}}{\partial v} \right] \right\} = \\ = \frac{\partial f_{00}}{\partial t} - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} f_{10}) - \\ - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta_{\text{ун}} (v_{\text{ун}}^{\text{уп}} + v_i) \left[\frac{T}{m} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} + v f_{c0} \right] \right\} + S_{m0}^{\text{нy}}(f_{00}). \end{aligned} \quad (21.3б)$$

Здесь принято $T_i = T$. Из (21.3a) сразу видно, что функция нулевого приближения f_{00} — максвелловская:

$$f_{00} = N \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2T_e}, \quad (21.4)$$

так как именно для максвелловского распределения интеграл междуэлектронных столкновений (20.47) обращается в нуль. Физически этот результат вполне понятен: за счет междуэлектронных соударений максвелловское распределение должно установиться за время v_{ee}^{-1} ; при $v_{ee} \gg \delta v_e$ этот процесс установления значительно быстрее процесса передачи энергии тяжелым частицам, а значит функция f_0 должна быть близка к максвелловской.

При этом плотность электронов N и электронная температура T_e в (21.4) не должны обязательно быть постоянными, а являются некоторыми функциями времени. Они определяются из условия разрешимости уравнения (21.3б) для следующего (первого) приближения. В самом деле, как указывалось в § 20.2 (см. (20.50)), если умножить левую часть (21.3б) на v^2 или v^4 и проинтегрировать по скоростям, то соответствующий интеграл тождественно обращается в нуль (независимо от вида функции f_{01}). Следовательно, и правая часть уравнения (21.3б) также должна при этом обратиться в нуль. Это и приводит к уравнениям для плотности и температуры электронов.

Умножая (21.3б) на $4\pi v^2$ и интегрируя по v , находим:

$$4\pi \frac{d}{dt} \left(\int_0^{\infty} v^2 f_{00} dv \right) + 4\pi \int_0^{\infty} v^2 S_{m0}^{\text{нy}}(f_{00}) dv = 0.$$

Учитывая (20.60), получаем отсюда уравнение баланса ионизации:

$$\frac{dN}{dt} - q_i(N) + q_r(N) = 0, \quad (21.5)$$

где $q_i(N)$ и $q_r(N)$ — число актов ионизации и рекомбинации в единице объема в 1 сек.

Совершенно аналогично, умножая уравнение (21.36) на $(mv^2/2)4\pi v^2$ и интегрируя его по v , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(2\pi m \int_0^\infty v^4 f_{00} dv \right) + \frac{4\pi e}{3} \mathbf{E} \int_0^\infty v^3 f_{10} dv + \\ + \delta_{\text{уп}} 2\pi m \int_0^\infty v^3 (v_m^{\text{уп}} + v_i) \left(v f_{00} + \frac{T}{m} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \right) dv + \\ + 2\pi m \int_0^\infty v^4 S_{m0}^{\text{нр}}(f_{00}) dv = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (21.4) и (21.5), переписываем это уравнение в виде:

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta(T_e) v_e(T_e) (T_e - T) = - \frac{2e}{3N} \mathbf{E} j_e(T_e) + \frac{2}{3} \frac{Q}{N}. \quad (21.6)$$

Здесь через $v_e(T_e)$ обозначен параметр, определяющийся соотношением:

$$\begin{aligned} v_e(T_e) = \frac{4\pi m}{3NT_e} \int_0^\infty v^4 v(v) f_{00} dv = \\ = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty v^4 v(v) \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_e}\right) dv, \quad (21.7) \end{aligned}$$

где $v(v) = v_m^{\text{уп}}(v) + v_i(v) + v_m^{\text{нр}}(v)$ — число соударений электрона с тяжелыми частицами; $v_e(T_e)$ естественно называть эффективным числом или эффективной частотой соударений электрона. Далее, $\delta(T_e)$ — другой характерный параметр, имеющий смысл средней относительной доли энергии, теряемой электроном за время $1/v_e$ (ср. § 3):

$$\delta(T_e) = \delta_{\text{уп}} \frac{v_e^{\text{уп}}(T_e)}{v_e} + \frac{1}{(T_e - T) v_e} \left[\frac{4\pi m}{3N} \int_0^\infty v^4 S_{m0}^{\text{нр}}(f_{00}) dv \right]. \quad (21.8)$$

Здесь $\delta_{\text{уп}} = 2m/M$; $v_e^{\text{уп}}$ — эффективное число упругих соударений, вычисляемое по формуле (21.7) с учетом в $v(v)$ лишь упругих соударений с молекулами $v_m^{\text{уп}}(v)$ и с ионами $v_i(v)$; $S_{m0}^{\text{нр}}(f_{00})$ — часть интеграла столкновений, описывающая неупругие соударения электронов с молекулами. Наконец, $-j = ej_e$ — это плотность полного электронного тока, определенная согласно формуле (20.1), Q/N — средняя энергия, получаемая электроном под действием других источников нагрева.

Оценка функции первого приближения показывает, что $f_{01} \sim (\delta v_e / v_{ee}) f_{00}$. Следовательно, в сильно ионизованной плазме для симметричной части функции распределения f_0 с точностью до членов порядка $\delta v_e / v_{ee}$ можно ограничиться нулевым (максвелловским) приближением.

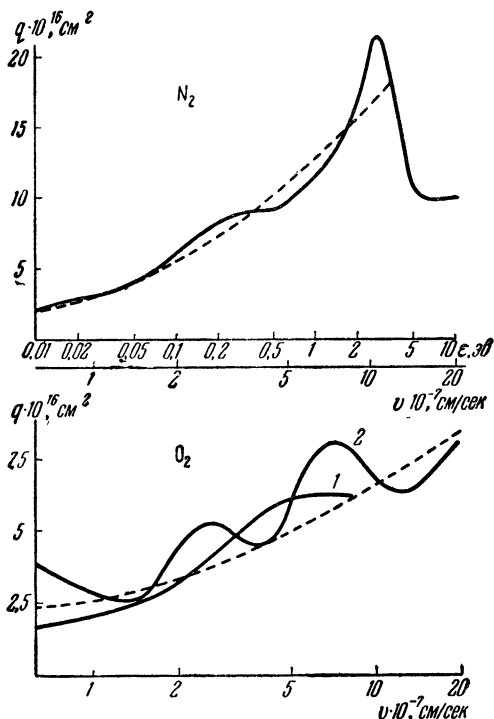


Рис. 21.1. Эффективное сечение соударений электрона.

Эффективная частота соударений. Если эффективное сечение соударений электрона не зависит от его скорости (соударения с твердыми шариками), то $\nu_m(v)$ определяется формулой (20.19). Подставляя ее в (21.7), имеем:

$$\nu_{em} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2T_e}{\pi m}} \pi a^2 N_m = \nu_{em0} \sqrt{\frac{T_e}{T}}, \quad (21.9)$$

где ν_{em0} — эффективное число соударений электронов с молекулами в слабом поле, когда $T_e = T$ (ср. (3.6)).

В действительности эффективные сечения соударений электронов с молекулами обычно зависят от скорости электрона. На рис. 21.1 они представлены для основных газов, составляющих нижнюю ионосферу, для N_2 [63] и O_2 (кривые 1 и 2 — соответ-

ственно по данным [61] и [63]). Пунктир на этом рисунке — интерполяция: по формуле $q = 3,3 \cdot 10^{-7} v (1 + v \cdot 10^{-8})^{-1} \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ для азота и по формуле $q = (1,8 + 10^{-7} v) \cdot (1 + 8,3 \cdot 10^{-9} v)^{-1} \times 10^{-16} \text{ см}^2$ для кислорода.

Результаты расчета v_{em} по формуле (21.7) для N_2 и O_2 с использованием аппроксимации, представленной пунктирными кривыми на рис. 21.1, приведены в § 5.2.

На рис. 21.2 показано эффективное сечение соударений электрона с молекулами воздуха. Пунктирная кривая на этом рисунке соответствует значению $4\pi q = C v^{2/3}$. Она достаточно хорошо аппроксимирует фактическое сечение. Следовательно, для

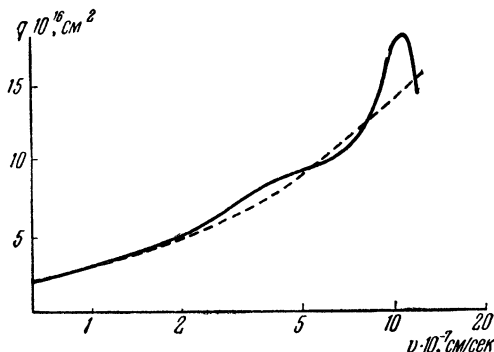


Рис. 21.2. Эффективное сечение соударений электрона с молекулами воздуха.

воздуха (и нижней ионосферы при $z \leq 110$ км) можно принимать, что

$$v_m(v) = CN_m v^{5/3}, \quad C = 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 \cdot (10^7 \text{ см/сек})^{-2/3}.$$

Тогда

$$v_{em}(T_e) = \frac{8 \cdot 2^{5/6}}{3 \sqrt{\pi}} CN_m \left(\frac{T_e}{m}\right)^{5/6} \Gamma\left(\frac{10}{3}\right), \quad (21.10)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

В случае соударений с ионами, подставляя в (21.7) выражение (20.33) для $v_i(v)$, находим:

$$v_{ei} = \frac{2}{3} \sqrt{8\pi} \frac{e^4 N_i}{\sqrt{m T_e^3}} \ln\left(\frac{T_e R_D}{e^2}\right). \quad (21.11)$$

Величина $\Lambda_0 = T_e R_D / e^2$, стоящая под знаком логарифма, всегда много больше единицы (20.35). Вследствие этого даже при сравнительно больших изменениях электронной температуры логарифм меняется лишь незначительно; поэтому обычно можно принять, что

$$v_{ei} = v_{ei0} (T/T_e)^{3/2}, \quad (21.12)$$

где ν_{eio} — эффективное число соударений электронов с ионами в слабом поле, когда $T_e = T$ (ср. (3.7)).

Доля теряемой энергии. В случае только упругих соударений электронов с тяжелыми частицами — молекулами и ионами, как ясно из (21.8), $\delta_{уп} = 2m/M$. Рассмотрим теперь и неупругие соударения. Примем, что основной вклад вносят соударения, при которых мала доля энергии электрона, теряемая при одном ударе. Для расчета δ следует тогда воспользоваться выражением (20.53) для S_{m0}^{HY} . Подставляя (20.53), (20.56) в (21.8) и интегрируя по частям, получаем [29, 33]:

$$\delta = \delta_{уп} \frac{\nu_e^{yn}}{\nu_e} + \frac{4\pi}{3\nu_e(T_e - T)N} \times \\ \times \sum_k \hbar\omega_k \left[1 - \exp\left\{-\frac{\hbar\omega_k}{T}\right\} \left(1 + \frac{\hbar\omega_k}{T_e}\right) \right] \int_0^\infty f_0(v) \nu_{\omega k}(v) v^2 dv, \quad (21.13)$$

где $\nu_{\omega k}$ — частота неупругих соударений электрона с возбуждением кванта $\hbar\omega_k$ (20.55). Если $\hbar\omega_k \ll T$, то формула (21.13) упрощается и принимает вид:

$$\delta = \delta_{уп} \frac{\nu_e^{yn}}{\nu_e} + \sum_k (\hbar\omega_k)^2 \int_0^\infty \nu_{\omega k}(v) v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_e}\right) dv \times \\ \times \left[mT \int_0^\infty v^4 \nu(v) \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_e}\right) dv \right]^{-1}. \quad (21.14)$$

Здесь $\nu(v) = \nu^{yn}(v) + \sum_k \nu_{\omega k}$ — полная частота соударений электрона. В молекулярной плазме второй член (21.14) много больше первого даже при комнатных температурах. Значения параметра δ в ионосфере обсуждены в § 5.2.

Электронный ток. Диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы. Подставляя функцию распределения $f_0(v) + (v/v)f_1(v)$ в выражение (20.1), находим электронный ток:

$$j = -\frac{4\pi e}{3} \int_0^\infty v^3 f_1 dv. \quad (21.15)$$

Для вычисления тока необходимо, следовательно, определить функцию f_1 , т. е. решить уравнение (21.2).

