COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

CINQUIÈME ÉDITION

TOME I

DERIVEES ET DIFFÉRENTIELLES
INTÉGRALES DEFINIES
DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

GAUTHIER-VILLARS
PARIS

Э. ГУРСА

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ЧАСТЬ I

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФЕРЕНЦИАЛЫ. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
ПРОФ. А. И. НЕКРАСОВА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Б. К. МЛОДЗЕЕВСКОГО
ВНОВЬ ПРОСМОТРЕН И ПЕРЕРАБОТАН
ПО ПЯТОМУ ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ
ПРОФ. В. В. СТЕПАНОВЫМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

Т 21 -5 -2

Редакционная работа по этой книге проведена *С. А. Каменецким.* Издание оформлено *О. Н. Персияниновой.* Корректуру держала *М. Х. Яковлева.* Наблюдал за выпуском *В. П. Морев.*

Рукопись сдана в производство 3 февраля, листы подписаны к печати 14 сентября 1933 года, книга вышла в свет в сентябре 1933 г., в количестве 10 000 экземпляров на бумаге формата $62 \times 94^{1}/_{16}$. Печатных знаков в листе 67 000, листов 23, заказ 956. ГТТИ № 19. Уполномоченный Главлита № В-53645.

1-я типография Огиза РСФСР „Образцовая", Москва, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ ТОМОВ I и II.

Книга Э. Гурса „Курс математического анализа“ уже приобрела у русских читателей заслуженную известность и признание. По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе; в то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности; выбор проникнут одной руководящей мыслью — дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки. Книга уже принесла большую пользу нашей университетской учащейся молодежи как пособие для углубления обычного курса анализа и для самообразования; можно смело сказать, что она много способствовала повышению уровня нашей математической культуры. Прежние переводы сделаны — том I с первого и второго французских изданий, том II — со второго издания. За прошедшее с тех пор время автор подверг первый том своего курса значительной переработке, а во втором введены большие дополнения. Основной целью его было поставить новые издания на современный уровень развития математической мысли; достаточно указать, что за последние десятилетия основные понятия теории функций действительного переменного стали необходимым средством для обоснования анализа; дополнения касаются ряда вопросов, разработанных в последние десятилетия и настолько важных, что они должны найти свое место в учебнике; наряду с этим в изложение диференциальной геометрии систематически введены гауссовы координаты. Естественно, редактор поставил своей целью дать эти новые факты и идеи в переводе. С другой стороны, Гурса исключил в новых изданиях ряд „элементарных“ вопросов, как, например, систематическую теорию неопределенных интегралов, которые во Франции отнесены к курсу средней школы. Имея в виду нашего советского читателя, редактор не мог согласиться с такими сокращениями. Поэтому большая часть материалов старых изданий, пропущенная автором в последующем, все же включена в настоящий перевод. Для удобства читателя нумерация параграфов согласована с последними (том I, изд. 5-е, том II, изд. 5-е) французскими изданиями.

В основу настоящего издания положен прекрасно сделанный А. И. Некрасовым и тщательно проредактированный покойным Б. К. Млодзеевским текст первых русских изданий. Переводы добавлений сделаны для I тома Ю. Ф. Морошкиным (аналитические главы) и Н. В. Ефимовым (теория поверхностей), для II тома С. Ф. Морошкиным (1-й полутом) и Ю. А. Рожанской (2-й полутом).

В заключение считаю своим долгом приветствовать решение ГТТИ дать советскому читателю все три тома ценного труда Э. Гурса в русском переводе; мы вправе надеяться, что появление этого издания будет и дальше способствовать повышению уровня математической культуры широких кругов читателей этой книги.

В. Степанов.

Москва, 1932 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ.

Глава II.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФЕРЕНЦИАЛЫ.

Глава III.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. МАКСИМУМ И МИНИМУМ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ.

Глава IV.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Глава V.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Стр.

Глава VI.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Глава VII.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛОВ.

ДОПОЛНЕНИЕ

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ.

Постепенным обобщением мы переходим в арифметике от чисел натуральных к числам дробным, к нулю и к числам относительным (положительным и отрицательным). Но уже операция извлечения корня приводит к введению нового рода чисел, *чисел иррациональных*. К этим новым числам мы приходим также, применяя числа к измерению конкретных величин. Если мы имеем, например, две соизмеримых длины A и B, то мерою B по отношению к A, или отношением B к A, называется число $\frac{m}{n}$, представляющее частное чисел m и n, показывающих содержание общей меры в длинах B и A. Если A и B несоизмеримы, то их отношение не может быть представлено целым или дробным числом и является числом другого рода — иррациональным. Хотя несоизмеримое отношение $\frac{B}{A}$ не равно никакому рациональному числу, но существует бесчисленное множество рациональных чисел, сколь угодно близких к $\frac{B}{A}$; чтобы получить такое число, достаточно заменить B каким-нибудь отрезком C, отличающимся от B менее чем на любой сколь угодно малый отрезок δ, но соизмеримым с A. На этом основан способ приближенного вычисления иррациональных чисел, как отношений между несоизмеримыми величинами, излагаемый в элементарной геометрии.

Иррациональные числа можно также определить чисто арифметически, не прибегая к рассмотрению отношений между конкретными величинами. Мы изложим здесь метод Дедекинда (Dedekind).

Пусть мы каким-нибудь способом разбили все рациональные числа на два класса A и B, обладающие тем свойством, что каждое число a класса A менее каждого числа b класса B. Будем говорить, что мы этим установили в области рациональных чисел некоторое *сечение*. При этом могут представиться три случая.

1. *Среди чисел класса A есть некоторое число L, большее всех остальных чисел того же класса.*

2. Среди чисел класса B есть некоторое число L, меньшее всех остальных чисел того же класса.

3. В классе A нет ни одного числа, большего всех остальных чисел того же класса, и в классе B нет ни одного числа, меньшего всех остальных чисел того же класса.

В первых двух случаях очевидно, что наше разбиение рациональных чисел на два класса вполне определяет число L, обладающее тем свойством, что всякое число, меньшее L, принадлежит к классу A, а всякое число, большее L, принадлежит к классу B. Такое число называется иногда само *сечением* и обозначается символом (A, B). В третьем случае не существует рационального числа, обладающего предыдущими свойствами, но мы будем принимать, что и в этом случае наше разбиение определяет некоторое *иррациональное* число L, большее всех чисел класса A и меньшее всех чисел класса B. Это число L определяется, таким образом, арифметически как некоторое сечение.

Докажем, что каждому числу, данному как отношение двух величин, соответствует некоторое определенное сечение. Для этого будем изображать по правилам аналитической геометрии каждое число x точкою x' некоторой прямой так, чтобы отношение $\frac{Ox'}{OK}$, где OK — единица меры, равнялось x. Пусть нам дано число L. Тогда соответствующая точка L' на прямой распределит все рациональные точки на два класса A', B', причем к A' мы отнесем все рациональные точки a', лежащие влево от L', а к классу B' — все точки b', лежащие вправо от L'; если точка L' сама рациональна, то мы отнесем ее безразлично к классу A' или к классу B'. Очевидно, что при этом координата каждой точки a' будет меньше координаты каждой точки b', и мы получим некоторое сечение, определяющее данное отношение L.

Докажем, обратно, что каждому данному сечению (A, B) соответствует отношение некоторых двух отрезков. Пусть нам дано сечение (A, B). Рассмотрим все рациональные числа a, принадлежащие к классу A, и все рациональные числа b, принадлежащие к классу B, и нанесем на прямой все точки a', b', координаты которых суть рациональные числа a, b. Так как из самого определения сечения следует, что каждое число a меньше каждого числа b, то все точки a' будут лежать по одну и ту же сторону относительно всех точек b'; например, при обычном способе изображения все точки a' будут лежать левее всех точек b'. Распределим теперь все точки прямой на два класса A', B' следующим образом. К классу A' отнесем все точки a' и все точки, лежащие между точками a', а к классу B' — все остальные точки прямой. При дальнейшем доказательстве мы будем пользоваться тем свойством, что точки прямой образуют на ней непрерывный ряд. Это свойство выражается различным образом. Мы выразим его в следующей форме:

Если все точки прямой распределены на два класса таким образом, что между каждыми двумя точками одного и того же класса находятся только точки того же класса, то всегда существует одна и только одна пограничная точка, т. е. такая точка, что каждые две точки, между которыми она лежит, принадлежат к различным классам.

Очевидно, что предыдущее распределение точек прямой на классы A', B' обладает свойством, требуемым этой аксиомой. Поэтому здесь существует такая пограничная точка L'; пусть ей соответствует число L. Если это число рационально, то оно принадлежит или к классу A, или к классу B, и мы имеем $a \leqslant L < b$, или $a < L \leqslant b$; если же число L —

иррациональное, то мы имеем $a < L < b$. Таким образом число L, определенное как отношение $\frac{OL'}{OK}$, может быть также определено и как сечение (A, B). Отсюда следует, что сечения определяют все непрерывное множество действительных чисел.

I. ПРЕДЕЛЫ. МНОЖЕСТВА

1. Пределы. Говорят, что переменное x имеет пределом постоянное число a, или стремится к a, когда абсолютная величина разности $x-a$, начиная с некоторого момента, становится и *остается* меньше всякого наперед заданного положительного числа. Когда $a=0$, переменное x называют *бесконечно малым*. Выражения: „x имеет пределом число a" и „разность $x-a$ бесконечно мала", очевидно, равнозначны. Чтобы показать, что переменное x стремится к пределу a, разность $x-a$ часто разбивают на некоторое число частей, например на три, и доказывают, что абсолютная величина каждой из этих частей с некоторого момента остается меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, причем ε — произвольное положительное число.

Этот способ доказательства, который мы часто будем применять, иногда называют *методом доказательства с помощью* ε (ε-доказательство).

Пользуясь неправильным, но удобным способом выражения, говорят также иногда, что переменное x имеет предел $+\infty$ или $-\infty$, или стремится к $\pm\infty$. Выражение: „x имеет предел, например $+\infty$", означает, что переменное x с некоторого момента становится и остается бо́льшим всякого наперед заданного положительного числа A, а не то, что разность $(+\infty - x)$ стремится к нулю, что не имело бы никакого смысла.

Подобным же образом часто говорят, что какая-либо переменная по форме или по положению геометрическая фигура имеет своим пределом данную неизменную фигуру. Если в каждом частном случае желают немного уточнить это выражение, приходится измерять с помощью одного или нескольких переменных параметров *расхождение* неизменной и подвижной фигуры, и предшествующее выражение означает в точности, что эти переменные при определенных условиях стремятся к нулю. Возьмем, например, две соседние точки M и M' на кривой C. Говорят, что хорда MM' имеет предельным положением касательную MT в точке M, когда точка M' неограниченно приближается к точке M по кривой C. Так как обе прямые MM' и MT пересекаются в неподвижной точке M, естественно принять за меру их расхождения острый угол α, образуемый обеими прямыми, и высказанное утверждение, на языке анализа, означает, что угол α станет меньше данного произвольно выбранного угла ε, в предположении, что расстояние MM' само будет меньше другой подходящим образом определенной длины ρ.

2. Сечения в области действительных чисел. Предположим теперь, что множество всех чисел, как рациональных, так и иррациональных, разбито на два класса A и B, обладающих следующими свойствами:

1) *Всякое положительное или отрицательное число принадлежит к одному из двух классов.*

2) *Любое число класса A меньше любого числа класса B.*

Очевидно, что оба класса содержат бесчисленное множество как рациональных, так и иррациональных чисел. Покажем, что всегда существует число L, обладающее следующими двумя свойствами:

1) *Всякое число, меньшее L, принадлежит к классу A.*

2) *Всякое число, большее L, принадлежит к классу B.*

Это число L называется и в этом случае *сечением* и, как мы увидим, будет или рациональным, или иррациональным. Существование числа L есть следствие самого понятия иррационального числа, как мы его ввели выше. В самом деле, рассмотрим в обоих классах A и B только рациональные числа. При этом множество всех рациональных чисел разобьется на два класса (α) и (β), обладающих следующими свойствами: 1) *всякое рациональное число принадлежит к одному из двух классов*; 2) *любое рациональное число класса* (α) *меньше любого рационального числа класса* (β). Здесь могут представиться три случая.

1) В классе (α) может существовать рациональное число $\frac{p}{q}$, *большее всех рациональных чисел того же класса.* Тогда это число $\frac{p}{q}$ и будет числом L. В самом деле, всякое число, меньшее $\frac{p}{q}$, принадлежит к классу A. Всякое число b, большее $\frac{p}{q}$, принадлежит к классу B. Это очевидно, если b рационально; если же b иррационально, то мы возьмем число r, заключающееся между $\frac{p}{q}$ и b. Это рациональное число r принадлежит к классу B; следовательно, принадлежит к классу B и число b.

2) В классе (β) может существовать рациональное число $\frac{p'}{q'}$, *меньшее всех рациональных чисел того же класса.* Как и в первом случае, можно доказать, что число $\frac{p'}{q'}$ будет числом L.

3) Наконец, может быть, что в классе (α) нет ни одного рационального числа, большего всех остальных рациональных чисел того же класса, и в классе (β) нет ни одного рационального числа, меньшего всех остальных рациональных чисел того же класса. Тогда такое разбиение рациональных чисел на два класса (α) и (β) определяет, по предыдущему, некоторое иррациональное число m, большее всех рациональных чисел класса (α) и меньшее всех рациональных чисел класса (β). В этом случае числом L будет именно это число m. В самом деле, всякое рациональное число, меньшее m, будет принадлежать к классу A, и всякое рациональное число, большее m, будет принадлежать к классу B. Возьмем теперь какое-нибудь иррациональное число $m' < m$, и пусть будет K рациональное число, заключающееся между m' и m;

так как K принадлежит к классу A, то будет принадлежать к классу A и число m'. Точно так же можно было бы доказать, что всякое иррациональное число, большее m, принадлежит к классу B.

Самое сечение L может принадлежать как к классу A, так и к классу B. Так, в первом случае оно принадлежит к классу A, во втором — к классу B, а в третьем оно может принадлежать или к классу A, или к классу B. Мы видим здесь, что сечение, произведенное в множестве всех как рациональных, так и иррациональных чисел, не дает никаких новых чисел.

Это понятие сечения встречается в большом числе вполне элементарных вопросов. Рассмотрим, например, ряд, общий член которого есть $n^{-\mu}$; если отнести к классу A все числа μ, для которых этот ряд расходится, а к классу B все числа μ, для которых ряд сходится, то получается разделение всех чисел на два класса, очевидно, удовлетворяющее всем поставленным условиям. Здесь мы имеем $L=1$, и это число L принадлежит к классу A.

3. Ограниченные множества. Мы уже несколько раз употребляли слово *множество*. Понятие множества принадлежит к числу тех, которые, повидимому, бесполезно определять иначе, как с помощью примеров. Всякая совокупность предметов в конечном или бесконечном числе составляет множество: таковы множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество прямых, лежащих в плоскости, и т. д. Мы займемся здесь лишь числовыми множествами. Говорят, что числовое множество E *ограничено сверху*, если существует число a, большее всех чисел этого множества; ясно, что, если существует одно такое число, таковых найдется бесконечное множество, и всякое число, обладающее указанным свойством, называется *верхней границей* чисел множества E. Таким же образом множество E называется *ограниченным снизу*, если существует число b, меньшее всех чисел множества E: всякое число, обладающее этим свойством, есть *нижняя граница* чисел этого множества. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*. Множество всех положительных чисел ограничено снизу; множество всех отрицательных чисел, заключенных между 0 и -1, ограничено и сверху и снизу; множество всех положительных и отрицательных чисел не является ограниченным ни сверху, ни снизу.

Пусть E — числовое множество, ограниченное сверху. По отношению к множеству E можно разбить все числа, как положительные, так и отрицательные, на два класса: A и B. Мы скажем, что число x принадлежит классу A, если существует одно или несколько чисел множества E, больших x, и что оно принадлежит классу B, если нет ни одного числа множества E, превосходящего x. Очевидно, раз множество E ограничено сверху, то найдутся числа обоих классов и всякое число класса A меньше всякого числа класса B. Пусть M — число, разграничивающее оба эти класса. Это число M обладает следующими двумя свойствами:

1) *Нет ни одного числа множества E, превосходящего M.*

2) *Каково бы ни было положительное число ε, всегда найдется число, принадлежащее множеству E, большее, чем $M-\varepsilon$.*

В самом деле, предположим, что существует в E число

$$M+h \quad (h>0),$$

большее M. Число $M+\frac{h}{2}$, которое также превосходит M, принадлежало бы классу A; но это невозможно. С другой стороны, если ε есть какое-нибудь положительное число, число $M-\varepsilon$ принадлежит классу A, следовательно, существует в множестве E, по меньшей мере, одно число, превосходящее $M-\varepsilon$.

Число M, определенное указанным способом, называется *точной верхней границей* или просто *верхней границей* множества E. Это число M может само принадлежать E; это всегда так и будет, если множество составлено из n чисел (где n конечно). Но если E содержит бесконечно много чисел, верхняя граница не входит непременно в состав множества. Рассмотрим, например, множество *рациональных* чисел, квадрат которых не превосходит 2; верхней границей будет иррациональное число $\sqrt{2}$, которое не принадлежит множеству. Наоборот, множество как *рациональных*, так и *иррациональных* чисел, квадрат которых не превосходит 2, также имеет верхнюю границу $\sqrt{2}$, но это число уже входит в состав множества. Заметим еще, что, если M не принадлежит множеству E, всегда найдется бесконечно много чисел E, превосходящих $M-\varepsilon$, сколь бы мало ни было ε. В самом деле, если бы их существовало лишь конечное число, наибольшее из них было бы верхней границей E.

Таким же образом показывают, что если множество E ограничено снизу, существует число m, обладающее следующими двумя свойствами:

1) *Ни одно из чисел множества E не меньше m.*

2) *Если дано положительное число ε, всегда найдется число множества E, меньшее, чем $m+\varepsilon$.*

Это число m называется *нижней границей* множества.

Ясно, что не может существовать более одного числа, обладающего двумя свойствами, характеризующими m; то же самое справедливо и по отношению к M.

4. Наибольший из пределов. Пусть будет E некоторое ограниченное множество, содержащее бесконечное количество чисел. По отношению к этому множеству мы можем разбить все как положительные, так и отрицательные числа на два класса A' и B' следующим образом. Мы будем говорить, что число x принадлежит к классу A', *если существует бесконечно много чисел множества E, больших числа x.* В противном случае мы будем говорить, что число x принадлежит к классу B'. Так как множество E — ограниченное и состоит из бесконечного множества чисел, то очевидно, что существуют числа обоих классов, и что любое число класса A' меньше любого числа класса B'. Пусть будет Λ число, разделяющее оба класса A' и B'; следуя Коши, это число называется *наибольшим из пределов* множества E. Пусть будет ε произвольное положительное число; по самому определению числа Λ очевидно, что число $\Lambda+\varepsilon$ принадлежит к классу B', и число $\Lambda-\varepsilon$ к классу A'. Следовательно, всегда есть бесконечно много чисел множества E, и $\Lambda+\varepsilon$, тогда как есть только конечное число чисел (или ни одного) больших $\Lambda+\varepsilon$.

Это число Λ связано с одним важным вопросом. Для простоты изложения будем изображать каждое число a точкою с абсциссою a на прямой $x'x$, и обозначим одною и тою же буквою как точку оси, так и ее абсциссу. Таким образом всякому множеству E чисел соответствует множество точек на прямой, или *линейное множество.* Точки ограниченного множества расположены все на отрезке оси конечной длины. Пусть дано линейное множество E; если вблизи некоторой точки l этого множества находится бесконечно много точек множества, или, точнее, если существует бесконечно много точек множества, расположенных между $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, то точка l называется *предельною точкою* или *точкою сгущения.*

Всякое ограниченное линейное множество, содержащее бесконечно много точек, имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

Точка с абсциссой Λ, которую мы только что определили, есть, очевидно, предельная точка множества E, и мы видим, что *всякое ограниченное линейное множество, содержащее бесконечно много точек, имеет, по крайней мере, одну предельную точку.*

Это частный случай более общего предложения, называемого *принципом Больцано* (Bolzano), согласно которому всякое ограниченное множество, содержащее бесконечно много точек в пространстве любого числа измерений, имеет, по крайней мере, одну точку накопления, т. е. такую точку, что всегда существует бесконечно много точек множества E, удаленных от нее на расстояние, меньшее числа ε, как бы мало это последнее ни было. Доказательство, данное для линейного множества, может быть распространено и на общий случай. Я его здесь намечу для плоского множества.

Пусть E — некоторое бесконечное множество точек плоскости с координатами, заключенными между двумя постоянными числами A и B. Если (x, y) суть координаты точки этого множества, то числа x и y образуют два линейных ограниченных множества E_x, E_y. Если одно из этих множеств, например E_x, состоит из *конечного* числа различных значений, то в множестве E найдется бесконечно много точек с одной и той же абсциссой, которые, следовательно, образуют линейное множество, имеющее предельную точку. Если E_x и E_y содержат бесконечно много точек, то пусть X будет наибольший из пределов E_x; тогда, согласно самому определению этого числа, найдется бесконечно много точек E, абсциссы которых заключены между $X-\varepsilon$ и $X+\varepsilon$, как бы мало ни было ε. Точки прямой $x=X$ также могут быть разделены на два класса; мы будем говорить, что точка этой прямой с ординатой y принадлежит к первому классу, если найдется бесконечно много точек E, ординаты которых превосходят y, а абсциссы заключены между $X-\varepsilon$ и $X+\varepsilon$, каково бы ни было ε, и что она принадлежит ко второму классу, если для ε достаточно малого существует лишь самое большее конечное число точек E с ординатою, превосходящею y, и абсциссою, заключенною между $X-\varepsilon$ и $X+\varepsilon$. Пусть Y — число, разграничивающее эти два класса; если η есть какое-нибудь положительное число и ε — другое положительное число, достаточно малое, то всегда найдется бесконечно много точек E, коих ордината заключена между $Y-\eta$ и $Y+\eta$, а абсцисса — между $X-\varepsilon$ и $X+\varepsilon$. Очевидно, что это будет справедливо, каковы бы ни были положительные числа ε, η, и следовательно, (X, Y) есть точка накопления множества E.

Множество, состоящее из предельных точек некоторого множества E, называется *производным множеством* и обозначается E'.

5. Сходящиеся последовательности. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots, \tag{1}$$

каждое из которых занимает *определенное* место; эта последовательность называется *сходящейся*, если s_n стремится к некоторому пределу S при безграничном возрастании n. Всякая последовательность, которая не является сходящейся, называется *расходящейся*; это может быть в случае, когда $|s_n|$, начиная с некоторого момента, остается больше всякого наперед заданного числа, или если s_n не стремится ни к какому пределу, хотя бы его абсолютная величина и не возрастала безгранично.

Последовательность называется *возрастающей*, если $s_{n+1}-s_n \geqslant 0$, каково бы ни было n. Она называется *убывающей*, если, при любом n, $s_{n+1}-s_n \leqslant 0$.

Всякая возрастающая последовательность с ограниченным общим членом есть сходящаяся.

В самом деле, числа последовательности (1) образуют в этом случае ограниченное множество (E). Пусть будет M верхняя граница этого множества; если ε есть произвольно заданное положительное число, то найдется число s_m последовательности (1), большее $M-\varepsilon$. Для всякого значения n, превосходящего m, будет $s_n \geqslant s_m$, и следовательно, $M-\varepsilon < s_n \leqslant M$. Таким образом разность $M-s_n$ будет меньше ε, если $n \geqslant m$; другими словами, s_n имеет пределом M, когда n неограниченно возрастает. Таким же образом доказывают, что *всякая убывающая последовательность, общий член которой остается больше некоторого постоянного числа, сходится* *.

Общий критерий сходимости последовательности легко выводится из рассмотрения наибольшего из пределов.

Для сходимости последовательности (1) *необходимо и достаточно, чтобы всякому положительному числу ε можно было поставить в соответствие число n такое, чтобы разность $s_{n+p}-s_n$ по абсолютной величине оказалась меньше ε, каково бы ни было целое положительное число p.*

Это условие *необходимо*. В самом деле, если s_n имеет пределом S, когда n неограниченно возрастает, можно найти число n, достаточно большое, так что все разности $S-s_n$, $S-s_{n+1}, \ldots, S-s_{n+p}, \ldots$ будут по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, каково бы ни

---

* То же рассуждение позволяет показать, что в более общем случае переменное x, которое никогда не убывает и остается меньшим постоянного числа, стремится к пределу, и что имеет предел переменное x, которое, никогда не возрастая, остается большим постоянного числа.

было p, абсолютная величина $s_{n+p}-s_n$ будет меньше, чем $2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Это условие и *достаточно*. В самом деле, пусть ε есть произвольное положительное число. По предположению, существует такое целое число r, что $s_{n+p}-s_n$ будет по абсолютной величине меньше ε, каково бы ни было p. Тогда все члены последовательности (1), начиная с s_r, будут заключены между $s_n-\varepsilon$ и $s_n+\varepsilon$; найдется, следовательно, лишь *конечное* число членов этой последовательности, которые не будут заключены в интервале $(s_n-\varepsilon,\ s_n+\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что наибольший из пределов этого множества S не может быть ни меньше: чем $s_n-\varepsilon$, ни больше, чем $s_n+\varepsilon$. Тогда $|s_n-S|\leqslant\varepsilon$, и из тождества,

$$s_{n+p}-S=(s_{n+p}-s_n)+(s_n-S)$$

заключаем, что $s_{n+p}-S$ по абсолютной величине остается меньше 2ε, каково бы ни было p. При этом ε — произвольное положительное число, следовательно, s_n имеет пределом S.

Если последовательность (1) содержит лишь k различных чисел, то для сходимости этой последовательности, очевидно, необходимо, чтобы, начиная с некоторого номера, все члены были равны между собой. Этот особый случай входит, следовательно, в общее правило.

Пусть дана какая-нибудь бесконечная последовательность, общий член которой есть u_n; говорят, что ряд

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots \tag{2}$$

сходящийся, если последовательность, образованная суммами членов этого ряда,

$$s_0=u_0,\ s_1=u_0+u_1,\ \ldots,\ s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n,\ \ldots$$

сходится. Пусть S есть предел этой последовательности, т. е. предел, к которому стремится сумма s_n, когда n неограниченно возрастает; S называется *суммой* упомянутого ряда, и эту зависимость выражают равенством:

$$S=u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{\nu=0}^{+\infty}u_\nu.$$

Ряд, который не сходится, называется *расходящимся*.

Исследование вопроса о сходимости или расходимости какого-либо ряда сводится, как видно, к исследованию того, является ли последовательность, образованная суммами $s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,$ сходящейся или расходящейся. Обратно, чтобы узнать, сходится ли какая-либо бесконечная последовательность

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,$$

достаточно исследовать ряд:

$$s_0+(s_1-s_0)+(s_2-s_1)+\ldots+(s_n-s_{n-1})+\ldots,$$

так как сумма первых $(n+1)$ членов этого ряда, очевидно, равна общему члену предыдущей последовательности. Это замечание часто имеет применение.

Критерий сходимости бесконечной последовательности, будучи применен к рядам, дает общее условие сходимости Коши (Cauchy). *Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы всякому положительному числу* ε *соответствовало такое целое положительное число* n, *чтобы сумма любого числа членов, начиная с* u_{n+1}, *была по абсолютной величине меньше* ε.

В самом деле, разность $s_{n+p}-s_n$ равна сумме p последовательных членов ряда (2), начиная с u_{n+1}. Таким же образом теорема о возрастающих последовательностях, примененная к рядам, приводит к следующему предложению, весьма полезному в теории рядов.

Для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы все суммы s_n *были меньше некоторого постоянного числа.*

Примечание. Рассмотрим последовательность (1), сходящуюся или расходящуюся, члены которой образуют ограниченное множество E. *Всегда можно, и притом бесконечно многими способами, выделить из этой последовательности сходящуюся подпоследовательность.* В самом деле, пусть S — какая-нибудь предельная точка линейного множества E. Рассмотрим убывающую последовательность положительных чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, где ε_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Каждому числу ε_n этой последовательности мы можем поставить в соответствие такое число s'_n последовательности, рассмотренной ранее, что $|S'-s'_n|$ будет меньше, чем ε_n и чем $|S'-s'_{n+1}|$. Мы получаем, таким образом, некоторую новую последовательность:

$$s'_0, s'_1, \ldots, s'_n,$$

которая содержится в первой и сходится к пределу S'.

Если ряд (2) сходится, то очевидно, что всякая подпоследовательность последовательности (1) также будет сходящейся и будет иметь тот же предел.

Ясно также, что рассуждение применимо не только к точкам линейного множества, но может быть распространено на любое ограниченное точечное множество. Пусть, например, E — какое-нибудь ограниченное множество точек плоскости, а M — предельная точка этого множества. Можно бесконечно многими способами выделить из E последовательность точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ так, чтобы расстояние MA_n стремилось к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Наименование *наибольший из пределов* для числа Λ (§ 4) легко оправдывается; в линейном ограниченном множестве нельзя найти сходящейся числовой последовательности, имеющей пределом $\Lambda+h\,(h>0)$, ибо в этом множестве найдется лишь конечное число чисел, превосходящих $\Lambda+\frac{h}{2}$.

II. ФУНКЦИИ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.

6. Определения. Современное определение слова *функция* принадлежит Коши и Риману. *Переменное* y *называется функцией* x, $y=f(x)$, *если каждому значению* x *соответствует некоторое значение* y. Пусть будут a и b постоянные числа ($a<b$); если всякому числу x, заклю-

чающемуся между a и b, соответствует некоторое число y, то говорят, что функция $f(x)$ *определена в промежутке* (a, b). Разность $b-a$ называется *амплитудою* промежутка, числа a и b — пределами или *границами*. Относительно чисел a и b можно сделать несколько допущений. Мы можем рассматривать эти числа как принадлежащие к промежутку (a, b), который в этом случае называется *замкнутым*. Можно также рассматривать одно из этих чисел или оба, как не принадлежащие к промежутку (a, b); тогда промежуток (a, b) называется *открытым* *. Например, совокупность значений x, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x \leqslant 1$, образует замкнутый промежуток; напротив, взяв совокупность значений x, удовлетворяющих условиям $0 < x < 1$ или $0 < x \leqslant 1$, мы получим открытый промежуток.

Пусть будет (E) совокупность значений функции $f(x)$, определенной в промежутке (a, b); если это множество (E) ограниченное, то функция $f(x)$ называется *ограниченною в промежутке* (или на отрезке) (a, b). Верхняя и нижняя границы множества (E), M и m называются также *верхними и нижними границами функции* $f(x)$; разность $\Delta = M - m$ называется *колебанием функции в промежутке* (на отрезке) (a, b).

По поводу этих определений можно сделать несколько замечаний. Для того чтобы функция была ограничена на отрезке (a, b), недостаточно, чтобы она принимала конечное значение для каждого значения x. Так, функция $f(x)$, следующим образом определенная между 0 и 1 (см. § 30):

$$f(0) = 0, \ f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x > 0,$$

имеет конечное значение для каждого значения x, и, однако, она не является ограниченной в том смысле, который мы приписываем этому слову, так как $f(x) > A$, если взять $0 < x < \frac{1}{A}$. Далее, функция, ограниченная на сегменте (a, b), может принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся от верхней границы M или от нижней границы m, но она не должна непременно достигать этих именно значений. Например, функция $f(x)$, определенная на сегменте $(0, 1)$ условиями:

$$f(0) = 0, \ f(x) = 1 - x \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1,$$

имеет верхней границей $M = 1$, но никогда не достигает этого значения.

7. Непрерывность. Современное определение непрерывности равным образом принадлежит Коши **.

Пусть $y = f(x)$ есть функция, определенная (a, b); возьмем в этом

* В литературе часто замкнутый промежуток, т. е. множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* или *сегментом*; открытый промежуток, т. е. множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *промежутком* или *интервалом*. У Э. Гурса в тех случаях, где это различение не имеет значения, указанная терминология не везде строго выдержана. (*Ред.*)

** Для математиков, современных Ньютону и Лейбницу, функция была непрерывной, если можно было выразить ее посредством символов тех операций, которые обычно рассматривались, каковы операции арифметические, логарифмические и тригонометрические. Этот род непрерывности, довольно плохо определенной, известен под именем *эйлеровой непрерывности*.

интервале значение x_0 и соседнее с ним значение x_0+h, заключенное в том же интервале. Если разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ стремится к нулю, когда абсолютная величина h стремится к нулю, то функция $f(x)$ называется *непрерывной при значении* x_0. На основании определения предела можно также сказать, что *функция $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$, если произвольному положительному числу ε, как бы мало оно ни было, можно поставить в соответствие другое положительное число η, такое, что*

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

для всякого значения h, меньшего η по абсолютному значению. Мы будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b), если она непрерывна при каждом значении x на этом отрезке и если разности $f(a+h)-f(a)$, $f(b-h)-f(b)$ имеют пределом нуль, когда разность h стремится к нулю, оставаясь положительной.

В элементарных курсах высшей математики доказывается, что многочлены, рациональные функции, функции показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные круговые функции непрерывны при всех значениях переменного, кроме некоторых особых, при которых эти функции перестают быть непрерывными. Из определения непрерывной функции следует также, что сумма или произведение произвольного числа непрерывных функций есть также функция непрерывная. То же самое относится к частному двух непрерывных функций, за исключением тех значений переменного, которые обращают знаменатель в нуль. Следует заметить, что частное двух непрерывных функций может быть функцией разрывной для какого-либо из корней знаменателя, оставаясь, однако, ограниченной. Например, частное $\frac{|\sin x|}{x}$ стремится к ± 1, смотря по тому, стремится ли x к нулю по положительным или по отрицательным значениям.

Пусть даны в плоскости координатные оси Ox и Oy и непрерывная линия C, толщиной которой пренебрегают; если параллель к Oy встречает эту линию C не более чем в одной точке, то ордината y точки M линии C есть непрерывная функция абсциссы той же точки M. Пусть $y=f(x)$ — эта непрерывная функция; говорят, что кривая C представляет функцию $f(x)$. Но следует заметить, что не всякая непрерывная функция допускает такое графическое представление. В самом деле, доказано, что существуют непрерывные функции, имеющие бесконечное множество максимумов и минимумов *в каждом интервале*. Но мы, очевидно, не можем вообразить непрерывную линию, имеющую бесконечно много колебаний между всякими двумя сколь угодно близкими ординатами.

Это показывает, что графическое представление, являясь прекрасным средством изыскания свойств непрерывных функций, не может, однако, служить для строгого доказательства этих свойств.

8. Свойства непрерывных функций. Основываясь единственно на определении непрерывности, установим некоторое число теорем о непрерывных функциях, на которые в дальнейшем постоянно придется ссылаться.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке (a, b); если x — произвольное неизменное число на этом отрезке, то, на основании определения непрерывности, всякому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число θ, такое, что

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon, \text{ когда } |h|<\theta,$$

в предположении, что число $x+h$ принадлежит отрезку (a, b).

Очевидно, что существует бесконечно много положительных чисел, удовлетворяющих этому условию; обозначим через $\theta(x, \varepsilon)$ верхнюю границу этих чисел θ.

Таким образом каждому значению x на отрезке (a, b) при определенном значении ε соответствует положительное число $\theta(x, \varepsilon)$.

Теорема А. *Нижняя граница чисел $\theta(x, \varepsilon)$ есть число положительное.*

Достаточно, очевидно, показать, что эта нижняя граница не может быть нулем. В самом деле, допустим, что эта нижняя граница есть нуль; так как эта граница не достигается ни при одном значении x, то на отрезке (a, b) найдется бесконечно много различных точек $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$ таких, что $\theta(x'_n, \varepsilon)$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Множество E этих точек x'_n, будучи ограниченным, имеет, по крайней мере, одну предельную точку λ, которая также принадлежит отрезку (a, b). Так как функция $f(x)$ непрерывна при $x=\lambda$, то найдется такое положительное число k, что

$$|f(\lambda+h)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ когда } |h|<k.$$

Пусть x' — произвольное число в промежутке

$$\left(\lambda-\frac{k}{2}, \lambda+\frac{k}{2}\right),$$

принадлежащем отрезку (a, b); легко убедиться в том, что число $\theta(x', \varepsilon)$ по меньшей мере равно $\frac{k}{2}$. В самом деле, если положительное число h меньше, чем $\frac{k}{2}$, то

$$|x'+h-\lambda|<k, \quad |x'-\lambda|<k,$$

$$|f(x'+h)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x')-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и следовательно, $|f(x'+h)-f(x')|<\varepsilon$. Следовательно, в промежутке $\left(\lambda-\frac{k}{2}, \lambda+\frac{k}{2}\right)$ найдется лишь конечное число точек множества E, и то предположение, что нижняя граница чисел $\theta(x, \varepsilon)$ равна нулю, привело нас к противоречию. Эта нижняя граница есть, следовательно, *положительное число* η, и теорему можно формулировать еще следующим образом:

Если x' и x'' суть два произвольных числа в отрезке (a, b), то всякому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число η, такое, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ всякий раз, как $|x'-x''|<\eta$.

Это свойство выражают также, говоря, что функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на отрезке (a, b).

Следствие. Пусть число η определено, как было сказано; если разность $|x'-x''|$ меньше, чем $p\eta$, то ясно, что будет выполнено также и неравенство $|f(x')-f(x'')|<p\varepsilon$. Отсюда следует, что *всякая функция, непрерывная в отрезке (a, b), ограничена в этом отрезке.*

Теорема B. *Функция $f(x)$, непрерывная в отрезке (a, b), принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, при значении x, содержащемся между a и b.*

Возьмем сначала частный случай. Предположим, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, например $f(a)<0$, а $f(b)>0$. Покажем, что найдется по меньшей мере одно значение x, заключенное между a и b, для которого $f(x)=0$. В самом деле, $f(x)$ отрицательно вблизи a и положительно вблизи b; рассмотрим множество значений x, при которых функция $f(x)$ положительна; пусть λ есть нижняя граница этого множества $(a<\lambda<b)$. На основании определения нижней границы $f(\lambda-h)$ отрицательно или равно нулю при всяком положительном значении h; следовательно, $f(\lambda)$, которое является пределом $f(\lambda-h)$, тоже отрицательно или нуль. С другой стороны, не может быть $f(\lambda)<0$. В самом деле, допустим, что $f(\lambda)=-m$, где m есть положительное число. Так как функция $f(x)$ непрерывна при $x=\lambda$, то можно найти такое число η, что $|f(x)-f(\lambda)|<m$ когда $|x-\lambda|<\eta$; но тогда функция $f(x)$ была бы отрицательна при значениях x, заключенных между λ и $\lambda+\eta$, и λ не было бы нижней границей значений x, при которых функция положительна. Следовательно, $f(\lambda)=0$.

Пусть будет теперь N число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$. Непрерывная функция $\varphi(x)=f(x)-N$ принимает при $x=a$ и при $x=b$ значения противоположных знаков. Следовательно, на основании только что рассмотренного частного случая, она обращается в нуль по меньшей мере при одном значении x, заключенном в интервале (a, b).

Теорема C. *Всякая функция, непрерывная в отрезке (a, b), по меньшей мере однажды достигает как своей верхней, так и нижней границы.*

Прежде всего, всякая непрерывная функция, оставаясь конечной, как уже было показано, имеет верхнюю границу M и нижнюю границу m. Покажем, например, что $f(x)=M$ по меньшей мере при одном значении x в отрезке (a, b).

В самом деле, если бы функция $f(x)$ не принимала значения M ни при каком значении x, принадлежащем отрезку (a, b), то она имела бы бесконечно много различных значений, превосходящих $M-\varepsilon$, сколь бы мало ни было ε (§ 3). Тогда в отрезке (a, b) нашлась бы последовательность различных между собою точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, таких, что $f(x_n)$ стремится к M, когда n неограниченно возрастает. Из этой последовательности можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$, имеющую пределом λ, когда n

неограниченно возрастает. Так как функция f непрерывна при $x=\lambda$, то мы имели бы, следовательно: $f(\lambda)=\lim f(x'_n)=M$.

Сопоставляя эту теорему с предыдущей, мы заключаем, что *функция, непрерывная в отрезке (a, b), принимает по меньшей мере однажды любое значение, заключенное между ее верхней и нижней границами*. Равным образом теорема А может быть выражена так: *если дана функция, непрерывная в отрезке (a, b), то можно найти достаточно малое число η, так что колебание функции в любом частичном интервале, длина которого меньше η, будет меньше любого произвольно выбранного положительного числа*. В самом деле, колебание непрерывной функции равно разности значений $f(x)$ при двух частных значениях переменного.

Примечание. Во всех наших рассуждениях речь идет об *отрезке* (a, b). Это условие существенно. Например, функция $f(x)=1-x$, определенная в *открытом* промежутке $(0<x\leqslant 1)$, не содержащем конца $x=0$ непрерывна при любом значении x в этом промежутке. Верхней границей будет $M=1$, и $f(x)$ не достигает этого значения.

9. Разрывные функции. Пусть будет $y=f(x)$ функция, определенная в отрезке (a, b). Если эта функция не непрерывна при значении x_0, заключенном между a и b, то точка x_0 называется *точкой разрыва*. По крайней мере, одно из двух чисел $f(x_0+\varepsilon)$, $f(x_0-\varepsilon)$ (мы предполагаем, что $\varepsilon>0$) не стремится к $f(x_0)$, когда ε стремится к нулю. Говорят, что x_0 есть точка разрыва первого рода, если как $f(x_0+\varepsilon)$, так и $f(x_0-\varepsilon)$ имеют предел, когда ε стремится к нулю; эти пределы обозначаются через $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ соответственно. Если оба эти предела $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ равны между собой, то x_0 может быть точкой разрыва лишь тогда, когда это предельное значение отлично от $f(x_0)$; в этом случае достаточно было бы изменить значение функции в точке x_0, чтобы разрывность была устранена. Но если два числа $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ различны, то, каково бы ни было значение $f(x_0)$, точка x_0 непременно будет точкой разрыва. Точка разрыва первого рода называется *правильной*, если

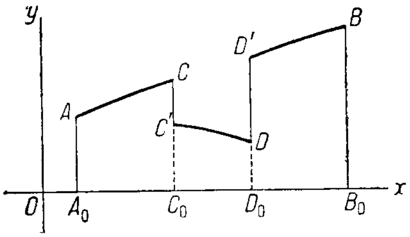
$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}; \tag{3}$$

заметим, что это равенство справедливо для любой точки, где функция непрерывна. В дальнейшем (§ 30) будут приведены примеры функций, представленных с помощью рядов, которые имеют точки разрыва этого рода.

Пусть $y=f(x)$ — функция, имеющая в интервале (a, b) не более чем конечное число точек разрыва, причем все они первого рода, и лишь конечное число максимумов и минимумов. Кривая, представленная уравнением $y=f(x)$, состоит из нескольких непрерывных линий, не соединенных друг с другом, каковы AC, $C'D$, $D'B$ (черт. 1); значения y, соответствующие абсциссам c и d точек разрыва, могут быть взяты произвольно. Если эти точки разрыва правильные, то середины отрезков CC', DD' должны рассматриваться как точки, принадлежащие изображающей кривой. Упомянутая выше функция $y=\frac{|\sin x|}{x}$ была бы представлена двумя непрерывными линиями, примыкающими соответственно к двум точкам оси Oy, ординаты которых суть $+1$ и -1.

Если x_0 есть точка разрыва *второго рода*, то, по крайней мере, одно из чисел $f(x_0+\varepsilon)$, $f(x_0-\varepsilon)$ не стремится ни к какому пределу, когда положительное число ε стремится к нулю. Если, например, $f(x_0+\varepsilon)$ не имеет предела, то здесь придется различать два возможных случая: когда $f(x_0+\varepsilon)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине или когда это не имеет места.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную аналитически, например посредством конечного числа элементарных символов; эта функция вообще есть функция непрерывная, но может случиться, что при некоторых значениях переменного она перестает быть определенной. Возьмем, например, функцию $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, которая непрерывна при всяком значении $x \neq 0$; этот символ не имеет никакого смысла при $x=0$.



Черт. 1.

Но, когда x стремится к нулю, $f(x)$ имеет пределом единицу, и естественно положить $f(0)=1$.

Наоборот, возьмем функцию $f(x)=\frac{1}{x-a}$, непрерывную при всяком значении x_0 переменного x, отличном от a. Операция, которую нужно произвести для получения значения y, соответствующего значению x, теряет всякий смысл, когда переменному дают значение a; но мы замечаем, что, когда x имеет значение, весьма близкое к a, y по абсолютной величине весьма велико, будучи положительно, если $x>a$, и отрицательно, если $x<a$. Когда разность $x-a$ все более и более уменьшается, абсолютная величина y неограниченно возрастает, становясь, наконец, больше любого наперед заданного числа. Этот факт выражают кратко, говоря, что функция $\frac{1}{x-a}$ бесконечна при $x=a$. Очевидно, что восстановить непрерывность при $x=a$ не представляется возможным, какое бы значение мы ни согласились принять для $f(a)$.

Возьмем еще функцию $y=\sin\frac{1}{x}$. Когда x стремится к нулю, $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастает, и y не стремится ни к какому пределу, оставаясь все время заключенным между -1 и $+1$; уравнение $\sin\frac{1}{x}=A$, где предполагается, что $|A|<1$, всегда имеет бесконечно много корней, заключенных между 0 и ε, как бы мало ни было ε. Какое бы значение ни было принято для y при $x=0$, функция y разрывна при $x=0$, и мы имеем в этой точке существенный разрыв.

В приведенных примерах непосредственно видно, как изменяется функция вблизи точки разрыва. Но это не всегда бывает так. Предположим для определенности, что функция $F(x)$ определена своим аналитическим выражением для всякого значения x, большего некоторого постоянного числа a, и пусть требуется узнать, стремится ли $F(x)$ к пределу при приближении x к $+\infty$. Если аналитическое выражение $F(x)$ не позволяет узнать это непосредственно, то в большинстве случаев можно решить вопрос, воспользовавшись следующим предлложением;

Для того чтобы при приближении x к $+\infty$ функции $F(x)$ стремилась к некоторому пределу, необходимо и достаточно, чтобы разность $F(p)-F(q)$ стремилась к нулю, когда оба числа p и q неограниченно возрастают независимо друг от друга.

Выражаясь точнее, чтобы функция $F(x)$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы всякому положительному числу ε можно было поставить в соответствие такое число A, что абсолютная величина разности $F(p)-F(q)$ будет меньше ε, когда каждое из чисел p, q больше или равно A.

Это условие *необходимо*. Если $F(x)$ стремится к пределу L, то найдется число A такое, что при всяком значении $x \geqslant A$ абсолютная величина разности $F(x)-L$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, если p и q суть произвольные числа, превосходящие A, абсолютная величина разности $F(p)-F(q)$ будет меньше ε.

Это условие и *достаточно*. В самом деле, рассмотрим последовательность

$$F(a),\ F(a+1),\ \ldots,\ F(a+n),\ \ldots,$$

где n — целое положительное число. Эта последовательность — сходящаяся, так как, каково бы ни было положительное число k, абсолютная величина разности $F(a+n+k)-F(a+n)$ будет меньше ε, если $a+n$ больше A (§ 5). Следовательно, $F(a+n)$ имеет предел L, когда целое число n неограниченно возрастает. Рассмотрим теперь какое-нибудь число x, и пусть n есть такое целое положительное число, что $x \geqslant a+n > x-1$; мы имеем:

$$F(x)-L=F(x)-F(a+n)+[F(a+n)-L];$$

при неограниченном возрастании x, $a+n$ также возрастает неограниченно, и обе разности, входящие в правую часть предыдущего равенства, стремятся к нулю; следовательно, $F(x)$ имеет пределом L.

Точно так же можно было бы доказать, что, для того чтобы функция $F(x)$ стремилась к пределу, когда x стремится к a, оставаясь, например, больше a, необходимо и достаточно, чтобы разность $F(p)-F(q)$ имела пределом нуль, когда оба числа p и q, оставаясь большими a, независимо друг от друга стремятся к a.

10. Монотонные функции. Функция $f(x)$, определенная в промежутке $(a,\ b)$, называется *монотонною* в этом промежутке, если произведение

$$(x_2-x_1)\,[f(x_2)-f(x_1)]$$

сохраняет постоянно один и тот же знак для всяких двух чисел x_1 и x_2, принадлежащих к рассматриваемому промежутку. Функция называется *возрастающею*, если при всяких значениях x_1 и x_2 это произведение положительно или равно нулю; если же при всяких значениях x_1 и x_2 это произведение отрицательно или равно нулю, то функция называется *убывающею*.

Если $x_2 > x_1$, то для возрастающей функции разность $f(x_2) - f(x_1)$ положительна или равна нулю, а для убывающей функции — отрицательна или равна нулю. Если монотонная функция имеет одно и то же значение, как при $x = x_1$, так и при $x = x_2$, то она сохраняет то же самое значение во всем промежутке (x_1, x_2). Монотонная функция может иметь в промежутке (a, b) любое число точек прерывности, но все эти точки прерывности будут первого рода. Рассмотрим, например, возрастающую функцию, и пусть будет x_0 точка прерывности. Когда ε, оставаясь положительным, стремится к нулю, то $f(x_0 - \varepsilon)$ не может убывать. Сверх того, постоянно $f(x_0 - \varepsilon) \leqslant f(b)$. Следовательно, $f(x_0 - \varepsilon)$ имеет предел $f(x_0 - 0)$ (§ 1). Точно так же можно доказать, что $f(x_0 + \varepsilon)$ имеет предел $f(x_0 + 0)$. Так как, кроме того, всегда имеем $f(x_0 - \varepsilon) \leqslant f(x_0 + \varepsilon)$, то отсюда следует, что $f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0 + 0)$. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то тем самым $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, и в точке x_0 функция непрерывна. Но если $f(x_0 - 0)$ меньше $f(x_0 + 0)$, то $f(x_0)$ может быть равно какому угодно числу, заключающемуся между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Примечание. Иногда полезно различать функцию *возрастающую* от функции *постоянно возрастающей*. Так мы назовем функцию $f(x)$, если при $x_2 > x_1$ имеем также $f(x_2) > f(x_1)$, причем знак равенства $(=)$ *исключается*. Так же определяется функция постоянно убывающая.

11. Функции с ограниченным изменением. Пусть будет $f(x)$ функция, ограниченная на отрезке (a, b), где $a < b$. Разобьем этот отрезок на частичные промежутки возрастающими числами $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$,

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и положим

$$v = |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(b) - f(x_{n-1})|.$$

Таким образом каждому разбиению рассматриваемого отрезка будет соответствовать такое число $v \geqslant 0$. Число v называется *изменением* функции $f(x)$ для отрезка (a, b). Если множество чисел v, соответствующих всем возможным разбиениям отрезка (a, b), есть ограниченное множество, то функция $f(x)$ называется функциею с *ограниченным изменением на отрезке* (a, b). Верхняя граница V чисел v называется *полным изменением функции* $f(x)$ на этом промежутке. Введение этого важного класса функций принадлежит Жордану.

Очевидно, что всякая монотонная функция есть функция с ограниченным изменением, так как здесь все разности $f(x_i) - f(x_{i-1})$ имеют одинаковый знак. Из определения функции с ограниченным изменением следует также, что сумма двух функций с ограниченным изменением есть также функция с ограниченным изменением. Если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением в промежутке (a, b), то она будет таковою во всяком промежутке (a_1, b_1), заключающемся в первом, и, в частности, в промежутке (a, x), где x есть произвольное число, заключающееся между a и b.

Пусть будет p сумма тех из разностей $f(x_i) - f(x_{i-1})$, которые положительны, а $(-n)$ будет сумма отрицательных разностей. Очевидно,

$$v = p + n, \quad f(b) - f(a) = p - n,$$

и следовательно,

$$v = 2p + f(a) - f(b), \quad v = 2n + f(b) - f(a).$$

Если функция $f(x)$ — с ограниченным изменением в промежутке (a, b), то числа p и n, соответствующие всевозможным разбиениям этого промежутка, очевидно, образуют также два ограниченных множества. Пусть будут P и N верхние грасины этих множеств; числа P и N называются *полным положительным и полным отрицательным изменением* функции на отрезке (a, b). На основании предыдущего, между числами V, P, N существуют соотношения:

$$V = 2P + f(a) - f(b), \quad V = 2N + f(b) - f(a).$$

Обозначим через $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ вышеуказанные полные изменения функции $f(x)$ на отрезке (a, x), где x заключается между a и b. Функции $V(x)$, $N(x)$, $P(x)$, по самому их определению,— необходимо функции возрастающие; в самом деле, очевидно, что при возрастании x функции $P(x)$ и $N(x)$ не могут убывать. Между функциями $f(x)$, $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ при всяком x всегда существуют два соотношения:

$$V(x) = 2P(x) + f(a) - f(x), \quad V(x) = 2N(x) + f(x) - f(a),$$

откуда

$$f(x) = f(a) + P(x) - N(x).$$

Так как обе функции $f(a) + P(x)$ и $N(x)$ — возрастающие, то отсюда следует, что *всякая функция с ограниченным изменением есть разность двух возрастающих функций.* Это свойство можно было бы принять за определение функций с ограниченным изменением: в самом деле, разность двух возрастающих функций равна сумме возрастающей и убывающей функций, т. е. сумме двух функций с ограниченным изменением. Следовательно, эта сумма есть функция с ограниченным изменением.

Если к обеим возрастающим функциям $P(x)$, $N(x)$ мы прибавим какую-нибудь возрастающую функцию $\varphi(x)$, то получим новые функции $P_1(x)$, $N_1(x)$, также возрастающие, и их разность будет равна разности первоначальных функций $P(x)$ и $N(x)$. Таким образом всякую функцию с ограниченным изменением можно представить бесконечно разнообразно как разность двух возрастающих функций. Так как всякая монотонная функция имеет точки прерывности только первого рода, то то же имеет место и по отношению к сумме двух монотонных функций; следовательно, *всякая функция $f(x)$ с ограниченным изменением имеет точки прерывности только первого рода.*

Как пример функции с неограниченным изменением рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

принимая $f(0) = 0$. Легко видеть, что полное изменение этой функции в промежутке, заключающемся между значениями, обратными числам $\frac{\pi}{2}$ и $n\pi + \frac{\pi}{2}$, равно $2n$. Следовательно, в промежутке $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ эта функция — с безграничным изменением, что следует также и из того, что для этой функции $x = 0$ есть точка прерывности второго рода.

Рассмотрим теперь, в частности, функцию $f(x)$ с ограниченным изменением в промежутке (a, b), непрерывную в этом промежутке *. Разобьем промежуток (a, b) на части точками деления $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и пусть будет v изменение функции в рассматриваемом промежутке, соответствующее такому разбиению.

Если число n неограниченно возрастает таким образом, что наибольшее значение λ разностей $x_i - x_{i-1}$ стремится к нулю, то число v имеет пределом полное изменение V.

Доказательство этой теоремы основывается на следующем замечании. Предположим, что каждый из промежутков (a, x_1), (x_1, x_2), ... разбит на более мелкие промежутки новыми точками деления, и пусть будет

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \ldots, b$$

---

* Всякая непрерывная функция не есть непременно функция с ограниченным изменением. Так, непрерывная функция Вейерштрасса, приведенная в § 31, с неограниченным изменением во всяком промежутке, функция $x \sin\frac{1}{x}$ — вблизи начала координат.

получившаяся новая последовательность. Обозначим через v' число, аналогичное b, для этого нового разбиения. Мы, очевидно, имеем:

$$|f(x_1)-f(a)|\leq|f(x_1)-f(y_{k-1})|+\ldots+|f(y_1)-f(a)|,$$
$$|f(x_2)-f(x_1)|\leq|f(x_2)-f(y_{l-1})|+\ldots+|f(y_{k+1})-f(x_1)|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и следовательно, $v\leq v'$.

Пусть будет V верхняя граница чисел v, и ε — некоторое положительное число. По самому определению числа V, существует такая последовательность возрастающих чисел

$$a<a_1<a_2<\ldots<a_{p-1}<b,$$

что число v_0, определяемое равенством:

$$v_0=|f(a_1)-f(a)|+|f(a_2)-f(a_1)|+\ldots+|f(b)-f(a_{p-1})|,$$

будет больше $V-\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть будет λ положительное число, меньшее всех разностей a_1-a, $a_2-a_1, \ldots, b-a_{p-1}$. Рассмотрим какое-нибудь разбиение промежутка (a, b) на частичные промежутки, меньшие λ, возрастающими числами a, x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$, b, и пусть будет v соответствующее изменение функции. Расположим теперь все числа x_i и a_j в возрастающем порядке; мы получим новое разбиение промежутка (a, b), последующее к двум первым, и, на основании предыдущего замечания, соответствующее этому новому разбиению изменение функции v' будет не меньше v_0 и v.

Найдем верхний предел разности $v'-v$. Мы можем перейти от разбиения, которое дает v, к разбиению, которое дает v', разбивая точками $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}$ те промежутки (x_{i-1}, x_i), внутри которых содержится какая-нибудь из этих точек a_k, причем очевидно, что в каждом из промежутков (x_{i-1}, x_i) может заключаться не более одной точки a_k. Полное число промежутков (x_{i-1}, x_i), которые можно будет разбить таким образом, самое большее равно $p-1$. Мы имеем:

$$v'-v=\sum[|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|],$$

причем знак суммы распространяется на все те промежутки (x_{i-1}, x_i), внутри которых содержится одна из точек a_k. Пусть будет ω наибольшее значение колебания функции $f(x)$ в каждом из частичных промежутков (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots$ Очевидно, что разность

$$|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

не может быть больше, чем 2ω, и следовательно, разность $v'-v$ не может быть больше, чем $2(p-1)\omega$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то можно найти такое положительное число η, чтобы во всяком частичном промежутке с амплитудою, меньшею η, колебание функции $f(x)$ было меньше $\frac{\varepsilon}{4(p-1)}$; следовательно, если наибольшее значение разностей x_1-a_1, $x_2-x_1, \ldots, b-x_{n-1}$ будет меньше η, то мы будем иметь $v'-v<\frac{\varepsilon}{2}$. Сверх того, мы можем представить разность $V-v$ в виде:

$$V-v=V-v_0+(v'-v)-(v'-v_0),$$

и следовательно, получим $V-v<\varepsilon$. Так как v не может больше V, то отсюда следует, что v имеет пределом V.

Пользуясь этою теоремою, можно доказать, что *функция $V(x)$, представляющая полное изменение функции $f(x)$ в промежутке (a, x), есть непрерывная функция от x.*

Пусть будет x_0 значение переменного x, заключающееся между a и b, и $a, y_1, y_2, \ldots, y_n, x_0$ — некоторая последовательность возрастающих чисел. $V(x_0)$ есть предел изменения v:

$$v=|f(y_1)-f(a)|+|f(y_2)-f(y_1)|+\ldots+|f(y_n)-f(y_{n-1})|+|f(x_0)-f(y_n)|$$

Сумма всех членов, кроме последнего, не может быть больше $V(y_n)$; следовательно, она не больше $V(x_0-0)$, так как $V(x)$ есть возрастающая функция. Таким образом мы имеем:

$$v \leqslant V(x_0-0)+|f(x_0)-f(y_n)|.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то разность $f(x_0)-f(y_n)$ стремится к нулю вместе с $|x_0-y_n|$; следовательно, предел $V(x_0)$ изменения v не может быть больше $V(x_0-0)$, а так как функция $V(x)$ возрастающая, то необходимо

$$V(x_0)=V(x_0-0).$$

Чтобы доказать, что точно так же $V(x_0)=V(x_0+0)$, положим

$$b-x=y, \quad V_1(y)=V(b)-V(x);$$

$V_1(y)$ представляет полное изменение функции $f(b-y)$ в промежутке $(0, y)$. На основании предыдущего имеем:

$$V_1(y_0)=V_1(y_0-0),$$

и следовательно, $V(x_0)=V(x_0+0)$.

Так как функции $V(x)$ и $f(x)$ непрерывны, то будут также непрерывными и функции

$$P(x)=\frac{V(x)+f(x)-f(a)}{2}, \quad N(x)=\frac{V(x)-f(x)+f(a)}{2}.$$

Следовательно, *всякая непрерывная функция с ограниченным изменением есть разность двух непрерывных возрастающих функций.*

Пример. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет в некотором промежутке (a, b) только конечное число максимумов и минимумов, то очевидно, что она будет в этом промежутке функцией с ограниченным изменением. Рассмотрим, например, функцию $f(x)$, возрастающую от a до a_1, затем убывающую от a_1 до a_2, и снова возрастающую от a_2 до b. Возьмем две функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, определенные следующим образом:

1) в промежутке (a, a_1): $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=0$;
2) в промежутке (a_1, a_2): $f_1(x)=f(a_1)$, $f_2(x)=f(a_1)-f(x)$;
3) в промежутке (a_2, b): $\begin{cases} f_1(x)=f(x)-f(a_2)+f(a_1), \\ f_2(x)=f(a_1)-f(a_2). \end{cases}$

Ясно, что обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и возрастают во всем промежутке (a, b), и их разность равна $f(x)$. Точно так же можно было бы поступить для разложения $f(x)$ на разность двух непрерывных возрастающих функций и при любом числе максимумов и минимумов в промежутке (a, b).

Вообще, пусть будет $f(x)$ такая функция, что мы можем разбить промежуток (a, b) на p частичных промежутков, в каждом из которых функция будет монотонною; кроме того, предположим, что функция $f(x)$ имеет только конечное число точек прерывности, и притом правильных. С помощью предыдущего приема можно представить эту функцию $f(x)$ как разность двух возрастающих функций, имеющих только правильные точки прерывности.

12. Функции многих переменных. Говорят, что ω есть функция переменных $x, y, z, \ldots, t$, если всякой системе значений $x, y, z, \ldots, t$ соответствует значение ω. Предположим для определенности, что ω есть функция двух независимых переменных x и y, и примем x, y за координаты точки на плоскости. Всякой системе значений x и y соответствует точка M, и обратно. Если всякой точке M, взятой в какой-либо части плоскости, соответствует значение ω, то говорят, что функция $\omega=f(x, y)$ определена в этой части, которую называют вообще *областью.*

Область A может быть образована частью плоскости, заключенной внутри замкнутого контура C, но она может быть ограничена и несколькими замкнутыми контурами, — внешним C и одним или несколькими внутренними C', C'', ... Контуры C, C', C'', ... образуют границу этой области; мы будем предполагать, вообще, что границы составляют часть области, т. е. что в каждой точке контура C, например, функция ω имеет определенное значение. В этом случае область называется *замкнутой*. Область называется связной, если любые две точки ее могут быть соединены ломаной линией, целиком лежащей в этой области.

Функция $\omega = f(x, y)$ ограничена в области A, если множество значений ω для всех точек этой области есть множество ограниченное. Верхняя и нижняя границы M, m и колебание функции определяются в точности так, как мы это делали выше (§ 6).

Пусть (x_0, y_0) — координаты точки M_0, взятой в этой части плоскости. Говорят, что *функция $f(x, y)$ непрерывна при системе значений x_0, y_0, если всякому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число η, такое, что*

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon,$$

при единственном условии, что $|h|<\eta$ *и* $|k|<\eta$.

Определение непрерывности можно интерпретировать следующим образом. Представим себе, что в плоскости x, y построен квадрат с центром в M_0 и со стороной, равной 2η, причем стороны его параллельны осям координат; точка M' с координатами (x_0+h, y_0+k) находится внутри этого квадрата при условии, что $|h|<\eta$, $|k|<\eta$. Сказать, что функция непрерывна при $x=x_0$, $y=y_0$, это все равно, как если бы мы сказали, что можно взять сторону этого квадрата достаточно малой, чтобы разность значений функции в точке M_0 и в любой другой точке этого квадрата была по абсолютной величине меньше ε. Очевидно, что этот квадрат можно было бы заменить кругом с центром в точке (x_0, y_0), так как, если предшествующее условие выполнено для всех точек, расположенных внутри квадрата, оно будет удовлетворено также и для всех точек внутри вписанного круга. Обратно, если это условие выполняется для всех точек, находящихся внутри круга, то оно будет иметь место и для всех точек, внутренних по отношению к квадрату, вписанному в этот круг. Мы могли бы, следовательно, определить непрерывность, говоря, что можно поставить положительные числа ε и η в соответствие такого рода, что неравенство $\sqrt{h^2+k^2}<\eta$ влечет за собой неравенство:

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

Точно так же говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке m границы,* если значение ω в соседней точке m' области A стремится к значению ω в m, когда расстояние mm' стремится к нулю.

Функция $f(x, y)$, непрерывная в каждой точке внутри области A и в каждой точке ее границы, называется *непрерывной в A*. Для функций, непрерывных в области A, ограниченной замкнутым контуром C, можно высказать теоремы, совершенно аналогичные тем, которые были доказаны выше (§ 8).

Пусть ε — определенное положительное число; каждой точке (x, y) области A соответствует положительное число $\Theta(x, y, \varepsilon)$, которое можно определить как верхнюю границу чисел Θ, таких, что

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

всякий раз, как расстояние между точками (x, y), (x', y') меньше Θ. Применяя доказательство, приведенное в § 8, мы убеждаемся в том, что *когда точка (x, y) описывает замкнутую область, нижняя граница чисел $\Theta(x, y, \varepsilon)$ не может быть равной нулю.*

Эта нижняя граница есть, таким образом, положительное число η, и следовательно, *всякому положительному числу ε можно поставить в соответствие такое другое положительное число η, что*

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon,$$

лишь бы расстояние между точками (x, y), (x', y'), взятыми в A или на контуре C, было меньше η. Другими словами, *функция двух переменных, непрерывная в ограниченной области и на контуре, равномерно непрерывна.*

Из предшествующего предложения выводят, как выше в § 8, что всякая функция, непрерывная в области A, необходимо *ограничена* в этой области. Рассуждение § 8 позволяет показать таким же образом, что $f(x, y)$ принимает по меньшей мере однажды каждое из значений M и m внутри или на контуре области. Пусть будет a точка, для которой $\omega = m$, и b — точка, для которой $\omega = M$. Соединим a и b ломаной линией, целиком лежащей внутри C. Когда точка (x, y) описывает эту линию, то ω есть непрерывная функция длины ломаной, считая эту длину от точки a до точки (x, y); следовательно, она проходит по меньшей мере однажды через каждое значение μ, заключенное между m и M (§ 8). Так как между точками a и b можно провести бесконечное множество ломаных линий, то мы видим, что функция $f(x, y)$ принимает значение μ, заключенное между m и M для бесконечного множества точек внутри контура C.

Ясно, что непрерывная функция двух переменных x, y непрерывна и по отношению к каждому из этих переменных в отдельности, но обратное заключение не всегда справедливо.

Возьмем, например, функцию $f(x, y)$, равную $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$, когда, по крайней мере, одно из значений x, y отлично от нуля, и положим $f(0, 0) = 0$. Функция, определенная указанным образом, есть непрерывная функция переменного x, когда y остается постоянным, и наоборот. Однако она не является непрерывной функцией двух переменных x и y для системы значений $x = y = 0$, так как, если точка (x, y) стремится к началу координат, оставаясь на прямой $y = mx$, функция $f(x, y)$ имеет пределом $\frac{2m}{1 + m^2}$, и этот предел изменяется вместе с m. В этом примере было бы, очевидно, невозможно так изменить значение $f(0, 0)$, чтобы функция сделалась непрерывной в начале координат. Дело обстоит иначе для функции $f(x, y)$, равной $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, когда x^2+y^2 отлично от нуля; если положить, кроме того, $f(0, 0)=0$, то функция, так определенная, будет непрерывна при $x=y=0$, так как абсолютная величина $f(x, y)$ меньше $|x|$.

Все эти соображения распространяются без затруднений на функции произвольного числа независимых переменных.

13. Непрерывные кривые. В предшествующих рассуждениях мы допустили, что замкнутая кривая C разбивает плоскость на две области — ***внутреннюю*** область D_i и ***внешнюю*** D_e, так что невозможно соединить какую-нибудь точку из D_i с какой-нибудь точкой D_e ломаной линией, которая не имела бы общих точек с C. Это свойство вполне соответствует интуитивному представлению о кривой, как оно дается в геометрии, и его легко установить для кривых, определенных геометрическим свойством, например для эллипса.

Но чтобы иметь возможность рассуждать точно, необходимо заменить это несколько неопределенное представление, заимствованное из геометрии, чисто аналитическим определением.

Пусть будут $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ***непрерывные*** функции переменного t; множество точек, координаты которых определяются формулами:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$

составляют ***непрерывную кривую*** Γ. Предположим, что непрерывные функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют ***период*** ω, т. е. что при всяком t имеют место равенства:

$$f(t+\omega)=f(t),\quad \varphi(t+\omega)=\varphi(t),\quad \psi(t+\omega)=\psi(t);$$

в этом случае достаточно изменять t в любом промежутке $(a, a+\omega)$ с амплитудою ω, чтобы получить все точки кривой Γ; такая кривая Γ называется ***замкнутою кривою***. Очевидно, что мы можем предположить ω положительным; кроме того, предположим, что ω есть наименьшее положительное число, удовлетворяющее трем предыдущим равенствам. Если при двух различных значениях t', t'' мы имеем одновременно

$$f(t')=f(t''),\quad \varphi(t')=\varphi(t''),\quad \psi(t')=\psi(t''),$$

и притом разность $t'-t''$ не есть кратное числа ω, то соответствующая точка кривой Γ называется ее ***двойною точкою***. Если же нельзя найти никаких двух таких значений t', t'', удовлетворяющих предыдущим соотношениям, так чтобы $t'-t''$ не было кратным числа ω, то кривая Γ не имеет двойной точки. Таким же образом определяются и кратные точки высшей кратности. Кривые, не имеющие кратных точек, называются ***простыми кривыми*** или ***кривыми Жордана***. Чтобы применить эти определения к плоским кривым, достаточно положить $\psi(t)=0$.

Жордан впервые доказал (см. его „Cours d'Analyse"), что замкнутая простая плоская кривая C разделяет плоскость на две области, внешнюю и внутреннюю, причем всякие две точки одной и той же области могут быть соединены ломаною линиею, не пересекающею кривой C, тогда как всякая непрерывная линия, соединяющая точку внутренней области с точкою внешней области, необходимо пересекает кривую C.

Рассуждение лишь подтверждает здесь геометрическую интуицию, но не нужно думать, что это всегда бывает так. Пеано показал это, дав чрезвычайно любопытный пример плоской кривой, обладающей следующим замечательным свойством: при изменении параметра t точка, координаты которой суть $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, последовательно совпадает со *всеми точками внутри некоторого квадрата* *.

Мы привели этот результат лишь для того, чтобы показать, насколько аналитическое определение кривой сложнее обычного определения. В дальнейшем мы большею частью будем заниматься лишь кривыми, удовлетворяющими следующим условиям, которые оправдываются для обычно рассматриваемых контуров. Пусть $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ суть уравнения, определяющие кривую C, и пусть (a, b) — интервал, в котором нужно изменять t, чтобы получить все точки этой кривой. Мы предположим, что можно разбить (a, b) на *конечное* число частичных интервалов, в каждом из которых каждая из функций f, φ возрастает, или убывает, или остается постоянной. Если, например, функция $x=f(t)$ возрастает в интервале (α, β), то, на основании понятия об обратной функции, можно отсюда выразить t как непрерывную функцию от x, и соответствующая дуга представится уравнением вида $y=G(x)$. Точно так же, если функция $\varphi(t)$ возрастает или убывает в частичном интервале, то соответствующая дуга представляется уравнением вида $x=H(y)$.

Все кривые, о которых мы будем говорить в дальнейшем, составлены из некоторого числа дуг этого рода, соединенных своими концами. Рассмотрим, в частности, замкнутый контур C, не имеющий двойных точек, и возьмем точки кривой C, где x имеет максимум или минимум (включая точки отрезков прямых, параллельных Oy, если контур C таковые содержит).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — абсциссы этих точек, расположенные в возрастающем порядке. Любая параллель $x=\alpha$ к оси Oy при α, заключенном в одном из интервалов (x_{i-1}, x_i), встречает C в четном числе точек с ординатами $(y_1, y_2, \ldots, y_{2p})$; y_h есть непрерывная функция $\varphi_h(x)$ в интервале (x_{i-1}, x_i). Мы предположим, что

$$\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\ldots<\varphi_{2p-1}<\varphi_{2p}.$$

Любая точка полосы, ограниченной прямыми $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, заключенная между кривыми $y_1=\varphi_1$, $y_2=\varphi_2$, есть внутренняя по отношению к контуру C; наоборот, всякая точка этой полосы, содержащаяся между кривыми $y_2=\varphi_2$ и $y_3=\varphi_3$, есть внешняя по отношению к контуру C, и т. д.

Продолжая эти рассуждения, мы убеждаемся в том, что область, внутренняя по отношению к контуру C, может быть разбита на *конечное* число частичных областей, каждая из которых ограничена двумя параллелями $x=a$, $x=b$ к оси Oy и двумя кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, где φ_1 и φ_2 суть функции, непрерывные в интервале (a, b).

---

* Peano, Sur une courbe qui remplit une aire plane (*Math. Annalen*, t. XXXVI). См. также Hilbert (Ibid, t. XXXVIII).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Произведение двух функций с ограниченным изменением есть также функция с ограниченным изменением.

2. Если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то это будет иметь место и для $|f(x)|$.

3. Чтобы функция была с ограниченным изменением, необходимо и достаточно, чтобы сумма колебаний в каждом частичном интервале оставалась конечной.

4. Если функция $f(x, y)$ *равномерно непрерывна* по отношению к каждому из переменных в некоторой области, то она непрерывна относительно обоих переменных вместе в этой области.

ГЛАВА II.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФЕРЕНЦИАЛЫ.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА.

14. Производные. Пусть будет $f(x)$ непрерывная функция от x; Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Будем, оставляя x постоянным, неограниченно уменьшать абсолютную величину h; числитель и знаменатель этого отношения будут стремиться к нулю; если самое отношение стремится при этом к пределу, то этот предел называется производною от функции $f(x)$. Производная обыкновенно обозначается через y' или, по обозначению Лагранжа (Lagrange), через $f'(x)$.

С аналитическим понятием производной тесно связано важное геометрическое понятие. Пусть будет $f(x)$ функция, непрерывная в промежутке (a, b). Рассмотрим на плоскости точку с координатами (x, y). При изменении x от a до b эта точка описывает дугу кривой AMB, графически представляющую ход функции $f(x)$ в промежутке (a, b). Возьмем на этой дуге две соседние точки M и M' с абсциссами x и $x+h$. Угловой коэфициент прямой MM' равен

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

когда h стремится к нулю, точка M' неопределенно приближается к точке M, и если функция $f(x)$ имеет производную, то угловой коэфициент прямой MM' стремится к пределу y'. Таким образом прямая MM' стремится к некоторому предельному положению MT, называемому *касательною к кривой*; на основании предыдущего, уравнение этой касательной будет

$$Y-y=y'(X-x),$$

где X и Y — текущие координаты.

Распространим этот вывод на кривые двойной кривизны. Пусть будут

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t) \tag{1}$$

выражения координат любой точки какой-нибудь кривой двойной кривизны в функции переменного параметра t. Возьмем на этой кривой две точки M и M', соответствующие двум значениям параметра t и $t+h$; уравнения хорды MM' будут:

$$\frac{X-f(t)}{f(t+h)-f(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi(t+h)-\psi(t)}.$$

Разделив делителей этих отношений на h и приближая затем h к нулю, мы найдем, что хорда MM' стремится к предельному положению, которое представится уравнениями:

$$\frac{X-f(t)}{f'(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi'(t)},$$

предполагая, разумеется, что три функции $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные. Таким образом определение касательной к кривой приводится аналитически к вычислению производных.

Всякая функция, имеющая производную, необходимо непрерывна, но обратное положение не всегда справедливо. Нетрудно привести примеры непрерывных функций, не имеющих производной при известных частных значениях переменного. Такова функция $y=x\sin\frac{1}{x}$ при $x=0$. Если x стремится к нулю, y также стремится к нулю, и функция непрерывна, но отношение $\frac{y}{x}=\sin\frac{1}{x}$, как мы уже видели, не стремится ни к какому пределу.

Пусть будет, далее, $y=x^{\frac{2}{3}}$; эта функция непрерывна при всяком значении x и равна нулю при $x=0$; но, если x стремится к нулю, отношение $\frac{y}{x}=x^{-\frac{1}{3}}$ неопределенно возрастает. Для краткости мы будем говорить, что здесь производная бесконечна при $x=0$; кривая, изображающая ход функции, касается оси y в начале координат.

Функция $y=x\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ равна нулю при $x=0$; но отношение $\frac{y}{x}$ стремится к двум различным пределам, смотря по тому, приближается ли x к нулю, оставаясь положительным или оставаясь отрицательным. Если x положительно и очень мало, то $e^{\frac{1}{x}}$ положительно и очень велико; отношение $\frac{y}{x}$ стремится к единице. Напротив, если x отрицательно и очень мало по абсолютной величине, то $e^{\frac{1}{x}}$ очень близко к нулю, и отношение $\frac{y}{x}$ имеет пределом нуль. Таким образом производная имеет два различных значения в зависимости от того, каким образом x приближается к нулю; кривая, изображающая ход функции, имеет в начале координат *угловую точку*.

Из этих примеров видно, что легко составить функции, не имеющие производных при некоторых частных значениях переменного. Между тем, изобретатели исчисления бесконечно-малых и их последователи никогда не сомневались в том, что непрерывная функция, вообще, имеет производную. Было даже несколько попыток доказательств, правда, недостаточных, пока Вейерштрасс (Weierstrass) не разрешил вопроса, дав примеры непрерывных функций, которые не имеют производных ни при каких значениях переменного *. Так как эти функции до сих пор не получили никакого применения, то мы ими заниматься не будем. В дальнейшем, когда мы будем говорить, что функция $f(x)$ имеет производную в промежутке (a, b), то при отсутствии особых указаний это будет всегда означать, что эта функция имеет единственную и конечную производную при каждом значении переменного x, заключающемся между a и b.

15. Производные высших порядков. Производная от $f(x)$ есть, вообще, сама некоторая функция от x, $f'(x)$; если в свою очередь $f'(x)$ имеет производную, то эта новая функция называется второю производною от $f(x)$ и обозначается символом y'' или $f''(x)$. Третья производная y''' или $f'''(x)$ определяется подобным же образом, как производная от второй производной и т. д. Вообще, n-я производная $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка. Может случиться, что, составляя таким образом высшие производные, мы никогда не дойдем до функции, не имеющей производной. В этом случае мы можем представить себе, что этот ряд действий продолжается до бесконечности, и мы получаем бесконечный ряд последовательных производных от функции $f(x)$. Таким бесконечным рядом производных обладают все функции, имеющие до сих пор какое-нибудь практическое значение.

Приведенное выше обозначение производной принадлежит Лагранжу. Чтобы представить производную n-го порядка, иногда употребляют также символ Коши (Cauchy): $D_{x}^{n}y$ или $D_{x}^{n}f(x)$. Ниже мы познакомимся с обозначением Лейбница (Leibniz).

16. Теорема Ролля. Применение производных к изучению уравнений основывается на следующем предложении, известном под названием теоремы Ролля (Rolle).

Пусть будут a и b два корня уравнения $f(x)=0$. Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет производную в промежутке (a, b), то уравнение $f'(x)=0$ имеет по крайней мере один корень, заключающийся между a и b.

В самом деле, функция $f(x)$, по предположению, равна нулю при $x=a$ и при $x=b$. Если она постоянно равна нулю в промежутке (a, b), то и ее производная также будет постоянно равна нулю в этом промежутке, и теорема очевидна. Если же функция $f(x)$ не равна постоянно нулю, то она будет иметь положительные или отрицательные значения. Предположим, например, что функция $f(x)$ имеет положительные значения; тогда она непременно имеет наибольшее зна-

---

* Доклад, читанный в Берлинской академии наук 18 июля 1872 г. Другие примеры можно найти в мемуаре Дарбу (Darboux) о прерывных функциях (*Annales de l'École Normale Supérieure*, том IV, 2-я серия). Пример Вейерштрасса приведен далее (глава IX).

чение A при некотором значении $x=x_1$, заключающемся в промежутке (a, b) (§ 3, теорема II). Отношение

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h},$$

где $h>0$, будет необходимо или отрицательно, или равно нулю; поэтому предел этого отношения, т. е. $f'(x_1)$, не может быть положительным числом, и следовательно, $f'(x_1)\leqslant 0$. Точно так же, рассматривая $f'(x_1)$ как предел отношения

$$\frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h},$$

где $h>0$, мы увидим, что $f'(x_1)\geqslant 0$. Сравнение этих двух результатов доказывает, что необходимо $f'(x_1)=0$.

17. Формула конечных приращений. Из теоремы Ролля легко может быть выведена важная формула конечных приращений.

Пусть будет $f(x)$ *непрерывная функция, имеющая производную в промежутке* (a, b); *тогда*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \tag{1'}$$

где с есть число, заключающееся между a и b.

Чтобы вывести эту формулу, рассмотрим вторую функцию $\varphi(x)$, обладающую теми же свойствами, как и первая функция, т. е. непрерывную и имеющую производную в промежутке (a, b). Введем вспомогательную функцию

$$\psi(x)=Af(x)+B\varphi(x)+C,$$

где A, B, C суть постоянные, и определим эти постоянные таким образом, чтобы функция $\psi(x)$ обращалась в нуль при $x=a$ и при $x=b$. Необходимые и достаточные условия этого будут:

$$Af(a)+B\varphi(a)+C=0, \quad Af(b)+B\varphi(b)+C=0;$$

мы удовлетворим этим условиям, положив

$$A=\varphi(a)-\varphi(b), \quad B=f(b)-f(a), \quad C=f(a)\varphi(b)-f(b)\varphi(a).$$

Определенная таким образом функция $\psi(x)$ непрерывна и имеет производную в промежутке (a, b). Так как при $x=a$ и при $x=b$ эта функция $\psi(x)$ обращается в нуль, то ее производная $\psi'(x)=Af'(x)+B\varphi'(x)$ должна быть равна нулю при некотором значении c, заключающемся между a и b. Отсюда, заменяя A и B их значениями, мы приходим к соотношению вида:

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]f'(c)=[f(b)-f(a)]\varphi'(c);$$

разделив на $\varphi'(c)[\varphi(b)-\varphi(a)]$, получаем:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2}$$

Полагая в этом соотношении $\varphi(x)=x$, мы получаем равенство (1'). Обратим внимание на то, что при этом доказательстве мы не предполагали, что производная $f'(x)$ непрерывна и что она существует на концах, при $x=a$, $x=b$.