Подставляя в это уравнение функцию f_{00} , учтем, что зависимость f_{00} от времени t можно пренебречь (см. начало параграфа). Если к тому же $\nu_m(v) + \nu_i(v) \gg \nu_{ee}(v)$, то междоэлектронные соударения несут существенны и уравнение (21.2) сильно упрощается. Его решение в этом случае, как легко

убедиться прямой подстановкой, имеет вид [181]:

$$\mathbf{f}_{10} = -\mathbf{u} \frac{\partial f_{00}}{\partial v}, \quad (21.16)$$

где \mathbf{u} — скорость направленного движения электрона, определяемая уравнением

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu(v)\mathbf{u} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} - \frac{e}{mc}[\mathbf{u}\mathbf{H}]. \quad (21.17)$$

Заметим, что уравнение для \mathbf{u} вполне аналогично уравнению (3.8) для направленной скорости в элементарной теории, с той только разницей, что ν в (21.17) зависит от скорости хаотического движения v . Поэтому выражения для функции $\mathbf{u}(v, t)$ совершенно аналогичны выражениям, полученным выше в элементарной теории, нужно только в них ν_e заменить на $\nu(v)$. Например, в изотропной плазме, находящейся в переменном электрическом поле частоты ω , как следует из (3.10),

$$\mathbf{u}(v, t) = -\frac{e\mathbf{E}}{m[-i\omega + \nu(v)]} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} \left[\frac{\nu(v) + i\omega}{\omega^2 + \nu^2(v)} \right]. \quad (21.18)$$

Подставляя найденную функцию \mathbf{f}_{10} в (21.15) и интегрируя по скорости v , найдем выражение для тока \mathbf{j} , а следовательно, и для проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы, так как $\mathbf{j} = [\sigma - i\omega(\epsilon - 1)/4\pi]\mathbf{E}$. Переходя к интегрированию по безразмерной скорости $z = v\sqrt{m/2T_e}$, получаем:

$$\epsilon = 1 - \frac{8\omega_0^2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^4 e^{-z^2} dz}{\omega^2 + \nu^2(v)}, \quad \sigma = \frac{2\omega_0^2}{3\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\nu(v) z^4 e^{-z^2} dz}{\omega^2 + \nu^2(v)}. \quad (21.19)$$

Здесь $\nu(v) = \nu(z\sqrt{2T_e/m})$ — частота соударений. Выражения для ϵ и σ удобно записать в виде:

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_e^2)} K_\epsilon\left(\frac{\omega}{\nu_e}\right), \quad \sigma = \frac{e^2 N \nu_e}{m(\omega^2 + \nu_e^2)} K_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_e}\right); \quad (21.20)$$

$$K_\sigma(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (x^2 + 1) \int_0^\infty \frac{\nu(v)}{\nu_e} \frac{z^4 e^{-z^2} dz}{x^2 + \nu^2(v)/\nu_e^2}, \quad (21.21)$$

$$K_\epsilon(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (x^2 + 1) \int_0^\infty \frac{z^4 e^{-z^2} dz}{x^2 + \nu^2(v)/\nu_e^2}, \quad x = \frac{\omega}{\nu_e}.$$

Здесь ν_e — эффективная частота соударений, определенная согласно (21.7), а $K_\epsilon(x)$ и $K_\sigma(x)$ — поправочные коэффициенты, которые показывают, насколько значения σ и ϵ , вычисленные в кинетической теории, отличаются от соответствующих значений, получаемых с помощью элементарных формул (3.13). Они представлены в табл. 21.1 для случая соударений с молекула-

Таблица 21..

$\frac{\omega}{v_e}$	Соударения с молекулами, $q = \text{const}$		Соударения с молекулами воздуха, $q \sim v^{2/3}$		Соударения с ионами			
					без учета ee -соударений		с учетом ee -соударений	
	K_e	K_σ	K_e	K_σ	K_e	K_σ	K_e	K_σ
0	1,51	1,13	3,71	1,42	19,8	3,39	4,59	1,95
0,01	1,51	1,13	3,58	1,41	19,5	3,38	4,59	1,95
0,05	1,50	1,13	3,17	1,38	15,8	2,76	4,51	1,92
0,1	1,48	1,12	2,77	1,33	11,1	2,12	4,34	1,86
0,2	1,40	1,09	2,22	1,21	5,47	1,40	3,79	1,65
0,5	1,19	1,02	1,46	0,984	2,44	0,90	2,30	1,07
1,0	1,07	0,94	1,10	0,877	1,52	0,68	1,41	0,75
2,0	0,98	0,95	0,993	0,895	1,15	0,59	1,05	0,62
4,0	1,0	0,98	0,989	0,954	1,01	0,67	0,97	0,7
6,0	1,0	0,99	0,994	0,976	0,97	0,72	0,98	0,82
10,0	1,0	1,0	0,997	0,991	0,98	0,78	0,99	0,92
35,0	1,0	1,0	1,0	0,999	0,99	0,91	1,0	0,95
∞	1	1	1	1	1	1	1	1

ми³ при $q = \text{const}$ (20.19) и для соударений электрона в воздухе (21.10). Видно, что коэффициенты K_e и K_σ в этих случаях не очень сильно отличаются от единицы. При соударениях с ионами коэффициенты K_e и K_σ более значительны, особенно в области низких частот $\omega \ll v_e$.

Заметим, что функции K_e и K_σ зависят от одной переменной $x = \omega/v_e$ только в случае степенной зависимости v от v (т. е. при $v \sim v^\alpha$). При более сложной зависимости v от v коэффициенты K_σ и K_e зависят уже от двух переменных: от ω/v_e и от T_e [28].

Выше при определении функции f_1 не учитывались междуэлектронные соударения. Это справедливо при условии, что частота соударений электронов с ионами и молекулами (20.18) (20.33) много больше частоты междуэлектронных соударений (20.44). При высоких степенях ионизации плазмы это условие не выполняется. В (21.2) необходимо учесть тогда соударения между электронами (20.52), и это уравнение приобретает интегродифференциальный характер. Решение уравнения (21.2) находится тогда путем разложения функции f_1 в ряд по полиномам Лагерра [24, 33, 182, 224].

Вычисление ϵ и σ при учете междуэлектронных соударений показывает, что эти величины можно по-прежнему представить в виде (21.20) [27]. Изменяются при этом лишь функции K_σ и K_e ; они представлены в табл. 21.1 для полностью однократно ионизованной плазмы. Видно, что учет соударений между электронами уменьшает значения функций K_σ и K_e в полностью ионизованной плазме, но они все же остаются существенно

отличающимися от единицы. Заметим также, что при высоких частотах ($\omega^2 \gg v_e^2$) функции K_σ и K_ε и при учете междуэлектронных соударений близки к единице, т. е. влияние междуэлектронных соударений в случае высоких частот несущественно [183]. В частично ионизованной плазме функции K_σ , K_ε зависят уже не только от ω/v_e , но и от степени ионизации плазмы, точнее — от соотношения между v_{ei} и v_{em} [184, 33]*).

С помощью тех же функций K_ε и K_σ удается выразить и компоненты тензоров ε_{ij} и σ_{ij} в анизотропной плазме, т. е. при наличии постоянного магнитного поля \mathbf{H} [27]. При этом для компонент тензоров ε_{ij} и σ_{ij} в направлении, параллельном магнитному полю (ε_{zz} , σ_{zz}), по-прежнему справедливы выражения (21.20); в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{H} (плоскость xy), имеем:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left\{ \frac{(\omega - \omega_H)}{(\omega - \omega_H)^2 + v_e^2} K_\varepsilon \left(\frac{|\omega - \omega_H|}{v_e} \right) + \frac{(\omega + \omega_H)}{(\omega + \omega_H)^2 + v_e^2} K_\varepsilon \left(\frac{|\omega + \omega_H|}{v_e} \right) \right\}, \quad (21.22)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = \frac{i\omega_0^2}{2\omega} \left\{ \frac{(\omega - \omega_H)}{(\omega - \omega_H)^2 + v_e^2} K_\varepsilon \left(\frac{|\omega - \omega_H|}{v_e} \right) - \frac{(\omega + \omega_H)}{(\omega + \omega_H)^2 + v_e^2} K_\varepsilon \left(\frac{|\omega + \omega_H|}{v_e} \right) \right\},$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\omega_0^2 v_e}{8\pi} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + v_e^2} K_\sigma \left(\frac{|\omega - \omega_H|}{v_e} \right) + \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + v_e^2} K_\sigma \left(\frac{|\omega + \omega_H|}{v_e} \right) \right\}, \quad (21.23)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{i\omega_0^2 v_e}{8\pi} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + v_e^2} K_\sigma \left(\frac{|\omega - \omega_H|}{v_e} \right) - \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + v_e^2} K_\sigma \left(\frac{|\omega + \omega_H|}{v_e} \right) \right\}.$$

Эти выражения для ε_{ij} и σ_{ij} лишь множителями K_σ и K_ε отличаются от соответствующих выражений (3.16), полученных в элементарной теории. Поэтому, в частности, по-прежнему имеет место резонансное возрастание проводимости σ_{ij} вблизи

*) В [184, 33] протабулированы функции $g(\omega/v_e)$ и $h(\omega/v_e)$. Коэффициенты K_σ и K_ε связаны с ними соотношениями:

$$K_\sigma = \frac{g [1 + (\omega/v_e)^2]}{g^2 + (\omega/v_e)^2 h^2}, \quad K_\varepsilon = \frac{h [1 + (\omega/v_e)^2]}{g^2 + (\omega/v_e)^2 h^2}.$$

гирочастоты (при $\omega \sim \omega_H$). Значение K_σ сказывается при этом на высоте и ширине резонансной кривой.

Электронная температура. Подставляя найденные выражения для эффективной частоты соударений ν_e , относительной доли передаваемой энергии δ и тока j в (21.6), получаем замкнутое уравнение для температуры электронов. Существенно, что это уравнение для T_e близко к уравнению элементарной теории (3.18). Оно отличается от (3.18), (3.10) лишь коэффициентом K_σ в выражении для электронного тока, а также тем, что оставшиеся в элементарной теории неопределенными число соударений ν_e и доля теряемой энергии δ теперь точно фиксированы формулами (21.7), (21.8).

21.2. Слабо ионизованная плазма.

В слабо ионизованной плазме в уравнении для функции f_0 междуэлектронные соударения малосущественны (так как $\nu_{ee} \ll \delta\nu$) и их в первом приближении можно не учитывать. Еще менее существенны они в уравнении для функции f_1 , так как $\nu_{ee} \ll \delta\nu_e \ll \nu_e$. Поэтому функция f_1 в однородной слабо ионизованной плазме с точностью до членов порядка δ всегда дается выражением (21.16): $f_1 = -u(\partial f_0/\partial v)$, где скорость $u = u(v, t)$ определена уравнением (21.17). Подставляя это значение f_1 в (21.1), приходим окончательно к следующему уравнению для функции f_0 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[\delta_{yn} (v_m^{yn} + v_i) \frac{T}{m} - \frac{2eEu}{3m} \right] \frac{\partial f_0}{\partial v} + \delta_{yn} v (v_m^{yn} + v_i) f_0 \right\} + S_{ny}^{ny}(f_0) = 0. \quad (21.24)$$

В зависимости от соотношения между временем ω^{-1} , в течение которого существенно изменяется электрическое поле, и временем релаксации для функции f_0 , равным $(\delta\nu_e)^{-1}$, можно выделить случаи медленно ($\omega \ll \delta\nu_e$) и быстро ($\omega \gg \delta\nu_e$) изменяющихся полей (так же как в § 3). В первом случае, являющемся квазистационарным, зависимость f_0 от времени в уравнении (21.24) можно не учитывать. В частности, это, конечно, имеет место в случае постоянного электрического поля. С другой стороны, для быстропеременного электрического поля $\omega \gg \delta\nu_e$ функция f_0 не успевает меняться так же быстро, как меняется поле. Поэтому она устанавливается на некотором среднем не зависящем от времени уровне, переменные отклонения от которого малы — имеют амплитуду порядка $\delta\nu_e/\omega$ (так же как колебания электронной температуры в элементарной теории, см. § 3.2). Благодаря этому в обоих этих случаях в первом приближении можно пренебречь членом $\partial f_0/\partial t$ в уравнении (21.24) и тем самым, фактически, избавиться от временной переменной. Это позволяет в ряде случаев найти простое аналитическое решение уравнения (21.24).

Функция распределения. Если основной вклад вносят упругие соударения электронов, то в (21.24) $S_{m0}^{ny} = 0$. Тогда, например, в постоянном электрическом поле \mathbf{E} (при $\mathbf{H} = 0$) согласно (21.17) $\mathbf{u} = -e\mathbf{E}/m\nu$, и уравнение (21.24) записывается в виде:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[\nu \delta_{yn} \frac{T}{m} + \frac{2e^2 E^2}{3m^2 \nu} \right] \frac{\partial f_0}{\partial v} + \nu v^3 \delta_{yn} f_0 \right\} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 j_v) = 0; \quad (21.25)$$

здесь $\nu = \nu(v) = \nu_m^n + \nu_l$. Умножая это уравнение на v^2 и интегрируя его от нуля до v , убеждаемся, что $j_v = 0$ (поскольку в отсутствие источника электронов $[v^2 j_v]_{v=0} = 0$). Интегрируя теперь уравнение $j_v = 0$, получаем:

$$f_0 = C \exp \left\{ - \int_0^v \frac{mv \, dv}{T + (2e^2 E^2 / 3m \nu^2 \delta_{yn})} \right\}. \quad (21.26)$$

В слабом поле отсюда получается максвелловское распределение, но в сильном поле функция распределения f_0 может существенно отличаться от максвелловской, поскольку частота соударений зависит от v . Например, в сильном электрическом поле при соударениях с молекулами при $q = \text{const}$ (20.19) получаем из (21.26) формулу Дрювестейна:

$$f_0 = C \exp \left\{ - \frac{3m^2 \delta_{yn}}{8e^2 E^2 l^2} v^4 \right\}, \quad (21.27)$$

где $l = v/\nu(v) = 1/\pi a^2 N_m$ — длина свободного пробега электрона, C — константа, определяемая условием нормировки (20.1). Распределение Дрювестейна при больших скоростях электронов сильно отличается от максвелловского: оно спадает значительно быстрее максвелловского.

Выше рассматривался лишь случай постоянного или квазистационарного ($\omega \ll \delta\nu_e$) электрического поля. Вполне аналогично задача решается и в быстропеременном ($\omega \gg \delta\nu_e$) электрическом поле, так как и в этом случае в первом приближении можно пренебречь производной $\partial f_0 / \partial t$ и заменить в (21.24) произведение $\mathbf{E}\mathbf{u}$ его усредненным по времени значением $\langle \mathbf{E}\mathbf{u} \rangle_t$. Функция $f_0(v)$ принимает тогда вид [185—188]:

$$f_0 = C \exp \left\{ - \int_0^v \frac{mv \, dv}{T + (e^2 E_0^2 / 3m \delta_{yn}) \varphi(v)} \right\}. \quad (21.28)$$

Здесь функция $\varphi(v)$ без магнитного поля равна $[\omega^2 + v^2(v)]^{-1}$, а при наличии магнитного поля

$$\varphi(v) = \frac{\cos^2 \beta}{\omega^2 + v^2(v)} + \frac{\sin^2 \beta}{2[(\omega - \omega_H)^2 + v^2(v)]} + \frac{\sin^2 \beta}{2[(\omega + \omega_H)^2 + v^2(v)]}, \quad (21.29)$$

где β — угол между \mathbf{E}_0 и \mathbf{H} .

При высоких частотах $\omega \gg v(v)$ функция распределения (21.28) — максвелловская. Напротив, при низких частотах ($\omega + \omega_H < v(v)$) она совпадает с распределением (21.26) для постоянного электрического поля (только соответствующее постоянное поле оказывается при этом, естественно, эквивалентным эффективному полю $E_{\text{эфф}} = E_0/\sqrt{2}$, так как $\langle E^2 \rangle_t = E_0^2/2$). Реализуется случай упругих соударений в инертных газах при невысокой средней энергии электронов (до 0,5 — 1 эВ).

Рассмотрим теперь случай, когда основную роль играют неупругие соударения, сопровождающиеся потерей малой доли энергии электрона. Такой случай, по-видимому, осуществляется в двухатомных газах (водороде, кислороде, азоте, воздухе) при невысокой средней энергии электронов ($T_e \leq (1-3) \cdot 10^3$ град), когда основную роль играют потери на возбуждение вращательных уровней, энергия которых, естественно, мала в сравнении со средней энергией электронов. Интеграл неупругих столкновений для функции f_0 может быть в этом случае представлен в виде (20.53):

$$S_{m0}^{\text{нy}}(f_0) = -\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 R_{\text{н}}(v) \left[\frac{T}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right\}, \quad (21.30)$$

где $R_{\text{н}}(v) = \sum r_{\omega k}(v)$ — суммарная функция, описывающая потери электрона при неупругих соударениях (здесь для простоты принято, что $T \gg \hbar\omega_k$) [см. (20.57)]. Подставляя это выражение для $S_{m0}^{\text{нy}}(f_0)$ в уравнение (21.25), убеждаемся в том, что оно фактически совпадает с рассматривавшимся выше уравнением для случая упругих соударений электрона; необходимо только заменить $\delta_{\text{уп}} = 2m/M$ на

$$\delta(v) = \frac{\delta_{\text{уп}}(v_m^{\text{уп}} + v_i) + R_{\text{н}}(v)}{v(v)} = \frac{R(v)}{v(v)}. \quad (21.31)$$

Соответственно и решение этого уравнения в молекулярной плазме совпадает с решениями, рассматривавшимися выше: достаточно опять-таки заменить $\delta_{\text{уп}}$ на $\delta(v)$. Функция $\delta(v)$ представлена на рис. 21.3 для водорода H_2 , азота N_2 , кислорода O_2 и воздуха [189].

Воспользовавшись полученными выше выражениями для функции распределения, нетрудно найти среднюю энергию

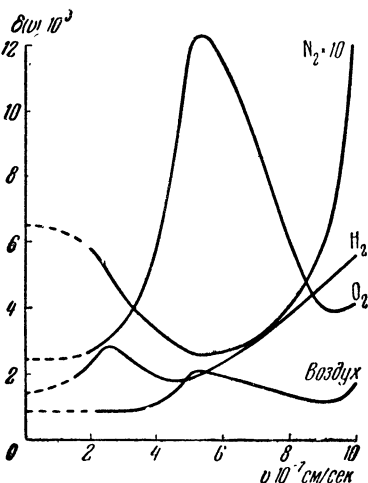


Рис. 21.3. Доля теряемой энергии.

для водорода H_2 , азота N_2 , кислорода O_2 и воздуха [189].

Воспользовавшись полученными выше выражениями для функции распределения, нетрудно найти среднюю энергию

электронов в слабо ионизованной плазме:

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi m}{N} \int_0^{\infty} v^4 f_0 dv \quad (21.32)$$

и компоненты тензоров σ и ε :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{4\pi}{3N} \int_0^{\infty} v^3 \frac{\partial f_0}{\partial v} \varepsilon_{ij}(v) dv, \quad \sigma_{ij} = -\frac{4\pi}{3N} \int_0^{\infty} v^3 \frac{\partial f_0}{\partial v} \sigma_{ij}(v) dv. \quad (21.33)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(v)$, $\sigma_{ij}(v)$ определены формулами элементарной теории (3.16), где v_e заменяется на $v(v)$. Выражения (21.32), (21.33) подробно проанализированы, например, в [33, 190]. Эти формулы использовались в работах [81, 82, 70, 86, 191—194] при рассмотрении самовоздействия радиоволн в плазме. Отметим, что результаты точного кинетического расчета \mathcal{E} , ε , σ для слабо ионизованной плазмы обычно не сильно отличаются от результатов расчета тех же величин по приведенным выше более простым формулам для сильно ионизованной плазмы (имеются, конечно, в виду сравнения результатов при тех же значениях напряженности поля E_0 , длины пробега $l = (\pi a^2 N_m)^{-1}$, доли теряемой энергии δ и т. п.). Подчеркнем, однако, что точное кинетическое рассмотрение очень существенно в тех случаях, когда вследствие немонотонной зависимости v от v возникают N- и S-образные зависимости тока j от E (см. [226]). Функция распределения электронов в переменном электрическом поле постоянна во времени лишь в первом приближении по параметру $\delta v_e/\omega$. Переменные поправки порядка $\delta v_e/\omega$ существенны для нелинейной генерации волн гармоник (см. § 9); они определялись в работах [195, 164, 86—94]. Кинетическая теория самовоздействия и взаимодействия радиоволн, модулированных по амплитуде, рассматривалась в [191, 81, 143, 192].

Частота ионизации. В достаточно сильном переменном электрическом поле становится существенной ионизация молекул быстрыми электронами. В стационарных условиях уравнение для функции распределения электронов (21.24) с учетом ионизации запишется в виде:

$$-\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta(v) v \left[\left(\frac{T}{m} + \frac{e^2 E_0^2}{3 \delta m^2 (\omega^2 + v^2)} \right) \frac{df_0}{dv} + v f_0 \right] \right\} + v_{\text{ion}}(v) f_0 = 0. \quad (21.34)$$

Здесь принято, что основные неупругие соударения электронов сопровождаются потерей небольшой доли энергии (21.30), (21.31), $v_{\text{ion}}(v)$ — частота ионизации:

$$v_{\text{ion}}(v) = v q_{\text{ion}}(v) N_m. \quad (21.35)$$

где $q_{\text{ion}}(v)$ — полное сечение ионизации молекулы при соударении с электроном, имеющим скорость v (т. е. энергию $\epsilon = mv^2/2$). Сечение $q_{\text{ion}} = 0$ при $\epsilon < \epsilon_i$, где ϵ_i — энергия ионизации (см. табл. 5.7). При $\epsilon \geq \epsilon_i$ сечение q_{ion} вначале резко возрастает, а затем (при $\epsilon \geq (4-5)\epsilon_i$) медленно убывает с ростом ϵ [53]. До $\epsilon \sim 1,5 \epsilon_i$ сечение q_{ion} растет линейно:

$$q_{\text{ion}} = \begin{cases} 0 & \text{при } v < v_0 = \sqrt{2\epsilon_i/m}, \\ C(v - v_0) & \text{при } v > v_0. \end{cases} \quad (21.36)$$

Для кислорода O_2 , азота N_2 и окиси азота NO согласно [203] имеем:

$$C_{\text{O}_2} = 0,77 \cdot 10^{-24} \text{ см} \cdot \text{сек}, \quad C_{\text{N}_2} = 1,1 \cdot 10^{-24} \text{ см} \cdot \text{сек}, \\ C_{\text{NO}} = 1 \cdot 10^{-24} \text{ см} \cdot \text{сек}. \quad (21.37)$$

Для ионизации кислорода O_2 скорость $v_0 = 2,06 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$, для азота $v_0 = 2,34 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$.

При решении уравнения (21.34) с учетом ионизации (21.35), (21.36) естественно выделить две области скоростей: $v \leq v_0$ и $v > v_0$. В первой области $v \leq v_0$ ионизация незначительна и (21.34) аналогично уравнению (21.25), рассматривавшемуся выше. Разница, однако, в том, что из-за наличия ионизации поток j_v теперь отличен от нуля:

$$j_v = -\frac{1}{2} \delta v \left[\left(\frac{T}{m} + \frac{e^2 E_0^2}{3m^2 \delta(v) (\omega^2 + v^2)} \right) \frac{df_0}{dv} + v f_0 \right] = j_0. \quad (21.38)$$

Решение этого уравнения:

$$f_0(v) = C_0 \exp \left(- \int_0^v \frac{mv}{T_1(v)} dv \right) - \\ - 2j_0 \exp \left(- \int_0^v \frac{mv}{T_1(v)} dv \right) \int_0^v \frac{m}{\delta v T_1} \exp \left(\int_0^v \frac{mv}{T_1} dv \right) dv, \quad (21.39) \\ T_1(v) = T + e^2 E_0^2 / 3m \delta(v) [\omega^2 + v^2(v)].$$

Константа C_0 определена условиями нормировки (20.1).

Учтем, что здесь рассматривается лишь слабо ионизованная плазма: средняя энергия электронов \mathcal{E} в этом случае всегда мала в сравнении с ϵ_i , а поток j_0 экспоненциально мал по параметру ϵ_i/\mathcal{E} . Поэтому в условия нормировки второй член в выражении (21.39) фактически вклада не дает и нормировочная константа C_0 совпадает с определявшейся без j_0 . Функция распределения (21.39) при $v < v_0$ также совпадает с функцией распределения в отсутствие ионизации. Ионизационные эффекты вносят заметный вклад в f_0 только при больших скоростях электронов $v \sim v_0$.

При $v > v_0$ уравнение (21.34) принимает вид:

$$-\frac{\delta(v_0) \nu(v_0)}{2} \left[\frac{T_1(v_0)}{m} \frac{d^2 f_0}{dv^2} + v_0 \frac{df_0}{dv} \right] + N_m C v_0 (v - v_0) f_0 = 0. \quad (21.40)$$

Здесь учтено, что в силу условия $\epsilon_i/\mathcal{E} \gg 1$ в уравнении (21.34) интерес представляют лишь энергии, близкие к энергии ионизации ϵ_i , или же скорости v , близкие к v_0 .