Из формулы конечных приращений следует, что, если производная $f'(x)$ равна нулю в промежутке (a, b), то функция $f(x)$ сохраняет в этом промежутке постоянное значение; в самом деле, приложив эту формулу к двум значениям x_1 и x_2, принадлежащим промежутку (a, b), мы приходим к соотношению $f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда, далее, следует, что разность двух функций, имеющих одну и ту же производную, постоянна; очевидно, справедливо и обратное предложение. ***Если известна функция $F(x)$, имеющая производною данную функцию $f(x)$, то мы получим все другие функции, имеющие ту же самую производную, прибавляя произвольное постоянное к функции $F(x)$*** *.

Формула (1') допускает простое геометрическое истолкование. В самом деле, рассмотрим кривую AMB, изображающую ход функции $f(x)$ в промежутке (a, b); $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэфициент хорды AB, а $f'(c)$ есть угловой коэфициент касательной в точке C, причем абсцисса этой точки равна c. Формула (1) показывает, что ***на дуге AMB существует точка C, в которой касательная параллельна хорде AB.***

Предположим, что производная $f'(x)$ непрерывна; если мы будем приближать a и b к общему пределу x_0 по какому-нибудь закону, то и число c, заключающееся между a и b, будет также стремиться к x_0; формула (1') показывает, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

имеет пределом $f'(x_0)$. Геометрически это значит следующее. Рассмотрим

---

* Нельзя применять эту теорему, не обращая внимания на все заключающиеся в ней условия. Пусть, например, $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две непрерывные функции, имеющие производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в промежутке (a, b). Если между этими четырьмя функциями существует соотношение $f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)=0$, то мы выведем из формулы конечных приращений, что производная от функции $\frac{f}{\varphi}$, т. е. $\frac{f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2}$, равна нулю, и следовательно, отношение $\frac{f}{\varphi}$ в промежутке (a, b) постоянно. Но это заключение вполне законно только в том случае, если $\varphi(x)$ не обращается в нуль в промежутке (a, b). В самом деле, предположим, что $\varphi(x)$ вместе с производною $\varphi'(x)$ обращаются в нуль при значении c, заключающемся между a и b. Пусть функция $f(x)$ равна $C_1\varphi(x)$ в промежутке между a и c и равна $C_2\varphi(x)$ между a и b, где C_1 и C_2 — два различных постоянных количества. Ясно, что $f(x)$ непрерывна и имеет производную в промежутке (a, b) и что, кроме того,

$$f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)=0$$

при всяком значении x, заключающемся в этом промежутке. Однако функция $\frac{f}{\varphi}$ равна C_1 в промежутке (a, b) и равна C_2 в промежутке (c, b). Нетрудно дать этому примеру геометрическое истолкование.

на кривой $y = f(x)$ точку M с абсциссою x_0 и две точки A и B с абсциссами a и b. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэфициенту хорды AB, тогда как $f'(x_0)$ представляет угловой коэфициент касательной в точке M. Из предыдущего видно, что когда две точки A и B беспредельно приближаются к точке M по какому угодно закону, то секущая AB всегда имеет пределом касательную в точке M.

Этого, вообще, не будет, если производная $f'(x)$ разрывна. Например, если мы возьмем на кривой $y = x^{\frac{2}{3}}$ две точки, бесконечно близкие к началу координат и лежащие по разные стороны от оси Oy, то на чертеже ясно видно, что направление прямой, соединяющей эти две точки, остается совершенно неопределенным, когда обе эти точки приближаются к началу координат.

Вот еще одно следствие из формулы (1′), которое нам часто понадобится в дальнейшем. Предположим, что производная $f'(x)$ *ограничена* в интервале (a, b) так, что для всякого значения x, заключенного между a и b, имеем: $|f'(x)| < K$, причем положительное число K не зависит от x. Отсюда следует, что для любых двух чисел x_1, x_2 интервала (a, b) всегда имеет место неравенство:

$$|f(x_2)-f(x_1)| < K|x_2 - x_1|.$$

Мы будем сокращенно называть условие, выражаемое этим неравенством, *условием Липшица*; здесь K означает определенное число, x_1 и x_2 — любые числа, принадлежащие некоторому интервалу.

Уравнение (2) иногда называется *обобщенною формулой конечных приращений*. Из нее можно легко вывести теорему Лопиталя (L'Hopital), позволяющую находить пределы неопределенных выражений. Предположим, что при $x=a$ мы имеем $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$. Заменяя в формуле (1′) b через x, получим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

где x_1 заключается между a и x. Это уравнение показывает, что *если при $x=a$ мы имеем $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ и если отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ стремится к некоторому пределу, когда x стремится к a, то отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится к тому же самому пределу.*

18. Формула Тейлора. Из алгебры известно, что если $f(x)$ есть целый многочлен n-й степени, то, каковы бы ни были числа a и h, мы всегда имеем:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a); \quad (3)$$

разложение (3) конечно, так как все производные, начиная с $(n+1)$-й, равны нулю. Если бы мы захотели приложить эту формулу не к многочлену, а к какой-нибудь другой функции $f(x)$, то мы получили бы во второй части неограниченное число членов. Чтобы узнать, какое значение мы должны приписать полученному таким образом разложению, найдем предварительно выражение разности:

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)-\ldots-\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a),$$

предполагая только, что функция $f(x)$ вместе со своими n первыми производными $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$ непрерывна при изменении x от a до $a+h$, и что $f^{(n)}(x)$ имеет производную $f^{(n+1)}(x)$ в том же промежутке. Предполагая, что числа a и h имеют определенные значения, положим

$$\begin{aligned} f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots \\ \ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^p}{1\cdot 2\ldots n\cdot p}P, \end{aligned} \tag{4}$$

где p есть какое-нибудь целое положительное число. Определив число P при помощи последнего равенства, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} \varphi(x)=f(a+h)-f(x)-\frac{a+h-x}{1}f'(x)-\frac{(a+h-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)-\ldots \\ \ldots-\frac{(a+h-x)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x)-\frac{(a+h-x)^p}{1\cdot 2\ldots n\cdot p}P. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\varphi(a)=0, \quad \varphi(a+h)=0,$$

причем первое равенство вытекает из формулы (4), определяющей число P. Из сделанных относительно $f(x)$ допущений следует, что $\varphi(x)$ имеет производную в промежутке $(a, a+h)$; следовательно, по теореме Ролля, уравнение $\varphi'(x)=0$ должно иметь корень $a+\theta h$, заключенный в том же промежутке, где θ обозначает положительное число, заключающееся между нулем и единицею. Вычислив $\varphi'(x)$, после приведений, найдем:

$$\varphi'(x)=\frac{(a+h-x)^{p-1}}{1\cdot 2\ldots n}\left[P-(a+h-x)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x)\right].$$

Первый множитель $(a+h-x)^{p-1}$ не может обратиться в нуль при значении x, отличном от $(a+h)$; поэтому необходимо, чтобы

$$P=h^{n-p+1}(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1.$$

Заменив в формуле (4) P полученным значением, находим:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+R_n, \tag{5}$$

где

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1\cdot 2\ldots n\cdot p}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Мы будем называть эту формулу (5) *общею формулою Тейлора* (Taylor); последний член R_n называется *остаточным членом*. Этот остаточный член зависит от целого положительного числа p, которое мы оставили неопределенным. Обыкновенно для этого числа p берут два значения: $p=n+1$ или $p=1$. Полагая $p=n+1$, мы найдем выражение остаточного члена, данное Лагранжем:

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots n(n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h);$$

полагая же $p=1$, получим:

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n+1)}(a+\theta h); \tag{6}$$

этот вид остаточного члена принадлежит Коши. Понятно, что число θ, вообще, не имеет одного и того же значения в обеих формулах остаточного члена. Предполагая $f^{(n+1)}(x)$ непрерывною при $x=a$, мы можем также написать:

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots (n+1)}[f^{(n+1)}(a)+\varepsilon], \tag{7}$$

где ε бесконечно мало одновременно с h.

Рассмотрим остаточный член в форме, данной Лагранжем. Если в общей формуле (5) мы будем последовательно полагать $n=2$, $n=3$, $n=4, \ldots$, то будем получать различные формулы, которые при бесконечно малых значениях h будут давать значения, все более и более близкие к $f(a+h)$. Так, при $n=2$ мы имеем:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a+\theta h);$$

эта формула показывает, что разность

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)$$

есть бесконечно-малое второго порядка. Далее, разность

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)$$

есть бесконечно-малое третьего порядка, и, вообще,

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

есть бесконечно-малое $(n+1)$-го порядка относительно h. Но чтобы иметь точное представление о приближении, которое мы получим, пренебрегая членом R_n, необходимо иметь верхний предел этого остаточного члена. Если мы обозначим через M верхний предел абсолютной величины $f^{(n+1)}(x)$ вблизи $x=a$, например, между $a-\eta$ и $a+\eta$, то, при $|h|<\eta$, очевидно, будем иметь:

$$|R_n|<\frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}M.$$

Пример 1. Применим формулу (7) к функции $f(x)=\ln(1+x)$, где знак ln обозначает неперов логарифм, полагая $a=0$, $n=1$, $x>-1$; мы находим:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2};$$

если мы в этой формуле заменим x обратной величиной целого числа n, то получим:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

где θ_n — положительный множитель, меньший единицы.

Мы заключаем отсюда, что ряд, общий член которого есть

$$\frac{1}{p}-\ln\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

сходится, так как общий член меньше, чем $\frac{1}{2p^2}$.

Сумма n первых членов этого ряда равна

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=\Sigma_n-\ln n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

следовательно, разность $\Sigma_n-\ln n$ стремится к конечному пределу, когда n неограниченно возрастает. Этот предел есть эйлерова постоянная C, значение которой, вычисленное с 20 десятичными знаками, $C=0{,}57721566490153286060$.

Пример 2. Уравнения касательной к кривой, представленной формулами (1), обращаются в тождества, если все три производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ обращаются в нуль при $t=t_0$. Чтобы устранить это затруднение, вспомним рассуждение, которое мы применили для нахождения уравнений касательной. Пусть будет M' точка кривой C, соседняя с точкой M, а t_0+h — соответствующее значение параметра; уравнения хорды MM' суть:

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

Для большей общности мы предположим, что все производные порядка ниже p $(p>1)$ функций $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ обращаются в нуль при $t=t_0$, но что, по крайней мере, одна из производных порядка p, например $f^{(p)}(t_0)$, отлична от нуля. Деля все знаменатели предшествующих выражений на h^p и применяя общую формулу (7), мы можем переписать эти уравнения так:

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\varepsilon}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)+\varepsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\varepsilon''},$$

где $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ — бесконечно малы. Если теперь заставить h стремиться к нулю, то эти уравнения в пределе примут вид:

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)}$$

и не представляют более никакой неопределенности.

Точки кривой C, где это обстоятельство имеет место, суть, вообще; особые точки, в которых кривая представляет какую-либо особенность формы. Так, плоская кривая, даваемая уравнениями $x=t^2$, $y=t^3$, проходит через начало координат, и мы имеем в этой точке $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$. Кривая имеет в начале координат точку возврата первого рода с касательной, совпадающей с осью x.

19. Частные производные. Дадим в непрерывной функции $f(x, y)$ какое-нибудь постоянное значение одному из переменных, например переменному y. Мы получим функцию только одного независимого переменного x; обозначим производную от этой функции, если только эта производная существует, через $f'_x(x, y)$, или ω'_x. Подобным же образом обозначим через ω'_y или $f'_y(x, y)$ производную от функции $f(x, y)$, в которой x рассматривается как постоянное, а y как независимое переменное; $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются *частными производными* от функции $f(x, y)$. Эти частные производные, в свою очередь, являются вообще функциями переменных x, y; если мы вновь возьмем от них частные производные, то получим четыре частных производных второго порядка f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}. Подобным же образом определяются частные производные третьего, четвертого и так далее порядков. Вообще, если нам дана функция некоторого числа независимых переменных $\omega = f(x, y, z, \ldots, t)$, то мы получим частную производную n-го порядка от этой функции, если возьмем от нее последовательно n производных по любым из входящих в нее независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$. Мы докажем, что конечный результат не будет зависеть от того, в каком порядке мы будем брать эти производные.

Докажем предварительно следующую лемму:

Пусть будет $\omega = f(x, y)$ функция двух независимых переменных x и y; мы имеем $f''_{xy} = f''_{yx}$, если только эти частные производные непрерывны.

Рассмотрим выражение

$$U = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y),$$

где $x, y, \Delta x, \Delta y$ имеют определенные значения. Мы можем представить выражение U в двух различных видах. Обозначим через v вспомогательное переменное и положим:

$$\varphi(v) = f(x + \Delta x, v) - f(x, v).$$

Тогда

$$U = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Приложив к функции $\varphi(v)$ формулу конечных приращений, находим:

$$U = \Delta y \varphi'_y(y + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Заменим φ'_y ее значением:

$$U = \Delta y [f'_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y + \theta \Delta y)].$$

Приложим формулу конечных приращений к функции $f'_y(u, y + \theta \Delta y)$, принимая в ней u за независимое переменное. Мы будем иметь новое выражение для U:

$$U = \Delta x \Delta y f''_{yx}(x + \theta' \Delta x, y + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta' < 1.$$

Это выражение для U симметрично относительно $x, y, \Delta x$ и Δy; поэтому, переменив роль переменных x и y, мы получили бы:

$$U = \Delta y \Delta x f''_{xy}(x + \theta'_1 \Delta x, \ y + \theta_1 \Delta y),$$

где множители θ_1, θ'_1 положительны и меньше единицы. Приравняем между собою эти два значения U, разделив их предварительно на $\Delta x \Delta y$:

$$f''_{xy}(x + \theta'_1 \Delta x, \ y + \theta_1 \Delta y) = f''_{yx}(x + \theta' \Delta x, \ y + \theta \Delta y).$$

По предположению, производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны; поэтому при приближении Δx и Δy к нулю обе части предыдущего равенства будут стремиться соответственно к f''_{xy} и f''_{yx}, и мы получим то равенство, которое требовалось доказать.

Следует заметить, что это доказательство не содержит никаких предположений относительно других частных производных второго порядка f''_{x^2} и f''_{y^2}; оно остается справедливым также и в том случае, если $f(x, y)$ зависит еще от других независимых переменных. Число этих независимых переменных может быть каким угодно, так как при образовании частных производных f''_{xy}, f''_{yx} мы должны обращаться с этими переменными как с постоянными.

Пусть будет теперь $\omega = f(x, y, z, \ldots, t)$ функция произвольного числа независимых переменных, и пусть будет Ω частная производная n-го порядка от этой функции. Эта производная получилась после n последовательных дериваций (взятий производной) по определенным переменным. Выполним теперь n дериваций по тем же независимым переменным, изменив только порядок этих дериваций. Всякая такая перемена в порядке дериваций, приводящих к Ω, может быть достигнута рядом перестановок между двумя последовательными деривациями; но мы уже доказали, что такие перестановки не влияют на окончательный результат; следовательно, не может измениться результат и от всей рассматриваемой перемены*. Отсюда следует, что частная производная n-го порядка будет обозначена с полною определенностью, если будет указано число дериваций относительно каждого из независимых переменных. Таким образом частные производные n-го порядка от функции трех независимых переменных $\omega = f(x, y, z)$ могут быть изображены следующим образом:

$$f^n_{x^p y^q z^r}(x, y, z) \quad \text{или} \quad D^n_{x^p y^q z^r} f(x, y, z),$$

где $p + q + r = n$. Как то, так и другое обозначение представляет собою результат, который получится, если мы возьмем последовательно p раз частные производные относительно x, q раз — относительно y и r раз — относительно z, причем все эти операции мы можем выполнить

---

* Например, чтобы доказать равенство частных производных

$$f'''_{xyz} = f'''_{zyx}$$

от функции $f(x, y, z)$, мы составим ряд равенств:

$$f'''_{xyz} = f'''_{xzy} = f'''_{zxy} = f'''_{zyx}. \qquad (Ред.)$$

в произвольном порядке. Функция $\omega = f(x, y, z)$ имеет всего три разных частных производных первого порядка f'_x, f'_y, f'_z, шесть разных частных производных второго порядка f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{xz} и т. д. Вообще, функция от p независимых переменных имеет столько частных производных n-го порядка, сколько различных членов существует в однородном многочлене порядка n с p переменными, т. е. на основании теории соединений,

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\cdot 2\ldots(p-2)(p-1)}.$$

Для функций многих независимых переменных также можно вывести формулы, аналогичные формуле конечных приращений. Рассмотрим для определенности функцию $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y и возьмем разность $f(x+h,\ y+k)-f(x, y)$; мы можем представить эту разность в виде:

$$f(x+h,\ y+k)-f(x, y) = [f(x+h,\ y+k)-f(x, y+k)] + \\ + [f(x,\ y+k)-f(x, y)].$$

Применяя формулу конечных приращений к каждой из разностей, стоящих в правой части, получим:

$$f(x+h,\ y+k)-f(x, y) = hf'_x(x+\theta h,\ y+k) + kf'_y(x, y+\theta' k), \quad (8)$$

где θ и θ' заключаются между нулем и единицею.

Эта формула остается верною, будут ли производные f_x и f_y непрерывны или прерывны. Если эти производные f_x, f_y непрерывны, то можно вывести формулу, подобную предыдущей, но содержащую только одно неопределенное число θ. Чтобы получить эту новую формулу, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x+ht,\ y+kt)$, где x, y, h, k имеют определенные значения, а t есть вспомогательное переменное. Применяя к этой функции $\varphi(t)$ формулу конечных приращений, имеем:

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta), \quad 0<\theta<1.$$

Но $\varphi(t)$ есть сложная функция от t, и ее производная $\varphi'(t)$ равна $hf_x(x+ht,\ y+kt) + kf_y(x+ht,\ y+kt)$; следовательно, предыдущая формула может быть представлена в виде:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y) = hf'_x(x+\theta h, y+\theta k) + kf'_y(x+\theta h,\ y+\theta k), \quad (9)$$

или

$$f(x+h,\ y+k)-f(x, y) = h[f_x(x, y)+\varepsilon] + k[f'_y(x, y)+\varepsilon'], \quad (10)$$

где ε и ε' стремятся к нулю вместе с h и k. Это выражение разности $f(x+h,\ y+k)-f(x, y)$ часто оказывается полезным; из него получается правило нахождения производной от сложной функции.

Примечание. Чтобы представить приращение f в виде (10), недостаточно существования частных производных функции $f(x, y)$. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

когда x и y не равны одновременно нулю, и равную нулю при $x=y=0$. Эта функция непрерывна даже в начале координат, и частные производные f'_x, f'_y имеют конечные значения для всякой системы значений x и y. В частности,

$$f'_x(x, 0) = 0, \quad f'_y(0, y) = 0,$$

так как функция $f(x, y)$ равна нулю на каждой из осей координат. Формула (10) неприменима к этой функции при $x = y = 0$, так как она дала бы

$$f(h, k) = h\varepsilon + k\varepsilon', \tag{11}$$

где ε и ε' — бесконечно-малые вместе с h и k. Но, если положить $h = k$, мы получим: $f(h, h) = \frac{h}{\sqrt{2}}$, а не $h\eta$, где η бесконечно мало.

20. Плоскость, касательная к поверхности. Мы видели, что первая производная от функции одного переменного дает касательную к кривой; точно так же частные производные от функции двух независимых переменных входят в уравнение касательной плоскости к поверхности. Пусть будет

$$z = F(x, y) \tag{12}$$

уравнение поверхности S. Мы предположим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные в точке (x_0, y_0) плоскости xy; пусть этой точке соответствует значение z_0 для z и, следовательно, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности S. Рассмотрим какую-нибудь кривую C, расположенную на поверхности S и проходящую через точку M_0. Пусть будут

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \tag{13}$$

координаты точки этой кривой, выраженные в функции переменного параметра t; $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ суть три непрерывные функции параметра t, принимающие при значении t_0 параметра t значения x_0, y_0, z_0. Касательная к кривой C в точке M_0 определяется уравнениями (§ 14):

$$\frac{X - x_0}{f'(t)} = \frac{Y - y_0}{\varphi'(t)} = \frac{Z - z_0}{\psi'(t)}. \tag{14}$$

Так как кривая C расположена на поверхности S, то мы имеем соотношение:

$$\psi(t) = F[f(t), \varphi(t)],$$

которое должно удовлетворяться при всяком значении t. Таким образом обе части этого равенства должны быть тождественны между собою. Составим производную от второй части как от сложной функции и положим $t = t_0$. Мы найдем:

$$\psi'(t_0) = f'(t_0) F'_{x_0} + \varphi'(t_0) F'_{y_0}. \tag{15}$$

Исключив из уравнений (14) и (15) $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, получим:

$$Z - z_0 = (X - x_0) F'_{x_0} + (Y - y_{x_0}) F'_{y_0}. \tag{16}$$

Это уравнение представляет плоскость, составляющую геометрическое место касательных ко всем кривым, расположенным на поверхности S

и проходящим через точку M_0. Эта плоскость называется *касательною плоскостью к поверхности.*

21. Переход от разностей к производным. Мы определяли высшие производные последовательно, выводя производную n-го порядка из производных $(n-1)$-го порядка. Естественно возникает вопрос, нельзя ли непосредственно определить производную n-го порядка как предел некоторого отношения, не переходя постепенно от производных порядка ниже n к производной n-го порядка. Мы уже решили это утвердительно для f''_{xy} (§ 19), так как приведенное там рассуждение доказывает, что f''_{xy} есть предел дроби

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y+\Delta y)+f(x,\ y)}{\Delta x\,\Delta y},$$

когда Δx и Δy оба стремятся к нулю. Таким же образом легко показать, что f''_{x^2} есть предел отношения

$$\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)-f(x+h_2)+f(x)}{h_1h_2},$$

когда h_1 и h_2 стремятся оба к нулю.

В самом деле, положив

$$f_1(x)=f(x+h_1)-f(x),$$

можно представить предыдущее отношение в виде:

$$\frac{f_1(x+h_2)-f_1(x)}{h_1h_2}=\frac{f_1'(x+\theta h_2)}{h_1},\quad 0<\theta<1,$$

или, иначе:

$$\frac{f'(x+h_1+\theta h_2)-f'(x+\theta h_2)}{h_1}=f''(x+\theta' h_1+\theta h_2),\quad 0<\theta'<1.$$

Отсюда видно, что предел этого отношения есть производная второго порядка f''_{x^2}, если только эта производная непрерывна.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть будет для определенности

$$\omega=f(x,\ y,\ z)$$

функция трех независимых переменных. Положим

$$\begin{aligned}\Delta_x^h\,\omega&=f(x+h,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z),\\ \Delta_y^k\,\omega&=f(x,\ y+k,\ z)-f(x,\ y,\ z),\\ \Delta_z^l\,\omega&=f(x,\ y,\ z+l)-f(x,\ y,\ z);\end{aligned}$$

$\Delta_x^h\omega$, $\Delta_y^k\omega$, $\Delta_z^l\omega$ суть *первые разности* от ω. Если мы будем рассматривать h k, l как данные постоянные количества, то эти три первые разности будут сами функциями от x, y, z, от которых можно взять в свою очередь разности, соответствующие приращениям h_1, k_1, l_1 переменных; таким образом получаются *вторые разности* $\Delta_x^{h_1}\omega\,\Delta_x^h\omega$, $\Delta_x^{h_1}\Delta_y^k\omega, \ldots$ Этот процесс может быть продолжен до бесконечности; каждая разность n-го порядка определится как первая разность от некоторой разности $(n-1)$-го порядка. Так как порядок каждых двух из предыдущих операций может быть заменен обратным, то достаточно будет указать последовательные приращения, даваемые каждому переменному. Разность n-го порядка представится символом следующего вида:

$$\Delta^{(n)}\omega=\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\ldots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\ldots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\ldots\Delta_z^{l_r}f(x,\ y,\ z),$$

где $p+q+r=n$, и приращения h_i, k_i, l_i могут быть равны или не равны. Эта разность может быть выражена посредством частной производной n-го порядка; она равна произведению:

$$h_1h_2\ldots h_pk_1\ldots k_ql_1\ldots l_r\times$$
$$\times f^{(n)}_{x^py^qz^r}(x+\theta_1h_1+\ldots+\theta_ph_p,\ y+\theta'_1k_1+\ldots+\theta'_qk_q,\ z+\theta''_1l_1+\ldots+\theta''_rl_r),$$

где все θ_i заключены между нулем и единицею. Эта формула уже была нами выведена для первых и вторых разностей. Чтобы доказать, что она верна при всяком n, допустим, что она верна для разности $(n-1)$-го порядка, и пусть

$$\varphi(x, y, z)=\Delta^{h_2}_x\ldots\Delta^{h_p}_x\Delta^{k_1}_y\ldots\Delta^{k_q}_y\Delta^{l_1}_z\ldots\Delta^{l_r}_z f;$$

мы имеем, по предположению:

$$\varphi(x, y, z)=h_2\ldots h_pk_1\ldots k_ql_1\ldots l_rf^{(n-1)}_{x^{p-1}y^qz^r}(x+\theta_2h_2+\ldots+\theta_ph_p,\ y+\ldots).$$

Но рассматриваемая n-я разность равна $\varphi(x+h_1, y, z)-\varphi(x, y, z)$, и достаточно приложить еще раз формулу конечных приращений к этой разности, чтобы получить ту формулу, которую мы хотели доказать.

Обратно, частная производная $f^{(n)}_{x^py^qz^r}$ есть предел отношения

$$\frac{\Delta^h_x\Delta^{h_2}_x\ldots\Delta^{h_p}_x\Delta^{k_1}_y\ldots\Delta^{k_q}_y\Delta^{l_1}_z\ldots\Delta^r_z f}{h_1h_2\ldots h_p\cdot k_1\cdot k_2\ldots k_q\cdot l_1\ldots l_r},$$

когда все приращения h, k, l стремятся к нулю.

Интересно заметить, что это определение частных производных высшего порядка иногда шире обычного определения. Рассмотрим, например, функцию

$$\omega=f(x, y)=\varphi(x)+\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ не имеют производных. Функция ω также не имеет частных производных первого порядка; тем более для нее не может быть речи о частных производных второго порядка. Однако, если бы мы приняли новое определение частных производных, то нахождение f''_{xy} привелось бы к разысканию предела отношения

$$\frac{f(x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)-f(x,\ y+k)+f(x,\ y)}{hk},$$

равного

$$\frac{\varphi(x+h)+\psi(y+k)-\varphi(x+h)-\psi(y)-\varphi(x)-\psi(y+k)+\varphi(x)+\psi(y)}{hk}.$$

Числитель этого отношения всегда равен нулю, поэтому предел отношения также равен нулю, и мы находим:

$$f''_{xy}=0\ *.$$

---

* Аналогичные замечания можно сделать и для функции одного переменного. Например, функция

$$f(x)=x^3\cos\frac{1}{x}$$

имеет производную

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x},$$

но $f'(x)$ не имеет производной при $x=0$. Между тем отношение

$$\frac{f(2\alpha)-2f(\alpha)+f(0)}{\alpha^2},$$

или $8\alpha\cos\frac{1}{2\alpha}-2\alpha\cos\frac{1}{\alpha}$, имеет пределом нуль, когда α стремится к нулю.

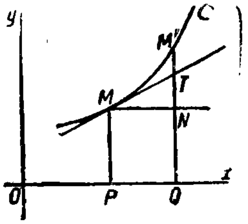
II. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ.

Диференциальное обозначение, первое по времени из всех обозначений, употребляемых в анализе, принадлежит Лейбницу. В этом обозначении нет необходимости, однако оно имеет преимущество вследствие большей симметричности формул и большей общности; эти преимущества особенно ценны при изучении функций многих переменных. Идея этого обозначения вытекает из рассмотрения бесконечно-малых.

22. Диференциалы. Пусть $y=f(x)$ будет непрерывная функция, имеющая производную $f'(x)$; дадим переменному x приращение Δx и обозначим через Δy соответствующее приращение y. По самому определению производной имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

где ε стремится к нулю одновременно с Δx; если мы примем Δx за главное бесконечно-малое, то Δy тоже будет бесконечно-малым, главная часть которого равна $f'(x)\,\Delta x$. Эту главную часть называют *диференциалом* y и изображают ее символом dy:



Черт. 2.

$$dy=f'(x)\,\Delta x.$$

Если функция $f(x)$ равна x, то предыдущая формула обращается в $dx=\Delta x$; поэтому для большей симметричности пишут:

$$dy=f'(x)\,dx$$

с тем условием, чтобы приращение dx независимого переменного рассматривалось как постоянное количество, впрочем, вполне произвольное.

Рассмотрим на кривой C (черт. 2), представляемой уравнением $y=f(x)$, две точки с абсциссами x и $x+dx$. Из треугольника MTN имеем:

$$NT=MN\operatorname{tg}\widehat{TMN}=dx\,f'(x);$$

NT представляет диференциал dy, тогда как Δy равно NM'. Из чертежа видно, что при неограниченном приближении точки M' к точке M часть $M'T$ делается бесконечно малою относительно NT.

Диференциалы высших порядков определяются последовательно один за другим так же, как и высшие производные. Так, диференциал от диференциала первого порядка называется *диференциалом второго порядка*, причем dx всегда рассматривается как постоянное количество; диференциал второго порядка обозначается через d^2y:

$$d^2y=d\,(dy)=[f''(x)\,dx]\,dx=f''(x)\,dx^2.$$

Точно так же для диференциала третьего порядка напишем:

$$d^3y=d\,(d^2y)=[f'''(x)\,dx^2]\,dx=f'''(x)\,dx^3$$

и т. д. Вообще, диференциал n-го порядка, который определяется как диференциал от диференциала $(n-1)$-го порядка, имеет выражение:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n.$$

Обратно, можно выразить производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ... с помощью диференциалов, и мы получаем, таким образом, новые обозначения для производных:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \; \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}, \; \ldots$$

Каждой формуле для вычисления производной соответствует формула для вычисления диференциала. Остановимся на случае функции от функции. Пусть будет $y = f(u)$, где u есть функция независимого переменного x; мы имеем:

$$y'_x = f'(u)\, u'_x;$$

умножая обе части на dx, получаем:

$$y'_x\, dx = f'(u)\, u'_x\, dx,$$

т. е

$$dy = f'(u)\, du.$$

Таким образом формула для dy имеет такой вид, как если бы u было не функцией от x, а независимым переменным. Это одно из преимуществ диференциального обозначения. Изображая производную от y относительно x, мы имели две различных формулы:

$$y'_x = f'(x), \quad y'_x = f'(u)\, u'_x$$

в зависимости от того, дано ли y непосредственно в функции x или y зависит от x при посредстве другой функции u.

Напротив, при диференциальном обозначении одна и та же формула применима к обоим случаям.

Если $y = f(u, v, w)$ есть сложная функция, то мы имеем:

$$y'_x = u'_x f'_u + v'_x f'_v + w'_x f'_w,$$

или, по умножении на dx:

$$dy = f'_u\, du + f'_v\, dv + f'_w\, dw.$$

Подобным же образом

$$d(uv) = u\, dv + v\, du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}.$$

Те же самые правила позволят нам вычислить диференциалы высших порядков. Пусть, например, надо найти диференциалы высших порядков функции от функции $y = f(u)$; мы уже имели

$$dy = f'(u)\, du.$$

При вычислении d^2y следует заметить, что du не должно быть принимаемо за постоянное, так как u не есть независимое переменное. Таким образом мы должны будем вычислить диференциал от сложной функции $f'(u)\,du$, где u и du будут двумя посредствующими функциями; это дает:

$$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u.$$

Чтобы вычислить d^3y, нужно рассматривать d^2y как сложную функцию с тремя посредствующими функциями u, du, d^2u; мы найдем:

$$d^3y = f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u$$

и т. д. Следует заметить, что формулы, дающие диференциалы d^2y, d^3y, ..., вследствие присутствия членов с d^2u, d^3u, ... будут иметь не тот вид, какой они имели бы, если бы u было независимым переменным.

Частные производные от функции многих независимых переменных обозначаются таким же образом. Так, частная производная n-го порядка от $f(x, y, z)$, изображавшаяся, по Лагранжу, через $f^{(n)}_{x^p y^q z^r}$, по Лейбницу, изобразится через $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$. Для функций многих переменных это обозначение — чисто символическое и отнюдь не представляет дроби, как это имело место для функции одного переменного. Буква ∂ для изображения частной производной от функции многих переменных введена Якоби (Jacobi). До него употребляли букву d.

23. Полные диференциалы. Пусть будет $\omega = f(x, y, z)$ функция трех независимых переменных x, y, z; полным диференциалом $d\omega$ называется следующее выражение:

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

где dx, dy, dz — три произвольных постоянных приращения, данные независимым переменным x, y, z. Три произведения $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ называются частными диференциалами.

Полный диференциал второго порядка есть полный диференциал от полного диференциала первого порядка, причем приращения dx, dy, dz остаются постоянными и всегда одними и теми же, когда мы переходим от одного диференциала к следующему. Таким образом

$$d^2\omega = d\,(d\omega) = \frac{\partial\, d\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\, d\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\, d\omega}{\partial z}dz$$

или, раскрывая,

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dz\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dz\right)dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy\,dz.$$

Если в правой части мы заменим $\partial^2 f$ через ∂f^2, то будем иметь в раскрытом виде квадрат от $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$; поэтому мы можем написать символическое равенство:

$$d^2\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

причем должно после возведения в квадрат везде вместо ∂f^2 поставить $\partial^2 f$. Это правило общее; если мы назовем ***полным диференциалом n-го порядка*** полный диференциал от полного диференциала $(n-1)$-го порядка, то при всяком n мы будем иметь символическое равенство:

$$d^n\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)},$$

где после возведения в степень ∂f^n должно быть заменено через $\partial^n f$. Мы видели, что это правило верно при $n=1$, $n=2$, и потому достаточно показать, что если оно будет верно для $d^n\omega$, то оно будет также верно и для $d^{n+1}\omega$.

Допустив этот закон для $d^n\omega$, мы будем иметь:

$$d^n\omega=\sum A_{pqr}\frac{\partial^n f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}dx^p\,dy^q\,dz^r,$$

где $p+q+r=n$. Коэфицнент A_{pqr} равен коэфициенту при $dx^p\,dy^q\,dz^r$ в n-й степени трехчлена

$$(dx+dy+dz)^n,$$

т. е.

$$A_{pqr}=\frac{1\;2\ldots n}{1\cdot 2\ldots p\cdot 1\cdot 2\ldots q\cdot 1\cdot 2\ldots r}.$$

Из предыдущей формулы мы выведем:

$$d^{n+1}\omega=\sum A_{pqr}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{p+1}\partial y^q\,\partial z^r}dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\,\partial y^{q+1}\partial z^r}dx^p dy^{q+1}dz^r+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^q\,\partial z^{r+1}}dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}\right].$$

Заменив теперь $\partial^{n+1}f$ через ∂f^{n+1}, мы можем написать правую часть символически в виде:

$$\sum A_{pqr}\frac{\partial f^n}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}dx^p\,dy^q\,dz^r\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right).$$

Таким образом мы будем иметь, при сохранении прежних условий, символическое равенство:

$$d^{n+1}\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n+1)}.$$

Примечание. Предположим, что мы получили каким-нибудь образом выражение полного диференциала $d\omega$:

$$d\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{17}$$

где P, Q, R суть функции от x, y, z. Так как, по определению,

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz,$$

то отсюда мы имеем соотношение:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\right)dx + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - Q\right)dy + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - R\right)dz = 0;$$

но dx, dy, dz суть, по условию, какие угодно постоянные. Поэтому должно быть отдельно

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z} = R. \tag{18}$$

Таким образом уравнение (17) равносильно трем отдельным соотношениям (18) и дает нам все три частных производных первого порядка. Вообще, если мы нашли каким-либо образом полный диференциал n-го порядка

$$d^n\omega = \sum C_{pqr}\,dx^p\,dy^q\,dz^r,$$

то коэфициенты C_{pqr} будут равны частным производным n-го порядка от ω, умноженным на некоторые определенные числовые множители. Таким образом мы сразу получим все частные производные одного и того же порядка. Ниже мы встретим приложение этого замечания.

24. Высшие диференциалы сложной функции. Пусть будет

$$\omega = F(u, v, w)$$

сложная функция, где u, v, w суть функции независимых переменных x, y, z, t; напишем выражения частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Умножая эти четыре уравнения соответственно на dx, dy, dz, dt и складывая, получим в левой части:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\omega}{\partial t}dt,$$

т. е. $d\omega$, тогда как коэфициенты при $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial w}$ будут соответственно равны du, dv, dw; отсюда

$$d\omega = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv + \frac{\partial F}{\partial w}dw. \tag{19}$$

Таким образом *выражение полного диференциала первого порядка от сложной функции будет иметь тот же вид, как если бы посредствующие функции были независимыми переменными.* В этом состоит одно из главных преимуществ диференциального обозначения: соотношение (19) не зависит ни от числа, ни от выбора независимых переменных, и оно равносильно стольким различным соотношениям, сколько в него входит независимых переменных.

Чтобы вычислить $d^2\omega$, мы приложим правило, только что установленное для $d\omega$, заметив при этом, что в правую часть формулы (19) входят шесть посредствующих функций u, v, w, du, dv, dw.

Поэтому имеем:

$$d^2\omega = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} du\,dw + \frac{\partial F}{\partial u} d^2u +$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w} dv\,dw + \frac{\partial F}{\partial v} d^2v +$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} du\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w} dv\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w} d^2w,$$

или, сделав приведение и пользуясь прежним символическим обозначением:

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u} d^2u + \frac{\partial F}{\partial v} d^2v + \frac{\partial F}{\partial w} d^2w.$$

Эта формула сложнее, чем в том случае, когда u, v, w были независимыми переменными, так как в нее входят члены с d^2u, d^2v, d^2w, которые исчезают, если u, v, w обращаются в независимые переменные. Чтобы получить $d^3\omega$, нужно снова приложить то же самое правило к $d^2\omega$, заметив, что $d^2\omega$ зависит от девяти посредствующих функций $u, v, w, du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w$ и т. д. Общее выражение этих диференциалов становится все более и более сложным: $d^n\omega$ есть целая функция от $du, dv, dw, d^2u, \ldots, d^nu, d^nv, d^nw$, и члены, содержащие d^nu, d^nv, d^nw, равны

$$\frac{\partial F}{\partial u} d^nu + \frac{\partial F}{\partial v} d^nv + \frac{\partial F}{\partial w} d^nw.$$

Если в $d^n\omega$ мы заменим $u, v, w, du, dv, dw, \ldots$ их выражениями через независимые переменные, то $d^n\omega$ сделается целым многочленом от dx, dy, dz, ..., коэфициенты которого будут равны (см. примечание к § 23) частным производным n-го порядка от ω, умноженным на некоторые числовые множители. Таким образом мы сразу получаем все частные производные n-го порядка.

Положим, например, что нам нужно вычислить частные производные первого и второго порядка от сложной функции $\omega = f(u)$, где u есть функция двух независимых переменных $u = \varphi(x, y)$. Если мы будем вычислять эти производные отдельно, то сначала найдем две частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{20}$$

если от этих уравнений мы возьмем производные по x и по y, то получим только три различных соотношения, которые дадут производные второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

второе из соотношений (21) получается от диференцирования первого из уравнений (20) по y или второго по x. При помощи полных диференциалов эти пять соотношений (20) и (21) могут быть заменены только двумя:

$$\left.\begin{aligned}d\omega&=\frac{\partial\omega}{\partial u}\,du,\\ d^2\omega&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\,du^2+\frac{\partial\omega}{\partial u}\,d^2u;\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

если заменить в этих двух формулах du через $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, d^2u через $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}dy^2$, то коэфициенты при dx и dy в первой формуле дадут нам частные производные первого порядка от ω, а коэфициенты при dx^2, $2dx\,dy$, dy^2 во второй дадут в свою очередь частные производные второго порядка от ω.

25. Диференциал произведения. Формула, дающая полный диференциал n-го порядка от сложной функции, значительно упрощается в некоторых случаях, часто встречающихся на практике. Пусть, например, нужно найти полный диференциал n-го порядка от произведения двух множителей $\omega=u\cdot v$. Для первых значений n мы имеем:

$$d\omega=v\,du+u\,dv,\qquad d^2\omega=v\,d^2u+2dv\,du+u\,d^2v,\ \ldots;$$

по самому закону образования этих диференциалов видно, что мы будем вообще иметь:

$$d^n\omega=v\,d^nu+C_1\,dv\,d^{n-1}u+C_2\,d^2v\,d^{n-2}u+\ldots+u\,d^nv,$$

где C_1, C_2, ... — целые положительные числа. Можно было бы показать последовательно, что эти коэфициенты тождественны с коэфициентами разложения $(a+b)^n$; но это можно сделать более изящным способом, пользуясь следующим приемом, применимым ко множеству вопросов подобного рода. Заметим, что числа C_1, C_2, ..., C_p, ... не зависят от свойств функций u и v; поэтому достаточно определить эти числа для какого-нибудь одного частного вида этих функций. Возьмем для этого $u=e^x$, $v=e^y$, где x и y — независимые переменные; мы будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\omega=e^{x+y}, \quad d\omega=e^{x+y}(dx+dy), \ldots, \quad d^n\omega=e^{x+y}(dx+dy)^n,\\
&\qquad du=e^x\,dx, \qquad\qquad\qquad\quad d^2u=e^x\,dx^2, \ldots\\
&\qquad dv=e^y\,dy, \qquad\qquad\qquad\quad d^2v=e^y\,dy^2, \ldots
\end{aligned}$$

Общая формула после разделения на e^{x+y} обращается в

$$(dx+dy)^n=dx^n+C_1\,dy\,dx^{n-1}C_2\,dy^2\,dx^{n-2}+\ldots+dy^n.$$

Так как dx и dy произвольны, то мы должны иметь:

$$C_1=\frac{n}{1},\quad C_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \ldots,\quad C=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p},\ \ldots,$$

и следовательно, общая формула имеет вид:

$$d^n(uv)=v\,d^nu+\frac{n}{1}\,dv\,d^{n-1}u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2v\,d^{n-2}u+\ldots+u\,d^nv. \tag{23}$$

Эта формула приложима при всяком числе независимых переменных; в частном случае, если u и v будут функциями только одного переменного x, то, разделив (23) на dx^n, мы получим выражение производной n-го порядка от произведения двух множителей.

Формулы, аналогичные формуле (23), существуют и для любого числа множителей.

Их можно вывести таким же способом.

Формула для $d^n\omega$ упрощается также в том случае, если посредствующие функции u, v, w будут целыми линейными функциями независимых переменных x, y, z.

$$\begin{aligned}
u&=ax+by+cz+f,\\
v&=a'x+b'y+c'z+f',\\
w&=a''x+b''y+c''z+f'',
\end{aligned}$$

где коэфициенты a, a', a'', b, b', ... постоянны. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
du&=a\ dx+b\ dy+c\ dz,\\
dv&=a'\,dx+b'\,dy+c'dz,\\
dw&=a''\,dx+b''\,dy+c''dz,
\end{aligned}$$

и все диференциалы d^nu, d^nv, d^nw при $n>1$ равны нулю. В этом случае формула для $d^n\omega$ будет такою же, как если бы u, v, w были независимыми переменными:

$$d^n\omega=\left(\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw\right)^{(n)}.$$

26. Однородные функции. Функция $\varphi(x, y, z)$ называется однородною функциею m-й степени, если имеет место тождество:

$$\varphi(tx, ty, tz)=t^m\varphi(x, y, z).$$

Примем на время, что переменные x, y, z имеют определенные значения, и будем рассматривать t как единственное независимое переменное; полагая

$$u = tx, \quad v = ty, \quad w = tz,$$

мы можем представить предыдущую формулу в виде:

$$\varphi(u, v, w) = t^m \varphi(x, y, z).$$

Приравняем между собою диференциалы n-го порядка от обеих частей этого равенства. Замечая, что u, v, w суть линейные функции от t и что

$$du = x\,dt, \quad dv = y\,dt, \quad dw = z\,dt,$$

мы получим на основании замечания в конце § 25 и после сокращения на общий множитель dt^n:

$$\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial u} + y\frac{\partial \varphi}{\partial v} + z\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,t^{m-n}\varphi(x, y, z).$$

Если теперь мы положим $t=1$, то u, v, w обратятся в x, y, z, и любой член раскрытой левой части последнего равенства

$$A_{pqr}\frac{\partial^n \varphi}{\partial u^p \partial v^q \partial w^r} x^p y^q z^r$$

обратится в

$$A_{pqr}\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} x^p y^q z^r.$$

Таким образом мы придем к символическому равенству:

$$\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,\varphi(x, y, z),$$

которое при $n=1$ переходит в известную формулу:

$$m\varphi(x, y, z) = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Различные обозначения. Мы имели три различных обозначения для частных производных различных порядков от функции многих переменных: обозначения Лейбница, Лагранжа и Коши. Общий недостаток этих обозначений — их сложность, особенно заметная при сколько-нибудь значительных вычислениях. Поэтому были придуманы различные более сокращенные обозначения. Одно из наиболее употребительных обозначений для частных производных первого и второго порядков от функции двух переменных принадлежит Монжу (Monge): если z есть функция двух переменных x и y, то полагают

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

тогда полные диференциалы dz и d^2z выразятся следующим образом:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

В настоящее время входит в употребление также следующее обозначение. Если z есть функция какого нибудь числа n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то полагают

$$p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем некоторые из указателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут быть и нулями.

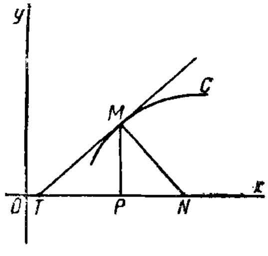
Приложения. Пусть будет $y=f(x)$ уравнение плоской кривой C, отнесенной к прямоугольным осям координат (черт. 2а). Касательная в точке $M(x, y)$ к этой кривой будет иметь уравнение:

$$Y-y=y'(X-x).$$

Нормаль, т. е. перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания, будет иметь угловой коэфициент $-\frac{1}{y'}$; следовательно, уравнение нормали будет:

$$(Y-y)\,y'+(X-x)=0.$$

Пусть будет P основание ординаты, T и N — точки пересечения оси x с касательною и с нормалью; длина PN называется поднормалью, PT есть подкасательная, MN — нормаль и MT — касательная.



Черт. 2а.

Из уравнения нормали мы находим для абсциссы точки N значение $x+yy'$, что показывает, что поднормаль равна $\pm yy'$. Если условимся принимать за поднормаль длину PN, взятую с ее знаком, т. е. брать знак $+$ или $-$, смотря по тому, совпадает ли направление от P к N с положительным или с отрицательным направлением оси x, то поднормаль будет равна yy', как бы ни была расположена кривая C относительно осей координат. Точно так же подкасательная PT равна $-\frac{y}{y'}$.

Что касается длин MN и MT, то из прямоугольных треугольников MPN и MPT имеем:

$$MN=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PN}^2}=y\sqrt{1+y'^2},$$
$$MT=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PT}^2}=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}.$$

Мы можем искать кривые, для которых между этими четырьмя длинами имели бы место заданные соотношения. Поищем, например, все кривые, у которых поднормаль постоянна и равна данной длине a; это приводит к разысканию всех функций $y=f(x)$, удовлетворяющих условию $yy'=a$. Первая часть этого равенства есть производная от $\frac{y^2}{2}$, а вторая — от ax; поэтому эти две функции могут разниться только на постоянное, и мы получаем:

$$y^2=2ax+C$$

— уравнение параболы, имеющей ось главною осью. Точно так же, если мы будем искать кривые, у которых постоянна подкасательная, то придем к уравнению:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{a};$$

отсюда

$$\ln y=\frac{x}{a}+\ln C,\quad\text{или}\quad y=Ce^{\frac{x}{a}}$$

— уравнение трансцендентной кривой, у которой ось x-ов служит асимптотою. Чтобы найти кривые с постоянною нормалью, мы должны рассмотреть уравнение $y\sqrt{1+y'^2}=a$; его можно представить в виде:

$$\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}=1.$$

Левая часть есть производная от $-\sqrt{a^2-y^2}$, и потому мы находим:

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x+C,$$

или

$$(x+C)^2+y^2=a^2,$$

— уравнение окружности с радиусом a и с центром на оси Ox.

Кривые с постоянною касательною суть трансцендентные кривые, и мы их изучим позднее.

Пусть будут, далее, $y=f(x)$, $Y=F(x)$ уравнения двух кривых, а M и M' — две соответствующие точки этих кривых, имеющие одну и ту же абсциссу x.

Для того чтобы поднормали к обеим кривым в соответствующих точках имели одну и ту же длину, необходимо и достаточно, чтобы

$$YY'=\pm yy',$$

откуда $Y^2=\pm y^2+C$; двойной знак происходит здесь оттого, что поднормали могут быть направлены или в одну сторону или в противоположные. Предыдущим соотношениям можно удовлетворить, положив:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\quad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2},$$

или

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2},$$

откуда получается простой способ построения нормалей к эллипсу и гиперболе.

27. Формула Тейлора для функций многих переменных. Пусть будет $\omega=f(x, y, z)$ функция трех переменных; будем искать разложение $f(x+h, y+k, z+l)$ по степеням h, k, l, соединяя в одну группу члены одной и той же степени. Коши приводит эту задачу к предыдущей следующим искусственным приемом. Дадим x, y, z, h, k, l постоянные значения и положим

$$\varphi(t)=f(x+ht, y+kt, z+lt),$$

где t — вспомогательное переменное.

Функция $\varphi(t)$ зависит только от одного независимого переменного t; если мы приложим к ней общую формулу Тейлора с остаточным членом, то найдем:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1}\varphi'(0)+\frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\theta t),\tag{24}$$

где $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ..., $\varphi^{(n)}(0)$ представляют значения функции $\varphi(t)$ и ее производных при $t=0$, а $\varphi^{(n+1)}(\theta t)$ — значение $(n+1)$-й производной при значении θt, причем θ заключается между нулем и единицею. Но мы можем рассматривать $\varphi(t)$ как сложную функцию от t, $\varphi(t)=f(u, v, w)$, причем посредствующие функции

$$u=x+ht, \quad v=y+kt, \quad w=z+lt$$

будут *линейными* функциями от t. По § 25 выражение диференциала m-го порядка, $d^m\varphi$, будет такое же, как если бы u, v, w были независимыми переменными; таким образом мы получаем символическое равенство:

$$d^m\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^{(m)}=dt^m\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)},$$

или, разделив на dt^m:

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)}.$$

При $t=0$, u, v, w обращаются соответственно в x, y, z; пользуясь прежним символическим обозначением, мы представим предыдущее равенство при $t=0$ в виде:

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(m)}.$$

Точно так же будем иметь:

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

причем в последней формуле после разложения x, y, z должны быть соответственно заменены через

$$x+\theta ht, \quad y+\theta kt, \quad z+\theta lt.$$

Полагая теперь в формуле (24) $t=1$, получим:

$$f(x+h, y+k, z+l)=f(x, y, z)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)}+R_n. \tag{25}$$

Остаточный член R_n имеет выражение:

$$R_n=\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

причем после раскрытия символа x, y, z должны быть заменены через

$$x+\theta h, \quad y+\theta k, \quad z+\theta l.$$

Формула (25) вполне аналогична общей формуле (5). Если при данных значениях x, y, z, h, k, l остаточный член стремится к нулю при неограниченном возрастании n, то мы будем иметь разложение в ряд функции $f(x+h, y+k, z+l)$, причем все члены этого ряда будут однородными многочленами по h, k, l. Но вообще, по выражению для R_n очень трудно определить, когда этот остаточный член стремится к нулю.

Из формулы (25) можно вывести такие же следствия, какие в случае одного независимого переменного мы получили из формулы (5). Например, пусть будет $z=f(x, y)$ уравнение поверхности S. Если вблизи точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до некоторого порядка, то по формуле (18) найдем:

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h+\frac{\partial f}{\partial y_0}k\right)+ \\ +\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h+\frac{\partial f}{\partial y_0}k\right)^{(2)}+\ldots+R_n.$$

Ограничиваясь в правой части сначала двумя первыми членами, потом тремя и т. д., мы получим уравнение плоскости, затем уравнение параболоида и т. д.; вблизи точки (x_0, y_0) все эти поверхности будут очень мало различаться от рассматриваемой поверхности S. Эта плоскость будет не что иное, как касательная плоскость; точно так же из всех параболоидов, представляемых уравнением вида

$$z=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F,$$

этот параболоид вблизи точки (x_0, y_0) будет наиболее приближаться к поверхности S.

Формулою (25) пользуются также при разыскании предельных значений функций, принимающих неопределенный вид. Пусть будут $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ две функции, которые при $x=a$, $y=b$ одновременно обращаются в нуль, но остаются непрерывными вместе со своими частными производными до некоторого порядка вблизи этой точки $x=a$, $y=b$. Найдем предел, к которому стремится частное

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

когда x и y стремятся соответственно к a и b. Предположим сначала, что четыре производных первого порядка $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ не равны одновременно нулю. Мы можем написать:

$$\frac{f(a+h, y+k)}{\varphi(a+h, y+k)}=\frac{h\left(\frac{\partial f}{\partial a}+\varepsilon\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial b}+\varepsilon'\right)}{h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\varepsilon_1\right)+k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}+\varepsilon_1'\right)},$$

причем ε, ε', ε_1, ε_1' стремятся к нулю вместе с h и k. Если точка (x, y) стремится к (a, b), то h и k стремятся к нулю; предположим, что отношение $\frac{k}{h}$ стремится при этом к пределу α, т. е. что точка (x, y) описывает кривую, имеющую в точке (a, b) определенную касательную.

Разделив оба члена предыдущего отношения на h, найдем, что дробь $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$ имеет пределом

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a}+\alpha\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

Мы видим, что предел этой дроби, вообще, зависит от α, т. е. от того, каким образом переменные x и y приближаются к своим пределам a и b. Этот предел не будет зависеть от α только в том случае, если

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0,$$

чего, вообще, не будет.

Если при $x=a$, $y=b$ все производные $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ равны нулю, то, взяв в формуле (18) члены второго порядка, получим:

$$\frac{f(a+h,\ b+k)}{\varphi(a+h,\ b+k)}=\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+\varepsilon\right)h^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}+\varepsilon'\right)hk+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}+\varepsilon''\right)k^2}{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+\varepsilon_1\right)h^2+2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}+\varepsilon_1'\right)hk+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}+\varepsilon_1''\right)k^2},$$

где ε, ε', ε'', ε_1, ε_1', ε_1'' — бесконечно малые количества.

Обозначая попрежнему предел отношения $\frac{k}{h}$ через α, найдем, что предел рассматриваемой дроби будет:

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\alpha^2}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}\alpha+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}\alpha^2};$$

этот предел, вообще, не зависит от α.

III. ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ КАК ПРЕДЕЛЫ.

28. Способ определения новых функций. Функции, изучаемые в элементарном анализе, суть функции рациональные и иррациональные, показательная функция и логарифм, функции круговые и их обратные и те, которые получаются их комбинациями. Все эти функции имеют производные любого порядка, которые вычисляются с помощью известных правил. Можно определить бесконечно много новых функций посредством перехода к пределу.

Пусть будет $f_n(x)$ функция переменного x, определенная в интервале (a, b), зависящая, кроме того, от целого положительного числа n. Дадим x определенное, но произвольное значение в интервале (a, b); если соответствующее значение $f_n(x)$ стремится к пределу при неограниченном возрастании n, то это предельное значение, вообще изменяющееся вместе с значением, приписанным x, само есть функция от x, которую мы обозначим через $F(x)$, и мы напишем:

$$F(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x), \tag{26}$$

или, проще:

$$F(x) = \lim f_n(x).$$

Важно заметить, что функция $f_n(x)$ может быть непрерывной функцией от x, каково бы ни было n, между тем как предел $F(x)$ не обладает этим свойством. Возьмем, например, $f_n(x) = x^n$, полагая $0 \leqslant x \leqslant 1$. Эта функция непрерывна в отрезке $(0, 1)$, каково бы ни было n; если n неограниченно возрастает, то мы имеем $\lim x^n = 0$, когда $x < 1$, и $\lim x^n = 1$, если $x = 1$. Таким образом предельная функция $F(x)$ разрывна при $x = 1$.

Возьмем еще

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^n}; \quad x \geqslant 0;$$

предел $F(x)$ равен $+1$ при $x < 1$, он равен -1 для $x > 1$ и нулю при $x = 1$. Точно так же предел $(1 + x^2)^{-n}$ равен нулю, если x отлично от нуля, и равен единице при $x = 0$.

Пусть $f_n(x)$ — непрерывная функция, имеющая пределом непрерывную функцию $F(x)$. Если $f_n(x)$ имеет производную $f'_n(x)$, то из равенства

$$\lim f_n(x) = F(x)$$

еще нельзя заключить, что также

$$\lim f'_n(x) = F'(x).$$

Пусть, например, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, предел $F(x)$ равен $|x|$. Производная $f'_n(x)$ равна нулю, каково бы ни было n, при $x = 0$, в то время как $F(x)$ не имеет производной при этом значении x. Точно так же функция $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ имеет пределом $F(x) = 0$; производная $F'(x)$ тоже равна нулю, между тем как $f'_n(x) = \cos nx$ не имеет предела, когда n неограниченно возрастает. Если воспользоваться геометрическим представлением, то эти свойства предельной функции в обоих примерах станут совершенно очевидными *.

---

* Пусть $f_n(x) = [\cos(m!\,\pi x)]^{2n}$, где m есть определенное положительное целое число. Мы имеем $\varphi_m(x) = \lim f_n(x) = 1$, если произведение $m!\,x$ есть целое число N, и $\varphi_m(x) = 0$, если это произведение не является целым числом. Все точки $x = \frac{N}{m!}$ суть точки разрыва для $\varphi_m(x)$. Предел $\varphi_m(x)$ есть функция Дирихле:

$$\psi(x) = \lim_{m=\infty} \left\{ \lim_{n=\infty} [\cos(m!\,\pi x)]^{2n} \right\},$$

которая равна единице при рациональном значении x и нулю при x иррациональном.

29. Равномерная сходимость. Пусть $f_n(x)$ — функция, стремящаяся в интервале (a, b) к пределу $F(x)$, когда n неограниченно возрастает. Разность $\delta_n(x) = F(x) - f_n(x)$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$; мы будем говорить, что $f_n(x)$ *стремится равномерно* или *сходится равномерно* к $F(x)$, если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие такое целое число N, что для всякого значения n, равного или большего N, выполняется неравенство:

$$|\delta_n(x)| < \varepsilon,$$

причем это неравенство должно иметь место *для всех значений* x в интервале (a, b).

Условие, что число N не зависит от x, а зависит только от ε, существенно в этом определении. Для каждого значения x в интервале (a, b) наверное найдется такое целое число N_x, что $|\delta_n(x)|$ будет меньше ε, если $n \geqslant N_x$; но ничто не убеждает нас a priori в том, что подобное число N, сколь большим мы бы его ни предположили, может удовлетворить этому условию для всех рассматриваемых значений x. Чтобы убедиться, что это не всегда так, достаточно взять какую-либо из функций, приведенных выше, например функцию x^n. Если мы предположим $0 \leqslant x < 1$, то разность $\delta_n(x)$ по абсолютной величине равна x^n. Чтобы $\delta_n(x)$ стремилось к нулю равномерно, необходимо существование такого целого числа N, что, каково бы ни было положительное число ε, неравенство $x^n < \varepsilon$ было бы выполнено для всех значений x и n, удовлетворяющих условиям $0 < x < 1$, $n \geqslant N$. Мы должны были бы иметь, в частности, $x^N < \varepsilon$ и, следовательно, $x < \varepsilon^{\frac{1}{N}}$ для всех положительных значений x, меньших единицы; но, как бы велико ни было N, если мы предположим $\varepsilon < 1$, найдутся числа, заключенные между $\varepsilon^{\frac{1}{N}}$ и единицей. Точно так же функция $\frac{1 - x^n}{1 + x^n}$ не стремится равномерно к единице, когда x заключено между нулем и единицей, так как разность $\delta_n(x)$ больше, чем x^n.

Рассмотрим еще выражение:

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2},$$

предел которого при бесконечно большом n есть $F(x) = 0$. Это выражение не стремится равномерно к нулю ни в каком отрезке, заключающем значение нуль, например в отрезке $(0,1)$. В самом деле, оно равно $\frac{\sqrt{n}}{e}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$; следовательно, во всяком отрезке $(0,h)$, сколь бы мало ни было положительное число h, оно может принимать значения, которые неограниченно возрастают вместе с n.

Следующие предложения разъясняют важность этого определения равномерной сходимости.

А. *Если непрерывная функция $f_n(x)$ стремится равномерно к пределу $F(x)$ в некотором интервале, то предельная функция $F(x)$ есть также функция непрерывная в этом интервале.*

Пусть будут x и $x+h$ два значения переменного в рассматриваемом интервале (a, b); из равенств:

$$F(x)=f_n(x)+\delta_n(x), \quad F(x+h)=f_n(x+h)-\delta_n(x+h)$$

мы посредством вычитания находим:

$$F(x+h)-F(x)=[f_n(x+h)-f_n(x)]+\delta_n(x+h)-\delta_n(x).$$

Так как $f_n(x)$ стремится равномерно к $F(x)$, то можно взять n достаточно большим, чтобы абсолютная величина $\delta_n(x)$ была меньше наперед заданного положительного числа ε, каково бы ни было значение x в интервале (a, b). Выбрав указанным образом число n, мы можем, так как функция $f_n(x)$ непрерывна, найти другое положительное число η такое, что неравенство $|h|<\eta$ влечет за собой неравенство:

$$|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

где x и $x+h$ суть значения, заключенные в интервале (a, b). Разность $F(x+h)-F(x)$ есть сумма трех членов, по абсолютной величине меньших ε. Следовательно, мы имеем и подавно:

$$|F(x+h)-F(x)|<3\varepsilon$$

при условии $|h|<\eta$; так как ε — произвольное положительное число, то $F(x)$ есть непрерывная функция в интервале (a, b).

В. *Если непрерывная функция $f_n(x)$ имеет пределом $F(x)$ и если производная $f_n'(x)$ стремится равномерно к некоторой функции $\Phi(x)$, то эта функция $\Phi(x)$ есть производная функции $F(x)$.*

Положим для краткости $f_{n+p}(x)-f_n(x)=\Delta x$, где n и p — два целых положительных числа. Мы покажем сначала, что можно выбрать n достаточно большим, чтобы, *каково бы ни было* p, абсолютная величина $\Delta' x$ была меньше заданного положительного числа ε при всяком значении x в интервале (a, b). В самом деле, мы имеем:

$$\Delta'(x)=f_{n+p}'(x)-f_n'(x)=[\Phi(x)-f_n(x)]-[\Phi(x)-f_{n+p}'(x)];$$

так как $f_n'(x)$ равномерно стремится к $\Phi(x)$, найдется такое целое положительное число N, что для $n\geqslant N$ абсолютная величина разности $\Phi(x)-f_n'(x)$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ во всем интервале. То же можно сказать и об абсолютной величине разности $\Phi(x)-f_{n+p}'(x)$, каково бы ни было положительное число p, и, следовательно, абсолютная величина $\Delta'(x)$ будет меньше ε во всем интервале (a, b).

Выбрав целое положительное число n так, чтобы предшествующее условие было удовлетворено, мы можем, далее, написать, обозначая через x и $x+h$ два произвольных значения в интервале (a, b):

$$f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)=f_n(x+h)-f_n(x)+\Delta(x+h)-\Delta(x),$$

или, применяя формулу среднего значения к разности $\Delta(x+h)-\Delta(x)$:

$$f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)=f_n(x+h)-f_n(x)+h\Delta'(x+\theta h)\ (0<\theta<1).$$

Предположим, что число n в этом соотношении остается постоянным, а число p неограниченно возрастает; тогда левая часть имеет пределом $F(x+h)-F(x)$. Что касается члена $\Delta'(x+\theta h)$, то абсолютная величина его предела не может превзойти ε, так как число n взято нами соответствующим образом. Мы получим, следовательно, разделив на h:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}+\lambda(x, h),$$

где абсолютная величина $\lambda(x, h)$ не превосходит ε; отсюда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)=\left[\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right]+$$
$$+[f_n'(x)-\Phi(x)]+\lambda(x, h).$$

Абсолютная величина разности $f_n'(x)-\Phi(x)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, меньше ε. С другой стороны, так как $f_n'(x)$ есть производная $f_n(x)$, можно найти такое положительное число η, что

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right|<\varepsilon,$$

при условии $|h|<\eta$, причем x есть определенное значение в интервале (a, b). Таким образом мы будем иметь для всех этих значений h:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)\right|<3\varepsilon,$$

и, следовательно, $F(x)$ имеет своей производной $\Phi(x)$.

30. Равномерно сходящиеся ряды. На основании замечания, приведенного выше (§ 5), предел сходящейся последовательности может быть определен как сумма некоторого сходящегося ряда, и обратно. Следовательно, определение функции $F(x)$ как предела последовательности функций $f_n(x)$, когда n неограниченно возрастает, равносильно определению ее как суммы сходящегося ряда. В самом деле, соотношение $F(x)=\lim f_n(x)$ эквивалентно равенству:

$$F(x)=f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots+[f_n(x)-f_{n-1}(x)]+\ldots, \tag{27}$$

которое выражает, что ряд, стоящий в правой части, сходится и имеет суммой $F(x)$. Обратно, если дан сходящийся ряд:

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{28}$$

то сумма $F(x)$ этого ряда есть предел суммы

$$S_n(x)=u_0+u_1+\ldots+u_n,$$

когда n неограниченно возрастает. Посредством функций $f_n(x)$, приведенных выше, можно, следовательно, построить ряды с непрерывными членами, суммы которых будут разрывными функциями. Например, ряд

$$x+x(x-1)+\ldots+x^n(x-1)+\ldots, \tag{29}$$

сходящийся в интервале $(0,1)$, представляет функцию, разрывную при $x=1$. Точно так же ряд:

$$F(x)=\frac{1-x}{1+x}-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)+\ldots+\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right)+\ldots \tag{30}$$

имеет правильный разрыв при значении $x=1$. В самом деле,

$$F(1+0)=-1,\quad F(1-0)=1,\quad F(1)=0.$$

Сумма ряда

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots, \tag{31}$$

общий член которого может быть представлен так:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{(1+x^2)^n},$$

представляет разрыв другого рода, так как его сумма равна нулю при $x=0$ и равна единице при всяком другом значении x.

Ряд

$$x+x(1-x^2)+\ldots+x(1-x^2)^n+\ldots$$

сходится в интервале $(-1, +1)$. Сумма равна нулю при $x=0$ и равна $\frac{1}{x}$ при x, отличном от нуля.

Разность между суммой $F(x)$ сходящегося ряда (28) и суммой $S_n(x)$ $n+1$ первых членов этого ряда равна сумме $R_n(x)$ ряда, который мы получаем, отбрасывая эти члены:

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots \tag{32}$$

Ряд называется ***равномерно сходящимся*** в интервале (a, b), если сумма $S_n(x)$ равномерно стремится к $F(x)$ в этом интервале, т. е. если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие такое целое число N, что для всякого значения $n \geqslant N$ абсолютная величина $R_n(x)$ остается меньше ε во всем интервале (a, b). Теорема А приводит тогда к следующему предложению:

Сумма ряда, равномерно сходящегося в интервале (a, b), члены которого суть непрерывные функции переменного в этом интервале, сама есть функция непрерывная *.

В самом деле, сумма $S_n(x)$ произвольного числа членов ряда есть функция непрерывная, если все эти члены непрерывны.

Теорема В в применении к рядам приводит также к новому предложению.

Если ряд с непрерывными членами сходится в интервале (a, b) и если ряд, образованный производными членов первого ряда, равномерно

---

* Высказанное условие только достаточно. Arzela дал условие, ***необходимое и достаточное*** для того, чтобы ряд с непрерывными членами представлял непрерывную функцию (см. E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles, стр. 42).

сходится в этом интервале, то сумма второго ряда представляет производную суммы первого ряда.

В самом деле, пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — суммы двух рядов:

$$F(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$
$$\Phi(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

Сумма $n+1$ первых членов второго ряда равна производной суммы $S_n(x)$ первых $n+1$ членов первого ряда. Мы имеем, следовательно:

$$F(x) = \lim S_n(x), \quad \Phi(x) = \lim S_n'(x);$$

но, по предположению, $S_n'(x)$ стремится равномерно к $\Phi(x)$, так как второй ряд сходится равномерно. Мы имеем, следовательно, на основании теоремы B:

$$\Phi(x) = F'(x).$$

Из этих предложений видна важность равномерно сходящихся рядов. Следующее правило, часто применяемое, позволяет во многих случаях узнать, обладает ли ряд этим свойством. Пусть будет

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{33}$$

ряд с переменными членами; пусть, с другой стороны,

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{34}$$

есть сходящийся ряд, члены которого суть постоянные положительные числа. Если для всех значений a в интервале (a, b) имеет место неравенство $|u_n| \leqslant v_n$, каково бы ни было n, то *первый ряд* (33) *равномерно сходится в этом интервале*. В самом деле, ясно, что при любом значении x в интервале

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots| < v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots,$$

т. е.

$$|R_n(x)| < R_n',$$

где R_n' обозначает сумму ряда, который мы получаем, отбрасывая $n+1$ первых членов ряда (34). Так как этот ряд (34) сходится, то можно найти число N достаточно большое, чтобы R_n' было меньше ε, когда $n \geqslant N$. Следовательно, мы будем иметь также для этих значений n $|R_n(x)| < \varepsilon$ во всем рассматриваемом интервале.

Например, если $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ сохраняют прежний смысл, ряд

$$v_0 + v_1 \sin x + \ldots + v_n \sin(nx) + \ldots$$

равномерно сходится во всяком интервале.

Примечание. Иногда равномерную сходимость ряда определяют несколько иначе. Ряд называют *равномерно сходящимся* в интервале (a, b), если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие такое целое число n, что сумма произвольного числа членов, начиная с $u_{n+1}(x)$,

$$u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x),$$

оказывается по абсолютной величине меньше ε, каковы бы ни были положительное число p и значение x в интервале. Нетрудно показать эквивалентность обоих определений. Предположим сначала, что ряд сходится равномерно в силу определения, данного выше, и пусть n — такое положительное число, что абсолютные величины всех остатков $R_n(x)$, $R_{n+1}(x)$, ..., $R_{n+p}(x)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ во всем интервале (a, b). Ясно, что абсолютная величина суммы

$$u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)=R_{n+p}(x)-R_n$$

будет меньше ε в том же интервале. Обратно, предположим, что абсолютная величина суммы $u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ во всем интервале, каково бы ни было p; абсолютная величина суммы

$$u_{p+1}(x)+\ldots+u_{p+q}(x)$$

будет меньше ε, каково бы ни было положительное число q, если $p \geqslant n$. Отсюда мы заключаем, предполагая, что число q неограниченно возрастает, в то время как p остается постоянным, что абсолютная величина $R_p(x)$ меньше ε в интервале (a, b), если только $p \geqslant n$. Следовательно, ряд сходится равномерно в первом смысле этого слова.

31. Непрерывная функция, не имеющая производной. В заключение этой главы мы приведем данный Вейерштрассом пример непрерывной функции, не имеющей производной ни при каком значении переменного. Пусть будет b постоянное положительное число, меньшее единицы, и a — целое нечетное число. Рассмотрим функцию $F(x)$, равную сумме сходящегося бесконечного ряда:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x). \tag{35}$$

Так как этот ряд — равномерно сходящийся во всяком промежутке, то функция $F(x)$ непрерывна при всяком значении x. Если произведение ab меньше единицы, то все сказанное о ряде (78) можно распространить и на ряд, составленный из производных от членов первого ряда; следовательно, функция $F(x)$ имеет производную, которая будет сама непрерывной функцией. Напротив, мы покажем, что если произведение ab будет больше некоторого предела, то $F(x)$ не будет иметь производной.

Обозначим через m какое-нибудь целое число и положим

$$S_m=\frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n \left\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)\right\},$$

$$R_m=\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n \left\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)\right\}.$$

Тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=S_m+R_m. \tag{36}$$

Применяя к функции $\cos(a^n\pi x)$ формулу конечных приращений, мы найдем, что абсолютная величина разности

$$\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)$$

меньше $\pi a^n |h|$. Следовательно, абсолютная величина S_m будет меньше

$$\pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1}$$

и, тем более, меньше $\pi \frac{(ab)^m}{ab-1}$, если $ab > 1$. Будем искать теперь нижний предел абсолютной величины R_m, дав приращению h некоторое частное значение. Мы можем представить $a^m x$ в виде:

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

где α_m — некоторое целое число и ξ_m заключается между

$$-\frac{1}{2} \text{ и } +\frac{1}{2}.$$

Положим

$$h = \frac{e_m - \xi_m}{a^m},$$

где e_m равно ± 1. Так как $|\xi_m| < \frac{1}{2}$, то ясно, что h имеет знак, одинаковый со знаком e_m, и по абсолютной величине меньше $\frac{3}{2a^m}$.

При таком выборе числа h имеем при $n \geqslant m$:

$$a^n \pi (x + h) = a^{n-m} a^m \pi (x + h) = a^{n-m} \pi (\alpha_m + e_m).$$

Так как a — число нечетное, и $e_m = \pm 1$, то произведение

$$a^{n-m} (\alpha_m + e_m),$$

где $n > m$, одинаковой четности с $\alpha_m + 1$, и следовательно,

$$\cos [a^n \pi (x + h)] = (-1)^{\alpha_m + 1}.$$

Точно так же имеем:

$$\cos (a^n \pi x) = \cos (a^{n-m} a^m \pi x) = \cos [a^{n-m} \pi (\alpha_m + \xi_m)] =$$
$$= \cos (a^{n-m} \alpha_m \pi) \cos (a^{n-m} \xi_m \pi).$$

Так как число $a^{n-m} \alpha_m$ одинаковой четности с α_m, то

$$\cos (a^n \pi x) = (-1)^{\alpha_m} \cos (a^{n-m} \xi_m \pi).$$

Следовательно, мы получаем:

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m + 1}}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n [1 + \cos (a^{n-m} \xi_m \pi)].$$

Так как все члены этого ряда положительны, то сумма этого ряда больше первого члена, следовательно, больше b^m, так как ξ_m заключается между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Таким образом мы имеем:

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|},$$

или, принимая во внимание, что $h < \frac{3}{2a^m}$, $|R_m| > \frac{2}{3}(ab)^m$.

Предположим, что

$$\frac{2}{3}(ab)^m > \frac{\pi(ab)^m}{ab-1},$$

для чего числа a и b должны удовлетворять неравенству:

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}. \qquad (37)$$

Тогда соотношение (36) показывает, что

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| > |R_m| - |S_m| > \frac{2}{3}(ab)^m \frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{ab-1}.$$

Будем теперь давать целому числу m все большие значения. При неограниченном возрастании m правая часть последнего неравенства неограниченно возрастает, и вместе с тем h стремится к нулю. Следовательно, как бы ни мало было число ε, всегда можно найти такое приращение h, меньшее ε по абсолютной величине, чтобы абсолютная величина $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ была больше всякого заранее данного числа. Таким образом, если соотношение (37) удовлетворено, то функция $F(x)$ не имеет производной ни при каком значении переменного x.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Пусть будет $\rho=f(\omega)$ уравнение плоской кривой в полярных координатах. Проведем через полюс O прямую, перпендикулярную к радиусу-вектору OM и пересекающуюся с касательною MT и нормалью MN. Требуется выразить различные линии OT, ON, MN, MT в функции от $f(\omega)$ и $f'(\omega)$

Каковы будут кривые, для которых одна из этих линий постоянна?

2. Пусть будут $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ уравнения кривой двойной кривизны Г; пусть N будет точка, в которой нормальная плоскость в точке M, т. е. плоскость, перпендикулярная к касательной прямой в этой точке, встречает ось z, и P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на Oz. Каковы те кривые, для которых одна из линий PN или MN постоянна?

Ответ. Эти кривые расположены на параболоидах вращения или на сферах.

3. Определить целый многочлен седьмой степени $f(x)$ по x, зная, что $f(x)+1$ делится на $(x-1)^4$, а $f(x)-1$ на $(x+1)^4$. Обобщить вопрос.

4. Пусть будут P и Q два целых многочлена по x, для которых

$$\sqrt{1-P^2} = Q\sqrt{1-x^2}.$$

Тогда, обозначая через n целое число, будем иметь:

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ответ. Диференцируя соотношение

$$1 - P^2 = Q^2(1 - x^2), \tag{a}$$

находим:

$$-2PP' = Q\,[2Q'(1-x^2) - 2Qx]; \tag{b}$$

соотношение (a) показывает, что Q первое с P, а (b) — что P' делится на Q.

5. Пусть будет $R(x)$ многочлен четвертой степени, имеющий простые корни, и $x = \frac{U}{V}$ — рациональная функция от t, удовлетворяющая соотношению:

$$\sqrt{R(x)} = \frac{P(t)}{Q(t)}\sqrt{R_1(t)},$$

где $R_1(t)$ есть многочлен четвертой степени, и $\frac{P}{Q}$ — рациональная функция. Показать, что функция $\frac{U}{V}$ удовлетворяет соотношению вида:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{k\,dt}{\sqrt{R_1(t)}},$$

где k — постоянное количество. [Якоби.]

Ответ. Следует обратить внимание на то, что все корни уравнения $R\left(\frac{U}{V}\right) = 0$, которые не обращают в нуль $R_1(t)$, должны обращать в нуль выражение $UV' - VU'$, а следовательно, и $\frac{dx}{dt}$.

6. Производная n-го порядка функции от функции $y = \varphi(u)$, где u есть функция независимого переменного x, выразится в виде:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A_1\varphi'(u) + \frac{A_2}{1\cdot 2}\varphi''(u) + \ldots + \frac{A_n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(u), \tag{a}$$

где

$$A_k = \frac{d^n u^k}{dx^n} - \frac{k}{1}u\frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}u^2\frac{d_n u^{k-2}}{dx^n} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1}ku^{k-1}\frac{d^n u}{dx^n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{b}$$

Заметим сначала, что выражение производной n-го порядка будет вида (a), причем коэфициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от вида функции $\varphi(u)$. Чтобы получить эти коэфициенты, достаточно положить последовательно

$$\varphi(u) = u,\quad \varphi(u) = u^2,\quad \ldots,\quad \varphi(u) = u^n$$

и решить полученные уравнения относительно коэфициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$; отсюда получаются значения (b).

Производная n-го порядка от $\varphi(x^2)$ имеет выражение:

$$\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n} = (2x)^n\varphi^{(n)}(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x^2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1\cdot 2\ldots p}(2x)^{n-2p}\varphi^{(n-p)}(x^2) + \ldots,$$

где число p изменяется от нуля до наибольшего целого числа, заключающегося в $\frac{n}{2}$, и $\varphi^{(i)}(x^2)$ обозначает производную порядка i относительно x^2.

Приложение к функциям e^{-x^2}, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

8. Если мы положим $x = \cos u$, то получим:

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{m}\sin mu$$

[Олинд Родриг (Olinde Rodrigues)]

9. Полином Лежандра (Legendre):

$$X_n = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0;$$

вывести отсюда коэфициенты этого полинома.

10. Четыре функции

$$y_1 = \sin(n\arcsin x),\quad y_3 = \sin(n\arccos x),$$
$$y_2 = \cos(n\arcsin x),\quad y_4 = \cos(n\arccos x)$$

удовлетворяют диференциальному уравнению

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Вывести отсюда разложения этих функций в тех случаях, когда они приводятся к многочленам.

11. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

[Альфан (Halphen).]

12. Всякая функция $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, каковы бы ни были функции φ и ψ, удовлетворяет соотношению

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

13. Функция $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$, каковы бы ни были функции φ, ψ, удовлетворяет соотношению

$$r - 2s + t = 0.$$

14. Функция $z = f[x + \varphi(y)]$, каковы бы ни были функции f и φ, удовлетворяет соотношению

$$ps = qr.$$

15. Функция $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, каковы бы ни были функции φ и ψ, удовлетворяет соотношению

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + px + qy = n^2z.$$

16. Функция

$$y = |x-a_1|\varphi_1(x) + |x-a_2|\varphi_2(x) + \ldots + |x-a_n|\varphi_n(x),$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, а также и производные $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \ldots, \varphi_n'(x)$ суть функции непрерывные имеет производную, прерывную при значениях

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

— 17. Найти соотношение между производными первого и второго порядков по x_1, x_2, x_3 от функции $z=f(x_1, u)$, где $u=\varphi(x_2, x_3)$, количества x_1, x_2, x_3 суть три независимых переменных, а $f(x_1, u)$ и $\varphi(x_2, x_3)$ — две произвольные функции.

18. Пусть будет $f(x)$ какая-нибудь функция от x и $f'(x)$ ее производная. Положив $u=[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, $v=f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, будем иметь:

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

19. Производная n-го порядка функции от функции $u=\varphi(y)$, где $y=\Psi(x)$, имеет вид:

$$D_x^n\varphi=\sum\frac{n!}{i!\,j!\,\ldots\,k!}D_y^p\varphi\left(\frac{\Psi'}{1}\right)^i\left(\frac{\Psi''}{1\cdot 2}\right)^j\left(\frac{\Psi'''}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^h\cdots\left(\frac{\Psi^{(l)}}{1\cdot 2\ldots l}\right)^k,$$

причем знак $\sum$ должен быть распространен на все решения в целых и положительных числах уравнения $i+2j+3h+\ldots+lk=n$, а p равно

$$i+j+\ldots+k.$$

[Фаа де Бруно (Faa de Bruno), *Quarterly Journal of Mathematics*, т. I, стр. 359.]

ГЛАВА III.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. МАКСИМУМ И МИНИМУМ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ.

I. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ.

32. Исследование частного случая. Часто приходится рассматривать функции, которые не даются в виде явных выражений, но которые определяются нерешенными уравнениями. Мы начнем с изучения одной функции, определенной одним уравнением, предполагая для определенности, что имеется два независимых переменных.

Пусть $F(x, y, z)$ — функция переменных x, y, z, удовлетворяющая следующим условиям: 1) *она непрерывна и имеет непрерывную частную производную F'_z в окрестности системы значений x_0, y_0, z_0;* 2) *$F(x_0, y_0, z_0)$ равна нулю, в то время как $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ отлична от нуля. При этих условиях уравнение*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

имеет один и только один корень, который стремится к z_0, когда x и y стремятся соответственно к x_0 и y_0.