Для сечения ионизации по той же причине использована линейная аппроксимация (21.36). Переходя в (21.40) к безразмерной переменной

$$\xi = \frac{v - v_0}{v_1}, \quad v_1 = \left[\frac{\delta(v_0) \nu(v_0) T_1(v_0)}{2m v_0 C N_m} \right]^{1/3}, \quad (21.41)$$

получим:

$$\frac{d^2 f_0}{d\xi^2} + \alpha \frac{df_0}{d\xi} - \xi f_0 = 0, \quad (21.42)$$

$$\alpha = \frac{m v_0 v_1}{T_1(v_0)} = \left[\frac{\epsilon_i}{T_1(v_0)} \right]^{2/3} \left(\frac{2\delta(v_0) \nu(v_0)}{v_0^2 C N_m} \right)^{1/3}.$$

Уравнение (21.42) подстановкой $f_0 = e^{-\alpha \xi/2} f$ сводится к уравнению Эйри. Решение уравнения (21.42), обращающееся в нуль при $\xi \rightarrow \infty$, имеет, таким образом, вид:

$$f_0 = C_E \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \xi\right) E\left[-\left(\frac{\alpha^2}{4} + \xi\right)\right] =$$

$$= C_E e^{-\alpha \xi/2} \sqrt{\xi} \left[-I_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) + I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \right]. \quad (21.43)$$

Здесь $E(-\xi)$ — функция Эйри [204], $I_p(z)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $\xi = \xi + (\alpha^2/4)$. При больших значениях аргумента функция Эйри убывает как $\exp(-2/3 \xi^{3/2})$. Отсюда видно, что в области скоростей $v > v_0$ функция распределения резко падает, это и служит обоснованием преобразования уравнения (21.34) к (21.40).

Сшивая значения f_0 и df_0/dv на границе $v = v_0$ для функций распределения (21.39) и (21.43), можно определить константы C_E и j_0 . В частности,

$$j_0 = \frac{C_0}{2} \delta(v_0) \nu(v_0) v_0 (1 - J(z)) \exp\left(-\int_0^{v_0} \frac{m v}{T_1(v)} dv\right), \quad (21.44)$$

$$z = \alpha^3/12, \quad J(z) = (I_{-1/3} - I_{1/3})/(I_{-2/3} - I_{2/3}).$$

Здесь учтено, что членами порядка \mathcal{E}/ϵ_i можно пренебречь.

Поток j_0 в пространстве скоростей вызван ионизацией. Как видно непосредственно из (21.34), (21.38),

$$j_0 = \int_{v_0}^{\infty} \nu_{\text{ion}}(v) f_0 dv = C v_0 N_m \int_{v_0}^{\infty} (v - v_0) f_0 dv. \quad (21.45)$$

Эффективная частота ионизации, входящая в уравнение баланса ионизации (5.38), связана с j_0 соотношением $\nu_{\text{ион}} = 4\pi v_0^2 j_0 / N$, т. е.

$$\nu_{\text{ион}} = 2\pi C_0 N^{-1} \delta(v_0) v(v_0) v_0^3 [1 - J(z)] \exp\left(-\int_0^{v_0} \frac{mv}{T_1(v)} dv\right). \quad (21.46)$$

Здесь $v_0 = (2e_i/m)^{1/2}$. Функция $J(z)$ приведена в табл. 21.2. При

Т а б л и ц а 21.2

z	$J(z)$	z	$J(z)$	z	$J(z)$
0,002	0,190	0,6	0,838	1,8	0,927
0,02	0,391	0,8	0,869	2,0	0,932
0,05	0,482	1,0	0,887	2,2	0,937
0,1	0,570	1,2	0,901	2,4	0,942
0,2	0,708	1,4	0,913	2,6	0,947
0,4	0,793	1,6	0,921	2,8	0,952

малых значениях z она резко нарастает,

$$J(z) = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} \left(\frac{z}{2}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(4/3)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2/3}\right],$$

а затем постепенно приближается к единице. При $z \gg 1$

$$1 - J(z) \approx \frac{1}{6z} \left[1 - \frac{462}{864z}\right]. \quad (21.47)$$

Константа C_0/N в (21.46) определена условием нормировки:

$$\frac{C_0}{N} = \left[4\pi \int_0^\infty v^2 \exp\left(-\int_0^v \frac{mv}{T_1(v)} dv\right) dv\right]^{-1}. \quad (21.48)$$

В частности, если в основной области скоростей $v \sim (\mathcal{E}/m)^{1/2}$ частота $\omega^2 \gg v^2$, то

$$\frac{C_0}{N} = \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2}, \quad T_e = \frac{2}{3} \mathcal{E} = T + \frac{e^2 E_0^2}{3m \delta \omega^2}. \quad (21.49)$$

Основное значение в (21.46) имеет, разумеется, экспоненциальный член. Учтем, что если температура молекул невысока, $T \leq 1000^\circ$, то частота ионизации $\nu_{\text{ион}}$ может стать существенной лишь в достаточно сильном поле. В этом случае температурой T в выражении для $T_1(v)$ можно пренебречь в сравнении со

вторым членом, и формула (21.46) представляется в виде:

$$v_{\text{ion}} = (v_{\text{ion}})_0 \exp \left\{ - \frac{3m^2 (A\omega^2 + B)}{e^2 E_0^2} \right\}, \quad (21.50)$$

$$A = \int_0^{v_0} \delta(v) v dv, \quad B = \int_0^{v_0} \delta(v) v^2(v) v dv,$$

$$(v_{\text{ion}})_0 = 2\pi \frac{C_0}{N} \delta(v_0) v(v_0) v_0^3 (1 - J(z)).$$

В воздухе сечение упругих соударений электрона при больших скоростях $v > 10^8$ можно считать постоянным: $q \approx 1,05 \times 10^{-15} \text{ см}^2$ [199]. Принимая $\delta(v)$ также постоянной, $\delta = \delta = 1,0 \cdot 10^{-2}$, находим константы A и B :

$$B = 5,5N_m^2 \text{ см}^8/\text{сек}^4, \quad A = 2,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^2/\text{сек}^2. \quad (21.51)$$

Здесь учтено, что ионизуется кислород O_2 ($v_0 = 2,06 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$). При вычислении параметра α (или z) следует также принимать во внимание, что ионизируются только молекулы кислорода, т. е. что $CN_m = CN_{O_2}$. Тогда имеем:

$$z = \frac{\alpha^3}{12} = \left[\frac{3m\delta(v_0)(\omega^2 + v^2(v_0))\epsilon_i}{e^2 E_0^2} \right]^2 \frac{\delta(v_0) v(v_0)}{6v_0^2 CN_{O_2}} \approx 0,52 \frac{m^4 (A\omega^2 + 2B)^2}{e^4 E_0^4}. \quad (21.52)$$

Следует подчеркнуть, что использование дифференциального выражения (21.30) для интеграла столкновений в рассматриваемой здесь области высоких скоростей электрона $v \sim v_0 = (2\epsilon_i/m)^{1/2}$ не является вполне обоснованным. Действительно, существенный вклад в потери энергии электрона вносят неупругие соударения, сопровождающиеся возбуждением оптических уровней, а при каждом таком ударе электрон теряет большую часть своей энергии. Кроме того, состояние баланса ионизации в плазме может зависеть от количества возбужденных атомов. На числе возбужденных атомов или молекул сильно сказываются условия поглощения излучения в системе: является ли излучение запертым или же оно выходит за пределы рассматриваемой области плазмы. Более последовательный анализ вопроса должен поэтому включать в себя одновременное исследование распределения по энергиям электронов, фотонов и возбужденных атомов [205, 206, 223, 283].

Отметим, что на начальной стадии ионизации воздуха может заметно сказаться наличие окиси азота NO. Правда, при невысоких температурах газа $T \leq 300 - 500^\circ$ количество молекул NO мало (5.44) и роль их незначительна. Однако при $T \geq 1000^\circ$ число их сильно возрастает и, поскольку энергия ионизации невысока ($\epsilon_i = 9,3 \text{ эв}$), ионизация этих молекул может оказаться существенной.

21.3. Произвольная степень ионизации. Об элементарной теории.

Выше были рассмотрены предельные случаи слабо ионизованной плазмы, когда междуэлектронные соударения несущественны, и сильно ионизованной плазмы, когда, наоборот, вид функции f_0 определяется именно междуэлектронными соударениями. Рассмотрим теперь промежуточный случай, когда на вид функции f_0 существенно влияют и междуэлектронные соударения, и соударения электронов с тяжелыми частицами [196]. В уравнении для функции f_1 при этом междуэлектронными соударениями можно пренебречь, поскольку $v_{ee} \sim \delta v_{em} \ll v_{em}$. Поэтому f_1 по-прежнему записывается в виде $f_1 = -\mathbf{u} \frac{\partial f_0}{\partial v}$. Задача сводится, таким образом, к анализу одного уравнения для функции f_0 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[\delta_{\text{уп}} (v_m^{\text{уп}} + v_i) \frac{T}{m} - \frac{2e(\mathbf{E}\mathbf{u})}{3m} + A_2(f_0) \right] \frac{\partial f_0}{\partial v} + \right. \\ \left. + [\delta_{\text{уп}} (v_m^{\text{уп}} + v_i) + A_1(f_0)] v^3 f_0 \right\} + S_{m0}^{\text{ны}}(f_0) = 0; \quad (21.53)$$

здесь коэффициенты A_1 и A_2 — интегралы, зависящие от функции f_0 (20.44), (20.46).

В стационарных условиях — постоянное или быстропеременное электрическое поле — первым членом в (21.53) можно, как обычно, пренебречь, усреднив по времени $t \gg \omega^{-1}$ произведение $\mathbf{E}\mathbf{u}$. Решение оставшегося нелинейного интегродифференциального уравнения может быть найдено методом итераций. Этот метод дает хорошую сходимость, поскольку изменение функции f_0 при переходе от слабо ионизованной к сильно ионизованной плазме вызывает лишь небольшое изменение интегральных коэффициентов $A_1(f_0)$, $A_2(f_0)$.

Выберем в качестве нулевого приближения f_{00} максвелловскую функцию распределения электронов с температурой электронов, определенной уравнением (21.6). Подставляя ее в формулу (20.44), находим в этом же приближении интегральный коэффициент A_1 :

$$A_{10} = 8\pi v_e \int_0^v v_1^2 \exp \left\{ -\frac{mv_1^2}{2T_e} \right\} \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} dv_1 = 2v_e \left[\Phi(z) - \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \right]; \\ \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad v_e(v) = \frac{4\pi e^4 N \ln \Lambda}{m^2 v^3}. \quad (21.54)$$

Аналогично из (20.46)

$$A_{20} = \frac{2T_e}{m} v_e \left[\Phi(z) - \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \right] = \frac{T_e}{m} A_{10}. \quad (21.55)$$

Подставляя коэффициенты A_{10} и A_{20} в уравнение (21.53) и интегрируя его, находим, что функция распределения электронов в следующем (в первом) приближении имеет вид:

$$f_0^{(1)} = C \exp \left\{ - \int_0^v v (\delta v + A_{10}) \left[\frac{T}{m} \delta v + A_{20} - \frac{2e}{3m} \mathbf{E} \mathbf{u} \right]^{-1} dv \right\}. \quad (21.56)$$

Здесь для простоты принято, что интеграл неупругих соударений имеет вид (21.30), (21.31). В сильно ионизованной плазме основную роль в выражении (21.56) играют коэффициенты A_{10} и A_{20} , так что функция $f_0^{(1)}$ в этом случае — максвелловская с температурой электронов T_e , определенной уравнением (21.6). В слабо ионизованной плазме, напротив, коэффициентами A_{10} и A_{20} можно пренебречь и функция $f_0^{(1)}$ имеет вид (21.26), (21.28) и т. д. В частности, при $\delta = \text{const}$ в случае постоянной длины пробега (20.19) при $E_0 \gg E_p$ распределение (21.56) в слабо ионизованной плазме (при $A_{10}, A_{20} \rightarrow 0$) дрейфестейновское. С увеличением степени ионизации плазмы коэффициенты A_{10} и A_{20} становятся всё более существенными и функция распределения постепенно переходит в максвелловскую. Этот переход зависит от параметра

$$\rho = \frac{v_{ee}(v_{T_e})}{\delta v_m(v_{T_e})} = \frac{N}{N_m} \frac{\pi e^4 \ln \Lambda}{\pi a^2 \delta T_e^2} = 6 \cdot 10^7 \frac{N}{N_m} \left(\frac{1 \text{ эВ}}{T_e} \right)^2 \left(\frac{10^{-16} \text{ см}^2}{\pi a^2} \right) \left(\frac{10^{-4}}{\delta} \right). \quad (21.57)$$

Здесь $v_{T_e} = (2T_e/m)^{1/2}$, T_e — температура электронов. При $\rho \gg 5$ распределение максвелловское и плазму можно считать сильно ионизованной, т. е. использовать формулы, полученные в § 21.1; при $\rho \ll 5$ плазма слабо ионизована.

Следует отметить, что область перехода растянута, причем особенно сильно — при больших скоростях, т. е. в хвосте функции распределения. Например, в хвосте отклонения от максвелловского распределения значительны даже при $\rho = 50$. Вообще максвелловское распределение в хвосте (т. е. при больших v) можно считать имеющим место только тогда, когда ρ больше, чем $mv^2/2T_e$.

Вычисляя с помощью функции распределения $f_0^{(1)}(v)$ по формулам (20.44), (20.46) коэффициенты $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$, а затем вновь интегрируя уравнение (21.53), можно найти вторую итерацию $f_0^{(2)}$ и т. д. Расчет показывает, что отличие второй и последующих итераций от функции $f_0^{(1)}$ невелико, так что фактически всегда можно ограничиться лишь первой итерацией (21.56).

Об элементарной теории. Рассмотрим простейший случай, когда частота соударений электрона ν и доля энергии δ не зависят от его скорости: $\nu \neq \nu(v)$, $\delta \neq \delta(v)$. Решение кинетиче-

ского уравнения (21.1), (21.2) имеет в этом случае следующий вид:

$$f_0 = N \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T_e} \right), \quad f_1 = -u \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (21.58)$$

где температура T_e и средняя направленная скорость электронов u определены уравнениями:

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta v (T_e - T) = -\frac{2}{3} e E u, \quad \frac{du}{dt} + \nu u = -\frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [uH] \right). \quad (21.59)$$

Эти уравнения для u и T_e тождественны уравнениям элементарной теории (3.8), (3.18) при постоянных ν_e и δ . Другими словами, элементарная теория строго отвечает предположению, что ν и δ не зависят от v .

В действительности, однако, ν и δ зависят от скорости электрона v . В элементарной теории это учитывается введением $\nu_e(T_e)$, $\delta(T_e)$. Сами по себе величины $\nu_e(T_e)$ и $\delta(T_e)$ никак не определяются в элементарной теории. Их естественно ввести из условия наилучшего согласования с более строгим кинетическим рассмотрением, т. е. определить согласно (21.7), (21.8). В этом случае, если ν и δ не сильно зависят от v (т. е. $\nu_e(T_e)$ и $\delta(T_e)$ не сильно зависят от T_e), элементарная теория приводит к довольно точным количественным результатам при расчете T_e , ϵ и σ . Это видно, например, из табл. 21.1, где даны коэффициенты K_σ и K_ϵ , которые как раз и показывают различие между кинетическим и элементарным расчетами σ и ϵ в случае, когда $\nu_{ee} \gg \delta \nu_e$.

Подчеркнем, что в важном случае высокочастотного электрического поля $\omega \gg \nu_e$ коэффициенты K_σ и K_ϵ близки к единице независимо от вида функции $\nu(v)$. В этом случае элементарное рассмотрение в сильно ионизованной плазме оказывается точным. То же относится и к случаю плазмы в магнитном поле вдали от резонанса, когда $(\omega - \omega_H)^2 \gg \nu_e^2$, $\omega^2 \gg \nu_e^2$, $\nu_{ee} \gg \delta \nu_{em}$.

§ 22. Плазма в неоднородном электрическом поле

Рассмотрим плазму, находящуюся в неоднородном переменном электрическом поле E . Будем предполагать, что неоднородность слабая, т. е. амплитуда поля мало меняется на длине свободного пробега электронов или ионов и за время свободного пробега:

$$l \ll L = \frac{E_0^2}{|\nabla E_0^2|}, \quad \frac{1}{\nu E_0^2} \left| \frac{\partial E_0^2}{\partial t} \right| \ll 1. \quad (22.1)$$

В этом случае выполнены условия (20.14), и для описания функции распределения электронов можно использовать

кинетические уравнения (21.1), (21.2). Примем вначале, что

$$v(v) = v_m(v) \gg v_{ee}, \quad (22.2)$$

т. е. степень ионизации плазмы невысока, так что определяющее влияние на функцию распределения f_1 оказывают соударения с нейтралами. В этом случае уравнение (21.2) для функции f_1 принимает вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v(v) f_1 - \frac{e}{mc} [Hf_1] = \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} - v \nabla_r f_0 + \frac{eE_c}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (22.3)$$

Здесь учтено, что при наличии неоднородности в плазме появляется всегда электрическое поле E_c (см. § 4). Оно меняется во времени так же, как меняется сама неоднородность. В силу условий (22.1), (3.28) поле E_c и функция f_0 в уравнении (22.3) квазистационарны. Учитывая это, легко найти решение уравнения (22.3). Например, в отсутствие магнитного поля

$$f_1 = f_{1\omega} + f_{1c} = -u_\omega \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{v}{v} \nabla_r f_0 + \frac{eE_c}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (22.4)$$

$$u_\omega = - \frac{eE}{m(-i\omega + \nu)}.$$

Подставляем это выражение для f_1 в уравнение (21.1) и усредняем, как обычно, по t [$1/\delta v \gg \Delta t \gg 1/\omega$; здесь учтено, что согласно (3.28) $\omega \gg \delta v$]. Получаем:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla_r \left(-\frac{v}{v} \nabla_r f_0 + \frac{eE_c}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \langle E u_\omega \rangle_t \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + S_0(f_0) = 0. \quad (22.5)$$

Здесь учтено, что в силу условий (22.1) вкладом постоянного тока в нагрев плазмы ($E_c f_{1c}$) можно пренебречь в сравнении с $E f_{1\omega}$.

Вид функции f_0 при

$$v_{ee} \gg \delta v_e \quad (22.6)$$

определяется междуэлектронными соударениями (§ 21.1). Проведя в этом случае разложение, аналогичное (21.3), нетрудно убедиться, что функция f_0 в нулевом приближении — максвелловская:

$$f_{00} = N_e \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T_e} \right). \quad (22.7)$$

Из условия разрешимости уравнений для следующего приближения получаем, как и в § 21.1, уравнения, определяющие концентрацию электронов N_e и температуру T_e . Те же уравнения можно получить, подставляя функцию распределения (22.7) в (22.5), умножая (22.5) последовательно на $4\pi v^2$ и $2\pi m v^4$ и

интегрируя его по dv от 0 до ∞ . Первое из этих уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_e = q_i - q_r. \quad (22.8)$$

Здесь q_i и q_r — число актов ионизации и рекомбинации в единице объема в 1 сек, \mathbf{j}_e — плотность потока электронов:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 f_{1e} d\mathbf{v} = -\frac{4\pi}{3} \nabla_r \left(\int_0^\infty \frac{v^4}{v(v)} f_0 dv \right) + \\ + \frac{4\pi}{3} \frac{e}{m} \mathbf{E}_c \int_0^\infty \frac{v^3}{v(v)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Учитывая здесь, что функция f_0 — максвелловская (22.7), переписываем это соотношение в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e = -\frac{T_e}{m} A \nabla N_e - \frac{N_e}{m} \frac{d}{dT_e} (T_e A) \nabla T_e - e \frac{N_e}{m} A \mathbf{E}_c, \\ A(T_e) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^4 e^{-z^2} dz}{v(z\sqrt{2T_e/m})}, \quad z = v \sqrt{\frac{m}{2T_e}}. \end{aligned} \quad (22.10)$$

С другой стороны, по определению (4.14)

$$\mathbf{j}_e = -D_e \nabla N_e - \frac{N_e}{T_e} D_{Te} \nabla T_e - \frac{\sigma_e}{e} \mathbf{E}_c, \quad (22.11)$$

где D_e , D_{Te} , σ_e — коэффициенты диффузии, термодиффузии, проводимости. Следовательно,

$$D_e = \frac{T_e}{m} A, \quad D_{Te} = \frac{T_e}{m} \left(A + T_e \frac{dA}{dT_e} \right), \quad \sigma_e = \frac{e^2 N_e}{m} A. \quad (22.12)$$

Коэффициенты диффузии и проводимости связаны соотношением Эйнштейна (4.18).

Конкретный вид коэффициентов переноса зависит от частоты соударений электронов $\nu(v)$. Их естественно представить в виде, аналогичном (21.20):

$$D_e = \frac{T_e}{m\nu_e} K_D, \quad \sigma_e = \frac{e^2 N_e}{m\nu_e} K_\sigma(0). \quad (22.13)$$

Здесь ν_e — эффективная частота соударений электрона (21.7), коэффициенты K_D и K_σ показывают отличие точного кинетического расчета от элементарных формул (4.40). В нашем случае

$$K_D = K_\sigma(0) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \nu_e \int_0^\infty \frac{z^4 e^{-z^2} dz}{v(z\sqrt{2T_e/m})} = A\nu_e. \quad (22.14)$$

Здесь $K_{\sigma}(\omega/v_e)$ определено формулой (21.21). В частности, для модели столкновений с упругими шариками $v(z) \sim z$ (20.19) и

$$K_D = K_{\sigma}(0) = \frac{32}{9\pi} \approx 1,13 \quad (22.15)$$

(см. табл. 21.1). Коэффициент термодиффузии в том же случае вдвое меньше коэффициента диффузии.

Удобно ввести термодиффузионное отношение

$$k_{Te} = \frac{D_{Te}}{D_e} = 1 + \frac{T_e}{A} \frac{dA}{dT_e}. \quad (22.16)$$

В элементарной теории $k_{Te} = 1$ (§ 4.2). В действительности, как ясно из формулы (22.16), величина k_{Te} может сильно отличаться от единицы. Она существенно зависит от вида функции $v(v)$. В частности, если $v \sim v^{\alpha}$, то

$$k_{Te} = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (22.17)$$

Например, при $v = \text{const}$ (т. е. $\alpha = 0$) $k_{Te} = 1$; при $v \sim v$ (20.19) $k_{Te} = 1/2$; при $v \sim v^{5/3}$ (воздух (21.10)) $k_{Te} = 1/6$, а при $v \sim v^2$ имеем $k_{Te} = 0$.

Второе уравнение получается после подстановки функции f_{00} (22.7) в уравнение (22.5), умножения его на $2\pi m v^4$ и интегрирования по v от 0 до ∞ . Оно имеет вид:

$$N_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + (\mathbf{j}_e \nabla) T_e + \nabla \mathbf{g}_e = \\ = -\frac{2}{3} \langle \mathbf{E} \mathbf{j}_{\omega} \rangle_t - N_e \delta(T_e) v_e(T_e) (T_e - T) + \frac{2}{3} Q. \quad (22.18)$$

При выводе этого уравнения учтено, что согласно (22.8)

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_e T_e) = N_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + (\mathbf{j}_e \nabla) T_e - [\nabla (T_e \mathbf{j}_e) - T_e (q_t - q_r)]. \quad (22.19)$$

Первый член в квадратных скобках вошел в поток \mathbf{g}_e , второй — в Q .

Поток тепла \mathbf{g}_e в уравнении (22.18) определен выражением

$$\mathbf{g}_e = -\frac{4\pi m}{9} \nabla_r \left(\int_0^{\infty} \frac{v^6}{v(v)} f_{00} dv \right) - \frac{4\pi e}{9T_e} \mathbf{E}_c \left(\int_0^{\infty} \frac{v^6}{v(v)} f_{00} dv \right) - T_e \mathbf{j}_e. \quad (22.20)$$

Учитывая здесь, что функция f_{00} — максвелловская (22.7), перепишем (22.20) в виде:

$$\mathbf{g}_e = -\frac{N_e}{m} \nabla (T_e^2 B) + \frac{BT_e^2}{m} \left(-\nabla N_e - \frac{eN_e \mathbf{E}_c}{T_e} \right) - T_e \mathbf{j}_e, \quad (22.21)$$

$$B = \frac{16}{9\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{z^6 e^{-z^2} dz}{v(z\sqrt{2T_e/m})}.$$

Воспользовавшись формулами (22.11), (22.10), можно выразить здесь предпоследний член через \mathbf{j}_e и ∇T_e :

$$-\nabla N_e - \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{j}_e}{D_e} + \frac{N_e}{T_e} k_{Te} \nabla T_e, \quad (22.22)$$

где k_{Te} — термодиффузионное отношение (22.16). Подставляя (22.22) в (22.21), получаем окончательно:

$$\mathbf{g}_e = -\kappa_e \nabla T_e - \beta_e \mathbf{j}_e, \quad \beta_e = T_e \left(1 - \frac{B}{A}\right), \quad (22.23)$$

$$\kappa_e = \frac{N_e T_e}{m} \left[B(2 - k_{Te}) + T_e \frac{dB}{dT_e} \right]. \quad (22.24)$$

Интегралы A и B и коэффициент k_{Te} определены формулами (22.10), (22.21), (22.16).