Так как функции F и F'_z непрерывны в окрестности значений x_0, y_0, z_0, то можно найти три положительных числа a, b, c, достаточно малых, чтобы эти функции были непрерывны в области D, определенной неравенствами:

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \quad |z - z_0| \leqslant c,$$

и F'_z сохраняла в этой области один и тот же знак, например оставалась положительной. Тогда функция переменного z, которую мы получаем, давая x и y определенные значения, заключенные в только что указанных пределах, *возрастает* при возрастании z от $z_0 - c$ до $z_0 + c$. В частности, функция $F(x_0, y_0, z)$ есть возрастающая функция в этом интервале; так как она равна нулю при $z = z_0$, то она положительна между z_0 и $z_0 + c$ и отрицательна между $z_0 - c$ и z_0, так что, если h — произвольное положительное число, меньшее c, имеем:

$$F(x_0, y_0, z_0 + h) > 0,$$
$$F(x_0, y_0, z_0 - h) < 0.$$

Но функции $F(x, y, z_0 + h)$, $F(x, y, z_0 - h)$ переменных x и y непрерывны при $x = x_0$, $y = y_0$ и не обращаются в нуль при этой системе значений x и y. Следовательно, можно найти такое положительное число η, не превосходящее меньшего из двух чисел a и b, что функции

$$F(x, y, z_0+h), \quad F(x, y, z_0-h)$$

сохраняют каждая свой знак, когда разности $x-x_0$, $y-y_0$ по абсолютной величине меньше η. Следовательно, для всякой системы значений x и y, удовлетворяющей условиям

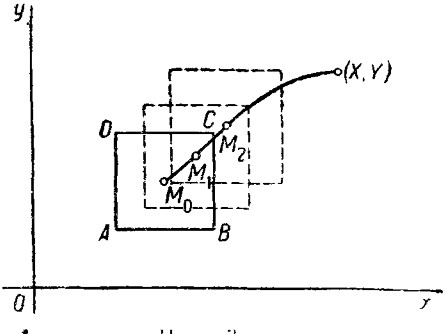
$$|x-x_0|<\eta, \quad |y-y_0|<\eta,$$

мы будем иметь также

$$F(x, y, z_0+h)>0, \quad F(x, y, z_0-h)<0.$$

Уравнение (1), в котором переменным x и y даются значения, заключенные в вышеуказанных пределах, и в котором z есть неизвестное, имеет, следовательно, *по меньшей мере*, один корень, содержащийся между z_0-h и z_0+h. Оно не может иметь их несколько, так как функция $F(x, y, z)$ переменного z возрастает в этом интервале. Так как число h может быть взято сколь угодно малым, то высказанная теорема доказана.

Пусть h и η — система двух положительных чисел, удовлетворяющих условиям, которые только что были определены. Корень уравнения (1), существование которого мы только что показали, определен внутри квадрата R, имеющего центр в точке M_0 с координатами (x_0, y_0), со сторонами, параллельными осям координат (предполагаемым прямоугольными), причем длина стороны равна 2η. Пусть x_1, y_1 — координаты другой точки M_1, взятой внутри этого квадрата; из приведенного доказательства следует, что уравнение $F(x_1, y_1, z)=0$ имеет один и только один корень z, заключенный между z_0-h и z_0+h, поскольку $F'_z(x_1, y_1, z_1)$ положительно. Таким образом предшествующее рассуждение применимо также к точке x_1, y_1: когда x и y стремятся соответственно к x_1 и y_1, уравнение (1) имеет один и только один корень, который стремится к z_1. Этот корень необходимо содержится между z_0-h и z_0+h, и, следовательно, совпадает с первым. Таким образом рассмотренный корень непрерывен во всякой точке внутри квадрата R.



Черт. 3.

Так как рассматриваемый нами корень определен только внутри области R, то мы имеем, таким образом, только один *элемент* неявной функции. Чтобы определить эту функцию вне области R, мы будем последовательно поступать следующим образом. Пусть (черт. 3) будет L непрерывный путь, выходящий из точки (x_0, y_0) и кончающийся в точке (X, Y), лежащей вне области R. Предположим, что переменные x и y изменяются одновременно таким образом, что точка с координатами (x, y) описывает путь L. Если мы выйдем из точки (x_0, y_0) со значением z_0 для неизвестного z, то мы будем иметь вполне определенное значение для этого корня до тех пор, пока не выйдем из области R. Пусть будет $M_1(x_1, y_1)$ точка этого пути, находящаяся внутри R, и пусть будет z_1 соответствующее значение для z; условия основной теоремы удовлетворятся при $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, и следовательно, существует другая область R_1 с центром в точке M_1, внутри которой будет вполне определен корень, обращающийся в z_1 при $x = x_1, y = y_1$. У этой новой области R_1 будут вообще точки, лежащие вне R; взяв опять на пути L другую точку M_2, расположенную вне R и внутри R_1, мы можем снова повторить то же самое построение и получим новую область R_2, внутри которой корень уравнения (1) будет вполне определенным, и т. д. Этот процесс мы можем продолжать до тех пор, пока не придем к системе значений для x, y, z, при которой $F'_z = 0$. Ограничимся здесь только этими общими указаниями; в следующих главах мы будем иметь случай подробнее остановиться на этого рода вопросах.

33. Вычисление корня последовательными приближениями *. *Пусть будет $f(x, y, z)$ непрерывная функция, имеющая непрерывную производную $f'_z(x, y, z)$ вблизи системы значений (x_0, y_0, z_0). Если эта функция $f(x, y, z)$ и ее производная f'_z при этой системе значений равны нулю, то уравнение*

$$z = z_0 + f(x, y, z) \tag{2}$$

имеет один и только один корень $z = \varphi(x, y)$, стремящийся к z_0, когда x и y стремятся соответственно к x_0 и y_0, и вблизи этой системы значений функция φ есть непрерывная функция переменных x и y.

Так как функции $f(x, y, z)$ и $f'_z(x, y, z)$ равны нулю при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и непрерывны вблизи этой системы значений, то мы можем выбрать три таких положительных числа a, b, c, чтобы функции $f(x, y, z)$ и $f'_z(x, y, z)$ были непрерывны в области D, определяемой условиями:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b, \quad z_0 - c \leqslant z \leqslant z_0 + c$$

и чтобы, кроме того, в области D было:

$$\left| f'_z(x, y, z) \right| < K,$$

где K есть какое-нибудь положительное число, меньшее единицы. Условию (2) всегда можно удовлетворить соответствующим выбором чисел a, b, c, так как непрерывная функция f'_z *равна нулю при* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Для решения уравнения (1) мы применим метод последовательных приближений. Положим последовательно:

$$z_1 = z_0 + f(x, y, z_0), \quad z_2 = z_0 + f(x, y, z_1), \ \ldots,$$

и, вообще,

$$z_n = z_0 + f(x, y, z_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{3}$$

Докажем, что если разности $x - x_0$, $y - y_0$ будут достаточно малы, то все разности $z_n - z_0$ по абсолютной величине будут оставаться меньшими c, и следовательно, предыдущая последовательность операций может быть продолжена неограниченно. Пусть будет z какое-нибудь число, заключающееся между $z_0 - c$ и $z_0 + c$; мы можем написать:

$$f(x, y, z) = f(x, y, z_0) + f(x, y, z) - f(x, y, z_0),$$

---

* Гурса, Sur la théorie des fonctions implicites (*Bulletin de la Société mathématique*, т. XXXI, 1903).

и следовательно, применяя формулу среднего значения и принимая в соображение условие (2), получим:

$$|f(x, y, z)| < |f(x, y, z_0)| + K|z - z_0|. \tag{4}$$

Возьмем теперь такое положительное число h, чтобы оно было не больше меньшего из чисел a, b и чтобы абсолютная величина функции $f(x, y, z_0)$ была меньше $(1-K)c$, когда точка (x, y) остается в области D', определяемой условиями:

$$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, \quad y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 + h.$$

Из неравенства (4) следует, что будет также

$$|f(x, y, z)| < (1-K)c + Kc = c.$$

Таким же образом последовательно можно убедиться, что если точка (x, y) остается в области D', то абсолютные величины всех разностей

$$z_1 - z_0,\ z_2 - z_0, \ldots, z_n - z_0, \ldots$$

будут меньше c. Следовательно, мы получаем неограниченную последовательность функций

$$z_1(x, y),\ z_2(x, y), \ldots, z_n(x, y),$$

определяемых рекуррентным законом (3), которые все непрерывны в области D' и заключаются между $z_0 - c$ и $z_0 + c$. Докажем, что *при неограниченном возрастании n функция $z_n(x, y)$ стремится к некоторому пределу*. В самом деле, из соотношений

$$z_n = z_0 + f(x, y, z_{n-1}), \quad z_{n-1} = z_0 + f(x, y, z_{n-2}),$$

принимая во внимание условие (2), следует:

$$|z_n - z_{n-1}| < K|z_{n-1} - z_{n-2}|,$$

и следовательно,

$$|z_n - z_{n-1}| < K^{n-1}|z_1 - z_0| K^{n-1}(1-K)c.$$

Таким образом ряд

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots \tag{5}$$

— равномерно сходящийся в области D' и имеет суммою некоторую функцию $Z(x, y)$, непрерывную в этой области. Эта функция Z удовлетворяет уравнению (1), так как при неограниченном возрастании n уравнение (3) обращается в пределе в

$$Z = z_0 + f(x, y, Z). \tag{6}$$

Сверх того, при $x = x_0$, $y = y_0$ все функции $z_1, z_2, \ldots$ обращаются в z_0, и следовательно, мы будем иметь $Z(x_0, y_0) = z_0$; таким образом функция $Z(x, y)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

$Z(x, y)$ есть единственный корень, удовлетворяющий этим условиям. Точнее, когда точка (x, y) заключается в области D', уравнение (1) не имеет никакого другого корня, кроме Z, заключающегося между $z_0 - c$ и $z_0 + c$. В самом деле, пусть будет Z_1 такой корень; из соотношений

$$Z_1 = z_0 + f(x, y, Z_1), \quad z_n = z_0 + f(x, y, z_{n-1})$$

получаем:

$$Z_1 - z_n = f(x, y, Z_1) - f(x, y, z_{n-1}),$$

и следовательно,

$$|Z_1 - z_n| < K|Z_1 - z_{n-1}|.$$

Отсюда будем иметь:

$$|Z_1 - z_n| < K^{n-1}|Z_1 - z_1|.$$

Следовательно, при неограниченном возрастании n разность $Z_1 - z_n$ стремится к нулю; таким образом Z_1 тождественно с Z. Приведенное здесь доказательство не только позволяет убедиться в существовании корня $Z(x, y)$, но и дает способ его вычислить. Так как абсолютная величина разности $z_1 - z_0$ меньше $(1-K)c$, то абсолютная величина разности $z_n - z_{n-1}$ будет меньше $(1-K)cK^{n-1}$. Отсюда следует, что, ограничивая ряд (5) членом $(z_n - z_{n-1})$, мы допустим погрешность, абсолютная величина которой меньше cK^n.

От этого частного случая легко перейти к общей теореме § 32.

Обозначим $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ через m; по предположению, m отлично от нуля, и уравнение (1) равносильно уравнению:

$$z = z_0 + \left[z - z_0 - \frac{1}{m} F(x, y, z)\right];$$

но это уравнение имеет вид уравнения (2), в котором

$$f(x, y, z) = z - z_0 - \frac{1}{m} F(x, y, z).$$

Таким образом теорема доказана, и очевидно, что рассуждение не зависит от числа независимых переменных.

Перейдем теперь к изучению систем неявных функций, определяемых совместными уравнениями. Пусть будут

$$f_1(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_p), \ldots,\ f_p(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_p)$$

p функций $n+p$ переменных x_i, y_k, непрерывных и имеющих непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_k}$ вблизи системы значений $x_i = x_i^0$ $y_k = y_k^0$. Если, кроме того, p функций f_j и p^2 частных производных $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_k}$ равны нулю при этой системе значений, то *p уравнений*

$$y_1 = y_1^0 + f_1,\quad y_2 = y_2^0 + f_2, \ldots, y_p = y_p^0 + f_p$$

имеют одну и только одну систему решений:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{A}$$

стремящихся к значениям $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ стремятся соответственно к $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, и эти решения суть непрерывные функции вблизи этой системы значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Рассмотрим для определенности два уравнения с двумя независимыми переменными x, y и двумя функциями u, v и предположим $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 0$. Последнему условию всегда можно удовлетворить, заменяя x, y, u, v соответственно через $x_0 + x,\ y_0 + y,\ u_0 + u,\ v_0 + v$. Тогда уравнения (10) будут иметь вид:

$$u = f(x, y;\ u, v),\qquad v = \varphi(x, y;\ u, v), \tag{B}$$

причем при $x = y = u = v = 0$ функции $f,\ \varphi,\ \dfrac{\partial f}{\partial u},\ \dfrac{\partial f}{\partial v},\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u},\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ равны нулю и непрерывны вблизи этой системы значений. Пусть будут a, b, c такие положительные числа, чтобы шесть предыдущих функций были непрерывны в области D, определяемой условиями:

$$|x| \leqslant a,\quad |y| \leqslant b,\quad |u| \leqslant c,\quad |v| \leqslant c,$$

и чтобы, кроме того, в этой области было:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| < K,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| < K,\quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| < K,\quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right| < K, \tag{C}$$

где K — какое-нибудь положительное число, меньшее $\frac{1}{2}$. Составим, подобно предыдущему, две последовательности функций:

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x, y;\ 0, 0), & v_1 &= \varphi(x, y;\ 0, 0),\\ u_2 &= f(x, y;\ u_1, v_1), & v_2 &= \varphi(x, y;\ u_1, v_1),\\ &\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots, \ldots\ldots, \end{aligned}$$

и вообще,

$$u_n = f(x, y;\ u_{n-1}, v_{n-1}),\quad v_n = \varphi(x, y;\ u_{n-1}, v_{n-1}). \tag{D}$$

Если абсолютные величины количеств u_{n-1}, v_{n-1} будут меньше c, то, применяя формулу среднего значения к разностям $u_n - u_1$, $v_n - v_1$ и принимая во внимание условия (12), получим:

$$|u_n| < |f(x, y;\ 0, 0)| + 2Kc,\quad |v_n| < |\varphi(x, y;\ 0, 0)| + 2Kc.$$

Выберем теперь такое положительное число h, чтобы оно было не больше меньшего из двух чисел a и b и чтобы абсолютные величины функций $f(x, y;\ 0, 0)$ и $\varphi(x, y;\ 0, 0)$ были меньше $(1-2K)c$, когда абсолютные величины переменных x и y не превосходят h. Если точка (x, y) остается в области D', определенной таким образом, то последовательно можно убедиться, что все функции u_i, v_i будут непрерывны и по абсолютной величине будут оставаться меньше c.

Докажем, что *при неограниченном возрастании числа n функции u_n и v_n стремятся к некоторым пределам $U(x, y)$ и $V(x, y)$*. В самом деле, рассмотрим два ряда:

$$\begin{aligned} &u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots, \\ &v_1 + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_n - v_{n-1}) + \ldots \end{aligned} \tag{E}$$

Из соотношений (13) получаем:

$$u_n - u_{n-1} = f(x, y;\ u_{n-1}, v_{n-1}) - f(x, y;\ u_{n-2}, v_{n-2}),$$

и следовательно, на основании условий (12),

$$|u_n - u_{n-1}| < K|u_{n-1} - u_{n-2}| + K|v_{n-1} - v_{n-2}|.$$

Очевидно, что такое же неравенство существует для $|v_n - v_{n-1}|$. Обозначая через H_n наибольшее из чисел $|u_n - u_{n-1}|$ и $|v_n - v_{n-1}|$, имеем:

$$H_n < 2KH_{n-1},$$

и следовательно,

$$H_n < (2K)^{n-1}H_1 < (2K)^{n-1}(1-2K)c.$$

Отсюда следует, что оба ряда (E) — равномерно сходящиеся в области D' и представляют две функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$, непрерывные в этой области. Эти функции U и V удовлетворяют уравнениям (B), так как при неограниченном возрастании числа n соотношения (D) в пределе обращаются в

$$U = f(x, y;\ U, V),\quad V = \varphi(x, y;\ U, V).$$

Как и выше, можно было бы доказать, что U и V — единственные корни уравнений (B), удовлетворяющие требуемым условиям.

Рассмотрим, наконец, систему самого общего вида:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0,\quad F_2 = 0, \ldots,\quad F_p = 0. \tag{F}$$

Предположим, что функции $F_1, \ldots, F_p$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ вблизи системы значений $x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_p^0$, при которых $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$, и что функциональный определитель

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

при значениях x_i^0, y_k^0 не равен нулю. При этих условиях уравнения (F) *имеют одну и только одну систему решений:*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_p = \varphi_p(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ — непрерывные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, стремящиеся соответственно к $y_1^0, \ldots, y_p^0$, когда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ стремятся к $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Для упрощения изложения заменим x_i через $x_i^0+x_i$ и y_k через $y_k^0+y_k$, так чтобы все начальные значения x_i^0, y_k^0 были равны нулю. Обозначим через a_{jk} значение производной $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ при этих начальных значениях. По предположению, определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Очевидно, что система уравнений (F) равносильна следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1p}y_p&=a_{11}y_1+\dots+a_{1p}y_p-F_1=\psi_1,\\ a_{21}y_2+a_{22}y_2+\dots+a_{2p}y_p&=a_{21}y_1+\dots+a_{2p}y_p-F_2=\psi_2,\\ \dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{p1}y_1+a_{p2}y_2+\dots+a_{pp}y_p&=a_{p1}y_1+\dots+a_{pp}y_p-F_p=\psi_p, \end{aligned}\right\} \tag{G}$$

где при $x_i=0$, $y_k=0$ функции ψ_j и их частные производные равны нулю. Решая систему (G) относительно $y_1, y_2, \dots, y_p$, что возможно, так как Δ не равно нулю, мы придем к системе вида (A).

34. Производные от неявных функций. Возвратимся к области R и к корню $z=\varphi(x, y)$ уравнения (1), который в этой области будет непрерывной функцией двух переменных x и y. Эта функция имеет частные производные первого порядка. В самом деле, оставим y постоянным и дадим x приращение Δx, вследствие чего для z получим приращение Δz. По предыдущему имеем:

$$F(x+\Delta x, y, z+\Delta z)-F(x, y, z)=$$
$$=\Delta x F'_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)+\Delta z F'_z(x, y, z+\theta'\Delta z)=0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)}{F'_z(x, y, z+\theta'\Delta z)};$$

когда Δx стремится к нулю, Δz стремится также к нулю, так как z есть непрерывная функция от x. Таким образом правая часть последнего равенства стремится к пределу, и z имеет частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}. \tag{7}$$

Точно так же мы будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{8}$$

Примечание. Если степень уравнения $F=0$ относительно z равна m, то это уравнение определяет m функций от переменных x и y. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ будут точно так же иметь m значений для каждой системы значений переменных x и y; тем не менее, предыдущие формулы дают для этих частных производных вполне определенные выражения, если только в правых частях мы заменим z значением той из m функций, от которой мы ищем производную.

Например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

определяет две функции:

$$+\sqrt{1-x^2-y^2} \text{ и } -\sqrt{1-x^2-y^2},$$

которые непрерывны, если $x^2+y^2<1$. Частные производные от первой функции будут:

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

а частные производные от второй будут иметь обратные знаки. Те же самые значения мы получим, исходя из формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

и заменяя в них z его двумя значениями.

35. Приложение к поверхностям. Если мы будем рассматривать x, y, z как декартовы координаты точки в пространстве, то всякое уравнение

$$F(x, y, z)=0 \tag{9}$$

будет представлять поверхность S. Пусть будут (x_0, y_0, z_0) координаты точки A этой поверхности; если функция F непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка вблизи значений x_0, y_0, z_0, и если эти частные производные не обращаются одновременно в нуль для точки A, то поверхность S имеет в точке A определенную касательную плоскость. Положим, например, что частная производная F'_z не будет равна нулю при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Предполагая уравнение поверхности решенным относительно z, мы можем, на основании общей теоремы, представить его около точки A в виде:

$$z=\varphi(x, y),$$

где функция $\varphi(x, y)$ непрерывна. Уравнение касательной плоскости в точке A будет:

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(Y-y_0).$$

Заменим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ их значениями из предыдущих формул; тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0. \tag{10}$$

Если бы было $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$, но $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq 0$, то мы приняли бы y и z за независимые переменные, а x за их функцию; в этом случае мы пришли бы к тому же самому уравнению (10), что можно было предполагать заранее на основании симметрии левой части. Точно так же можно написать уравнение касательной в точке (x_0, y_0) к плоской кривой, представляемой уравнением $F(x, y) = 0$:

$$(X - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + (Y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Если мы имеем одновременно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

то точка A есть *особая точка* поверхности S; касательные к различным кривым, расположенным на поверхности и проходящим через точку A, образуют вообще здесь не плоскость, а конус. Этот случай мы рассмотрим впоследствии (глава III).

При доказательстве основной теоремы о неявных функциях мы предполагали, что производная F_z' не равна нулю. Геометрически ясно видно, почему это условие необходимо. В самом деле, если мы имеем $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \neq 0$, то касательная плоскость к поверхности S параллельна оси z, и прямая, параллельная оси z и проходящая вблизи прямой $x = x_0$, $y = y_0$, встречает поверхность, вообще, в двух точках, лежащих около точки прикосновения. Таким образом уравнение (9) имеет здесь два корня, которые оба стремятся к z_0, когда x и y стремятся соответственно к x_0 и y_0.

Например, если мы пересечем сферу $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ прямою $y = 0$, $x = 1 + \varepsilon$, то мы будем иметь два значения для z, стремящихся к нулю вместе с ε, — действительных, если ε отрицательно, и мнимых, если ε положительно.

36. Высшие производные. В формулах для производных первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}$$

можно рассматривать правые части как сложные функции, в которых z служит посредствующею функциею. Таким образом можно было бы вычислять высшие производные постепенно, прилагая правило диференцирования сложных функций. При этом существование этих высших производных зависит от существования частных производных различных порядков от функции $F(x, y, z)$.

Эти производные можно получить более простым способом, применяя следующее предложение:

Если несколько функций независимого переменного удовлетворяют соотношению $F = 0$, то их производные будут удовлетворять соотношению, которое получится, если приравнять нулю производную, взятую от левой части F как от сложной функции. В самом деле, если функция F обращается тождественно в нуль, когда заменим в ней переменные, от которых она зависит, функциями независимого переменного, то будет тождественно равна нулю и производная от функции F. Эта теорема остается верною и в том случае, когда функции, связанные соотношением $F=0$, зависят от многих независимых переменных.

Предположим теперь, что нам нужно вычислить высшие производные от неявной функции y одного независимого переменного x, определенной соотношением:

$$F(x, y)=0.$$

Мы находим последовательно:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'^2+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y''+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0,$$

. . . .

Отсюда можно постепенно определить $y', y'', y''', \ldots$

Пример. Если дана функция $y=f(x)$, то можно, обратно, рассматривать y как независимое переменное, а x как неявную функцию от y, определенную уравнением $y=f(x)$. Если при значении x_0, для которого $y_0=f(x_0)$, производная $f'(x)$ не равна нулю, то, по основной теореме, существует единственная функция от y, удовлетворяющая соотношению $y=f(x)$ и принимающая при $y=y_0$ значение x_0; эта функция носит название функции *обратной* относительно $f(x)$. Чтобы вычислить производные различных порядков $x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}, \ldots$ от этой функции, достаточно ее несколько раз продиференцировать, рассматривая y как независимое переменное. Это дает:

$$1=f'(x)\,x'_y,$$
$$0=f''(x)\left(x'_y\right)^2+f'(x)\,x''_{y^2},$$
$$0=f'''(x)\left(x'_y\right)^3+3f''(x)\,x'_y\,x''_{y^2}+f'(x)\,x'''_{y^3},$$
. . . . ,

откуда

$$x'_y=\frac{1}{f'(x)},\quad x''_{y^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},\quad x'''_{y^3}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5},\ \ldots$$

Следует заметить, что эта система формул не меняется, когда переставляют x'_y и $f'(x)$, x''_{y^2} и $f''(x)$, x'''_{y^3} и $f'''(x), \ldots$, так как связь между двумя функциями $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$, очевидно, взаимная.

Чтобы дать приложение этих формул, найдем все функции $y=f(x)$, удовлетворяющие соотношению

$$y'y'''-3y''^2=0.$$

Приняв y за независимое переменное, а x за функцию, мы дадим предыдущему уравнению вид:

$$x'''_{y^3}=0.$$

Но единственными функциями, для которых производная третьего порядка равна нулю, будут многочлены не выше второй степени. Поэтому мы имеем для x выражение следующего вида:

$$x=C_1y^2+C_2y+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — три произвольных постоянных. Решая это уравнение относительно y, мы заключаем, что все функции, удовлетворяющие заданному условию, содержатся в формуле

$$y = a \pm \sqrt{bx + c},$$

где a, b, c — три произвольные постоянные. Это уравнение представляет параболу, главная ось которой параллельна оси x.

37. Частные производные. Рассмотрим теперь неявную функцию двух переменных, определяемую уравнением:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{11}$$

Как мы уже знаем, частные производные первого порядка определятся из соотношений:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Чтобы получить частные производные второго порядка, достаточно вновь продиференцировать оба уравнения (12) относительно x и y; это даст только три различных соотношения, так как производная от первого уравнения по y тождественна с производною от второго по x:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким же образом мы можем найти производные третьего и высших порядков.

Употребление полных диференциалов позволяет и здесь определить одновременно все частные производные одного и того же порядка. Для этого достаточно воспользоваться следующею теоремою:

Если несколько функций $u, v, w, \ldots$ скольких угодно независимых переменных $x, y, z, \ldots$ удовлетворяют соотношению $F = 0$, то полные диференциалы удовлетворят соотношению $dF = 0$, которое получится, если мы возьмем полный диференциал от F, принимая все переменные, от которых зависит F, за переменные независимые. Чтобы доказать эту теорему, предположим, что мы имеем уравнение $F(u, v, w) = 0$, где u, v, w суть функции независимых переменных x, y, z, t. Частные производные от u, v, w удовлетворяют четырем уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

умножая их соответственно на dx, dy, dz, dt и складывая, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=dF=0.$$

Здесь еще раз видно преимущество диференциального обозначения, так как предыдущее соотношение не зависит ни от выбора, ни от числа независимых переменных. Чтобы иметь соотношение между диференциалами второго порядка, достаточно приложить основную теорему к уравнению $dF=0$, рассматривая его как уравнение между u, v, w, du, dv, dw и т. д.; при этом нужно только заменять нулями все диференциалы порядка выше первого от тех переменных, которые приняты за независимые.

Приложим этот способ к вычислению полных диференциалов различных порядков от неявной функции, определенной уравнением (11), причем примем x и y за независимые переменные. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,\\
&\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

два первых уравнения могут заменить собою пять соотношений (12) и (13). Из выражения для dz получаются две производных первого порядка, из выражения для d^2z — три производных второго порядка и т. д. Рассмотрим, например, уравнение

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1;$$

диференцируя его два раза, находим:

$$\begin{aligned}
&Ax\,dx+A'y\,dy+A''z\,dz=0,\\
&A\,dx^2+A'\,dy^2+A''dz^2+A''z\,d^2z=0;
\end{aligned}$$

из первого соотношения имеем:

$$dz=-\frac{Ax\,dx+A'y\,dy}{A''z},$$

и, внося это значение dz во второе, получим:

$$d^2z=-\frac{A\,(Ax^2+A''z^2)\,dx^2+2AA'xydxdy+A'\,(A'y^2+A''z^2)\,dy^2}{A''^2z^3}.$$

Таким образом, воспользовавшись обозначениями Монжа, мы будем иметь:

$$p=-\frac{Ax}{A''z},\qquad q=-\frac{A'y}{A''z},$$

$$r=-\frac{A\,(Ax^2+A''z^2)}{A''^2z^2},\quad s=-\frac{AA'xy}{A''^2z^3},\quad t=-\frac{A'\,(A'y^2+A''z^2)}{A''^2z^3}.$$

Изложенный метод, очевидно, вполне общий; он применим, каковы бы ни были число независимых переменных или порядок искомых частных производных.

Пример. Пусть будет $z = f(x, y)$ функция двух переменных x и y. Примем в последнем соотношении y и z за переменные независимые, а x за неявную функцию этих двух переменных, и найдем диференциалы первого и второго порядков dx и d^2x. Мы имеем:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy;$$

так как мы приняли y и z за независимые переменные, то должно положить

$$d^2y = d^2z = 0;$$

потому, диференцируя вновь последнее соотношение, находим:

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\,d^2x.$$

Пользуясь обозначениями Монжа для частных производных первого и второго порядков от функции $f(x, y)$, мы можем представить предыдущие уравнения в виде:

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy,\\ 0 &= r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x; \end{aligned}$$

из первого выводим:

$$dx = \frac{dz - q\,dy}{p};$$

внося это выражение dx во второе соотношение, получим:

$$d^2x = -\frac{r\,dz^2 + 2\,(ps - qr)\,dy\,dz + (q^2r - 2pqs + p^2t)\,dy^2}{p^3}.$$

Частные производные первого и второго порядков от x, рассматриваемого как функция переменных z и y, будут иметь следующие выражения:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{q}{p},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{r}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} = \frac{qr - ps}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2pqs - p^2t - q^2r}{p^3}.$$

Чтобы иметь приложение этих формул, найдем все функции $f(x, y)$, удовлетворяющие уравнению $q^2r + p^2t = 2pqs$. Если в соотношении $z = f(x, y)$ мы примем x за функцию независимых переменных y и z, то предыдущее уравнение обратится в $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$. Это уравнение показывает, что $\frac{\partial x}{\partial y}$ не зависит от y; следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция от z. Это новое уравнение может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,[x - y\varphi(z)] = 0,$$

оно выражает, что $x - y\varphi(z)$ не зависит от y. Поэтому

$$x = y\varphi(z) + \psi(z),$$

где $\psi(z)$ есть другая произвольная функция от z. Мы получим все искомые функции $z=f(x, y)$, решая предыдущее уравнение относительно z. Это уравнение представляет поверхность, образованную движением прямой, остающейся параллельною плоскости xy.

38. Совокупные уравнения. Мы введем сначала определитель, который будет играть важную роль в последующем. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — система n функций n переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые могут зависеть, кроме того, и от других переменных. Определитель, образованный частными производными первого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

называется *якобианом* или *функциональным определителем* n функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по отношению к n переменным $y_1, \ldots, y_n$. Принято обозначать его

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Тогда общая теорема существования неявных функций формулируется следующим образом.

Пусть будет (E) *система n уравнений между $n+p$ переменными $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n$,*

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(E)}$$

левые части которых обращаются все в нуль при системе значений

$$x_1 = x_1^0, \ \ldots, x_p = x_p^0, \ y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^0.$$

Если функции непрерывны и имеют частные производные первого порядка по переменным y_k, непрерывные в окрестности этой системы значений, и если якобиан $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ не равен нулю при $x_1 = x_1^0, \ldots, y_n = y_n^0$, то существует одна и только одна система функций

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

удовлетворяющих уравнениям (E), *обращающихся соответственно в $y_1^0, \ldots, y_n^0$ при $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$ и непрерывных в окрестности этой системы значений.*

Так как теорема уже доказана для $n=1$, то достаточно будет показать, что если она верна для системы $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными функциями, то она распространяется и на систему n уравнений с n неизвестными функциями. По предположению, определитель Δ, написанный выше, отличен от нуля при значениях x_i^0, y_i^0; следовательно, его элементы не могут быть все нулями. Мы можем, следовательно, предположить, меняя, если это нужно, порядок индексов, что производная $\left(\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\right)_0$ не равна нулю. Тогда, на основании теоремы, доказанной в § 32, уравнение

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \tag{15}$$

определяет функцию

$$y_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_p; \ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \tag{16}$$

$n+p-1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{n-1}$, которая равна y_n^0 при $x_1 = x_1^0, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1}^0$, и которая непрерывна в окрестности этих значений. Заменяя y_n этой функцией f в первых $n-1$ уравнениях системы (E), мы получаем новую систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$:

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0, \ldots, \Phi_{n-1} = 0, \tag{17}$$

где положено:

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{n-1}) = F_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{n-1}, f);$$

система, образованная уравнениями (16) и (17), очевидно, эквивалентна системе (E). Покажем, что якобиан функций Φ_i

$$\delta = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}$$

отличен от нуля при $x_1 = x_1^0, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1}^0$. В самом деле, этот определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix}$$

есть сумма 2^{n-1} определителей; отбрасывая все те, которые равны нулю, как имеющие пропорциональные элементы двух столбцов, получаем:

$$\delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-2}, y_n)}.$$

С другой стороны, производные $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ даются (§ 37) соотношениями:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{18}$$

Мы можем, следовательно, переписать предшествующее уравнение, помножая обе его части на $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$, следующим образом:

$$\delta\frac{\partial F_n}{\partial y_n}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}\frac{\partial F_n}{\partial y_n}-\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \ldots, y_{n-1})}\frac{\partial F_n}{\partial y_1}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_n)}\frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}; \qquad (19)$$

правая часть полученного соотношения представляет собой разложение Δ по элементам последней строки. Мы имеем, таким образом:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \qquad (20)$$

и следовательно, якобиан δ отличен от нуля при значениях

$$x_1=x_1^0, \ldots, \quad y_{n-1}=y_{n-1}^0.$$

Так как высказанное предложение справедливо для $n-1$ уравнений, то уравнения (17) определяют систему функций $y_1=\varphi_1, \ldots, y_{n-1}=\varphi_{n-1}$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, подставляя которые в функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_{n-1})$, мы получим значение y_n.

39. Вычисление производных Когда функции F_j имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, то неявные функции, определяемые уравнениями (E), также имеют частные производные первого порядка по переменным x_i. Возьмем, например, систему двух уравнений:

$$F_1(x, y, z, u, v)=0, \quad F_2(x, y, z, u, v)=0. \qquad (21)$$

Оставляя y и z постоянными, дадим x приращение Δx, и пусть Δu и Δv — соответствующие приращения функций u и v. Уравнения (21) можно переписать так:

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=0,$$

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=0,$$

причем ε, ε', ε'', η, η', η'' стремятся к нулю, когда Δx, Δu, Δv стремятся к нулю. Отсюда мы находим:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)};$$

когда Δx стремится к нулю, то Δu, Δv, а следовательно, и ε, ε', ε'',

η_1, η_1', η_1'' также стремятся к нулю. Следовательно, отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ имеет предел, другими словами, u имеет частную производную по переменному x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

Таким же образом можно было бы убедиться в том, что отношение $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ стремится к конечному пределу $\frac{\partial v}{\partial x}$, который дается аналогичной формулой; на практике эти производные находятся из уравнений:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial_2 F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

и таким же образом мы найдем частные производные по переменным y и z.

Последовательные производные вычисляются так же, как в случае одного уравнения. Следует еще заметить, что, когда имеется несколько независимых переменных, удобно вычислить полные диференциалы, чтобы вывести отсюда все частные производные одного и того же порядка. Предположим, например, что мы имеем две функции u и v трех переменных x, y, z, определенные соотношениями (21); полные диференциалы первого порядка du и dv даются уравнениями:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz+\frac{\partial F_1}{\partial u}du+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz+\frac{\partial F_2}{\partial u}du+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv=0.$$

Далее, мы получим d^2u и d^2v из уравнений:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_1}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_1}{\partial v}d^2v=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_2}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_2}{\partial v}d^2v=0$$

и т. д. В уравнениях, определяющих d^nu и d^nv, определитель, составленный из коэфициентов при этих диференциалах, равен, каково бы ни было n, якобиану $\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}$, который, по предположению, отличен от нуля.

40. Обращение функций. Пусть будут $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ n функций от n независимых переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; предположим, что якобиан

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

не равен тождественно нулю. Тогда n уравнений

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad u_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \quad u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (22)$$

определяют обратно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$. В самом деле, достаточно рассмотреть систему значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, для которой определитель Якоби не равен нулю; если $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ будут обозначать соответствующие значения $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то по основной теореме существует система функций:

$$x_1 = \psi_1(u_1, \ldots, u_n), \quad x_2 = \psi_2(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n = \psi_n(u_1, \ldots, u_n),$$

удовлетворяющих соотношениям (22) и принимающих значения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ при $u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0, \ldots, u_n = u_n^0$. Функции ψ называются *обратными* относительно функции φ. Нахождение этих функций называется *обращением* или *инверсией*.

Для вычисления производных от обратных функций достаточно приложить основные правила. Так, в случае двух функций

$$u = f(x, y), \qquad v = \varphi(x, y),$$

рассматривая обратно u и v как независимые переменные, а x и y как их функции, мы из двух соотношений

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

получим:

$$dx = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}du - \frac{\partial f}{\partial y}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad dy = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}du + \frac{\partial f}{\partial x}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Отсюда имеем формулы:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

41. Касательная к кривой в пространстве. Рассмотрим кривую C, представленную системою двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Пусть будут x_0, y_0, z_0 координаты точки M_0 этой кривой; предположим, что по крайней мере один из трех определителей Якоби,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

будет отличен от нуля, если заменим в нем x, y, z через x_0, y_0, z_0. Для определенности положим, что $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}$ не равен нулю для координат точки M_0; тогда из уравнений (23) можно вывести:

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x),$$

где φ и ψ суть непрерывные функции от x, обращающиеся соответственно в y_0 и z_0 при $x = x_0$. В этом случае касательная к кривой C в точке M_0 представится двумя уравнениями:

$$\frac{X - x_0}{1} = \frac{Y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{Z - z_0}{\psi'(x_0)},$$

где производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ определятся из соотношений:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x) = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x) = 0.$$

Положим в них $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и заменим $\varphi'(x_0)$ и $\psi'(x_0)$ соответственно через $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ и $\frac{Z - z_0}{X - x_0}$. Тогда уравнения касательной можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0,\\
\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

или

$$\frac{X - x_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right]_0} = \frac{Y - y_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\right]_0} = \frac{Z - z_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right]_0}.$$

Легко дать геометрическое истолкование полученного результата. Уравнения (14) представляют соответственно две поверхности S_1 и S_2, линия пересечения которых есть кривая C; уравнения (24) представляют две касательные плоскости к этим двум поверхностям в точке M_0, так что касательная к кривой C есть прямая пересечения этих двух касательных плоскостей.

Формулы теряют смысл, когда три написанных выше определителя Якоби обращаются одновременно в нуль для координат x_0, y_0, z_0. Если это имеет место, то два уравнения (24) приводятся к одному, и поверхности S_1, S_2 касаются друг друга в точке M_0. Как мы увидим ниже, в этом случае линия пересечения этих двух поверхностей слагается, вообще, из нескольких раздельных ветвей, проходящих через точку M_0.

II. ОСОБЫЕ ТОЧКИ. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ.

42. Особые точки. Если одновременно $\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=0$, то точка (x_0, y_0) есть *особая точка* кривой, представляемой уравнением $F(x, y)=0$. Предположим, что три частных производных второго порядка от F не равны нулю при $x=x_0$, $y=y_0$, и что эти производные вместе с производными третьего порядка непрерывны вблизи точки (x_0, y_0). В этом случае уравнение кривой C можно представить в виде:

$$0=F(x, y)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0),\\ y_0+\theta(y-y_0)}} \tag{25}$$

причем в производных третьего порядка x и y должны быть заменены соответственно через $x_0+\theta(x-x_0)$ и $y_0+\theta(y-y_0)$. Мы можем предположить, что производная $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}$ не равна нулю, так как достаточно изменить направление осей координат, чтобы притти к этому случаю. Положив в уравнении (25) $y-y_0=t(x-x_0)$ и разделив результат на $(x-x_0)^2$, получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}+t^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}+(x-x_0)P(x-x_0,\ t)=0, \tag{26}$$

где $P(x-x_0, t)$ обозначает функцию, которая остается конечною, когда x стремится к x_0. Пусть будут t_1 и t_2 два корня уравнения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}+t^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}=0.$$

Если эти корни действительны, т. е. если

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2>\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2},$$

то уравнение (26) можно также представить в виде:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(t-t_1)(t-t_2)+(x-x_0)P=0.$$

При $x=x_0$ это уравнение имеет два различных корня $t=t_1$, $t=t_2$. Если x стремится к x_0, то уравнение имеет два корня, стремящихся соответственно к t_1 и t_2; это можно доказать, повторив те рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве существования неявных функций. Полагая, например, $t=t_1+u$, мы получим уравнение между x и u:

$$u(t_1-t_2+u)+(x-x_0)Q(x, u)=0, \tag{27}$$

причем $Q(x, u)$ остается конечным, когда x стремится к x_0, а u — к нулю. Предположим для определенности, что $t_1-t_2>0$, и обозначим через M верхнюю границу абсолютной величины $Q(x, u)$ и через m — нижнюю границу количества $t_1 - t_2 + u$ при изменениях x от $x_0 - h$ до $x_0 + h$ и u от $-h$ до $+h$, где h есть положительное число, меньшее $t_1 - t_2$. Пусть будет ε положительное число, меньшее h, и η — другое положительное число, удовлетворяющее неравенствам:

$$\eta < h, \quad \eta < \frac{m}{M}\varepsilon.$$

Если в уравнении (27) мы дадим переменному x такое значение, чтобы $|x - x_0|$ было меньше η, то результаты подстановки $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ вместо u получатся с разными знаками; следовательно, это уравнение имеет корень, стремящийся к нулю, когда x стремится к x_0, и следовательно, уравнение (25) имеет корнем выражение вида:

$$y = y_0 + (x - x_0)(t_1 + \alpha),$$

причем α бесконечно мало вместе с $x - x_0$. Это показывает, что через точку (x_0, y_0) проходит ветвь кривой C, касающаяся прямой

$$y - y_0 = t_1(x - x_0).$$

Таким же образом мы можем убедиться, что через точку (x_0, y_0) проходит другая ветвь кривой, касающаяся прямой $y - y_0 = t_2(x - x_0)$. Точка M_0 есть *двойная точка с различными касательными**, и мы получим уравнение двух касательных в этой двойной точке, приравняв нулю совокупность членов второй степени по $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ в уравнении (25).

Если $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} < 0$, то точка (x_0, y_0) есть *двойная изолированная точка*. Внутри круга достаточно малого радиуса с центром в точке M_0 левая часть $F(x, y)$ уравнения обращается в нуль только для самой точки M_0. В самом деле, приняв за координаты какой-нибудь точки (x, y), лежащей вблизи M_0, выражения

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi,$$

получим:

$$F(x, y) = \frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi + \rho L\right],$$

причем L имеем конечное значение, когда ρ стремится к нулю. Пусть будет H верхняя граница абсолютной величины L, когда ρ остается

* Не может существовать более двух ветвей кривой, проходящих через двойную точку. В самом деле, предположим, что уравнение кривой имеет вид (25) и коэфициент $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}$ не равен нулю; это условие всегда можно считать выполненным путем соответствующего выбора осей координат. Если бы это уравнение имело три корня, y_1, y_2, y_3, стремящихся к нулю вместе с x, то уравнение $F'_y(x, y) = 0$, в силу теоремы Ролля, имело бы по крайней мере два корня, также стремящихся к нулю. Но это уравнение имеет вид $2bx + 2cy + \varphi(x, y) = 0$, причем $\varphi(x, y)$ и $\varphi'_y(x, y)$ обращаются в нуль при $x = y = 0$. Следовательно, это уравнение имеет один и только один корень, стремящийся к нулю вместе с x (§ 32).

меньшим некоторого положительного числа r. При изменении φ от 0 до 2π трехчлен

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi$$

сохраняет постоянный знак, так как он имеет мнимые корни; пусть будет m нижняя граница его абсолютной величины. Очевидно, что ни для какой точки, взятой внутри круга радиуса $\rho < \frac{m}{H}$, коэфициент при ρ^2 не может обратиться в нуль; таким образом внутри этого круга уравнение $F(x, y) = 0$ не имеет никакого решения, кроме $\rho = 0$, т. е. $x = x_0$, $y = y_0$.

Если $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} = 0$, то обе касательные в двойной точке приходят в совпадение, и в общем случае существуют две ветви кривой, касающиеся одной и той же прямой и образующие точку возврата. Полный разбор этого случая требует очень тонкого исследования, которое мы выполним ниже. Заметим только, что разнообразие возможных случаев вида кривой здесь гораздо шире, чем в двух ранее исследованных случаях, как это видно из следующих примеров.

Кривая $y^2 = x^3$ имеет в начале координат точку возврата *первого вида*, с двумя ветвями, касающимися оси x и расположенными направо от Oy по обе стороны касательной. Кривая $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0$ имеет в начале координат точку возврата *второго вида*; две ветви кривой, касающиеся оси x, расположены здесь по одну сторону касательной. В самом деле, уравнение кривой можно представить в виде:

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

и при очень малом x оба значения y имеют один и тот же знак, но они действительны только в том случае, если x положительно. Кривая

$$x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2 = 0$$

состоит из двух ветвей, не имеющих никаких особенностей; обе ветви касаются в начале координат оси x. В самом деле, из этого уравнении получим:

$$y = \frac{3x^2 \pm x^2\sqrt{8 - x^2}}{1 + x^2};$$

ветви кривой соответствуют двум знакам перед корнем: они не имеют в начале координат никаких особенностей.

Может также случиться, что кривая состоит из двух сливающихся ветвей, как, например, кривая, представляемая уравнением

$$F(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 = 0;$$

при передвижении точки (x, y) по плоскости левая часть уравнения обращается в нуль, не меняя знака.

Наконец, точка (x_0, y_0) может быть двойною изолированною точкою; так будет у кривой $y^2+x^4+y^4=0$, у которой начало координат есть двойная изолированная точка.

43. Конические точки поверхности. Точно так же точка M_0 поверхности S, представляемой уравнением $F(x, y, z)=0$, называется особою точкою этой поверхности, если координаты x_0, y_0, z_0 этой точки обращают в нуль три производных первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z_0}=0.$$

В этом случае выведенное выше (§ 35) уравнение касательной плоскости обращается в тождество. Если в точке M_0 все шесть частных производных второго порядка не будут одновременно равны нулю, то место касательных ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M_0, будет конусом второго порядка. В самом деле, пусть будут

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

уравнения кривой C, лежащей на поверхности S. Так как функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют соотношению $F(x, y, z)=0$, то между диференциалами первого и второго порядков существуют соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0.$$

При $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ первое соотношение обращается в тождество, а второе принимает вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}dx^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}dy^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2}dz^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}dx\,dy+2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial z_0}dy\,dz+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}dx\,dz=0.$$

Мы получим место касательных, исключив dx, dy, dz из этого уравнения и из уравнений касательной

$$\frac{X-x_0}{dx}=\frac{Y-y_0}{dy}=\frac{Z-z_0}{dz};$$

это дает уравнение конуса (T) второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(X-x_0)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(Y-y_0)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2}(Z-z_0)^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}(X-x_0)(Y-y_0)+$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial z_0}(Y-y_0)(Z-z_0)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}(X-x_0)(Z-z_0)=0. \quad (28)$$

Прилагая к $F(x, y, z)$ общую формулу Тейлора и продолжая разложение до членов третьего порядка, мы можем представить уравнение поверхности S в виде:

$$0 = F(x, y, z) = \frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(2)}+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0)\\ y_0+\theta(y-y_0)\\ z_0+\theta(z-z_0)}}, \quad (29)$$

причем в производных третьего порядка x_0, y_0, z_0 должны быть заменены через $x_0+\theta(x-x_0)$, $y_0+\theta(y-y_0)$, $z_0+\theta(z-z_0)$. Мы получим уравнение конуса (T), взяв в уравнении (29) только члены второй степени по $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$.

Предположим сначала, что уравнение (28) представляет действительный конус. Пересечем поверхность S и конус (T) плоскостью P, проходящею через две различных образующих G, G' этого конуса. Чтобы получить уравнение линии пересечения поверхности S с этою плоскостью P, мы возьмем оси координат так, чтобы плоскость P сделалась параллельною плоскости xy; тогда для получения уравнения линии пересечения достаточно положить в уравнении (29) $z=z_0$. Мы видим, что для этой кривой точка M_0 есть двойная точка с действительными касательными, и линия пересечения состоит из двух ветвей кривой, касающихся соответственно двух образующих G, G'. Вблизи точки M_0 форма поверхности аналогична форме, которую имеют вблизи вершины две полости конуса второго порядка; отсюда происходит название *конической точки*, которое дают точке M_0.

Если уравнение (28) представляет мнимый конус, то точка M_0 есть особая изолированная точка поверхности S. Приняв эту точку за центр, можно из нее описать сферу настолько малого радиуса, что внутри этой сферы уравнение $F(x, y, z)=0$ не будет иметь никакого другого решения, кроме $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Действительно, пусть будет M точка, лежащая вблизи точки M_0, ρ — расстояние MM_0, α, β, γ — направляющие косинусы прямой MM_0. Если мы положим

$$x=x_0+\rho\alpha, \quad y=y_0+\rho\beta, \quad z=z_0+\rho\gamma,$$

то $F(x, y, z)$ обратится в

$$F(x, y, z)=\frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\beta^2+\ldots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}\alpha\gamma+\rho L\right],$$

причем множитель L сохраняет конечное значение, когда ρ стремится к нулю. Так как уравнение (28) представляет мнимый конус, то многочлен

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\ldots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}\alpha\gamma$$

не может обратиться в нуль, когда точка α, β, γ описывает сферу

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Обозначим через m нижнюю границу абсолютных значений этого многочлена. Пусть будет, с другой стороны, H верхний предел абсолютного значения функции L вблизи точки M_0. Если из точки M_0 мы опишем сферу радиусом, меньшим $\frac{m}{H}$, то ясно, что внутри этой сферы коэфициент при ρ^2 в выражении $F(x, y, z)$ не может обратиться в нуль. Таким образом уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

не имеет другого решения, кроме $\rho = 0$.

Если уравнение (28) представляет совокупность двух действительных и различных плоскостей, то через точку M_0 проходят две полости поверхности, из которых каждая касается одной из этих плоскостей. Некоторые поверхности имеют линии, состоящие из двойных точек, в каждой из которых конус касательных распадается на две плоскости. Такая линия есть двойная линия поверхности, по которой пересекаются две различных полости поверхности. Например, окружность, представляемая двумя уравнениями $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, есть двойная линия поверхности

$$z^4 + 2z^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0.$$

Если уравнение (28) представляет совокупность двух мнимых сопряженных плоскостей или двойную действительную плоскость, то в каждом частном случае требуется особое исследование для изучения вида поверхности вблизи точки M_0. Подобные исследования встречаются при изучении наибольших и наименьших значений функций.

44. Максимумы и минимумы функций одного переменного. Пусть будет $f(x)$ функция, непрерывная внутри промежутка (a, b), и c — точка в этом промежутке. Функция $f(x)$ имеет максимум или минимум при $x = c$, если можно найти такое достаточно малое положительное число η, чтобы разность $f(c + h) - f(c)$, обращающаяся в нуль при $h = 0$, сохраняла постоянный знак при всех других значениях h, заключающихся между $-\eta$ и $+\eta$. Если эта разность положительна, то значение функции $f(x)$ при $x = c$ будет меньше, чем при всех значениях x, близких к c; следовательно, $f(x)$ проходит при $x = c$ через минимум. Напротив, если разность $f(c + h) - f(c)$ отрицательна, то при $x = c$ функция имеет максимум.

Если функция $f(x)$ имеет производную при значении $x = c$, то эта производная должна быть равна нулю. В самом деле, оба отношения

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}, \quad \frac{f(c - h) - f(c)}{-h},$$

имеющие один и тот же предел $f'(c)$, при приближении h к нулю будут иметь различные знаки; поэтому их общий предел $f'(c)$ должен быть равен нулю.

Обратно, пусть будет c корень уравнения $f'(c) = 0$, заключающийся между a и b. Предположим для общности, что первою производною от $f(x)$, не равною нулю при $x = c$, будет производная n-го порядка, и что эта производная непрерывна вблизи значения c. Останавливаясь на члене n-й степени, мы получим в этом случае по общей формуле Тейлора:

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(c+\theta h),$$

или

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}[f^{(n)}(c)+\varepsilon],$$

причем ε бесконечно мало вместе с h. Пусть будет η такое положительное число, чтобы при изменении x от $c-\eta$ до $c+\eta$ абсолютная величина ε была меньше $|f^{(n)}(c)|$; при этих значениях x, $f^{(n)}(c)+\varepsilon$ будет иметь тот же знак, как и $f^{(n)}(c)$, и следовательно, $f(c+h)-f(c)$ будет иметь знак $h^n f^{(n)}(c)$.

Если n — число нечетное, то мы видим, что эта разность меняет знак вместе с h: при $x=c$ нет ни максимума, ни минимума. Если n — четное, то $f(c+h)-f(c)$ как при положительном, так и при отрицательном h имеет знак $f^{(n)}(c)$: функция имеет минимум, если $f^{(n)}(c)$ положительно, и максимум, если $f^{(n)}(c)$ отрицательно. Таким образом для того чтобы функция имела при $x=c$ максимум или минимум, необходимо и достаточно, чтобы $f'(c)$ было равно нулю и чтобы первая производная, не обращающаяся в нуль при $x=c$, была *четного порядка*.

Геометрически это значит, что касательная к кривой $y=f(x)$ в точке A с абсциссою c должна быть параллельна оси Ox, и кроме того, точка A не должна быть точкою перегиба.

45. **Функции двух переменных.** Пусть будет $z=f(x, y)$ функция двух переменных x, y, непрерывная, когда точка M с координатами (x, y) остается внутри площади Ω, ограниченной контуром C. Эта функция $f(x, y)$ имеет максимум или минимум в точке (x_0, y_0) площади Ω, если можно найти такое достаточно малое положительное число η, чтобы разность

$$\Delta=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0),$$

обращающаяся в нуль при $h=k=0$, сохраняла постоянный знак при всех других значениях h и k, меньших η по абсолютной величине. Если мы дадим на время переменному y постоянное значение y_0, то z сделается функциею одного переменного x, и, на основании предыдущего (§ 44), разность

$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)$$

может сохранять постоянный знак при малых значениях h только в том случае, если $\frac{\partial f}{\partial x}$ равно нулю при $x=x_0$, $y=y_0$; подобным же образом мы докажем, что эти значения должны также обращать в нуль $\frac{\partial f}{\partial y}$. Таким образом те системы значений x, y, которые дают для $f(x, y$

максимум или минимум, должны быть разыскиваемы среди решений совместных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Пусть будет $x=x_0$, $y=y_0$ одно из решений этих двух уравнений. Мы предположим, что частные производные второго порядка от $f(\cdot, y)$ непрерывны вблизи значений x_0, y_0 и не равны нулю при $x=x_0$, $y=y_0$, и что существуют производные третьего порядка. Формула Тейлора дает:

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0, y_0)= \\ &= \frac{1}{1\cdot 2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right)+ \\ &+\frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{(3)}_{\substack{x_0+\theta h\\ y_0+\theta k}}\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

При значениях h и k, близких к нулю, знак правой части, очевидно, зависит от знака трехчлена

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

и можно ожидать, что исследование знака этого трехчлена будет здесь играть главную роль.

Для того чтобы при $x=x_0$, $y=y_0$ функция $f(x, y)$ имела максимум или минимум, необходимо и достаточно, чтобы разность Δ сохраняла постоянный знак, когда точка $(x_0+h,\ y_0+k)$ остается внутри достаточно малого квадрата с центром в точке (x_0, y_0). Ясно, что разность Δ будет также сохранять постоянный знак, если точка $(x_0+h,$ $y_0+k)$ будет оставаться внутри круга с достаточно малым радиусом и с центром в (x_0, y_0), так как можно заменить квадрат вписанным кругом, и обратно. Пусть будет C круг радиуса r с центром в точке (x_0, y_0); мы получим все точки внутри этого круга, положив

$$h=\rho\cos\varphi, \quad k=\rho\sin\varphi$$

и изменяя φ от 0 до 2π, а ρ от $-r$ до $+r$. Можно было бы даже ограничиться для ρ и положительными значениями, но для последующего выгоднее не вводить этого ограничения. Сделав в выражении Δ эту подстановку, найдем:

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}(A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi)+\frac{\rho^3}{6}L,$$

причем

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}, \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

и L есть функция, остающаяся конечною вблизи точки (x_0, y_0), которую мы не будем писать в раскрытом виде. Здесь должно различать несколько случаев в зависимости от знака выражения B^2-AC.

Первый случай. Пусть $B^2-AC>0$. Уравнение

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi=0$$

имеет для $\operatorname{tg}\varphi$ два действительных корня, и левая часть есть разность двух квадратов, так что можно написать:

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left[\alpha(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2-\beta(a'\cos\varphi+b'\sin\varphi)^2\right]+\frac{\rho^3}{6}L,$$

где

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad ab'-ba'\neq 0.$$

Если мы дадим углу φ такое значение, чтобы было

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=0,$$

то, при бесконечно малых значениях ρ, Δ будет отрицательно; напротив, если мы возьмем для φ такой угол, чтобы было $a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=0$, то, при бесконечно малых значениях ρ, Δ будет положительно. Таким образом нельзя найти такого числа r, чтобы разность Δ сохраняла постоянный знак при всяком угле φ, если абсолютная величина ρ будет меньше r. Функция $f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ не имеет ни максимума, ни минимума.

Второй случай. Пусть $B^2-AC<0$. Трехчлен

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi$$

не обращается в нуль при изменении φ от 0 до 2π. Пусть будет m нижний предел его абсолютной величины; пусть будет также H верхний предел функции L в некотором круге с радиусом R и с центром (x_0, y_0). Обозначим через r положительное число, меньшее R и $\frac{3m}{H}$; внутри круга радиуса r разность Δ будет иметь знак коэфициента при ρ^2, т. е. знак A или C. Следовательно, при $x=x_0$, $y=y_0$ функция $f(x, y)$ будет иметь максимум или минимум.

Таким образом, если в точке x_0, y_0 мы имеем:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f\,\partial^2 f}{\partial x_0^2\,\partial y_0^2}>0,$$

то нет ни максимума, ни минимума. Если

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f\,\partial^2 f}{\partial x_0^2\,\partial y_0^2}<0,$$

то $f(x, y)$ будет иметь максимум или минимум в зависимости от знака производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$. Если эти производные отрицательны, то будет максимум; если они положительны, — то минимум.

46. Исследование сомнительного случая. Предыдущее исследование не охватывает того случая, когда $B^2-AC=0$. Геометрически ясно, в чем состоит трудность задачи в этом особом случае. Пусть будет S

поверхность, представляемая уравнением $z=f(x, y)$. Если функция $f(x, y)$ имеет максимум или минимум в точке (x_0, y_0), вблизи которой функция и ее производные непрерывны, то мы должны иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0;$$

отсюда следует, что касательная плоскость к поверхности S в точке M^0 с координатами (x_0, y_0, z_0) должна быть параллельна плоскости xy. Для того чтобы эта точка соответствовала максимуму или минимуму, необходимо, кроме того, чтобы вблизи точки M_0 поверхность S была расположена вся по одну сторону касательной плоскости; таким образом вопрос приводится к исследованию положения поверхности относительно ее касательной плоскости вблизи точки прикосновения.

Предположим, что мы перенесли начало координат в точку прикосновения, и что касательною плоскостью служит плоскость xy; тогда уравнение поверхности примет вид:

$$z=ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x^3+3\beta x^2y+3\gamma xy^2+\delta y^3, \tag{31}$$

где a, b, c — постоянные, и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — функции от x, y, остающиеся конечными, когда x и y стремятся к нулю. Это уравнение, в сущности, тождественно с уравнением (25), в котором x_0, y_0 заменены нулями, а h и k — переменными x и y.

Чтобы узнать, расположена ли поверхность S вблизи начала координат вся по одну сторону плоскости xy, необходимо исследовать линию пересечения этой поверхности плоскостью xy. Но эта линия пересечения представлена уравнением

$$ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x^3+\ldots=0 \tag{32}$$

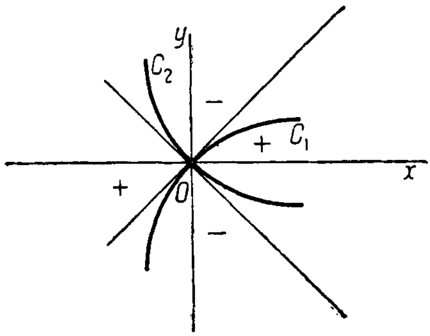
и имеет в начале координат двойную точку. Если b^2-ac отрицательно, то начало есть двойная изолированная точка (§ 42); в этом случае уравнение (25) не имеет иного решения, кроме $x=y=0$, пока точка (x, y) остается внутри круга C достаточно малого радиуса r с центром в начале координат. Левая часть этого уравнения при перемещении точки (x, y) внутри этого круга сохраняет постоянный знак. Таким образом все точки поверхности S, проектирующиеся внутри круга C, за исключением начала, расположены по одну сторону плоскости xy. В этом случае $f(x, y)$ имеет максимум или минимум. Часть поверхности S вблизи начала координат аналогична части сферы или эллипсоида.

Если $b^2-ac>0$, то линия пересечения поверхности S с касательною плоскостью состоит из двух различных ветвей C_1, C_2 кривой, проходящих через начало; касательные в начале координат к этим двум ветвям представятся уравнением

$$ax^2+2bxy+cy^2=0.$$

Рассмотрим подвижную точку (x, y) вблизи начала координат. Когда эта точка пересекает одну из ветвей кривой C_1, C_2, то левая часть уравнения (25) меняет знак, переходя через нуль. Таким образом, если каждой области плоскости вблизи начала мы припишем знак левой части уравнения (25), то будем иметь распределение знаков, сходное с изображенным на черт. 4. Среди точек поверхности, проектирующихся на плоскость xy внутри круга с центром в начале, как бы ни был мал радиус этого круга, непременно одни точки будут находиться над плоскостью xy, а другие — под плоскостью. Относительно своей касательной плоскости поверхность расположена подобно однополостному гиперболоиду или гиперболическому параболоиду. Функция $f(x, y)$ не имеет в начале координат ни максимума, ни минимума.

В случае $b^2 - ac = 0$ линия пересечения поверхности с касательною плоскостью имеет в начале координат точку возврата; это тот случай, который мы оставили выше без рассмотрения. Если в этом случае линия пересечения состоит из двух различных ветвей, проходящих через начало, то нет ни максимума, ни минимума, так как поверхность опять пересекает свою касательную плоскость. Но, если начало координат есть двойная изолированная точка, или если линия пересечения состоит из двух сливающихся ветвей, то $f(x, y)$ имеет максимум или минимум.



Черт. 4.

Чтобы узнать, какой из двух случаев имеет место, необходимо принимать в соображение значения производных третьего и четвертого порядков, а иногда даже и значения производных высших порядков. Следующее исследование, по большей части достаточное в приложениях, относится только к самому общему случаю. Если $b^2 - ac = 0$, то, продолжая разложение Тейлора до членов четвертого порядка, мы можем представить уравнение поверхности в виде:

$$z = f(x, y) = A(x \sin \omega - y \cos \omega)^2 + \varphi_3(x, y) + \frac{1}{24}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(4)}_{\substack{\theta x \\ \theta y}}. \tag{33}$$

Предположим для определенности, что $A > 0$. Для того чтобы поверхность S вблизи начала координат была расположена вся по одну сторону плоскости xy, необходимо, чтобы все линии пересечения этой поверхности с плоскостями, проходящими через Oz, были расположены вблизи начала с одной и той же стороны плоскости xOy. Но, если мы пересечем поверхность плоскостью

$$y = x \operatorname{tg} \varphi,$$

то получим уравнение кривой пересечения, положив в уравнении (33)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

(осями служат Oz и след секущей плоскости на xOy); это дает:

$$z = A\rho^2 (\cos \varphi \sin \omega - \cos \omega \sin \varphi)^2 + K\rho^3 + L\rho^4,$$

причем K обозначает коэфициент, не зависящий от ρ. Если $\operatorname{tg} \omega \neq \operatorname{tg} \varphi$, то, при бесконечно малых значениях ρ, z будет положительно; следовательно, вблизи начала координат все эти сечения будут расположены над плоскостью xy. Пересечем теперь поверхность плоскостью

$$y = x \operatorname{tg} \omega;$$

если соответствующее значение K не равно нулю, то разложение z будет иметь вид:

$$z = \rho^3 (K + \xi)$$

и будет менять знак вместе с ρ. Отсюда следует, что линия пересечения поверхности с упомянутою плоскостью имеет в начале координат точку перегиба и пересекает плоскость xy; следовательно, функция $f(x, y)$ не имеет в начале координат ни максимума, ни минимума. Это будет в том случае, если кривая пересечения поверхности с ее касательною плоскостью представляет точку возврата первого вида, как, например, у поверхности

$$z = y^2 - x^3.$$

Если для рассматриваемого сечения $K = 0$, то мы продолжим разложение до членов четвертого порядка и получим для z выражение вида:

$$z = \rho^4 (K_1 + \varepsilon'),$$

где K_1 есть постоянное, выражение которого через производные четвертого порядка может быть легко получено. Мы предположим, что K_1 не равно нулю. При бесконечно малых значениях ρ, z имеет знак K_1. Если K_1 отрицательно, то вблизи начала координат линия пересечения расположена под плоскостью xy; для z опять нет ни максимума, ни минимума. Это имеет место, например, для поверхности $z = y^2 - x^4$, линия пересечения которой с плоскостью xy состоит из двух парабол $y = \pm x^2$. Таким образом мы видим, что, если не будет одновременно $K = 0$, $K_1 > 0$, то продолжать вычисления бесполезно; можно утверждать, что вблизи начала координат поверхность пересекает свою касательную плоскость.

Если одновременно $K = 0$, $K_1 > 0$, то все кривые сечения поверхности плоскостями, проходящими через Oz, будут вблизи начала координат расположены над плоскостью xy. Но этого еще недостаточно, чтобы можно было утверждать, что поверхность не пересекает своей касательной плоскости, как это показывает пример поверхности

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

пересекающей свою касательную плоскость по двум параболам, из которых одна лежит внутри другой. Для того чтобы поверхность не пересекала своей касательной плоскости, необходимо еще следующее условие: если мы пересечем эту поверхность произвольным цилиндром, проходящим через Oz, с образующими, параллельными Oz, то кривая пересечения должна быть расположена над плоскостью xy. Пусть будет $y = \varphi(x)$ уравнение следа этого цилиндра на плоскости xy, причем при $x = 0$ функция $\varphi(x)$ равна нулю. Функция $F(x) = f[x, \varphi(x)]$ должна иметь минимум при $x = 0$, каков бы ни был вид функции $\varphi(x)$. Для упрощения вычислений мы предположим, что оси координат выбраны таким образом, что уравнение поверхности имеет вид:

$$z = Ay^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots,$$

где A — положительно. При этой системе осей мы будем иметь для начала координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} > 0.$$

Производные от $F(x)$ будут иметь следующие выражения:

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(x),$$

$$F''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \varphi'^2(x) + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi''(x).$$

$$F'''(x) = \frac{\partial^3 f}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} \varphi'(x) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \varphi'^2(x) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \varphi'^3(x) +$$
$$+ 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varphi''(x) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \varphi'\varphi'' + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'''(x).$$

$$F^{IV}(x) = \frac{\partial^4 f}{\partial x} + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\varphi'(x) + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\varphi'^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\varphi'^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\varphi'^4 +$$
$$+ 6\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\varphi'' + 12\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\varphi'\varphi'' + 6\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^2\varphi'' +$$
$$+ 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\varphi''' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4\varphi'\varphi''' + 3\varphi''^2) + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi^{IV}(x).$$

При $x = y = 0$ эти формулы дают:

$$F'(0) = 0, \quad F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi'(0)]^2.$$

Если $\varphi'(0)$ не равно нулю, то функция $F(x)$ при $x = 0$ имеет минимум, что можно было предвидеть на основании предыдущего исследования. Если же $\varphi'(0) = 0$, то

$$F'(0) = 0, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}$$
$$F^{IV}(0) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4} + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2 \partial y_0}\varphi''(0) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2.$$

Чтобы $F(x)$ имела минимум, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}$ должно быть равно нулю, и кроме того трехчлен второй степени по $\varphi''(0)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4} + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2 \partial y_0}\varphi''(0) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2$$

должен быть положительным при всяком значении $\varphi''(0)$. Легко показать, что эти условия не удовлетворяются для только что рассмотренной функции $z = y^2 - 3x^2y + 2x^4$, тогда как они удовлетворяются для функции $z = y^2 + x^4$. И действительно, эта последняя поверхность вся расположена над плоскостью xy.

Не будем продолжать этого исследования, которое для полной строгости потребовало бы очень тонких соображений, поэтому отсылаем читателя, желающего подробнее ознакомиться с этим предметом, к основному мемуару Людвига Шеффера (Ludwig Scheffer), Mathematische Annalen, т. XXXV.

47. Функции трех переменных. Пусть будет $u = f(x, y, z)$ непрерывная функция трех переменных x, y, z. Эта функция $f(x, y, z)$ имеет максимум или минимум при системе значений x_0, y_0, z_0, если можно найти такое достаточно малое положительное число η, чтобы разность

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0),$$

обращающаяся в нуль при $h = k = l = 0$, сохраняла постоянный знак при всех других значениях h, k, l, меньших η по абсолютной величине. Если мы предположим, что только одно из трех переменных x, y, z получило приращение, а два других переменных будем временно рассматривать как постоянные, то найдем попрежнему, что u не может иметь ни максимума, ни минимума, если одновременно не будет

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0,$$

причем, разумеется, необходимо, чтобы эти производные были непрерывны вблизи значений x_0, y_0, z_0. Предположим, что мы нашли систему решений x_0, y_0, z_0 этих трех совместных уравнений. Пусть будет M_0 точка пространства с координатами (x_0, y_0, z_0). Функция f имеет максимум или минимум, если можно найти такую сферу с центром в M_0, чтобы разность $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ сохраняла постоянный знак для всех точек x, y, z внутри этой сферы, кроме точки M_0. Представим координаты какой-нибудь точки, близкой к M_0, через

$$x = x_0 + \rho\alpha, \quad y = y_0 + \rho\beta, \quad z = z_0 + \rho\gamma,$$

где α, β, γ связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, и заменим в разложении $f(x, y, z)$ по формуле Тейлора разности $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ через $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$. Мы получим:

$$\Delta = \rho^2 [\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho L],$$

где $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ обозначает квадратичную форму по α, β, γ, коэфициенты которой суть производные второго порядка от $f(x, y, z)$, и L — функцию, остающуюся конечною вблизи точки M_0. Устраняя тот частный случай, когда дискриминант квадратичной формы $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ равен нулю, мы можем представить эту форму в виде суммы квадратов трех различных линейных функций от α, β, γ, умноженных на постоянные множители. Таким образом мы будем иметь:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = aP^2 + a'P'^2 + a''P''^2.$$

Если коэфициенты a, a', a'' имеют одинаковые знаки, то квадратичная форма $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ остается по абсолютной величине большею некоторого минимума, когда точка α, β, γ описывает сферу

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

и следовательно, Δ сохраняет знак коэфициентов a, a', a'', если ρ меньше некоторого предела. Таким образом функция $f(x, y, z)$ имеет максимум или минимум.

Если коэфициенты a, a', a'' не имеют одинаковых знаков, то нет ни максимума, ни минимума. Предположим, например, $a > 0$, $a' < 0$; возьмем для α, β, γ значения, удовлетворяющие соотношениям $P' = 0$, $P'' = 0$. Эти значения не обращают в нуль P, и, при достаточно малых значениях ρ, Δ будет положительно. Напротив, если мы возьмем для α, β, γ значения, удовлетворяющие соотношениям $P = 0$, $P'' = 0$, то, при малых значениях ρ, Δ будет отрицательно.

Изложенный метод исследования остается одним и тем же при всяком числе независимых переменных, и главную роль в нем всегда играет изучение некоторой квадратичной формы. Можно заметить, что в случае функции трех независимых переменных $u = f(x, y, z)$ задача приводится к изучению характера поверхности вблизи ее особой точки. В самом деле, рассмотрим поверхность Σ, представляемую уравнением:

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Эта поверхность, очевидно, проходит через точку M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0), и если функция $f(x, y, z)$ имеет максимум или минимум, то точка M_0 есть особая точка поверхности Σ. Если конус касательных в M_0 — мнимый, то, как мы видели, $F(x, y, z)$ сохраняет постоянный знак внутри сферы достаточно малого радиуса с центром M_0; следовательно, $f(x, y, z)$ действительно имеет максимум или минимум. Но, если конус касательных — действительный или распадается на две действительных различных плоскости, то существует несколько полостей поверхности, проходящих через точку M_0, и $F(x, y, z)$ меняет знак, когда точка (x, y, z) при своем движении пересекает одну из этих полостей.

48. Расстояние точки от поверхности. Пусть требуется найти наибольшие и наименьшие значения расстояния от данной точки (a, b, c) до поверхности S, представляемой уравнением $F(x, y, z) = 0$. Квадрат этого расстояния

$$u = d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

есть функция только двух независимых переменных, например x и y, так как мы можем рассматривать z как функцию от x и y, определяемую уравнением $F = 0$. Если u имеет максимум или минимум для точки (x, y, z) поверхности, то для координат этой точки должно быть:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = (x-a) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = (y-b) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

С другой стороны, из уравнения $F = 0$ имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

и предыдущие соотношения обращаются в

$$\frac{x-a}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y-b}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z-c}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Эти уравнения показывают, что нормаль к поверхности S в точке (x, y, z) проходит через точку (a, b, c). Оставляя в стороне особые точки поверхности S, мы видим, таким образом, что искомые точки суть основания нормалей, опущенных из точки (a, b, c) на поверхности S. Чтобы решить, действительно ли одна из этих точек соответствует максимуму или минимуму, мы примем эту точку за начало координат, а касательную плоскость в этой точке — за плоскость xy, так что данная точка (a, b, c) будет лежать на оси Oz. Тогда наша функция примет вид:

$$u = x^2 + y^2 + (z-c)^2,$$

где z есть функция от x, y, равная нулю вместе со своими производными первого порядка при $x = y = 0$. Обозначая через r, s, t частные производные второго порядка от z, мы будем иметь для начала координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(1 - cr), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2cs, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(1 - ct),$$

и задача приводится к исследованию знака многочлена

$$\Delta(c) = c^2 s^2 - (1 - cr)(1 - ct) = c^2(s^2 - rt) + (r + t)c - 1.$$

Вследствие тождества $(r+t)^2 + 4(s^2 - rt) = 4s^2 + (r-t)^2$ корни уравнения $\Delta(c) = 0$ всегда действительны. В зависимости от знака $s^2 - rt$ нам надо будет различать здесь несколько случаев.

Первый случай. Пусть $s^2 - rt < 0$. Уравнение $\Delta(c) = 0$ имеет два корня c_1 и c_2 с одинаковыми знаками, и мы можем написать $\Delta(c) = (s^2 - rt)(c - c_1)(c - c_2)$. Отметим на оси z две точки A_1, A_2 с кординатами c_1, c_2; эти две точки расположены по одну сторону от начала, и предполагая r и t положительными, что всегда возможно сделать, мы найдем, что обе точки лежат на положительной части оси Oz. Если данная точка $A(0, 0, c)$ находится вне отрезка A_1A_2, то $\Delta(c)$ отрицательно, и расстояние OA будет максимум или минимум Чтобы узнать, какой из двух случаев имеет место, необходимо обратиться к знаку $1-cr$. Этот коэфициент обращается в нуль только при значении $c=\frac{1}{r}$, заключающемся между c_1 и c_2, так как $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{s^2}{r^2}$. Но, при $c=0$, $1-cr$ положительно; следовательно, $1-cr$ положительно, если точка A находится по одну сторону с началом относительно отрезка A_1A_2, и расстояние OA будет минимум. Напротив, OA будет максимум, если точка A расположена по другую сторону, чем начало координат, относительно отрезка A_1A_2. Если точка A находится между точками A_1 и A_2, то расстояние не будет ни максимум, ни минимум. Случай, когда точка A совпадает с A_1 или с A_2 — сомнительный и требует особого выяснения.

Второй случай. Пусть $s^2-rt>0$. Из корней c_1 и c_2 уравнения $\Delta(c)=0$ один будет положительным, другой — отрицательным, и точки A_1, A_2 будут расположены на оси Oz по разные стороны от начала координат. Если точка A не лежит между A_1 и A_2, то $\Delta(c)$ положительно, и нет ни максимума, ни минимума. Если же точка A лежит между A_1 и A_2, то $\Delta(c)$ отрицательно, $1-cr$ положительно, и следовательно, расстояние OA будет минимум.

Третий случай. Пусть $s^2-rt=0$. Тогда $\Delta(c)=(r+t)(c-c_1)$. Подобно предыдущему мы найдем, что расстояние OA будет минимум, если точка A расположена по одну сторону с началом относительно точки A_1 с координатами $(0, 0, c_1)$, и не будет ни максимума, ни минимума, если точка A_1 находится между точкою A и началом координат.

Точки A_1 и A_2 имеют основное значение в изучении кривизны; это — *главные центры кривизны* поверхности S в точке O.

49. Максимум и минимум неявных функций. При изыскании максимумов или минимумов функций многих переменных часто случается, что эти переменные связаны одним или многими соотношениями. Пусть будет, например, $\omega=f(x, y, z, u)$ функция четырех переменных x, y, z, u, которые должны удовлетворять двум соотношениям:

$$f_1(x, y, z, u)=0, \quad f_2(x, y, z, u)=0.$$

Для определенности мы будем рассматривать x и y как два независимых переменных, а z и u как функции от x и y, определяемые предыдущими соотношениями. Необходимые условия того, чтобы ω было максимум или минимум, будут:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

причем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ определяются из соотношений:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Исключая из этих шести уравнений $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$, мы приходим к следующим двум соотношениям:

$$\frac{D(f, f_1, f_2)}{D(x, z, u)}=0, \quad \frac{D(f, f_1, f_2)}{D(y, z, u)}=0. \tag{34}$$

Эти уравнения вместе с уравнениями $f_1=0$, $f_2=0$ определяют значения x, y, z, u, соответствующие максимуму или минимуму функции ω. Но уравнения (34) показывают, что можно найти для λ и μ такие значения, чтобы было

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial y}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial u}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial u}=0.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Следовательно, условия (34) можно заменить четырьмя уравнениями (35), рассматривая λ и μ как два вспомогательных неизвестных.

Доказательство общей теоремы очевидно, и мы можем дать следующее правило:

Если дана функция

$$f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$$

от n переменных, связанных h различными соотношениями

$$\varphi_1=0, \quad \varphi_2=0, \ldots, \varphi_h=0,$$

то, чтобы найти те значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые обращают эту функцию в максимум или минимум, нужно приравнять нулю частные производные вспомогательной функции

$$f+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_h\varphi_h,$$

рассматривая $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ как постоянные.

50. Общие замечания об абсолютных максимумах и минимумах. Чтобы определить *абсолютные* максимум и минимум непрерывной функции в определенной области, *включая ее границы*; нужно иметь в виду некоторые замечания, в важности которых нетрудно убедиться. Возьмем, например, функцию одного переменного $f(x)$, определенную в интервале (a, b); она может достигнуть максимального значения или минимального значения во внутренней точке C этого интервала, между тем как условие обращения в нуль производной не выполняется. Если производная $f'(x)$ разрывна при $x=c$, то, если она меняет знак, этого достаточно, чтобы функция имела максимум или минимум; так, функция $y=x^{\frac{2}{3}}$ имеет минимум при $x=0$, между тем как производная $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ обращается в бесконечность при этом значении x. Это значение распространяется, очевидно, на функции произвольного числа переменных. Пусть, для определенности, $\omega=f(x, y)$ — функция двух переменных x и y, непрерывная в области D. Ранее данные правила, позволяющие узнать, соответствует ли внутренняя точка (x_0, y_0) этой области максимуму или минимуму, существенно предполагают, что производные f до третьего порядка сохраняют конечные значения вблизи этой точки. Но может случиться, что функция ω достигнет максимума или минимума во внутренней по отношению к области D точке (x_0, y_0), где эти условия уже не будут выполнены, например в точке, в которой производные f'_x, f'_y разрывны*.

Может также случиться, что рассматриваемая функция достигает максимального или минимального значения в точке, принадлежащей границе области; к этому случаю общие правила, очевидно, не могут быть применимы. Допустим, например, что нужно найти кратчайшее расстояние заданной точки P с координатами $(a, 0)$ от окружности C радиуса R, имеющей центр в начале координат. Беря за независимое переменное абсциссу x точки M окружности C, имеем:

$$d^2 = \overline{PM}^2 = R^2 + a^2 - 2ax.$$

Применение общего правила привело бы к разысканию корней уравнения $2a = 0$, что является абсурдом. Мы легко можем объяснить этот результат, если заметим, что по самой природе вопроса переменное x может изменяться лишь от $-R$ до $+R$. Если a положительно, то d^2 имеет минимум при $x = R$ и максимум при $x = -R$.

Таким образом в каждом частном случае представляется необходимым специальное исследование, относящееся к границе области. Но это исследование становится бесполезным во всех случаях, когда рассматриваемая область *не имеет границ*. Мы можем сказать, что всякая замкнутая поверхность является областью двух измерений, не имеющей границ. Для определенности возьмем сферу радиуса R и предположим, что прямоугольные координаты точки этой сферы выражены через географические координаты:

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \quad y = R \sin\theta \sin\varphi, \quad z = R \cos\theta.$$

---

* Пусть, например, $f = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(x, y)$, где функция φ непрерывна, так же как ее частные производные до второго порядка, вблизи начала координат. Так как частные производные f'_x, f'_y разрывны при $x = y = 0$, то мы не можем применить общее правило, чтобы узнать, имеет ли f максимум или минимум в начале координат. Предположим, что в области этой точки

$$\varphi = ax + by + \cdots,$$

причем члены, которые не написаны, по меньшей мере второй степени. Если мы положим, как в § 45, $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$, то получим:

$$f = \rho(1 + a\cos\omega + b\sin\omega) + \rho^2 P(\rho, \omega),$$

где функция P остается конечной в области начала координат.