Коэффициент теплопроводности κ_e также удобно представить в виде:

$$\kappa_e = \frac{N_e T_e}{m \nu_e} K_\kappa. \quad (22.25)$$

Коэффициент K_κ показывает отличие кинетического расчета κ_e от расчета по элементарной формуле (4.46). Для модели соударений с упругим шариком (20.19)

$$K_\kappa = 128/27\pi \approx 1,51. \quad (22.26)$$

Для постоянной частоты соударений $\nu \neq \nu(v)$ имеем $K_\kappa = 5/3$, для $\nu \sim v^{5/3}$ имеем $K_\kappa = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{112}{81} \approx 1,60$.

Выше для простоты пренебрегалось влиянием постоянного магнитного поля. Совершенно аналогично задача решается и с учетом \mathbf{H} . Из уравнения (22.3) находится функция f_1 :

$$f_1 = -\mathbf{u}_\omega \frac{\partial f_{00}}{\partial v} + \frac{v}{v^2 + \omega_H^2} \left\{ -v \left(\nabla_r + \frac{e}{mcv} [\mathbf{H}\nabla_r] \right) + \right. \\ \left. + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}_c + \frac{e}{mcv} [\mathbf{H}\mathbf{E}_c] \right) \frac{\partial}{\partial v} \right\} f_{00}. \quad (22.27)$$

Здесь \mathbf{u}_ω — скорость электрона, создаваемая переменным полем E (см. (3.15)).

Подставляя f_1 в уравнение (21.1), умножаем его последовательно на $4\pi v^2$ и $2\pi m v^4$ и интегрируем по v от 0 до ∞ , учитывая, что функция f_{00} — максвелловская (22.7). При этом вновь получаются уравнения (22.8), (22.18) для концентрации и температуры электронов. Потоки \mathbf{j}_e и \mathbf{g}_e по-прежнему определены формулами (22.11), (22.23). Однако вместо коэффициентов D_e , σ_e , D_{Te} , κ_e , β_e теперь стоят тензоры \hat{D}_e , $\hat{\sigma}_e$, \hat{D}_{Te} , $\hat{\kappa}_e$, $\hat{\beta}_e$. Продольные компоненты тензоров, естественно, совпадают с рассмотренными выше коэффициентами D_e , σ_e , ... Полный тензор $\hat{\sigma}'_e = \hat{\sigma}_e - \frac{i\omega}{4\pi} (\hat{\epsilon}_e - \hat{1})$ определен выражениями (21.22), (21.23) при

$\omega = 0$. Он отличается от «элементарного» тензора $\hat{\sigma}'_e$ (3.16) коэффициентами $K_\sigma(x)$, $K_\varepsilon(x)$, приведенными в табл. 21.1 (здесь $x = \omega_H/v_e$). Тензор диффузии \hat{D}_e связан с тензором $\hat{\sigma}'_e$ соотношением Эйнштейна (4.18). Поперечные компоненты тензоров диффузии, термодиффузии, термосилы и теплопроводности имеют вид:

$$(D_e)_{xx} = (D_e)_{yy} = \frac{T_e}{m} A_H, \quad (D_e)_{xy} = -(D_e)_{yx} = -\frac{T_e \omega_H}{m} A'_H, \quad (22.28a)$$

$$(D_{Te})_{xx} = (D_{Te})_{yy} = \frac{T_e}{m} \left[A_H + T_e \frac{dA_H}{dT_e} \right], \quad (22.28б)$$

$$(D_{Te})_{xy} = (D_{Te})_{yx} = -\frac{T_e \omega_H}{m} \left[A'_H + T_e \frac{dA'_H}{dT_e} \right],$$

$$\beta_{xx} = \beta_{yy} = 1 - \frac{B_H}{A_H} - \omega_H^2 \frac{A'_H}{A_H} \frac{B'_H A_H - B_H A'_H}{A_H^2 + \omega_H^2 A_H'^2}, \quad (22.28в)$$

$$\beta_{xy} = -\beta_{yx} = \omega_H \frac{B'_H A_H - B_H A'_H}{A_H^2 + \omega_H^2 A_H'^2},$$

$$\kappa_{xx} = \kappa_{yy} = \frac{NT_e}{m} \left\{ B_H + T_e \frac{\partial B_H}{\partial T_e} - \frac{T_e B_H}{A_H} \frac{\partial A_H}{\partial T_e} + \right. \\ \left. + \omega_H^2 \frac{B'_H A_H - B_H A'_H}{A_H^2 + \omega_H^2 A_H'^2} \left(T_e \frac{\partial A'_H}{\partial T_e} - \frac{A'_H}{A_H} T_e \frac{\partial A_H}{\partial T_e} \right) \right\}, \quad (22.28г)$$

$$\kappa_{xy} = -\kappa_{yx} = -\frac{NT_e}{m} \omega_H \left\{ B'_H + T_e \frac{\partial B'_H}{\partial T_e} - B_H \frac{A'_H}{A_H} - \frac{B_H T_e}{A_H} \frac{\partial A'_H}{\partial T_e} - \right. \\ \left. - \frac{(B'_H A_H - B_H A'_H)}{A_H} \left[1 + \frac{T_e}{2(A_H^2 + \omega_H^2 A_H'^2)} \frac{\partial}{\partial T_e} (A_H^2 + \omega_H^2 A_H'^2) \right] \right\}.$$

$$A_H = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^4 v (z \sqrt{2T_e/m}) e^{-z^2}}{\omega_H^2 + v^2 (z \sqrt{2T_e/m})} dz = \frac{K_\sigma(x)}{v_e (x^2 + 1)},$$

$$A'_H = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^4 e^{-z^2} dz}{\omega_H^2 + v^2 (z \sqrt{2T_e/m})} = \frac{K_\varepsilon(x)}{v_e^2 (x^2 + 1)}, \quad x = \frac{\omega_H}{v_e}.$$

$$B_H = \frac{16}{9\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^6 v (z \sqrt{2T_e/m}) e^{-z^2}}{v^2 (z \sqrt{2T_e/m}) + \omega_H^2} dz,$$

$$B'_H = \frac{16}{9\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^6 e^{-z^2} dz}{\omega_H^2 + v^2 (z \sqrt{2T_e/m})}.$$

Если частота столкновений не зависит от скорости, $\nu \neq \nu(v)$, то функции A_H, A'_H, B_H, B'_H принимают значения:

$$A_H = \frac{\nu_e}{\omega_H^2 + \nu_e^2}, \quad A'_H = \frac{1}{\omega_H^2 + \nu_e^2},$$

$$B_H = \frac{5}{3} \frac{\nu_e}{\omega_H^2 + \nu_e^2}, \quad B'_H = \frac{5}{3} \frac{1}{\omega_H^2 + \nu_e^2}.$$

В этом случае компоненты тензоров $\beta_{\alpha\gamma}$ и $\kappa_{\alpha\gamma}$ имеют простой вид:

$$\beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = -\frac{2}{3}, \quad \beta_{xy} = -\beta_{yx} = 0,$$

$$\kappa_{xx} = \kappa_{yy} = \frac{5}{3} \frac{T_e}{m} \frac{\nu_e}{\omega_H^2 + \nu_e^2}, \quad \kappa_{zz} = \frac{5}{3} \frac{T_e}{m \nu_e}, \quad \kappa_{xy} = \kappa_{yx} = 0.$$

Уравнения (22.8), (22.18) выведены в предположении, что функция распределения электронов — максвелловская. В слабо ионизованной плазме, если условие (22.6) не выполнено, функция распределения электронов в сильном переменном электрическом поле может существенно отличаться от максвелловской (см. §§ 21.2, 21.3). Строго говоря, уравнения (4.1) — (4.4) в этом случае уже не справедливы. Однако замена точной функции распределения электронов на максвелловскую обычно слабо сказывается на средних величинах (§ 21.2).

Аналогичным образом находятся коэффициенты переноса и для ионов.

Выше при определении функции f_1 пренебрегалось соударениями между заряженными частицами, что справедливо при условии (22.2). При достаточно высокой степени ионизации плазмы это условие не выполняется. Тогда в уравнении (21.2) для электронов и для ионов нужно учесть интегральные члены, описывающие взаимодействие заряженных частиц. При этом в интегральный член в уравнении (21.2) входит функция распределения ионов f_{1i} , а в уравнение для ионов — функция распределения электронов f_{1e} . Уравнения следует поэтому решать совместно. Соответствующее решение находится путем разложения функций f_{1i} и f_{1e} в ряды по полиномам Сонина или Лагерра или методом Грэда, как в теории неоднородной газовой смеси [24, 33, 223—225]. Подставляя функции f_{1e}, f_{1i} в уравнение для функций f_{0e} (21.1) и f_{0i} и учитывая, что функции f_{0e}, f_{0i} — максвелловские, обычным образом находим уравнения для N_e, N_i, T_e и T_i , которые по-прежнему имеют вид (22.8), (22.18), (4.1) — (4.4). Потоки j_e, j_i, g_e, g_i определяются теперь общими формулами (4.8) — (4.11).

Не приводя здесь соответствующего решения, покажем лишь, что кинетические коэффициенты в общем случае связаны соотношениями (4.12) и потоки тепла всегда могут быть представлены в виде (4.10), (4.11). Действительно, правая часть в

уравнениях типа (21.2), определяющих функции f_{1e} и f_{1i} , имеет вид:

$$J_e = -v \nabla_r f_{0e} + \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v}, \quad J_i = -v \nabla_r f_{0i} - \frac{e\mathbf{E}}{M} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v}. \quad (22.29)$$

Функции f_{0e} и f_{0i} — максвелловские (22.7). Следовательно,

$$\nabla_r f_{0e} = \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2T_e} \nabla_r N_e + N_e \frac{d}{dT_e} \left[\left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2T_e}\right] \nabla_r T_e, \\ \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} = -\frac{mv}{T_e} N_e \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2T_e},$$

и выражения (22.29) могут быть представлены в виде:

$$J_e = -v \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_e}\right) \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} \left[\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}\right] - N_e \frac{d}{dT_e} \left(\frac{f_{0e}}{N}\right) \nabla T_e, \\ J_i = -v \exp\left(-\frac{Mv^2}{2T_i}\right) \left(\frac{M}{2\pi T_i}\right)^{3/2} \left[\nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}\right] - N_i \frac{d}{dT_i} \left(\frac{f_{0i}}{N_i}\right) \nabla T_i. \quad (22.30)$$

Отсюда вытекает, что градиенты плотности ∇N_e , ∇N_i и квази-стационарное поле \mathbf{E}_c входят в выражения для f_{1e} и f_{1i} только в комбинациях

$$\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c, \quad \nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}_c.$$

Те же комбинации ∇N_e и \mathbf{E}_c войдут, следовательно, и в выражения для потоков:

$$j_e = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_{1e} v^3 dv = -\hat{D}_e \left(\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c\right) - \hat{D}_{ei} \left(\nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}_c\right) + \\ + O(\nabla T_e, \nabla T_i), \quad (22.31)$$

$$j_i = -\hat{D}_i \left(\nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}_c\right) - \hat{D}_{ie} \left(\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c\right) + O(\nabla T_e, \nabla T_i). \quad (22.32)$$

С другой стороны, потоки j_e и j_i определены общими формулами (4.8), (4.9). Сравнивая их с (22.31), (22.32), устанавливаем соотношения (4.12).

Те же комбинации ∇N_e и \mathbf{E}_c входят и в выражения для потоков тепла:

$$\mathbf{g}_e = -\hat{\gamma}_{ee} \left(\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c\right) - \hat{\gamma}_{ei} \left(\nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}_c\right) - O(\nabla T_e, \nabla T_i), \quad (22.33)$$

$$\mathbf{g}_i = -\hat{\gamma}_{ii} \left(\nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}_c\right) - \hat{\gamma}_{ie} \left(\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c\right) - O(\nabla T_e, \nabla T_i). \quad (22.34)$$

Определяем их из соотношений (22.31), (22.32):

$$\begin{aligned}\nabla N_e + \frac{eN_e}{T_e} \mathbf{E}_c &= \hat{\alpha}_{1e} \mathbf{j}_e + \hat{\alpha}_{2e} \mathbf{j}_i + O(\nabla T_e, \nabla T_i), \\ \nabla N_i - \frac{eN_i}{T_i} \mathbf{E}_c &= \hat{\alpha}_{1i} \mathbf{j}_i + \hat{\alpha}_{2i} \mathbf{j}_e + O(\nabla T_e, \nabla T_i).\end{aligned}\tag{22.35}$$

Подставляя (22.35) в формулы (22.33), (22.34) для \mathbf{g}_e и \mathbf{g}_i , приходим к выражениям (4.10), (4.11) для потоков тепла.