Мы видим, как и в § 45, что, если $a^2 + b^2 < 1$, коэфициент при ρ остается больше некоторого положительного минимума, и f имеет минимум в начале координат. Если $a^2 + b^2 > 1$, то коэфициент при ρ меняет знак, и функция не имеет в начале координат ни максимума, ни минимума. Случай, когда $a^2 + b^2 = 1$, представляется неопределенным. Интересный пример представляет задача разыскания такой точки M плоскости, сумма $MA + MB + MC$ расстояний которой от трех точек плоскости была бы наименьшею. Если все углы треугольника ABC меньше 120°, то точка M есть точка, из которой все три стороны AB, BC, CA видны под углами, равными 120°; если один из углов, например A, больше 120°, то точка M совпадает с точкой A, и в этой точке частные производные функции разрывны. Нетрудно убедиться в том, что предшествующее правило может быть применено, если взять точку A за начало координат.

Всякой функции, которая имеет единственное значение в каждой точке сферы, соответствует функция $\omega = f(\theta, \varphi)$ двух переменных θ и φ, имеющая период 2π по отношению к каждому из этих переменных.

Если эта функция непрерывна и имеет непрерывные частные производные при всех значениях θ и φ, то ясно, что пары значений θ и φ, при которых эта функция имеет максимум или минимум, принадлежат к числу решений системы уравнений $\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = 0$.

51. Максимальное значение одного определителя. Допустим, что нужно найти максимум абсолютной величины определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots l_n \end{vmatrix}, \tag{36}$$

причем известна сумма квадратов элементов каждой строки. Задача сводится к разысканию максимума или минимума функции Δ от n^2 переменных $a_i, b_i, c_i, \ldots$, связанных n соотношениями

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + \ldots + l_i^2 = H_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{37}$$

где H_i — данные положительные постоянные. Область, определенная указанным образом, не имеет границ, так как мы можем рассматривать $a_i, b_i, c_i, \ldots, l_i$ как координаты точки гиперсферы радиуса $\sqrt{H_i}$ в пространстве n измерений.

Предположим, что Δ разложен по элементам i-й строки:

$$\Delta = A_i a_i + B_i b_i + \ldots + L_i l_i; \tag{38}$$

мы должны искать максимум или минимум функции Δ n переменных $a_i, b_i, c_i, \ldots, l_i$, связанных соотношением (37). Применение способа множителей (§ 49) тотчас же приводит к условиям:

$$\frac{a_i}{A_i} = \frac{b_i}{B_i} = \ldots = \frac{l_i}{L_i}. \tag{39}$$

Пусть $a_k, b_k, c_k, \ldots, l_k$ — элементы другой строки Δ. Мы имеем:

$$A_i a_k + B_i b_k + \ldots + L_i l_k = 0,$$

и следовательно, на основании соотношений (39)

$$a_i a_k + b_i b_k + \ldots + l_i l_k = 0, \tag{40}$$

если $i \neq k$. Отсюда мы заключаем, что *определитель Δ может иметь максимум или минимум только в том случае, если это ортогональный определитель.*

Если условия (40) удовлетворены, то квадрат Δ есть определитель, все элементы которого равны нулю, за исключением элементов главной диагонали, которые соответственно равны $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Мы имеем, следовательно, в этом случае:

$$\Delta^2 = H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

и следовательно, максимум абсолютной величины определителя есть

$$\sqrt{H_1, H_2, \ldots, H_n}.$$

Примечание. В случае, когда $n = 3$, Δ представляет объем параллелепипеда построенного на отрезках OA_1, OA_2, OA_3, соединяющих начало координат с точками $A_1(a_1, b_1, c_1)$, $A_2(a_2, b_2, c_2)$, $A_3(a_3, b_3, c_3)$. Полученный результат представляет собою, следовательно, не что иное, как обобщение следующей теоремы геометрии: *из всех параллелепипедов, построенных на данных трех ребрах, тот, который имеет наибольший объем, есть прямоугольный.*

Так как мы можем придать этому параллелепипеду бесконечно много положений в пространстве, не изменяя ее вершины O, то мы видим, что максимум, полученный для Δ^2, есть максимум в *широком смысле*.

Пусть Δ — какой-нибудь определитель порядка n; обозначая через $a_i, b_i, \ldots, l_i$ элементы i-й строки, мы, на основании предыдущего, имеем неравенство:

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2+\ldots+l_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+\ldots+l_2^2}\ldots\sqrt{a_n^2+b_n^2+\ldots+l_n^2}. \quad (41)$$

Если абсолютные величины всех элементов Δ не превосходят некоторого положительного числа M, то мы имеем, следовательно, и подавно *

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{n^n M^n}. \quad (42)$$

III. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

52. Основное свойство. Как мы видели, функциональный определитель играет важную роль в теории неявных функций. При всех доказательствах мы исходили из предположения, что некоторый определитель Якоби не равен нулю. Если даны n функций, зависящие от n независимых переменных, *непрерывные и допускающие непрерывные частные производные первого порядка*, то якобиан этих функций обладает свойствами, аналогичными свойствам производной. Например, чтобы функция одного переменного x обращалась в постоянную, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была тождественно равна нулю. Вот соответствующая теорема для якобиана:

Пусть будут $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n функций от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Чтобы между этими n функциями существовало соотношение $\pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$, не содержащее переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, необходимо и достаточно, чтобы функциональный определитель $\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ был равен тождественно нулю.

1) Условие необходимо. Рассмотрим для определенности три функции от трех переменных:

$$X = f_1(x, y, z), \quad Y = f_2(x, y, z), \quad Z = f_3(x, y, z), \quad (43)$$

непрерывные и допускающие непрерывные производные, и допустим, что якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \quad (44)$$

не равен тождественно нулю. Пусть, в частности, (x_0, y_0, z_0) — система значений x, y, z, при которой этот определитель отличен от нуля; пусть X_0, Y_0, Z_0 — соответствующие значения X, Y, Z. Согласно общей теореме § 38, можно найти такое положительное число h, что каждой системе значений X, Y, Z, удовлетворяющей условиям

$$X_0 - h \leqslant X \leqslant X_0 + h, \quad Y_0 - h \leqslant Y \leqslant Y_0 + h, \quad Z_0 - h \leqslant Z \leqslant Z_0 + h, \quad (45)$$

---

* Эта теорема принадлежит Адамару (Hadamard) (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2-я серия, т. XVII, 1893). Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит Виртингеру (Wirtinger) (Ibid., 1908).

соответствует система значений x, y, z, удовлетворяющая уравнениям (43). Так как в указанной области значения функций f_1, f_2, f_3 могут быть выбраны произвольно, *между этими функциями не может существовать никакого соотношения* $F(X, Y, Z)=0$.

Примечание. То же рассуждение показывает, что не может существовать соотношения между двумя функциями X и Y, если три якобиана $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}, \frac{D(X, Y)}{D(y, z)}, \frac{D(X, Y)}{D(z, x)}$ не равны нулю тождественно. Вообще, для того чтобы n функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$ от $n+p$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$ были связаны одним соотношением, необходимо, чтобы все функциональные определители

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})}$$

были тождественно равны нулю; здесь указатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляют любые n чисел из $n+p$ начальных целых чисел.

2) Условие достаточно. Рассмотрим систему четырех функций от четырех независимых переменных:

$$\left.\begin{aligned} X&=f_1(x, y, z, t), \\ Y&=f_2(x, y, z, t), \\ Z&=f_3(x, y, z, t), \\ T&=f_4(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

таких, что определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial t} \end{vmatrix}$$

равен нулю тождественно. Предположим сначала, что один из миноров первого порядка, например $\delta=\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)}$, не равен тождественно нулю. В этом случае из трех первых уравнений (46) можно найти, разрешая их относительно x, y, z:

$$x=\varphi_1(X, Y, Z, t), \quad y=\varphi_2(X, Y, Z, t), \quad z=\varphi_3(X, Y, Z, t), \qquad (47)$$

откуда

$$T=f_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t)=F(x, y, z, t). \qquad (48)$$

Мы докажем, что эта функция F не содержит переменного t, т. е. что мы имеем тождественно $\frac{\partial F}{\partial t}=0$. В самом деле,

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial t}; \qquad (49)$$

но частные производные $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$ от неявных функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ даны при помощи трех соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t}=0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t}=0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Соотношения (49) и (50) представляют систему четырех уравнений относительно $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$. Из них легко найти значение $\frac{\partial F}{\partial t}$; в самом деле, прибавляя к элементам последнего столбца определителя Δ элементы первого столбца, умноженные на $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$, элементы второго, умноженные на $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$, и элементы третьего, умноженные на $\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$, мы получим, в силу соотношения (50), $\Delta=\delta\cdot\frac{\partial F}{\partial t}$. Так как δ не равно нулю, необходимо, чтобы F не содержало переменного t; следовательно, между четырьмя функциями X, Y, Z, T существует соотношение вида:

$$T=F(X, Y, Z).$$

Можно заметить, что между этими четырьмя функциями не существует иного соотношения, не зависящего от x, y, z, t. Иначе можно было бы вывести соотношение между X, Y, Z и, следовательно, минор δ был бы равен нулю.

Перейдем теперь к случаю, когда все миноры первого порядка определителя Δ тождественно равны нулю, но по крайней мере один из миноров второго порядка, например $\delta'=\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$, не равен нулю тождественно.

Из двух первых уравнений (46) получаем:

$$x=\varphi_1(X, Y, z, t), \quad y=\varphi_2(X, Y, z, t),$$

следовательно:

$$Z=f_3(\varphi_1, \varphi_2, z, t)=F_1(X, Y, z, t), \quad T=F_2(X, Y, z, t).$$

Докажем, что, например, $\frac{\partial F_1}{\partial t}=0$. Из трех соотношений:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}=\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t},$$

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

$$0=\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t},$$

получаем тем же путем, как в предыдущем рассуждении, соотношение:

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, t)} = \delta' \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

следовательно,

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0.$$

Точно так же найдем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.$$

Таким образом в этом случае существуют два различных соотношения между четырьмя функциями X, Y, Z, T:

$$Z = F_1(X, Y),$$
$$T = F_2(X, Y).$$

Между X, Y, Z, T не может существовать никакого третьего соотношения, отличного от этих двух, так как в противном случае мы вывели бы соотношение между X и Y и должны были бы иметь $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = 0$, что противно положению.

Наконец, если бы все миноры второго порядка якобиана

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, t)}$$

были равны нулю, но четыре функции X, Y, Z, T не были бы постоянными, то мы увидели бы подобным же образом, что три из этих функций суть функции четвертой. Приведенное рассуждение, очевидно, имеет вполне общий характер. Если определитель Якоби для n функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю, равно как и все его миноры о $n-r+1$ строках, но по крайней мере один из миноров о $n-r$ строках отличен от нуля, то существует r различных соотношений между n функциями, и r из этих функций могут быть выражены через $n-r$ остальных, причем между этими последними не существует никакого отношения, не содержащего переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Мы предоставляем читателю доказать следующее предложение, которое может быть установлено подобным же образом.

Для того чтобы n функций от $n+p$ независимых переменных были связаны соотношением, не содержащим этих переменынх, необходимо и достаточно, чтобы все определители Якоби от этих n функций относительно n любых из независимых переменных были тождественно равны нулю. В частности, для того чтобы две функции $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ были функциями одна другой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие частные производные $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial F_2}{\partial x_i}$ были пропорциональны.

Примечание. Входящие в основную теорему функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$ могут зависеть, кроме того, еще и от некоторых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, отличных от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если определитель Якоби $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ тождественно равен нулю, то функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$ связаны одним или несколькими соотношениями, не содержащими переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; но остальные переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$, вообще, войдут в эти соотношения.

Приложения. Предыдущая теорема весьма важна для анализа. Она позволяет, например, доказать основное свойство логарифма, не пользуясь его арифметическим определением. В самом деле, в начале интегрального исчисления будет доказано, что существует функция, вполне определенная для всех положительных значений переменного, которая принимает значение нуль при $x=1$ и производная которой равна $\frac{1}{x}$. Пусть будет $f(x)$ эта функция; положим

$$u=f(x)+f(y), \quad v=xy.$$

Мы имеем:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, существует соотношение вида

$$f(x)+f(y)=\varphi(xy);$$

чтобы определить функцию φ, достаточно положить $y=1$; это дает $f(x)=\varphi(x)$, и так как x произвольно, то мы имеем:

$$f(x)+f(y)=f(xy).$$

Мы видим, каким образом предыдущее определение логарифма могло бы привести к основным свойствам логарифмов, если бы их открытие не предшествовало изобретению интегрального исчисления.

Формула для производной функции от функции может также быть распространена на определитель Якоби. Пусть будет $F_1, F_2, \ldots, F_n$ система n функций от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$; предположим, что $u_1, u_2, \ldots, u_n$ сами суть функции n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы имеем следующую формулу:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{51}$$

доказательство которой непосредственно вытекает из правила умножения определителей и из формулы для производной от сложной функции. Напишем оба определителя, стоящие во второй части равенства (51):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

переставив строки и столбцы второго. Первый элемент произведения равен

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

т. е. равен $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, и то же самое получим для других.

Формула, дающая производную от сложной функции, может быть распространена на функциональные определители.

Пусть будут, например, X и Y две функции от трех переменных x, y, z, которые, в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных u и v. Мы имеем:

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}\frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(X, Y)}{D(y, z)}\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \frac{D(X, Y)}{D(z, x)}\frac{D(z, x)}{D(u, v)};$$

легко доказать и обобщить эту формулу.

Определитель Гессе. Пусть будет $f(x, y, z)$ функция трех переменных x, y, z; функциональный определитель от трех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ называется определителем Гессе (Hesse):

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Подобным же образом составляется определитель Гессе для функции от n переменных; роль его аналогична роли производной второго порядка от функции одного независимого переменного. Мы сейчас покажем, что этот определитель обладает замечательным свойством инвариантности. Предположим, что над переменными x, y, z выполнена линейная подстановка:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}\right\} \tag{51a}$$

где X, Y, Z — новые переменные, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ — такие постоянные, что определитель подстановки

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. После этой подстановки функция $f(x, y, z)$ обратится в новую функцию $F(X, Y, Z)$ от трех переменных X, Y, Z. Пусть будет $H(X, Y, Z)$ определитель Гессе для этой новой функции; мы докажем, что если заменим $x, y\ z$ в $h(x, y, z)$ их выражениями (51a), то тождественно будем иметь:

$$H(X, Y, Z) = \Delta^2 h(x, y, z).$$

Действительно,

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X, Y, Z)} = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

Приняв на время $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ за посредствующие переменные, мы можем еще написать:

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

Но из соотношения $F(X, Y, Z) = f(x, y, z)$ находим:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha'' \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z},$$

и следовательно,

$$\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \Delta;$$

таким образом

$$H = \Delta h \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} = \Delta^2 h.$$

Очевидно, что эта теорема имеет вполне общий характер.

Дадим приложение этого свойства определителя Гессе. Рассмотрим кубическую бинарную форму:

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

где коэфициенты a, b, c, d суть какие-нибудь постоянные количества. Пренебрегая числовым множителем $3 \cdot 2 = 6$, имеем:

$$h = \begin{vmatrix} ax + by, & bx + cy \\ bx + cy, & cx + dy \end{vmatrix} = (ac - b^2)\,x^2 + (ad - bc)\,xy + (bd - c^2)\,y^2;$$

таким образом определитель Гессе есть квадратичная бинарная форма. Отбросим сначала тот частный случай, когда определитель Гессе есть точный квадрат; в общем случае этот определитель можно разложить на произведение двух различных линейных множителей:

$$h = (mx + ny)(px + qy).$$

Если мы выполним линейную подстановку

$$mx + ny = X, \quad px + qy = Y,$$

то форма $f(x, y)$ обращается в новую форму:

$$F(X, Y) = AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3;$$

для нее определитель Гессе

$$H(X, Y) = (AC - B^2)\,X^2 + (AD - BC)\,XY + (BD - C^2)\,Y^2$$

по только что доказанному свойству инвариантности должен принять вид KXY. Поэтому коэфициенты A, B, C, D должны удовлетворять двум соотношениям:

$$B^2 - AC = 0, \quad BD - C^2 = 0.$$

Отсюда видно, что если один из двух коэфициентов будет отличен от нуля, то будет отличен и другой; таким образом в этом случае мы имеем:

$$A = \frac{B^2}{C}, \quad D = \frac{C^2}{B},$$
$$F(X, Y) = \frac{1}{BC}(B^3X^3 + 3B^2CX^2Y + 3BC^2XY^2 + C^3Y^3) = \frac{(BX + CY)^3}{BC},$$

так что $F(X, Y)$, а следовательно, и $f(x, y)$ будет точным кубом. Отбрасывая этот исключительный случай, мы видим, что $B = C = 0$, и многочлен $F(X, Y)$ приводится к каноническому виду:

$$AX^3 + DY^3.$$

Таким образом приведение формы $f(x, y)$ к каноническому виду требует только решения уравнения второй степени, которое мы получим, приравняв определитель Гессе нулю. Два множителя, на которые распадается определитель Гессе, и будут каноническими переменными X, Y.

Если определитель Гессе есть точный квадрат, то подобным же образом мы найдем, что форма $f(x, y)$ может быть приведена к виду $AX^3 + BX^3Y$; если определитель Гессе равен тождественно нулю, то $f(x, y)$ есть точный куб:

$$f(x, y) = (\alpha x + \beta y)^3.$$

IV. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ.

53. Общие замечания. Во многих вопросах анализа мы часто встречаемся с необходимостью произвести замену независимых переменных. В подобных случаях мы должны уметь выражать производные, взятые по старым переменным, через производные по новым переменным. Мы уже затронули задачу этого рода при рассмотрении вопроса об инверсии. Для решения общей проблемы не требуется введения новых принципов. Достаточно применить правила нахождения производных сложных и неявных функций. В тех случаях, когда имеется несколько независимых переменных, можно значительно упростить вычисления применением полных диференциалов, опираясь при этом на следующие замечания, которые мы выскажем, предполагая для определенности, что имеется три независимых переменных x, y, z.

1. Пусть u, v, w — три независимые (т. е. не связанные никаким соотношением) функции переменных x, y, z; между их полными диференциалами du, dv, dw не может существовать никакого соотношения вида

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0, \tag{52}$$

если только коэфициенты λ, μ, ν не обращаются одновременно в нуль В самом деле, приравнивая нулю коэфициенты при dx, dy, dz в предшествующем соотношении, мы имеем для определения λ, μ, ν три однородных линейных уравнения, и определитель, составленный из коэфициентов при λ, μ, ν, есть не что иное, как якобиан $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$.

2. Пусть ω, u, v, w — четыре функции трех независимых переменных x, y, z, причем $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ не равен нулю. Мы можем, обратно, выразить x, y, z в функции u, v, w; подставляя эти значения x, y, z в выражение ω, мы получаем функцию

$$\omega = \Phi(u, v, w)$$

трех переменных u, v, w. Если каким бы то ни было способом между полными диференциалами $d\omega$, du, dv, dw, взятыми по отношению к независимым переменным x, y, z, получено соотношение вида

$$d\omega = P\, du + Q\, dv + R\, dw,$$

то коэфициенты P, Q, R соответственно равны частным производным функции $\Phi(u, v, w)$:

$$P = \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad Q = \frac{\partial\Phi}{\partial v}, \quad R = \frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

В самом деле, мы знаем, что, на основании правила нахождения полного диференциала сложной функции (§ 24):

$$d\omega = \frac{\partial\Phi}{\partial u} du + \frac{\partial\Phi}{\partial v} dv + \frac{\partial\Phi}{\partial w} dw,$$

и другого линейного соотношения между $d\omega$, du, dv, dw существовать не может, так как в противном случае мы получили бы соотношение вида (52) между du, dv, dw, в котором коэфициенты λ, μ, ν не были бы одновременно нулями, что невозможно на основании первого замечания.

Мы применим эти общие принципы при обзоре наиболее часто встречающихся задач, к которому мы переходим.

54. Задача I. *Пусть будет y функция независимого переменного x. Возьмем новое независимое переменное t, связанное с x соотношением $x = \varphi(t)$; требуется выразить производные от y относительно x через t и через высшие производные от y по t.*

Пусть будет $y = f(x)$ рассматриваемая функция, и пусть после замены x через $\varphi(t)$ эта функция обращается в $F(t) = f[\varphi(t)]$. По правилу диференцирования функции от функции находим:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \varphi'(t),$$

откуда

$$y'_x = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{\varphi'(t)}.$$

Полученный результат можно выразить следующим образом: *чтобы получить производную от y относительно x, должно взять производную от этой функции по t и разделить ее на производную от x по t.*

Прилагая предыдущее правило к полученному выше выражению производной первого порядка, мы найдем производную второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}(y'_x)}{\varphi'(t)} = \frac{y''_{t^2}\varphi'(t) - y'_t\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Прилагая снова то же самое правило, мы получим производную третьего порядка:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}(y''_{x^2})}{\varphi'(t)},$$

или, выполняя вычисления,

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{y'''_{t^3}[\varphi'(t)]^2 - 3y''_{t^2}\varphi'(t)\varphi''(t) + 3y'_t[\varphi''(t)]^2 - y'_t\varphi'(t)\varphi'''(t)}{[\varphi'(t)]^5}.$$

Таким же способом мы можем последовательно получить все остальные производные высших порядков. Вообще, производная n-го порядка от y по x выразится через $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ..., $\varphi^{(n)}(t)$ и через высшие производные от y по t до порядка n включительно. Предыдущие формулы можно привести к более симметричному виду. Обозначим через dx, dy, d^2x, d^2y, ..., d^nx, d^ny диференциалы от x и y, взятые по переменному t, и через y', y'', ..., $y^{(n)}$ производные от y по x; предыдущие формулы можно тогда привести к виду:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}, \\ y'' &= \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}, \\ y''' &= \frac{d^3y\, dx^2 - 3d^2y\, dx\, d^2x + 3dy\,(d^2x)^2 - dy\, d^3x\, dx}{dx^5}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Независимое переменное t, по которому берутся все диференциалы, стоящие в правых частях предыдущих формул, может быть выбрано совершенно произвольно; мы переходим от любой производной к следующей по закону, выражаемому формулою:

$$y^{(n)} = \frac{d\,[y^{(n-1)}]}{dx},$$

где вторая часть есть частное двух диференциалов.

55. Приложения. Данными в предыдущем параграфе формулами пользуются при изучении плоской кривой, когда координаты точек этой кривой выражены через вспомогательное переменное t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t).$$

Для изучения этой кривой вблизи одной из ее точек необходимо уметь вычислять значения производных y', y'', y''', ... от y по x для рассматриваемой точки. Но предыдущие формулы дают нам эти производные, выраженные через производные от функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, так что нет необходимости находить явное выражение y в функции x, что иногда практически и невозможно. Первая формула

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

дает угловой коэфициент касательной к кривой; значение y'' входит в важный геометрический элемент, *радиус кривизны*, который выражается, как мы это увидим дальше, через

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Чтобы иметь значение R, когда координаты x и y даны в функции параметра t, нужно только заменить y' и y'' выведенными выше выражениями; таким образом мы получим:

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dx\, d^2y - dy\, d^2x|}.$$

Здесь правая часть содержит только производные первого и второго порядка от x и y по t.

По поводу этого вопроса приводим здесь следующее интересное замечание, заимствованное нами из „Traité de Calcul différentiel et intégral" Бертрана (Bertrand) (т. I, стр. 170).

Предположим, что, вычисляя геометрический элемент плоской кривой, координаты x, y точек которой мы предположим выраженными через параметр t, мы получили выражение:

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots, d^nx, d^ny),$$

где все диференциалы взяты относительно t.

Так как, по предположению, этот элемент имеет геометрический смысл, то его значение не должно зависеть от выбора независимого переменного t. Если мы примем $t = x$, то должно положить $dx = dt$, $d^2x = d^3x = \ldots = d^nx = 0$, и предыдущее выражение обращается в

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Это тот результат, который мы получили бы, предполагая с самого начала что уравнение рассматриваемой кривой имеет вид $y = \Phi(x)$, т. е. что оно решено относительно y. Чтобы от этого частного случая снова перейти к общему случаю, достаточно заменить $y', y'', y''', \ldots$ их значениями, выведенными из формул (20). Выполнив эту подстановку в

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

мы должны снова получить выражение $F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots)$, от которого исходили. Если этого не будет, то можно утверждать, что полученный результат неверен *. Например, выражение $\dfrac{dx\, d^2y + dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$ не может иметь для плоской кривой никакого геометрического значения, независимого от выбора переменного; в самом деле, при $x = t$ это уравнение обращается в $\dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, и, заменяя в нем y' и y'' их значениями, выведенными из формул (53), мы не придем обратно к предыдущему диференциальному выражению.

Формулами (53) также часто пользуются при изучении диференциальных уравнений. Предположим, например, что мы хотим найти все функции y от одного независимого переменного x, которые удовлетворяют соотношению

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0, \tag{54}$$

---

*То-есть что $F(x, y, y', y'', \ldots)$ не выражает геометрического элемента кривой. (*Ред.*)

где n — постоянное. Возьмем новое независимое переменное t, полагая $x = \cos t$; мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin t \frac{d^2y}{dt^2} - \cos t \frac{dy}{dt}}{\sin^3 t},$$

и уравнение (54) после подстановки обращается в

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0. \tag{55}$$

Легко найти все функции от t, которые удовлетворяют этому соотношению; в самом деле, умножая его на $2\frac{dy}{dt}$, мы найдем:

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2n^2 y \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + n^2y^2\right] = 0;$$

следовательно, должно быть

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + n^2y^2 = n^2a^2,$$

где a обозначает произвольное постоянное.

Таким образом

$$\frac{dy}{dt} = n\sqrt{a^2 - y^2},$$

или

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{a^2-y^2}} - n = 0.$$

Первая часть есть производная от $\arcsin\frac{y}{a} - nt$; поэтому эта разность должна быть равна новой постоянной b, и мы имеем:

$$y = a\sin(nt + b);$$

это может быть еще представлено в виде:

$$y = A\sin nt + B\cos nt.$$

Переходя к первоначальному переменному x, мы заключаем, что все функции от x, удовлетворяющие соотношению (54), будут заключаться в формуле:

$$y = A\sin(n\arccos x) + B\cos(n\arccos x),$$

где A и B обозначают два произвольных постоянных.

56. Задача II. *Для всякого соотношения между x и y формулы преобразования $x=f(t, u)$, $y=\varphi(t, u)$ дают соответствующее соотношение между t и u. Требуется выразить производную от y по x через t, u и производные от u по t.*

Эта задача непосредственно приводится к предыдущей. В самом деле, предположим, что в формулах преобразования

$$x=f(t, u), \quad y=\varphi(t, u)$$

мы заменили u его значением в функции t; тогда эти формулы дадут нам первоначальные переменные x и y в функции переменного t. Поэтому достаточно применить здесь общий способ, приняв, однако, x и y за сложные функции от t, причем переменное u должно играть роль посредствующей функции. Таким образом мы получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}};$$

далее, найдем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{dt},$$

или, выполняя вычисления,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial t}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{d^2u}{dt^2}\right]-\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)\left[\dfrac{d^2f}{dt^2}+\ldots\right]}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)^3}.$$

Вообще, производная n-го порядка $y^{(n)}$ выразится через t, u и производные $\dfrac{du}{dt}, \dfrac{d^2u}{dt^2}, \ldots, \dfrac{d^nu}{dt^n}$.

Предположим, например, что мы имеем уравнение кривой в полярных координатах: $\rho=f(\omega)$. Следующие формулы дают прямоугольные координаты точки (φ, ω):

$$x=\rho\cos\omega, \quad v=\rho\sin\omega.$$

Пусть будут ρ', ρ'', ... производные от ρ, взятые относительно ω, рассматриваемого как независимое переменное. Из предыдущих формул мы имеем:

$$dx=\cos\omega\, d\rho-\rho\sin\omega\, d\omega,$$
$$dy=\sin\omega\, d\rho+\rho\cos\omega\, d\omega,$$

$$d^2x=\cos\omega\, d^2\rho-2\sin\omega\, d\omega\, d\rho-\rho\cos\omega\, d\omega^2,$$
$$d^2y=\sin\omega\, d^2\rho+2\cos\omega\, d\omega\, d\rho-\rho\sin\omega\, d\omega^2,$$

и следовательно,

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\omega^2,$$
$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=2\,d\omega\, d\rho^2-\rho\, d\omega\, d^2\rho+\rho^2\, d\omega^3.$$

Таким образом приведенное выше выражение для радиуса кривизны обращается в

$$R = \pm \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

57. Преобразования плоских кривых. Предположим, что при помощи определенного построения мы поставили в соответствие всякой точке m плоскости другую точку M той же самой плоскости. Если через (x, y) мы обозначим координаты точки m и через (X, Y) — координаты точки M, то в силу нашего преобразования между этими четырьмя координатами будут существовать два соотношения вида:

$$X = f(x, y), \quad Y = \varphi(x, y). \tag{56}$$

Эти формулы определяют *точечное* преобразование. Мы имеем в геометрии многочисленные примеры таких преобразований; таковы, например, гомографическое преобразование, преобразование обратными радиусами-векторами (инверсия) и пр. Если точка m описывает кривую c, то соответствующая точка M опишет другую кривую C, свойства которой можно вывести из свойств кривой c и из свойств употребленного преобразования. Пусть будут y', y'', ... производные от y по x, а Y', Y'', ... — производные от Y по X. Чтобы изучать кривую C, необходимо уметь выразить Y', Y'', ... через x, y, y', y'', ... Но это именно та задача, которую мы только что рассматривали; мы имеем:

$$Y' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'},$$

$$Y'' = \frac{\frac{dY'}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \ldots\right) - \ldots}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)^3}$$

и т. д. Мы видим, что Y' зависит только от x, y, y'; поэтому, если мы приложим преобразование (56) к двум кривым c, c_1, касающимся друг друга в точке (x, y), то преобразованные кривые C, C_1 будут также касаться одна другой в рассматриваемой точке (X, Y). Это замечание позволяет заменить кривую c всякою другою касающеюся к ней кривою, если дело идет только об отыскании касательной к преобразованной кривой C.

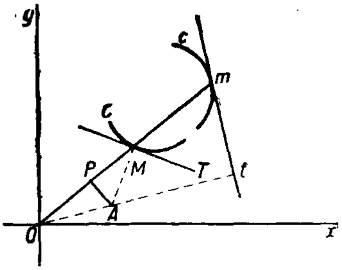
Рассмотрим, например, преобразование, определяемое формулами:

$$X = \frac{h^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{h^2 y}{x^2 + y^2};$$

это преобразование есть не что иное, как преобразование обратными радиусами-векторами или *инверсия*, с полюсом в начале координат *. Пусть будет m точка кривой c, M — соответствующая точка кривой C. Чтобы найти касательную к этой кривой C в точке M, мы должны воспользоваться тем свойством, что при преобразовании обратными радиусами обратная фигура для прямой есть окружность, проходящая через полюс инверсии.

Если мы заменим кривую c касательною mt, то фигура, обратная для mt, будет окружность, проходящая через две точки M и O, центр которой лежит на перпендикуляре Ot, опущенном из начала на mt. Касательная MT к этой окружности перпендикулярна к AM, и углы Mmt mMT будут равны, как дополнительные к углу mOt. Таким образом касательные mt и MT будут антипараллельны относительно радиуса-вектора **.

58. Преобразование прикосновения. Предыдущие преобразования не будут самыми общими из тех, которые обращают две касающиеся друг друга кривые в две другие кривые, также касающиеся друг друга. Предположим, что для всякой точки m кривой c мы находим другую точку M определенным построением, зависящим не только от положения самой точки m, но и от направления касательной к кривой c в этой точке m. Определяющие это преобразование формулы будут иметь вид:



Черт. 5.

$$X=f(x, y, y'), \quad Y=\varphi(x, y, y'). \quad (57)$$

Угловой коэфициент Y' касательной к преобразованной кривой выразится так:

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

Вообще, Y' зависит от четырех переменных x, y, y', y''; поэтому, если мы приложим преобразование (57) к двум кривым, касающимся друг друга в точке (x, y), то соответствующие кривые C, C_1' будут иметь общую точку (X, Y), но, вообще, не будут касаться друг друга в этой точке, если только y'' не будет иметь одного и того же значения для обеих кривых c, c_1. Чтобы преобразованные кривые C и C_1 касались друг друга всегда, когда касаются друг друга кривые c и c_1, необхо-

* Преобразованием обратными радиусами или инверсией относительно данного круга радиуса h называется такое преобразование, при котором каждая точка переходит в другую, лежащую на том же радиусе круга, причем расстояния r, r_1 этих точек от центра круга связаны соотношением $rr_1=h^2$. Из этого соотношения видно, что отрезок между этими точками делится гармонически концами того диаметра круга, на котором они лежат, и потому каждая из двух точек лежит на поляре другой точки относительно управляющего круга. (*Ред.*)

** Это значит, что mt и MT образуют с радиусом-вектором Om углы, равные, но лежащие по разные стороны радиуса-вектора.

димо и достаточно, чтобы Y' не зависело от y'', т. е. чтобы функции $f(x, y, y')$ и $\varphi(x, y, y')$ удовлетворяли условию

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)^{*}.$$

В этом случае рассматриваемое преобразование называется *преобразованием прикосновения*. Ясно, что точечное преобразование есть частный случай преобразований прикосновения **.

Рассмотрим, например, преобразование Лежандра, состоящее в том, что всякой точке (x, y) кривой c соответствует точка M с координатами

$$X=y', \qquad Y=xy'-y;$$

из этих формул мы получаем:

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{xy''}{y''}=x,$$

откуда ясно видно, что это преобразование есть в самом деле преобразование прикосновения. Мы будем также иметь:

$$Y''=\frac{dY'}{dX}=\frac{dx}{y''dx}=\frac{1}{y''},$$

$$Y'''=\frac{dY''}{dX}=-\frac{y'''}{y''^2}$$

и т. д. Из предыдущих формул находим:

$$x=Y', \quad y=XY'-Y, \quad y'=X,$$

что указывает на взаимность преобразования. Все эти свойства легко объясняются, если мы заметим, что точка с координатами $X=y'$, $Y=xy'-y$ есть полюс касательной в точке (x, y) к кривой c относительно параболы $x^2-2y=0$. Вообще, если мы примем M за полюс касательной в точке m к кривой c относительно управляющего конического сечения Σ, то место точек M есть кривая C, касательная к которой в точке M есть поляра точки m относительно Σ. Таким образом между двумя кривыми c и C устанавливается взаимное соответствие.

---

* Это условие дает:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial y'}y''}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y'}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''}$$

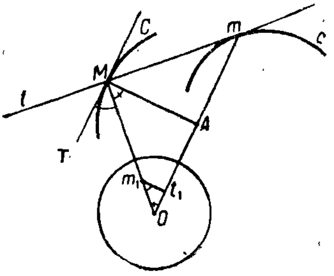
(*Ред.*)

** Лежандр и Ампер (Ampère) дали многочисленные примеры этих преобразований. Софус Ли (Sophus Lie) в различных работах развил общую теорию, См., в частности, Geometrie der Berührungstransformationen; см. также Якоби, Vorlesungen über Dynamik.

Теория преобразований прикосновения изложена также в книге Гурса, Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre (гл. XI).

Сверх того, если мы заменим кривую c другою кривою c_1, касающеюся c в точке m, то и взаимная кривая C_1 будет касаться кривой C в точке M.

Подэрная кривая. Если из данной точки O, взятой в плоскости кривой c, мы опустим перпендикуляр OM на касательную в точке m к этой кривой, то место оснований этого перпендикуляра есть кривая C, которая называется кривою, *подэрною относительно первой кривой.* Легко получить вычислением координаты точки M и убедиться, что полученное таким образом преобразование есть преобразование прикосновения, но проще можно притти к этому следующим образом.



Черт. 6.

Рассмотрим круг γ радиуса R, с центром в O, и возьмем на OM такую точку m_1, чтобы $Om_1 \cdot OM = R^2$. Точка m_1 есть полюс касательной mt относительно круга γ. Таким образом преобразование, приводящее от c к C, слагается из преобразования взаимными полярами и из инверсии. Если точка m описывает кривую c, то точка m_1, полюс касательной mt, описывает кривую c_1, касающуюся поляры точки m относительно круга γ, т. е. прямой m_1t_1, перпендикулярной к Om. Касательная MT к кривой C и касательная m_1t_1 к кривой c_1 образуют равные углы с радиусом-вектором Om_1M; поэтому, если мы проведем нормаль MA, то углы AMO, AOM будут равны как дополнения равных углов, и точка A будет серединою радиуса Om. Отсюда следует, что мы получим нормаль к подэрной кривой, соединив точку M с серединою Om.

59. Гомографические преобразования. Всякая функция y, удовлетворяющая уравнению $y'' = 0$, есть линейная функция переменного x, и обратно. Но если над переменными x и y мы выполним гомографическое преобразование *

$$x = \frac{aX + bY + c}{a''X + b''Y + c''}, \quad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{a''X + b''Y + c''}, \tag{58}$$

то прямая линия изменится в прямую линию; поэтому уравнение $y'' = 0$ должно обратиться в $\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$. Чтобы убедиться в этом, мы заметим, что общее гомографическое преобразование может быть приведено к ряду частных преобразований более простого вида. Если оба коэфициента a'', b'' не равны нулю, то мы положим $X_1 = a''X + b''Y + c''$. Так как, кроме того, нельзя сразу иметь $ab'' - ba'' = 0$, $a'b'' - b'a'' = 0$ **, то мы положим вместе с тем $Y_1 = a'X + b'Y + c'$, предполагая $a'b'' - b'a''$ отличным от нуля. Заменив X, Y их значениями в функции от X_1, Y_1, мы можем написать предыдущие формулы в виде:

$$y = \frac{Y_1}{X_1}, \quad x = \frac{\alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma}{X_1} = \alpha + \beta\frac{Y_1}{X_1} + \frac{\gamma}{X_1}.$$

Мы видим, таким образом, что общее гомографическое преобразование может быть представлено как соединение целого линейного преобразования общего вида:

$$x = aX + bY + c, \quad y = a'X + b'Y + c',$$

и частного преобразования:

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{Y}{X}.$$

---

* Гомографическим преобразованием называется такое точечное преобразование, при котором прямые линии обращаются в прямые. Аналитически такое преобразование выражается дробными линейными формулами относительно X, Y с общим знаменателем.

** В таком случае из обеих формул можно было бы исключить $a''X +$ так что x и y не были бы независимы. (*Ред.*)

Выполнив эту последнюю подстановку, мы найдем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{XY' - Y}{X^2} : \frac{-1}{X^2} = Y - XY',$$

и далее,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -XY''(-X^2) = X^3Y''.$$

Если мы выполним целое гомографическое преобразование, то будем иметь:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a' + b'Y'}{a + bY'},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{(ab' - ba')Y''}{(a + bY')^3}.$$

В обоих случаях уравнение $y'' = 0$ обращается в $Y'' = 0$.

Мы теперь перейдем к рассмотрению функций многих независимых переменных и для определенности изложим наши рассуждения в применении к функциям двух переменных.

60. Задача III. *Пусть будет $\omega = f(x, y)$ функция двух независимых переменных x, y. Возьмем два новых независимых переменных u, v, связанных с прежними посредством формул:*

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v); \tag{59}$$

требуется выразить частные производные от ω относительно переменных x и y через u, v и частные производные от ω, взятые относительно u и v.

Пусть после подстановки $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ функция $f(x, y)$ обращается в $\omega = F(u, v)$. По правилу диференцирования сложных функций имеем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Якобиан $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ не может быть нулем; в самом деле, если бы было $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = 0$, то произведенная нами замена переменных не имела бы никакого смысла, так как функции φ и ψ зависели бы тогда одна от другой (§ 52). Поэтому из предыдущих уравнений мы можем определить $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial x} &= A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}, \\ \frac{\partial\omega}{\partial y} &= C\frac{\partial\omega}{\partial u} + D\frac{\partial\omega}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где A, B, C, D суть определенные функции от u и v; эти формулы решают нашу задачу для производных первого порядка. Они показывают, что *для получения производной по x от функции ω надо производную от ω по u умножить на A, производную от ω по v умножить* *на B и полученные произведения сложить.* Чтобы получить частную производную по y, должно поступить таким же образом, заменив только A и B соответственно через C и D. Для вычисления производных второго порядка достаточно применить к производным первого порядка правила, выраженные предыдущими формулами; так, мы будем иметь:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=$$
$$=A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

или, выполняя вычисления:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+$$
$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Точно так же мы получим $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ и последующие производные. При всех диференцированиях достаточно заменить операции $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ соответственно операциями

$$A\frac{\partial}{\partial u}+B\frac{\partial}{\partial v},\quad C\frac{\partial}{\partial u}+D\frac{\partial}{\partial v};$$

таким образом все сводится к вычислению коэфициентов A, B, C, D.

Пример I. Рассмотрим уравнение

$$a\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0 \tag{61}$$

с постоянными коэфициентами a, b, c. Мы постараемся привести это уравнение к возможно более простому виду. Заметим прежде всего, что если бы было одновременно $a=c=0$, то не было бы надобности упрощать это уравнение; поэтому мы можем предположить, что, например, c не равно нулю. Введем два новых независимых переменных u и v:

$$u=x+\alpha y,\quad v=x+\beta y,$$

где α и β — два постоянных неопределенных коэфициента. Мы имеем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\alpha\frac{\partial\omega}{\partial u}+\beta\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

так что в этом случае $A=B=1$, $C=\alpha$, $D=\beta$. Общий способ дает нам:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}=\alpha\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

и уравнение (61) принимает вид:

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0.$$

Здесь нужно будет различить несколько случаев.

Первый случай. Пусть $b^2-ac>0$; приняв за α и β оба корня уравнения

$$a+2br+cr^2=0,$$

мы приведем наше уравнение к простому виду:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Так как последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=0,$$

то отсюда видно, что $\frac{\partial\omega}{\partial u}$ должно быть функцией только одного переменного u; пусть $\frac{\partial\omega}{\partial u}=f(u)$. Обозначим через $F(u)$ функцию от u, производная которой $F'(u)$ равна $f(u)$; так как производная от $\omega-F(u)$ по u равна нулю, то эта разность не зависит от u, и следовательно, $\omega=F(u)+\Phi(v)$. Обратное предложение очевидно. Возвращаясь к переменным x и y, мы заключаем, что все функции ω, удовлетворяющие уравнению (61), будут вида

$$\omega=F(x+\alpha y)+\Phi(x+\beta y),$$

где функции F и Φ — произвольны. Например, общий интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},$$

встречающегося в теории колебания струн, будет:

$$\omega=f(x+ay)+\varphi(x-ay).$$

Второй случай. Пусть $b^2-ac=0$. Возьмем α равным двукратному корню уравнения $a+2br+cr^2=0$, и β — отличным от α; тогда коэфициент при $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}$ будет равен нулю, так как он равен $a+b\alpha+\beta(b+c\alpha)$. Таким образом наше уравнение примет вид: $\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$. Мы видим, что ω должна быть линейною функцией от v, $\omega=vf(u)+\varphi(u)$, где функции $f(u)$ и $\varphi(u)$ – произвольны. Возвращаясь к переменным x и y, мы получим для ω выражение:

$$\omega=(x+\beta y)f(x+\alpha y)+\varphi(x+\alpha y),$$

которое можно представить в виде:

$$\omega=[x+\alpha y+(\beta-\alpha)y]\,(f(x+\alpha v)+\varphi(x+\alpha y),$$

или, иначе:

$$\omega=yF(x+\alpha y)+\Phi(x+\alpha y).$$

Третий случай. Если $b^2-ac<0$, то нельзя более приложить предыдущее преобразование, не вводя мнимых переменных. Но можно определить α и β таким образом, чтобы было:

$$a+2b\alpha+c\alpha^2=a+2b\beta+c\beta^2,\quad a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=0;$$

это дает:

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{c},\quad \alpha\beta=\frac{2b^2-ac}{c^2};$$

α и β будут действительны, так как уравнение второй степени

$$r^2 + \frac{2b}{c} r + \frac{2b^2 - ac}{c^2} = 0,$$

корнями которого служат α и β, имеет действительные корни. Рассматриваемое диференциальное уравнение принимает тогда вид:

$$\Delta_2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0.$$

Это уравнение $\Delta_2 \omega = 0$, известное под именем уравнения Лапласа (Laplace), играет основную роль в очень многих вопросах анализа и математической физики.

Пример II. Найдем, какой вид примет предыдущее уравнение, если мы положим $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Мы имеем:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \rho \cos \varphi,$$

или решая эти уравнения относительно $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial y}$,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \, \partial \varphi} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho};$$

аналогичное выражение мы получим и для $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$; складывая их, имеем:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho}.$$

61. Другой способ решения. Предыдущий способ наиболее удобен в том случае, если функция, частные производные которой мы ищем, будет неизвестна. Но иногда выгоднее пользоваться следующим приемом.

Пусть будет $z = f(x, y)$ функция двух независимых переменных x и y; если мы предположим, что x, y и z выражены через два вспомогательных переменных u и v, то мы будем иметь между полными диференциалами dx, dy и dz соотношение:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

которое равносильно двум соотношениям:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

из которых, как и в первом способе, мы выведем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в функции u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Но для вычисления следующих производных мы будем поступать далее по тому же правилу. Так, чтобы вычислить $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, мы будем исходить из тождества

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy,$$

которое равносильно двум соотношениям:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

причем в левых частях этих равенств производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ должна быть заменена ее выражением через u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Исходя из тождества

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy,$$

мы таким же образом получим $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; оба полученных выражения для $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ должны быть тождественны между собою, что может служить поверкою вычисления. Производные высших порядков вычисляются таким же способом.

Приложение к поверхностям. Предыдущие методы применяются при изучении поверхностей. Предположим, что координаты точки поверхности S выражены в функции двух переменных параметров u, v посредством формул:

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v), \quad z=\psi(u, v). \tag{62}$$

Мы получим уравнение этой поверхности, исключив переменные u и v из трех уравнений (62); но мы можем поставить себе задачей непосредственно по самим уравнениям (62) изучать свойства поверхности S, не производя исключения переменных u, v, которое практически может оказаться и невозможным. Заметим, прежде всего, что три определителя Якоби

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(f, \psi)}{D(u, v)}$$

не могут быть одновременно нулями, так как в этом случае исключение u и v привело бы к двум различным соотношениям между x, y, z, и точка с координатами (x, y, z) описала бы не поверхность, а кривую. Пусть, например,

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \neq 0;$$

тогда мы можем предположить, что из первых двух уравнений (62) мы выразили u и v в функции x, y и, внося их значения в третье уравнение (62), получили уравнение поверхности S, $z = F(x, y)$. Чтобы исследовать эту поверхность вблизи одной из ее точек, необходимо иметь выражения частных производных $p, q, r, s, t, \ldots$ от функции $F(x, y)$ через параметры u и v. Производные первого порядка p, q получатся из соотношения:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

которое равносильно двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= p\frac{\partial f}{\partial u} + q\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= p\frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

позволяющим вычислить p и q. Найдя p и q, мы получим уравнение касательной плоскости, внося их выражение в уравнение:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Это дает:

$$(X - x)\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + (Y - y)\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + (Z - z)\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0. \tag{64}$$

Соотношения (63) имеют простое геометрическое значение. Они показывают, что касательная плоскость проходит через касательные прямые к двум кривым, расположенным на поверхности S; эти кривые получатся, если мы, оставляя v постоянным, будем изменять u, или, наоборот, оставляя постоянным u, будем изменять v *.

Получив p и q, $p = f_1(u, v)$, $q = f_2(u, v)$, мы найдем r, s, t из равенств:

$$\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}$$

причем каждое из этих равенств даст два различных соотношения, и т. д.

---

* К уравнению касательной плоскости можно также притти непосредственно. Всякая кривая, расположенная на поверхности, определяется соотношением между u и v: $v = \Pi(u)$, и касательная к этой кривой представится уравнениями:

$$\frac{X - x}{\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\Pi'(u)} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Pi'(u)} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial \psi}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Pi'(u)}.$$

Исключив отсюда $\Pi'(u)$, мы придем к уравнению касательной плоскости (64).

62. Задача IV. *Если*

$$x=f(u, v, w), \quad y=\varphi(u, v, w), \quad z=\psi(u, v, w), \tag{65}$$

то для всякого соотношения между переменными x, y, z эти формулы дают соответствующее соотношение между u, v, w. Требуется выразить частные производные от z по переменным x, y через u, v, w и через частные производные от w по переменным u, v.

Эта задача приводится к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе. В самом деле, положим, что в формулах (65) w заменено функциею от u и v; тогда мы будем иметь выражения x, y, z через два параметра u, v, и достаточно применить прежний способ (§ 39), приняв f, φ, ψ за сложные функции от u, v, причем переменное w рассматривается как посредствующая функция от u, v. Например, для вычисления производных первого порядка p, q мы будем иметь два соотношения:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}=p\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=p\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

и то же самое для следующих производных.

Предыдущую задачу можно выразить геометрически следующим образом. Для всякой точки пространства m с координатами (x, y, z) можно определенным построением найти другую соответствующую точку M с координатами (X, Y, Z). Если точка m описывает поверхность S, то точка M описывает поверхность Σ, все свойства которой требуется вывести из свойств первой поверхности.

Формулы, определяющие это преобразование, имеют вид:

$$X=f(x, y, z), \quad Y=\varphi(x, y, z), \quad Z=\psi(x, y, z);$$

пусть будут

$$z=F(x, y), \quad Z=\Phi(X, Y)$$

уравнения двух поверхностей S, Σ.

Нам надо выразить частные производные P, Q, R, S, T, ... от функции $\Phi(X, Y)$ через x, y, z и через частные производные p, q, r, s, t, ... от функции $F(x, y)$. Но это именно та задача, которую мы только что рассматривали: вся разница только в обозначениях.

Производные первого порядка P и Q зависят только от x, y, z, p, q, так что рассматриваемое преобразование преобразует две касательные друг к другу поверхности также в две касательные. Но, как мы сейчас увидим на примерах, предыдущие преобразования не будут самыми общими из тех, которые обладают указанным свойством.

63. Преобразование Лежандра. Пусть будет $z=f(x, y)$ уравнение поверхности S. Свяжем каждую точку $m(x, y, z)$ поверхности S с соответствующею точкою $M(X, Y, Z)$, положив:

$$X=p, \quad Y=q, \quad Z=px+qy-z;$$

пусть будет $Z=\Phi(X, Y)$ уравнение поверхности Σ, описанной точкою M. Если мы предположим, что z, p, q заменены через f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, то мы получим выражения трех координат точки M в функции двух независимых переменных x, y.

Обозначим через P, Q, R, S, T частные производные от функции $\Phi(X, Y)$ по X, Y; соотношение

$$dZ=P\,dX+Q\,dY$$

дает:

$$p\,dx+q\,dy+x\,dp+y\,dq-dz=P\,dp+Q\,dq,$$

или

$$x\,dp+y\,dq=P\,dp+Q\,dq.$$

Предположим, что для рассматриваемой поверхности p и q будут независимы между собою, т. е. что не может быть тождества вида $\lambda\,dp+\mu\,dq=0$, в котором бы одновременно не было $\lambda=\mu=0$. Тогда из предыдущего соотношения мы найдем:

$$P=x, \quad Q=y.$$

Чтобы получить R, S, T, мы воспользуемся соотношениями:

$$dP=R\,dX+S\,dY,$$
$$dQ=S\,dX+T\,dY,$$

которые, после замены X, Y, P, Q их значениями, обращаются в

$$dx=R(r\,dx+s\,dy)+S(s\,dx+t\,dy),$$
$$dy=S(r\,dx+s\,dy)+T(s\,dx+t\,dy).$$

Отсюда получим:

$$Rr+Ss=1, \quad Rs+St=0,$$
$$Sr+Ts=0, \quad Ss+Tt=1,$$

и следовательно,

$$R=\frac{t}{rt-s^2}, \quad S=\frac{-s}{rt-s^2}, \quad T=\frac{r}{rt-s^2}.$$

Из предыдущих формул находим, обратно:

$$x=P, \quad y=Q, \quad z=PX+QY-Z, \quad p=X, \quad q=Y,$$
$$r=\frac{T}{RT-S^2}, \quad s=\frac{-S}{RT-S^2}, \quad t=\frac{R}{RT-S^2}.$$

Последние формулы показывают, что преобразование Лежандра — взаимное. Кроме того, это — преобразование прикосновения, так как X, Y, Z, P, Q зависят только от x, y, z, p, q. Эти свойства преобразования Лежандра будут ясны геометрически, если мы заметим, что предыдущие формулы определяют преобразование взаимными полярами относительно параболоида

$$x^2+y^2-2z=0.$$

Примечание. Выражения R, S, T обращаются в бесконечность, если для всех точек поверхности, описанной точкою m, существует соотношение $rt-s^2=0$. В этом случае точка M опишет не поверхность, а кривую, так как

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}=\frac{D(p, q)}{D(x, y)}=rt-s^2=0$$

и

$$\frac{D(X, Z)}{D(x, y)}=\frac{D(p, px+qy-z)}{D(x, y)}=y(rt-s^2)=0.$$

Это именно тот случай, который мы выше исключили из рассмотрения.

64. Преобразование Ампера. Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, положим

$$X=x, \quad Y=q, \quad Z=qy-z.$$

Соотношение

$$dZ=P\,dX+Q\,dY$$

обращается в

$$q\,dy+y\,dq-dz=P\,dx+Q\,dq,$$

или в

$$y\,dq-p\,dx=P\,dx+Q\,dq.$$

Таким образом мы имеем:

$$P=-p, \quad Q=y,$$

и, обратно,

$$x=X, \; y=Q, \quad z=QY-Z, \quad p=-P, \quad q=Y;$$

отсюда видно, что преобразование Ампера есть преобразование прикосновения и, кроме того, оно взаимное. Соотношение

$$dP=R\,dX+S\,dY$$

дает

$$-r\,dx-s\,dy=R\,dx+S(s\,dx+t\,dy),$$

т. е.

$$R+Ss=-r, \quad St=-s,$$

откуда находим:

$$R=\frac{s^2-rt}{t}, \quad S=-\frac{s}{t}.$$

Из соотношения $dQ=S\,dX+T\,dY$ мы также найдем:

$$T=\frac{1}{t}.$$

Как приложение этих формул, найдем все функции $f(x, y)$, удовлетворяющие соотношению $rt-s^2=0$. Пусть будет S поверхность, представляемая уравнением $z=f(x, y)$, Σ — преобразованная поверхность, и $Z=\Phi(X, Y)$ — уравнение поверхности Σ. Из выражения для R имеем:

$$R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}=0;$$

следовательно, Φ должно быть линейною функциею от X:

$$Z=X\varphi(Y)+\psi(Y),$$

где φ и ψ суть произвольные функции от Y. Из последнего уравнения находим:

$$P=\varphi(Y), \quad Q=X\varphi'(Y)+\psi'(Y),$$

и координаты (x, y, z) точки поверхности S выражаются обратно в функции двух переменных X, Y формулами:

$$x=X, \quad y=X\varphi'(Y)+\psi'(Y), \quad z=Y[(X\varphi'(Y)+\psi'(Y)]-X\varphi(Y)-\psi(Y).$$

Мы получим уравнение этой поверхности, исключив X, Y, или, что то же самое, исключив переменный параметр α из двух уравнений:

$$z=\alpha y-x\varphi(\alpha)-\psi(\alpha),$$
$$0=y-x\varphi'(\alpha)-\psi'(\alpha),$$

из которых первое представляет подвижную плоскость с параметром α, а второе получается от диференцирования первого относительно этого параметра. Таким образом мы получаем *развертывающиеся поверхности*, которые будут изучены дальше.

65. Уравнение потенциала в криволинейных координатах. Вычисления, нужные при замене переменных, могут быть в большинстве случаев упрощены различными искусственными приемами. Для примера возьмем уравнение потенциала в криволинейных ортогональных координатах *. Пусть будут

$$F\ (x, y, z) = \rho,$$
$$F_1 (x, y, z) = \rho_1,$$
$$F_2 (x, y, z) = \rho_2$$

уравнения трех семейств поверхностей, образующих тройную ортогональную систему, так что две какие-нибудь поверхости, принадлежащие к двум различным семействам, пересекаются всюду под прямым углом. Решив эти уравнения, мы получим x, y, z в функции параметров ρ, ρ_1, ρ_2:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\ (\rho, \rho_1, \rho_2), \\ y &= \varphi_1 (\rho, \rho_1, \rho_2), \\ z &= \varphi_2 (\rho, \rho_1, \rho_2); \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

ρ, ρ_1, ρ_2 образуют систему криволинейных ортогональных координат.

Так как поверхности трех предыдущих семейств ортогональны, то касательные к линиям пересечения этих поверхностей, взятых попарно, должны образовать трехгранный угол с тремя прямыми плоскими углами; поэтому должно быть:

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}=0,\quad S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0,\quad S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0, \qquad (67)$$

причем знак S указывает, что должно заменить φ через φ_1, потом через φ_2 и взять сумму этих трех произведений.

Эти условия ортогональности могут быть еще представлены в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}=0, \\ &\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\ldots=0,\quad \frac{\partial\rho_1}{\partial x}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\ldots=0. \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Посмотрим, какой вид примет уравнение потенциала

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

при переменных ρ, ρ_1, ρ_2. Мы имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial x},$$

далее,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\rho_1}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\\ +\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1^2}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial x^2}+\\ +\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_2^2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\rho_2}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

---

* Ламе (Lamé), Traité des coordonnées curvilignées. См. также Бертран, Traité de Calcul différentiel, т. I, стр. 181.

Если мы сложим три аналогичных уравнения, то, вследствие соотношений (68), исчезнут все производные вида $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\rho_1}$, и мы получим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\Delta_1(\rho)\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\Delta_1(\rho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1^2}+\Delta_1(\rho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_2^2}+$$
$$+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial\rho_2},$$

где Δ_1 и Δ_2 обозначают *диференциальные параметры* Ламе:

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Диференциальные параметры первого порядка $\Delta_1(\rho)$, $\Delta_1(\rho_1)$, $\Delta_1(\rho_2)$ легко вычислить.

Из соотношений (66) находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}=1,$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}=0;$$

умножая эти три уравнения на $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}$ и складывая, получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\right)^2};$$

таким же образом мы вычислим $\frac{\partial\rho}{\partial y}$ и $\frac{\partial\rho}{\partial z}$ и найдем:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\right)^2}.$$

Положив

$$H=\mathbf{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2,\quad H_1=\mathbf{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)^2,\quad H_2=\mathbf{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)^2,$$

причем знак $\mathbf{S}$ означает всегда, что должно заменить φ через φ_1, потом через φ_2, и сложить полученные выражения, мы будем иметь:

$$\Delta_1(\rho)=\frac{1}{H},\quad \Delta_1(\rho_1)=\frac{1}{H_1},\quad \Delta_1(\rho_2)=\frac{1}{H_2}.$$

Выражения $\Delta_2(\rho)$, $\Delta_2(\rho_1)$, $\Delta_2(\rho_2)$ в функции ρ, ρ_1, ρ_2 получаются у Ламе путем довольно утомительных вычислений, которые можно упростить следующим образом. В тождестве (69):

$$\Delta_2(V)=\frac{1}{H}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial\rho_2}$$

положим последовательно $V=x$, $V=y$, $V=z$; мы будем иметь три соотношения:

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_2}=0,$$

которые остается только решить относительно $\Delta_2(\rho)$, $\Delta_2(\rho_1)$, $\Delta_2(\rho_2)$. Например умножая их на $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}$ и складывая, мы получим:

$$\Delta_2(\rho)H+\frac{1}{H}\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=0.$$

Кроме того,

$$\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\rho},$$

и, диференцируя первое из соотношений (32) по ρ_1, находим:

$$\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}=-\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1\,\partial\rho}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}.$$

Таким же образом получим:

$$\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho},$$

и, следовательно,

$$\Delta_2(\rho)=-\frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial\rho}+\frac{1}{2HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}+\frac{1}{2HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}=-\frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\log\left(\frac{H}{H_1H_2}\right)\right].$$

Положив

$$H=\frac{1}{h^2},\quad H_1=\frac{1}{h_1^2},\quad H_2=\frac{1}{h_2^2},$$

мы можем представить последнюю формулу в виде:

$$\Delta_2(\rho)=h^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right).$$

Точно так же найдем:

$$\Delta_2(\rho_1)=h_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right),\quad \Delta_2(\rho_2)=h_2^2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right).$$

Таким образом формула (69) окончательно принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=h^2\left[\frac{\partial^2V}{\partial\rho^2}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho}\right]+$$
$$+h_1^2\left[\frac{\partial^2V}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right]+h_2^2\left[\frac{\partial^2V}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right],\tag{70}$$

или, короче,

$$\Delta_2V=h\,h_1\,h_2\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{hh_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{hh_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)\right].$$

Применим эту формулу к полярным координатам. Заменяя ρ_1 и ρ_2 через θ и φ, мы получим следующие формулы преобразования:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta;$$

коэфициенты h, h_1, h_2 примут значения:

$$h=1,\quad h_1=\frac{1}{\rho},\quad h_2=\frac{1}{\rho\sin\theta},$$

и общая формула обращается в

$$\Delta_2 V=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right],$$

или в

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

как это легко вывести и непосредственно.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Полагая $u=x^2+y^2+z^2$, $v=x+y+z$, $w=xy+yz+zx$, имеем тождественно $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=0$. Найти соотношение между u, v, w.

Обобщить эту задачу

2. Если

$$u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}},\quad\ldots,\quad u_n=\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}};$$

то

$$\frac{D(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{1}{\left(1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

3. Если положим

$$\begin{aligned}
x_1&=\cos\varphi_1,\\
x_2&=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
x_3&=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n&=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,
\end{aligned}$$

то будем иметь:

$$\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}=(-1)^n\sin^n\varphi_1\sin^{n-1}\varphi_2\sin^{n-2}\varphi_3\ldots\sin^2\varphi_{n-1}\sin\varphi_n.$$

4. Проверить непосредственным вычислением, что функция $z=F(x,y)$, определяемая двумя уравнениями:

$$\begin{aligned}
z&=ax+yf(a)+\varphi(a),\\
0&=x+yf'(a)+\varphi'(a),
\end{aligned}$$

где a есть вспомогательное переменное, удовлетворяет соотношению $rt-s^2=0$ при произвольных функциях $f(a)$ и $\varphi(a)$.

5. Показать, что всякая неявная функция $z=F(x,y)$, определяемая уравнением вида

$$y=x\varphi(z)+\psi(z),$$

удовлетворяет соотношению

$$rp^2-2pqs+tp^2=0$$

при произвольных функциях $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

6. Функция $z=F(x,y)$, определяемая двумя уравнениями:

$$z\varphi'(a)=[y-\varphi(a)]^2,\quad (x+a)\varphi'(a)=y-\varphi(a),$$

где α есть вспомогательное переменное, удовлетворяет соотношению $pq = z$ при произвольной функции $\varphi(\alpha)$.

7. Функция $z = F(x, y)$, определяемая двумя уравнениями:

$$[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), \quad [z - \varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha) = \alpha y^2,$$

удовлетворяет соотношению

$$pq = xy.$$

8. Формула Лагранжа. Пусть будет y неявная функция двух переменных x и α, определяемая соотношением:

$$y = \alpha + x\varphi(y),$$

и $u = f(y)$ — какая-нибудь функция от y. Мы имеем вообще:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}\left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

[Лаплас.]

Ответ. Доказательство основывается на двух формулах:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right], \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

где u есть произвольная функция от y, а $F(u)$ — произвольная функция от u; затем нужно показать, что если формула верна для какого-нибудь значения n, то она будет также верна и для значения $n+1$.

При $x = 0$, y обращается в α, u — в $f(\alpha)$, и производная n-го порядка от u по x принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}\left[\varphi(\alpha)^n f'(\alpha)\right].$$

9. Если $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, и функции $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

то будем иметь тождественно:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

10. Если функция $V(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

то ему удовлетворяет и функция

$$\frac{1}{r}\,V\left(k^2\frac{x}{r^2},\ k^2\frac{y}{r^2},\ k^2\frac{z}{r^2}\right),$$

[Кельвин (Lord Kelvin).]

где k — постоянное, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

11. Пусть будут $V(x, y, z)$ и $V_1(x, y, z)$ два интеграла уравнения $\Delta_2 V = 0$; функция

$$U = V(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)\,V_1(x, y, z)$$

удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2\Delta_2 U = 0.$$

12. Какой вид принимает уравнение

$$(x - x^3)\,y'' + (1 - 3x^2)\,y' - xy = 0,$$

если сделать замену независимого переменного $x = \sqrt{1 - t^2}$?

— 13. Какой вид примет уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0,$$

если сделать замену переменных $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$?

· 14. Пусть будет $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функция $2n$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n$, однородная, второй степени относительно переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Если положим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = p_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_n} = p_n$$

и примем $p_1, p_2, \ldots, p_n$ за независимые переменные вместо $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то функция φ обратится в функцию

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Показать, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_k} = u_k, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

15. В каждой точке M поверхности S проведена нормаль NM к этой поверхности; пусть будет N точка пересечения этой нормали с данною плоскостью P. Отложим на перпендикуляре к плоскости P, проведенном через точку N, длину $Nm = NM$. Найти касательную плоскость к поверхности, описанной точкою m.

Это преобразование есть преобразование прикосновения. Изучить обратное преобразование.

16. Отложим на каждой нормали к поверхности S, считая от ее основания, постоянную длину l; полученные, таким образом, точки образуют поверхность Σ (*параллельные поверхности*); найти касательную плоскость к этой поверхности Σ.

Та же задача для плоской кривой.

17. Даны поверхность S и точка O; соединим O с какой-нибудь точкою M поверхности S. Проведем плоскость OMN через радиус OM и нормаль MN к поверхности S в точке M; в точке O восставим в плоскости OMN перпендикуляр к радиусу OM и отложим на нем длину $OP = OM$. Точка P опишет поверхность Σ, которая называется *апсидальною* относительно первой поверхности S. Найти касательную плоскость к этой поверхности.

Предыдущее преобразование есть преобразование прикосновения, и связь между поверхностями S и Σ — взаимна. Если поверхность S представляет эллипсоид, и точка O находится в его центре, то поверхность Σ есть поверхность волн,

18. Д и ф е р е н ц и а л ь н ы й и н в а р и а н т А л ь ф а н а (Halphen). Диференциальное уравнение

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5} - 45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$$

не меняет вида, если над x и y будет выполнено произвольное гомографическое преобразование (§ 37).

— 19. В выражении

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где P, Q, R суть функции от x, y, z, положим

$$x = f(u, v, w), \quad y = \varphi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w),$$

где u, v, w — новые переменные. Тогда предыдущее выражение обратится в выражение того же вида:

$$P_1\,du + Q_1\,dv + R_1\,dw,$$

где P_1, Q_1, R_1 суть функции от u, v, w. Доказать тождество

$$H_1 = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} H,$$

где

$$H = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1 = P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w} - \frac{\partial R_1}{\partial v}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial P_1}{\partial w}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v} - \frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

20. Билинейный ковариант. Пусть будет Θ_d линейная форма диференциалов

$$\Theta_d = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим выражение

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k,$$

содержащее две системы диференциалов d, δ, и где

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

Если мы сделаем какую-нибудь замену переменных

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то выражение Θ_d обратится в выражение того же вида:

$$\Theta'_d = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_n dy_n,$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ суть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$; пусть будет также

$$a'_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}$$

и

$$H' = \sum_i \sum_k a'_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

После замены в H диференциалов dx_i и δx_k через

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} dy_n,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_2} \delta y_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} \delta y_n$$

будем иметь тождественно $H = H'$.

H называется *билинейным ковариантом* выражения Θ_d.

21. Диференциальные параметры Бельтрами (Beltrami). Дано выражение

$$E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2,$$

где E, F, G суть функции переменных x и y; если мы сделаем замену переменных $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, то получим выражение того же вида:

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2,$$

где E_1, F_1, G_1 суть функции от u и v. Пусть будет $\theta(x, y)$ какая-нибудь функция переменных x, y, обращающаяся в $\theta_1(u, v)$ после такой замены переменных. Доказать, что

$$\frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2-2F\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2}{EG-F^2}=\frac{G_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2-2F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+E_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2}{E_1G_1-F_1^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G\frac{\partial\theta}{\partial x}-F\frac{\partial\theta}{\partial y}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E\frac{\partial\theta}{\partial y}-F\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}-F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v}}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v}-F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\right).$$

22. Шварциан. Если мы положим $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где x есть функция от t, и a, b, c, d суть какие-нибудь постоянные, то

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2;$$

здесь $x', x'', x''', y', y'', y'''$ обозначают производные, взятые по переменному t.

23. Пусть будут u и v две какие-нибудь функции двух независимых переменных x и y. Положим

$$U=\frac{au+bv+c}{a''u+b''v+c''},\quad V=\frac{a'u+b'v+c'}{a''u+b''v+c''},$$

где $a, b, c, \ldots, c''$ — постоянные. Полагая

$$(u, v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x};\quad (U, V)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y},$$

доказать следующие равенства:

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}}{(u, v)}=\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial x}}{(U, V)},$$

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)}{(u, v)}=$$

$$=\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y}+2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)}{(U, V)},$$

и аналогичные равенства, получающиеся от перестановки x и y.

[Гурса и Пенлеве (Painlevé), *Comptes rendus*, 1887.]

24. Найти наибольшие и наименьшие значения расстояния от точки до плоской кривой, до кривой двойной кривизны, между двумя точками двух кривых, между двумя точками двух поверхностей.

25. Точки поверхности S, для которых сумма квадратов расстояний до n данных точек будет наибольшею или наименьшею, суть основания нормалей, опущенных на эту поверхность из центра средних расстояний для этих n точек*.

* Центр средних расстояний есть точка, декартовы координаты которой равны средним арифметическим одноименных координат данных точек. (*Ред.*)

26. Из всех четырехугольников с четырьмя данными сторонами тот, который имеет наибольшую поверхность, может быть вписан в окружность.

Обобщить на n-угольник.

27. Найти максимум объема прямоугольного параллелепипеда, вписанного в эллипсоид.

28. Найти оси центральной кривой второго порядка, рассматривая вершины как точки, расстояние которых от центра будет наибольшим или наименьшим

29. Та же задача для осей центрального сечения эллипсоида.

30. Найти эллипс с наименьшей площадью, проходящий через три вершины треугольника, и эллипсоид с наименьшим объемом, проходящий через четыре вершины тетраэдра.

31. Найти кратчайшее расстояние между окружностью и прямою в пространстве.

32. Квадрат модуля определителя D с мнимыми элементами не больше, чем корень квадратный из произведения сумм квадратов модулей элементов каждой строки. (Адамар.)

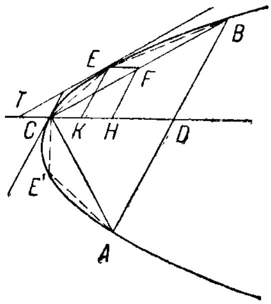
ГЛАВА IV.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

I. РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ КВАДРАТУРЫ.

66. Квадратура параболы. Определение площади плоской кривой есть одна из задач, решение которой особенно привлекало изобретательность геометров. Из примеров, оставленных нам древними, особенно замечательна квадратура параболы, данная Архимедом; мы изложим здесь его метод.

Пусть требуется определить площадь, заключающуюся между дугою параболы ACB и хордою AB. Проведем диаметр CD, соединяющий середину D хорды AB с точкою C, в которой касательная параллельна хорде AB; проведем хорды BC и AC и возьмем точки E, E', в которых касательные соответственно параллельны хордам BC и AC. Прежде всего сравним площадь треугольника BEC с площадью треугольника ABC. Проведем касательную ET, пересекающую CD в точке T, диаметр EF, пересекающий CB в точке F, и, наконец, прямые EK, FH, параллельные хорде AB. По основному свойству параболы $TC = CK$; кроме того, $CT = EF = KH$, и следовательно, $EF = \frac{CH}{2} = \frac{CD}{4}$. Площади треугольников BCE, BDC, имеющих общее основание BC, относятся между собою, как высоты, или как прямые EF, CD. Следовательно, площадь треугольника BCE равна четверти площади треугольника BCD, или восьмой части площади S треугольника ABC. Площадь треугольника ACE' имеет, очевидно, ту же величину. Производя те же действия относительно каждой из хорд BE, CE, CE', $E'A$, мы получим четыре новых треугольника, причем площадь каждого из них будет равна $\frac{S}{8^2}$, и т. д.; n-я операция приведет к 2^n треугольникам, и площадь каждого из них будет равна $\frac{S}{8^n}$. Площадь сегмента параболы, очевидно, равна пределу, к которому стремится сумма площадей всех этих треугольников при неограниченном возрастании n, т. е. равна сумме геометрической убывающей прогрессии:

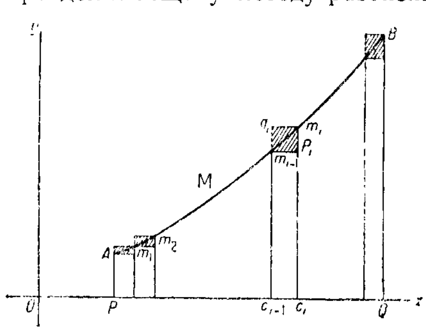


Черт. 7.

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \dots + \frac{S}{4^n} + \dots,$$

или $\frac{4S}{3}$. Таким образом мы видим, что искомая площадь *равна* $\frac{2}{3}$ *площади параллелограма, построенного на AB и CD.*

При всем удивлении перед остроумием этого метода нельзя, однако, не заметить, что здесь успех зависит исключительно от частного свойства параболы, и что этот прием совершенно не имеет общности. Другие примеры квадратуры, данные древними, которые мы могли бы привести, только подтвердили бы это замечание; каждая новая кривая требовала нового приема. Но каков бы ни был этот прием, всегда разбивали данную площадь на элементы, число которых неограниченно увеличивали, и всегда нужно было искать предел суммы этих частичных площадей. Не останавливаясь на всех этих частных приемах*, мы прямо перейдем к общему методу разбиения, который естественным путем приведет нас к интегральному исчислению.



Черт. 8.

67. Общий метод. Пусть будет $y=f(x)$ функция непрерывная, положительная и возрастающая в интервале (a, b); этой функции соответствует дуга кривой AMB, расположенная выше оси Ox. Поставим себе задачу вычислить площадь, ограниченную дугой AMB, двумя ординатами AP, BQ и отрезком PQ (черт. 8). Для этого разобьем отрезок PQ на некоторое число меньших отрезков промежуточными точками с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, причем эти абсциссы возрастают вместе с индексом, и через точки деления проведем параллели к Oy. Тогда подлежащая вычислению площадь окажется разбитой на определенное число криволинейных трапеций.

Рассмотрим, например, криволинейную трапецию $c_{i-1}\, m_{i-1}\, m_i c_i$.

Площадь этой трапеции, очевидно, заключена между площадями r_i прямоугольника $c_{i-1}m_{i-1}p_ic_i$ и R_i прямоугольника $c_{i-1}q_im_ic_i$. Обозначая через A подлежащую вычислению площадь, мы имеем, следовательно, двойное неравенство:

$$\sum r_i < A < \sum R_i.$$

Нетрудно вычислить $\sum r_i$ и $\sum R_i$:

$$s=\sum r_i = f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$
$$S=\sum R_i = f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(b)(b-x_{n-1}).$$

Разность $S-s$ имеет выражение:

$$S-s=(x_1-a)[f(x)-f(a)]+(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]+\ldots$$
$$\ldots+(b-x_{n-1})[f(b)-f(x_{n-1})].$$

* В „Traité" Дюамеля (Duhamel) можно найти большое число примеров определения площадей, дуг и объемов по способу древних.

Пусть η есть наибольшая из разностей $x_1 - a$, $x_2 - x_1$; ясно, что правая часть увеличится, если мы заменим все эти разности через η. Следовательно,

$$S - s < \eta\,[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})],$$

или

$$S - s < \eta\,[f(b) - f(a)].$$

Разность $S - s$ стремится, следовательно, к нулю, когда число n неограниченно возрастает и притом так, что наибольшая из разностей $x_i - x_{i-1}$ стремится к нулю. При тех же условиях разности $S - A$, $A - s$ и подавно будут стремиться к нулю, и A есть общий предел двух сумм S и s. Мы имеем, например:

$$A = \lim\,[(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})]. \qquad (1)$$

Рассуждение остается тем же, если функция $f(x)$ убывает в интервале (a, b). Если бы функция имела определенное число максимумов или минимумов в этом интервале, то мы разбили бы весь интервал на несколько частичных интервалов ординатами точек, где $f(x)$ имеет максимум или минимум.

Приведем пример, принадлежащий Ферма (Fermat). Пусть требуется найти площадь, ограниченную кривой $y = Ax^{\mu}$, осью x и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ $(0 < a < b)$, причем показатель μ произволен. Для этого вставим $n - 1$ средних геометрических между a и b; мы получим последовательность:

$$a,\ a(1+\alpha),\ a(1+\alpha)^2,\ \ldots,\ a(1+\alpha)^{n-1},\ b,$$

где число α удовлетворяет условию $a(1+\alpha)^n = b$; если числа этой последовательности взять за точки деления, то соответствующие ординаты получат значения

$$Aa^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{2\mu},\ \ldots,$$

а площадь p-го прямоугольника будет иметь выражение:

$$[a(1+\alpha)^p - a(1+\alpha)^{p-1}]\,Aa^{\mu}(1+\alpha)^{(p-1)\mu} = Aa^{\mu+1}\alpha(1+\alpha)^{(p-1)(\mu+1)}.$$

Сумма площадей всех этих прямоугольников будет, следовательно, равна

$$Aa^{\mu+1}\alpha\,[1 + (1+\alpha)^{\mu+1} + (1+\alpha)^{2(\mu+1)} + \ldots + (1+\alpha)^{(n-1)(\mu+1)}];$$

если $\mu + 1$ не равно нулю, что мы предположим сначала, то сумма, стоящая в скобках, равна

$$\frac{(1+\alpha)^{n(\mu+\nu)} - 1}{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1},$$

и, заменяя $a(1+\alpha)^n$ через b, мы можем написать предшествующую сумму так:

$$A\,(b^{\mu+1} - a^{\mu+1})\,\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1}.$$

Когда α стремится к нулю, отношение $\dfrac{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1}{\alpha}$ имеет пределом производную от $(1+\alpha)^{\mu+1}$ по α, при $\alpha=0$, т. е. $\mu+1$; следовательно, искомая площадь равна

$$\frac{A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})}{\mu+1}.$$

Если $\mu=-1$, то эти вычисления уже не имеют места.

Сумма площадей вписанных прямоугольников равна $nA\alpha$, и нужно искать предел произведения $n\alpha$, где n и α связаны соотношением:

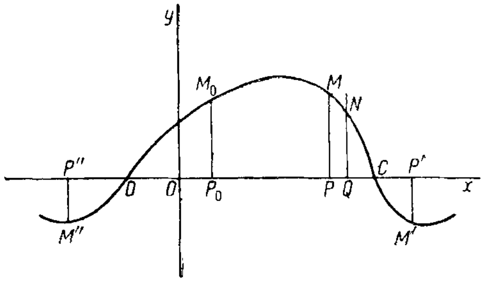
$$a(1+\alpha)^n=b.$$

Отсюда мы находим:

$$n\alpha=\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}=\ln\frac{b}{a}\,\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

где ln обозначает неперов логарифм; когда α стремится к нулю, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ имеет пределом число e, а произведение $n\alpha$ имеет пределом $\ln\frac{b}{a}$. Искомая площадь равна, следовательно, $A\ln\frac{b}{a}$.

68. Начальные функции. Изобретение интегрального исчисления привело вычисление площадей к нахождению функций, имеющих своею производною данную функцию. Пусть будет $y=f(x)$ уравнение кривой, отнесенной к двум прямоугольным осям, и пусть функция $f(x)$ непрерывна. Рассмотрим площадь $\mathfrak{A}$, заключающуюся между этою кривою, осью x, неподвижною ординатою M_0P_0 и переменною ординатою MP. Будем считать эту площадь функциею абсциссы x переменной ординаты MP. Эта площадь $\mathfrak{A}$ есть, очевидно, непрерывная функция от x, если только функция $f(x)$ сама непрерывна. Чтобы охватить все возможные случаи, условимся обозначать через $\mathfrak{A}$ алгебраическую сумму площадей, ограниченных данною кривою, осью x и прямыми M_0P_0, MP, приписывая каждой из частей, из которых может слагаться эта площадь, знак $+$ для площадей, лежащих направо от M_0P_0 и над Ox, знак $-$ для площадей, лежащих направо от M_0P_0 и под Ox. Площадям, расположенным налево от M_0P_0, мы будем давать противоположные знаки. Таким образом, если MP занимает положение $M'P'$, то мы будем брать $\mathfrak{A}$ равным разности двух площадей:



Черт. 9.

$$MP_0C-M'P'C;$$

точно так же, если MP находится в $M''P''$, то мы будем брать $\mathfrak{A}=M''P''D-M_0P_0D$.

Покажем теперь, что непрерывная функция $\mathfrak{A}$, определенная предыдущими условиями, имеет своею производною функцию $f(x)$. Возьмем, как показано на чертеже, две близкие между собою ординаты MP, NQ с абсциссами x и $x+\Delta x$. Приращение площади $\Delta\mathfrak{A}$, очевидно, заключается между площадями двух прямоугольников, имеющих общее основание PQ, а высотами соответственно наибольшую и наименьшую из ординат дуги MN.

Обозначая эти ординаты максимум и минимум через H и h, мы можем написать:

$$h\Delta x < \Delta\mathfrak{A} < H\Delta x,$$

или, разделив на Δx, $h < \frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta x} < H$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то при приближении Δx к нулю H и h имеют общий предел MP, или $f(x)$; следовательно, функция $\mathfrak{A}$ имеет своею производною функцию $f(x)$. Читатель легко убедится, что этот результат остается без изменения при всяком положении точки M.

Если нам уже известна одна из *начальных функций* от $f(x)$, т. е. какая-нибудь функция $F(x)$, имеющая своею производною функцию $f(x)$, то разность $\mathfrak{A} - F(x)$, производная которой равна нулю, равна некоторому постоянному C (§ 8). Чтобы определить это постоянное C, достаточно заметить, что площадь $\mathfrak{A}$ равна нулю для абсциссы $x=a$ прямой M_0P_0. Поэтому

$$\mathfrak{A} = F(x) - F(a).$$

Предыдущее рассуждение показывает, что определение площади приводится к разысканию начальной функции; с другой стороны (и для нас это второе следствие еще важнее), оно показывает, что ***всякая непрерывная функция $f(x)$ есть производная от другой функции***. Таким образом эта основная теорема доказывается здесь при помощи несколько неопределенного геометрического понятия площади плоской кривой. Этим доказательством долгое время довольствовались, но теперь оно не может считаться достаточным. Чтобы поставить интегральное исчисление на прочном основании, необходимо дать этой теореме чисто аналитическое доказательство, не обращаясь к геометрическому представлению. Предыдущее доказательство приведено здесь не только вследствие его исторического интереса, но и потому, что оно дает нам главный аналитический элемент нового доказательства. Действительно, в этом последнем главную роль будет играть изучение сумм вида (1), а также сумм несколько более общего вида. Прежде чем обратиться к изучению этих сумм, нам необходимо сделать несколько замечаний относительно общих свойств функций и, в частности, — функций непрерывных *.

---

* Из важнейших работ по вопросу о геометрическом значении определенного интеграла следует указать здесь на мемуар Римана (Riemann), Über die Darstellbarkeit, einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe (Werke, 2-е издание, 1892, стр. 239. Французский перевод, Oeuvres de Riemann, traduites par Laugel, стр. 225), и уже упомянутый нами мемуар Дарбу, Sur les fonctions discontinues (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 2-я серия, т. V).

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ, С НИМИ СВЯЗАННЫЕ.

69. Суммы S и s. Пусть будет $f(x)$ ограниченная функция, непрерывная или прерывная в промежутке (a, b), причем $a < b$. Предположим, что промежуток (a, b) разбит на некоторое число частичных более мелких промежутков (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{p-1}, b), причем числа $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ образуют возрастающую последовательность. Обозначим через M и m границы функции $f(x)$ в целом промежутке, через M_i и m_i — ее границы в промежутке (x_{i-1}, x_i) и положим

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_p(b - x_{p-1}),$$
$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_p(b - x_{p-1}).$$

Всякому способу разбиения (a, b) на более мелкие промежутки соответствуют свои суммы S и $s < S$. Все суммы S, очевидно, больше $m(b-a)$, так как все числа M_i больше m; следовательно, эти суммы S имеют нижнюю границу I. Точно так же все суммы s меньше $M(b-a)$ и, следовательно, имеют верхнюю границу I'. Мы докажем, что *I' не может быть больше I*. Для этого, очевидно, достаточно показать, что если даны два каких-нибудь способа разбиения промежутка (a, b), которым соответствуют суммы S и s, S' и s', то:

$$s < S', \quad s' < S.$$

Предположим сначала, что каждый из промежутков (a, x_1), (x_1, x_2), ... новыми точками деления разбит на более мелкие промежутки, и пусть будет

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{i-1}, x_2, y_{i+1}, \ldots, b$$

получившаяся новая последовательность. Такое новое разбиение мы назовем *последующим* относительно первоначального. Обозначим суммы, аналогичные S и s и относящиеся к этому новому разбиению промежутка (a, b), через Σ и σ и сравним S и Σ, s и σ. Сравним, например, части двух сумм S и Σ, относящиеся к промежутку (a, x_1). Пусть будут M'_1 и m'_1 границы функции $f(x)$ в промежутке (a, y_1), M'_2 и m'_2 — ее границы в промежутке (y_1, y_2), ..., M'_k и m'_k — границы в промежутке (y_{k-1}, x_1). Часть суммы Σ, происходящая от (a, x_1), равна:

$$M'_1(y_1 - a) + M'_2(y_2 - y_1) + \ldots + M'_k(x_1 - y_{k-1}).$$

Так как числа $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$ не могут быть больше M_1, то ясно, что предыдущая сумма не может быть больше $M_1(x_1 - a)$. Точно так же часть суммы Σ, происходящая от промежутка (x_1, x_2), не может быть больше $M_2(x_2 - x_1)$, и т. д. Складывая все эти неравенства, мы находим $\Sigma \leqslant S$, и точно так же мы нашли бы, что $\sigma \geqslant s$.

Рассмотрим теперь два каких-нибудь способа разбиения, которым соответствуют суммы S и s, S' и s'. Рассматривая одновременно точки деления обоих предыдущих разбиений, мы получим третий способ разбиения, который может быть рассматриваем как последующий относительно каждого из двух первых. Пусть будут Σ' и σ суммы, относящиеся к этому вспомогательному разбиению. На основании предыдущего мы имеем неравенства:

$$\Sigma \leqslant S, \quad \sigma \geqslant s, \quad \Sigma \leqslant S', \quad \sigma \geqslant s'.$$

Так как Σ больше σ, то отсюда следует, что $s' < S$, $s < S'$. Таким образом все суммы S будут больше сумм s, и граница J не может быть меньше предела J'; следовательно, $J \geqslant J'$.

70. Теорема Дарбу. Пусть будет $f(x)$ какая-нибудь функция от x, ограниченная в промежутке (a, b). *Каков бы ни был закон разбиения промежутка (a, b) на части, суммы S и s стремятся соответственно к J и J', если число частичных промежутков неограниченно возрастает, так что каждый из этих промежутков стремится к нулю*

Докажем это, например, для сумм S. Предположим, что $a < b$, и что функция $f(x)$ в промежутке (a, b) положительна; последнему условию всегда можно удовлетворить, прибавив к функции $f(x)$ соответствующее постоянное, что равносильно увеличению всех сумм S на постоянное количество. Так как число J есть нижняя граница сумм S, то можно найти такой частный способ разбиения

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b$$

для которого сумма S будет меньше $J + \frac{\varepsilon}{2}$, где ε есть произвольное положительное число. Рассмотрим теперь какое-нибудь разбиение промежутка (a, b) на промежутки меньшие, чем η, и найдем верхнюю границу соответствующей суммы S'. Возьмем, с одной стороны, промежутки, не содержащие ни одной из прежних точек деления $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$; применяя рассуждения § 69, мы видим, что они дадут в S' часть, меньшую первоначальной суммы S, т. е. меньшую $J + \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, число промежутков, содержащих какую-нибудь из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, не может быть больше $p-1$, и, обозначая через M верхний предел $f(x)$, мы найдем, что эти промежутки дадут в сумме S' часть, которая не может превзойти $(p-1)M\eta$. Следовательно,

$$S' < J + \frac{\varepsilon}{2} + (p-1)M\eta.$$

Таким образом достаточно взять η меньшим $\frac{\varepsilon}{2M(p-1)}$, чтобы сумма S была меньше $J + \varepsilon$.

Точно так же можно доказать, что суммы s имеют пределом J'. Если $f(x)$ произвольна, то эти два предела J и J' различны. Для того чтобы функция была интегрируемою, необходимо и достаточно, чтобы было

$$J' = J.$$

Примечание. Если произвольно изменить значение ограниченной функции в конечном числе точек промежутка, очевидно, что разности $S - S'$, $s - s'$ между двумя суммами, соответствующими одному и тому же разделению, стремятся к нулю, когда наибольшая длина интегралов стремится к нулю. Числа J и J' одни и те же для обеих функций.

71. Интегрируемые функции. Функция, ограниченная в промежутке (a, b), называется *интегрируемою* в этом промежутке, если обе суммы S и s стремятся к общему пределу, когда число частичных промежутков неограниченно возрастает таким образом, что каждый из этих промежутков стремится к нулю.

Для того чтобы функция была интегрируемою в промежутке (a, b), необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа ε можно было найти такое соответствующее положительное число η, чтобы $S-s$ было меньше ε, когда все частичные промежутки будут меньше η.

Это условие *необходимо.* В самом деле, если S и s имеют общий предел I, то можно найти настолько малое число η, чтобы $|S-I|$ и $|s-I|$ были меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если все частичные промежутки будут меньше η. Отсюда, a fortiori, будем иметь $S-s<\varepsilon$.

Это условие вместе с тем и *достаточное.* В самом деле, мы имеем:

$$S-s=S-I+I-I'+I'-s.$$

Ни одно из чисел $S-I$, $I-I'$, $I'-s$ не может быть отрицательным; чтобы их сумма была меньше ε, необходимо, чтобы каждое из них было меньше ε. Но $I-I'$ есть определенное число, положительное или нуль, тогда как ε — произвольное положительное число; поэтому необходимо $I'=I$. Далее, для того чтобы было $S-I<\varepsilon, I-s<\varepsilon$, когда все частичные промежутки будут меньше η, необходимо, чтобы суммы S и s имели общий предел I.

Всякая непрерывная функция интегрируема. В самом деле, разность $S-s$ не превосходит $(b-a)\omega$, где ω обозначает верхний предел колебания $f(x)$ в каждом частичном промежутке. Но всегда можно найти такое число η, чтобы во всяком промежутке, меньшем η, колебание функции $f(x)$ было меньше любого данного положительного числа (§ 8). Если мы возьмем η таким образом, чтобы колебание было меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$, то разность $S-s$ будет меньше ε.

Всякая монотонная функция интегрируема. Пусть $f(x)$ — возрастающая функция. Разобьем промежуток (a, b) на n частичных промежутков, меньших η. Мы можем написать:

$$S=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+(b)(b-x_{n-1}),$$
$$s=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

В самом деле, например, в промежутке (a, x_1) верхний предел функции равен $f(x_1)$, а нижний предел равен $f(a)$, и т. д. для других промежутков.

Отсюда получаем:

$$S-s=(x_1-a)[f(x_1)-f(a)]+(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]+\ldots$$
$$\ldots+(b-x_{n-1})[f(b)-f(x_{n-1})].$$

Все разности, стоящие в правой части, суть положительные числа, и все разности $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ... меньше η. Следовательно,

$$S - s < \eta\,[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})],$$

т. е.

$$S - s < \eta\,[f(b) - f(a)].$$

Если мы возьмем

$$\eta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

то имеем $S - s < \varepsilon$. Это рассуждение применимо и к функции убывающей.

Пусть будет $a_1, a_2, \ldots, a_p$ любая последовательность возрастающих чисел от a до b. *Если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема в каждом из промежутков $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_p, b)$, то она интегрируема в целом промежутке (a, b).* В самом деле, если рассмотреть подразделение каждого из интервалов (a_i, a_{i+1}), такое, чтобы разность $S - s$ была для каждого интервала меньше, чем ε, то соответствующая разность для целого промежутка будет меньше $p\varepsilon$.

Ограниченная функция $f(x)$, имеющая любое число точек разрыва внутри промежутка, интегрируема, *если можно заключить все эти разрывы в конечное число интервалов, сумма которых меньше любого заданного положительного числа.* В самом деле, пусть ε — любое положительное число, и пусть H — верхняя грань $|f(x)|$; по предположению, мы можем заключить точки разрыва $f(x)$ в конечное число интервалов, сумма амплитуд которых меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4H}$. Доля $S - s$, происходящая от этих интервалов, очевидно, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, так как функция $f(x)$ непрерывна в оставшихся интервалах, их тоже можно подразделить на более мелкие частичные интервалы, так что соответствующая часть $S - s$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $S - s < \varepsilon$. В частности, *ограниченная функция, имеющая в промежутке (a, b) лишь конечное число точек разрыва, интегрируема в этом промежутке.*

Из определения также следует непосредственно, что, если функция $f(x)$ интегрируема, то тем же свойством обладает $Cf(x)$, каково бы ни было постоянное C. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две интегрируемых функции, то интегрируема также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$. В самом деле, пусть будут $S, s, S', s', \Sigma, \sigma$ суммы этих трех функций, соответствующих одному и тому же разбиению промежутка; легко убедиться, что $\Sigma - \sigma \leqslant S - s + S' - s'$. В частности, всякая функция с ограниченным изменением (§ 11), будучи суммой двух монотонных функций, является интегрируемой.

Докажем еще, что *произведение двух интегрируемых функций есть функция интегрируемая.* Предположим сначала, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *положительны*; пусть будут $M_i, m_i, M'_i, m'_i, \mathfrak{M}_i, \mu_i$ верхние и нижние грани трех функций $f_1(x), f_2(x), f_1(x)\,f_2(x)$ в промежутке (x_{i-1}, x_i); $S, s, S', s', \Sigma, \sigma$ — соответствующие суммы для некоторого разбиения (a, b). Очевидно,

$$\mathfrak{M}_i \leqslant M_i M'_i, \quad \mu_i \geqslant m_i m'_i,$$

следовательно,

$$\mathfrak{M}_i - \mu_i \leqslant M_i M_i' - m_i m_i' = M_i (M_i' - m_i') + m_i' (M_i - m_i),$$

и подавно

$$\mathfrak{M}_i - \mu_i \leqslant M (M_i' - m_i') + M' (M_i - m_i),$$

где через M и M' обозначены верхние границы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в промежутке (a, b). Умножая это неравенство на $x_i - x_{i-1}$ и складывая все аналогичные неравенства, получаем:

$$\sum - \sigma \leqslant M (S' - s') + M' (S - s).$$

Следовательно, разность $\Sigma - \sigma$ стремится к нулю.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют любые знаки, к ним всегда можно прибавить два постоянных C_1 и C_2, так чтобы $f_1(x) + C_1$, $f_2(x) + C_2$ были положительны. Так как произведение

$$[f_1(x) + C_1][f_2(x) + C_2] = f_1 f_2 + C_1 f_2 + C_2 f_1 + C_1 C_2$$

интегрируемо, то это справедливо и для $f_1 f_2$.

Сопоставляя эти различные предложения, мы видим, что если $f_1, f_2, \ldots, f_p$ суть интегрируемые функции, то любой целый многочлен относительно $f_1, f_2, \ldots, f_p$ является также интегрируемой функцией.

72. Определенные интегралы. Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция в промежутке (a, b). Общий предел сумм S и s называется определенным интегралом и изображается символом

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

напоминающим его происхождение: $\int$ — есть стилизованная буква s. По самому определению I всегда заключен между двумя суммами S и s, соответствующими любому способу разбиения; если в качестве приближенного значения для I взять какое-нибудь число, заключенное между S и s, то допущенная при этом погрешность меньше разности $S - s$.

Обратимся к общему случаю. В определении интеграла можно заменить суммы S и s более общим выражением. Пусть дано разбиение промежутка (a, b):

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b.$$

Пусть будут $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ значения переменного x, принадлежащие соответственно каждому из этих промежутков, так что $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. Сумма:

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{2}$$

очевидно, заключается между суммами S и s, так как всегда $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$; если функция интегрируема, то эта сумма также имеет пределом I. В частности, если мы предположим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

совпадают соответственно с a, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, то получим сумму (1), рассмотренную выше (§ 67). Произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ называется *элементом* интеграла.

Из определения интеграла непосредственно вытекает несколько следствий. Мы предполагали $a < b$. Если мы переместим пределы a и b, то все множители $x_i - x_{i-1}$ изменят знаки, и сам предел переменит знак; следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Из определения интеграла следует также, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если c заключается между a и b, то это равенство очевидно; если же, например, b заключается между a и c, то предыдущая формула также верна, если только функция $f(x)$ интегрируема между a и c, так как мы можем написать:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Если $f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x)$, где A и B — постоянные, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\int_a^b \varphi(x)\,dx + B\int_a^b \psi(x)\,dx;$$

такое же равенство будет иметь место и для суммы любого числа функций.

В более общем случае, если $c, d, \ldots, l$ — любые числа, мы имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \ldots + \int_l^b f(x)\,dx;$$

это разбиение употребляется для вычисления интеграла, если функция $f(x)$ имеет точки разрыва или если она имеет различные аналитические выражения в разных частях промежутка (a, b).

Выражение $f(\xi_i)$ в формуле (2) можно заменить еще более общим выражением. Разобьем промежуток (a, b) на n частичных промежутков $(a, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i), \ldots, (x_{n-1}, b)$. Для каждого промежутка (x_{i-1}, x_i) возьмем какое-нибудь количество ζ_i под условием, чтобы ζ_i стремилось к нулю вместе с длиною $(x_i - x_{i-1})$ рассматриваемого промежутка. Мы будем говорить, что ζ_i стремится *равномерно* к нулю, если для всякого положительного числа ε можно найти такое, не зависящее от i, положительное число η, чтобы при $(x_i - x_{i-1})$ меньшем η было $|\zeta_i| < \varepsilon$.

Докажем, что если ζ_i равномерно стремится к нулю, то сумма

$$S' = \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + \zeta_i] (x_i - x_{i-1})$$

имеет пределом определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Возьмем число η настолько малым, чтобы при условии, что все промежутки $(x_i - x_{i-1})$ меньше η, удовлетворялись неравенства:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_n^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad |\zeta_i| < \varepsilon,$$

и рассмотрим разность

$$S - \int_a^b f(x)\,dx = \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right] + \sum \zeta_i (x_i - x_{i-1}).$$

При указанных условиях абсолютная величина правой части последнего равенства, очевидно, меньше $\varepsilon + \varepsilon(b - a)$, и мы имеем:

$$\left| S' - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

Таким образом теорема доказана*.

73. Формула среднего значения. В дальнейшем мы будем предполагать везде, где не будет сделано особых оговорок, что функции под знаком интеграла непрерывны.

Пусть будут $f(x)$ и $\varphi(x)$ две функции, непрерывные в промежутке (a, b), причем между a и b функция $\varphi(x)$ имеет постоянный знак; для определенности мы предположим, что $a < b$ и $\varphi(x) > 0$.

Предположим, что промежуток (a, b) разбит на более мелкие промежутки; пусть будут $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ значения переменного x, принадлежащие соответственно к каждому из этих промежутков. Все числа $f(\xi_i)$ будут заключаться между пределами M и m функции $f(x)$ в промежутке (a, b)

$$m \leqslant f(\xi_i) \leqslant M.$$

Умножим все эти двойные неравенства на множителей

$$\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

которые, по предположению, все положительны, и сложим. Мы видим, что сумма $\sum f(\xi_i)\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ будет заключаться между суммами $m\sum \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ и $M\sum \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Если число частичных промежутков неограниченно возрастает, то мы имеем в пределе:

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx < M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

* В приложениях чаще всего встречаются определенные интегралы, как пределы сумм именно вида (3). Поэтому нам часто придется применять это свойство, которое распространяется и на двойные и тройные интегралы.

Эти неравенства можно заменить равенством:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{4}$$

где μ содержится между m и M. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то она принимает значение μ при некотором значении $x = \xi$, заключающемся между a и b, и мы имеем:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{5}$$

где ξ заключается между a и b. Если, в частности, мы предположим $\varphi(x) = 1$, то интеграл $\int_a^b dx$, по самому определению, равен $b - a$, и мы получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(\xi). \tag{6}$$

74. Вторая формула среднего значения. Бонне (Bonnet) дал другую формулу среднего значения, которую он вывел из следующей важной леммы Абеля (Abel).

Лемма. *Пусть будет* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ *ряд положительных убывающих количеств, и* $u_0, u_1, \ldots, u_p$ — *такое же число произвольных положительных или отрицательных количеств. Если все суммы* $s_0 = u_0$, $s_1 = u_0 + u_1, \ldots, s_p = u_0 + u_1 + \ldots + u_p$ *заключаются между двумя числами* A *и* B, *то сумма*

$$S = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_p u_p$$

заключается между $A\varepsilon_0$ и $B\varepsilon_0$.

В самом деле, мы можем написать:

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \ldots, u_p = s_p - s_{p-1};$$

следовательно, сумма S будет равна:

$$s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p\varepsilon_p.$$

Так как все разности $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$ положительны, то мы получим два предела для S, заменяя сначала $s_0, s_1, \ldots, s_p$ их верхним пределом A, а потом их нижним пределом B. Отсюда имеем:

$$S < A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0;$$

точно так же получим: $S > B\varepsilon_0$.

Пусть теперь $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две интегрируемые функции, причем функция $\varphi(x)$ положительна и убывает, когда x возрастает от a до b. Интеграл $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ есть предел суммы

$$I = f(a)\,\varphi(a)\,(x_1 - a) + f(x_1)\,(x_2 - x_1) + \ldots;$$

которая содержится между двумя суммами:

$$I' = \sum_i M_i \varphi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad \text{и} \quad I'' = \sum_i m_i \varphi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

где M_i и m_i суть границы $f(x)$ в интервале (x_{i-1}, x_i). При этом разность $I' - I''$ меньше, чем

$$\varphi(a) \sum (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

и следовательно, стремится к нулю, так как $f(x)$ интегрируема. Рассматриваемый определенный интеграл есть, следовательно, общий предел сумм I' и I'', а следовательно, и суммы $I_1 = \sum_i \mu_i \varphi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, где μ_i — какое угодно число, заключенное между m_i и M_i.

Выберем эти числа μ_i так, чтобы

$$\mu_i (x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx,$$

что возможно на основании первой теоремы о среднем. Так как числа $\varphi(a)$, $\varphi(x_1)\ldots$ положительны и убывают, то из леммы Абеля следует, что эта последняя сумма I_1 содержится между $A\varphi(a)$ и $B\varphi(a)$, где A и B обозначают максимум и минимум интеграла $\int_a^c f(x)\, dx$, когда c изменяется от a до b. Так как этот интеграл есть, очевидно, непрерывная функция от c, то, переходя к пределу, мы можем написать:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)\, dx \quad (a < \xi < b). \tag{7}$$

Если функция $\varphi(x)$ убывает, не оставаясь, однако, положительной, между a и b, то можно применять более общую формулу, принадлежащую Вейерштрассу. В самом деле, положим $\varphi(x) = \varphi(b) + \psi(x)$; функция $\psi(x)$ положительна и убывает, и мы можем применить формулу (7), которая дает:

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\, dx = [\varphi(a) - \varphi(b)] \int_a^\xi f(x)\, dx.$$

Отсюда мы находим:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\varphi(b)\, dx + [\varphi(a) - \varphi(b)] \int_a^\xi f(x)\, dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x)\, dx.$$

Аналогичные формулы мы получаем для случая, когда функция $\varphi(x)$ возрастает.

75. Переход к первообразным функциям. Рассмотренные общие теоремы применимы ко всем интегрируемым функциям. В последующих приложениях подлежащая интеграции функция есть чаще всего функция непрерывная или, в крайнем случае, имеет лишь конечное число разрывов в интервале интеграции. Заметим раз навсегда, что, поскольку значение интеграла зависит только от природы подинтегральной функции и от пределов, символы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b f(z)\,dz$, $\int\limits_a^b f(t)\,dt, \ldots$ имеют абсолютно тождественный смысл.

Если мы оставляем один из пределов, например нижний предел a_1, постоянным, а верхний предел рассматриваем как переменный, то интеграл есть функция этого предела, и мы напишем:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Так как функция $f(x)$ ограничена, то очевидно, что $F(x)$ есть непрерывная функция от x.

Покажем, что эта функция *имеет своею производною функцию* $f(x)$. В самом деле, мы имеем:

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

или, применяя формулу среднего значения (6):

$$F(x+h) - F(x) = hf(\xi),$$

причем ξ заключается между x и $x+h$. Если h стремится к нулю, то $f(\xi)$ стремится к пределу $f(x)$; таким образом функция $F(x)$ имеет своею производною функцию $f(x)$.

Всякая другая функция, имеющая ту же самую производную, получается через прибавление к $F(x)$ произвольного постоянного C (§ 17). Отсюда видно, что если функция $f(x)$ имеет одну начальную функцию $F(x)$, то она имеет их бесчисленное множество. Но между всеми этими функциями есть одна и притом только одна, которая принимает при $x = a$ заданное значение y_0; это будет функция:

$$y_0 + \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

В тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, пользуются одною и тою же буквою x как для обозначения верхнего предела, так и для обозначения переменного интеграции, и пишут $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ вместо $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Но очевидно, что определенный интеграл зависит только от своих пределов и от подинтегральной функции; какою буквою обозначено переменное интеграции, это совершенно безразлично.

Всякая функция, имеющая производною $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ и изображается символом:

$$\int f(x)\,dx,$$

причем пределы не указываются. Согласно предыдущему имеем:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Обратно, если мы нашли каким-нибудь способом функцию $F(x)$, имеющую производною $f(x)$, то можно написать:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Чтобы определить постоянное C, достаточно заметить, что при $x = a$ левая часть последнего равенства равна нулю. Следовательно, должно взять $C = -F(a)$; отсюда имеем основную формулу:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{8}$$

Заменив здесь $f(x)$ через $F'(x)$, получим:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)\,dx;$$

прилагая теорему о среднем значении, будем иметь:

$$F(x) - F(a) = (x - a)\,F'(\xi),$$

причем ξ заключается между x и a. Мы здесь вновь получаем формулу конечного приращения, но этот вывод менее общего характера, чем первый (§ 17), так как он предполагает непрерывность производной $F'(x)$.

Основная формула (8) была выведена в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна между a и b. Не обратив внимания на это условие, мы можем притти к парадоксальным заключениям. Так, полагая $f(x) = \frac{1}{x^2}$, из формулы (8) получим:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Левая часть имеет смысл только в том случае, если a и b имеют одинаковые знаки, тогда как правая часть имеет определенное значение и в том случае, когда a и b будут иметь разные знаки. Мы увидим в дальнейшем, при изучении определенных интегралов, взятых между мнимыми пределами, в чем состоит объяснение этого парадокса.

Точно так же по формуле (8) имеем:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \lg\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right].$$

Если знаки количеств $f(a)$ и $f(b)$ противоположны, то $f(x)$ обращается в нуль между a и b, и обе части предыдущего равенства не имеют пока для нас никакого смысла. Впоследствии мы увидим, какое значение должно приписывать этому равенству.

Формула (8) может быть также не вполне определенною. Так, полагая $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, получим:

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a.$$

Левая часть имеет вполне определенный смысл, тогда как правая часть имеет бесконечное множество значений. Для устранения неопределенности положим

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Функция $F(x)$ непрерывна во всяком промежутке и обращается в нуль вместе с x. С другой стороны, обозначим через $\operatorname{Arc\,tg} x$ дугу, заключающуюся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Эти две функции имеют одну и ту же производную и обращаются в нуль при $x=0$; следовательно, они тождественны между собою, и мы можем написать

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} b - \operatorname{Arc\,tg} a,$$

при условии принимать всегда для $\operatorname{Arc\,tg}$ значение, заключающееся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Точно так же можно вывести формулу:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc\,sin} b - \operatorname{Arc\,sin} a,$$

где корень взят в его положительном значении, a и b заключаются между -1 и $+1$, и через $\operatorname{Arc\,sin} x$ обозначена дуга, заключающаяся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Вообще, если первообразная функция $F(x)$ имеет несколько значений, то нужно выбрать одно из начальных значений $F(a)$ и проследить непрерывное изменение этого значения при изменении x в одном и том же направлении от a до b. Иногда оказывается более удобным вводить разрывную первообразную функцию, но для этого необходимо сначала обобщить формулу (8). Эта основная формула была выведена в предположении, что обе функции $f(x)$ и $F(x)$ непрерывны в интервале (a, b) и что в каждой точке этого интервала $F'(x)=f(x)$. Теперь мы сделаем несколько более общие предположения. Предположим, что обе функции $F(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют предшествующим условиям, *за исключением конечного числа точек интервала* (a, b), которые мы назовем *исключительными* точками. Кроме того, мы допустим, что $f(x)$ остается ограниченной, и что $F(x)$ имеет в этом интервале лишь точки разрыва первого рода. Предположим сначала, чтобы видеть, как изменится в этом случае формула (8), что в интервале (a, b) имеется лишь одна исключительная точка c; обозначая через ε весьма малое положительное число, мы можем написать, предполагая, что $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

или, так как между a и $c-\varepsilon$, как и между $c+\varepsilon$ и b, нет исключительных точек:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + F(b) - F(c+\varepsilon).$$

Когда ε стремится к нулю, то $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$ также стремится к нулю, и мы имеем в пределе;

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Delta_c,$$

где через Δ_c обозначена разность $F(c+0) - F(c-0)$, или *скачок* $F(x)$ в точке c.

Если в интервале (a, b) имеется несколько исключительных точек, то мы разобьем его на частичные интервалы, каждый из которых содержит не более одной исключительной точки. Применяя предшествующее рассуждение к каждому из этих частичных интервалов и пользуясь полученными результатами, находим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Sigma\Delta, \tag{9}$$

где $\Sigma\Delta$ есть сумма скачков $F(x)$ в интервале (a, b). Если $F(x)$ непрерывна, то эта формула (9) приводится к формуле (8); мы видим, следовательно, что формула (8) применима также и к ограниченной функции $f(x)$, имеющей произвольное конечное число точек разрыва в (a, b), если только первообразная функция непрерывна. Это замечание мы распространим в дальнейшем также и на случай неограниченной функции.

76. Указатели. Как указано выше, если начальная функция $F(x)$ имеет несколько значений, то нужно выбрать одно из ее значений при $x=a$, $F(a)$ и следить за непрерывным изменением этого значения при изменении x в одном и том же направлении от a до b. Возьмем, например, интеграл:

$$\int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2+Q^2}\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

где

$$f(x)=\frac{P}{Q},$$

и P, Q — две функции, непрерывные в промежутке (a, b) и не обращающиеся одновременно в нуль. Начальная функция есть $\operatorname{arc\,tg} f(x)$. Если Q не обращается в нуль между a и b, то $f(x)$ не обращается в бесконечность между этими пределами, и $\operatorname{Arc\,tg} f(x)$ заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Но этого, вообще, не будет, если уравнение $Q=0$ имеет корни в промежутке (a, b). Чтобы узнать, каким образом должно в этом случае изменить общую формулу, введем опять обозначение $\operatorname{Arc\,tg}$ для дуги, заключающейся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и предположим сначала, что Q обращается в нуль между a и b только один раз при $x=c$. Мы можем написать:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx=\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}+\int_{c+\varepsilon'}^{b},$$

где ε и ε' — два очень малых положительных числа. Так как функция $f(x)$ не обращается в бесконечность ни между a и $c-\varepsilon$, ни между $c+\varepsilon'$ и b, то мы можем написать:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}=\operatorname{Arc\,tg} f(c-\varepsilon)-\operatorname{Arc\,tg} f(a)+\operatorname{Arc\,tg} f(b)-\operatorname{Arc\,tg} f(c+\varepsilon')+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}.$$

Здесь может представиться несколько случаев. Предположим для определенности, что $f(x)$ обращается в бесконечность, переходя с $+\infty$ на $-\infty$. Тогда $f(c-\varepsilon)$ будет положительно и очень велико, $\operatorname{Arc\,tg} f(c-\varepsilon)$ будет очень близок к $\frac{\pi}{2}$, $f(c+\varepsilon')$ будет отрицательно и очень велико, $\operatorname{Arc\,tg} f(c+\varepsilon')$ будет очень близок к $-\frac{\pi}{2}$; что касается интеграла $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}$, то его абсолютная величина будет очень мала, как в этом можно убедиться, заменяя под интегралом $f(x)$ через $\frac{P}{Q}$. Переходя к пределу, получим:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}=\pi+\operatorname{Arc\,tg} f(b)-\operatorname{Arc\,tg} f(a).$$

Точно так же можно доказать, что если функция $f(x)$ переходит с $-\infty$ на $+\infty$, то нужно отнять π. В общем случае должно разбить промежуток (a, b) на такие промежутки, чтобы в каждом из них функция $f(x)$ обращалась в бесконечность только один раз. Приложив к каждому из этих промежутков прежние выводы и сложив полученные результаты, найдем:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}=\operatorname{Arc\,tg} f(b)-\operatorname{Arc\,tg} f(a)+(K-K')\pi,$$

где K есть число, показывающее, сколько раз функция $f(x)$ обращается в бесконечность, переходя с $+\infty$ на $-\infty$, а K' есть число, показывающее, сколько раз $f(x)$ переходит с $-\infty$ на $+\infty$. Это число $K-K'$ называется *указателем* функции $f(x)$ между a и b.

Если $f(x)$ представляет рациональную функцию $\frac{V_1}{V}$, то можно вычислить указатель при помощи элементарных действий, даже не зная корней многочлена V. Мы, очевидно, можем предположить, что многочлен V_1 взаимно простой с многочленом V, и что его степень ниже степени V, так как от вычитания многочлена указатель функции не меняется. Выполним ряд делений, при помощи которых находят общий наибольший делитель между V и V_1, с тою только разницею, что каждый раз мы будем менять знак у остатка. Разделим сначала V на V_1; мы получим частное Q_1 и остаток — V_2. Затем разделим V_1 на V_2; мы получим частное Q_2 и остаток — V_3, и т. д.; наконец, мы придем к постоянному остатку — V_{n+1}. Таким образом мы получим ряд равенств:

$$
\begin{gathered}
V = V_1 Q_1 - V_2, \\
V_1 = V_2 Q_2 - V_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}.
\end{gathered}
$$

Ряд многочленов:

$$
\left.\begin{array}{l}
V,\ V_1,\ V_2, \ldots,\ V_{r-1},\ V_r, \\
V_{r+1}, \ldots,\ V_n,\ V_{n+1}
\end{array}\right\} \tag{10}
$$

обладает существенными свойствами ряда Штурма (Sturm): 1) два рядом стоящих многочлена не могут обращаться в нуль при одном и том же значении x, так как из этого мы последовательно вывели бы, что при этом значении x должны обращаться в нуль и все другие многочлены и, в частности, постоянное V_{n+1}; 2) когда один из промежуточных многочленов $V_1, V_2, \ldots, V_n$ обращается в нуль, то число перемен, представляемое рядом (7), не меняется, так как, если V_r равно нулю при $x = c$, то V_{r-1} и V_{r+1} будут иметь при $x = c$ противоположные знаки. Из этого следует, что число перемен в ряде (10) может измениться только тогда, когда x проходит через корень уравнения $V=0$. Если при этом $\frac{V_1}{V}$ переходит с $+\infty$ на $-\infty$, то число перемен увеличивается на единицу; напротив, оно уменьшается на единицу, если $\frac{V_1}{V}$ переходит с $-\infty$ на $+\infty$. Таким образом указатель функции $f(x)$ равен разности между числами перемен в ряде (10) при $x =$ и $x = a$.

77. Площадь плоской области. Будем называть многоугольною областью всякую плоскую ограниченную область, границы которой состоят из конечного числа прямолинейных отрезков; эта область может состоять из нескольких многоугольников, не имеющих никакой общей точки. Определение площади такой многоугольной области известно из элементарной геометрии. Рассмотрим теперь замкнутую простую кривую C, разделяющую плоскость на две области, внутреннюю область D и внешнюю область. Приписать области D определенную площадь — значит, в сущности, допустить следующий постулат:

(*I*) *Существует число и притом только одно, большее всякого числа, измеряющего площадь любой многоугольной области, содержащейся в D, и меньшее всякого числа, измеряющего площадь любой многоугольной области, содержащей в себе D.*

Существование единственного числа, удовлетворяющего предыдущему условию, может быть строго доказано в том случае, когда кривая C удовлетворяет некоторому весьма общему условию, которое всегда удовлетворяется для кривых, которые обыкновенно рассматривают.

Пусть будет P многоугольная область, содержащая D, p — другая многоугольная область, содержащаяся в D, A и a — соответствующие площади этих обеих областей. Ясно, что каковы бы ни были обе многоугольные площади, мы имеем $A > a$. Следовательно, числа A имеют нижнюю границу $\mathfrak{A}$, и числа a имеют верхнюю границу $\mathfrak{A}$; сверх того, необходимо $\mathfrak{A}' \leqslant \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, то площадь D называется квадрируемою, и число $\mathfrak{a}$ есть мера площади области D*. Ясно, что это число — единственное, которое удовлетворяет условию (I).

(*II*) *Для того чтобы область D была квадрируемою, необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа ε можно было найти такую многоугольную область P, содержащую D, и такую другую многоугольную область p, содержащуюся в D, чтобы разность $A - a$ площадей областей P и p была меньше ε.*

По самому определению, условие необходимо. Оно вместе с тем и достаточно, так как разность $A - a$ не может быть меньше разности $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$. Отсюда следует, что если область D квадрируемая и имеет площадь $\mathfrak{A}$, то всегда можно найти такие две многоугольные области P и p, одну — содержащую D, а другую — содержащуюся в D, чтобы разности $A - \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} - a$ были меньше всякого данного положительного числа ε. Предыдущее условие (II) квадрируемости площади D может быть иначе выражено следующим образом: *необходимо и достаточно, чтобы можно было заключить границу C в такую многоугольную область, площадь которой была бы меньше всякого данного числа.* В самом деле, многоугольная область, содержащая C, есть разность двух многоугольных областей, одной — содержащей D, а другой — содержащейся в D.

Вообразим, что область D, образованная точками, внутренними к C, разбита на две аналогичные области D_1, D_2; пусть, например, проведена дуга C', лежащая внутри D и соединяющая две точки C. Если D_1 и D_2 квадрируемы, то это справедливо и относительно D, причем площадь D равна сумме площадей D_1 и D_2.

Пусть P_1 и p_1 — две многоугольные области, одна — заключающая D_1, другая — заключенная в D, A_1 и a_1 — соответственно их площади; пусть P_2 и p_2 имеют то же значение для D_2; ясно, что многоугольная область, получаемая соединением p_1 и p_2, заключена внутри D. Следовательно, $a_1 + a_2 < \mathfrak{A}'$. С другой стороны, две области P_1 и P_2 образуют в совокупности многоугольную область, заключающую D. Так как они имеют общую часть, то $A_1 + A_2 > \mathfrak{A}$, следовательно, $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}' < (A_1 - a_1) + (A_2 - a_2)$. Так как области D_1 и D_2 квадрируемы, то разности $A_1 - a_1$, $A_2 - a_2$ могут быть сделаны сколь угодно малыми. Следовательно, и двойное неравенство $a_1 + a_2 < \mathfrak{A} < A_1 + A_2$ показывает, что площадь D равна сумме площадей D_1 и D_2. Обратно, если D и D_1 квадрируемы, то же справедливо относительно D_2; действительно, так как D и D_1 квадрируемы, границы этих областей можно заключить в многоугольные области, площади которых меньше любого заданного числа. То же справедливо, следовательно, относительно D_2; а так как

---

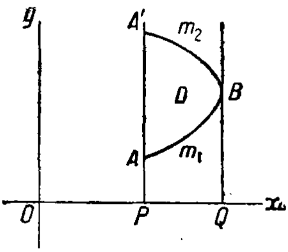
* Это определение квадрируемых плоских областей можно распространить на области, определенные с большею общностью; см. Б е р, Leçons sur les théories générales d'Analyse, т. I, стр. 148.

D_2, таким образом, оказывается квадрируемой, то ее площадь равна разности площадей D и D_1.

Рассуждение может быть обобщено. Если область D, граница которой состоит из любого числа замкнутых кривых, может быть разложена на сумму или разность квадрируемых областей, таких, как только что рассмотренные, то эта область D квадрируемая, и ее площадь равна сумме или разности площадей тех областей, из которых она составлена.

78. Вычисление площади плоской области. Мы будем рассматривать лишь плоские области, ограниченные обычно встречающимися замкнутыми кривыми. Нетрудно показать, что они квадрируемы.

Возьмем сначала область D, аналогичную той, от которой мы отправлялись (§ 67), ограниченную дугой AB, которую параллель к Oy может встретить не более как в одной точке, двумя ординатами AP, BQ и отрезком PQ оси Ox. Пусть a и b будут абсциссы точек P и Q $(a<b)$, $y=f(x)$ — уравнение дуги AB, причем функция $f(x)$ непрерывна и положительна в интервале (a, b). Возьмем возрастающую последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, заключенных между a и b, и пусть m_i и M_i — экстремальные значения $f(x)$ в интервале (x_{i-1}, x_i). Рассмотрим два ряда прямоугольников r_i и R_i, ограниченных с трех сторон прямыми $y=0$, $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, с четвертой стороны — прямыми $y=m_i$, $y=M_i$ соответственно. Ясно, что прямоугольники r_i образуют многоугольную область, содержащуюся в D, а прямоугольники R_i — многоугольную область, содержащую D. Площади этих двух областей суть соответственно:



Черт. 10.

$$\sum r_i=\sum m_i(x_i-x_{i-1}),\quad \sum R_i=\sum M_i(x_i-x_{i-1});$$

верхняя граница $\sum r_i$ и нижняя граница $\sum R_i$ между собою равны. Следовательно, область D квадрируема, и ее площадь представится определенным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$. Этот результат вполне соответствует интуитивному геометрическому определению площади. Заметим, что, каков бы ни был знак $f(x)$ в интервале (a, b), мы можем рассматривать определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ как некоторую площадь, если только мы примем то соглашение, о котором говорили выше (§ 68). Поэтому мы сохраняем термин *квадратура* для обозначения вычисления определенного интеграла.

Рассмотрим теперь область, ограниченную отрезками AA', BB' двух параллельных прямых и двумя кривыми Am_1B, $A'm_2B'$, которые расположены между этими прямыми и встречаются с параллелью к этому направлению лишь в одной точке, и притом не пересекаются (черт. 10).

Выберем за ось Oy прямую, параллельную AA', а за ось Ox — прямую, перпендикулярную, и притом так, чтобы вся область была расположена поверх этой оси. На чертеже отрезок BB' стягивается в точку B; пусть $y_1 = \psi_1(x)$, $y_2 = \psi_2(x)$ — уравнения дуг Am_1B, $A'm_2B'$.

Область D есть разность двух квадрируемых областей, ограниченных контурами Am_1BQPA; $A'm_2BQPA'$; следовательно, она и сама тоже квадрируема, и ее площадь равна разности двух интегралов:

$$\int_a^b \psi_2(x)\,dx, \quad \int_a^b \psi_1(x)\,dx.$$

Всякая область, которую можно разбить на несколько областей того же вида, как только что рассмотренная, будет, следовательно, квадрируема, и ее площадь выразится алгебраической суммой определенных интегралов. Если оси координат не прямоугольны и составляют угол θ, то определенные интегралы нужно помножить на $\sin\theta$.

Иногда бывает удобно пользоваться для вычисления площадей полярными координатами. Пусть требуется вычислить площадь области, ограниченной прямыми OA, OB, составляющими углы ω_0 и Ω с полярной осью Ox $(\omega_0 < \Omega)$, и дугою AMB, расположенною внутри угла AOB, и встречающейся со всякой полупрямой, принадлежащей углу AOB, лишь в одной точке. Пусть будет $\rho = f(\omega)$ уравнение этой дуги AMB в полярных координатах. Разобьем угол AOB на некоторое число меньших углов посредством радиусов-векторов, которые составляют возрастающие углы ω_1, ω_2, ... с осью Ox. Пусть будут OM_i, OM_{i+1} — два последовательных радиуса-вектора, составляющих с Ox углы ω_i, ω_{i+1}, а ρ_i', ρ_i'' — минимум и максимум $f(\omega)$ в интервале (ω_i, ω_{i+1}). Построим, с одной стороны, равнобедренный треугольник t_i, одна из вершин которого совпадает с O, а две другие находятся на OM_i и OM_{i+1} на расстоянии ρ_i' от O, с другой стороны — прямоугольный треугольник T_i, одна из вершин которого попрежнему совпадает с O, другая, соответствующая прямому углу, получится, если отложить на OM_i длину, равную ρ_i'', а третья находится на OM_{i+1}. Ясно, что совокупность треугольников t_i образует многоугольную область, содержащуюся в D, а совокупность треугольников T_i — другую многоугольную область, содержащую D. Площади этих двух областей соответственно равны

$$\frac{1}{2}\sum (\rho_i')^2 \sin(\omega_{i+1} - \omega_i), \quad \frac{1}{2}\sum (\rho_i'')^2 \operatorname{tg}(\omega_{i+1} - \omega_i)$$

и имеют своим общим пределом $\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \rho^2 d\omega$. Первая из них, например, может быть написана так:

$$\frac{1}{2}\sum (\rho_i')^2 (1 - \varepsilon_i)(\omega_{i+1} - \omega_i),$$

где ε_i стремится *равномерно* к нулю вместе с $(\omega_{i+1} - \omega_i)$. Следовательно, площадь области D равна определенному интегралу

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \rho^2 d\omega;$$

$\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$ есть *элемент площади* в полярных координатах. Геометрическое значение его очевидно.

К этому частному случаю легко приводится случай области, ограниченной контуром обычной формы, если рассматривать его как сумму или разность некоторого числа областей того же вида, как только что рассмотренная.

Примечание I. Число, измеряющее площадь области, ограниченной замкнутой кривой, было определено как сечение в области положительных чисел. Из этого определения вытекает ряд свойств, которые также могли бы служить определениями. Вот одно из них, которое, быть может, ближе подходит к обычному представлению площади. Пусть C — замкнутая плоская кривая, ограничивающая квадрируемую область D площади $\mathfrak{A}$. Возьмем многоугольную область P, содержащую D, площадь которой меньше $\mathfrak{A} + \varepsilon$, и другую многоугольную область p, содержащуюся в D, площадь которой больше $A - \varepsilon$. В таком случае площадь многоугольной области K, представляющей разность областей P и p, будет меньше 2ε.

Эту многоугольную область можно заменить другой многоугольной областью K_1, заключающей C, с площадью, меньшей 4ε, *граница L которой не имеет ни одной общей точки с C*. В самом деле, ломаную l, ограничивающую K извне, можно заменить другой ломаной, образованной прямыми, параллельными звеньям первой и проходящими от них на расстоянии, достаточно малом для того, чтобы площадь области, заключенной между обеими ломаными, была меньше ε; так же можно поступить и в отношении ломаной l', ограничивающей K изнутри.

Проведем теперь две системы прямых, параллельных двум взаимно перпендикулярным направлениям и отстоящих друг от друга на расстоянии ρ. Мы получим троякого рода квадраты: 1) квадраты *внутренние* по отношению к D, все внутренние точки которых принадлежат к D; 2) квадраты *внешние*, которые не имеют с D ни одной общей точки; 3) *смешанные* квадраты, которые содержат как точки, принадлежащие D, так и точки, внешние по отношению к D. Нетрудно видеть, что *сумма площадей смешанных квадратов стремится к нулю, когда ρ неограниченно убывает*. В самом деле, пусть δ есть минимум расстояния точки контура C от точки ломаной L, ограничивающей область K_1. Если ρ взято меньшим $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, то все смешанные квадраты, наверное, принадлежат K_1, так как каждый из них имеет точку, лежащую на контуре C. В таком случае сумма площадей этих смешанных квадратов будет меньше 4ε, а следовательно, она стремится к нулю вместе с ρ, так как ε — произвольное положительное число. Точно так же мы убеждаемся в том, что *сумма площадей внутренних квадратов имеет пределом площадь области D, когда ρ неограниченно убывает*. В самом деле, эта сумма меньше $\mathfrak{A}$, но сумма площадей квадратов внутренних и смешанных больше $\mathfrak{A}$; так как сумма площадей смешанных квадратов меньше 4ε, то мы заключаем отсюда, что разность между площадью A области D и суммою площадей внутренних квадратов меньше 4ε.

Примечание II. Рассмотрим, в частности, такую область, какая изображена на черт. 1 (§ 9), ограниченную контуром

$$ACC'DD'BB_0A_0A;$$

ордината точки линии $ACC'DD'B$ есть функция $f(x)$ абсциссы, имеющая некоторое число точек разрыва первого рода. Площадь этой области, очевидно, равна сумме площадей областей ACC_0A_0, $C'DD_0C_0$, $D'BB_0D_0$, т. е. сумме интегралов

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{11}$$

Если мы заменим ординату BB_0 переменной ординатой, то определенный интеграл $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ будет все же непрерывной функцией x. В точке x, где $f(y)$ непрерывна, мы имеем $F'(x) = f(x)$. Для точки разрыва, например для точки $x = c$, мы имеем:

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x)\,dx = hf(c+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1);$$

отношение $\frac{F(c+h) - F(c)}{h}$ имеет пределом $f(c+0)$ или $f(c-0)$ в зависимости от того, положительно ли h, или отрицательно. Этот пример ясно показывает, что, если $f(x)$ есть функция интегрируемая, но не непрерывная, интеграл $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ не будет непременно иметь $f(x)$ своею производною.

79. Длина дуги кривой. Пусть будут

$$x = f(t), \ y = \varphi(t), \ z = \psi(t) \tag{12}$$

три функции переменного t, непрерывные в интервале (a, b), где $a < b$. Когда t возрастает от a до b, точка с координатами (x, y, z) описывает дугу кривой AB, замкнутую или нет, которая может иметь некоторое число двойных точек. Возьмем между a и b возрастающую последовательность чисел $(a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b)$, и пусть $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ будут соответствующие точки кривой, причем P_0 совпадает с A, а P_n — с B. Эти точки $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть последовательные вершины ломаной линии длины L, вписанной в дугу AB. Если число n неограниченно возрастает, и притом так, что все разности $t_i - t_{i-1}$ стремятся к нулю, то все звенья этой ломаной также стремятся к нулю. Если длина L стремится при этом к пределу s, то говорят, что кривая *спрямляемая*, и предел s есть длина дуги кривой AB.

Мы покажем, что *кривая спрямляема, если функции* $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *имеют производные* $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, *непрерывные в интервале* (a, b)*.

---

* Эти условия *достаточны*, но не *необходимы*. Условия, *необходимые и достаточные* для того, чтобы кривая была спрямляемою, были даны Жорданом: *для спрямляемости кривой C необходимо и достаточно, чтобы множество чисел L, измеряющих периметры ломаных, вписанных в C, было ограничено.*

Это условие *необходимо*. В самом деле, предположим, что L стремится к пределу S, когда n неограниченно возрастает, в то время как максимум λ длины звеньев ломаной стремится к нулю. Не может существовать ни одной ломаной вписанной в C, периметр L' которой был бы больше s. В самом деле, если бы существовала хоть одна такая ломаная, то, деля каждый из интервалов на все уменьшающиеся частичные интервалы, мы получили бы новые ломаные, периметры которых были бы все больше L', а следовательно, не могли бы стремиться к s.

Условие *достаточно*. Это доказывается рассуждением, совершенно аналогичным тому, которое мы уже употребляли дважды (§ 11 и 70). Пусть s — верх-

Пусть x_i, y_i, z_i, — координаты вершины P_i, а c_i — длина стороны $P_{i-1}P_i$; мы имеем:

$$c_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z - z_{i-1})^2}$$

или, применяя формулу конечных приращений к $x_i - x_{i-1}, \ldots$:

$$c_i = (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[f'(\xi)]^2 + [\varphi'(\eta_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2},$$

где ξ_i, η_i, ζ_i заключены между t_{i-1} и t_i. Если интервал (t_{i-1}, t_i) весьма мал, то радикал весьма мало отличается от

$$\sqrt{[f'(t_{i-1})]^2 + [\varphi'(t_{i-1})]^2 + [\psi'(t_{i-1})]^2};$$

чтобы найти предел разности, мы можем написать ее так:

$$\frac{[f'(\xi_i) - f'(t_{i-1})][f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})] + \ldots}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \varphi'^2(\eta_i) + \psi'^2(\zeta_i)} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \varphi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})}}.$$

Мы имеем:

$$|f'(\xi_i)| + |f'(t_{i-1})| \leqslant \sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots},$$

а следовательно,

$$\left| \frac{f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots}} \right| \leqslant 1.$$

няя граница чисел L; если ε — наперед заданное положительное число, то существует такая возрастающая последовательность чисел

$$(a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_p = b),$$

что периметр Λ соответствующей вписанной ломаной превосходит $s - \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим какую-нибудь возрастающую последовательность чисел

$$(a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b),$$

которая выбрана так, чтобы все интервалы $t_i - t_{i-1}$ были меньше положительного числа η, которое, в свою очередь, меньше наименьшей из разностей $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1, \ldots, b - a_{p-1}$; пусть L — периметр соответствующей вписанной ломаной. Мы покажем, что $s - L$ будет меньше ε, если только η достаточно мало.

Для этого представим себе, что числа t_i и a_k расположены в возрастающем порядке, и пусть L' — длина вспомогательной ломаной, полученной этим новым способом разбиения. Число L' больше или, по меньшей мере, равно L и Λ, а следовательно, превосходит $s - \frac{\varepsilon}{2}$.

Мы переходим от ломаной линии длины L к ломаной длины L', заменяя стороны c_i, которым соответствует точка a_k в интервале (t_{i-1}, t_i), остальными двумя сторонами треугольника, имеющего вершинами точки, соответствующие значениям t_{i-1}, a_k, t_i переменного t. Число этих сторон не превосходит $p - 1$. Пред-

Так как три функции $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ непрерывны, то любому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число η такое, что во всяком интервале, длина которого меньше η, колебания функций $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ оказываются меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Мы имеем, следовательно:

$$c_i = (t_i - t_{i-1})\left[\sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \varphi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})} + \rho_i\right],$$

где ρ_i стремится *равномерно* к нулю вместе с $t_i - t_{i-1}$, и следовательно, периметр $L = \sum c_i$ имеет пределом (§ 72) интеграл

$$s = \int_a^b \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \tag{13}$$

Это доказательство распространяется также на случай, когда производные f', φ', ψ' разрывны в конечном числе точек дуги AB, что имеет место, если кривая имеет угловые точки. В этом случае достаточно было бы разбить дугу AB на несколько других, для каждой из которых f', φ', ψ' были бы непрерывны.

Из формулы (13) следует, что дуга, заключенная между неподвижною точкой A и переменной точкою M, соответствующею значению t параметра, есть функция от t, имеющая производною

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2};$$

возводя обе части этого равенства в квадрат и умножая на dt^2, получим:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{14}$$

Эта формула имеет место, каково бы ни было независимое переменное. Ее легко запомнить в связи с ее геометрическим значением; она выражает, что ds есть диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны dx, dy, dz.

положим, что число η взято достаточно малым для того, чтобы неравенство $|t' - t''| < \eta$ влекло за собою неравенство:

$$\sqrt{[f(t') - f(t'')]^2 + [\varphi(t') - \varphi(t'')]^2 + [\psi(t') - \psi(t'')]^2} < \frac{\varepsilon}{4(p-1)},$$

что возможно, так как f, φ, ψ непрерывны; тогда разность $L' - L$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, а так как $L' > S - \frac{\varepsilon}{2}$, мы будем иметь также: $L > s - \varepsilon$. Следовательно, число L имеет пределом s.

Число L, по меньшей мере, равно каждому из чисел

$$\sum |x_i - x_{i-1}|, \quad \sum |y_i - y_{i-1}|, \quad \sum |z_i - z_{i-1}|.$$

Следовательно, для того чтобы L было ограничено, необходимо, чтобы три функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ были с ограниченным изменением. Эти условия достаточны, так как мы имеем, с другой стороны:

$$L \leqslant \sum |x_i - x_{i-1}| + \sum |y_i - y_{i-1}| + \sum |z_i - z_{i-1}|.$$

Мы можем резюмировать это следующим образом: ***для спрямляемости кривой необходимо и достаточно, чтобы три функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ были с ограниченным изменением.***

Примечание. Прилагая формулу среднего значения к определенному интегралу, представляющему длину дуги M_0M_1, концы которой соответствуют значениям t_0, t_1 параметра t $(t_1 > t_0)$, мы получим:

$$s = \operatorname{arc} M_0M_1 = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)},$$

где θ заключается в промежутке (t_0, t_1). Обозначая через c хорду M_0M_1, мы также имеем:

$$c^2 = [f(t_1) - f(t_0)]^2 + [\varphi(t_1) - \varphi(t_0)]^2 + [\psi(t_1) - \psi(t_0)]^2.$$

Прилагая формулу конечных приращений к каждой из разностей $f(t_1) - f(t_0), \ldots$, мы можем написать:

$$c = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\xi) + \varphi'^2(\eta) + \psi'^2(\zeta)},$$

причем числа ξ, η, ζ заключаются в промежутке (t_0, t_1). Но, на основании предыдущего, разность обоих корней будет меньше ε, если только колебания функций $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ в промежутке (t_0, t_1) будут меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Таким образом

$$s - c < \varepsilon(t_1 - t_0)$$

и, следовательно,

$$1 - \frac{c}{s} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}}.$$

При неограниченном уменьшении дуги M_0M_1 разность $t_1 - t_0$, а вместе с нею и ε стремятся к нулю; следовательно, разность $1 - \frac{c}{s}$ также стремится к нулю. Таким образом *отношение бесконечно малой дуги к ее хорде имеет пределом единицу.*

Пример. Пусть требуется найти дугу плоской кривой, данной уравнением в полярных координатах $\rho = f(\omega)$. Принимая ω за независимое переменное, мы представим кривую тремя уравнениями $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = 0$; отсюда имеем:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\cos\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega)^2 + (\sin\omega\, d\rho + \rho\cos\omega\, d\omega)^2,$$

или, после приведения:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

Возьмем, например, *кардиоиду*, представляемую уравнением:

$$\rho = R + R\cos\omega.$$

Предыдущая формула дает:

$$ds^2 = R^2 d\omega^2[\sin^2\omega + (1 + \cos\omega)^2] = 4R^2\cos^2\frac{\omega}{2}d\omega^2;$$

при изменении угла ω между 0 и π мы будем иметь:

$$ds = 2R\cos\frac{\omega}{2}d\omega,$$

и выражение длины дуги будет:

$$\left(4R\sin\frac{\omega}{2}\right)_{\omega_0}^{\omega_1},$$

где ω_0 и ω_1 — полярные углы, соответствующие концам дуги. Следовательно, длина всей кривой равна $8R$.

80. Направляющие косинусы. При изучении свойств кривой часто бывает удобно принимать за независимое переменное длину дуги этой кривой. Выберем на рассматриваемой кривой положительное направление и обозначим через s длину дуги AM, заключающейся между неподвижною точкою A и произвольною точкою M, со знаком $+$ или со знаком $-$ в зависимости от того, будет ли направление от A до M положительно или отрицательно. Проведем в какой-нибудь точке M этой дуги касательную к кривой в направлении возрастания дуг; пусть будут α, β, γ углы, образуемые направлением касательной с положительными направлениями прямоугольных осей Ox, Oy, Oz. Мы имеем:

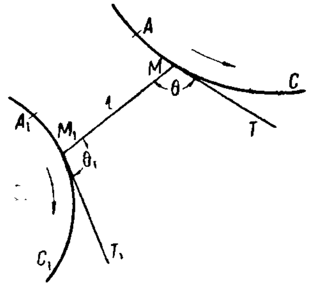
$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{\pm 1}{ds}.$$

Чтобы решить, какой знак здесь должно взять, предположим, что положительное направление касательной образует с Ox острый угол; в этом случае x и s одновременно возрастают, и следовательно, должно взять знак $+$. Если же угол α — тупой, то $\cos\alpha$ отрицательно; здесь, с возрастанием s, x убывает, $\frac{dx}{ds}$ также отрицательно, и мы опять должны взять знак $+$. Следовательно, во всех случаях имеем:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{15}$$

где dx, dy, dz, ds — диференциалы, взятые относительно произвольного независимого переменного.

81. Изменение отрезка прямой. Пусть будет MM_1 (черт. 11) прямолинейный отрезок, концы которого описывают две кривые C, C_1. Возьмем на каждой из этих кривых начальную точку и установим положительное направление.



Черт. 11.

Пусть будут: s — дуга AM, s_1 — дуга A_1M_1, причем эти обе дуги берутся с их знаками, l — длина MM_1, θ — угол прямой MM_1 с положительным направлением касательной MT, θ_1 — угол, образуемый прямою M_1M с положительным направлением касательной M_1T_1. Найдем соотношение между θ, θ_1 и диференциалами ds, ds_1, dl.

Обозначим через x, y, z, x_1, y_1, z_1 координаты точек M, M_1; через α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 — углы касательных MT и M_1T_1 с осями координат. Мы имеем:

$$l^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,$$

отсюда

$$ldl = (x - x_1)(dx - dx_1) + (y - y_1)(dy - dy_1) + (z - z_1)(dz - dz_1).$$

Пользуясь формулою (15) и соответствующею формулою для кривой C_1, мы можем представить последнее равенство в виде:

$$dl = \left(\frac{x - x_1}{l}\cos\alpha + \frac{y - y_1}{l}\cos\beta + \frac{z - z_1}{l}\cos\gamma\right)ds +$$
$$+ \left(\frac{x_1 - x}{l}\cos\alpha_1 + \frac{y_1 - y}{l}\cos\beta_1 + \frac{z_1 - z}{l}\cos\gamma_1\right)ds_1.$$

Но $\frac{x - x_1}{l}$, $\frac{y - y_1}{l}$, $\frac{z - z_1}{l}$ суть направляющие косинусы прямой MM_1; следовательно, коэфициент при ds есть: $-\cos\theta$.

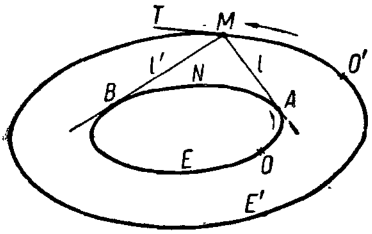
Точно так же коэфициент при ds_1 есть: $-\cos\theta_1$, и мы получим искомое соотношение:

$$dl = -ds\cos\theta - ds_1\cos\theta_1, \tag{16}$$

которым будем часто пользоваться.

82. Теоремы Гревса и Шаля. Вот одно из приложений формулы (16). Пусть будут E, E' два софокусных эллипса (черт. 12). Из точки M внешнего эллипса E' проведем касательные MA, MB к эллипсу E. *При перемещении точки M по эллипсу E' разность $MA + MB - \text{arc}\, ANB$ остается постоянной.*

Пусть будут s и s' дуги OA и OB, σ — дуга $O'M$, l и l' — длины AM и BM, θ — угол касательной MB с положительным направлением касательной MT; на основании фокальных свойств угол MA с MT равен $\pi - \theta$ *. Замечая, что AM совпадает с положительным направлением касательной в A, и что BM противоположно положительному направлению касательной в B, мы по формуле (16) имеем:



Черт. 12.

$$dl = -ds + d\sigma\cos\theta,$$
$$dl' = +ds' - d\sigma\cos\theta;$$

складывая эти равенства, получаем:

$$d(l + l') = d(s' - s) = d\ \text{arc}\, ANB,$$

откуда следует справедливость предложения.

Это — теорема английского геометра Гревса (Graves). Таким же образом доказывается следующая теорема, найденная Шалем (Chasles). Даны софокусные эллипс и гипербола, пересекающиеся в точке N; если из точки M, взятой на ветви гиперболы, проходящей через точку N, проведем к эллипсу касательные MA, MB, то разность дуг $NA - NB$ равна разности касательных $MA - MB$.

III. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ.

Многие из определенных интегралов, которые нельзя получить непосредственно, могут быть найдены при помощи двух общих приемов, которые мы здесь изложим.

---

* Соединим точку M с двумя фокусами. На основании свойств софокусных кривых второго порядка касательная MT одинаково наклонена к обоим радиусам-векторам; точно так же эти радиусы-векторы образуют равные углы с касательными MA и MB. Отсюда следует справедливость теоремы, приведенной в тексте. (*Ред.*)

83. Замена переменных. Если подстановкою $x=\varphi(t)$ в определенном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ мы заменим переменное x новым независимым переменным t, то получим новый определенный интеграл. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную между α и β, и что, при изменении t от α до β, $\varphi(t)$ изменяется всегда в одном и том же направлении от $\varphi(\alpha)=a$ до $\varphi(\beta)=b$.

Разобьем промежуток (α, β) на части промежуточными значениями $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$; пусть будут $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ соответствующие значения переменного $x=\varphi(t)$. На основании теоремы о конечных приращениях имеем:

$$x_i - x_{i-1} = (t_i - t_{i-1})\,\varphi'(\theta_i),$$

причем θ_i заключается между t_{i-1} и t_i. Пусть будет $\xi_i=\varphi(\theta_i)$ соответствующее значение переменного x, заключающееся между x_{i-1} и x_i. Сумма

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$

имеет пределом данный определенный интеграл. Но эту сумму можно также представить в виде

$$f[\varphi(\theta_1)]\,\varphi'(\theta_1)(t_1-\alpha)+\ldots+f[\varphi(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1})+\ldots$$

Отсюда видно, что она имеет пределом новый определенный интеграл

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Таким образом мы получаем равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (17)$$

Формула (17) есть формула *замены переменных* в определенных интегралах. Мы видим, что новый диференциал под знаком интеграла получается посредством замены в $f(x)\,dx$ переменного x и диференциала dx через $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)\,dt$, причем новыми пределами служат значения t, соответствующие прежним пределам. При надлежащем выборе функции $\varphi(t)$ может случиться, что новый интеграл будет проще первоначального, но, впрочем, для этого нельзя дать никаких определенных правил.

Пример. Пусть a и b — два положительных числа; мы имеем:

$$\int_1^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^{a}\frac{dx}{x}+\int_a^{ab}\frac{dx}{x};$$

полагая в последнем интеграле $x=ay$, получаем:

$$\int_a^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^{b}\frac{dy}{y}=\int_1^{b}\frac{dx}{x},$$

и следовательно, мы имеем равенство:

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

Мы получаем, таким образом, известное основное свойство логарифма (ср. § 52).

Некоторые из предположений, которые мы делали при выводе формулы (17), не необходимы. Так, нет необходимости, чтобы при изменении t от α до β функция $\varphi(t)$ изменялась всегда в одном и том же направлении. Предположим, например, что при возрастании t от α до γ ($\gamma < \beta$) функция $\varphi(t)$ возрастает от a до c ($c > b$), а при дальнейшем возрастании t от γ до β, $\varphi(t)$ убывает от c до b. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, c), то к каждому из промежутков (a, c), (c, b) можно приложить формулу (17); это дает:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_\gamma^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

складывая оба равенства, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Напротив, необходимо, чтобы $\varphi(t)$ была вполне определенною функцией от t. Если не обратить внимания на это условие, то можно притти к очевидно неверным выводам. Например, если мы применим к интегралу $\int_{-1}^{+1} dx$ формулу (17), положив $x = t^{\frac{3}{2}}$, то получим:

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

что невозможно, так как второй интеграл равен нулю. Чтобы правильно применить формулу, необходимо разбить промежуток $(-1, +1)$ на два промежутка $(-1, 0)$, $(0, 1)$. В первом промежутке мы положим $x = -\sqrt{t^3}$ и будем изменять t от 1 до 0; во втором промежутке мы положим $x = \sqrt{t^3}$ и будем изменять t от 0 до 1. Таким образом верный результат будет:

$$\int_{-1}^{+1} dx = 3\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left(2t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 = 2.$$

Примечание. Заменяя в формуле (17) верхние пределы b и β переменными пределами x и t, получим:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_\alpha^t f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Из этого равенства следует, что если мы положим $x=\varphi(t)$, то функция $F(x)$, производная которой есть $f(x)$, обращается в функцию $\Phi(t)$, производная которой есть $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Последний результат непосредственно следует из формулы производной функции от функции. Таким образом мы можем вообще написать:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Это — формула замены переменного в неопределенных интегралах.

84. Интегрирование по частям. Пусть будут u и v — функции, непрерывные вместе со своими производными u' и v' между a и b. Мы имеем:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx};$$

интегрируя обе части этого равенства, получим:

$$\int_a^b \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int_a^b u\frac{dv}{dx}\,dx + \int_a^b v\frac{du}{dx}\,dx.$$

Последнее равенство можно еще представить в следующем виде:

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{18}$$

причем символ $[F(x)]_a^b$ обозначает вообще разность

$$F(b) - F(a).$$

Заменяя предел b переменным пределом x и оставляя a постоянным, что равносильно переходу от определенных интегралов к неопределенным, мы точно так же будем иметь:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{19}$$

Таким образом вычисление интеграла $\int u\,dv$ приводится к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может быть проще первоначального. Пусть, например, требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b x^m \log x\,dx \quad (m+1 \neq 0).$$

Полагая $u=\ln x$, $v=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$, по формуле (18) имеем:

$$\int_a^b \ln x \cdot x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}\ln x}{m+1}\right]_a^b - \frac{1}{m+1}\int_a^b x^m\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^{m+1}\ln x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right]_a^b.$$

Эта формула неприменима, если $m+1=0$; в этом случае имеем:

$$\int_a^b \ln x\,\frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_a^b.$$

Формулу (18) можно обобщить. Обозначим через $u', u'', \ldots, u^{(n+1)}$, $v', v'', \ldots, v^{(n+1)}$ последовательные производные от функций u и v. Прилагая формулу (18) к интегралам $\int u\,dv^{(n)}$, $\int u'\,dv^{(n-1)}, \ldots$, мы придем к следующим равенствам:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = \int_a^b u\,dv^{(n)} = [uv^{(n)}]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)}\,dx,$$
$$\int_a^b u'v^{(n)}\,dx = \int_a^b u'\,dv^{(n-1)} = [u'v^{(n-1)}]_a^b - \int_a^b u''v^{(n-2)}\,dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\int_a^b u^{(n)}v'\,dx = \int_a^b u^{(n)}\,dv = [u^{(n)}v]_a^b - \int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.$$

Умножив эти равенства попеременно на $+1$ и -1 и сложив, получим:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b +$$
$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx. \qquad (20)$$

Эта формула приводит вычисление интеграла $\int uv^{(n+1)}\,dx$ к вычислению интеграла $\int u^{(n+1)}v\,dx$.

В частности, формулою (20) удобно пользоваться в том случае, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена u степени n на производную $(n+1)$-го порядка от известной функции v; в этом случае мы имеем $u^{(n+1)}=0$, и правая часть будет свободна от знака интеграла.

Пусть, например, требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ есть многочлен n-й степени. Положим $u=f(x)$, $v=\frac{e^{\omega x}}{\omega^{n+1}}$; выводя $e^{\omega x}$ множителем, найдем по формуле (20):

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx = \left\{e^{\omega x}\left[\frac{f(x)}{\omega}-\frac{f'(x)}{\omega^2}+\ldots+(-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{\omega^{n+1}}\right]\right\}_a^b. \quad (21)$$

Тем же способом можно вычислить определенные интегралы:

$$\int_a^b \cos mx\, f(x)\,dx, \quad \int_a^b \sin mx\, f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — многочлен.

85. Формула Тейлора. Заменим в формуле (20) u функциею $F(x)$, непрерывною между a и b вместе со своими производными до $(n+1)$-го порядка, и положим $v=(b-x)^n$. Мы имеем:

$$v'=-n(b-x)^{n-1}, \quad v''=n(n-1)(b-x)^{n-2}, \ldots,$$
$$v^{(n)}=(-1)^n\,1\cdot 2\ldots n, \quad v^{(n+1)}=0.$$

Замечая, что при $x=b$ функции $v, v', v'', \ldots, v^{(n-1)}$ обращаются в нуль, мы получим формулу:

$$0=(-1)^n\Big[n!\,F(b)-n!\,F(a)-n!\,F'(a)(b-a)-$$
$$-\frac{n!}{2}F''(a)(b-a)^2\ldots-F^{(n)}(a)(b-a)^n\Big]+$$
$$+(-1)^{n+1}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx.$$

Отсюда имеем:

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}F''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx.$$

Так как при изменении x от a до b множитель $(b-x)^n$ сохраняет постоянный знак, то мы можем применить к последнему интегралу формулу среднего значения; это дает:

$$\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx = F^{(n+1)}(\xi)\int_a^b (b-x)^n\,dx =$$
$$=\frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1}F^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ заключается между a и b. Подставляя это значение в предыдущее равенство, мы получим формулу Тейлора с остаточным членом Лагранжа.

85 bis. Трансцендентность числа e. При помощи формулы (21) можно доказать знаменитую теорему, найденную Эрмитом. *Число e не может быть корем никакого алгебраического уравнения с целыми коэфициентами* *.

Положив в формуле (21) $a=0$, $\omega=-1$, получим:

$$\int_0^b e^{-x} f(x)\,dx = -[e^{-x}F(x)]_0^b,$$

где

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x);$$

это соотношение можно представить в виде:

$$F(b)=e^b F(0)-e^b\int_0^b f(x)\,e^{-x}\,dx. \qquad (A)$$

Допустим, что e будет корнем алгебраического уравнения с целыми коэфициентами:

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\ldots+c_me^m=0.$$

Полагая в равенстве (A) последовательно $b=0, 1, 2, \ldots, m$ и складывая получающиеся формулы, умножив их соответственно на $c_0, c_1, \ldots, c_m$, получим:

$$c_0F(0)+c_1F(1)+\ldots+c_mF(m)+\sum_{i=0}^{i=m} c_ie^i\int_0^i f(x)\,e^{-x}\,dx=0, \qquad (B)$$

где указатель i принимает только целые значения $0, 1, 2, \ldots, m$. До сих пор многочлен $f(x)$ оставался произвольным; теперь мы покажем, что при соответствующем выборе многочлена $f(x)$ соотношение (B) невозможно.

Возьмем

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-m)^p,$$

где p есть простое число, большее m; многочлен $f(x)$, очевидно, $(mp+p-1)$-й степени, и все коэфициенты высших производных от этого многочлена, начиная с p-й производной, будут целыми числами, кратными p, так как произведение всяких p последовательных целых чисел делится на $p!$. Кроме того, $f(x)$ вместе со своими $p-1$ первыми производными обращается в нуль при $x=1, 2, \ldots, m$; отсюда следует, что $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ будут целыми числами, делящимися на p. Остается вычислить $F(0)$:

$$F(0)=f(0)+f'(0)+\ldots+f^{(p-1)}(0)+f^{(p)}(0)+f^{(p+1)}(0)+\ldots;$$

Но $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(p-2)}(0)=0$, и, на основании предыдущих соображений, $f^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0), \ldots$, будут целыми числами, кратными p. Чтобы получить $f^{(p-1)}(0)$, достаточно умножить на $(p-1)!$ коэфициент при x^{p-1} в $f(x)$. Это дает $\pm(1\cdot2\ldots m)^p$. Таким образом сумма

$$c_0F(0)+c_1F(1)+\ldots+c_mF(m)$$

равна целому числу, делящемуся на p, сложенному с количеством

$$\pm c_0(1\cdot2\ldots m)^p.$$

Если мы возьмем для p простое число, большее m и c_0, то это последнее количество не может делиться на p, и первая часть суммы (17) будет целым числом, *отличным от нуля.*

* Это доказательство было предложено Давидом Гильбертом (David Hilbert), положившим в основу своего вывода метод Эрмита.

Мы покажем теперь, что, взяв для p достаточно большое простое число, можно сделать сумму

$$\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx$$

меньшею всякого данного количества. При изменении x от 0 до i каждый множитель в многочлене $f(x)$ будет меньше m; следовательно,

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1},$$

$$\left|\int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx\right| < \frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1} \int_0^i e^{-x}\, dx < \frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_i c_i e^i \int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx\right| < M \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\, e^m = \varphi(p),$$

где M есть верхний предел суммы $|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_m|$. При неограниченном возрастании p функция $\varphi(p)$ стремится к нулю как общий член сходящегося ряда, в котором отношение любого члена к предыдущему стремится к нулю. Таким образом можно найти настолько большое простое число p, что равенство (B) будет невозможно; это доказывает теорему Эрмита.

86. Полиномы Лежандра. Найдем многочлен n-й степени $P_n(x)$ под условием, чтобы интеграл

$$\int_a^b QP_n\, dx,$$

где Q — многочлен степени ниже n-й, был равен нулю при любом виде многочлена Q. Мы можем рассматривать P_n как n-ю производную от некоторого многочлена R степени $2n$; этот многочлен R не вполне определяется этим условием, так как, не изменяя его n-й производной, мы можем прибавить к нему произвольный многочлен $(n-1)$-й степени. Поэтому мы всегда можем положить $P_n = \frac{d^nR}{dx^n}$, и притом выбрать многочлен R под тем условием, чтобы он вместе со своими $n-1$ первыми производными обращался в нуль при $x = a$. Формула интегрирования по частям дает:

$$\int_a^b Q \frac{d^nR}{dx^n}\, dx = \left(Q \frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}} - Q' \frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}} + \ldots \pm R \frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right)_a^b. \tag{22}$$

Но, по предположению,

$$R(a) = 0, \quad R'(a) = 0, \ \ldots, \ R^{(n-1)}(a) = 0,$$

и, чтобы предыдущий интеграл был равен нулю, необходимо еще условие:

$$Q(b)\, R^{(n-1)}(b) - Q'(b)\, R^{(n-2)}(b) + \ldots \pm Q^{(n-1)}(b)\, R(b) = 0.$$

Так как многочлен $(n-1)$-й степени Q — произвольный, то количества $Q(b)$, $Q'(b), \ldots, Q^{(n-1)}(b)$ также произвольны, и поэтому должно быть:

$$R(b) = 0, \quad R'(b) = 0, \ \ldots, \ R^{(n-1)}(b) = 0.$$

Отсюда видно, что многочлен $R(x)$ может отличаться от произведения $(x-a)^n (x-b)^n$ только постоянным множителем, и искомый многочлен P_n будет иметь вид:

$$P_n = C \frac{d^n}{dx^n}\, [(x-a)^n (x-b)^n]. \tag{23}$$

Если пределы a и b будут равны -1 и $+1$, то многочлены P_n называются полиномами Лежандра. Выбирая постоянное C согласно с Лежандром, мы положим:

$$X_n = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \tag{24}$$

Если, кроме того, примем $X_0 = 1$, то получим:

$$X_0 = 1, \quad X_1 = x, \quad X_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \quad X_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \ldots$$

X_n есть многочлен n-й степени, в котором все показатели при x будут одинаковой четности с показателем n. Из формулы Лейбница для n-й производной от произведения двух множителей непосредственно следует, что

$$X_n(1) = 1, \quad X_n(-1) = (-1)^n. \tag{25}$$

Если $\varphi(x)$ есть какой-нибудь многочлен степени ниже n-й, то на основании доказанного выше общего свойства полиномов Лежандра имеем:

$$\int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x)\, dx = 0; \tag{26}$$

в частности, если m и n — два неравных целых числа, то всегда

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n\, dx = 0. \tag{27}$$

При помощи последней формулы можно очень просто найти рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных многочлена X_n. Прежде всего заметим, что всякий многочлен n-й степени может быть представлен через X_0, $X_1, \ldots, X_n$ в виде линейной функции с постоянными коэфициентами. Следовательно, мы можем положить:

$$xX_n = C_0 X_{n+1} + C_1 X_n + C_2 X_{n-1} + C_3 X_{n-2} + \ldots,$$

где $C_0, C_1, C_2, \ldots$ — постоянные коэфициенты. Чтобы определить, например, C_3, умножим обе части этого равенства на X_{n-2} и проинтегрируем между пределами -1 и $+1$; при этом на основании формул (26) и (27) останется только

$$C_3 \int_{-1}^{+1} X_{n-2}^2\, dx = 0,$$

и следовательно, $C_3 = 0$. Таким же образом мы докажем, что $C_4 = 0$, $C_5 = 0, \ldots$ Коэфициент C_1 также равен нулю, так как произведение xX_n не содержит члена с x^n. Наконец, для определения C_0 и C_2 приравняем сначала коэфициенты при x^{n-1}, а потом приравняем обе части равенства при $x = 1$. Таким образом мы получим рекуррентное соотношение:

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) xX_n + nX_{n-1} = 0; \tag{28}$$

это соотношение позволяет очень просто находить последовательно многочлены X_n.

Соотношение (28) показывает, что ряд полиномов

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n \tag{29}$$

обладает свойствами ряда Штурма: при непрерывном изменении x от -1 до $+1$ число перемен, представляемых этим рядом, может изменяться только при переходе x через один из корней уравнения $X_n = 0$. Но формулы (25) показывают, что ряд (29) представляет n перемен при $x = -1$ и не представляет ни одной перемены при $x = +1$. Следовательно, уравнение $X_n = 0$ имеет n действительных корней, заключающихся между -1 и $+1$; это предложение можно также очень легко вывести из теоремы Ролля.

IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИНТЕГРАЛЕ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Мы еще расширим понятие определенного интеграла. До сих пор мы всегда предполагали, что функция ограничена, и что промежуток интегрирования ограничен. В некоторых случаях можно освободиться от этих ограничений.

87. Один из пределов обращается в бесконечность. Пусть будет $f(x)$ функция от x, ограниченная и интегрируемая во всяком интервале (a, l), где a — постоянное число, l — любое число, большее a. Интеграл $\int_a^l f(x)\,dx$, где $l > a$, имеет конечное значение, как бы l ни было велико; если при неограниченном возрастании l этот интеграл стремится к пределу, то этот предел изображается через $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Если начальная функция от $f(x)$ известна, то легко узнать, имеет ли данный интеграл предел. Так,

$$\int_0^l \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} l;$$

при неограниченном возрастании l правая часть имеет предел $\frac{\pi}{2}$, и мы можем написать:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Точно так же, предполагая a положительным и $\mu - 1$ отличным от нуля, имеем:

$$\int_a^l \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{1-\mu}\left(\frac{1}{l^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right);$$

если μ больше единицы, то при неограниченном возрастании l правая часть стремится к пределу, и мы можем написать:

$$\int_a^{+\infty} \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{(\mu-1)\,a^{\mu-1}}.$$

Напротив, если μ меньше единицы, то интеграл неограниченно возрастает вместе с l. То же самое будет и в том случае, если $\mu = 1$, так как интеграл выражается посредством логарифма.

В общем случае задача заключается в том, чтобы узнать, стремится ли функция

$$F(l) = \int_a^l f(x)\,dx$$

к пределу, когда l неограниченно возрастает. На основании результата, полученного выше (§ 9), *для того чтобы $F(l)$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы разность*

$$F(q)-F(p)=\int_p^q f(x)\,dx$$

стремилась к нулю, когда оба числа p и q неограниченно возрастают, и притом независимо одно от другого.

Число a не входит в это условие, что и понятно, так как за нижний предел интеграла можно взять любое число, большее a. В справедливости этого условия нетрудно убедиться на только что рассмотренном примере, где $f(x)=kx^{-\mu}$.

Если q больше, чем p, то

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| \leqslant \int_q^p |f(x)|\,dx,$$

и следовательно, *интеграл* $\int_a^l f(x)\,dx$ *имеет предел, если интеграл* $\int_a^l |f(x)|\,dx$ *его имеет*, но обратное заключение уже не будет справедливо.

Нетрудно заметить аналогию предшествующего правила с общим правилом, относящимся к сходимости рядов (§ 5). Как и это последнее, его вообще трудно применить, если функция $f(x)$ произвольна. Мы переходим теперь к рассмотрению некоторых частных случаев, которые часто встречаются, и в которых мы можем установить, стремится ли интеграл к пределу или нет.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет вид $x^{-a}\psi(x)$ где $\psi(x)$ — функция, которая остается ограниченной, когда x неограниченно возрастает. На основании первой теоремы о среднем значении, мы имеем равенство:

$$\int_p^q x^{-\alpha}\psi(x)\,dx=\mu\int_p^q x^{-\alpha}xx, \tag{30}$$

где μ — число, заключенное между верхней границей M и нижней границей m функции $\psi(x)$ для всех значений x, превосходящих постоянное число A, меньшее чисел p и q.