Заметим, что для немаксвелловских функций f_0 выражения (22.30), а следовательно и соотношения (4.12) для кинетических коэффициентов и выражения (4.10), (4.11) для \mathbf{g}_e , \mathbf{g}_i , строго говоря, не имеют места.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, «Наука», М., 1967.
2. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН 70, 201, 393 (1960).
3. I. Haggis, W. Priestler, J. Atm. Sci. 19, 286 (1962); Space Res. 3, 53 (1963).
4. Я. Л. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля — ионосфера, «Наука», М., 1967.
5. М. Николе, Аэрномия, «Мир», М., 1964.
6. M. H. Rees, J. C. G. Walker, Annales de Geophysique 24, № 1, 193 (1968).
7. Д. В. Эванс, УФН 99, 229 (1967).
8. В. Г. Истомин, сб. «Исследования космического пространства», стр. 192, «Наука», М., 1965.
9. Р. К. Уиттен, Н. Д. Поппов, Физика нижней ионосферы, «Мир», М., 1968.
10. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, Изд. АН СССР, М., 1960.
11. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, «Наука», М., 1969.
12. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ 34, 242 (1958).
13. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 39, 1450 (1960).
14. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», М., 1967.
15. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, «Наука», М., 1964.
16. В. П. Силин, ЖЭТФ 48, 1679 (1965).
17. R. A. Stern, N. Tzoar, Phys. Rev. Letters 17, 903 (1966).
18. D. F. Du Bois, M. Goldman, Phys. Rev. 164, 207 (1967).
19. E. A. Jackson, Phys. Rev. 153, 235 (1967).
20. K. Nishikawa, J. Phys. Soc. Japan 24, 1152 (1968).
21. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ 59, 2215 (1970).
22. К. Ф. Сергейчев, И. Р. Геккер, Письма ЖЭТФ 5, 183 (1967).
23. Г. М. Батанов, К. А. Саркисян, Письма ЖЭТФ 13, 539 (1971).
24. Л. М. Горбунов, Препринт ФИАН, № 174, 1969.
25. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960.
26. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1946.
27. Д. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
28. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 35, 392 (1958).
29. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 36, 624 (1959).
30. S. Altshuler, J. Geophys. Res. 68, 4707 (1963).
31. H. Dreiser, Phys. Rev. 115, 238 (1959).
32. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 39, 1296 (1960).

32. Д. В. Сивухин, «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 4, стр. 81, Атомиздат, М., 1964.
33. И. Шкарофский, Т. Джонстон, М. Бачинский, Кинетика частиц плазмы, Атомиздат, М., 1969.
34. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, УФН **91**, 609 (1967).
35. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **40**, 1825 (1961).
36. А. В. Гуревич, Ю. Н. Живлюк, ЖТФ **33**, 276 (1963).
37. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», М., 1964.
38. W. Schottky, Phys. Zs. **25**, 635 (1924).
39. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрномия **8**, 780 (1968).
40. С. И. Брагинский. «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 1, стр. 183, 1963.
41. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ **51**, 536 (1966); **52**, 175 (1967); УФН **103**, 447 (1971).
42. Сборник «Элементарные процессы в верхней атмосфере», «Мир», М., 1965.
Сборник «Аэрномические реакции в верхней ионосфере», «Мир», М., 1968.
43. А. Д. Данилов, Химия ионосферы, М., 1965.
44. Т. Уонезава, Space Sci. Rev. **5**, 3 (1966).
45. А. Д. Данилов, Г. С. Иванов-Холодный, УФН **85**, 259 (1965).
46. Э. И. Гинзбург, Радиофизика (Изв. вузов) **7**, 1041 (1964).
47. J. M. Yong, G. R. Carruthers, J. C. Holmes, C. Y. Johnson, N. P. Patterson, Science **160**, 990 (1968).
48. D. R. Bates, Phys. Rev. **77**, 718 (1950); **78**, 492 (1950).
49. M. Nicolet, W. Swidder Jr., Plan. Space Sci. **11**, 1459 (1963).
50. Г. С. Иванов-Холодный, Геомагнетизм и аэрномия **7**, 83 (1967).
51. Д. Бэйтс, А. Дальгарно, «Атомные и молекулярные процессы», сб. под редакцией Д. Бэйтса, «Мир», М., 1964.
52. H. Rishbeth, J. Atm. Terr. Phys. **28**, 911 (1966).
53. Г. Месси, Е. Бархоп, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, М., 1958.
54. Б. М. Смирнов, Атомные столкновения и элементарные процессы, Атомиздат, М., 1968.
55. P. Banks, Plan. Space Sci. **14**, 1085 (1966).
56. M. H. Mentzoni, R. V. Row, Phys. Rev. **130**, 2312 (1963).
57. M. H. Rees, J. C. G. Walker, A. Dalgarno, Plan. Space Sci. **15**, 1097 (1967).
58. A. Dalgarno, T. C. Degges, Plan. Space Sci. **16**, 125 (1968).
59. L. G. Huxley, A. Zaazou. Proc. Roy. Soc. A **196**, 402, 427 (1949).
60. R. V. Crompton, L. G. H. Huxley, D. J. Sutton, Proc. Roy. Soc. A **218**, 507 (1953).
61. R. W. Crompton, D. J. Sutton, Proc. Roy. Soc. A **215**, 467 (1952).
62. B. I. H. Hall, Austr. J. Phys. **8**, 551 (1955).
63. L. S. Frost, A. V. Phelps, Phys. Rev. **127**, 1621 (1962);
A. G. Englehardt, A. V. Phelps, C. G. Risk, Phys. Rev. **135**, 1566 (1964);
A. V. Phelps, R. D. Hake, Plan. Space Sci. **14**, 1092 (1966).
64. P. Banks, Plan. Space Sci. **14**, 1105 (1966).
65. T. Tohmatsu, T. Ogawa, H. Tsuruta, Rept. of Ionosphere and Space Res. in Japan **19**, 482 (1965).
66. A. Dalgarno, M. B. McElroy, M. H. Rees, J. C. G. Walker, Plan. Space Sci. **17**, 814 (1969); P. Banks, Proc. IEEE **57**, 258 (1969).
67. M. Petite, Annales de Geophysique **24**, 1 (1968).
68. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрномия **1**, 34 (1961).
69. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрномия **12**, 201 (1972).
70. P. Caldirola, O. De Barbieri, Radio Sci. **69 D**, 33 (1965).

71. А. В. Гуревич, Геомagnetизм и астрономия 5, 70 (1965); 7, 291 (1967).
72. D. T. Farley, J. Geophys. Res. 68, 401 (1963).
73. Э. И. Гинзбург, Геомagnetизм и астрономия 7, 104 (1967).
74. V. A. Bailey, Nature 142, 613 (1938); Phil. Mag. 23, 929 (1937); 26, 425 (1938).
75. S. C. Brown, D. Rose, J. Appl. Phys. 28, 561 (1957).
76. A. D. Mac-Donald, D. U. Gaskell, H. N. Gitterman, Phys. Rev. 130, 1841 (1963).
77. P. P. Lombardini, Radio Sci. 69 D, 83 (1965).
78. M. Nicolet, Physics and Medicine in the Atmosphere and Space, N. Y., 1960.
79. И. В. Авилова, Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, В. М. Замалин, Г. А. Кобзев, А. Н. Лагарьков, А. Х. Мнацаканян, Г. Э. Норман, Оптические свойства горячего воздуха, «Наука», М., 1970.
80. А. В. Гуревич, Радиотехника и электроника 1, 706 (1956).
81. И. М. Виленский, Сборник памяти А. А. Андропова, Изд. АН СССР, 1955, стр. 582.
82. И. М. Виленский, ДАН СССР 92, 525 (1953).
83. И. М. Виленский, Н. А. Зыкова, Радиофизика (Изв. вузов) 2, 543 (1959).
84. F. H. Hibberd, J. Atm. Terr. Phys. 8, 120 (1956).
85. А. В. Гуревич, Радиофизика (Изв. вузов) 1, № 4, 21 (1958).
86. А. В. Гуревич, Диссертация, ФИАН, М., 1957.
87. P. Rosen, Phys. Fluids 4, 314 (1961).
88. M. H. Sodha, C. J. Palumbo, Canad. J. Phys. 42, 1236 (1964).
89. K. Chivoda, J. Phys. Soc. Japan 20, 290 (1965).
90. M. H. Sodha, P. K. Kaw, Phys. Fluids 8, 1402 (1965).
91. V. Murphy, Phys. Fluids 8, 1534 (1965).
92. Ting-Wei Tang, Phys. Fluids 9, 415 (1966).
93. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 35, 1573 (1958).
94. M. H. Sodha, P. K. Kaw, Phys. Fluids 9, 603 (1966); J. Phys. Soc. Japan 21, 1134 (1966).
95. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, Письма ЖЭТФ 3, 105 (1966).
96. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ 56, 818 (1969).
97. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич, Радиофизика (Изв. вузов) 11, 1480 (1968).
98. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 45, 1243 (1963).
99. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
100. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958.
101. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 48, 701 (1965).
102. J. W. King, J. Atm. Terr. Phys. 14, 41 (1959).
103. И. М. Виленский, В. П. Чернышев, Д. И. Шейнман, Радиофизика (Изв. вузов) 3, 367 (1960).
104. И. М. Виленский, Радиофизика (Изв. вузов) 5, 221 (1962).
105. И. М. Виленский, Радиофизика (Изв. вузов) 9, 649 (1966).
106. K. G. Budden, Phil. Mag. 42, 1 (1951); 44, 503 (1953).
107. W. O. Schuman, Z. angew. Phys. 4, 474 (1952); 9, 373 (1957).
108. P. E. Krasnushkin, Nuovo Cim. Suppl. 26, 50 (1962).
109. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 16 (1944).
110. М. А. Леонтович, В. А. Фок, сб. «Исследования по распространению радиоволн», Изд. АН СССР, М., 1948.
111. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника 6, 1247, 1489 (1961).
112. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника 8, 363 (1963).
113. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
114. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ 58, 2012 (1970).
115. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ 3, 471 (1966).

116. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967).
117. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **53**, 1735 (1967).
118. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ **61**, 1379 (1971).
119. М. Д. Лайтхилл, сб. «Нелинейная теория распространения волн», ИЛ, М., 1970, стр. 43.
120. В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ **2**, 218 (1965).
121. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, ДАН СССР **194**, 295 (1970).
122. А. Зоммерфельд, Механика деформируемых сред, ИЛ, М., 1954, стр. 163.
123. А. Б. Шварцбург, Радиопизика (Изв. вузов) **13**, 775 (1970).
124. Г. А. Аскаръян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
125. Т. Ф. Волков, сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций», т. 3, стр. 336, Изд. АН СССР, М., 1953.
126. R. Chia, E. Garmire, G. Townes, Phys. Rev. Letters **13**, 479 (1964); **14**, 1056 (1965).
127. З. К. Янкаускас, Радиопизика (Изв. вузов) **9**, 412 (1966).
128. H. A. Haus, Appl. Phys. Letters **8**, 128 (1966).
129. Ю. Р. Аланакян, ЖЭТФ **55**, 1338 (1968); ЖТФ **37**, 817 (1967).
130. В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль, ЖЭТФ **55**, 530 (1968).
131. G. V. Whitham, Proc. Roy. Soc. A **283**, 238 (1965).
132. G. V. Whitham, J. Fluid Mech. **22**, 273 (1965).
133. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. «Нелинейная оптика», Изд. «Наука» (Сибирск. отд.), Новосибирск, 1968, стр. 428.
134. Сборник «Нелинейная теория распространения волн», ИЛ, М., 1970.
135. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, **103**, 193, (1971); В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, Новосибирск, 1968.
136. В. М. Елеонский, В. П. Силин, ЖЭТФ **56**, 574 (1969).
137. А. Г. Литвак, Радиопизика (Изв. вузов) **9**, 629, 675, 900 (1966).
138. V. A. Bailey, D. F. Martyn, Phil. Mag. **18**, 369 (1934).
139. L. G. H. Huxley, J. Ratcliffe, Proc. Inst. Elect. Eng. III, **96**, 443 (1949).
140. L. G. H. Huxley, Nuovo Cim. Suppl. **9**, 59 (1952); Proc. Roy. Soc. A **200**, 486 (1950).
141. J. Ratcliffe, J. Shaw, Proc. Roy. Soc. A **193**, 311 (1948).
142. J. Shaw, Proc. Phys. Soc. B **64**, 1 (1951).
143. А. В. Гуревич, Радиопизика (Изв. вузов) **1**, № 5—6, 17 (1958).
144. И. М. Виленский, Радиопизика (Изв. вузов) **5**, 468 (1962).
145. V. A. Bailey, Nature **139**, 68, 838 (1937).
146. F. H. Hibberd, Nuovo Cim. **10**, 380 (1953); Radio Sci. **69 D**, 25 (1965).
147. В. В. Железняков, Радиопизика (Изв. вузов) **1**, № 5—6, 29 (1958).
148. V. A. Bailey, Nuovo Cim. Suppl. **4**, 1430 (1956); Radio Sci. **69 D**, 9 (1965).
149. L. G. H. Huxley, H. G. Foster, C. C. Newton, Proc. Phys. Soc. B **61**, 134 (1948).
150. P. A. Bell, Proc. Phys. Soc. B **64**, 1053 (1951).
151. M. Cutolo, Nature **166**, 98 (1950).
152. V. A. Bailey, R. A. Smith, K. Landecker, A. J. Higgs, F. H. Hibberd, Nature **169**, 911 (1952).
153. M. Cutolo, NBS Technical Note № 211, vol. 2, 1964.
154. D. H. Menzel, Radio Sci. **69 D**, 1 (1965).
155. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Геомагнетизм и аэрономия **8**, 1104 (1968).
156. J. A. Fejer, J. Atm. Terr. Phys. **7**, 322 (1955); **32**, 597 (1970).
157. V. Landmark, F. Lied, AGARD meeting, Athens, 1960.
158. R. A. Smith, NBS Technical Notes № 211, vol. 4, 1964.
159. S. Weisbrok, A. J. Ferraro, H. S. Lee, J. Geophys. Res. **69**, 2377 (1964).