Эта формула позволяет сделать определенное заключение в следующих двух случаях:

1) *Если число α больше единицы, то интеграл* $\int_a^l f(x)\,dx$ *имеет предел*, так как множитель μ остается конечным, в то время как фактор $\int_p^q x^{-\alpha}dx$ стремится к нулю, когда p и q неограниченно возрастают.

2) *Если число α не превосходит единицы, и если M и m имеют один и тот же знак, то интеграл не имеет предела.*

В самом деле, абсолютная величина μ, заключенного между двумя числами одинакового знака M и m, необходимо остается больше наименьшего из двух чисел $|m|$ и $|M|$. Что касается множителя $\int\limits_p^q x^{-\alpha}\,dx$, то он неограниченно возрастает вместе с p, если положить, например, $q=p^2$.

Представляется сомнительным случай, при $\alpha\leqslant 1$, когда числа M и m имеют разные знаки, так как второй множитель произведения (30) не стремится к нулю, а относительно первого множителя μ мы не можем высказать никакого утверждения.

Например, интеграл $\int\limits_0^l \frac{\cos ax}{1+x^2}$ имеет предел, так как произведение $x^2 f(x)$ по абсолютной величине всегда меньше единицы. Но мы из предшествующего ничего не можем заключить об интеграле $\int\limits_0^l \frac{\sin x}{x}\,dx$; в самом деле, мы имеем в этом случае $\alpha=1$, $M=1$, $m=-1$.

Предыдущее правило достаточно во всех тех случаях, когда можно найти такое положительное число μ, чтобы произведение $x^{\mu}f(x)$ при бесконечном x стремилось к пределу, *отличному от нуля*. Интеграл имеет предел, если μ больше единицы, и не имеет предела, если μ меньше или равно единице.

Например, для того чтобы при неограниченном возрастании верхнего предела интеграл от рациональной дроби имел предел, необходимо и достаточно, чтобы степень знаменателя была больше степени числителя, по крайней мере, на *две единицы*. Положим:

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

где P и Q — многочлены p-й и r-й степени; при бесконечном x произведение $x^{\frac{r}{2}-p}f(x)$ имеет предел, отличный от нуля. Чтобы интеграл имел предел, необходимо и достаточно, чтобы $p<\frac{r}{2}-1$.

88. Применение второй теоремы о среднем. Предшествующее рассуждение можно обобщить. Если функция $f(x)$ имеет вид: $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$, где функция $\psi(x)$ положительна, а функция $\varphi(x)$ остается ограниченной при неограниченном возрастании x, то первая теорема о среднем дает

$$\int\limits_p^q f(x)\,dx=\mu\int\limits_p^q \psi(x)\,dx,$$

где μ — число, остающееся ограниченным, когда p и q неограниченно возрастают. Если интеграл $\int\limits_a^l \psi(x)\,dx$ имеет предел, т. е. если $\int\limits_p^q \psi(x)\,dx$ стремится к нулю, то стремится к нулю и $\int\limits_p^q f(x)\,dx$, а следовательно, интеграл $\int\limits_a^l f(x)\,dx$ также имеет предел.

Вторая формула среднего значения также приводит к новому достаточному условию сходимости.

Если функция $f(x)$ имеет вид $\varphi(x)\psi(x)$, где $\varphi(x)$ — убывающая положительная функция, то мы имеем (§ 74):

$$\int\limits_p^q \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(p)\int\limits_q^\xi \psi(x)\,dx \quad (p < \xi < q); \tag{31}$$

отсюда мы непосредственно выводим следующее предложение:

Интеграл $\int\limits_a^l \varphi(x)\psi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ есть убывающая положительная функция, которая стремится к нулю при неограниченном возрастании x, имеет предел, если только абсолютная величина интеграла $\int\limits_p^q \psi(x)\,dx$ остается меньше некоторого постоянного числа, каковы бы ни были p и q.

Простой пример мы получим, полагая $\psi(x) = \sin x$, так как абсолютная величина интеграла $\int\limits_p^q \sin x\,dx$, самое большее, равна 2. Легко показать непосредственно, что интеграл $\int\limits_a^l \varphi(x)\sin x\,dx$, где $\varphi(x)$ — убывающая положительная функция, которая стремится к нулю, когда x неограниченно возрастает, имеет предел, и что сходимость его аналогична сходимости знакопеременного ряда.

Допустим для определенности, что $a = 0$, причем произведение $\varphi(x)\sin x$ остается конечным при $x = 0$. Кривая $y = \varphi(x)\sin x$ имеет вид синусоиды, которая пересекает ось Ox в точках $x = k\pi$. Таким образом задача сводится к тому, чтобы исследовать знакопеременный ряд

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots, \tag{32}$$

где положено

$$a_n = \left| \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \varphi(x)\sin x\,dx \right|,$$

причем a_n представляет площадь, ограниченную кривою и отрезком оси Ox, заключенным между абсциссами $n\pi$ и $(n+1)\pi$. Полагая $x=y+n\pi$, мы имеем также:

$$a_n=\int_0^{\pi} \varphi(y+n\pi)\sin y\,dy.$$

Очевидно, что подинтегральная функция убывает с возрастанием n, так как $\varphi(x)$ есть функция убывающая; следовательно, $a_{n+1}<a_n$. С другой стороны, a_n меньше, чем $\pi\varphi(n\pi)$, и следовательно, стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Следовательно, знакопеременный ряд (32) сходится. Пусть l — число, заключенное между $n\pi$ и $(n+1)\pi$; мы имеем:

$$\int_0^l \varphi(x)\sin x\,dx=S_n\pm\theta a_n\quad(0\leqslant\theta<1),$$

где S_n — сумма первых n членов ряда (32). Когда l неограниченно возрастает, то возрастает неограниченно и число n, a_n стремится к нулю, и интеграл имеет пределом сумму S ряда (32). Таким же образом показывают, что интегралы

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx,$$

которые встречаются в теории дифракции, имеют конечное значение Кривая $y=\sin x^2$, например, имеет волнообразную форму синусоиды, но волны все более и более сжимаются, так как разность

$$\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$$

двух последовательных корней уравнения $y=\sin x^2=0$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Можно, впрочем, привести эти интегралы к предшествующему виду, полагая $x^2=y$.

Примечание. По поводу этого последнего примера можно сделать интересное замечание. Когда x неограниченно возрастает, $\sin x$ колеблется от -1 до $+1$; следовательно, интеграл может иметь предел, хотя бы подинтегральная функция и не стремилась к нулю, другими словами, хотя бы кривая $y=f(x)$ и не приближалась асимптотически к оси Ox. Вот еще пример, где это имеет место, и где функция $f(x)$ сохраняет, сверх того, постоянный знак. Пусть

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x};$$

эта функция остается положительной, если x положительно, и не стремится к нулю, так как $f(k\pi)=k\pi$. Чтобы убедиться в том, что интеграл имеет предел, рассмотрим, как мы это делали выше, ряд

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots,$$

где

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x};$$

когда x изменяется от $n\pi$ до $(n+1)\pi$, x^6 остается больше, чем $n^6\pi^6$, и мы имеем:

$$a_n < (n+1)\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^6\pi^6 \sin^2 x}.$$

Первообразная функция имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^6\pi^6}} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{1+n^6\pi^6} \operatorname{tg} x);$$

при изменении x от $n\pi$ до $(n+1)\pi$, $\operatorname{tg} x$ только однажды обращается в бесконечность, переходя от $+\infty$ к $-\infty$; следовательно, интеграл равен (§ 76) $\frac{\pi}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}$, и мы имеем:

$$a_n < \frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+n^6\pi^6}} < \frac{n+1}{n^3\pi}.$$

Так как ряд $\sum a_n$, таким образом, сходится, то интеграл $\int_0^l f(x)\,dx$ имеет предел.

Впрочем, почти очевидно, что если $f(x)$ имеет предел, *отличный от нуля*, при безграничном возрастании x, то интеграл не может иметь предела. В самом деле, мы имеем $\int_p^q f(x)\,dx = \mu(q-p)$; если $f(x)$ имеет предел $h \gtrless 0$, то μ имеет тот же предел h, и произведение $\mu(q-p)$ не может стремиться к нулю.

89. **Подинтегральная функция обращается в бесконечность.** Рассмотрим сначала следующий частный случай: функция $f(x)$ непрерывна при всех значениях, заключающихся между a и b, а также и при $x=b$, но она обращается в бесконечность при $x=a$. Для определенности предположим $a<b$. Как бы ни было мало ε, интеграл от функции $f(x)$, взятый между пределами $a+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и b, всегда имеет конечное значение. Если при приближении ε к нулю этот интеграл стремится к пределу, то принято изображать этот предел, как это и естественно, через

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если для $f(x)$ известна какая-нибудь начальная функция $F(x)$, то

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(b) - F(a+\varepsilon),$$

и достаточно исследовать, стремится ли $F(a+\varepsilon)$ к какому-нибудь пределу при приближении ε к нулю. Например, мы имеем:

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = -\frac{M}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}\right], \quad \mu \neq 1.$$

Если $\mu > 1$, то при приближении ε к нулю член $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}$ неограниченно возрастает; напротив, при $\mu < 1$, можно написать: $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}} = \varepsilon^{1-\mu}$, и мы видим, что этот член стремится к нулю вместе с ε. Следовательно, в последнем случае определенный интеграл стремится к пределу:

$$\int_a^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = \frac{M(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Если $\mu = 1$, то

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{x-a} = M \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right),$$

и правая часть возрастает неограниченно при приближении ε к нулю. Таким образом, чтобы предыдущий определенный интеграл имел предел, *необходимо и достаточно, чтобы μ было меньше единицы.*

Кривая, представляемая уравнением

$$y = \frac{M}{(x-a)^\mu},$$

имеет при положительном μ асимптотою прямую $x = a$. Тем не менее, если $\mu < 1$, то площадь, заключающаяся между осью x, неподвижною ординатою $x = b$, кривою и ее асимптотою, имеет конечное значение.

В общем случае вопрос сводится к тому, чтобы узнать, стремится ли функция от ε,

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

к пределу, когда ε стремится к нулю по положительным значениям. *Для этого необходимо и достаточно* (§ 9), *чтобы разность*

$$F(\varepsilon) - F(\varepsilon') = \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f(x)\,dx$$

стремилась к нулю, когда оба положительных числа ε и ε' стремятся к нулю независимо одно от другого.

Отсюда мы выводим те же следствия, что и в § 87; мы их укажем в общих чертах. Если функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^\alpha}$, где α — положительный показатель, а $\psi(x)$ — функция, которая вблизи точки a заключена между двумя постоянными числами M и m, то мы имеем:

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f(x)\,dx = \mu \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^\alpha},$$

где μ заключено между M и m. Тогда

1) *если α меньше единицы, интеграл имеет предел;*

2) *если $\alpha \geqslant 1$, и оба числа M и m имеют один и тот же знак, то интеграл не имеет предела.*

Представляется неопределенным случай при $\alpha \geqslant 1$, когда M и m имеют разные знаки.

Всякий раз, как существует такое число α, что произведение $(x-a)^\alpha f(x)$ имеет предел K, *отличный от нуля*, когда x стремится к a, *для существования предела интеграла необходимо и достаточно, чтобы α было меньше единицы.*

Примеры. Пусть будет $f(x)=\frac{P}{Q}$ рациональная функция; если a есть m-кратный корень знаменателя, то произведение $(x-a)^m f(x)$ стремится при $x=a$ к пределу, отличному от нуля. Так как m не менее единицы, то мы видим, что при приближении ε к нулю интеграл $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ неограниченно возрастает.

С другой стороны, положим:

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

где P и R — два многочлена, и многочлен $R(x)$ не имеет кратных корней. Если a есть корень многочлена $R(x)$, то произведение $(x-a)^{\frac{1}{2}} f(x)$ имеет предел при $x=a$; следовательно, интеграл также имеет предел. Так, например, интеграл

$$\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

имеет при $\varepsilon=0$ предел $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим еще интеграл $\int\limits_{\varepsilon}^{1} \ln x\,dx$. Произведение $x^{\frac{1}{2}} \ln x$ имеет пределом нуль; следовательно, начиная с достаточно малого значения переменного x, мы имеем $\ln x < Mx^{-\frac{1}{2}}$, где M — произвольно выбранное положительное число. Следовательно, данный интеграл имеет предел.

Все, что здесь было сказано относительно нижнего предела a, может быть без изменения отнесено и к верхнему пределу b. Если $f(x)$ при $x=b$ обращается в бесконечность, то мы определим интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ как предел интеграла $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при $\varepsilon'=0$. Если $f(x)$ обращается в бесконечность при обоих пределах a, b, то мы определим интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ как предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$, когда ε и ε' независимо одно от другого стремятся к нулю. Пусть будет c какое-нибудь число, содержащееся между a и b; мы можем написать:

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx=\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

и каждый из интегралов, стоящих в правой части, должен иметь предел. Наконец, если $f(x)$ обращается в бесконечность при значении c, заключающемся между a и b, то мы определим интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ как сумму пределов интегралов $\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx$ и $\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$; таким же образом мы поступим, если $f(x)$ имеет между a и b несколько точек прерывности.

Должно заметить, что основная формула (6) § 76, выведенная в предположении, что между a и b функция $f(x)$ непрерывна, остается верною и в том случае, когда $f(x)$ между этими пределами обращается в бесконечность, если только начальная функция $F(x)$ остается при этом непрерывною.

Предположим, например, что функция $f(x)$ обращается в бесконечность при значении c, заключающемся между a и b. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Если начальная функция от $f(x)$ есть $F(x)$, то мы можем представить последнее равенство в виде:

$$\int f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} F(c-\varepsilon') - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon=0} F(c+\varepsilon).$$

Так как мы предположили, что функция $F(x)$ непрерывна при $x=c$, то $F(c+\varepsilon)$ и $F(c-\varepsilon')$ будут иметь один и тот же предел, и следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Например,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)_{-1}^{+1} = 6.$$

Если между a и b начальная функция $F(x)$ сама обращается в бесконечность, то формула (6) более не применима, так как в предыдущем нет указаний на то, какой смысл может иметь в этом случае интеграл.

Рассматривая эти обобщенные интегралы как пределы обыкновенных интегралов, мы можем точно так же распространить на них формулы замены переменного и интегрирования по частям.

90. Функция $\Gamma(a)$. Определенный интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \tag{33}$$

имеет определенное значение, если a положительно.

В самом деле, рассмотрим два интеграла

$$\int_\varepsilon^1 x^{a-1}e^{-x}dx,\quad \int_1^l x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

где ε — очень малое положительное число, а l — очень большое положительное число. Второй интеграл всегда имеет предел, так как при достаточно больших значениях x мы имеем: $e^x > x^{a+1}$, откуда

$$x^{a-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}.$$

Что касается первого интеграла, то при приближении x к нулю произведение $x^{1-a}f(x)$ имеет пределом единицу. Чтобы интеграл имел предел, необходимо и достаточно, чтобы $1-a$ было меньше единицы, т. е чтобы a было положительно. Предположим, что условие выполнено; сумма обоих пределов есть функция $\Gamma(a)$, называемая также *эйлеровым интегралом второго рода*. Эта функция обращается в бесконечность, если a стремится к нулю; она имеет положительное значение при всяком положительном значении a и бесконечно возрастает вместе с a. Она имеет минимум при $x=1{,}4616321\ldots$, и ее соответствующее значение будет $0{,}8556032\ldots$

Проинтегрируем по частям формулу (33), предполагая $a>1$, рассматривая $e^{-x}dx$ как диференциал от $-e^{-x}$; получим:

$$\Gamma(a)=-\left[x^{a-1}e^{-x}\right]_0^{+\infty}+(a-1)\int_0^{\infty}x^{a-2}e^{-x}\,dx.$$

Но на пределах $+\infty$ и 0 произведение $x^{a-1}e^{-x}$ равно нулю, так как $a>1$; поэтому

$$\Gamma(a)=(a-1)\,\Gamma(a-1). \tag{34}$$

Применяя эту формулу несколько раз, мы можем привести вычисление функции $\Gamma(a)$ к случаю, когда аргумент a заключается между 0 и 1. Если a есть целое число, то из формулы (34) легко вывести значение $\Gamma(a)$. Мы имеем:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=-\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1;$$

полагая затем в формуле (26) последовательно $a=2, 3, \ldots, n, \ldots$, получим:

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(3)=2\,\Gamma(2)=1\cdot 2,$$

и вообще при n целом положительном,

$$\Gamma(n)=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)=(n-1)! \tag{35}$$

91. Криволинейные интегралы. Пусть будет AB непрерывная дуга плоской кривой, и $P(x,y)$ — функция переменных x, y, непрерывная вдоль AB (здесь x, y обозначают координаты точки дуги AB относительно двух осей, лежащих в ее плоскости). Разобьем дугу AB на части точками деления $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$ с координатами (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$, $(x_i, y_i), \ldots$ и на каждой из дуг $m_{i-1}m_i$ возьмем, кроме того, по произвольной точке n_i с координатами (ξ_i, η_i). Рассмотрим сумму:

$$\begin{aligned}&P(\xi_1,\eta_1)(x_1-a)+P(\xi_2,\eta_2)(x_2-x_1)+\ldots\\&\ldots+P(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})+\ldots,\end{aligned} \tag{36}$$

распространенную на все частичные промежутки. Если число точек деления неограниченно возрастает так, что каждая из разностей x_i-x_{i-1} стремится к нулю, то предыдущая сумма стремится к некоторому пределу, который называется *криволинейным интегралом* от $P(x,y)$, распространенным на дугу AB; этот интеграл изображается символом

$$\int_{AB}P(x,y)\,dx.$$

Чтобы доказать существование этого предела, предположим сначала, что любая прямая, параллельная Oy, может встретить дугу AB не более чем в одной точке. Пусть будут a и b абсциссы точек A и B, и $y=\varphi(x)$ — уравнение кривой AB; $\varphi(x)$ есть непрерывная функция от x в промежутке (a, b). Если в $P(x, y)$ мы заменим y через $\varphi(x)$, то полученный результат также будет непрерывною функциею $\Phi(x) = P[x, \varphi(x)]$, и мы будем иметь:

$$P(\xi_i, \eta_i) = P[\xi_i, \varphi(\xi_i)] = \Phi(\xi_i).$$

Таким образом предыдущая сумма может быть представлена в виде:

$$\Phi(\xi_1)(x_1 - a) + \Phi(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \Phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots;$$

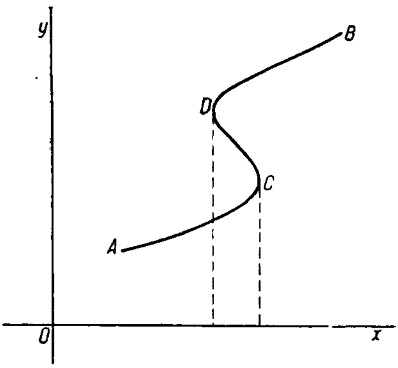
следовательно, она имеет пределом обыкновенный определенный интеграл

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx;$$

таким образом

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx.$$

Если прямые, параллельные Oy, могут встречать дугу AB более чем в одной точке, то мы разделим эту дугу на несколько таких частей, из которых каждая может пересекаться с прямою, параллельною Oy, только в одной точке. Пусть, например, дана дуга кривой $ACDB$ (черт. 13); пусть будут C и D точки, для которых абсцисса имеет наибольшее или наименьшее значение. Каждая из дуг AC, CD, DB удовлетворяет предыдущему условию, и мы можем написать:



Черт. 13.

$$\int_{ACDB} P(x, y)\,dx = \int_{AC} P(x, y)\,dx + \int_{CD} P(x, y)\,dx + \int_{DB} P(x, y)\,dx.$$

При этом должно заметить, что при вычислении трех интегралов в правой части нужно будет в $P(x, y)$ заменить y тремя различными функциями от переменного x. Криволинейные интегралы $\int_{AB} Q(x, y)\,dy$ определяются таким же образом. Заметим также, что дуга AB может состоять из частей совершенно различных кривых, например из прямых, дуг круга и пр.

Из предыдущего видно, что криволинейные интегралы непосредственно приводятся к обыкновенным определенным интегралам, но введение их оправдывается их полезностью.

В приложениях весьма часто случается, что координаты точки дуги AB выражаются в функции переменного параметра

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

причем $\varphi(t)$, $\psi(t)$ вместе со своими производными $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ суть непрерывные функции от t. Мы будем предполагать, что при изменении t от α до β точка (x, y), описывая дугу AB, перемещается все время в одном и том же направлении. Разобьем промежуток (α, β) на более мелкие промежутки; пусть будут t_{i-1}, t_i два последовательных значения t, которым соответствуют на дуге AB две точки m_{i-1}, m_i с координатами (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i). Мы имеем:

$$x_i-x_{i-1}=\varphi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1}),$$

причем θ_i заключается между t_{i-1} и t_i. Этому значению θ_i соответствует на дуге m_{i-1}, m_i некоторая точка (ξ_i, η_i). Таким образом мы имеем:

$$\sum P(\xi_i, \eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum P[\varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)]\varphi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1}),$$

или, переходя к пределу:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Таким же образом мы получим аналогичную формулу для $\int Q\,dy$ и, складывая обе формулы, найдем:

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int_\alpha^\beta[P\varphi'(t)+Q\psi'(t)]\,dt. \tag{37}$$

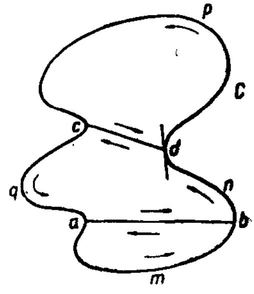
Это — формула замены переменного в криволинейном интеграле. Понятно, что если дуга AB состоит из частей различных кривых, то функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не будут вдоль AB всюду выражаться одинаковым образом, и мы должны будем прилагать формулу (37) отдельно к каждой из частей дуги AB.

92. Приложение к площади замкнутой кривой. Чтобы на примере показать пользу криволинейных интегралов для получения более общих высказываний, возвратимся к формуле, дающей площадь области, ограниченной на черт. 10 (§ 78) замкнутою кривою $Am_1Bm_2A'A$. Два интеграла $\int_a^b \psi_2(x)\,dx$ и $\int_a^b \psi_1(x)\,dx$ равны соответственно криволинейным интегралам $\int_{A'm_2B} y\,dx$ и $\int_{Am_1B} y\,dx$; с другой стороны, интеграл $\int_{AA'} y\,dx$ равен нулю, и при изменении направления обхода знак интеграла меняется на обратный.

Если мы условимся считать, что контур C описывается в прямом направлении, когда наблюдатель, находящийся на плоскости контура и обходящий этот контур C, имеет ограниченную контуром площадь по левую сторону (причем оси имеют обычное расположение, как на черт. 10)*, то мы можем выразить полученный результат следующим образом: площадь Ω, ограниченная замкнутым контуром C, равна:

$$\Omega = -\int_C y\,dx, \tag{38}$$

причем криволинейный интеграл взят вдоль контура C в прямом направлении. Так как последний интеграл не меняется от перемещения начала координат, то эта формула остается верною при всяком положении контура C относительно осей координат.



Черт. 14.

Рассмотрим теперь контур C произвольной формы. Мы предположим, что проведя ряд прямых, соединяющих две точки контура C, можно получить такие частные контуры, что прямые, параллельные Oy, будут пересекать каждый из них только в двух точках. Такова область, ограниченная контуром C на черт. 14; при помощи поперечных прямых ее можно разбить на три части, ограниченные контурами $amba$, $abndcqa$, $cdpc$. К каждой из них можно приложить предыдущую формулу; если мы сложим получающиеся результаты, то криволинейные интегралы, взятые дважды по вспомогательным прямым ab и cd, уничтожатся, и мы найдем, что и в этом случае площадь, ограниченная контуром C, равна криволинейному интегралу $-\int y\,dx$, взятому вдоль C в прямом направлении.

Таким же образом мы докажем, что площадь Ω равна:

$$\Omega = \int_C x\,dy, \tag{39}$$

и, соединяя обе формулы, получим:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx, \tag{40}$$

причем интегралы берутся всегда в прямом направлении.

Например, площадь эллипса, представляемого уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

имеет выражение:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

---

* Вообще, каково бы ни было расположение осей координат Ox, Oy, говорят, что контур C описан в прямом направлении, если поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, приводящий в совпадение положительное направление касательной с направлением внутренней нормали к контуру C, совершается в ту же сторону, что поворот на $\frac{\pi}{2}$, приводящий Ox в совпадение с Oy.

Примечание. Всякий криволинейный интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$, взятый вдоль замкнутого контура C в положительном направлении, можно написать в несколько иной форме, если воспользоваться дугой контура. Пусть α, β суть углы положительного направления касательной с осями Ox и Oy (измеряемые от 0 до π), α' и β' — углы, составляемые направлением *внутренней нормали* с Ox и Oy. Предположим, что через точку M контура C проведены две полупрямые Mx', My', соответственно параллельные Ox и Oy; поворот, приводящий Mx' к положительному направлению касательной, заставит My' совпасть с внутренней нормалью; мы имеем, следовательно, $\beta' = \alpha$, $\cos\beta' = \cos\alpha$. Условие перпендикулярности,

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = 0,$$

дает далее:

$$\cos\beta = -\cos\alpha',$$

и следовательно,

$$dx = \cos\alpha\,ds = \cos\beta'\,ds, \quad dy = \cos\beta\,ds = -\cos\alpha' ds.$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$ примет, следовательно, такой вид:

$$\int\limits_C (P\cos\beta' - Q\cos\alpha')\,ds,$$

где элемент ds существенно положителен. Если контур C имеет угловые точки, то мы разобьем его на несколько дуг таким образом, чтобы на каждой из них α', и β' были непрерывными функциями s, и сложим интегралы, распространенные на каждую из этих дуг.

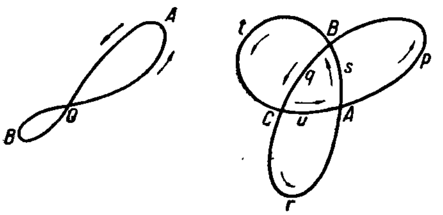
Например, площадь области D представляется любым из двух интегралов:

$$-\int\limits_C x\cos\alpha' ds, \quad -\int\limits_C y\cos\beta' ds,$$

и этот результат не зависит от расположения осей.

93. Значение интеграла $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$. Естественно спросить, что представляет интеграл $\int x\,dy - y\,dx$, взятый вдоль кривой произвольной формы, замкнутой или незамкнутой.

Рассмотрим, например, две замкнутые кривые $OAOBO$, $ApBqCrAsBtCuA$, имеющие соответственно одну и три двойных точки. Ясно, что каждую из этих кривых мы можем заменить соединением двух замкнутых кривых без двойных точек. Так, замкнутый контур $OAOBO$ равносилен последовательности двух контуров OAO, OBO. Интеграл, взятый вдоль целого контура, равен площади петли OAO без площади петли OBO. Точно так же второй контур можно заменить двумя замкнутыми кривыми $ApBqCrA$ и $AsBtCuA$. Следовательно, интеграл равен сумме площадей петель $ApBsA$, $BtCqB$, $ArCuA$, сложенной с удвоенною площадью петли $AsBqCuA$. Это рассуждение имеет вполне общий характер. Замкнутый контур с любым числом двойных точек определяет некоторое число частных площадей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, вполне им ограниченных. Интеграл, взятый вдоль всего контура, равен сумме вида:



Черт. 15.

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_p\sigma_p,$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_p$ — целые числа, положительные или отрицательные, определяемые по следующему правилу. *Пусть даны две смежные площади σ, σ', разделенные дугою ab контура C. Вообразим наблюдателя, находящегося на плоскости и описывающего контур в направлении, указанном стрелками; коэфициент площади, лежащей налево от наблюдателя, на единицу больше коэфициента площади, лежащей направо.* Неограниченной площади, лежащей вне контура, приписывают коэфициент нуль и затем находят последовательно все остальные коэфициенты.

Если данная кривая AB — незамкнутая, то мы преобразуем ее в замкнутую кривую, соединяя с началом концы A и B, и затем применим к этому контуру предыдущее правило, так как интеграл $\int x\,dy - y\,dx$, взятый вдоль лучей OA и OB, очевидно, равен нулю.

V. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА.

94. Диференцирование под знаком интеграла. Весьма часто приходится рассматривать определенные интегралы, в которых подинтегральная функция зависит не только от переменного интеграции, но также от одного или нескольких других переменных, рассматриваемых как параметры. Пусть будет $f(x, a)$ функция двух переменных x и a, непрерывная при изменении x от x_0 до X и при изменении a между некоторыми пределами a_0, a_1. Предположим, что a имеет некоторое определенное значение, заключающееся между a_0 и a_1, и что пределы x_0, X не зависят от a; тогда определенный интеграл

$$F(a) = \int_{x_0}^{X} f(x, a)\,dx$$

есть функция переменного a. Рассмотрим свойства этой функции. Мы имеем:

$$F(a + \Delta a) - F(a) = \int_{x_0}^{X} [f(x, a + \Delta a) - f(x, a)]\,dx. \tag{41}$$

Так как функция $f(x, a)$ непрерывна, то можно взять Δa настолько малым, чтобы абсолютная величина разности, стоящей под знаком интеграла, была меньше заранее данного положительного числа ε. Поэтому приращение $\Delta F(a)$ будет по абсолютной величине меньше $\varepsilon\,|X - x_0|$; отсюда следует, что функция $F(a)$ непрерывна.

Если $f(x, a)$ имеет производную по переменному a, то

$$f(x, a + \Delta a) - f(x, a) = \Delta a\,[f'_a(x, a) + \varepsilon],$$

причем ε стремится к нулю одновременно с Δa. Поэтому, разделив обе части (41) на Δa, мы можем написать:

$$\frac{F(a + \Delta a) - F(a)}{\Delta a} = \int_{x_0}^{X} f'_a(x, a)\,dx + \int_{x_0}^{X} \varepsilon\,dx.$$

Обозначим через η верхний предел абсолютных величин ε; тогда последний интеграл будет по абсолютной величине меньше $\eta\,|X-x_0|$, и, переходя к пределу, получим:

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx. \tag{42}$$

Чтобы это заключение было совершенно строго, необходимо $\Delta\alpha$ взять настолько малым, чтобы число ε было менее любого заданного числа η при всех значениях x, заключающихся между пределами x_0 и X. Это, наверное, будет в том случае, если производная $f'_\alpha(x, \alpha)$ сама непрерывна. В самом деле, формула конечных приращений дает:

$$f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)=\Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha), \quad 0<\theta<1,$$

и следовательно,

$$\varepsilon=f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x, \alpha).$$

Если функция f'_α непрерывна, то, каковы бы ни были x и α, разность ε будет меньше η, если только $|\Delta\alpha|$ будет меньше достаточно малого положительного числа h (см. гл. I, § 12).

Предположим теперь, что пределы X и x_0 будут также зависеть от α. Обозначая через ΔX и Δx_0 приращения, соответствующие приращению $\Delta\alpha$, мы будем иметь:

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)]\,dx+$$
$$+\int_{X}^{X+\Delta X} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx.$$

Прилагая к двум последним интегралам формулу среднего значения и разделив результат на $\Delta\alpha$, получим:

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}\frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx+$$
$$+\frac{\Delta X}{\Delta\alpha}f(X+\theta\,\Delta X, \ \alpha+\Delta\alpha)-\frac{\Delta x_0}{\Delta\alpha}f(x_0+\theta'\Delta x_0, \ \alpha+\Delta\alpha).$$

При приближении $\Delta\alpha$ к нулю первый интеграл имеет найденный выше предел, и, переходя к пределу, получим:

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx+\frac{dX}{d\alpha}f(X, \alpha)-\frac{dx_0}{d\alpha}f(x_0, \alpha). \tag{43}$$

Это — общая формула *диференцирования под знаком интеграла.*

Так как всякий криволинейный интеграл можно привести к сумме обыкновенных определенных интегралов, то формула диференцирования под знаком интеграла распространяется и на эти интегралы. Например, пусть будет:

$$F(a) = \int_{\stackrel{\frown}{AB}} P(x, y, a)\,dx + Q(x, y, a)\,dy$$

криволинейный интеграл, взятый вдоль дуги AB, не зависящей от a; мы имеем:

$$F'(a) = \int_{\stackrel{\frown}{AB}} P'_\alpha(x, y, a)\,dx + Q'_\alpha(x, y, a)\,dy,$$

причем при всяком a интеграл берется вдоль одной и той же кривой.

Формулою (43) часто пользуются, чтобы получать значения некоторых определенных интегралов, приводя их к другим более простым интегралам. Например, при a положительном мы имеем:

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}.$$

Прилагая $(n-1)$ раз формулу (42), получим:

$$(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \ldots (n-1) \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right).$$

95. Интегрирование под знаком интеграла. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных x, y, непрерывная в области D, определяемой условиями $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, где a, b, c, d постоянны. Смысл выражения

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$$

вполне ясен; если x имеет определенное значение, заключенное между a и b, то интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ есть непрерывная функция от x, которую мы затем интегрируем между пределами a и b. В этом выражении *можно переменить порядок интеграции, не изменяя результата*. Другими словами, мы имеем равенство:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{44}$$

которое представляет собою *формулу интегрирования под знаком интеграла*.

Для доказательства оставим a, c, d постоянными и заменим b переменным t, заключенным между a и b; тогда равенство примет вид:

$$\int_a^t dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^t f(x, y)\,dx. \tag{45}$$

Обе части этого равенства суть функции t, которые обращаются в нуль при $t=a$; следовательно, достаточно будет убедиться в том, что их производные по t совпадают. Если мы положим

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x), \quad \int_a^t f(x, y)\, dx = \Phi(t, y),$$

то соотношение (45) напишется так:

$$\int_a^t F(x)\, dx = \int_c^d \Phi(t, y)\, dy, \tag{45'}$$

и мы непосредственно убеждаемся в том, что производные обеих частей по переменному t, $F(t)$ и $\int_c^d \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dy$, равны $\int_c^d f(t, y)\, dy$.

В предшествующих доказательствах существенно предполагается, что функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны, и что пределы интеграции конечны. Если эти условия не выполнены, то выводы могут быть совершенно иными, и применение обычных формул (43) и (44) может привести к иллюзорным или даже абсурдным результатам.

Например, мы имеем:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha\, dx}{\alpha^2 + x^2} = \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha}\right]_0^1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\alpha};$$

эта функция разрывна при $\alpha = 0$, и мы имеем:

$$F(+0) = \frac{\pi}{2},\; F(-0) = -\frac{\pi}{2};$$

здесь подинтегральная функция разрывна в точке $x = \alpha = 0$. Возьмем также интеграл

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx;$$

полагая $\alpha x = y$, получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \pm \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy,$$

причем перед вторым интегралом нужно взять тот же знак, который имеет α, так как пределы нового интеграла суть 0 и $+\infty$, или 0 и $-\infty$, смотря по тому положительно ли α или отрицательно. Выше мы видели (§ 88), что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$ есть положительное число N. Следовательно, рассматриваемый интеграл равен $\pm N$, в зависимости от знака α. Применяя к этому интегралу формулу (43), мы приходим к равенству:

$$F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x\, dx,$$

правая часть которого не имеет никакого смысла.

Рассмотрим еще функцию $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ и применим к ней формулу (44), беря пределы обеих интеграций равными 0 и 1; мы получаем, таким образом, равенство:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx. \tag{46}$$

Выполняя одну из интеграций в левой части, находим:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)} \right]_0^1 = \frac{1}{1 + x^2},$$

и левая часть равенства имеет значение $\frac{\pi}{4}$. Производя интегрирование в обратном порядке, находим, что значение правой части есть $-\frac{\pi}{4}$. Абсурдность этого результата происходит оттого, что функция $f(x, y)$ разрывна в точке $x = y = 0$, принадлежащей границе области (см. § 130).

96. Равномерно сходящиеся интегралы. Можно, однако, применять формулы (43) и (44) в случаях, более общих, чем те, которые были рассмотрены при доказательстве. Пусть $f(x, \alpha)$ — функция переменных x и α, непрерывная, когда x остается больше некоторого числа a, а α заключено между α_0 и α_1. Если интеграл $\int_a^l f(x, \alpha) dx$ стремится к пределу при неограниченном возрастании l, каково бы ни было α, то этот предел

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \tag{47}$$

есть функция от α, которая не обязана быть непрерывной, как показывает один из только что приведенных нами примеров.

Мы будем говорить, что интеграл (47) *сходится равномерно*, если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие такое число L, что

$$\left| \int_l^{+\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon, \tag{48}$$

если только $l \geqslant L$, причем это число L — одно и то же для всех значений α в интервале (α_0, α_1). В этом случае функция

$$\Phi_n(\alpha) = \int_a^{a+n} f(x, \alpha) dx,$$

где n есть целое положительное число, стремится равномерно к своему пределу $F(\alpha)$, когда n неограниченно возрастает, и следовательно, $F(\alpha)$ есть непрерывная функция от α.

Допустим теперь, что интеграл, полученный по обычному правилу диференцирования под знаком интеграла,

$$F_1(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx, \tag{49}$$

имеет смысл и сам сходится равномерно в интервале (α_0, α_1). Функция

$$\Psi_n(\alpha) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx$$

стремится равномерно к своему пределу $F_1(\alpha)$; мы имеем:

$$\Psi_n(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}[\Phi_n(\alpha)],$$

каково бы ни было n, если $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ непрерывна. Следовательно, $F_1(\alpha)$ есть производная от $F(\alpha)$ (§ 29).

Таким образом мы вправе применить к интегралу (47) обычную формулу диференцирования под знаком интеграла, *если только интеграл, полученный этим способом, сходится равномерно.*

Точно так же, если $f(x, \alpha)$ бесконечна при пределе $x = a$ интеграции, то мы будем говорить, что интеграл

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \quad (a < b) \tag{50}$$

сходится равномерно, если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число η, не зависящее от α, такое, что

$$\left| \int_a^{a+h} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon$$

для всех положительных значений h, меньших η. Мы можем, далее, применить к интегралу (50) обычную формулу диференцирования, если получаемый таким образом интеграл сходится равномерно; доказательство аналогично предыдущему.

Мы можем также распространить формулу интеграции под знаком интеграла на случай, когда один из пределов бесконечен. Пусть $f(x, \alpha)$ — функция двух переменных x и α, непрерывная при $x \geqslant a$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. *Если интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ *равномерно сходится в интервале* (α_0, α_1), *то мы имеем:*

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx. \tag{51}$$

Пусть l — какое угодно число, большее a; на основании общей формулы (44) имеем:

$$\int_a^l dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^l f(x, \alpha)\, dx. \tag{52}$$

Когда l неограниченно возрастает, правая часть этого равенства имеет пределом

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

так как разность этих двух выражений равна

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_l^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

и, следовательно, по абсолютной величине меньше $\varepsilon\,|\alpha_1 - \alpha_0|$, если только l превосходит некоторое L. Следовательно, левая часть уравнения (52) также стремится к пределу, представляемому символом

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Приравнивая оба эти предела, мы и получаем формулу (51).

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

где $\alpha \geqslant 0$. Этот интеграл сходится равномерно, так как мы можем написать, на основании второй теоремы о среднем:

$$\int_l^q e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{e^{-\alpha l}}{l} \int_l^{\xi} \sin x\, dx,$$

где $l < \xi < q$, и следовательно, мы имеем:

$$\left| \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| < \frac{2}{l};$$

если l больше, чем $\frac{2}{\varepsilon}$, то левая часть этого неравенства будет меньше ε, каково бы ни было $\alpha \geqslant 0$. Следовательно, функция $F(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \geqslant 0$.

Интеграл, получаемый посредством диференцирования, равномерно сходится для всех значений α, превосходящих какое-либо положительное число k. В самом деле, мы имеем:

$$\left| \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx \right| < \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha l};$$

если взять l достаточно большим, чтобы ke^{kl} было $> \frac{1}{\varepsilon}$, то абсолютная величина этого интеграла будет меньше ε для всех значений α, превосходящих k. Мы имеем, следовательно:

$$F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx;$$

неопределенный интеграл берется без затруднений, и мы находим:

$$F'(\alpha) = \left| \frac{e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha \sin x)}{1+\alpha^2} \right|_0^{+\infty} = \frac{-1}{1+\alpha^2};$$

отсюда

$$F(\alpha) = C - \operatorname{arc\,tg} \alpha;$$

постоянное C мы определим, замечая, что определенный интеграл $F(\alpha)$ стремится к нулю, когда α неограниченно возрастает; это условие дает $C = \frac{\pi}{2}$. Итак, окончательно имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\alpha}. \tag{53}$$

Эта формула имеет место лишь для положительных значений α, но, как было замечено, $F(\alpha)$ есть непрерывная функция α, даже при $\alpha = 0$. Заставляя α стремиться к нулю, мы получаем, следовательно, в пределе:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{54}$$

2. Пусть

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}},$$

где функция $f(x)$ непрерывна, так же как $f'(x)$ в интервале $(0, a)$, и α заключено в этом интервале. Обычная формула диференцирования приводит к иллюзорному результату, так как мы получаем разность двух бесконечностей. Полагая $x = \alpha t$, находим:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}\, f(\alpha t)\, dt}{\sqrt{1-t}};$$

интеграл, полученный диференцированием,

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} f(\alpha t) + t\sqrt{\alpha}\, f'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\, dt,$$

равномерно сходится во всем интервале (α_0, α_1), где α_0 и α_1 положительны и меньше a, так как он сравним с интегралом $\int_0^1 \frac{M dt}{\sqrt{1-t}}$, где M — постоянное число. Возвращаясь к переменному x, мы имеем, следовательно:

$$F'(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{f(x) + 2xf'(x)}{2\alpha\sqrt{\alpha - x}}\,dx.$$

В качестве приложения поставим себе задачей определить функцию $f(x)$ таким образом, чтобы $F(\alpha)$ не зависело от α. Производная $F'(\alpha)$ должна быть нулем, что может иметь место лишь в случае, если функция $f(x) + 2xf'(x)$ тождественно равна нулю, по крайней мере, если это выражение не имеет бесконечного множества нулей вблизи начала координат. Это условие может быть написано так:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{2x} = 0,$$

откуда

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Эта функция дает решение задачи; в самом деле, мы имеем:

$$\int_0^\alpha \frac{C\,dx}{\sqrt{x(\alpha - x)}} = C\pi,$$

как это легко обнаружить посредством подстановки $x = \alpha\sin^2\varphi$.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Доказать, что при бесконечном возрастании n сумма $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ имеет пределом $\ln 2$.

[Следует доказать, что эта сумма имеет пределом определенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.]

2. Найти таким же образом пределы сумм:

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}},$$

приводя их к определенным интегралам. Вообще предел суммы $\sum_{i=0}^{n} \varphi(i, n)$ при бесконечном n равен некоторому определенному интегралу, если $\varphi(i, n)$ есть однородная функция степени -1 от i и от n.

3. Вывести значение определенного интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

[Можно исходить от тригонометрической формулы:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

или воспользоваться равенствами:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx.\Big]$$

4. Вывести отсюда значение определенного интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\,dx.$$

5. Показать, что $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

[Можно положить $x = \operatorname{tg}\varphi$ и разбить полученный интеграл на три части.]

6*. Найти значение определенного интеграла $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx.$

[Пуассон (Poisson).]

Разделив промежуток от 0 до π на n равных частей и применяя известную тригонометрическую формулу, мы придем к вычислению предела выражения:

$$\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1)\right]$$

при бесконечно большом n. Если α заключается между -1 и $+1$, то этот предел равен нулю; если же $\alpha^2 > 1$, то он равен $\pi \ln \alpha^2$.

7. Определенный интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}}$, где α — положительно, равен 2, если $\alpha < 1$, и $\frac{2}{\alpha}$, если $\alpha > 1$.

8*. Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируемою в промежутке (a, b), необходимо и достаточно, чтобы всякому положительному числу ε соответствовало такое разбиение промежутка (a, b), чтобы разность $S - s$ соответствующих сумм была меньше ε.

9. Пусть будут $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции, непрерывные в промежутке (a, b), и $(a, x_1, x_2, \ldots, b)$ — какое-нибудь разбиение этого промежутка. Если мы возьмем два каких-нибудь значения ξ_i, η_i в каждом промежутке (x_{i-1}, x_i), то сумма $\Sigma f(\xi_i)\varphi(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$ будет иметь пределом определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

10. Пусть будет $f(x)$ функция, непрерывная и положительная в промежутке (a, b). Произведение определенных интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ будет минимум, если функция равна постоянному.

11. Пусть будет $I_{x_0}^{x_1}$ указатель функции (§ 76) между x_0 и x_1. Доказать соотношение:

$$I_{x_0}^{x_1} f(x) + I_{x_0}^{x_1}\frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = +1$, если $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, и $\varepsilon = -1$, если $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$; $\varepsilon = 0$, если $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будут одинакового знака.

Следует приложить к функциям $f(x)$, $\frac{1}{f(x)}$ последнюю формулу стр. 169.

— 12*. Пусть будут U и V два многочлена n-й и $(n-1)$-й степени, первые между собою. Указатель рациональной дроби $\frac{V}{U}$ между пределами $-\infty$ и $+\infty$ переменного равен разности между числами мнимых корней уравнения $U+iV$, имеющих положительный коэфициент при i, и между числом этих корней, имеющих отрицательный коэфициент при i.

[Эрмит. *Bulletin de la Société mathématique*, т. VII, стр. 128.]

— 13*. Вывести вторую теорему среднего значения при помощи интегрирования по частям.

Пусть будут $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции, непрерывные в промежутке (a, b), причем первая $f(x)$ постоянно возрастает или постоянно убывает и имеет непрерывную производную. Полагая

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

и интегрируя по частям, находим:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\,\Phi(b) - \int_a^b f'(x)\,\Phi(x)\,dx.$$

Так как производная $f'(x)$ имеет постоянный знак, то остается приложить к новому интегралу первую формулу среднего значения.

— 14. Показать, что при переходе от одной системы прямоугольных осей к другой системе прямоугольных осей, конгруэнтной с первою, интеграл $\int x\,dy - y\,dx$, взятый вдоль замкнутого контура, обращается в интеграл такого же вида.

15. Из формулы:

$$\int_a^b \cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda}(\sin\lambda b - \sin\lambda a)$$

вывести следующие определенные интегралы

$$\int_a^b x^{2p+1}\sin\lambda x\,dx, \quad \int_a^b x^{2p}\cos\lambda x\,dx.$$

— 16. Рассмотрим две какие-нибудь плоские кривые C, C'; будем считать соответствующими точки (x, y) (x', y') обеих кривых, в которых касательные параллельны. Точка с координатами $x_1 = px + qx'$, $y_1 = py + qy'$, где p и q — данные постоянные, описывает новую кривую C_1. Доказать, что соответствующие дуги трех кривых связаны соотношением:

$$s_1 = \pm ps \pm qs'.$$

— 17. Доказать, что длины соответственных дуг кривых:

$$C\begin{cases} x = tf'(t) - f(t) + \varphi'(t), \\ y = f'(t) - t\varphi'(t) + \varphi(t), \end{cases} \quad C'\begin{cases} x' = tf'(t) - f(t) - \varphi'(t), \\ y' = f'(t) + t\varphi'(t) - \varphi(t) \end{cases}$$

равны между собою при всяком виде функций $f(t)$ и $\varphi(t)$.

— 18. Проведем из точки M плоскости нормали $MP_1, \ldots, MP_n$ к n кривым C_1, $C_2, \ldots, C_n$, лежащим в той же плоскости. Пусть будет l_i длина MP_i. Место точек M, для которых между длинами l_i существует данное соотношение $F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$, есть некоторая кривая Γ. Доказать, что если на каждой прямой MP_i отложим в надлежащем направлении длину, пропорциональную $\frac{\partial F}{\partial l_i}$, то равнодействующая (геометрическая сумма) этих n отрезков даст направление нормали к кривой Г. Распространить это предложение на поверхности.

19. Пусть будет C замкнутая кривая. Возьмем на касательной в точке m к кривой C по обе стороны от точки m два равных отрезка mp и mp', причем длина mp изменяется по произвольному закону. Доказать, что площади двух кривых, описанных точками p, p', равны. Случай, когда длина mp постоянна.

20. Площадь, заключающаяся между замкнутою выпуклою кривою и кривою параллельною, получающеюся через отложение на нормалях к первой кривой постоянной длины l, равна $\pm\pi l^2+sl$, где s — длина замкнутой кривой.

21. Пусть будет C замкнутая кривая. Геометрическое место точек A, для которых площадь соответствующей подэрной кривой имеет данное значение, есть окружность с неподвижным центром.

Следует определить кривую C ее тангенциальным уравнением

$$x\cos t+y\sin t=f(t).$$

22. Пусть будет C замкнутая кривая, C_1 — ее подэрная кривая относительно точки A, C_2 — место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на нормали к C. Между площадями этих трех кривых существует соотношение $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2$.

Если ρ и ω будут полярные координаты точки кривой C_1, то, на основании свойств подэрной кривой (§ 36), координаты соответствующей точки кривой C_2 будут ρ' и $\omega+\frac{\pi}{2}$, а координаты соответствующей точки кривой C будут:

$$r=\sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \text{и} \quad \varphi=\omega+\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho'}{\rho}.$$

23. Если кривая C катится без скольжения по прямой, то всякая точка A, неизменно связанная с кривой C, описывает некоторую кривую, называемую р у л е т т о ю. Доказать, что площадь, заключающаяся между дугою рулетты и основанием, равна удвоенной соответствующей площади подэрной кривой точки A относительно кривой C. Доказать также, что длина дуги рулетты равна длине соответствующей дуги подэрной кривой.

[Штейнер (Steiner).]

Чтобы доказать эту теорему аналитически, обозначим через X, Y координаты точки A относительно системы подвижных осей, составленной из касательной и нормали к кривой C в точке M. Пусть будет s дуга OM, считаемая от некоторой постоянной точки на кривой C, и ω — угол между касательными в точках O и M. Легко вывести соотношения:

$$ds+dX=Y\,d\omega, \quad dY+X\,d\omega=0,$$

откуда получаются оба предложения.

ГЛАВА V.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Вычисление определенного интеграла, на основе его определения *, является, вообще говоря, очень трудной задачей, тогда как, если известна первообразная функция для $f(x)$, интеграл получается непосредственно для любых пределов.

В этом отделе мы рассмотрим различного рода элементарные функции, интегралы от которых выражаются при помощи тех же символов. Под элементарными функциями мы разумеем алгебраические функции, рациональные и иррациональные, функцию показательную и логарифмическую, функции тригонометрические и круговые и все те, которые получаются от сочетания предыдущих функций в конечном числе. Когда неопределенный интеграл от функции $f(x)$ не может быть выражен при помощи этих символов, то этот интеграл представляет новую трансцендентную функцию; изучение свойств этих трансцендентных функций и их классификация составляют одну из важнейших задач интегрального исчисления.

97. Интегрирование рациональных функций. Общий способ. Всякая рациональная функция $f(x)$ представляет сумму целой части $E(x)$ и дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где многочлен $P(x)$ первый с $Q(x)$ и его степень ниже степени $Q(x)$. Если действительные и мнимые корни уравнения $Q(x)=0$ известны, то эта рациональная дробь может быть разложена на сумму простых дробей, принадлежащих к одному из двух следующих типов:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Простые дроби первого типа происходят от действительных корней, а второго типа — от сопряженных мнимых. Интеграл от целой части получается непосредственно. Далее, если $m>1$, то

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^m}=-\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}};$$

если же $m=1$, то $\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln(x-a)$.

---

* См. пример § 67 и упражнения 3 и 6 главы IV.

Для краткости мы опускаем постоянное C, которое должно быть прибавлено в правой части. Таким образом остается только исследовать простые дроби, происходящие от мнимых корней знаменателя. Положим для упрощения

$$x = \alpha + \beta t, \quad dx = \beta\, dt;$$

тогда

$$\int \frac{Mx + N}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}\, dx = \frac{1}{\beta^{2n-1}} \int \frac{M\alpha + N + M\beta t}{(1+t^2)^n}\, dt,$$

и мы получаем два рода интегралов:

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}, \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Первый интеграл легко вычислить, заметив, что $t\,dt$ есть половина диференциала от $1+t^2$; поэтому, если $n > 1$, то мы имеем:

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} = -\frac{\beta^{2n-2}}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

и если $n = 1$, то имеем:

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}\right].$$

Остаются только интегралы вида:

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Если $n = 1$, то значение этого интеграла будет:

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Если же n больше единицы, то пользуются *формулою приведения*, позволяющею свести вычисление предложенного интеграла к вычислению интеграла такого же вида, но в котором показатель при $1+t^2$ на единицу меньше. Обозначая рассматриваемый интеграл через I_n, мы можем представить его в виде:

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\, dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}.$$

Интегрируем $\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n}$ по частям, положив:

$$u = t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}, \quad v = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}};$$

мы получим:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}};$$

Заменив в уравнении для I_n последний интеграл его значением, найдем:

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}.$$

Заменяя в этой формуле n через $n-1$, потом через $n-2$ и т. д., мы придем к интегралу $I_1 = \operatorname{arc\,tg} t$.

Возвращаясь затем постепенно к I_n, наконец, получим:

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \operatorname{arc\,tg} t + R(t),$$

где $R(t)$ есть рациональная функция от t, выражение которой было бы нетрудно получить; заметим только, что знаменателем ее будет $(1+t^2)^{n-1}$ и что степень числителя будет ниже $2n-2$ (см. § 72, стр. 161).

Таким образом интеграл от рациональной дроби слагается из рациональной части и из трансцендентных членов одного из следующих видов:

$$\ln(x-a), \quad \ln[(x-\alpha)^2+\beta^2], \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Пусть, например, требуется вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4-1}$. Знаменатель имеет два действительных корня $+1$ и -1 и два мнимых $+i$ и $-i$. Следовательно, разлагая его на простые дроби, получим:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Умножая для определения коэфициента A обе части на $x-1$ и полагая затем $x=1$, будем иметь $A = \frac{1}{4}$; точно так же найдем $B = -\frac{1}{4}$. Теперь мы можем представить предыдущее тождество в виде:

$$\frac{1}{x^4-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

или, после приведения:

$$\frac{-1}{2(1+x^2)} = \frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Следовательно, должно взять $C=0$, $D = -\frac{1}{2}$, и мы можем написать:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Примечание. Изложенный метод — вполне общий, но он не всегда самый простой. Иногда можно упростить вычисление соответственными искусственными приемами. Возьмем, например, интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^n}.$$

Если $n>1$, то можно было бы или разложить подинтегральную функцию на простые дроби, отделяя корни $+1$ и -1, или применить формулу приведения, как для интеграла I_n. Но можно получить этот интеграл более изящным способом, сделав замену переменного $x=\frac{1+z}{1-z}$; это дает:

$$x^2-1=\frac{4z}{(1-z)^2}, \quad dx=\frac{2dz}{(1-z)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^n}=\frac{2}{4^n}\int \frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}\,dz.$$

Разложив $(1-z)^{2n-2}$ по формуле бинома, нам нужно будет интегрировать только одночлены вида Az^{μ}, где μ — положительно или отрицательно.

Метод Эрмита. До сих пор мы предполагали, что подинтегральная дробь разложена на простые дроби, для чего нужно знать корни знаменателя. При помощи следующего метода, принадлежащего Эрмиту, можно найти алгебраическую часть интеграла и не зная этих корней; при этом требуется производить только элементарные действия, т. е. сложения, умножения и деления многочленов.

Пусть будет $\frac{f(x)}{F(x)}$ рациональная дробь, интеграл которой нужно найти; мы можем предположить, что ее числитель и знаменатель первые между собою. На основании теории равных корней, многочлен $F(x)$ может быть представлен в виде:

$$F(x)=X_1X_2^2X_3^3\ldots X_p^p,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_p$ — многочлены, содержащие только простые линейные множители и не имеющие попарно никаких общих множителей. Далее, мы можем разложить предложенную функцию на простые дроби с знаменателями $X_1, X_2^2, \ldots, X_p^p$,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\ldots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

где A_i есть многочлен, первый с X_i. В самом деле, из теории общего наибольшего делителя известно, что если даны два первые между собой многочлена X и Y и какой-нибудь многочлен Z, то всегда можно найти два многочлена A и B, удовлетворяющих тождеству

$$BX+AY=Z.$$

Положим

$$X=X_1, \quad Y=X_2^2\ldots X_p^p, \quad Z=f(x);$$

тогда предыдущее тождество обращается в

$$BX_1+AX_2^2\ldots X_p^p=f(x).$$

Разделив на $F(x)$, найдем:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{X_1}+\frac{B}{X_2^2\ldots X_p^p},$$

и, на основании предыдущего тождества, ясно, что если многочлен $f(x)$ будет первым с $F(x)$, то A будет первым с X_1, и B будет первым с $X_2^2\ldots X_p^p$. Продолжая те же самые действия над дробью

$$\frac{B}{X_2^2\ldots X_p^p}$$

и т. д., мы представим $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ в требуемом виде.

Таким образом достаточно показать, каким образом можно найти рациональную часть интеграла вида:

$$\int\frac{A\,dx}{\varphi^n},$$

где $\varphi(x)$ есть многочлен, первый со своею производною. На основании вышеуказанной теоремы, всегда можно найти два других многочлена B и C, удовлетворяющих тождеству

$$B\varphi(x)+C\varphi'(x)=A,$$

и мы можем представить предыдущий интеграл в виде:

$$\int\frac{A\,dx}{\varphi^n}=\int\frac{B\varphi+C\varphi'}{\varphi^n}\,dx=\int\frac{B\,dx}{\varphi^{n-1}}+\int C\frac{\varphi'\,dx}{\varphi^n}.$$

Если n больше единицы, то полагая

$$u=C,\quad v=\frac{-1}{(n-1)\varphi^{n-1}}$$

и интегрируя по частям, будем иметь:

$$\int C\frac{\varphi'\,dx}{\varphi^n}=-\frac{C}{(n-1)\varphi^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{C'}{\varphi^{n-1}}\,dx;$$

внося это в предыдущее соотношение, получим:

$$\int\frac{A\,dx}{\varphi^n}=-\frac{C}{(n-1)\varphi^{n-1}}+\int\frac{A_1\,dx}{\varphi^{n-1}},$$

где A_1 обозначает новый многочлен. Если $n>2$, то к новому интегралу можно приложить тот же самый способ приведения и т. д. Мы должны будем остановиться только тогда, когда показатель при φ в знаменателе сделается равным единице; мы получим тогда соотношение вида:

$$\int\frac{A\,dx}{\varphi^n}=R(x)+\int\frac{\psi\,dx}{\varphi},$$

где $R(x)$ есть рациональная функция от x, а ψ — многочлен, степень которого всегда можно предположить меньшею степени φ, но который может и не быть первым с многочленом φ. Для вычисления последнего интеграла необходимо знать корни многочлена φ, но интегрирование не введет более никаких рациональных членов. В самом деле, разложение дроби $\frac{\psi}{\varphi}$ на простые дроби даст только члены вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

а интеграл от каждого из них есть трансцендентная функция.

В частности, этот метод позволяет узнать, будет ли интеграл от данной рациональной функции сам рациональным. Для этого необходимо и достаточно, чтобы, после того как приведение было подвинуто насколько возможно далеко, все многочлены, аналогичные ψ, оказались равными нулю.

Заметим, что способ, которым мы выше пользовались при приведении интеграла I_n, есть в сущности не что иное, как частный случай изложенного здесь метода. Возьмем интеграл более общего вида:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \quad A \neq 0, \quad B^2-AC \neq 0.$$

Мы имеем тождество:

$$A(Ax^2+2Bx+C)-(Ax+B)^2 = AC-B^2,$$

которое позволяет представить данный интеграл в виде:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{A}{AC-B^2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} - \\ - \frac{1}{AC-B^2}\int (Ax+B)\frac{(Ax+B)\,dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, получим:

$$\int (Ax+B)\frac{Ax+B}{(Ax^2+2Bx+C)^n}\,dx = -\frac{Ax+B}{2(n-1)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} + \\ + \frac{A}{2n-2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}},$$

и предыдущее соотношение обращается в

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{Ax+B}{2(n-1)(AC-B^2)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} + \\ + \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{A}{AC-B^2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}.$$

Продолжая таким же образом, мы придем к интегралу:

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C},$$

который выражается через логарифм, если $B^2-AC>0$, и через arc tg, если $B^2-AC<0$.

Возьмем еще интеграл

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx,$$

Мы имеем тождественно:

$$5x^3+3x-1=6x(x^2+1)-(x^3+3x+1);$$

отсюда мы можем написать:

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\int \frac{6x(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx-\int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

Интегрируя первый интеграл по частям, получим:

$$\int x\cdot\frac{6(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}+\int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2},$$

и следовательно, будем иметь:

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}.$$

Примечание. При применении метода Эрмита мы должны решить следующую задачу. *Даны три многочлена A, B, C соответственно m-й, n-й и p-й степеней, причем A и B первые между собою: найти два других многочлена u и v, так, чтобы было тождественно $Au+Bv=C$.*

Чтобы найти отвечающие на вопрос многочлены возможно низшей степени, предположим сначала, что p не больше $m+n-1$. Тогда за u и v можно взять многочлены соответственно $(n-1)$-й и $(m-1)$-й степеней; $m+n$ неизвестных коэфициентов определятся из системы $m+n$ неоднородных линейных уравнений, определитель которой не может быть равен нулю; в противном случае можно было бы найти два многочлена u и v степеней не выше $(n-1)$-й и $(m-1)$-й, удовлетворяющих тождеству $Au+Bv=0$, откуда следует, что A и B должны были бы иметь общего множителя.

Если многочлен C будет степени $(m+n)$ или выше, то мы разделим C на AB, так, чтобы получился остаток C' не выше $(m+n-1)$-й степени: $C=ABQ+C'$. Полагая $u-BQ=u_1$, мы представим соотношение $Au+Bv=C$ в виде:

$$Au_1+Bv=C'$$

и таким образом придем к предыдущему случаю.

Интегралы $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)dx$. После интегралов от рациональных функций естественно перейти к рассмотрению интегралов от функций иррациональных. Мы начнем с того случая, когда под знаком интеграла стоит рациональная функция от x и от корня квадратного из многочлена второй степени. Здесь для уничтожения корня достаточно простой замены переменного, и мы придем к предыдущему случаю. Эта замена переменного очевидна, если многочлен под знаком корня обращается в двучлен первой степени $ax+b$. Полагая $ax+b=t^2$, получим:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2-b}{a},\, t\right)\frac{2t\,dt}{a},$$

и новая функция под знаком интеграла будет рациональною.

Если многочлен под знаком радикала — второй степени и имеет два действительных корня a и b, то можно написать:

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)}=(x-b)\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}},$$

и опять достаточно положить

$$\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}}=t, \quad \text{или} \quad x=\frac{Aa-bt^2}{A-t^2},$$

чтобы иррациональность исчезла.

Если многочлен под знаком радикала имеет мнимые корни, то этот прием привел бы нас к мнимым символам. Чтобы ближе подойти к существу вопроса, заметим, что если мы обозначим радикал

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

через y, то x и y будут координатами точки кривой, представляемой уравнением

$$y^2=Ax^2+2Bx+C, \tag{1}$$

и задача приводится к выражению координат точки кривой второго порядка через рациональные функции некоторого параметра. Геометрически ясно, что это возможно; в самом деле, если мы проведем через какую-нибудь точку (α, β) этой кривой переменную секущую

$$y-\beta=t(x-\alpha),$$

то ясно, что координаты второй точки пересечения этой секущей с кривою получатся из уравнений первой степени и будут, следовательно, рациональными функциями от t.

Если трехчлен $Ax^2+2Bx+C$ имеет мнимые корни, то коэфициент A должен быть положительным, так как в противном случае этот трехчлен был бы отрицательным при всех действительных значениях x. В этом случае коническое сечение (1) есть гипербола, и, пересекая эту гиперболу прямою, параллельною одной из ее асимптот,

$$y=x\sqrt{A}+t,$$

мы получим для координат точки пересечения

$$x=\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}, \quad y=t+\sqrt{A}\,\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}.$$

Если же A отрицательно, то кривая второго порядка есть эллипс, и трехчлен

$$Ax^2+2Bx+C$$

должен иметь два действительных корня, так как в противном случае этот трехчлен был бы отрицательным при всех действительных значениях x. Замена переменного, которая была указана выше, есть та самая, которую мы получили бы, пересекая кривую подвижною секущею

$$y=t(x-a).$$

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{dx}{(x^2+k)\sqrt{x^2+k}}.$$

Вспомогательная кривая второго порядка $y^2 = x^2 + k$ есть гипербола, и, пересекая ее прямою, параллельною асимптоте, $x + y = t$, мы получим для координат точки пересечения выражения:

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{t}\right), \quad y = \sqrt{x^2 + k} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{k}{t}\right),$$

и затем

$$dx = \frac{dt}{2}\left(\frac{t^2 + k}{t^2}\right), \quad \int \frac{dx}{y^3} = \int \frac{4t\,dt}{(t^2 + k)^2} = -\frac{2}{t^2 + k}.$$

Возвращаясь к переменному x, находим:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x - \sqrt{x^2 + k}}{k\sqrt{x^2 + k}} = \frac{x}{k\sqrt{x^2 + k}} - \frac{1}{k},$$

причем в правой части должно еще стоять произвольное постоянное. Вообще, если $AC - B^2$ не равно нулю, то мы имеем:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{AC - B^2} \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

В некоторых случаях проще искать интеграл непосредственно, не уничтожая иррациональности. Как пример рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Если коэфициент A положителен, то можно написать:

$$\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{A^2x^2 + 2ABx + AC}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{(Ax + B)^2 + AC - B^2}},$$

и, полагая $Ax + B = t$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + AC - B^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln\left(t + \sqrt{t^2 + AC - B^2}\right).$$

Возвращаясь к переменному x, находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln\left(Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right).$$

Если коэфициент при x^2 отрицателен, то интеграл можно представить в виде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2 + 2Bx + C}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{AC + B^2 - (Ax - B)^2}}, \quad A > 0;$$

здесь количество $AC+B^2$ должно быть положительным, и, полагая

$$Ax-B=t\sqrt{AC+B^2},$$

мы приходим к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\arcsin t.$$

Таким образом мы имеем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\arcsin\frac{Ax-B}{\sqrt{AC+B^2}};$$

легко убедиться, что когда x изменяется между двумя корнями трехчлена, то функция под знаком $\arcsin$ изменяется между -1 и $+1$.

В промежуточном случае, когда $A=0$ и $B\neq 0$, интеграл — алгебраический

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2Bx+C}}=\frac{1}{B}\sqrt{2Bx+C}.$$

Интегралы вида

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

приводятся к предыдущим подстановкою $x=a+\frac{1}{y}$. В самом деле, мы имеем:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{A_1y^2+2B_1y+C_1}},$$

где

$$A_1=Aa^2+2Ba+C,\quad B_1=Aa+B,\quad C_1=A.$$

Здесь следует заметить, что интеграл будет алгебраическим, если a будет корнем трехчлена, стоящего под знаком радикала, и только в этом случае.

Рассмотрим еще интеграл $\int\sqrt{x^2+A}\,dx$. Интегрирование по частям дает:

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}};$$

с другой стороны, можно написать:

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}}=\int\sqrt{x^2+A}\,dx-\int\frac{A\,dx}{\sqrt{x^2+A}}=$$
$$=\int\sqrt{x^2+A}\,dx-A\ln\left(x+\sqrt{x^2+A}\right);$$

из этих двух соотношений получаем:

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+A}\right), \tag{2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+A}\right). \tag{3}$$

Точно так же можно вывести формулы:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \tag{4}$$

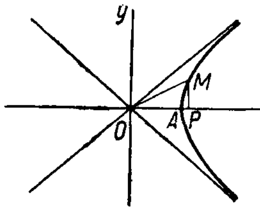
$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}. \tag{5}$$

Площадь гиперболы. Предыдущие интегралы встречаются при вычислении площади сектора эллипса или гиперболы. Возьмем гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и найдем площадь сегмента AMP, ограниченного дугою AM, осью Ox и ординатою MP (черт. 15а). Эта площадь равна определенному интегралу

$$\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx,$$



Черт. 15а.

т. е., по формуле (2), равна:

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right].$$

Но

$$MP = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

и произведение

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{x^2-a^2}$$

представляет площадь треугольника OMP; отсюда следует, что площадь S сектора OAM, заключающегося между дугою AM, радиусом OA и радиусом OM, имеет выражение:

$$S = \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) = \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Эта формула позволяет выразить координаты x и y точки M гиперболы через площадь S. В самом деле, из предыдущего уравнения и из уравнения гиперболы мы имеем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = e^{\frac{2S}{ab}}, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b} = e^{-\frac{2S}{ab}},$$

и следовательно,

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}} + e^{-\frac{2S}{ab}}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}} - e^{-\frac{2S}{ab}}\right).$$

Функции, стоящие в правых частях, носят название *гиперболического синуса и гиперболического косинуса*:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

и мы можем написать:

$$x = a \operatorname{ch} \frac{2S}{ab}, \quad y = b \operatorname{sh} \frac{2S}{ab}.$$

Гиперболические функции обладают свойствами, аналогичными свойствам функций тригонометрических *; так, мы имеем:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x.$$

Точно так же мы нашли бы, что координаты точки эллипса выразятся через площадь сектора следующими формулами:

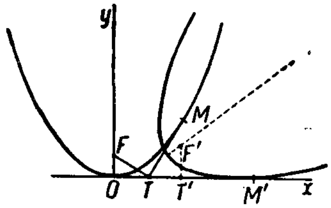
$$x = a \cos \frac{2S}{ab}, \quad y = b \sin \frac{2S}{ab}.$$

Для круга радиуса, равного единице, и для равносторонней гиперболы с полуосью, равною единице, эти формулы обращаются соответственно в

$$x = \cos 2S, \quad y = \sin 2S;$$
$$x = \operatorname{ch} 2S, \quad y = \operatorname{sh} 2S.$$

Гиперболические функции играют ту же роль по отношению к равносторонней гиперболе, как тригонометрические — по отношению к кругу.

Спрямление параболы. Найдем длину дуги параболы $2py = x^2$ между вершиною O и точкою M (черт. 15b). Мы имеем:



Черт. 15b.

$$\operatorname{arc} OM = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^x \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{p}\, dx,$$

или, применяя формулу (2):

$$\operatorname{arc} OM = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right).$$

Алгебраический член в правой части представляет длину касательной MT. В самом деле, известно, что $OT = \frac{x}{2}$; поэтому

$$MT^2 = y^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{4p^2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x^2+p^2)}{4p^2}.$$

Соединим точку T с фокусом F; угол MTF — прямой, и мы имеем:

$$FT = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+p^2}.$$

Отсюда можно вывести следующее любопытное свойство параболы.

* Recueil des formules numériques Уэля (Houël) содержит таблицу логарифмов этих функций для положительных значений аргумента.

Предположим, что парабола катится без скольжения по оси Ox. Найдем место, описываемое фокусом, предполагая, что фокус неизменно связан с параболою. Если парабола коснется оси Ox в M', то мы будем иметь $OM' = \operatorname{arc} OM$; точка T перейдет в точку T', так что будет $M'T' = MT$, и фокус F перейдет в точку F', которую получим, отложив на прямой, параллельной Oy, длину $T'F' = TF$. Координаты X, Y точки F' будут иметь следующие значения:

$$X = \operatorname{arc} OM - MT = \frac{p}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p} \right),$$

$$Y = TF = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + p^2}.$$

Исключив x из этих двух соотношений, мы получим уравнение места, описываемого фокусом. Из первого уравнения имеем:

$$x + \sqrt{x^2 + p^2} = pe^{\frac{2X}{p}};$$

к этому уравнению можно присоединить еще

$$x - \sqrt{x^2 + p^2} = -pe^{-\frac{2X}{p}},$$

так как произведение левых частей равно $-p^2$. Вычитая, получим:

$$\sqrt{x^2 + p^2} = \frac{p}{2} \left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}} \right),$$

и искомое уравнение будет:

$$Y = \frac{p}{4} \left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}} \right) = \frac{p}{2} \operatorname{ch} \frac{2X}{p}.$$

Легко построить эту кривую, носящую название *цепной линии*; по своему виду она имеет сходство с параболою.

98. Уникурсальные кривые. Рассмотрим теперь вообще интегралы от алгебраических функций. Пусть будет

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

уравнение алгебраической кривой, и $R(x, y)$ — рациональная функция от x и от y. Предположим, что в $R(x, y)$ мы заменили y одним из корней уравнения (6); мы получим функцию только одного переменного x, и интеграл

$$\int R(x, y)\, dx$$

называется ***абелевым интегралом***, связанным с кривою (6). Если данная кривая и функция $R(x, y)$ произвольны, то эти интегралы будут трансцендентными функциями. Но в частном случае, если данная кривая — уникурсальная, т. е. если координаты x, y точек этой кривой могут быть представлены как рациональные функции переменного параметра t, то абелевы интегралы, связанные с этою кривою, приводятся непосредственно к интегралам от рациональных функций. В самом деле, пусть будут

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

выражения координат x, y в функции t. Приняв t за новое независимое переменное, получим:

$$\int R(x, y)\,dx = \int R[f(t),\ \varphi(t)]\,f'(t)\,dt,$$

и новая функция под знаком интеграла, очевидно, рациональна.

В курсах аналитической геометрии * доказывается, что всякая уникурсальная кривая n-го порядка имеет $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек и что, обратно, всякая кривая n-го порядка, имеющая это число двойных точек, будет уникурсальною. Напомним только, каким образом можно получить выражение координат в функции вспомогательного параметра. Пусть дана кривая n-го порядка C_n, имеющая $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек; через эти δ двойных точек и через $n-3$ простых точек кривой C_n проведем пучок кривых $(n-2)$-го порядка; эти точки вполне определят пучок кривых $(n-2)$-го порядка, так как

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1,$$

а для определения кривой $(n-2)$-го порядка нужны $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ точек. Пусть будет $P(x, y) + tQ(x, y) = 0$ уравнение этого пучка, где t обозначает произвольный параметр. Каждая кривая пучка пересекает кривую C_n в $n(n-2)$ точках; при этом некоторое число этих точек пересечения не зависит от t, именно, $n-3$ выбранных простых точек и δ двойных точек, каждая из которых считается за две точки пересечения. Но

$$n - 3 + 2\delta = n - 3 + (n-1)(n-2) = n(n-2) - 1;$$

таким образом остается только одна точка пересечения, изменяющаяся вместе с t. Координаты этой точки получатся из двух уравнений первой степени, коэфициенты которых будут целыми многочленами по t, и потому эти координаты сами будут рациональными функциями от t. Можно было бы также воспользоваться пучком кривых $(n-1)$-го порядка, проходящих через $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек и через $2n-3$ простых точек, взятых где угодно на кривой C_n.

Если $n=2$, то $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$; таким образом всякая кривая второго порядка, как это уже было указано выше, — уникурсальная. Если $n=3$, то $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 1$; следовательно, из кривых третьего порядка уникурсальными будут только те, которые имеют двойную

* См., например, Невенгловский (Niewenglowski), Cours de Géometrie analytique, т. II, стр. 99—114.

точку. Приняв двойную точку за начало координат, мы приведем уравнения кривой третьего порядка к виду:

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) = 0,$$

где φ_3 и φ_2 — однородные многочлены со степенями, соответствующими их указателям. Секущая $y = tx$, проходящая через двойную точку, пересечет кривую еще только в одной точке, изменяющейся вместе с t; координаты этой точки будут:

$$x = -\frac{\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}, \quad y = -\frac{t\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}.$$

Уникурсальная кривая четвертого порядка имеет три двойных точки. Чтобы получить выражения координат ее точек через параметр, составим уравнение пучка кривых второго порядка, проходящих через три двойных точки и через одну простую точку, взятую произвольно на кривой. Каждая кривая этого пучка пересечет кривую четвертого порядка только в одной точке, изменяющейся вместе с параметром. Если, например, мы составим уравнение для абсцисс точек пересечения, то это уравнение, по освобождении его от множителей, соответствующих уже известным корням, обратится в уравнение первой степени и определит x в виде рациональной функции параметра; точно так же мы будем поступать для получения координаты y.

Возьмем, например, лемнискату

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

имеющую одну двойную точку в начале координат, и, кроме того, две двойных точки в бесконечно удаленных круговых точках. Окружность

$$x^2 + y^2 = t(x - y),$$

проходящая через начало координат и касающаяся в этой точке одной из ветвей лемнискаты, пересекает эту кривую только в одной точке, изменяющейся вместе с t. Из двух приведенных уравнений легко получается:

$$t^2(x - y)^2 = a^2(x^2 - y^2);$$

отсюда, по разделении на $x - y$, остается:

$$t^2(x - y) = a^2(x + y).$$

Последнее уравнение представляет прямую, проходящую через начало координат и пересекающую окружность в точке, отличной от начала, с координатами

$$x = \frac{a^2t(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}, \quad y = \frac{a^2t(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

К этим формулам можно притти еще проще, воспользовавшись следующим приемом, применимым ко всякой уникурсальной кривой четвертого порядка, одна из двойных точек которой известна. Пересечем лемнискату секущею $y=\lambda x$; она встретит кривую в двух точках с координатами

$$x=\frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}, \quad y=\lambda x.$$

Под знаком радикала стоит многочлен второй степени, и, чтобы уничтожить иррациональность, достаточно положить $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$ (§ 105); легко убедиться, что это приведет нас к предыдущим формулам.

Примечание I. Если плоская кривая имеет особые точки высшей кратности, то можно доказать, что каждая из них равносильна некоторому числу двойных точек. Для того чтобы кривая была уникурсальною, достаточно, чтобы эти особые точки были равносильны $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойным точкам. Например, кривая n-го порядка, имеющая кратную точку $(n-1)$-го порядка, будет уникурсальною, так как прямая, проходящая через эту кратную точку, пересекает кривую только в одной переменной точке.

Примечание II. Из других интегралов, в которых иррациональность может быть легко уничтожена, мы укажем еще на следующие:

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{q}}\right]dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx,$$
$$\int R\left(x^{\alpha}, x^{\alpha'}, x^{\alpha''}, \ldots\right)dx,$$

где R есть рациональная функция, и показатели α, α', α'',... — рациональные числа. В первом интеграле достаточно положить $ax+b=tq$. Если во втором интеграле положим

$$ax+b=t^2,$$

то будем иметь только один квадратный корень из многочлена второй степени, и достаточно новой замены переменного, чтобы уничтожить эту иррациональность. Наконец, в третьем интеграле можно положить $x=t^D$, где D есть целое число, выбранное таким образом, чтобы все произведения $D\alpha$, $D\alpha'$, $D\alpha''$,... были целыми.

99. Алгебраически-логарифмические интегралы. Всякий абелев интеграл, связанный с уникурсальной кривой, в силу доказанного в предыдущем параграфе, является алгебраически-логарифмической функцией, т. е. разбивается на рациональную функцию от x и y и сумму логарифмов от рациональных функций с постоянными коэфициентами. Когда кривая (6) не уникурсальная, абелев интеграл, с нею связанный, вообще говоря, есть трансцендентная функция, которую нельзя выразить только через логарифмы.

Тем не менее, каково бы ни было соотношение

$$F(x, y)=0,$$

всегда существует бесчисленное множество рациональных функций $R(x, y)$ таких, что интеграл $\int R(x, y)\,dx$ будет алгебраически-логарифмическим, так как производная такой функции всегда есть рациональная функция от x и y. Но при заданной функции $R(x, y)$, вообще говоря, очень трудно узнать, будет ли $\int R(x, y)\,dx$ алгебраически-логарифмической функцией.

В частности, это будет иметь место, если $R(x, y)\,dx$ можно привести к рациональному диференциалу при помощи некоторой алгебраической не обязательно рациональной подстановки.

К последнему примеру примыкает класс диференциалов вида:

$$x^m (ax^n + b)^p\,dx,$$

называемых *диференциальными биномами*. Предположим, что все три показателя m, n, p — *рациональные числа*. Если p — число целое, то, на основании предыдущего, можно посредством замены переменного $x = t^D$ сделать этот диференциал рациональным. Чтобы получить новые случаи интегрируемости, сделаем замену переменного

$$ax^n + b = t;$$

мы получим:

$$x = \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx = \frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx = \frac{1}{na}\int t^p \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt.$$

Новый интеграл — одинакового вида с первоначальным, но показатель p заменен здесь показателем $\frac{m+1}{n} - 1$; следовательно, интегрирование можно будет выполнить, если $\frac{m+1}{n}$ будет целым числом.

С другой стороны, предыдущий интеграл можно представить в виде:

$$\int x^{m+np} (a + bx^{-n})^p\,dx,$$

и мы видим, что существует новый случай интегрируемости, когда

$$\frac{m+np+1}{n} = \frac{m+1}{n} + p$$

будет целым числом. Таким образом интегрирование можно выполнить в том случае, *если одно из трех чисел*: p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ *будет целым*. Эти три случая будут единственными, когда при рациональных m, n, p интеграл выражается при помощи конечного числа элементарных символов.

Для выполнения интегрирования, когда это возможно, удобнее сначала привести интеграл к более простому виду, содержащему только два показателя. Для этого положим $ax^n = bt$; мы будем иметь:

$$x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1}\, dt,$$

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{b^p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^p\, dt.$$

Отвлекаясь от постоянного множителя и полагая

$$q = \frac{m+1}{n} - 1,$$

мы придем к интегралу

$$\int t^q (1+t)^p\, dt,$$

и случаи интегрируемости будут следующие: *одно из трех чисел p, q, $p+q$ должно быть целым.*

Если p — целое и $q = \frac{r}{s}$, то положим $t = u^s$. Если q — целое и $p = \frac{r}{s}$, то положим $1 + t = u^s$. Наконец, если $p + q$ — целое, то интеграл можно представить в виде:

$$\int t^{p+q} \left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt,$$

и для уничтожения иррациональности нужно только положить $1 + t = tu^s$, если $p = \frac{r}{s}$.

Возьмем, например, интеграл

$$\int x \sqrt[3]{1+x^3}\, dx;$$

здесь $m = 1$, $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = 1$; следовательно, мы имеем здесь случай интегрируемости. Полагая сначала $x^3 = t$, мы придем к новому интегралу

$$\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}\, dt,$$

и для уничтожения радикала достаточно второй замены переменного $1 + t = tu^3$.

100. Приведение интегралов эллиптических и ультраэллиптических. Пусть будет $P(x)$ — целый многочлен p-й степени, первый со своею производною. Если степень многочлена $P(x)$ больше 2, то интеграл

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}]\, dx,$$

где R обозначает рациональную функцию от x и от радикала

$$y=\sqrt{P(x)},$$

вообще не может быть выражен при помощи элементарных функций. Интегралы этого вида, представляющие лишь частный случай более общих абелевых интегралов (§ 108), могут быть разложены на алгебраическую и логарифмическую части и на некоторое число определенного вида интегралов, представляющих новые трансцендентные функции, которые не могут быть выражены при помощи конечного числа элементарных символов. Мы изложим здесь это преобразование.

Рациональная функция $R(x, y)$ представляет частное двух целых многочленов по x и по y; заменяя четные степени y, например y^{2q}, через $[P(x)]^q$, а нечетные, например y^{2q+1}, через $y[P(x)]^q$, мы видим, что всегда можно считать числитель и знаменатель дроби выражениями первой степени относительно y:

$$R(x, y)=\frac{A+By}{C+Dy},$$

где A, B, C, D суть целые многочлены по x. Умножая числитель и знаменатель на $C-Dy$ и заменяя снова y^2 через $P(x)$, получим:

$$R(x, y)=\frac{F+Gy}{K}.$$

Таким образом рассматриваемый интеграл распадается на два других; из них один $\int\frac{F\,dx}{K}$ есть интеграл от рациональной функции, а другой $\int\frac{Gy}{K}\,dx$ может быть представлен в виде:

$$\int\frac{M\,dx}{N\sqrt{P(x)}},$$

где M и N — целые многочлены по x. Только этим вторым интегралом мы и должны заняться. Рациональная дробь $\frac{M}{N}$ может быть разложена на целую часть $E(x)$ и на сумму дробных членов:

$$\frac{M}{N}=E(x)+\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\ldots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

где каждый многочлен X_i — первый со своею производною. Таким образом нам нужно будет рассмотреть только два вида интегралов

$$Y_m=\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{P(x)}},\quad Z_n=\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}.$$

Если многочлен $P(x)$ будет степени p, то все интегралы Y_m выражаются при помощи $p-1$ первых интегралов $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$ и алгебраических количеств.

В самом деле, пусть будет:

$$P(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\ldots$$

Мы имеем:

$$\frac{d}{dx}[x^m\sqrt{P(x)}]=mx^{m-1}\sqrt{P(x)}+\frac{x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}}=$$
$$=\frac{2mx^{m-1}P(x)+x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}};$$

здесь числитель есть многочлен $(m+p-1)$-й степени, имеющий высшим членом $(2m+p)a_0x^{m+p-1}$. Интегрируя обе части предыдущего равенства, получим:

$$2x^m\sqrt{P(x)}=(2m+p)a_0Y_{m+p-1}+\ldots,$$

причем ненаписанные члены содержат интегралы Y с указателями, меньшими $m+p-1$. Полагая в этой формуле последовательно $m=0$, $1, 2, \ldots$, мы можем выразить $Y_{p-1}, Y_p, \ldots$ через алгебраическую часть и через $p-1$ интегралов $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$.

Относительно интегралов второго вида должно различать два случая в зависимости от того, будет ли X первым с $P(x)$ или нет.

1. *Если многочлен X — первый с $P(x)$, то интеграл Z_n приводится к алгебраическому члену, к сумме интегралов Y_k и к новому интегралу*

$$\int\frac{B\,dx}{X\sqrt{P(x)}},$$

где B есть многочлен степени низшей, чем X.

Так как многочлен X — первый со своею производною X' и с $P(x)$, то X^n будет первым с произведением PX'. Поэтому всегда можно найти два многочлена λ и μ, удовлетворяющих тождеству $\lambda X^n+\mu X'P=A$; при этом интеграл распадается на два других:

$$\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}=\int\frac{\lambda\,dx}{\sqrt{P(x)}}+\int\frac{\mu\sqrt{P}X'}{X^n}\,dx.$$

Первая часть есть сумма интегралов Y; второй интеграл при $n>1$ можно проинтегрировать по частям, положив

$$\mu\sqrt{P}=u,\quad v=\frac{-1}{(n-1)X^{n-1}};$$

это дает:

$$\int\frac{\mu\sqrt{P}X'\,dx}{X^n}=\frac{-\mu\sqrt{P}}{(n-1)X^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{2\mu'P+\mu P'}{2X^{n-1}\sqrt{P(x)}}\,dx.$$

Новый интеграл — одинакового вида с первоначальным, но только показатель при X уменьшился на единицу. Продолжая приведение насколько возможно, т. е. пока показатель при X больше единицы, мы придем к результату вида:

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}} = \int \frac{B\,dx}{X\sqrt{P}} + \int \frac{C\,dx}{\sqrt{P}} + \frac{D\sqrt{P}}{X^{n-1}},$$

где B, C, D — три многочлена, причем всегда можно предположить, что степень первого многочлена B ниже степени X.

2. Предположим, что X и P имеют общего делителя D, так что $X = YD$, $P = SD$, и многочлены D, S, Y попарно первые между собою. Можно найти два таких многочлена λ, μ, чтобы было $A = \lambda D^n + \mu Y^n$; поэтому мы можем написать:

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda\,dx}{Y^n\sqrt{P}} + \int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}}.$$

Первый интеграл имеет рассмотренный выше вид, *что же касается интеграла*

$$\int \frac{\mu\,dx}{L^n\sqrt{P}},$$

где D есть делитель многочлена P, то он приводится к алгебраическому члену и к интегралам Y.

В самом деле, так как многочлен D^n — первый с произведением $D'S$, то можно найти два таких многочлена λ_1 и μ_1, чтобы было

$$\lambda_1 D^n + \mu_1 D'S = \mu,$$

и рассматриваемый интеграл можно будет представить в виде:

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\,dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{\mu_1 SD'}{D^n\sqrt{P}}\,dx.$$

Заменив P через SD, представим второй из этих интегралов в виде:

$$\int \mu_1\sqrt{S}\,\frac{D'}{D^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$$

и проинтегрируем его по частям, полагая

$$u = \mu_1\sqrt{S}, \qquad v = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{D^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Мы получим:

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\,dx}{\sqrt{P}} - \frac{\mu_1\sqrt{S}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)D^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{2\mu_1' S + \mu_1 S'}{D^{n-1}\sqrt{P}}\,dx.$$

Мы имеем опять формулу приведения, но здесь благодаря присутствию дробного показателя $n-\frac{1}{2}$ приведение можно продолжить до того члена, в котором D будет стоять в знаменателе в первой степени, и мы приходим к результату вида:

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \frac{K\sqrt{P}}{D^n} + \int \frac{H\, dx}{\sqrt{P}},$$

где H и K — два многочлена.

Таким образом всякий интеграл $\int \frac{M\, dx}{N\sqrt{P}}$ приводится к алгебраической части и к сумме интегралов вида:

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{P}}, \quad \int \frac{X_1\, dx}{X\sqrt{P}},$$

где m не выше $p-2$, многочлен X — первый со своею производною X' и с многочленом P, и степень многочлена X_1 ниже степени многочлена X. *Это приведение требует только сложения, умножения и деления многочленов.*

Если корни уравнения $X=0$ известны, то рациональную дробь $\frac{X_1}{X}$ можно разложить на сумму простых дробей вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Bx+C}{(x-a)^2+\beta^2},$$

где A, B, C — постоянные, и мы приходим к двум новым типам интегралов:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{(Bx+C)\,dx}{[(x-a)^2+\beta^2]\sqrt{P(x)}},$$

которые можно привести к одному первому, если мы условимся допускать для параметра a также и мнимые значения. Такие интегралы называются интегралами *третьего вида*. Интегралами *первого вида* называются интегралы Y_m, где m меньше $\frac{p}{2}-1$; интегралы Y_m при m равном или большем $\frac{p}{2}-1$ называются интегралами *второго вида*. Интегралы первого вида обладают характеристическим свойством, — они сохраняют конечное значение, когда верхний предел бесконечно возрастает или делается равным корню многочлена $P(x)$ (§ 89—90). Что касается интегралов второго и третьего вида, то приведенное выше различие между ними не самое существенное. Истинное различие будет указано впоследствии.

Примечание. До сих пор мы не делали никакого предположения относительно степени p многочлена $P(x)$. Если степень этого многочлена нечетная, то она всегда может быть увеличена на единицу. В самом деле, пусть многочлен $P(x)$ будет $(2q-1)$-й степени.

$$P(x) = A_0 x^{2q-1} + A_1 x^{2q-2} + \ldots + A_{2q-1}.$$

Положив $x = a + \frac{1}{y}$, причем a не есть корень многочлена $P(x)$, получим:

$$P(x) = P(a) + P'(a)\frac{1}{y} + \ldots + \frac{P^{(2q-1)}(a)}{(2q-1)!}\frac{1}{y^{2q-1}} = \frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

где $P_1(y)$ обозначает многочлен $2q$-й степени. Следовательно,

$$\sqrt{P(x)} = \frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

и всякий интеграл, содержащий рационально x и $\sqrt{P(x)}$, обратится в интеграл от рациональной функции от y и от $\sqrt{P_1(y)}$.

Обратно, если под знаком радикала стоит многочлен $P(x)$ четной степени $2q$, то степень этого многочлена можно понизить на единицу, *если только известен один из его корней*. Пусть будет, например, a один из корней уравнения $P(x) = 0$; полагая $x = a + \frac{1}{y}$, будем иметь:

$$P(x) = P'(a)\frac{1}{y} + \ldots + \frac{P^{(2q)}(a)}{2q}\frac{1}{y^{2q}} = \frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

где $P_1(y)$ есть многочлен $(2q-1)$-й степени; отсюда

$$\sqrt{P(x)} = \frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

и новый интеграл будет содержать только одну иррациональность $\sqrt{P_1(y)}$.

101. Случай алгебраической интеграции. Можно получить окончательную формулу, выражающую всякий интеграл $\int \frac{M}{N}\frac{dx}{\sqrt{P}}$ более непосредственным путем, не проходя через все промежуточные вычисления, которые мы делали. Пусть V — общий наибольший делитель многочлена N и его производной, W — общий наибольший делитель многочленов N и P и, наконец, U — частное от деления N на произведение VW. На основании доказанного в предшествующем параграфе рассматриваемый интеграл равен алгебраической части вида $\frac{Q\sqrt{P}}{VW}$, сложенной с определенным числом интегралов Y_i и с интегралом $\int \frac{S\,dx}{U\sqrt{P}}$, где Q и S — два многочлена. Так как всякое выражение $F(x)\sqrt{P}$, где $F(x)$ — некоторый многочлен, есть сумма интегралов Y_i, то мы можем написать:

$$\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{P}} = \int \frac{T\,dx}{\sqrt{P}} + \frac{Q\sqrt{P}}{VW} + \int \frac{S\,dx}{U\sqrt{P}},$$

где степень Q ниже степени VW, а степень S ниже степени U. Все три многочлена U, V, W получаются посредством рациональных операций; то же можно сказать и о многочленах Q, S, T. В самом деле, приравнивая производные обеих частей предшествующего равенства и умножая на $N\sqrt{P}$, находим:

$$M = TN + Q'PU + \frac{1}{2}P'QU - QP\frac{UW'}{W} - QP\frac{UV'}{V} + SVW,$$

и мы имеем верхний предел степени T, замечая, что степень TN не превосходит наивысшей степени всех остальных членов. Получив таким образом верхний предел степени многочленов Q, S, T, мы определим их коэфициенты, приравнивая в обеих частях последнего равенства коэфициенты при одинаковых степенях. Мы заранее уверены в том, что найденные уравнения совместны, так как это разложение возможно. Интеграл $\int \frac{T\,dx}{\sqrt{P}}$, в свою очередь, может быть разложен на алгебраическую часть и линейную комбинацию $p-1$ интегралов $Y_0, \ldots, Y_{p-2}$. Следовательно, мы всегда можем посредством рациональных операций представить предложенный интеграл в форме:

$$\int \frac{M}{N\sqrt{P}}\,dx = R(x)\sqrt{P} + \int \frac{T_1\,dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{S\,dx}{U\sqrt{P}},$$

где степень T_1 не превосходит $p-2$, степень S ниже степени U и $R(x)$ обозначает рациональную функцию.

Чтобы интеграл был алгебраической функцией, необходимо и достаточно, чтобы оба многочлена T_1 и S были нулями. Так как всякий интеграл

$$\int R(x, \sqrt{P})\,dx$$

может быть разложен на интеграл от рациональной функции и интеграл предшествующего вида, то мы, следовательно, всегда можем посредством рациональных операций узнать, является ли этот интеграл алгебраической функцией, и в этом случае получить его в явной форме.

102. Эллиптические интегралы. Если многочлен $P(x)$ — второй степени, то изложенный общий способ приведения позволяет привести интегрирование рациональной функции от x и от $\sqrt{P(x)}$ к вычислению интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

которые мы уже умеем вычислять непосредственно (§ 97).

Простейший после этого случай представляют эллиптические интегралы, когда $P(x)$ — третьей или четвертой степени; как мы видели выше, оба эти случая приводятся один к другому. Пусть будет $P(x)$ многочлен четвертой степени с действительными коэфициентами, имеющий только простые линейные множители. Покажем прежде всего, что линейною подстановкою с *действительными коэфициентами* всегда можно привести $P(x)$ к многочлену, содержащему только четные степени переменного.

Пусть будут a, b, c, d — четыре корня уравнения $P(x)=0$. Можно составить инволюционное соотношение:

$$Lx'x'' + M(x'+x'') + N = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющееся при $x'=a$, $x''=b$ и при $x'=c$, $x''=d$. Для определения отношений между коэфициентами L, M, N мы имеем два соотношения:

$$Lab + M(a+b) + N = 0,$$
$$Lcd + M(c+d) + N = 0,$$

и мы видим, что можно взять

$$L = a+b-c-d, \quad M = cd - ab, \quad N = ab(c+d) - cd(a+b).$$

Обозначим через α и β двойные точки предыдущей инволюции, т. е. корни уравнения

$$Lu^2 + 2Mu + N = 0.$$

Условие действительности этих корней, именно,

$$(cd-ab)^2-(a+b-c-d)\,[ad(c+d)-cd(a+b)]>0,$$

после простых преобразований может быть представлено в виде:

$$(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)>0. \tag{8}$$

Всегда можно распределить корни a, b, c, d так, чтобы это условие было удовлетворено. Если все четыре корня действительны, то достаточно взять за a и b два бо́льших корня; тогда все четыре множителя неравенства (8) будут положительными. Если уравнение $P(x)=0$ имеет только два действительных корня, то за a и b мы возьмем эти два действительных корня, а за c и d — два мнимых сопряженных; тогда множители $a-c$, $a-d$ и $b-c$, $b-d$ будут мнимыми сопряженными. Наконец, если все четыре корня мнимые, то мы возьмем за a и b два мнимых сопряженных корня, а за c и d два других мнимых сопряженных; четыре множителя неравенства (8) будут опять попарно сопряженными. Соответствующие значения коэфициентов L, M, N будут во всех случаях действительными.

Вводя количества α, β, мы можем представить соотношение (7) в виде:

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0. \tag{9}$$

Полагая $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}=y$, или $x=\dfrac{\beta y-\alpha}{y-1}$, получим:

$$P(x)=\frac{P_1(y)}{(y-1)^4},$$

где $P_1(y)$ есть новый многочлен четвертой степени с действительными коэфициентами, корнями которого служат

$$\frac{a-\alpha}{a-\beta},\quad \frac{b-\alpha}{b-\beta},\quad \frac{c-\alpha}{c-\beta},\quad \frac{d-\alpha}{d-\beta}.$$

На основании формулы (9) эти корни удовлетворяют попарно соотношению $y'+y''=0$; следовательно, многочлен $P_1(y)$ содержит только четные степени y.

Если корни a, b, c, d удовлетворяют соотношению $a+b=c+d$, то мы имеем $L=0$, и одна из двойных точек инволюции удаляется в бесконечность. Полагая $\alpha=-\dfrac{N}{2M}$, мы представим уравнение (7) в виде:

$$x'-\alpha+x''-\alpha=0,$$

и нужно только положить $x=\alpha+y$, чтобы получить многочлен с четными степенями y.

Таким образом мы можем во всех случаях предполагать, что многочлен $P(x)$ приведен к каноническому виду:

$$P(x)=A_0x^4+A_1x^2+A_2.$$

Тогда всякий эллиптический интеграл может быть приведен к алгебраической части, к интегралу от рациональной функции, к интегралам

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

и к интегралам вида:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}.$$

Интеграл

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

есть эллиптический интеграл первого вида; рассматривая в нем, обратно, x как функцию от u, мы получим *эллиптическую функцию*. Второй интеграл подстановкою $x^2 = u$ приводится к элементарному интегралу. Третий интеграл

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

есть лежандров интеграл второго вида. Наконец, мы можем написать:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}} = \int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}} + a \int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}};$$

интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

есть лежандров интеграл третьего вида.

Эллиптические интегралы получили свое название оттого, что с ними впервые встретились в задаче о спрямлении эллипса. Пусть будут

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

координаты точки эллипса; мы имеем:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2,$$

или, полагая $a^2 - b^2 = e^2a^2$:

$$ds = a\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}\;d\varphi.$$

Интеграл, представляющий длину дуги эллипса, обращается после подстановки $\cos\varphi = t$ в

$$s = a\int \frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = a\int \frac{1-e^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}\,dt;$$

мы видим, что длина дуги эллипса выражается суммою интегралов первого и второго видов.

Рассмотрим еще лемнискату, представляемую уравнениями

$$x = a^2\frac{t(t^2+a^2)}{t^4+a^4}, \quad y = a^2\frac{t(t^2-a^2)}{t^4+a^4};$$

выполнив вычисления, получим:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2a^4}{t^4+a^4}\,dt^2.$$

Таким образом длина дуги лемнискаты выражается эллиптическим интегралом первого вида *.

§ 102a. Псевдоэллиптические интегралы. В некоторых случаях интеграл

$$\int F[x, \sqrt{P(x)}]\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, может быть выражен при помощи алгебраической функции и суммы конечного числа логарифмов от алгебраических функций; такие интегралы называются *псевдоэллиптическими*. Вот довольно общий случай, когда это будет иметь место. *Пусть будет*

$$Lx'x'' + M(x' + x'') + N = 0 \tag{10}$$

инволюционное соотношение, связывающее попарно четыре корня уравнения четвертой степени $P(x)=0$; если рациональная функция $f(x)$ такова, что тождественно будет:

$$f(x) + f\left(-\frac{Mx+N}{Lx+M}\right) = 0,$$

то интеграл $\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ — *псевдоэллиптический.*

Пусть будут α, β двойные точки инволюции; как было указано выше, соотношение (10) можно представить в виде:

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} + \frac{x''-\alpha}{x''-\beta} = 0. \tag{11}$$

Сделав в интеграле подстановку $\frac{x-\alpha}{x-\beta} = y$, получим:

$$dx = \frac{(\alpha-\beta)\,dy}{(1-y)^2}, \quad P(x) = \frac{P_1(y)^4}{(1-y)^4},$$

и следовательно,

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{(\alpha-\beta)\,dy}{\sqrt{P_1(y)}},$$

где $P_1(y)$ — многочлен четвертой степени, содержащий только четные степени переменного y (§ 102). Что касается рациональной дроби $f(x)$, то она обратится в рациональную дробь $\varphi(y)$, для которой $\varphi(y) + \varphi(-y) = 0$. В самом деле, если два значения x связаны соотношением (11), то соответствующие значения y', y'' переменного y должны удовлетворять соотношению $y' + y'' = 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(y)$ будет иметь вид $y\psi(y^2)$, где ψ есть рациональная функция от y^2. Следовательно, рассматриваемый интеграл обращается в

$$\int\frac{y\psi(y^2)\,dy}{\sqrt{A_0y^4 + A_1y^2 + A_2}},$$

* Это свойство принадлежит целому классу кривых, найденных Серре (Serret) *Cours de Calcul différentiel et intégral*, т. II, стр. 264.

и достаточно положить $y^2 = z$, чтобы привести его к элементарному интегралу. Таким образом теорема доказана, и кроме того, мы имеем вместе с тем и способ выполнить самое приведение.

Изложенная теорема справедлива и в том случае, когда многочлен $P(x)$ будет третьей степени; нужно только принять один из четырех корней этого многочлена бесконечно большим. Доказательство совершенно одинаково с предыдущим.

Если, например, уравнение $P(x) = 0$ возвратное, то одним из инволюционных соотношений, перемещающих корни попарно, будет $x'x'' = 1$. Следовательно, если рациональная функция $f(x)$ такова, что мы имеем тождественно

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

то интеграл

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$$

будет псевдоэллиптическим, и достаточно положить $\frac{x-1}{x+1} = y$ и $y^2 = z$, чтобы привести его к элементарному интегралу.

Предположим еще, что $P(x)$ есть многочлен третьей степени

$$P(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{k^2}\right);$$

положим $a = \infty$, $b = 0$, $c = 1$, $d = \frac{1}{k^2}$. Существуют три инволюционных соотношения, перемещающих эти корни попарно:

$$x' = \frac{1}{k^2 x''}, \quad x' = \frac{1 - k^2 x''}{k^2(1 - x'')}, \quad x' = \frac{1 - x''}{1 - k^2 x''}.$$

Если рациональная функция $f(x)$ удовлетворяет одному из соотношений:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{k^2 x}\right) = 0,\ f(x) + f\left(\frac{1 - k^2 x}{k^2(1 - x)}\right) = 0,\ f(x) + f\left(\frac{1 - x}{1 - k^2 x}\right) = 0,$$

то интеграл

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

— псевдоэллиптический. Из этого интеграла можно вывести и другие. Например, полагая $x = z^2$, мы превратим предыдущий интеграл в

$$\int \frac{2f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Отсюда мы заключаем, что если $f(z^2)$ удовлетворяет одному из соотношений:

$$f(z^2) + f\left(\frac{1}{k^2 z^2}\right) = 0,\ f(z^2) + f\left[\frac{1 - k^2 z^2}{k^2(1 - z^2)}\right] = 0,$$
$$f(z^2) + f\left(\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}\right) = 0,$$

то новый интеграл будет также псевдоэллиптическим; первый из этих случаев был уже замечен Эйлером (Euler) *.

---

* См. литографированный курс Эрмита, 4-е изд., стр. 25—28.

103. Интегрирование трансцендентных функций. Интегрирование рациональных функций от $\sin x$ и $\cos x$. Известно, что $\sin x$ и $\cos x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, и эта замена переменных позволяет привести вычисление интеграла вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

к интегрированию рациональной функции от t. Мы имеем:

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

и рассматриваемый интеграл обращается в

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int \Phi(t)\,dt,$$

где $\Phi(t)$ обозначает рациональную функцию. Например,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=\ln t,$$

и следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Интеграл $\int\frac{dx}{\cos x}$ приводится к предыдущему подстановкою $x=\frac{\pi}{2}-y$; это дает:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=-\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right].$$

Предыдущий способ имеет то преимущество, что он вполне общий, но часто можно найти такие замены переменных, которые ведут к цели гораздо скорее. Так, если функция $R(\sin x,\ \cos x)$ имеет период π, то она равна рациональной функции от $\operatorname{tg} x$, $F(\operatorname{tg} x)$, и, приняв $\operatorname{tg} x=t$ за новое переменное, получим:

$$\int F(\operatorname{tg} x)\,dx=\int\frac{F(t)\,dt}{1+t^2}.$$

Пусть, например, требуется вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{A\cos^2 x+B\sin x\cos x+C\sin^2 x+D},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Функция под знаком интеграла имеет период π, и, полагая $\operatorname{tg} x=t$, получим:

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\quad \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2},\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},$$

и рассматриваемый интеграл обращается в

$$\int \frac{dt}{A+Bt+Ct^2+D(1+t^2)}.$$

Вид начальной функции зависит от характера корней знаменателя. Предполагая последовательно три из четырех коэфициентов равными нулю, получим формулы:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad \int \frac{dt}{\sin x \cos x} = \ln(\operatorname{tg} x), \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Если подинтегральная функция имеет вид $R(\sin x)\cos x$ или $R(\cos x)\sin x$, то замена переменного очевидна; в первом случае должно положить $\sin x = t$, а во втором $\cos x = t$.

Прежде чем прилагать общий метод, иногда бывает выгоднее упростить подинтегральную функцию соответствующею заменою переменного. Рассмотрим, например, интеграл

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

где a, b, c — какие-нибудь постоянные. Определим положительное число ρ и угол φ соотношениями:

$$a = \rho\cos\varphi, \quad b = \rho\sin\varphi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

следовательно, данный интеграл можно представить в виде:

$$\int \frac{dx}{\rho\cos(x-\varphi)+c} = \int \frac{dy}{\rho\cos y + c},$$

где $x - \varphi = y$. Если мы применим теперь общий метод, полагая $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = t$, то предыдущий интеграл обратится в

$$\int \frac{2dt}{\rho + c + (c-\rho)t^2}.$$

Вычисление легко можно довести до конца, и мы получим две различных начальных функции в зависимости от знака выражения

$$\rho^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Интеграл

$$\int \frac{m\cos x + n\sin x + p}{a\cos x + b\sin x + c}\,dx$$

приводится к предыдущему. Положим для краткости, что

$$u = a\cos x + b\sin x + c,$$

и определим три постоянных λ, μ, ν таким образом, чтобы было тождественно:

$$m\cos x + n\sin x + p = \lambda u + \mu\frac{du}{dx} + \nu.$$

Для этого нужно решить три уравнения:

$$m = \lambda a + \mu b, \quad n = \lambda b - \mu a, \quad p = \lambda c + \nu,$$

из которых два первых дают λ и μ. При таком выборе постоянных рассматриваемый интеграл обращается в

$$\int\frac{\lambda u + \mu\frac{du}{dx} + \nu}{u}dx = \lambda x + \mu\ln u + \nu\int\frac{d\cdot}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

Пример. Вычислим определенный интеграл

$$\int\limits_0^\pi\frac{dx}{1 + e\cos x},$$

где $|e| < 1$.

Рассматривая сначала неопределенный интеграл, получим, полагая последовательно $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, и $t = u\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$:

$$\int\frac{dx}{1 + e\cos x} = 2\int\frac{dt}{1 + e + (1-e)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\int\frac{du}{1+u^2}.$$

Следовательно, неопределенный интеграл равен:

$$\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

При изменении x от 0 до π, $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ возрастает от 0 до $+\infty$, и arc tg изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$; поэтому искомый определенный интеграл равен $\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}$.

Формулы приведения. При вычислении некоторых классов интегралов можно также пользоваться формулами приведения. Например, формула производной от $\operatorname{tg}^{n-1}x$ может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{n-1}x) = (n-1)\operatorname{tg}^{n-2}x(1 + \operatorname{tg}^2 x);$$

отсюда имеем:

$$\int\operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx.$$

Здесь показатель при $\operatorname{tg} x$ под знаком интеграла уменьшился на две единицы. Поступая таким же образом далее, мы придем к одному из двух интегралов:

$$\int dx = x, \qquad \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln(\cos x).$$

Такая же формула приведения существует и для интегралов $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$,

$$\int \operatorname{ctg}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\, dx.$$

Рассмотрим более общий интеграл

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

где m и n — два каких-нибудь целых положительных или отрицательных числа. Если одно из этих чисел нечетное, то удобно воспользоваться одною из вышеуказанных замен переменного. Если, например, $n = 2p + 1$, то, полагая $\sin x = t$, мы придем к вычислению интеграла $\int t^m (1 - t^2)^p\, dt$. Поэтому ограничимся тем случаем, когда m и n оба четные, т. е. интегралами вида:

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx.$$

Этот интеграл можно представить в виде:

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m-1} x \cos^{2n} x \sin x\, dx;$$

рассматривая $\cos^{2n} x \sin x\, dx$ как дифференциал от $\dfrac{-1}{2n+1} \cos^{2n+1} x$ и интегрируя по частям, получим:

$$I_{m,n} = -\sin^{2m-1} x \frac{\cos^{2n+1} x}{2n+1} + \frac{2m-1}{2n+1} \int \sin^{2m-2} x \cos^{2n} x\, (1 - \sin^2 x)\, dx,$$

или

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos^{2n+1} x}{2(m+n)} + \frac{2m-1}{2(m+n)} I_{m-1,n}. \tag{A}$$

Эта формула позволяет уменьшить первый показатель m, не уменьшая второго. Если m отрицательно, то, решая уравнение (A) относительно ${}_{m-1,n}$ и заменяя m через $1 - m$, получим аналогичную формулу:

$$I_{-m,n} = \frac{\sin^{1-2m} x \cos^{2n+1} x}{1-2m} + \frac{2(n-m+1)}{1-2m} I_{1-m,n}. \tag{B}$$

Такие же формулы мы имеем и для понижения показателя при $\cos x$.

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{2m+1} x \cos^{2n-1} x}{2(m+n)} + \frac{2n-1}{2(m+n)} I_{m,n-1}, \tag{C}$$

$$I_{m,-n} = -\frac{\sin^{2m+1} x \cos^{1-2n} x}{1-2n} + \frac{2(m+1-n)}{1-2n} I_{m,-n+1}. \tag{D}$$

Применяя эти формулы должное число раз, мы можем привести каждое из чисел m и n к нулю. Мы не могли бы довести преобразование до конца по этим формулам только в том случае, если бы мы пришли к интегралу $I_{m,n}$, в котором $m+n=0$, т. е. к одному из интегралов, для которых формула приведения была выведена в начале этого параграфа.

Формула Уэллиса. Для приведения интегралов, подобных предыдущим, существуют также формулы и независящие от того, будут ли m и n четными или нечетными.

Вычислим, например, определенный интеграл

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,$$

где m — целое положительное число. Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x \sin x\,dx = -\left[\cos x \sin^{m-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\cos^2 x\,dx;$$

так как на обоих пределах $\cos x \sin^{m-1}x$ обращается в нуль, то

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (m-1)\,(I_{m-2} - I_m).$$

Отсюда имеем рекуррентную формулу:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \tag{E}$$

Продолжая таким образом, мы придем при m четном к интегралу $I_0 = \frac{\pi}{2}$, а при m нечетном к интегралу $I_1 = 1$. Рассмотрим первый случай, $m = 2p$; полагая в формуле (E) последовательно $m = 2, 4, 6, \ldots, 2p$, получим:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2, \quad \ldots, \quad I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2};$$

умножая почленно все эти равенства, найдем:

$$I_{2p} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2p-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2p}\,\frac{\pi}{2}.$$

Точно так же будем иметь:

$$I_{2p+1} = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots2p}{1\cdot3\cdot5\ldots(2p+1)}.$$

Отсюда можно вывести любопытную формулу, данную Уэллисом (Wallis). Ясно, что интеграл I_m уменьшается с возрастанием m, так как $\sin^{m+1}x$ меньше, чем $\sin^m x$; поэтому мы имеем:

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}.$$

Заменяя I_{2p+1}, I_{2p}, I_{2p-1} их предыдущими значениями и полагая для краткости

$$H_p = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p-1},$$

получим два новых неравенства:

$$H_p > \frac{\pi}{2} > H_p \frac{2p}{2p+1}.$$

Таким образом при неограниченном возрастании p отношение $\frac{\pi}{2H_p}$ имеет пределом единицу, т. е. число $\frac{\pi}{2}$ есть предел произведения H_p при неограниченном возрастании числа множителей. Закон составления множителей этого произведения очевиден.

Интегралы $\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\ldots dx$. Рассмотрим произведение некоторого числа множителей вида $\cos(ax+b)$, где a и b — постоянные, причем один и тот же множитель может входит в произведение несколько раз. Формула

$$\cos u \cos v = \frac{\cos(u+v)}{2} + \frac{\cos(u-v)}{2}$$

позволяет заменить произведение двух множителей этого вида суммою двух косинусов линейных функций от x; следовательно, произведение из n множителей заменится суммою двух произведений из $(n-1)$ множителей. Применяя эту формулу достаточное число раз, мы заменим данное произведение суммою вида $\Sigma H\cos(Ax+B)$, каждый член которой интегрируется непосредственно. Если A не равно нулю, то

$$\int \cos(Ax+B)\,dx = \frac{\sin(Ax+B)}{A} + C;$$

если же $A=0$, то $\int \cos B\,dx = x\cos B + C$.

В частности, это преобразование применимо к произведениям вида

$$\cos^m x \sin^n x,$$

где m и n — два целых положительных числа. В самом деле, это произведение можно представить в виде:

$$\cos^m x \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

применяя предыдущий прием, мы заменим последнее произведение суммою синусов и косинусов кратных дуг, и интегрирование выполнится непосредственно.

Пусть, например, требуется вычислить площадь кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Положим $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$; мы получим всю кривую, изменяя θ от 0 до 2π.

Формула для площади замкнутой кривой

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

обращается в этом случае в

$$\mathfrak{A} = \int_0^{2\pi} \frac{3ab}{2} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta;$$

но

$$(\sin\theta\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta),$$

и следовательно, искомая площадь $\mathfrak{A}$ равна:

$$\mathfrak{A} = \frac{3ab}{16}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi ab}{8}.$$

В частности, мы имеем следующие интегралы:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\,dx = -\frac{3\cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{12} + C,$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

. . . .

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C,$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\,dx = \frac{3\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{12} + C,$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

. . . .

Относительно этих формул можно отметить один общий закон. Интегралы

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x\,dx \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \int_0^x \cos^n x\,dx$$

при n нечетном — периодические и имеют период 2π; если же n — четное, то при возрастании x на 2π эти интегралы увеличиваются на постоянное положительное количество. Это свойство можно было предвидеть заранее; в самом деле, мы имеем:

$$F(x + 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi + x} \sin^n x\,dx,$$

или, вследствие периодичности $\sin x$:

$$F(x + 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx + \int_0^x \sin^n x\,dx = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx.$$

Если n — четное, то интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin^n x\,dx$ есть, очевидно, положительное количество; если же n — нечетное, то этот интеграл равен нулю, как это следует из соотношения $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

Примечание. Вследствие большого разнообразия преобразований, допускаемых тригонометрическими функциями, последними часто бывает удобно пользоваться при вычислении интегралов. Так, возвратимся к интегралу $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; полагая в нем $x = \operatorname{tg}\varphi$, мы обратим его в $\int \cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi + C$ и, возвращаясь к переменному x, придем к найденной ранее (§ 97) формуле:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Интегралы $\int R(x)\,e^{\omega x}dx$. Рассмотрим теперь интегралы вида:

$$\int R(x) e^{\omega x} dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция от x. Предположим, что мы разложили функцию $R(x)$, как мы это уже неоднократно делали:

$$R(x) = E(x) + \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \ldots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

где $E(x)$, A_1, A_2, ..., A_p, X_1, ..., X_p — многочлены, и каждый многочлен X_i — первый со своею производною. Данный интеграл будет равен интегралу $\int E(x)\,e^{\omega x}dx$, сложенному с суммою интегралов вида:

$$\int \frac{Ae^{\omega x}dx}{X^n}.$$

Первый интеграл можно вычислить последовательными интегрированиями по частям (§ 84); что же касается интегралов $\int \frac{Ae^{\omega x}dx}{X^n}$, то при n большем единицы к ним можно применить формулу приведения. В самом деле, так как многочлен X — первый со своею производною, то можно найти два таких многочлена λ, μ, чтобы было тождественно $A = \lambda X + \mu X'$; отсюда мы получим:

$$\int \frac{Ae^{\omega x}dx}{X^n} = \int \frac{\lambda e^{\omega x}dx}{X^{n-1}} + \int \frac{\mu X' e^{\omega x}}{X^n}\,dx.$$

Затем интегрирование по частям дает:

$$\int \mu e^{\omega x}\frac{X'dx}{X^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\mu e^{\omega x}}{X^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{\omega x}(\mu' + \mu\omega)}{X^{n-1}}\,dx,$$

и, соединяя обе формулы, мы видим, что вычисление рассматриваемого интеграла приведено к вычислению интеграла того же вида, но в котором показатель n уменьшен на единицу. Поступая, далее, таким же образом, мы придем к интегралу:

$$\int \frac{Be^{\omega x}}{X} dx,$$

в котором всегда можно предположить, что многочлен B — первый с многочленом X и что степень многочлена B ниже степени многочлена X. К полученному интегралу этот способ приведения более не применим; но если корни уравнения $X=0$ известны, то этот интеграл можно привести только к одной новой трансцендентной функции. Предположим для определенности, что все корни многочлена X действительны; в этом случае интеграл разлагается на несколько интегралов вида:

$$\int \frac{ae^{\omega x}}{x-a} dx.$$

Отбрасывая постоянный множитель, мы можем привести этот интеграл посредством подстановок

$$x = a + \frac{y}{\omega}, \quad u = e^y$$

к одному из двух следующих видов:

$$\int \frac{e^y dy}{y}, \quad \int \frac{du}{\ln u}.$$

Последний интеграл $\int \frac{du}{\ln u}$ представляет новую трансцендентную функцию, называемую ***интегральным логарифмом***.

Разные интегралы. Рассмотрим еще интегралы

$$\int e^{ax} f(\sin x, \ \cos x)\, dx,$$

где f — *целая* функция от $\sin x$ и $\cos x$. Каждый член этого интеграла имеет вид:

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

где m и n — целые положительные числа. На основании сделанных выше замечаний произведение $\sin^m x \cos^n x$ может быть заменено суммой синусов и косинусов кратных дуг, и, таким образом, нам нужно рассмотреть только два следующих типа интегралов:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Интегрируя эти интегралы по частям, получим:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Отсюда имеем:

$$\left.\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}\\ \int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Из интегралов, приводимых к предыдущим, мы укажем еще на следующие:

$$\int f(\ln x)\,x^m dx, \qquad \int f(\arcsin x)\,dx,$$

$$\int f(x)\arcsin x\,dx, \qquad \int f(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx,$$

где f обозначает целую рациональную функцию. Если в двух первых примем за новое переменное $\ln x$ и $\arcsin x$, а в двух последних применим формулу интегрирования по частям, рассматривая $f(x)\,dx$ как диференциал от некоторого многочлена $F(x)$, то придем к уже рассмотренным видам интегралов.

II. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

104. Общие основания. Если начальная функция от функции $f(x)$ неизвестна, то прибегают к методам, дающим приближенное значение определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема о среднем значении дает две границы, между которыми заключается этот интеграл; аналогичным приемом можно найти бесчисленное множество других границ. Предположим, что при изменении x от a до b мы всегда имеем:

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x);$$

очевидно, что мы будем иметь также

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Если за функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ мы примем производные от двух известных функций, то этим способом мы получим два предела, между которыми заключается значение рассматриваемого интеграла. Возьмем, например, интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Мы имеем $\sqrt{1-x^4}=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}$. При изменении x от 0 до 1, $\sqrt{1+x^2}$ содержится между 1 и $\sqrt{2}$; следовательно, искомый интеграл заключается между двумя интегралами:

$$\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Но можно найти два более тесных предела, заметив, что $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ больше $1-\frac{x^2}{2}$, как это видно из разложения $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ по формуле Тейлора, ограниченной двумя первыми членами. Таким образом интеграл I будет больше

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

последний интеграл равен $\frac{\pi}{4}$ (см. § 97), и следовательно, I заключается между $\frac{3\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Ясно, что таким образом получаются только общие указания относительно точного значения интеграла. Чтобы иметь более близкие значения, должно разбить промежуток (a, b) на более мелкие промежутки и приложить к каждому из них формулу среднего значения. Предположим, например, что $f(x)$ от a до b постоянно возрастает. Разобьем промежуток (a, b) на n равных промежутков $(b-a=nh)$. По самому определению интеграла, $\int_a^b f(x)\,dx$ заключается между двумя суммами:

$$s=h\,\{f(a)+f(a+h)+\ldots+f[a+(n-1)h]\},$$
$$S=h\,\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\}.$$

Если мы возьмем для значения интеграла полусумму $\frac{S+s}{2}$, то допущенная погрешность будет, очевидно, меньше, чем $S-s=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$.

Значение $\frac{S+s}{2}$ можно представить в виде:

$$h\left\{\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{f[a+(n-1)h]+f(a+nh)}{2}\right\}.$$

Так как $\frac{h}{2}\{f(a+ih)+f[a+(i+1)h]\}$ представляет площадь трапеции, имеющей высоту h, а основания $f(a+ih)$ и $f[a+(i+1)h]$, то мы видим, что метод равносилен замене площади кривой $y=f(x)$, заключающейся между двумя соседними ординатами, площадью прямолинейной трапеции, имеющей основаниями эти две ординаты. Этот способ удобен, когда не требуется большой точности.

Возьмем, например, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Полагая $n=4$, мы получим для приближенного значения интеграла:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\right)=0{,}78279\ldots,$$

и погрешность будет меньше $\frac{1}{16}=0{,}0625$. Отсюда мы можем получить приближенное значение $\pi=3{,}1311\ldots$, точное до первого десятичного знака.

Если при возрастании x от a до b функция $f(x)$ не изменяется в одном и том же направлении, то мы разобьем этот промежуток на несколько других, для которых это условие удовлетворяется.

105. Интерполирование. Рассмотрим другой метод вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Проведем через $n+1$ точек $B_0, B_1, \ldots, B_n$, взятых на кривой $y=f(x)$ между двумя точками с абсциссами a и b, параболическую кривую n-го порядка

$$y=\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

и примем за приближенное значение искомого интеграла значение определенного интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, которое легко вычислить.

Пусть будут (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ координаты $n+1$ точек $B_0, B_1, \ldots, B_n$. По формуле интерполирования Лагранжа получим для многочлена $\varphi(x)$ выражение:

$$\varphi(x)=y_0X_0+y_1X_1+\ldots+y_iX_i+\ldots+y_nX_n,$$

где коэфициент X_i при y_i:

$$X_i=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

есть многочлен n-й степени по x, обращающийся в нуль при данных значениях $x_0, x_1, \ldots, x_n$, кроме $x = x$, и равный единице при $x = x_i$. Таким образом мы имеем:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=n} y_i \int_a^b X_i dx.$$

Числа x_i имеют вид:

$$x_0 = a + \theta_0(b-a),\ x_1 = a + \theta_1(b-a),\ \ldots,\ x_n = a + \theta_n(b-a),$$

где $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ суть числа, возрастающие от 0 до 1. Сделав замену переменного $x = a + (b-a)t$, мы получим для приближенного значения интеграла выражение:

$$(b-a)(K_0 y_0 + K_1 y_1 + \ldots + K_n y_n), \tag{13}$$

где

$$K_i = \int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\ldots(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\ldots(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})\ldots(\theta_i-\theta_n)}\,dt.$$

Если при всяком виде функции $f(x)$ мы будем разбивать промежуток (a, b) на более мелкие промежутки, находящиеся всегда в одном и том же отношении, то числа $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$, а следовательно, и коэфициенты K_i не будут зависеть от вида функции $f(x)$. После того как коэфициенты K_i будут вычислены раз навсегда, нам останется только заменять $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в формуле (13) их значениями.

Если кривая $y = f(x)$, площадь которой требуется определить, дана графически, то всего удобнее разбивать промежуток (a, b) на равные части, и тогда нужно будет только измерить на этой кривой равноотстоящие ординаты. Если мы разбиваем на две части, то должно положить $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = 1$; это дает для приближенного значения интеграла:

$$I = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Подобным же образом при $n = 3$ имеем:

$$I = \frac{b-a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3),$$

и при $n = 4$:

$$I = \frac{b-a}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

Предыдущий метод принадлежит Котсу (Cotes). Метод Симпсона (Simpson) несколько иной. Предположим, что промежуток (a, b) разбит на $2n$ равных частей; пусть будут $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ соответствующие ординаты в точках деления. Прилагая первую формулу Котса к площади, заключающейся между двумя ординатами с последовательными четными указателями, каковы y_0 и y_2, y_2 и y_4 и т. д., мы имеем для искомой площади выражение:

$$I=\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{2n-2}+ \\ +4y_{2n-1}+y_{2n})];$$

сделав приведения, получим формулу Симпсона:

$$I=\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+ \\ +4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$$

106. Метод Гаусса. В методе Гаусса (Gauss) для количеств θ_i берутся другие значения; они получаются из следующих соображений.

Допустим, что можно найти такие многочлены все более и более высоких степеней, которые в промежутке (a, b) все менее и менее различались бы от функции $f(x)$, которую требуется интегрировать. Положим, например,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n-1}x^{2n-1}+R_{2n}(x),$$

причем при всех значениях x, заключающихся между a и b, остаток $R_{2n}(x)$ меньше некоторого определенного числа ε_n *. Вообще мы не знаем коэфициентов a_i, но, как увидим ниже, эти коэфициенты не войдут в вычисления. Пусть будут $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ значения переменного x, заключающиеся между a и b, и пусть будет $\varphi(x)$ многочлен $(n-1)$-й степени, принимающий при значениях $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ те же значения, как и функция $f(x)$. Формула интерполирования Лагранжа показывает, что этот многочлен можно представить в виде:

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{2h-1}a_m\varphi_m(x)+R_{2n}(x_0)\Psi_0(x)+\ldots+R_{2n}(x_{n-1})\Psi_{n-1}(x),$$

где φ_m и Ψ_k — многочлены не выше $(n-1)$-й степени. Очевидно, что многочлен φ_m зависит только от выбранных значений $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. С другой стороны, многочлен $\varphi_m(x)$ должен принимать при $x=x_0$, $x=x_1, \ldots, x=x_{n-1}$ те же значения, как и x^m. В самом деле, предположим, что все коэфициенты a_i, кроме a_m, равны нулю, равно как и многочлен $R_{2n}(x)$; тогда $f(x)$ обратится в a_mx^m, и $\varphi(x)$ в $a_m\varphi_m(x)$. Отсюда следует, что разность $x^m-\varphi_m(x)$ должна делиться на произведение

$$P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

и при $m\geqslant n$ мы должны иметь $x^m-\varphi_m(x)=P_nQ_{m-n}(x)$, где $Q_{m-n}(x)$ есть многочлен $(m-n)$-й степени; если же $m\leqslant n-1$, то должно

---

* На основании теоремы Вейерштрасса, это есть общее свойство функций, непрерывных в промежутке (a, b) (см. гл. IX, § 197).

быть $x^m - \varphi_m(x) = 0$. Поэтому погрешность от замены интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралом $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ будет равна:

$$\sum_{m=0}^{2n-1} a_m \int_a^b [x^m - \varphi_m(x)]\,dx + \int_a^b R_{2n}(x)\,dx - \\ - \sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i) \int_a^b \Psi_i(x)\,dx. \tag{14}$$

Члены, зависящие от коэфициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, тождественно равны нулю, и мы видим, что погрешность зависит исключительно от коэфициентов $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}$ и от остатка $R_{2n}(x)$. Вообще этот остаток R_{2n} очень мал сравнительно с коэфициентами $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}$; поэтому можно надеяться получить большую точность, если можно будет взять $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ таким образом, чтобы члены, зависящие от $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}$, были также равны нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы n интегралов

$$\int_a^b P_n Q_0\,dx, \quad \int_a^b P_n Q_1\,dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b P_n Q_{n-1}\,dx,$$

где Q_i — многочлен i-й степени, были равны нулю. Выше мы видели (§ 86), что этим условиям мы можем удовлетворить, взяв

$$P_n = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n]; \tag{15}$$

таким образом нужно только за $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ взять n корней уравнения $P_n = 0$, которые, действительно, все заключаются между a и b.

Если $a = -1$, $b = +1$, то $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ будут корнями многочлена Лежандра $X_n = 0$; все остальные случаи могут быть приведены к этому случаю подстановкою $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$. В „Traité de Calcul intégral" Бертрана (стр. 342) даны значения этих корней, а также и коэфициенты K_i формулы (13), до $n = 5$ с 7 и 8 десятичными знаками.

Погрешность в методе Гаусса равна:

$$\int_a^b R_{2n}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i) \int_a^b \Psi_i(x)\,dx, \tag{16}$$

причем функции $\Psi_i(x)$ не зависят от функции, интеграл которой ищется. Чтобы иметь предел погрешности, достаточно знать предел $R_{2n}(x)$, т. е. знать, с каким приближением в промежутке (a, b) функция $f(x)$ может быть представлена многочленом $(2n-1)$-й степени, причем нет надобности знать самый многочлен.

Чтобы найти числовое значение определенного интеграла, можно также разложить функцию $f(x)$ в ряд и затем интегрировать этот ряд почленно. Впоследствии (гл. VIII) мы увидим, при каких условиях этот прием допустим и какое приближение он дает.

106а. Планиметр Амслера. Существует много приборов, придуманных для измерения площадей плоских кривых *. Наиболее остроумный из них — это планиметр Амслера (Amsler); его теория представляет интересное приложение свойств криволинейных интегралов.

Рассмотрим прямолинейный стержень, могущий двигаться в некоторой плоскости; пусть будут $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ площади замкнутых кривых, описываемые двумя точками A_1, A_2 этого стержня, когда, совершив замкнутый путь, он приходит в свое начальное положение. Пусть будут (x_1, y_1), (x_2, y_2) прямоугольные координаты точек A_1, A_2, l — расстояние между этими двумя точками, и θ — угол, образуемый направлением A_1A_2 с осью Ox. Чтобы представить движение стержня, нужно предположить, что x_1, y_1, θ суть периодические функции некоторого независимого переменного t, принимающие прежние значения, когда t изменяется на T. Мы имеем $x_2 = x_1 + l\cos\theta$, $y_2 = y_1 + l\sin\theta$, и следовательно,

$$x_2\,dy_2 - y_2\,dx_2 = x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1 + l^2\,d\theta +$$
$$+ l(\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1 + x_1\cos\theta\,d\theta + y_1\sin\theta\,d\theta).$$

Обозначая через $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ площади кривых, описанных точками A_1, A_2, и соблюдая при вычислении этих площадей указанные выше (§ 93) условия, имеем:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\int x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2}\int x_2\,dy_2 - y_2\,dx_2;$$

следовательно, интегрируя обе части предыдущего равенства, получим:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + \frac{l^2}{2}\int d\theta + \frac{l}{2}\left[\int(\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1) + \int(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta)\,d\theta\right],$$

где все интегралы взяты между пределами, соответствующими пределам t_0 и $t_0 + T$ для переменного t. Ясно, что $\int d\theta = 2K\pi$, где K есть целое число, зависящее от того, как движется прямая. С другой стороны, интегрируя по частям, имеем:

$$\int x_1\cos\theta\,d\theta = x_1\sin\ -\int\sin\theta\,dx_1,$$
$$\int y_1\sin\theta\,d\theta = -y_1\cos\theta + \int\cos\theta\,dy_1.$$

Но при возрастании t от t_0 до $t_0 + T$, $x_1\sin\theta$ и $y_1\cos\theta$ принимают прежние значения, и потому мы можем написать:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + K\pi l^2 + l\int(\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1).$$

Пусть будет s длина дуги кривой, описываемой точкою A_1 (черт. 15с), отсчитываемая от какой-нибудь начальной точки в определенном направлении; обозначим через α угол, образуемый с Ox положительным направлением касательной в конце дуги; тогда

$$\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1 = (\sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\cos\alpha)\,ds = \sin V\,ds,$$

где V — угол между положительным направлением стержня и направлением касательной, отсчитываемый в ту сторону, как это принято в тригонометрии. Предыдущую формулу можно еще представить в виде:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + K\pi l^2 + l\int\sin V\,ds. \tag{A}$$

* Описание этих приборов можно найти в сочинении Абданк-Абаканович (Abdank-Abakanowicz) „Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications“ (1886).

Пусть будет A_3 третья точка на прямой на расстоянии l' от A_1; для площади кривой, описываемой точкой A_3, мы таким же образом найдем:

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 + K\pi l'^2 + l' \int \sin V\, ds. \tag{B}$$

Исключая из обеих формул неизвестный интеграл $\int \sin V ds$, мы получим соотношение:

$$l'\mathfrak{A}_2 - l\mathfrak{A}_3 = (l' - l)\mathfrak{A}_1 + K\pi l l'(l - l'),$$

которому можно дать вид:

$$\mathfrak{A}_1(23) + \mathfrak{A}_2(31) + \mathfrak{A}_3(12) + K\pi(12)(23)(31) = 0, \tag{C}$$

где (ik) обозначает расстояние между точками A_i, A_k $(i, k = 1, 2, 3)$, взятое с соответствующим знаком. Как приложение этой формулы рассмотрим прямую A_1A_2 длины $a + b$, концы которой A_1 и A_2 описывают одну и ту же замкнутую выпуклую кривую C; точка A_3, делящая A_1A_2 на два отрезка $A_1A_3 = a$, $A_3A_2 = b$, также опишет замкнутую кривую C', которая будет лежать внутри C. В этом случае мы имеем:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1,\ (12) = a + b,\ (23) = -b,\ (31) = -a,\ K = 1,$$

и, разделив формулу (40) на $a + b$, получим:

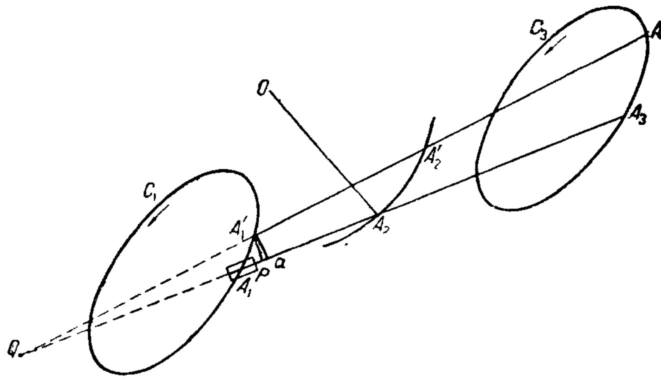
$$\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3 = \pi ab.$$

$\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3$ представляет площадь, заключающуюся между двумя кривыми C, C', и мы видим, что эта площадь не зависит от формы кривой C. Эта теорема принадлежит Гольдичу (Holditch).

Вместо того чтобы исключать из формул (A) и (B) $\int \sin V ds$, исключим из них количество $\mathfrak{A}_1$; мы получим:

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 + K\pi(l'^2 - l^2 + l' - l)\int \sin V ds. \tag{D}$$

Планиметр Амслера представляет приложение этой последней формулы. Пусть будет $A_1A_2A_3$ твердый стержень, сочлененный в A_2 с другим стержнем OA_2. Если, оставляя неподвижною точку O, мы будем описывать концом A_3, снабженным штифтом, контур C_3 искомой площади, то точка A_2 в зависимости от характера перемещения точки A_3 опишет или дугу круга, или целую окружность.



Черт. 15с.

Количества $\mathfrak{A}_2$, K, l, l' всегда известны, и, чтобы найти искомую площадь, остается найти интеграл $\int \sin V ds$. Этот интеграл взят вдоль кривой C_1, описанной концом стержня A_1. На этом конце помещен круглый цилиндр с делениями, ось которого совпадает с осью стержня A_1A_3, и который может вращаться вокруг этой оси.

Рассмотрим бесконечно малое перемещение стержня, переводящее $A_1A_2A_3$ в положение $A_1'A_2'A_3'$. Пусть будет Q точка пересечения прямых A_1A_3 и $A_1'A_3'$; опишем из точки Q, как из центра, дугу круга $A_1'\alpha$ и опустим из точки A_1' на A_1A_2 перпендикуляр $A_1'P$. Мы можем предположить, что при переходе из первого положения во второе стержень сначала скользит вдоль самого себя так, что точка A_1 приходит в α. При этом движении цилиндр скользит в плоскости вдоль образующей, и его вращение равно нулю. Если затем мы повернем стержень вокруг Q так, чтобы точка α перешла в A_1', то вращение цилиндра будет измеряться дугою $\alpha A_1'$. Но отношения $\frac{\alpha A_1'}{A_1'P}$ и $\frac{A_1'P}{\operatorname{arc} A_1A_1'}$ при приближении дуги $A_1'A_1$ к нулю стремятся соответственно к 1 и к $\sin V$. Поэтому мы можем написать $\alpha A_1' = \Delta s\,(\sin V + \varepsilon)$, где ε бесконечно мало вместе с Δs. Таким образом все вращение цилиндра пропорционально пределу суммы $\Sigma\Delta s\,(\sin V + \varepsilon)$, т. е. пропорционально интегралу $\int \sin V\,ds$. Поэтому нужно только измерить это вращение и мы получим искомую площадь.

107. Интегрирование рядов. Пусть будет $f_1, f_2, \ldots, f_n$ последовательность непрерывных функций, *равномерно* стремящаяся к $f(x)$ в интервале (a, b). Мы имеем (§ 29)

$$f(x) = f_n(x) + \delta_n(x), \tag{17}$$

где абсолютная величина $\delta_n(x)$ остается меньше произвольно выбранного положительного числа ε во всем интервале (a, b), если только индекс n превосходит или, по меньшей мере, равен целому числу N, значение которого зависит от числа ε. Из формулы (17) мы находим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx + \int_a^b \delta_n(x)\,dx. \tag{18}$$

Но интеграл $\int_a^b \delta_n(x)\,dx$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon\,|b-a|$, если только $n \geqslant N$. Следовательно, этот интеграл стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, и мы имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b \left[\lim_{n=\infty} f_n(x)\right] dx = \lim_{n=\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]; \tag{19}$$

таким образом мы можем переместить знак интеграла и знак lim *.

* С бóльшей общностью, если интегрируемые функции $f_n(x)$, ограниченные в своей совокупности, т. е. для любого x и n, имеют интегрируемый предел $f(x)$, то интеграл от $f_n(x)$ имеет пределом интеграл от $f(x)$ (Lebesgue, Leçons sur l'intégration, etc., стр. 114). Частный случай этой теоремы, когда f и f_n непрерывны, был уже доказан ранее Осгудом (Osgood) („*American Journal of Mathematics*“, 1897).

Если функция $f_n(x)$ неравномерно стремится к $f(x)$, то равенство (19) не всегда справедливо. Возьмем, например,

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Мы имеем здесь $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} [nxe^{-nx^2}] = 0$; левая часть формулы (19) равна нулю, между тем, как правая имеет значение

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx\right) = \lim_{n=\infty}\left(-\frac{e^{-nx^2}}{2}\right)_0^1 = \lim\left(\frac{1-e^{-n}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Применим предшествующую теорему к сумме ряда с непрерывными членами, равномерно сходящегося в интервале (a, b):

$$f(x) = u_0(x) + \ldots + u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots; \tag{20}$$

мы имеем:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x)$ есть сумма $n+1$ первых членов, а $R_n(x)$ — сумма ряда, начиная с u_{n+1}. Утверждение, что ряд равномерно сходится в интервале (a, b), эквивалентно утверждению, что $S_n(x)$ равномерно стремится к $f(x)$ в этом интервале. Так как S_n есть также непрерывная функция, то мы, следовательно, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\left[\int_a^b u_0(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx\right], \tag{21}$$

равенство, выражающее, что ряд, общий член которого есть $\int_a^b u_n\,dx$, сходится и имеет суммой $\int_a^b f(x)\,dx$. Этот результат выражают кратко, говоря, что *равномерно сходящийся ряд с непрерывными членами можно интегрировать почленно.*

Точно так же ряд можно диференцировать почленно, *если только ряд из производных сходится равномерно.*

Пусть

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

ряд, сходящийся в интервале (a, b); допустим, что ряд, составленный из производных, равномерно сходится в том же интервале, и обозначим через $\varphi(x)$ сумму этого нового ряда:

$$\varphi(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots$$

Интегрируя почленно между пределами x_0 и x, заключенными между a и b, находим:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = [u_0(x) - u_0(x_0)] + [u_1(x) - u_1(x_0)] + \ldots,$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = f(x) - f(x_0), \tag{22}$$

соотношение, показывающее, что $\varphi(x)$ есть производная функции $f(x)$.

В этом доказательстве предполагается, что производные $\frac{du_i}{dx}$ суть функции непрерывные, — предположение, бесполезное при первом доказательстве * (§ 30).

Примеры. 1. Интеграл $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ не может быть выражен посредством конечного числа элементарных функций. Представим его в следующем виде:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \ln x + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx.$$

Для последнего интеграла можно найти разложение, применимое при всяком значении переменного x. В самом деле, мы имеем:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

Как бы велико ни было R, последний ряд — равномерно сходящийся в промежутке от $-R$ до $+R$, так как абсолютные значения его членов меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1 + \frac{R}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{R^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots$$

---

* Теорему § 96, относящуюся к диференцированию под знаком интеграла, можно также вывести из формулы (51) того же параграфа. Предположим, что функции $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывны при $x \geqslant a$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, что оба интеграла

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx \quad \text{и} \quad \Phi(\alpha) = \int_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$$

имеют смысл и, наконец, что последний равномерно сходится в интервале (α_0, α_1). Если α заключено между α_0 и α_1, то мы имеем, на основании формулы (51),

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} du \int_a^{+\infty} f'_u(x, u)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f'_u(x, u)\,du;$$

это соотношение может быть написано еще следующим образом:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Phi(u)\,du = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x, \alpha_0)\,dx = F(\alpha) - F(\alpha_0),$$

откуда мы выводим равенство:

$$F'(\alpha) = \Phi(\alpha).$$

Отсюда следует, что ряд, полученный интегрированием:

$$F(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n}\,\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots$$

— сходящийся при всяком x и представляет функцию, производная которой равна $\frac{e^x-1}{x}$.

2. Периметр эллипса, большая ось которого равна $2a$, а эксцентриситет e, равен определенному интегралу (§ 102):

$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Так как произведение $e^2\sin^2\varphi$ заключается между 0 и $e^2<1$, то корень $\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ равен сумме ряда, получающегося по формуле бинома:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}e^4\sin^4\varphi-\ldots$$

$$\ldots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}e^{2n}\sin^{2n}\varphi-\ldots$$

Ряд в правой части — равномерно сходящийся, так как по абсолютным значениям его члены меньше членов ряда, получающегося из данного ряда при $\sin\varphi=1$. Следовательно, мы можем интегрировать полученный ряд почленно и, замечая, что (§ 103)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2(2n-1)\,e^{2n}-\ldots\right\}.$$

Если эксцентриситет e очень мал, то достаточно взять в правой части небольшое число членов, чтобы получить значение интеграла с большим приближением.

Точно так же можно разложить в ряд интеграл

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

каков бы ни был верхний предел φ. Мы приведем здесь еще формулу:

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{4}e^4+\frac{9}{64}e^2+\ldots+\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2e^{2n}+\ldots\right\}$$

дающую разложение лежандрова интеграла первого вида.

III. РАЗНЫЕ МЕТОДЫ.

108. Приложение формул диференцирования и интегрирования под знаком интеграла. Формулы § 94 и 95 часто позволяют нам находить значения некоторых определенных интегралов, которые мы связываем при этом с другими, известными нам, определенными интегралами. Мы имеем, например, если a положительно:

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}};$$

применяя формулу (42) (стр. 204) $n-1$ раз подряд, мы находим отсюда:

$$(-1)^{n-1} 1\cdot 2 \ldots (n-1) \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right).$$

В этом примере мы могли бы получить значение определенного интеграла непосредственно, вычисляя сначала неопределенный интеграл. В следующем примере это уже не будет так.

Ниже (гл. VI, § 128) будет выведена формула:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

полагая $x = y\sqrt{a}$, где a положительно, находим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{1}{2}}; \tag{23}$$

нетрудно убедиться в том, что все интегралы, которые мы выводим из этого последовательными диференцированиями по параметру a, сходятся равномерно, если только a остается больше постоянного числа $k > 0$. Из предыдущей формулы мы выводим, следовательно, значения целого ряда интегралов:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} y^2 e^{-ay^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2} a^{-\frac{3}{2}}, \\
&\int_0^{+\infty} y^4 e^{-ay^2} dy = \frac{1\cdot 3}{2^3} \sqrt{\pi}\, a^{-\frac{5}{2}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int_0^{+\infty} y^{2n} e^{-ay^2} dy = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}\, a^{-\frac{2n+1}{2}},
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и комбинируя их, мы можем вывести бесконечное множество других. Мы имеем, например:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy\left[1-\frac{(2\beta y)^2}{1\cdot 2}+\ldots+(-1)^n\frac{(2\beta y)^{2n}}{1\cdot 2\ldots 2n}+\ldots\right]=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^2}{1\cdot 2}dy+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^{2n}}{1\cdot 2\ldots 2n}dy+\ldots$$

Все эти интегралы только что были нами вычислены, и мы имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}-\frac{(2\beta)^2}{1\cdot 2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha}{2}^{-\frac{3}{2}}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{(2\beta)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}+\ldots,$$

или, по приведении:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}. \tag{25}$$

В других случаях вычисляют сначала производную по параметру от того интеграла, который желают найти. Пусть, например, дан интеграл

$$I=F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$$

По формуле диференцирования под знаком интеграла находим:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}+\int_0^{\alpha}\frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}.$$

Разлагая на простые дроби, имеем:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right),$$

и следовательно,

$$\int_0^{\alpha}\frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=-\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{Arc\,tg}\alpha.$$

Таким образом получаем:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{Arc\,tg}\alpha+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)},$$

и замечая, что при $\alpha=0$ функция I равна нулю, мы можем написать:

$$I=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}\,d\alpha+\int_0^{\alpha}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{Arc\,tg}\alpha\,d\alpha.$$

Интегрируя первый интеграл по частям, получим окончательно:

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\alpha\ln(1+\alpha^2). \tag{26}$$

Формула интегрирования под знаком интеграла позволяет также иногда вычислять некоторые интегралы.

Рассмотрим, например, функцию x^y. Эта функция непрерывна, когда x изменяется между 0 и 1, а y — между двумя положительными числами a и b. Следовательно, по общей формуле (44) (§ 95) имеем:

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx.$$

Но

$$\int_0^1 x^y\,dx=\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_0^1=\frac{1}{y+1};$$

поэтому правая часть равна:

$$\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\int_a^b x^y\,dy=\left(\frac{x^y}{\ln x}\right)_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x};$$

отсюда получаем:

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx=\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right). \tag{27}$$

Вообще пусть будут $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функции, удовлетворяющие условию $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, и пусть будут x_0, x_1, y_0, y_1 — некоторые постоянные. По формуле интегрирования под знаком интеграла имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dx,$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(x, y_1) - P(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y_1} [Q(x_1, y) - Q(x_0, y)]\, dy.$$

Из этой формулы Коши вывел значение многих определенных интегралов.

109. **Вычисление** $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx$. Вот еще пример, в котором определенный интеграл вычисляется при помощи совершенно особого приема. Интеграл

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx$$

имеет конечное значение, если $|\alpha|$ отлично от единицы. Эта функция $F(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

1. $F(-\alpha) = F(\alpha)$. В самом деле, мы имеем:

$$F(-\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx,$$

и, изменяя x на $\pi - y$, получим:

$$F(-\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos y + \alpha^2)\, dy = F(\alpha).$$

2. $F(\alpha^2) = 2F(\alpha)$. В самом деле, мы можем написать:

$$2F(\alpha) = F(\alpha) + F(-\alpha),$$

или

$$2F(\alpha) = \int_0^\pi [\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) + \ln(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)]\, dx =$$
$$= \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha^2\cos 2x + \alpha^4)\, dx.$$

Заменяя $2x$ через y, получим:

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\, dy +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\, dy;$$

полагая в последнем интеграле $y=2\pi-z$, найдем:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy=\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz,$$

и следовательно,

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)+\frac{1}{2}F(\alpha^2)=F(\alpha^2).$$

Из предыдущей формулы последовательно выводим:

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)=\frac{1}{4}F(\alpha^4)=\ldots=\frac{1}{2^n}F(\alpha^{2^n}).$$

Если $|\alpha|<1$, то при неограниченном увеличении n количество α^{2^n} стремится к нулю; вместе с тем стремится к нулю и $F(\alpha^{2^n})$, так как логарифм под знаком интеграла стремится к нулю. Следовательно, при $|\alpha|<1$ имеем:

$$F(\alpha)=0.$$

Если же $|\alpha|>1$, то, полагая $\alpha=\frac{1}{\beta}$, получим:

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-\frac{2\cos x}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2\beta\cos x+\beta^2)\,dx=\pi\ln\beta\,;$$

так как $|\beta|<1$, то остается

$$F(\alpha)=-\pi\ln\beta^2=\pi\ln\alpha^2,$$

Наконец, можно доказать (стр. 212, упр. 6), что $F(\pm1)=0$. Следовательно, функция $F(\alpha)$ непрерывна при всех значениях α.

110. Приближенное значение $\ln\Gamma(n+1)$. Существует также много других разнообразных приемов, посредством которых можно получать если не точное, то, по крайней мере, приближенное значение определенного интеграла. Мы приведем здесь один пример. По определению, имеем:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx.$$

Функция x^ne^{-x} имеет максимум при $x=n$, и ее наибольшее значение равно n^ne^{-n}. При возрастании x от 0 до n функция x^ne^{-x} возрастает от 0 до $n^ne^{-n}(n>0$ а, при дальнейшем возрастании x от n до $+\infty$, x^ne^{-x} убывает от n^ne^{-n} до Функция $n^ne^{-n}e^{-t^2}$ также возрастает от 0 до n^ne^{-n} при возрастании t от $-\infty$ до 0 и затем убывает от n^ne^{-n} до 0 при дальнейшем возрастании t от 0 до $+\infty$. Следовательно, сделав замену переменного

$$x^ne^{-x}=n^ne^{-n}e^{-t^2},\tag{28}$$

мы можем установить соответствие между значениями переменных x и t так, чтобы, при возрастании t от $-\infty$ до $+\infty$, x возрастало от 0 до $+\infty$.

Нам нужно еще вычислить $\frac{dx}{dt}$. Взяв логарифмические производные от обеих частей формулы (28), получим:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

С другой стороны, из той же формулы (42) имеем:

$$t^2=x-n-n\ln\left(\frac{x}{n}\right).$$

Положим для большей простоты вычислений $x=n+z$ и разложим $\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$ по формуле Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами; мы получим:

$$t^2=z-n\left[\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2\left(1+\theta\frac{z}{n}\right)^2}\right]=\frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2},$$

причем θ заключается между нулем и единицею. Отсюда найдем последовательно:

$$\frac{n}{z}+\theta=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\frac{2tx}{x-n}=2t\left(\frac{n}{z}+1\right)=2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)t\right];$$

следовательно, после замены переменного получим:

$$\Gamma(n+1)=2n^ne^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt+2n^ne^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}(1-\theta)\,t\,dt.$$

Первый интеграл равен:

$$\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Второй интеграл нельзя вычислить точно, так как θ неизвестно, но можно найти границу этого интеграла. В самом деле, все его элементы отрицательны между $-\infty$ и 0 и положительны между 0 и $+\infty$. Сверх того, по абсолютному значению каждый из интегралов $\int_{-\infty}^{0}$, $\int_{0}^{+\infty}$ меньше интеграла $\int_{0}^{+\infty}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$. Следовательно, мы можем написать:

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2n}\,n^ne^{-n}\left(\sqrt{\pi}+\frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right),\tag{29}$$

где ω заключается между -1 и $+1$.

Когда n очень велико, $\frac{\omega}{\sqrt{2n}}$ очень мало, и если мы примем за приближенное значение $\Gamma(n+1)$ выражение

$$\Gamma(n+1)=n^ne^{-n}\sqrt{2n\pi},$$

то относительная погрешность будет весьма мала, хотя абсолютная погрешность может быть и очень велика. Взяв логарифмы от обеих частей формулы (29), получим:

$$\ln\Gamma(n+1)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\varepsilon,\tag{30}$$

где, при очень большом n, ε очень мало. Пренебрегая ε, мы будем иметь так называемое *асимптотическое значение* $\ln\Gamma(n+1)$. Эта формула интересна потому, что она указывает порядок величины факториала.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Вычислить неопределенные интегралы от следующих функций:

$$\frac{1}{(x^4+1)^2},\quad \frac{1}{x(x^3+1)^3},\quad \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3},\quad \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}},\quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}},\quad \frac{x}{\cos^2 x},$$

$$xe^x\cos x,\quad \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}},\quad x^{\frac{p}{q}}\operatorname{arc\,tg} x.$$

2. Найти площадь петли декартова листа

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

3. Вычислить интеграл $\int y\,dx$, где x и y связаны одним из соотношений:

$$(x^2-a^2)^2-ay^2(2y+3a)=0,\quad y^2(a-x)=x^3,$$
$$y(x^2+y^2)=a(y^2-x^2).$$

4. Вывести формулы:

$$\int \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C,$$
$$\int \sin^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\sin nx}{n}+C,$$
$$\int \cos^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}+C.$$
$$\int \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{\cos^n x\cos nx}{n}+C.$$

[Эйлер.]

5. Вычислить псевдоэллиптические интегралы:

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},\quad \int\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

6. Привести к эллиптическим интегралам интегралы:

$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}},$$
$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^8)+bx^2(1+x^4)+cx^4}},$$

где $R(x)$ — рациональная функция.

7. Пусть будут a, b, c, d корни уравнения четвертой степени $P(x)=0$ Существуют три инволюционных соотношения (§ 102):

$$x'=-\frac{M_ix''+N_i}{L_ix''+M}\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

перемещающих эти корни попарно. Если рациональная функция $f(x)$ такова, что мы имеем тождественно:

$$f(x)+\sum_{i=1}^{3} f\left(-\frac{M_i x+N_i}{L_i x+M_i}\right)=0,$$

то интеграл $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ — псевдоэллиптический (см. *Bulletin de la Société mathématique*, т. XV, стр. 106).

8. Спрямление кривых $y=Ax^{\mu}$ приводит к интегралам от диференциальных биномов. Исследовать случаи интегрируемости.

9. Полагая $a>1$, имеем:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Вывести отсюда определенные интегралы:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\pi.$$

10. Предполагая $AC-B^2>0$, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\pi\,\frac{A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Следует применить формулу приведения § 37.

11. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$.

12. Вывести формулы:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\right),\quad \alpha\beta>0,$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)\,dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}.$$

13. Обозначая через m и n два целых положительных числа $(m<n)$, имеем:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Здесь следует воспользоваться разложением на элементарные дроби.

14. Вывести из предыдущей формулы соотношение:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}\qquad(0<a<1).$$

15. Полагая $I_{p,q}=\int t^q(t+1)^p\,dt$, имеем формулы приведения:

$$(p+q+1)I_{p,q}=t^{q+1}(t+1)^p+pI_{p-1,q},$$
$$(p-1)I_{-p,q}=t^{q+1}(t+1)^{1-p}-(2+q-p)I_{-p+1,q},$$

и две аналогичных формулы для понижения показателя q.

16. Вывести формулы приведения для интегралов:

$$I_n=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},\quad Z_m=\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

17. Вывести формулу приведения для определенных интегралов $\int\limits_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Вывести отсюда для определенного интеграла $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ формулу, аналогичную формуле Уэллиса.

18. Имеет ли определенный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$$

конечное значение?

19. Доказать, что площадь эллиптического сектора, заключающегося между фокальною осью и радиусом-вектором, выходящим из фокуса, имеет выражение:

$$\mathfrak{A}=\frac{p^2}{2}\int\limits_0^{\omega}\frac{d\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

где $p=\frac{b^2}{a}$ обозначает параметр эллипса и e — эксцентриситет. Полагая, по общему способу, $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=t$, $t=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,u$, получим:

$$\mathfrak{A}=ab\left(\operatorname{Arc\,tg} u-e\,\frac{u}{1+u^2}\right).$$

Показать, что это выражение может быть также представлено в виде:

$$\mathfrak{A}=\frac{ab}{2}(\varphi-e\sin\varphi),$$

где φ обозначает эксцентрическую аномалию.

20. Найти такие кривые, для которых длина NT или площадь треугольника MNT были бы постоянны (см. черт. 3). Построить обе ветви кривой.

21. Пусть будет

$$A_n=\frac{x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\int\limits_0^1(1-z^2)^n\cos xz\,dz.$$

Вывести рекуррентную формулу:

$$A_{n+1}=(2n+1)A_n-x\frac{dA_n}{dx}.$$

Вывести отсюда формулы:

$$A_{2p} = U_{2p} \sin x + V_{2p} \cos x,$$
$$A_{2p+1} = U_{2p+1} \sin x + V_{2p+1} \cos x,$$

где U_{2p}, V_{2p}, U_{2p+1}, V_{2p+1} — многочлены с целыми коэфициентами, и U_{2p}, U_{2p+1} содержат только четные степени переменного x. Проверив справедливость этого закона при $n=1$, затем легко убедиться, при помощи рекуррентной формулы, что он имеет общий характер.

Воспользовавшись предыдущим выражением для A_{2p}, можно доказать несоизмеримость числа π^2. В самом деле, если бы было $\frac{\pi^2}{4} = \frac{b}{a}$, то, заменяя в A_{2p} количество x через $\frac{\pi}{2}$, мы получили бы соотношение вида:

$$H_1 = a^p \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p}}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 4p} \int_0^1 (1 - z^2)^{2p} \cos \frac{\pi z}{2}\, dz,$$

где H_1 — целое число. Но такое равенство невозможно, так как при неограниченном возрастании p правая часть стремится к нулю.

22. Доказать формулу:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

[Доказать, что $\frac{dI}{da} = -2I$.]

23. Из предыдущей формулы вывести определенный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha - \frac{k^2}{\alpha}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\pi} e^{-2k}.$$

24. Из соотношения $\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$ вывести формулу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{e^x - 1}.$$

25. Погрешность в методе квадратур Гаусса имеет выражение:

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{1\cdot 2 \ldots 2n} \cdot \frac{2}{2n+1} \left[\frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{1\cdot 2 \ldots (2n-1)}\right]^2,$$

где ξ заключается между -1 и $+1$.

[Мансион (Mansion) *Comptes rendus 1886*.]

ГЛАВА VI.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

I. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ФОРМУЛА ГРИНА.

111. Суммы S и s для функции двух переменных. Пусть будет A плоская область, ограниченная контуром Γ, который может состоять из одной замкнутой кривой C или из замкнутой кривой C и из нескольких других замкнутых кривых C', C'', ..., внутренних по отношению к C. Представим себе, что эта область A разбита на n частичных областей a_1, a_2, ..., a_n посредством вспомогательных линий. Это разбиение может быть осуществлено произвольным способом; мы предположим только, что области a_i *квадрируемы*. Пусть ω_1, ω_2, ..., ω_n — площади этих частичных областей и Ω — площадь области A. Мы имеем, очевидно, каков бы ни был способ разбиения A, соотношение $\Omega = \sum_1^n \omega_i$.

Пусть будут $f(x, y)$ — функция, ограниченная в области A (включая сюда контур Γ), M и m — верхняя и нижняя границы $f(x, y)$ в этой области; M_i и m_i — границы функции $f(x, y)$ в частичной области a_i. Рассмотрим две суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i M_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i m_i;$$

каждому подразделению области A соответствуют, таким образом, верхняя сумма S и нижняя сумма s. Все суммы S, очевидно, превосходят $m\Omega$; следовательно, они имеют нижнюю границу I. Точно так же все суммы s меньше, чем $M\Omega$; они имеют, следовательно, верхнюю границу I'. Можно было бы доказать, как выше (§ 69), что $I' \leqslant I$, что, впрочем, вытекает из следующего предложения, совершенно аналогичного предложению § 70.

Суммы S и s имеют соответственно пределами числа I и I', когда n неограниченно возрастает, и притом так, что все области a_i стремятся к нулю во всех своих измерениях.

Для краткости мы будем говорить, что конечная часть плоскости A меньше l во всех своих измерениях, если можно найти круг диаметра l, целиком вмещающий внутри себя A. Переменную часть плоскости мы будем называть *бесконечно малой* во всех ее измерениях, если можно найти круг сколь угодно малого радиуса, вмещающий внутри себя эту часть плоскости. Например, квадрат, сторона которого стремится к нулю, или эллипс, обе оси которого стремятся к нулю, бесконечно малы во всех своих измерениях. Наоборот, прямоугольник, которого одна лишь сторона стремится к нулю, или эллипс, одна только ось которого стремится к нулю, не являются бесконечно малыми во всех своих измерениях.

Покажем, например, что S имеет пределом I. Мы можем допустить, что $f(x, y)$ положительна в области A, так как всегда можно найти такое положительное постоянное C, что функция

$$\varphi(x, y) = C + f(x, y)$$

окажется положительной в A, и суммы S и S' для функций f и φ, относящиеся к одному и тому же способу разбиения, будут отличаться лишь на постоянное $C\Omega$.

Пусть ε — произвольное положительное число; так как число I есть нижняя граница сумм S, то существует такой способ разбиения области A на n частичных областей $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что соответствующая сумма S окажется меньше, чем $I + \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через L множество, состоящее из контура Γ и вспомогательных линий, которые были проведены в A для получения этого частного способа разбиения. Пусть будут: ω_i — площадь области a_i и γ_i — контур этой области. Проведем внутри области a_i замкнутый контур γ'_i, не имеющий ни одной общей точки с γ_i, но достаточно близкий к γ_i, чтобы площадь, заключенная между обоими контурами γ_i, γ'_i, была меньше $\frac{\eta}{n}$, где η — произвольное положительное число. Представим себе, что то же самое сделано для всех частичных областей $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и пусть L' — множество проведенных таким образом линий γ'_i. Эта система L' разделяет область A на две области A' и A''; A' состоит из всех областей a'_i, внутренних по отношению к линиям γ'_i, а A'' представляет собой область, оставшуюся после исключения A'. Если Ω', Ω'' обозначают площади этих двух областей, то мы имеем $\Omega = \Omega' + \Omega''$ и на основании способа, которым были выбраны линии γ'_i, разность $\Omega - \Omega'$ или Ω'' меньше η. Линии L и L' не имеют ни одной общей точки; обозначим через λ минимум расстояния точки L от точки L'.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение области A на частичные области, меньшие λ во всех измерениях, и пусть S' — соответствующая верхняя сумма. Часть S', происходящая от частичных областей, не имеющих ни одной общей точки с линией L, очевидно, меньше S. С другой стороны, частичные области, которые имеют хоть одну общую точку с линией L, находятся внутри области A'', и происходящая от них часть суммы S' меньше $M\eta$. Мы имеем, следовательно,

$$S' < S + M\eta < I + \frac{\varepsilon}{2} + M\eta;$$

если произвольное число η взято меньшим $\frac{\varepsilon}{2M}$, то мы будем иметь

$$S' < I + \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Точно так же можно было бы показать, что s имеет пределом I'. Если область A разбита на p частных областей $A_1, A_2, \ldots, A_p$, то ясно, что будут иметь место соотношения:

$$I = I_1 + \ldots + I_p, \quad I' = I'_1 + \ldots + I'_p,$$

где I_i и I'_i суть числа, определенные, как только что было сделано, и относящиеся к области A_i.