160. И. М. Виленский, Н. И. Израйлева, Геомagnetизм и астрономия **10**, 46, 740 (1970).
161. J. M. Anderson, L. Goldstein, G. L. Clark, Phys. Rev. **90**, 151, 485 (1953).
162. П. В. Блюх, А. А. Брюховецкий, Геомagnetизм и астрономия **9**, 545 (1969).
163. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, «Наука», М., 1962.
164. И. М. Виленский, ЖЭТФ **22**, 544 (1952); **26**, 42 (1954).
165. Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967.
166. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд. МГУ, М., 1964.
167. А. Н. Лебедев, ЖЭТФ **48**, 1393 (1965);
А. В. Гуревич, Ю. Н. Живлюк, Препринт ФИАН, № 70, 1965.
168. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **38**, 165 (1960).
169. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ **6**, 463 (1936).
170. W. P. Allis, Handbuch der Physik **21**, 383 (1956).
171. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).
172. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН **73**, 701 (1961).
173. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ДАН СССР **145**, 1265 (1962).
174. С. Т. Беляев, сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций», т. 3, стр. 50, Изд. АН СССР, М., 1958.
175. В. П. Силин, ЖЭТФ **38**, 1771 (1960).
176. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
177. R. S. Cohen, L. Spitzer, P. Routly, Phys. Rev. **80**, 230 (1950).
178. T. Holstein, Phys. Rev. **70**, 367 (1946).
179. M. J. Druyvestein, Physica **3**, 65 (1936).
180. T. I. Lewis, Proc. Roy. Soc. A **244**, 166 (1958).
181. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **32**, 1237 (1957).
182. R. Landshoff, Phys. Rev. **76**, 904 (1949); **82**, 442 (1951).
183. В. Л. Гинзбург, ЖТФ **21**, 943 (1951).
184. I. P. Shkarofsky, Canad. J. Phys. **39**, 1619 (1961).
185. H. Margenau, Phys. Rev. **69**, 508 (1946); **73**, 297 (1948).
186. R. Jancel, T. Kahan, Compt. Rend. **238**, 995 (1954).
187. В. М. Файн, ЖЭТФ **28**, 422 (1955).
188. А. В. Гуревич, ДАН СССР **104**, 201 (1955).
189. А. В. Гуревич, Радиофизика (Изв. вузов) **2**, 355 (1959).
190. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **30**, 1112 (1956).
191. В. Л. Гинзбург, Известия АН СССР, сер. физич. **12**, 293 (1948).
192. D. Lauder, D. H. Menzel, Radio Sci. **69 D**, 59 (1965).
193. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ **47**, 1322 (1964).
194. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Радиофизика (Изв. вузов) **7**, 1195 (1964).
195. H. Margenau, L. Hartman, Phys. Rev. **73**, 309 (1948).
196. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **37**, 304 (1959).
197. E. A. Desloge, Phys. Fluids **5**, 1223 (1962).
198. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, М. В. Квимсадзе, ЖЭТФ **60**, 632 (1971).
199. А. Мак-Доналд, Сверхвысокочастотный пробой в газах, «Мир», М., 1969.
200. L. M. Chanin, A. V. Phelps, M. A. Biondi, Phys. Rev. Letters **2**, 344 (1959); Phys. Rev. **128**, 219 (1962).
201. M. A. Harrison, R. Geballe, Phys. Rev. **91**, 1 (1953).
202. L. M. Vainscomb, Annalen Geophys. **20**, 88 (1964).
203. В. Л. Грановский, Электрический ток в газе, Гостехиздат, 1952.
204. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, М., 1946.
205. Э. Б. Сонин, ЖТФ **37**, 1840 (1967); ЖЭТФ **54**, 1554 (1968).

206. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, ТВТ 5, 201 (1967).
207. A. P. Mitra, P. Banerjee, Models for the effective recombination coefficients in the ionosphere, Preprint National Phys. Laborat., New — Delhi — 12, India.
208. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, «Наука», М., 1970.
209. В. Д. Шафранов, «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 3, стр. 3, 1963.
210. А. Л. Дышко, В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, Письма ЖЭТФ 6, 655 (1967).
211. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ 48, 901 (1965).
212. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ 32, 1291 (1962).
213. Л. М. Горбунов, ЖЭТФ 55, 2298 (1968).
214. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ 49, 1973 (1965).
215. I. N. Krenz, G. S. Kino, J. Appl. Phys. 36, 2387 (1965).
216. T. Amano, M. Okamoto, J. Phys. Soc. Japan 26, 529 (1969).
217. P. K. Kaw, E. Valeo, J. Dawson, Phys. Rev. Letters 25, 430 (1970).
218. А. В. Гуревич, Геомagnetизм и аэрономия 12, 24 (1972).
219. А. В. Гуревич, Р. А. Салимов, Н. С. Бучельникова, ТВТ 7, 1075 (1969).
220. А. Б. Михайловский, «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 3, стр. 141, Атомиздат, 1963.
221. Б. Б. Кадомцев, «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 4, стр. 188, Атомиздат, 1964.
222. А. В. Тимофеев, В. И. Пистунович, «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 5, стр. 351, Атомиздат, 1967.
223. И. П. Стаханов, А. С. Степанов, В. П. Пашенко, Ю. К. Гуськов, Плазменное термоэмиссионное преобразование энергии, Атомиздат, 1968.
224. A. R. Hochstim, G. A. Massel, in «Kinetic Processes in Gases and Plasmas», ed. by A. R. Hochstim, p. 142, N. Y. — L., 1969.
225. М. В. Самохин, ЖТФ 33, 667, 675 (1961).
226. А. Ф. Волков, Ш. М. Каган, УФН 98, 633 (1969).
227. В. Е. Голант, УФН 79, 377 (1963).
228. «Kinetic Processes in Gases and Plasmas», ed. by A. R. Hochstim, N. Y. — L., 1969.
229. А. В. Гуревич, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 2, 41 (1971).
230. А. И. Морозов, А. С. Соловьев, «Вопросы теории плазмы», сб. под ред. М. А. Леонтовича, т. 2, стр. 177, Атомиздат, 1963.
231. Л. Спитцер, Физика полностью ионизированного газа, «Мир», М., 1965.
232. DASA Reaction Rate Handbook, DASA 2407, G. E. Tempo ed., Center for Advanced Studies, Santa Barbara, California, 1970.
233. R. E. Lelevier, J. Geophys. Res. 75, 6419 (1970).
234. G. Meltz, R. E. Lelevier, J. Geophys. Res. 75, 6406 (1970).
235. J. A. Thomson, J. Geophys. Res. 75, 6446 (1970).
236. W. F. Utlaut, J. Geophys. Res. 75, 6402 (1970).
237. Б. Э. Меерович, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 61, 235 (1971).
238. Б. Э. Меерович, ЖЭТФ 61, 1891 (1971).
239. Б. Э. Меерович, ЖЭТФ 63, 549 (1972).
240. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ 61, 118 (1971).
241. P. L. Kelley, Phys. Rev. Letters 15, 1005 (1965).
242. В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Радиофизика (Изв. вузов) 10, 674 (1967).
243. В. Н. Власов, В. И. Петрищев, В. И. Таланов, сб. «Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике», Изд. МГУ, 1970, стр. 66.
244. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах, ЖЭТФ 60, 136 (1971).
245. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. Rev. Letters 15, 240 (1965).

246. N. J. Zabusky, Proc. Conference on Mathem. Models in Physics, N. Y., 1963, стр. 99.
247. C. S. Gardner, J. Green, M. D. Kruskal, R. Miura, Phys. Rev. Letters **19**, 1095 (1967).
248. R. Cohen, J. D. Whitehead, J. Geophys. Res. **75**, 6439 (1970).
249. А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман, сб. «Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике», Изд. МГУ, 1970, стр. 71.
250. А. Д. Пилюя, В. Е. Голант, УФН **104**, 413 (1971).
251. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ **46**, 2156 (1964).
252. В. М. Bolotovskiy, A. V. Gurevich, E. D. Michalchi, Eighth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Vienna, 1967, p. 288.
253. В. А. Миронов, Радиофизика (Изв. вузов) **12**, 1765 (1969).
254. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация **11**, 953 (1971).
255. R. A. Smith, Proc. Conference on the Physics of the Low Ionosphere, Ottawa, 1966, p. 235.
256. R. A. Smith, L. A. Bourne, R. G. Loch, T. N. R. Coyne, там же, стр. 300.
257. R. A. Smith, R. N. R. Coyne, R. G. Loch, L. A. Bourne, там же, стр. 335.
258. A. A. Biondi, D. P. Slepser, R. D. Hake Jr., J. Geophys. Res. **75**, 6421 (1970).
259. W. F. Utlaut, E. J. Violette, A. K. Paul, J. Geophys. Res. **75**, 6429 (1970).
260. В. Д. Письменный, А. Т. Рахимов, ДАН **196**, 562 (1971).
261. И. Е. Андреев, А. Ю. Кирий, В. П. Силин, ЖЭТФ **57**, 1024 (1969).
262. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация **11**, 961 (1971).
263. В. И. Таланов, Радиофизика (Изв. вузов) **7**, 564 (1964).
264. Д. И. Абакаров, А. А. Акопян, С. И. Пекар, ЖЭТФ **52**, 463 (1967).
265. В. М. Елеонский, Л. Г. Оганесьянц, В. П. Силин, ЖЭТФ **63**, 532 (1972).
266. R. E. Barrington, E. V. Thrane, J. Atmos. Terr. Phys. **24**, 31 (1962).
267. R. E. Barrington, E. V. Thrane, B. Bjelland, Canad. J. Phys. **41**, 271 (1963).
268. A. J. Ferraro, H. S. Lee, Proc. Conference on the Physics of the Low Ionosphere, Ottawa, 1966, p. 281.
269. T. M. Georges, там же, стр. 289.
270. А. Н. Мансон, там же, стр. 329.
271. В. В. Васильков, А. В. Гуревич, Радиофизика (Изв. вузов) **16**, № 1 (1973).
272. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация **12**, 631 (1972).
273. A. J. Wong, R. J. Taylor, Phys. Rev. Letters **27**, 644 (1971).
274. П. Л. Капица, ЖЭТФ **57**, 1801 (1969).
275. Ю. П. Райзер, УФН **99**, 687 (1969).
276. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ **60**, 372 (1971).
277. А. В. Гуревич, Радиофизика (Изв. вузов) **15**, 11 (1972).
278. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Краткие сообщения по физике, № 10, ФИАН, 1972.
279. W. Utlaut, R. Cohen, Science **174**, 245 (1971).
280. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», М., 1972.
281. А. Б. Шварцбург, ДАН СССР **200**, 575 (1971).
282. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, 1971.
283. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, УФН **107**, 353 (1972).

НЕЛИНЕЙНАЯ
ТЕОРИЯ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ
РАДИОВОЛН
В ИОНОСФЕРЕ

А.В.ГУРЕВИЧ, А.Б.ШВАРЦБУРГ