112. Двойные интегралы. Если оба числа I и I' равны между собой, то функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области A. Общий предел I сумм S и s называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$, распространенным на область A. Его обозначают *

$$I = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy;$$

часть A плоскости называется *областью интеграции.*

Непосредственно видно, как и в случае простого интеграла, что *для того чтобы функция $f(x, y)$ была интегрируема в A, необходимо и достаточно, чтобы разность $S - s$ стремилась к нулю, когда наибольшее измерение частичных областей стремится к нулю.* Отсюда вытекает, *что всякая непрерывная функция $f(x, y)$ интегрируема.* В самом деле, предположим, что мы взяли положительное число η столь малым, что колебание функции меньше ε во всякой части A, все измерения которой меньше η. Если все частичные области $a_1, a_2, \ldots, a_n$ меньше η во всех своих измерениях, то каждая из разностей $M_i - m_i$ будет меньше ε, и разность $S - s$ будет меньше $\varepsilon\Omega$.

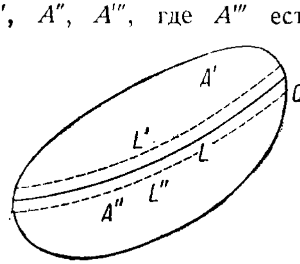
Доказывают, как и выше (§ 71), что сумма или произведение произвольного числа интегрируемых функций есть также интегрируемая функция. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области A, то она интегрируема во всякой области A', внутренней по отношению к A; если область A разбита на несколько частичных областей $A_1, A_2, \ldots, A_p$, то двойной интеграл, распространенный на всю область A, равен сумме двойных интегралов, распространенных на области $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда функция $f(x, y)$, ограниченная в области A, имеет в этой области бесконечно много точек разрыва; мы предположим при этом, что все точки разрыва можно заключить в некоторой области δ, площадь которой меньше любого наперед заданного положительного числа. *Такая функция интегрируема в A.* В самом деле, условие интегрируемости функции $f(x, y)$ может быть выражено так: *чтобы функция была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы любому положительному числу ε можно было поставить в соответствие такое разбиение области A на частичные области, что соответствующая этому разбиению разность $S - s$ будет меньше* ε. Это непосредственно следует из того, что разность $S - s$, по меньшей мере, равна $I - I'$.

---

* Иначе обозначают его $\iint\limits_A f(x, y)\, d\omega$, где $d\omega$ есть *элемент площади*; аналогичное обозначение употребляют для кратных интегралов.

Допустим для определенности, что функция $f(x, y)$, ограниченная в области A, непрерывна во всей этой области, ограниченной замкнутою кривою C, за исключением точек линии L, разделяющей область B на две области A' и A'' (черт. 16). В области A' $f(x, y)$ совпадает с непрерывной функцией $f_1(x, y)$, а в области A'' — с непрерывной функцией $f_2(x, y)$. Относительно значений функции $f(x, y)$ вдоль линии L мы не делаем никакого предположения, за исключением того, что они остаются ограничены. Проведем в A с обеих сторон линии L две бесконечно близкие линии L', L'' так, чтобы площадь, заключенная между L' и L'', была меньше $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, где ε — заданное положительное число. Эти две линии L^1, L'' разделяют A на три области: A', A'', A''', где A''' есть область, вмещающая L. Представим себе, что A', A'', A''' разбиты на меньшие области; часть $S - s$, происходящая от A''', меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, и так как $f(x, y)$ непрерывна в областях A' и A'', часть $S - s$, происходящая от A' и A'', будет также меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при подходящем выборе способа разбиения. Мы будем, следовательно, иметь $S - s < \varepsilon$; так как ε есть произвольное положительное число, то, следовательно, $f(x, y)$ интегрируема в A. Ясно, что этот вывод обладает общностью.



Черт. 16.

Двойной интеграл по области A равен сумме двойных интегралов по областям A, A'', A'''. Если линии L', L'' безгранично приближаются к L, то двойной интеграл по A''' стремится к нулю; двойной интеграл по A есть, следовательно, предел суммы интегралов по областям A' и A'' и не зависит от значений функции вдоль линии L. Более общим образом, если функция $f(x, y)$ интегрируема в области A, то можно, не изменяя значения интеграла, произвольным образом изменять значения функции в бесконечном множестве точек, если только она остается ограниченной и если все эти точки могут быть заключены в области δ (связной или нет), площадь которой меньше любого заданного положительного числа. С этим замечанием надлежит сопоставить следующее: если мы вычисляем I как предел суммы S, то мы можем пренебречь в этой сумме теми ее частями, которые происходят от произвольного числа частичных областей, если только сумма площадей этих областей стремится к нулю.

Определение двойного интеграла может быть обобщено. Пусть (ξ_i, η_i) — какая-нибудь точка внутри или на контуре части a_i; ясно, что сумма $\sum f(\xi_i, \eta_i)\omega_i$ содержится между обеими суммами S и s; она также, следовательно, имеет пределом двойной интеграл, как бы ни была выбрана точка (ξ_i, η_i).

Первая теорема о среднем без труда распространяется на двойные интегралы. Пусть $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — две интегрируемые функции, из которых одна, $\varphi(x, y)$, сохраняет постоянный знак в A; мы предположим, например, $\varphi(x, y) > 0$.

Если M и m — границы $f(x, y)$ в области A, то ясно, что мы имеем:

$$M\varphi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i > f(\xi_i, \eta_i)\,\varphi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i > m\varphi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i;$$

складывая все эти неравенства и переходя к пределу, находим:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_A \varphi(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где μ заключено между M и m. Если функция $f(x, y)$ непрерывна, то она принимает значение μ в точке (ξ, η), *внутренней* по отношению к контуру C, и мы можем написать:

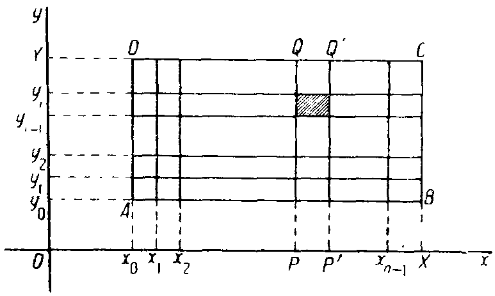
$$\iint\limits_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta) \iint\limits_A \varphi(x, y)\,dx\,dy; \tag{2}$$

это и есть формула среднего значения для двойных интегралов. Если, например, $\varphi(x, y) = 1$, то интеграл $\iint dx\,dy$, распространенный на часть плоскости A, очевидно, равен площади Ω этой части плоскости, и формула (1) принимает вид:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \Omega f(\xi, \eta). \tag{3}$$

113. Вычисление двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух простых интегралов. Возьмем сначала случай, когда область интегрирования есть прямоугольник R, ограниченный прямыми $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, где $x_0 < X$, $y_0 < Y$.

Пусть $I(x)$ — значение двойного интеграла $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, распространенного на часть этого прямоугольника, расположенную слева от прямой PQ, параллельной оси Oy и проходящей от нее на расстоянии x, где x заключено между x_0 и X. Этот интеграл $I(x)$ есть, очевидно, непрерывная функция x, обращающаяся в нуль при $x = x_0$; чтобы найти его производную $I'(x)$, достаточно вычислить главную часть приращения $I(x+h) - I(x)$. Эта разность равна значению двойного интеграла, распространенного на бесконечно узкую полосу прямоугольника, заключенную между параллелями PQ, $P'Q'$ к оси Oy, расстояния которых от этой оси суть x и $x+h$. Чтобы иметь его выражение, представим себе, что эта полоса разделена на малые прямоугольники параллелями к оси x, $y = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где число y_i возрастает вместе с индексом.



Черт. 17.

Применяя формулу среднего значения к каждому из этих малых прямоугольников, мы имеем:

$$I(x+h) - I(x) = h\left[(y_1 - y_0)\,f(\xi_1, \eta_1) + \ldots + (y_i - y_{i-1})\,f(\xi_i, \eta_i) + \ldots\right], \tag{4}$$

где (ξ_i, η_i) суть координаты точки прямоугольника, образованного прямыми PQ, $P'Q'$ и параллелями $y=y_{i-1}$, $y=y_i$ к оси Ox. С другой стороны, мы имеем на основании теоремы о среднем для простого интеграла:

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x, y)\, dy = (y_i - y_{i-1})\, f(x, y_i'),\quad y_{i-1} < y_i' < y_i\,.$$

Если мы положим $f(\xi_i, \eta_i) - f(x, y_i') = \varepsilon_i$, то разность

$$I(x+h) - I(x)$$

может быть написана так:

$$h\left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy + \varepsilon_1 (y_1 - y_0) + \ldots + \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) + \ldots\right].$$

Обе точки (ξ_i, η_i) и (x, y_i') принадлежат одному и тому же частичному прямоугольнику; так как $f(x, y)$ равномерно непрерывна, то можно взять число h и все разности $y_i - y_{i-1}$ достаточно малыми для того, чтобы все абсолютные величины $|\varepsilon_i|$ были меньше произвольно выбранного положительного числа ε, и мы имеем:

$$I(x+h) - I(x) = h\left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy + \varepsilon'\right], \tag{5}$$

где абсолютное значение ε' меньше $\varepsilon(Y - y_0)$. Отношение

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h}$$

имеет, следовательно, пределом $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$, когда h стремится к нулю, и таким образом, интеграл $I(x)$ равен $\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(a, y)\, dy$. В частности, двойной интеграл, распространенный на весь прямоугольник, выражается формулой:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy; \tag{6}$$

чтобы найти значение двойного интеграла, *нужно сначала проинтегрировать $f(x, y)$ между пределами y_0 и Y, считая x постоянным, а y — переменным; результат представляет собой функцию одного лишь переменного x, которую нужно снова интегрировать между пределами x_0 и X.*

Произведя действие в обратном порядке, т. е. вычисляя сначала часть суммы S, происходящую от ряда прямоугольников, заключающихся между двумя прямыми, параллельными оси Ox, мы нашли бы таким же образом:

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx.$$

Из этих двух формул следует, что

$$\int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx.$$

Теорема, выражаемая этою формулою, носит название *теоремы интегрирования под знаком интеграла*. При доказательстве существенно предполагается, что пределы x_0, X, y_0, Y постоянны, и функция $f(x, y)$ — непрерывна в области интегрирования.

Пример. Пусть будет $z = \frac{xy}{a}$. По общей формуле имеем:

$$\iint\limits_R \frac{xy}{a}\,dx\,dy = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} \frac{xy}{a}\,dy = \int\limits_{x_0}^{X} \frac{x}{2a}(Y^2 - y_0^2)\,dx = \frac{1}{4a}(X^2 - x_0^2)(Y^2 - y_0^2).$$

Вообще, если функция $f(x, y)$ есть произведение функции переменного x на функцию переменного y, то имеем:

$$\iint\limits_R \varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \cdot \int\limits_{y_0}^{Y} \psi(y)\,dy,$$

причем оба интеграла в правой части совершенно не зависят один от другого.

Из этого замечания Франклин (Franklin) * вывел весьма простое доказательство одной интересной теоремы Чебышева. Пусть будут $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функции, непрерывные в промежутке (a, b), где $a < b$. Двойной интеграл

$$\iint [\varphi(x) - \varphi(y)]\,[\psi(x) - \psi(y)]\,dx\,dy,$$

распространенный на квадрат, ограниченный прямыми $x = a$, $x = b$, $y = a$, $y = b$ равен разности

$$2(b - a)\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx - 2\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b \psi(x)\,dx.$$

Но все элементы предыдущего двойного интеграла сохраняют постоянный знак, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ всюду в промежутке (a, b) одновременно возрастают или убывают; точно так же все элементы этого двойного интеграла сохраняют постоянный знак и в том случае, если одна из функций всюду возрастает, а другая — убывает. В первом случае разности $\varphi(x) - \varphi(y)$ и $\psi(x) - \psi(y)$ имеют всегда одинаковые знаки, а во втором — разные.

Следовательно, если всюду в промежутке (a, b) функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ или обе возрастают, или обе убывают, то мы имеем:

$$(b - a)\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx > \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b \psi(x)\,dx.$$

---

* *American Journal of Mathematics*, т. VII, стр. 77.

Если же одна из них возрастает, а другая убывает, то

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,dx\cdot\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

В случае $\varphi(x)=\psi(x)$ двойной интеграл имеет вполне определенный знак, так как подинтегральная функция обращается в точный квадрат. В этом случае мы имеем при всяком виде функции $\varphi(x)$:

$$(b-a)\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx \geq \left[\int_a^b \varphi(x)\,dx\right]^2,$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, если $\varphi(x)$ равно постоянному.

Отсюда можно вывести решение одной интересной задачи вариационного исчисления. Пусть будут P и Q две данные точки плоскости с координатами (a, A) и (b, B). Пусть будет, далее, $y=f(x)$ уравнение линии, соединяющей эти две точки, причем предполагается, что функция $f(x)$ вместе со своею производною $f'(x)$ непрерывна в промежутке (a, b). Требуется найти такую кривую $y=f(x)$, для которой интеграл $\int_a^b y'^2\,dx$ был бы минимум. Заменяя в предыдущем неравенстве $\varphi(x)$ через y' и замечая, что, по предположению, $f(a)=A$ и $f(b)=B$, имеем:

$$(b-a)\int_a^b y'^2\,dx \geq (B-A)^2.$$

Следовательно, наименьшее значение интеграла равно $\dfrac{(B-A)^2}{b-a}$, и интеграл действительно достигает этого значения, если y' равно постоянному, т. е. если линия, соединяющая рассматриваемые точки, есть прямая линия PQ.

114. Случай произвольной области. Прежде чем перейти к случаю произвольной области интегрирования, мы сначала обобщим формулу (6), предполагая, что функция $f(x, y)$, оставаясь ограниченной, имеет в прямоугольнике $ABCD$ одну или несколько линий разрыва. Предположим для определенности, что функция $f(x, y)$ разрывна вдоль линии L (или, по крайней мере, в некоторых частях этой линии), соединяющей точку на AD с точкою на BC и представляемой уравнением $y=\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (x_0, X). Эта линия L разделяет прямоугольник R на две части: часть R_1, расположенную ниже L, для которой мы имеем $f(x, y)=f_1(x, y)$, причем $f_1(x, y)$ непрерывна в R_1, и часть R_2, расположенную выше L, для которой

$$f(x, y)=f_2(x, y),$$

причем $f_2(x, y)$ непрерывна в R_2. Как уже было замечено выше (§ 112), $f(x, y)$ есть функция интегрируемая.

Чтобы найти выражение этого двойного интеграла, достаточно несколько изменить рассуждение предшествующего параграфа. Интеграл $I(x)$, определенный, как это только что было сделано, есть сумма двух двойных интегралов $I_1(x)$, $I_2(x)$, распространенных на части области налево от параллели PQ к Oy, расположенные соответственно ниже и выше линии L. Чтобы вычислить $I_1'(x)$, обозначим через ζ наименьшую ординату функции $\varphi(x)$ в интервале $(x, x+h)$; мы можем разложить $I_1(x+h)-I_1(x)$ на два интеграла:

$$I_1(x+h)-I_1(x)=J+j,$$

где J есть двойной интеграл, распространенный на часть полосы R, расположенную ниже прямой $y=\zeta$, а j — интеграл, распространенный на часть этой полосы вверх от прямой $y=\zeta$. Доказывают, как и в предыдущем параграфе, что

$$J=h\left[\int_{0}^{\zeta} f_1(x, y)\,dy+\eta_1\right]=h\left[\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\int_{\varphi(x)}^{\zeta} f_1(x, y)\,dy+\eta_1\right],$$

и следовательно,

$$J=h\left[\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x, y)\,dy+\eta_2\right],$$

где η_1 и η_2 бесконечно малы вместе с h. С другой стороны, мы имеем:

$$|j|<Mh\delta,$$

где M есть верхний предел $|f|$, а δ — колебание $\varphi(x)$ в интервале $(x, x+h)$. Так как функция φ непрерывна, то отношение $\frac{j}{h}$ стремится к нулю вместе с h, и мы имеем:

$$J_1'(x)=\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x, y)\,dy.$$

Производная $J_2'(x)$ вычисляется таким же образом, и, полагая

$$\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy=\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x, y)\,dy+\int_{\varphi(x)}^{Y} f_2(x, y)\,dy,$$

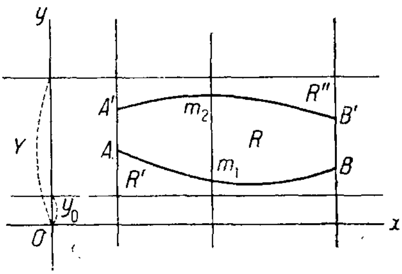
мы видим, что значение двойного интеграла

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$$

дается формулой (6). Ясно, что этот метод обладает общностью, и вывод остается тем же, каково бы ни было число линий разрывов, подобных L, в прямоугольнике $ABCD$, при условии, что функция $f(x, y)$ остается ограниченной.

Рассмотрим теперь контур, встречаемый параллелью к Oy не более как в двух точках. Мы всегда можем предположить, что он образован двумя прямолинейными отрезками AA', BB', принадлежащими параллелям $x=a$, $x=b$ к оси Oy $(a<b)$ и двумя дугами кривых Am_1B, $A'm_2B'$, представляемыми уравнениями $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, $y_2 \geqslant y_1$, где функции φ_1 и φ_2 непрерывны между a и b, Может, впрочем, случиться, что точки A и A' сливаются также, как B и B'; это имеет место, например, в том случае, если рассматриваемый контур есть

замкнутая кривая, аналогичная эллипсу. Пусть $f(x, y)$ — функция непрерывная в области R, ограниченной этим контуром, и на самом контуре. Чтобы вычислить двойной интеграл, проведем две параллели $y=y_0$, $y=Y$ к оси Ox так, чтобы область R была целиком расположена между этими двумя параллелями; пусть будет T прямоугольник, ограниченный четырьмя прямыми $x=a$, $x=b$, $y=y_0$, $y=Y$ (черт. 18).



Черт. 18.

Кривые Am_1B, $A'm_2b'$ разделяют прямоугольник T на три области: область R, область R' ниже Am_1B и область R'' выше $A'm_2B'$. Пусть $F(x, y)$ — вспомогательная функция, определенная в T следующим образом: 1) $F(x, y)=f(x, y)$ в R и на контуре R; 2) $F(x, y)=0$ в R' и R''. Очевидно, что

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_T F(x, y)\,dx\,dy.$$

Но формула (6) применима к функции $F(x, y)$, имеющей линии разрывов Am_1B и $A'm_2B'$, и мы находим:

$$\iint\limits_T F(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_0}^{Y} F(x, y)\,dy.$$

С другой стороны, на основании самого определения функции $F(x, y)$, мы имеем:

$$\int\limits_{y_0}^{Y} F(x, y)\,dy=\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy,$$

и следовательно,

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy. \tag{7}$$

Первую интеграцию надлежит выполнить, рассматривая x как постоянную, но пределы y_1 и y_2 сами суть функции x и не являются постоянными.

Пример. Вычислим двойной интеграл от функции $\frac{xy}{a}$, взятый внутри четверти круга, ограниченной осями координат и окружностью:

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

Пределами для x служат 0 и R, а при x постоянном y может изменяться от 0 до $\sqrt{R^2-x^2}$. Следовательно, двойной интеграл имеет выражение:

$$\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{xy}{a}\,dy=\int\limits_0^R\frac{x}{2a}\left[y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\int\limits_0^R\frac{x(R^2-x^2)}{2a}\,dx.$$

Последний интеграл легко получить; он равен $\frac{R^4}{8a}$.

Если область интегрирования ограничена контуром произвольного вида, то мы разобьем эту область на несколько таких частей, чтобы прямая, параллельная оси Oy, пересекала контур каждой из этих частей не более чем в двух точках. Мы могли бы также начать и с интегрирования по переменному x, разбивая область на такие части, чтобы прямая, параллельная оси Ox, пересекала контур каждой из этих частей не более чем в двух точках. Возьмем, например, замкнутую выпуклую кривую, расположенную внутри прямоугольника $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, стороны которого проходят через те четыре точки A, B, C, D кривой, в которых x и y имеют наибольшие и наименьшие значения *. Пусть будут $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$ — уравнения дуг ACB, ADB; пусть будут также $x_1=\psi_1(y)$, $x_2=\psi_2(y)$ — уравнения дуг CAD, CBD, причем $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны от a до b, а $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ непрерывны при изменении y от c до d. Вычисляя двумя различными способами двойной интеграл от функции $f(x, y)$, непрерывной внутри этого контура, и приравнивая между собою оба получающиеся выражения, найдем:

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx; \tag{8}$$

мы видим, что в обоих интегралах пределы совершенно различны. Всякий выпуклый контур дает формулу этого рода. Так, взяв за область интегрирования треугольник, ограниченный прямыми $y=0$, $x=a$, $y=x$, мы придем к формуле, данной Лежен-Дирихле (Lejeune-Dirichlet).

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

115. Аналогия с простыми интегралами. Интеграл

$$\int_a^x f(t)\, dt,$$

рассматриваемый как функция от x, имеет своею производною функцию $f(x)$. Аналогичная теорема существует для двойных интегралов Пусть будет $f(x, y)$ функция, непрерывная внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=a$, $x=A$, $y=b$, $y=B$ $(a<A,\ b<B)$. Двойной интеграл от функции $f(x, y)$, распространенный на площадь прямоугольника, ограниченного прямыми $x=a$, $x=X$, $y=b$, $y=Y$ $(a<X<A,\ b<Y<B)$ есть функция координат X, Y переменной вершины; эту функцию мы можем представить в виде:

$$F(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dx\, dy.$$

Пусть будет

$$\Phi(x) = \int_b^Y f(x, y)\, dy.$$

* Предлагаем читателю сделать чертеж.

Первое диференцирование $F(X, Y)$ по X дает:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \Phi(X) = \int_b^Y f(X, y)\,dy;$$

после вторичного диференцирования по Y будем иметь:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = f(X, Y). \tag{9}$$

Самый общий вид функции $u(X, Y)$, удовлетворяющей предыдущему условию (9), очевидно, получится, если мы прибавим к функции $F(X, Y)$ такую функцию z, вторая производная которой $\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y}$ была бы равна нулю. Следовательно, функция $u(X, Y)$ будет иметь вид (§ 60):

$$u(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy + \varphi(X) + \psi(Y), \tag{10}$$

где $\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ — произвольные функции. Эти функции $\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ можно всегда выбрать таким образом, чтобы функция $u(X, Y)$ обращалась при $X = a$ в данную функцию $V(Y)$ от Y, а при $Y = b$ — в данную функцию $U(X)$ от X, причем две последних функции должны быть связаны соотношением $U(a) = V(b)$. В самом деле, полагая в соотношении (10) последовательно $X = a$, $Y = b$, получим два условия:

$$V(Y) = \varphi(a) + \psi(Y), \quad U(X) = \varphi(X) + \psi(b);$$

отсюда получаем:

$$\psi(Y) = V(Y) - \varphi(a), \quad \psi(b) = V(b) - \varphi(a), \quad \varphi(X) = U(X) - V(b) + \varphi(a),$$

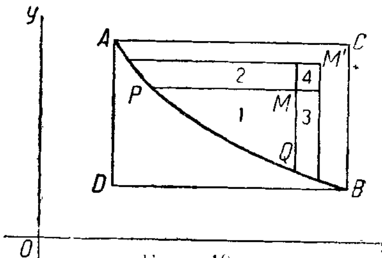
и формула (10) обращается в

$$u(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy + U(X) + V(Y) - V(b). \tag{11}$$

Обратно, если мы найдем каким-нибудь способом функцию $u(X, Y)$, удовлетворяющую соотношению (9), то, на основании предыдущего, значение двойного интеграла будет равно:

$$\int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy = u(X, Y) - u(X, b) - u(a, Y) + u(a, b). \tag{12}$$

Сделаем теперь другое предположение, заменяя две стороны прямоугольника дугою AB (черт. 19) некоторой кривой, ординаты которой монотонно убывают при возрастании абсциссы.



Черт. 19.

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция внутри прямоугольника $ACBD$. Для любой точки M этого прямоугольника параллели к осям встречают дугу AB в двух точках P и Q соответственно, и двойной интеграл

$$F(X, Y) = \iint_{PMQ} f(x, y)\,dx\,dy,$$

распространенный на площадь криволинейного треугольника PMQ, есть непрерывная функция в этом прямоугольнике

Записав этот двойной интеграл в форме (7), легко вывести, что он удовлетворяет также соотношению (9). В этом можно убедиться и непосредственно следующим образом. Придадим X и Y приращения h и k; мы перейдем, таким образом, из точки M в соседнюю точку M'. Обозначим через (1), (2), (3), (4) двойные интегралы, распространенные на области, отмеченные на чертеже теми же цифрами. Будем иметь:

$$F(X+h, Y+k) = (1)+(2)+(3)+(4),$$
$$F(X+h, Y) = (1)+(3), \quad F(x, Y+k) = (1)+(2),$$

и следовательно,

$$\frac{F(X+h, Y+k) - F(X, Y+k) - F(X+h, Y) + F(X, Y)}{hk} = \frac{(4)}{hk}.$$

Отношение в левой части имеет своим пределом $\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}$ при h и k, стремящихся к нулю (§ 21). С другой стороны, применяя теорему о среднем к двойному интегралу (4), получим:

$$(4) = hkf(X+\theta h, \ Y+\theta' k).$$

Приближая h и k к нулю, получаем как раз формулу (9).

Интеграл $F(X, Y)$ уравнения (9) равен нулю вдоль AB. То же самое справедливо и относительно его двух частных производных первого порядка: действительно, легко усмотреть из чертежа, что если точка M лежит на AB, приращению h соответствует бесконечно малое приращение второго порядка функции $F(X, Y)$.

Эта формула аналогична основной формуле (8) (§ 75).

Следующая формула представляет некоторую аналогию с формулою интегрирования по частям. Пусть будет A конечная часть плоскости, ограниченная одною или несколькими кривыми произвольного вида. Функция $f(x, y)$, непрерывная в A, изменяется в области A между некоторым наименьшим значением v_0 и некоторым наибольшим значением V. Проведем *линии уровня* $f(x, y) = v$, где v заключается между v_0 и V; предположим, что мы можем найти площадь той части области A, в которой значение $f(x, y)$ заключается между v_0 и v. Эта площадь есть некоторая функция $F(v)$ от v, возрастающая вместе с v; площадь, заключающаяся между двумя бесконечно близкими линиями уровня, будет, очевидно, равна $F(v+\Delta v) - F(v) = \Delta v F'(v+\theta\Delta v)$. Разбив эту площадь на бесконечно малые части линиями, соединяющими две соседние линии уровня, мы можем взять в каждой из этих частей такую точку (ξ, η), чтобы было $f(\xi, \eta) = v+\theta\Delta v$; тогда сумма элементов двойного интеграла $\iint f\,dx\,dy$, соответствующих области между соседними линиями уровня, будет равна:

$$(v+\theta\Delta v) F'(v+\theta\Delta v)\,\Delta v.$$

Следовательно, двойной интеграл будет равен пределу суммы:

$$\sum (v+\theta\Delta v) F'(v+\theta\Delta v)\,\Delta v,$$

т. е. равен простому интегралу

$$\int_{v_0}^{V} vF'(v)\,dv = VF(V) - \int_{v_0}^{V} F(v)\,dv.$$

Этот метод особенно удобен в том случае, когда область интегрирования ограничена двумя линиями уровня:

$$f(x, y) = v_0, \quad f(x, y) = V.$$

Пусть, например, требуется вычислить двойной интеграл $\iint \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, взятый внутри круга $x^2+y^2=1$. Полагая $v = \sqrt{1+x^2+y^2}$, мы видим, что область интегрирования будет ограничена двумя линиями уровня $v=1$, $v=\sqrt{2}$, и функция $F(v)$, представляющая площадь круга с радиусом, равным $\sqrt{v^2-1}$, будет равна $\pi(v^2-1)$. Следовательно, двойной интеграл равен:

$$\int\limits_1^{\sqrt{2}} 2\pi v^2 dv = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)^*.$$

Предыдущая формула легко распространяется на двойной интеграл

$$\iint f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

если мы обозначим через $F(v)$ двойной интеграл $\iint \varphi(x, y)\,dx\,dy$, распространенный на часть области интегрирования, ограниченную кривою $v=f(x, y)$.

116. Формула Грина. Если функция $f(x, y)$ есть частная производная по x или по y от некоторой известной функции, то одно из интегрирований совершается непосредственно, и остается выполнить только одну квадратуру. Это простое замечание приводит к важной формуле, называемой *формулою Грина* (Green).

Рассмотрим сначала двойной интеграл $\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, распространенный на часть плоскости, ограниченную контуром C, пересекающимся с прямыми, параллельными оси Oy, не более чем в двух точках (черт. 18).

Пусть будут A и B те точки контура, в которых x будет максимум или минимум. Одна из прямых, параллельных оси Oy и проходящих между линиями Aa и Bb, пересечет C в двух точках m_1 и m_2 с ординатами y_1 и y_2. Интегрируя сначала по y, найдем для двойного интеграла выражение:

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx.$$

Но интегралы $\int\limits_a^b P(x, y_1)\,dx$, $\int\limits_a^b P(x, y_2)\,dx$ суть не что иное, как криволинейные интегралы, взятые соответственно вдоль дуг Am_1B и Am_2B; следовательно, мы можем представить предыдущую формулу в виде:

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_C P\,dx, \tag{13}$$

причем криволинейный интеграл берется вдоль контура C в направлении, указанном стрелками, т. е. в положительном направлении, если оси координат расположены, как на чертеже. Чтобы распространить эту формулу на площадь, ограниченную контуром произвольного вида, мы, как и выше (§ 92), разобьем эту площадь поперечными линиями на несколько таких частей, чтобы контур каждой из них удовлетворял

---

* В мемуаре Каталана (Catalan) (*Journal de Liouville*, 1-я серия, т. IV, стр. 233) можно найти много приложений этого метода.

вышеуказанному условию, и применим предыдущую формулу к каждой из этих частей.

Таким же образом получается формула:

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_C Q\, dy, \tag{14}$$

причем криволинейный интеграл опять берется в прежнем направлении. Из равенств (13) и (14) находим:

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy, \tag{15}$$

где двойной интеграл распространяется на площадь, ограниченную контуром C. В этом состоит формула Грина; она имеет много весьма важных приложений. Заметим только, что, полагая $Q = x$, $P = -y$, мы получим выведенную выше (§ 92) формулу для выражения площади замкнутой кривой через криволинейный интеграл.

II. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ. ОБЪЕМЫ. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ.

До сих пор при вычислении двойного интеграла мы разбивали область интегрирования на бесконечно малые прямоугольники прямыми, параллельными осям координат. Мы предположим теперь, что разбиение области интегрирования совершается помощью двух семейств кривых совершенно произвольного вида.

117. Предварительная формула. Пусть будут u и v координаты точки относительно системы прямоугольных осей на плоскости, и x, y — координаты другой точки относительно другой системы прямоугольных координат, расположенных таким же образом* в той же плоскости или в плоскости отличной от первой. Формулы:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v) \tag{16}$$

устанавливают некоторое соответствие между точками обеих плоскостей. Предположим: 1) что эти функции $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные, когда точка (u, v) описывает часть A_1 плоскости (u, v), ограниченную контуром C_1; 2) что, на основании формул (16), части A_1 плоскости (u, v) соответствует часть A плоскости (x, y), ограниченная контуром C, и что соответствие между точками обеих площадей и обоих контуров *взаимно однозначное*, т. е. каждой точке области A соответствует только одна точка области A_1, и обратно; 3) что функциональный определитель $\Delta = \dfrac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ не меняет знака внутри C_1, хотя и может обращаться в нуль в некоторых точках области A_1.

---

* Две системы прямоугольных осей называются одинаково расположенными, если переход от положительного направления оси x к положительному направлению оси y совершается в обоих случаях вращением в положительном направлении (например, против часовой стрелки), или в обоих случаях — в отрицательном направлении. (*Ред.*)

Здесь могут представиться два случая. Когда точка (u, v) описывает контур C_1, двигаясь в прямом направлении (§ 94), точка (x, y) будет описывать контур C, перемещаясь постоянно или в прямом направлении или в направлении обратном. В зависимости от этого мы будем говорить, что рассматриваемое соответствие между областями A и A_1 — прямое или обратное.

Площадь Ω области A плоскости представится интегралом

$$\Omega = \int\limits_C x\,dy,$$

причем интеграл берется вдоль контура C в прямом направлении. Сделав замену переменных по формулам (16), получим:

$$\Omega = \pm \int\limits_{C_1} f(u, v)\,d\varphi(u, v),$$

где новый интеграл взят вдоль контура C_1 в прямом направлении, причем должно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли соответствие прямым или обратным. Применим к этому новому интегралу формулу Грина, положив $u = x$, $v = y$, $P = f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, $Q = f\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$. Это дает:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)};$$

поэтому

$$\Omega = \pm \iint\limits_{A_1} \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\,du\,dv.$$

Применяя к двойному интегралу теорему о среднем значении, получим:

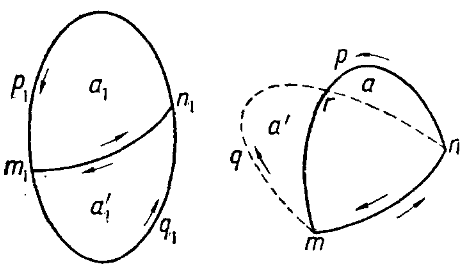
$$\Omega = \pm \Omega_1 \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)}, \tag{17}$$

где (ξ, η) — координаты точки, лежащей внутри C_1, и Ω_1 — площадь области A_1 плоскости (u, v). Мы видим, что перед правою частью должно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли определитель Δ сам положительным или отрицательным. Следовательно, *соответствие будет прямым или обратным в зависимости от того, будет ли Δ положительным или отрицательным.*

Формула (17) устанавливает еще одну аналогию между функциональными определителями и производными. В самом деле, предположим, что область A_1 плоскости неограниченно уменьшается во всех направлениях, так что все ее точки стремятся к предельной точке (u, v). Тогда и область A будет неограниченно уменьшаться; поэтому отношение площадей Ω, Ω_1 будет иметь пределом абсолютное значение определителя Δ. Следовательно, подобно тому как производная есть отношение двух линейных элементов, определитель Δ есть отношение двух элементов поверхностных. С этой точки зрения формула (17) имеет сходство с формулою конечных приращений.

Примечание. Те предположения, которые были сделаны относительно соответствия между областями A и A_1, не все независимы между собою. Так, для того, чтобы соответствие было однозначным, необходимо, чтобы определитель Δ не менял знака в области A_1 плоскости (u, v). В самом деле, предположим, что Δ равно нулю вдоль кривой γ_1, отделяющей ту часть области A_1, где Δ положительно, от той части, где Δ отрицательно. Рассмотрим весьма малую дугу m_1n_1 кривой γ_1 и весьма малую часть области A_1, заключающую внутри себя дугу m_1n_1; эта часть разделится дугою m_1n_1 на две области a_1 и a'_1 (черт. 20).

В то время как точка (u, v) описывает площадь a_1, в которой Δ положительно, точка (x, y) опишет площадь a с контуром $mnpq$, и направления движения по обоим контурам $m_1n_1p_1q_1$, $mnpq$ будут или одновременно прямые, или одновременно обратные. Когда же точка (u, v) описывает площадь a'_1, в которой Δ отрицательно, точка (x, y) опишет площадь a', причем движение по ее контуру $nmqr$ будет совершаться в обратном направлении, если движение по контуру $n_1m_1q_1n_1$ совершалось в прямом. Поэтому площадь a' должна отчасти покрывать площадь a; таким образом всякой точке (x, y) общей части nrm площадей a и a' будут соответствовать не одна, а две точки (u, v), лежащие по разные стороны линии m_1n_1.



Черт. 20.

Положим, например, $X = x$, $Y = y^2$; мы имеем $\Delta = 2y$. Если точка (x, y) описывает замкнутую площадь, содержащую отрезок ab оси Ox, то легко видеть, что точка (X, Y) будет описывать две площади, расположенные над осью X и примыкающие к одному и тому же отрезку AB этой оси. Лист бумаги, сложенный вдоль прямой линии, дает представление о площади, описываемой точкою (X, Y).

Для того чтобы соответствие было однозначным, недостаточно, чтобы определитель Δ сохранял в области A_1 постоянный знак. Возьмем, например, $X = x^2 - y^2$, $Y = 2xy$; определитель $\Delta = 4(x^2 + y^2)$ всегда положителен. Обозначая через (r, θ) (R, ω) полярные координаты обеих точек (x, y), (X, Y), мы представим предыдущие формулы в виде $R = r^2$, $\omega = 2\theta$. Будем изменять r от a до b $(a < b)$, и θ от 0 до $\pi + \alpha$, где α заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$; точка (R, ω) опишет кольцеобразную полосу, заключающуюся между двумя окружностями с радиусами a^2 и b^2. Но каждому значению угла ω, заключающемуся между 0 и 2α, соответствуют два значения угла θ: одно θ_1, заключающееся между 0 и α, и другое, θ_2, заключающееся между π и $\pi + \alpha$. Площадь, описываемую точкою (X, Y), можно представить при помощи плоской бумажной кольцеобразной полосы, концы которой отчасти находят друг на друга.

118. Замена переменных. Первый способ. Сохраним предположения предыдущего параграфа относительно областей A, A_1, а также и формулы (16); пусть будет $F(x, y)$ функция, непрерывная в области A. Разобьем область A_1 произвольным образом на меньшие области α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$; им будет соответствовать разбиение области A на области $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть будут ω_i и σ_i площади двух соответствующих областей a_i и α_i; по формуле (17) имеем:

$$\omega_i = \sigma_i \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right|,$$

где u_i, v_i — координаты некоторой точки области α_i. Этой точке (u_i, v_i) соответствует точка $x_i = f(u_i, v_i)$, $y_i = \varphi(u_i, v_i)$ области a_i. Поэтому, полагая $\Phi(u, v) = F[f(u, v), \varphi(u, v)]$, мы можем написать:

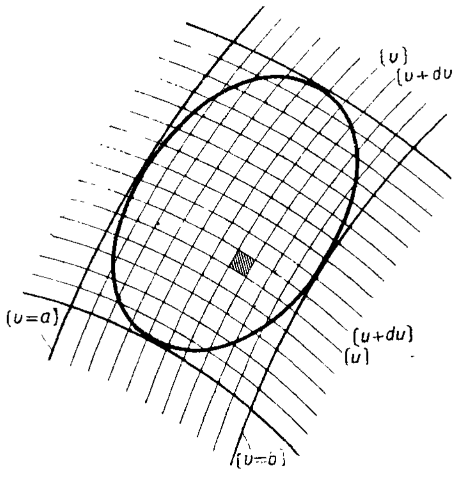
$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi(u_i, v_i)\left|\frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)}\right|\sigma_i;$$

отсюда, переходя к пределу, получим:

$$\iint\limits_{A} F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{A_1} F[f(u, v), \varphi(u, v)]\left|\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right| du\,dv. \qquad (18)$$

Таким образом, *чтобы произвести замену переменных в двойном интеграле, должно заменить x и y их значениями в функции новых переменных u и v, а произведение $dx\,dy$ — произведением $|\Delta|\,du\,dv$.* Что же касается новой области интегрирования, то мы уже объяснили выше, как она определяется.

Вообще, чтобы найти пределы, между которыми должны быть выполнены интегрирования при вычислении нового двойного интеграла, нет надобности строить контур C_1 новой области интегрирования A_1. В самом деле, будем рассматривать u и v как систему криволинейных координат. Если мы дадим в формуле (16) одному из переменных u, v постоянное значение и будем изменять другое переменное, то получим два семейства кривых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Вследствие предположений, сделанных при выводе формул (16), через каждую точку области A проходит одна и только одна кривая каждого из обоих семейств. Предположим для определенности, что кривая $v = \text{const}$ пересекает контур C только в двух точках M_1, M_2, соответствующих значениям u_1, u_2 переменного u $(u_1 < u_2)$, и что все кривые (v), пересекающие контур C, расположены между кривыми $v = a$, $v = b$ $(a < b)$ (черт. 21). Тогда, интегрируя сначала по u и оставляя v постоянным, мы должны будем изменять u от u_1 до u_2 (u_1 и u_2 будут вообще функциями от v) и затем снова проинтегрировать полученный результат по переменному v между пределами a и b.



Черт. 21.

Таким образом искомый двойной интеграл будет равен:

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F[f(u, v), \varphi(u, v)]\,|\Delta|\,du.$$

В сущности, замена переменных приводится к разбиению области интегрирования на бесконечно малые области двумя семействами кривых (u) и (v). Пусть будет ω площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного кривыми (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$, где du и dv положительны; на плоскости (u, v) этому четырехугольнику соответствует прямоугольник со сторонами du и dv. Поэтому, на основании формулы (17), имеем $\omega = |\Delta(\xi, \eta)|\, du\, dv$, где ξ заключается между u и $u + du$, а η — между v и $v + dv$. Выражение $|\Delta(u, v)|\, du\, dv$ называется *элементом площади* в системе координат (u, v). Точное значение ω есть

$$\omega = \{ |\Delta(u, v)| + \varepsilon \}\, du\, dv,$$

где ε бесконечно мало вместе с du и dv. Но при вычислении предела суммы $\Sigma F(x, y)\,\omega$ количеством ε можно пренебречь; в самом деле, так как функция $\Delta(u, v)$ непрерывна, то можно предположить кривые (u), (v) настолько близкими, чтобы все количества ε были по абсолютному значению меньше всякого заданного положительного числа, и следовательно, чтобы сумма $\Sigma F(x, y)\,\varepsilon\, dx\, dy$ также была по абсолютной величине меньше всякого положительного числа.

119. Примеры. 1. *Полярные координаты.* Заменим прямоугольные координаты полярными. Мы имеем $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, и мы получим все точки плоскости, изменяя ρ от 0 до $+\infty$ и ω от 0 до 2π. Функциональный определитель равен $\Delta = \rho$, так что элемент площади есть $\rho\, d\omega\, d\rho$, как это можно легко вывести геометрически. Предположим сначала, что требуется вычислить двойной интеграл, распространенный на часть плоскости, ограниченную двумя прямыми OA, OB, образующими с Ox углы ω_1, ω_2, и дугою AB, которая пересекается с полупрямою, выходящею из начала не более чем в одной точке. Пусть будет $R = \varphi(\omega)$ уравнение дуги AB; так как ω заключается между ω_1 и ω_2, а ρ может изменяться от 0 до R, то двойной интеграл от $f(x, y)$ равен:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_0^R f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\, \rho\, d\rho.$$

В том случае, когда кривая AB замкнутая и содержит начало координат внутри себя, должно положить $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\pi$. Всякая другая область интегрирования может быть разложена на несколько областей, подобных предыдущей. Предположим, например, что контур C есть замкнутая выпуклая кривая, оставляющая начало снаружи. Пусть будут OA и OB касательные, проведенные к этому контуру через начало координат, и $R_1 = \varphi_1(\omega)$, $R_2 = \varphi_2(\omega)$ уравнения кривых ANB, AMB. При данном значении ω, заключающемся между ω_1 и ω_2, ρ может изменяться от R_1 до R_2, и мы получим для двойного интеграла выражение:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\, \rho\, d\rho.$$

2. *Эллиптические координаты.* Рассмотрим семейство софокусных кривых второго порядка:

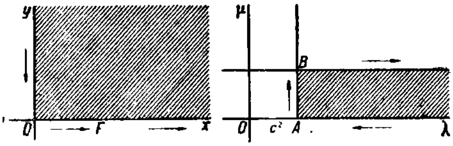
$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \tag{19}$$

где λ обозначает произвольный параметр. Через каждую точку плоскости проходят две кривых этого рода: это будут эллипс и гипербола, так как уравнение (19) имеет при всяких x и y один корень λ, больший c^2, и один положительный корень μ, меньший c^2. Из соотношения (19) и из такого же соотношения, но в котором λ заменено через μ, найдем:

$$x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \quad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c} \quad (0 \leqslant \mu \leqslant c^2 \leqslant \lambda). \tag{2 }$$

Во избежание неопределенности мы будем рассматривать только ту часть плоскости xy, которая расположена в угле xOy (черт. 22). Точки этой области соответствуют однозначно точкам части плоскости (λ, μ), ограниченной прямыми

$$\lambda = c^2, \quad \mu = 0, \quad \mu = c^2.$$



Черт. 22.

Когда точка (λ, μ) описывает контур этой области в направлении, указанном стрелками, то, как видно из формул (20), точка (x, y) опишет оси Ox, Oy в направлении, указанном стрелками. Следовательно, здесь соответствие — обратное; в этом можно также убедиться, вычислив Δ:

$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}.$$

120. Замена переменных. Второй способ. Выведем теперь общую формулу (18) другим приемом, опирающимся исключительно на самый способ вычисления двойного интеграла. Мы, разумеется, сохраняем при этом все те предположения, которые были нами сделаны ранее относительно соответствия между точками обеих областей A, A_1. Заметим сначала, что если формула верна для двух частных преобразований

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), & u &= f_1(u', v'), \\ y &= \varphi(u, v), & v &= \varphi_1(u', v'), \end{aligned}$$

то она будет верна также и для преобразования, которое получается от последовательного выполнения обоих предыдущих преобразований; это следует из известного свойства функциональных определителей (§ 52):

$$\frac{D(x, y)}{D(u', v')} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(u', v')}.$$

Точно так же, если формула верна для нескольких областей A, B, C, ..., L, которым соответствуют области A_1, B_1, C_1, ..., L_1, то она будет также верна и для области $A + B + C + \ldots + L$. Наконец, формула верна, если замена переменных приводится к преобразованию координат:

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

мы в этом случае имеем $\Delta = 1$, и оба предыдущих интеграла равны:

$$\iint\limits_A F(x, y)\, dx\, dy =$$

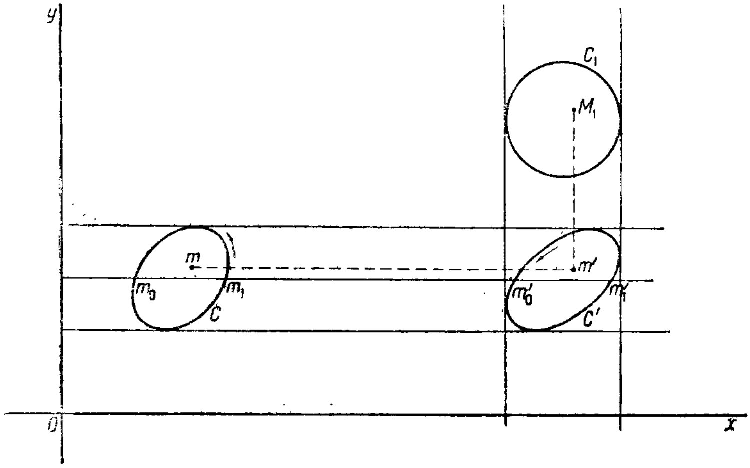
$$= \iint\limits_{A'} F(x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)\, dx'\, dy',$$

так как они выражают один и тот же объем.

Мы выведем сначала формулу замены переменных для частного преобразования

$$x = \varphi(x', y'), \quad y = y', \tag{21}$$

при котором области A соответствует другая область A', заключающаяся между теми же прямыми $y=y_0$, $y=y_1$, параллельными оси Ox. Предположим, что каждой точке области A соответствует только одна точка области A', и обратно. Если прямая, параллельная оси Ox, пересекает контур C области A только в двух точках, то и контур C' области A' будет пересекаться тою же прямою также только в двух точках. Точкам m_0 и m_1 с ординатою y на контуре C соответствуют точки m'_0 и m'_1 на контуре C'. Но здесь могут представиться два случая в зависимости от того, будет ли соответствие прямым или обратным. Чтобы различить оба эти случая, заметим, что если $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$ положительно, то x



Черт. 23.

возрастает вместе с x', точки m_0 и m_1, m'_0 и m'_1 расположены, как указано на черт. 23, и соответствие прямое. Напротив, если $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$ — отрицательно, то соответствие — обратное.

Рассмотрим первый случай. Пусть будут x_0, x_1, x'_0, x'_1 — абсциссы точек m_0, m_1, m'_0, m'_1. Применяя к простому интегралу формулу замены переменного, имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\,dx = \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x', y'), y]\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\,dx',$$

где y и y' рассматриваются как постоянные; таким образом получаем:

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\,dx = \int_{y_0}^{y_1} dy' \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x', y'), y']\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\,dx'.$$

Но в этом случае определитель Якоби Δ равен $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$, и предыдущую формулу можно также представить в виде:

$$\iint\limits_{A} F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{A'} F[\varphi(x', y'), y']\,|\Delta|\,dx'\,dy'.$$

Если $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$ отрицательно, то формула может быть выведена таким же образом. Очевидно, что она может быть распространена на область, ограниченную контуром произвольного вида.

Таким же образом мы докажем, что, полагая

$$x = x', \quad y = \psi(x', y'), \tag{22}$$

мы получим формулу:

$$\iint\limits_{A} F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{A'} F[x', \psi(x', y')]\,|\Delta|\,dx'\,dy',$$

причем точки новой области интегрирования A' взаимно однозначно соответствуют точкам области A.

Рассмотрим теперь общие формулы преобразования:

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = f_1(x_1, y_1). \tag{23}$$

Для большей наглядности будем рассматривать (x, y), (x_1, y_1) как координаты двух соответствующих точек m, M_1 относительно одной и той же системы осей координат. Пусть будут A, A_1 соответствующие области, ограниченные контурами C, C_1. Если мы присоединим к двум точкам m, M еще вспомогательную точку m' с координатами $x' = x_1$, $y' = y$, то эта точка m' опишет вспомогательную область A'; мы предположим сначала, что точки области A' находятся во взаимно однозначном соответствии с точками каждой из областей A, A_1. Между шестью координатами x, y, x_1, y_1, x', y' существуют четыре соотношения:

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = f_1(x_1, y_1), \quad x' = x_1, \quad y' = y.$$

Отсюда прежде всего имеем:

$$x' = x_1, \quad y' = f_1(x_1, y_1); \tag{24}$$

равенства (24) определяют преобразование вида (22). Далее, из соотношения $y' = f_1(x', y_1)$ получаем $y_1 = \pi(x', y')$, и следовательно,

$$x = f(x', y_1) = \varphi(x', y'), \quad y = y'. \tag{25}$$

Таким образом рассматриваемое преобразование (23) может быть получено как результат двух частных преобразований (24) и (25), к которым применима общая формула (18); следовательно, эта формула применима также и к преобразованию (23).

Примечание. Мы предполагали, что область, описанная точкою m', находится в однозначном соответствии с каждою из областей A, A_1. Мы можем всегда этого достигнуть. В самом деле, рассмотрим в области A_1 линии, которым в области A соответствуют прямые, параллельные оси Ox. Если прямая, параллельная оси Oy, пересекает каждую из этих линий только в одной точке, то ясно, что каждой точке m области A соответствует только одна точка m' области A'. Поэтому достаточно разбить площадь A_1 на достаточно малые части, чтобы в каждой из них это условие было удовлетворено. Если бы линии области A оказались прямыми, параллельными Oy, то предварительно мы выполнили бы над (x_1, y_1) преобразование координат.

121. Объемы. Подобно тому, как интуитивное представление площади плоской кривой приводит к аналитическому понятию об определенном интеграле (§ 66 - 68), аналитическое выражение, которое мы взяли за определение двойного интеграла, могло бы быть выведено из интуитивного представления объема, ограниченного цилиндром, плоскостью, перпендикулярною к его образующим, и частью какой-либо поверхности. Мы не будем, однако, развивать здесь рассуждение, приведенное выше (§ 67), и дадим, наоборот, чисто аналитическое определение объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Пусть будет Σ замкнутая поверхность, которая разделяет все пространство на *две* различных области: *внутреннюю* область D и *внешнюю* D': две точки одной и той же области всегда могут быть соединены ломаной, не пересекающей поверхности Σ, между тем как всякая ломаная, соединяющая точки двух различных областей, имеет, по меньшей мере, одну общую точку с Σ.

Чтобы определить объем такого рода области, мы пойдем тем же самым путем, которым мы шли для определения площади плоской кривой. Назовем *многогранной областью* всякую ограниченную область, граница которой состоит из конечного числа плоских многоугольных областей, называемых *гранями*. Всякая многогранная область может быть получена посредством соединения конечного числа выпуклых многогранников; объем этой области определяется в элементарной геометрии. Пусть будут P и p — две многогранные области, из которых первая содержит D, а вторая сама содержится в D, и пусть V_P и V_p — соответствующие объемы. Мы имеем всегда $V_P > V_p$, и следовательно, числа V_P имеют нижнюю границу V, а числа V_p — верхнюю границу V'; сверх того, мы имеем $V' \leqslant V$. Если $V' = V$, то говорят, что область D имеет *определенный объем*, и число V принимают за меру этого объема. Следующие предложения доказываются так же, как и в случае плоских площадей (§ 77 и 78).

Чтобы область D имела объем, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было положительное число ε, можно было найти, *такие две многогранные области P и p, из коих одна содержит D а другая сама содержится в D, чтобы разность $V_P - V_p$ была меньше ε.*

Если область D может быть разбита на несколько областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, объемы которых суть соответственно V_1, $V_2, \ldots, V_n$, то область D имеет объем

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

Если все пространство разделено на кубы со стороной ρ посредством плоскостей, параллельных трем взаимно перпендикулярным плоскостям и равноотстоящих друг от друга, то сумма объемов кубов, внутренних по отношению к D, имеет пределом объем V.

когда сторона ρ стремится к нулю, тогда как сумма объемов кубов, имеющих одну или несколько общих точек с границей D, стремится к нулю.

Возьмем сначала область D, ограниченную цилиндром, нормальное сечение которого представляет собой замкнутую плоскую кривую C, не имеющую двойных точек, плоскостью Q, перпендикулярною к образующим цилиндра, и частью поверхности S, внутреннею по отношению к цилиндру, которую любая параллель к образующим цилиндра пересекает в одной и только одной точке. Возьмем плоскость Q за плоскость xy, а одну из параллелей к образующим цилиндра за ось z; пусть $z=f(x, y)$ — уравнение поверхности S; $f(x, y)$ есть функция, непрерывная внутри плоской области d, внутренней по отношению к кривой C — нормальному сечению цилиндра плоскостью $z=0$. Мы предположим, сверх того, что $f(x, y) \geqslant 0$. Разделим теперь плоскость xy на квадраты со стороной ρ посредством прямых, параллельных осям координат и равноотстоящих друг от друга, и построим затем две многогранные области P и p следующим образом. На каждом из тех квадратов плоскости xy, которые имеют хотя бы одну общую точку с C, построим прямую призму, имеющую основанием этот квадрат, а высотой — верхнюю границу M функции $f(x, y)$; на каждом квадрате, внутреннем по отношению к C, построим таким же образом прямую призму, имеющую своим основанием этот квадрат, а высотой — верхнюю границу M_i функции $f(x, y)$ в том же квадрате. Ясно, что эти призмы образуют многогранную область P, содержащую D. На каждом внутреннем квадрате построим также прямую призму, имеющую основанием этот квадрат, а высотой — нижнюю границу m_i функции $f(x, y)$ в том же квадрате. Множество этих новых призм представляет собой многогранную область, содержащуюся в D. Разность $V_P - V_p$ объемов этих двух многогранных областей меньше, чем $M\eta + A\omega$, где η есть сумма площадей смешанных квадратов, A — площадь области d, ω — верхняя граница колебания функции $f(x, y)$ в квадрате со стороной ρ. Но мы можем взять ρ столь малым, чтобы каждое из произведений $M\eta$, $A\omega$ было меньше любого заданного числа ε. Область D имеет, следовательно, определенный объем.

Этот объем равен двойному интегралу

$$V=\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy,$$

так как, каково бы ни было ρ, объем V_P превосходит этот двойной интеграл, в то время как объем V_p остается меньше того же интеграла.

Область, ограниченная замкнутой поверхностью, которая встречается с параллелью к Oz не более как в двух точках, может рассматриваться как разность двух областей, подобных предшествующей. Объем ее будет, следовательно, равен разности двух двойных интегралов. Наконец, всякая область, ограниченная произвольной замкнутой поверхностью, которая, однако, встречается лишь в *конечном* числе точек с параллелью к Oz, может быть разбита на некоторое число областей, граница которых встречается с параллелью к Oz не более как в двух точках. Объем этой области выразится, следовательно, алгебраической суммой двойных интегралов.

122. Вычисление объемов. Рассмотрим, как мы это делали выше, часть пространства, ограниченную поверхностью S, расположенною над плоскостью xOy, самою этою плоскостью и цилиндром, образующие которого параллельны оси Oz. Предположим, что сечение цилиндра плоскостью $z=0$ есть контур, образованный, как на черт. 18, двумя прямыми, параллельными оси Oy, и двумя дугами кривых Am_1B, $A'm_2B'$. Если $z=f(x, y)$ есть уравнение поверхности S, то объем, ограниченный таким образом, представится интегралом

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy.$$

Но интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dy$ представляет площадь сечения этого объема плоскостью, параллельною плоскости yz; поэтому предыдущую формулу можно также представить в виде:

$$V=\int_a^b \mathfrak{A}\,dx. \tag{26}$$

Очевидно, что каждый объем, ограниченный произвольною поверхностью, равен алгебраической сумме некоторого числа объемов, ограниченных так, как было сказано выше. Так, например, для вычисления объема, ограниченного замкнутою выпуклою поверхностью, мы можем описать около этой поверхности цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и вычислить разность двух объемов, подобных рассмотренному выше. Таким образом формула (26) применима ко всякому объему, ограниченному двумя параллельными плоскостями $x=a$, $x=b\ (a<b)$ и поверхностью произвольного вида, причем $\mathfrak{A}$ обозначает площадь сечения этого объема плоскостью, параллельною двум предыдущим плоскостям. Предположим, что промежуток (a, b) разбит на меньшие промежутки a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b; пусть будут $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_i$, ... площади сечений, соответствующих плоскостям $x=a$, $x=x_1$, ...

Определенный интеграл $\int_a^b \mathfrak{A}\,dx$ есть предел суммы

$$\mathfrak{A}_0(x_1-a)+\mathfrak{A}_1(x_2-x_1)+\ldots+\mathfrak{A}_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\ldots$$

Геометрический смысл этой суммы очевиден. В самом деле, например, $\mathfrak{A}_{i-1}(x_i-x_{i-1})$ представляет объем цилиндрического слоя, основанием которого служит сечение, образованное плоскостью $x=x_{i-1}$, а высотою — расстояние между двумя соседними плоскостями. Следовательно, искомый объем есть предел суммы таких бесконечно тонких цилиндрических слоев, что совершенно согласуется с обычным понятием об объеме.

Если выражение площади $\mathfrak{A}$ в функции от x известно, то искомый объем получается посредством одной квадратуры. Предположим, например, что требуется определить объем, ограниченный поверхностью вращения и двумя плоскостями, перпендикулярными к ее оси. Примем эту ось за ось Ox, и пусть будет $z = f(x)$ уравнение меридиана в плоскости xz; в этом случае сечение объема плоскостью, параллельною плоскости yz, есть круг радиуса $f(x)$, и искомый объем равен $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Найдем еще объем части эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

заключающейся между двумя плоскостями $x = x_0$, $x = X$. Сечение эллипсоида плоскостью, параллельною плоскости $x = 0$, есть эллипс, полуоси которого равны

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

следовательно, искомый объем равен:

$$V = \int_{x_0}^{X} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(X - x_0 - \frac{X^3 - x_0^3}{3a^2}\right).$$

Чтобы иметь объем всего эллипсоида, достаточно положить $x_0 = -a$, $X = +a$, что дает $\frac{4}{3}\pi abc$.

123. Объем, ограниченный линейчатою поверхностью. Когда площадь $\mathfrak{A}$ есть целая функция второй степени от x, то объем выражается очень просто через площади B, B' двух крайних сечений, через площадь b среднего сечения и через расстояние h между двумя крайними сечениями. Приняв плоскость среднего сечения за плоскость yz, имеем:

$$V = \int_{-a}^{+a} (lx^2 + 2mx + n)\, dx = 2l\frac{a^3}{3} + 2na;$$

с другой стороны, мы имеем:

$$h = 2a, \quad b = n, \quad B = la^2 + 2ma + n, \quad B' = la^2 - 2ma + n,$$

откуда

$$n = b, \quad a = \frac{h}{2}, \quad 2la^2 = B + B' - 2b.$$

Отсюда получаем формулу:

$$V = \frac{h}{6}[B + B' + 4b]. \tag{27}$$

В частности, формула (27) применима к объему, ограниченному двумя параллельными плоскостями и какою-нибудь линейчатою поверхностью. В самом деле, пусть будут $y = ax + p$, $z = bx + q$ уравнения подвижной прямой, где a, b, p, q суть непрерывные функции переменного параметра t, принимающие опять начальные значения после перехода t от t_0 к T. Эта прямая опишет линейчатую поверхность, и площадь сечения этой поверхности плоскостью, параллельною плоскости $x=0$, будет иметь выражение (§ 94):

$$\mathfrak{A}=\int_{t_0}^{T}(ax+p)(b'x+q')\,dt,$$

где a', b', p', q' обозначают производные от a, b, p, q по t; эти производные могут быть прерывными для конечного числа значений параметра t между t_0 и T, что будет в том случае, если линейчатая поверхность состоит из частей различных поверхностей. Последний интеграл можно также представить в виде:

$$\mathfrak{A}=x^2\int_{t_0}^{T}ab'\,dt+x\int_{t_0}^{T}(aq'+pb')\,dt+\int_{t_0}^{T}pq'\,dt;$$

интегралы в правой части, очевидно, не зависят от x. Следовательно, к искомому объему применима формула (27). Можно заметить, что из нее можно получить выражения большей части объемов, вычисляемых в элементарной геометрии.

124. Площадь кривой поверхности. Аналитическое определение поверхности осуществляется следующим образом. Пусть будут $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ — функции двух переменных u, v, непрерывные, когда точка с координатами (u, v) остается в области R плоскости, ограниченной замкнутым контуром L. Когда точка (u, v) описывает область R, то геометрическое место точек пространства, прямоугольные координаты которых суть $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$, есть некоторая поверхность S, а кривая Γ, соответствующая кривой L плоскости (u, v), есть контур этой поверхности. Мы будем говорить, что поверхность S есть *правильная*, если можно выбрать параметры u и v так, чтобы были выполнены следующие условия: 1) точки поверхности S и области R плоскости (u, v) находятся во взаимно однозначном соответствии, так же как и точки их контуров Γ и L; 2) функции f, φ, ψ имеют частные производные первого порядка, непрерывные в R и на L; 3) якобианы $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке R или L. Сначала мы будем рассматривать лишь правильные поверхности или же такие, которые состоят из *конечного* числа кусков правильных поверхностей.

В точке M правильной поверхности, соответствующей точке (u, v) области R, эта поверхность имеет касательную плоскость, уравнение которой есть (§ 61):

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

где

$$A=\frac{D(y, z)}{D(u, v)},\quad B=\frac{D(z, x)}{D(u, v)},\quad C=\frac{D(x, y)}{D(u, v)};$$

направляющие косинусы нормали имеют выражения:

$$\alpha=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \beta=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \gamma=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

причем во всех трех формулах нужно взять один и тот же знак. Этот двойной знак соответствует двум противоположным направлениям нормали, из коих любое мы можем принять за положительное. Например, если мы хотим иметь косинус направления, составляющего острый угол с осью Oz, то мы должны будем взять знак, совпадающий со знаком C.

Если мы заменим u и v функциями параметра t, то точка (x, y, z) опишет на поверхности S некоторую кривую, и квадрат линейного элемента этой кривой, который мы получаем, возводя в квадрат выражения dx, dy, dz и складывая результаты, выразится формулой:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{28}$$

где положено

$$E = \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \mathrm{S}\,\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2;$$

знак S указывает, что нужно заменить x через y, затем через z и результаты сложить. Эти функции E, F, G играют важную роль в учении о поверхностях; если f, φ, ψ суть действительные функции, что мы и предположим, то ясно, что E, G, $EG - F^2$ положительны.

Коэфициенты A, B, C зависят не только от точки, взятой на поверхности, но также и от осей координат, между тем как E, F, G вовсе не зависят от выбора координатных осей, а зависят только от поверхности S и от взятых нами переменных u и v. Сказанное явствует из геометрического смысла этих коэфициентов; можно, впрочем, убедиться в этом и непосредственно, если воспользоваться формулами преобразования координат. Но эти шесть функций связаны важным соотношением:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

которое выводится из тождества Лагранжа:

$$(ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2,$$

заменяя в нем a, b, c, a', b', c' через $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial v}$ соответственно.

Мы выведем еще одну предварительную формулу. Пусть будут r — часть R, ограниченная замкнутым контуром c, m — внутренняя точка r, s — часть S, соответствующая r, γ — контур s, и M — точка s, соответствующая m. Предположим, что область r настолько мала, что параллель к нормали в M может встретить s не более как в одной точке. Ортогональная проекция этой поверхности s на плоскость, касательную к поверхности в точке M, представляет собой плоскую область s', ограниченную замкнутою кривою γ' — проекцией γ. Пусть будут ω — площадь r, а σ — площадь s'; найдем сначала выражение отношения $\frac{\sigma}{\omega}$ (ср. § 117). Для этого представим себе, что точка M выбрана за начало координат, за ось z взята нормаль в M, а за оси x и y — две какие-нибудь прямые, лежащие в касательной плоскости, взаимно перпендикулярные и выходящие из M. Если u_0, v_0 — координаты точки m в плоскости (u, v), то, поскольку касательная плоскость в начале координат есть плоскость $z=0$, мы имеем $A_0=B_0=0$, а следовательно, $C_0^2=E_0G_0-F_0^2$, причем индексом нуль обозначено значение функции переменных u и v при $u=u_0$, $v=v_0$. Площадь σ есть площадь, ограниченная кривою γ', которую точка (x, y) описывает в плоскости $z=0$, когда точка (u, v) описывает контур c; мы имеем, следовательно (§ 117), $\sigma=\omega\,|C(u', v')|$, где u' и v' суть координаты некоторой точки m' внутри контура c. Функции $|C(u, v)|$ и $\sqrt{EG-F^2}$ равны, как мы только что видели, при $u=u_0$, $v=v_0$; так как эти функции непрерывны, то, если область r весьма мала, их разность при $u=u'$, $v=v'$ также весьма мала, и мы имеем:

$$\sigma=\omega\left\{\sqrt{E'G'-F'^2}+\varepsilon\right\},$$

где E', F', G' суть значения E, F, G для координат u', v' точки области r, а ε бесконечно мало одновременно с измерениями этой области r.

Это число ε стремится *равномерно* к нулю одновременно с наибольшим измерением области r. В самом делее мы имеем:

$$|\varepsilon| = \frac{A'^2+B'^2}{|C'|+\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} < \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\left\{\frac{A'^2+B'^2}{A'^2+B'^2+C'^2}\right\} < H\sin^2\theta,$$

где H есть максимальное значение радикала $\sqrt{EG-F^2}$, а θ — угол между нормалями в двух точках (u_0, v_0) и (u', v') поверхности S. Следовательно, нам достаточно будет показать, что острый угол θ между нормалями в двух соседних точках M, M' поверхности S стремится равномерно к нулю вместе с расстоянием MM'. Но, какова бы ни была система координат, мы имеем:

$$\sin^2\theta=\frac{(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)},$$

и правая часть этого равенства есть непрерывная функция четырех переменных u, v, u', v', обращающаяся в нуль при $u'=u$, $v'=v$. Следовательно, она равномерно стремится к нулю вместе с $(u'-u)^2+(v'-v)^2$ (§ 8, 12).

Представим себе теперь, что область R плоскости (u, v) разбита на n частичных областей $r_1, \ldots, r_n$, причем область r_i ограничена замкнутой кривой c_i, и возьмем внутри r_i какую-либо точку $m_i(u_i, v_i)$. Этой области r_i и кривой c_i соответствуют на S часть поверхности s_i и ее контур γ_i. Пусть M_i — точка s_i, соответствующая точке m_i; мы предположим, что все области r_i взяты столь малыми, что параллель к нормали в точке M_i встречает s_i не более как в одной точке *. Проекция поверхности s_i на касательную плоскость в M_i представляет собой плоскую область, площадь которой равна σ_i. Когда число n неограниченно возрастает, и притом так, что все области r_i стремятся к нулю по всем своим измерениям, то сумма этих плоских площадей

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n=\Omega$$

---

* Этот пункт может быть доказан со всей строгостью (*Bulletin de la Société mathématique*, т. XXXVIII, 1910, стр. 139). Мы избежим всяких затруднений, если назовем *площадью проекции* s абсолютную величину интеграла $\int y\,dx$, взятого вдоль γ_i (ср. § 93).

стремится к пределу, который мы и называем *площадью поверхности* S. В самом деле, мы имеем, на основании только что доказанного:

$$\Omega = \Sigma\omega_i \left\{ \sqrt{F'_i \cdot G'_i - F'^2_i} + \varepsilon_i \right\},$$

где ω_i есть площадь r_i, u', v' — координаты точки, принадлежащей r_i, а ε_i — бесконечно мало. Сумма $\Sigma\omega_i \cdot \varepsilon_i$ стремится к нулю, так как ε_i стремится к нулю равномерно; следовательно, Ω имеет пределом двойной интеграл

$$A = \iint\limits_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad (29)$$

Таково выражение площади поверхности S*.

125. Элемент поверхности. Выражение $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ есть элемент площади поверхности S в системе координат (u, v). Точное выражение площади малой части поверхности, заключающейся между кривыми (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$, есть $(\sqrt{EG - F^2} + \varepsilon)\, du\, dv$, где ε бесконечно мало вместе с du и dv, но, как и выше, нетрудно убедиться, что членом $\varepsilon\, du\, dv$ можно пренебречь. Это выражение элемента площади можно легко получить из простых соображений диференциальной геометрии. В самом деле, если мы примем бесконечно малую часть рассматриваемой поверхности за параллелограм, построенный в касательной плоскости к поверхности S в точке (u, v), то площадь этой части будет равна произведению длин двух сторон на синус угла между кривыми (u) и (v). Далее, если мы примем приращение дуги за диференциал ds, то, по формуле (29), длины сторон параллелограма будут $\sqrt{E}\, du$, $\sqrt{G}\, dv$ при положительных du и dv. Что касается угла α между обеими кривыми, то направляющие параметры касательных к этим кривым равны соответственно $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$; отсюда имеем:

$$\cos\alpha = \frac{S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

и следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

---

* Это определение имеет в своей основе замену бесконечно малой области поверхности S бесконечно малым куском плоскости, касательной к поверхности в точке этой области. Казалось бы более естественным принять определение, аналогичное определению длины дуги кривой, т. е. определить площадь S как предел площади вписанной многогранной поверхности, число граней которой неограниченно возрастает, а наибольшая длина ребер стремится к нулю. Шварц (Schwarz) дал простой пример, из которого обнаруживается следующий, на первый взгляд, парадоксальный факт: площадь этой многогранной поверхности не стремится ни к какому пределу, если мы не добавляем некоторого дополнительного условия (см. упражнение 12, стр. 320).

Выполнив умножение, мы придем к прежнему выражению элемента поверхности. По поводу формулы для $\cos\alpha$ можно заметить, что коэфициент F равен нулю, если оба семейства кривых (u) и (v) образуют ортогональную сеть, и притом только в этом случае.

Если поверхность S обращается в плоскость, то мы опять приходим к найденному выше выражению (§ 118). В самом деле, полагая $\psi(u, v) = 0$, имеем:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

и, по правилу возведения в квадрат определителя, получим:

$$\Delta^2 = \left\{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right\}^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2.$$

Таким образом $\sqrt{EG - F}$ обращается в $|\Delta|$.

Примеры. 1. Пусть требуется найти площадь той части поверхности S, представляемой уравнением $z = f(x, y)$, которая проектируется на плоскость xOy областью R, причем в этой области функция $f(x, y)$ и ее производные $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны. Принимая x и y за независимые переменные, получим $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$, и искомая площадь представится двойным интегралом

$$\mathfrak{A} = \iint\limits_R \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \iint\limits_R \frac{dx\, dy}{\cos\gamma}, \tag{30}$$

где γ обозначает острый угол, образуемый нормалью к поверхности с осью Oz.

2. Вычислим площадь части поверхности вращения, заключающейся между двумя параллелями. Примем ось поверхности за ось Oz, и пусть будет $z = f(x)$ уравнение меридиана в плоскости xOz. Принимая за независимые переменные полярные координаты ρ и ω проекции какой-нибудь точки поверхности на плоскость xOy, имеем для координат этой точки поверхности выражения:

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = f(\rho).$$

Отсюда

$$ds^2 = d\rho^2\,[1 + f'^2(\rho)] + \rho^2\, d\omega^2,$$
$$E = 1 + f'^2(\rho), \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

Чтобы получить часть поверхности, заключающуюся между параллелями с радиусами ρ_1 и ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$, очевидно, нужно изменять ρ от ρ_1 до ρ_2, и ω — от 0 до 2π. Следовательно, для искомой площади имеем:

$$\mathfrak{A} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\, d\omega = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\, d\rho,$$

и нам остается выполнить только одну квадратуру. Обозначая через s дугу меридиана, находим:

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 = d\rho^2\,[1 + f'^2(\rho)];$$

поэтому предыдущую формулу можно представить в виде:

$$\mathfrak{A}=\int_{\rho_1}^{\rho_2} 2\pi\rho\, ds.$$

Геометрическое истолкование этой формулы очевидно: $2\pi\rho\, ds$ есть боковая поверхность усеченного конуса, образующая которого равна ds, а радиус средней окружности равен ρ. Рассматривая площадь, заключающуюся между двумя бесконечно близкими параллелями, как боковую поверхность усеченного конуса, мы и придем к формуле для $\mathfrak{A}$.

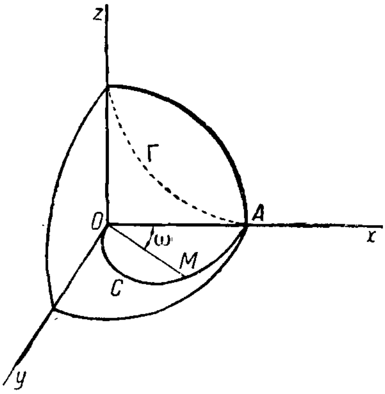
Например, если мы имеем параболоид, образованный вращением параболы $x^2=2pz$, то площадь части поверхности этого параболоида, ограниченная параллелью радиуса r, равна:

$$\mathfrak{A}=2\pi\int_0^r \frac{\rho}{p}\sqrt{\rho^2+p^2}\, d\rho=\frac{2\pi}{3p}\left[(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right].$$

126. Задача Вивиани. Опишем на радиусе $OA=R$ шара как на диаметре круг C и найдем объем части шара, заключающейся внутри круглого цилиндра, для которого круг C служит перпендикулярным сечением. Примем центр шара за начало координат. Четверть искомого объема будет равна двойному интегралу

$$\frac{V}{4}=\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

распространенному на половину круга, описанного на OA как на диаметре. Перейдем к полярным координатам ρ, ω. Угол ω может изменяться от 0 до $\frac{\pi}{2}$, радиус ρ от 0 до $R\cos\omega$, и мы имеем:



Черт. 24.

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_0^{R\cos\omega}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\, d\rho=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\omega} d\omega,$$

или

$$\frac{V}{4}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^3-R^3\sin^3\omega)\, d\omega=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Вычитая из шара часть, заключающуюся внутри рассматриваемого цилиндра и внутри другого такого же цилиндра, расположенного симметрично с первым относительно оси Oz, мы найдем, что объем оставшейся части равен:

$$\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{8R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}R^3.$$

Площадь Ω части поверхности шара, содержащейся внутри предыдущего цилиндра, получится из формулы:

$$\Omega = 4 \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy.$$

Заменяя p и q их значениями $-\frac{x}{z}$ и $-\frac{y}{z}$ и переходя к полярным координатам, находим:

$$\Omega = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} - R\left(\sqrt{R^2-\rho^2}\right)_0^{R\cos\omega} d\omega,$$

или

$$\Omega = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\omega)\, d\omega = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Вычитая из поверхности всей сферы часть, содержащуюся внутри двух вышеупомянутых цилиндров, мы получим для остающейся части выражение:

$$4\pi R^2 - 8R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 8R^2.$$

III. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ.

127. Двойные интегралы по неограниченной области. Пусть $f(x, y)$ — функция, ограниченная и интегрируемая в любой части плоскости, внешней по отношению к некоторой замкнутой кривой Γ. Двойной интеграл $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, распространенный на область, заключенную между Γ и некоторою другою замкнутою кривою C, внешнею по отношению к Γ, имеет конечное значение. Если этот интеграл имеет предел, когда кривая C безгранично удаляется во всех направлениях, то этот предел есть, по определению, двойной интеграл функции $f(x, y)$, распространенный на часть плоскости, внешнюю по отношению к Γ. Мы говорим, что переменная кривая C безгранично удаляется во всех направлениях, если, начиная с некоторого момента, эта кривая остается вне окружности произвольного радиуса R, описанной из некоторой неподвижной точки как из центра.

Условие, необходимое и достаточное для существования этого предела, есть следующее: пусть будут C, C' — две произвольные замкнутые кривые, охватывающие кривую Γ, а $\delta(C, C')$ — разность двух двойных интегралов, распространенных на области, ограниченные кривыми (Γ, C) и (Γ, C') соответственно. *Необходимо и достаточно, чтобы разность $\delta(C, C')$ стремилась к нулю, когда обе кривые C и C' неограниченно удаляются во всех направлениях и притом независимо друг от друга.*

Очевидно, что это условие *необходимо.* Оно также и *достаточно.* В самом деле, рассмотрим последовательность замкнутых кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, внешних по отношению к Γ, охватывающих одна другую и безгранично удаляющихся во всех направлениях при беспредельном возрастании n. Так как разность $\delta(C_m, C_n)$ стремится к нулю, когда оба числа m и n неограниченно возрастают, то двойной интеграл, распространенный на область, заключенную между Γ и C_n, стремится к пределу I (§ 5). Возьмем теперь другую замкнутую кривую C', произвольной формы, которая неограниченно удаляется во всех направлениях. Так как разность $\delta(C', C_n)$, по предположению, стремится к нулю, то двойной интеграл, распространенный на область, заключенную между Γ и C', также стремится к I.

Мы предположили для определенности, что область интеграции безгранична во всех направлениях, но ясно, что в этом предположении нет никакой необходимости. Мы можем, например, рассматривать область интеграции, ограниченную двумя данными прямыми и переменною кривою, которая неограниченно удаляется внутри угла, образованного этими прямыми. Предшествующие рассуждения применяются без изменений.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, имеющую вне круга с центром в начале координат и с радиусом r вид:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(x^2 + y^2)^\alpha},$$

причем числитель $\psi(x, y)$ всегда содержится между двумя положительными числами m и M. Примем за кривые C окружности, концентрические с первою. Двойной интеграл, распространенный на плоское кольцо, заключающееся между двумя окружностями с радиусами r и R, будет иметь выражение:

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_r^R \frac{\psi(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\,\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}};$$

следовательно, этот двойной интеграл содержится между двумя интегралами

$$2\pi m \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}, \quad 2\pi M \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

При неограниченном возрастании R рассматриваемый интеграл имеет предел, если $2\alpha - 1 > 1$, т. е. если $\alpha > 1$ (§ 90). Напротив, при $\alpha \leqslant 1$ интеграл неограниченно возрастает вместе с R.

Из необходимого и достаточного условия, полученного выше, тотчас же следует, что двойной интеграл $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ имеет предел всякий раз, как его имеет интеграл $\iint |f(x, y)|\,dx\,dy$. Но здесь существует важное отличие от случая одного независимого переменного. Если функция $f(x, y)$ сохраняет постоянный знак, например, если она положительна, то, чтобы узнать, стремится ли интеграл к пределу, достаточно рассмотреть последовательность замкнутых кривых $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_n, \ldots$, охватывающих одна другую, причем C_n безгранично удаляется при беспредельном возрастании n. Если двойной интеграл $I_n = \iint f(x, y)\,dx\,dy$, распространенный на область R_n, заключенную между Γ и C_n, при неограниченном возрастании n стремится к пределу I, то интеграл I', распространенный на область R', заключенную между Γ и замкнутою кривою C' произвольной формы, безгранично удаляющеюся во всех направлениях, стремится к тому же пределу. В самом деле, контур C' заключен между двумя контурами C_m, C_{m+n}, которые безгранично удаляются одновременно с C'. Мы имеем, следовательно, $I_m < I' < I_{m+n}$, и таким образом, I' имеет пределом I.

Если функция $f(x, y)$ не имеет постоянного знака, то двойной интеграл, распространенный на любую область, равен разности двух двойных интегралов с положительными элементами

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f_1(x, y)\, dx\, dy - \iint f_2(x, y)\, dx\, dy,$$

между тем как

$$\iint |f(x,y)|\, dx\, dy = \iint f_1(x,y)\, dx\, dy + \iint f_2(x, y)\, dx\, dy;$$

здесь положено $f_1 = f$, если $f > 0$, и $f_1 = 0$, если $f < 0$; точно так же $f_2 = 0$, если $f > 0$, и $f_2 = -f$, если $f < 0$. Тогда, если двойной интеграл $\iint |f(x, y)|\, dx\, dy$ не имеет предела, то по меньшей мере один из двойных интегралов $\iint f_1\, dx\, dy$, $\iint f_2\, dx\, dy$ неограниченно возрастает. Если оба эти интеграла беспредельно возрастают, то их разность *неопределенна* В самом деле, применяя те же рассуждения, что и при исследовании полусходящихся рядов (см. ниже, гл. VIII), доказывают, что можно так выбрать семейство переменных кривых, что предел двойного интеграла $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ оказывается равным любому наперед заданному числу; при этом предполагается, что функция f ограничена.

Приведем пример, предложенный Кэли (Cayley).

Пусть будет $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$; интегрируя сначала внутри квадрата со стороною a, мы получим для двойного интеграла выражение:

$$\int_0^a dx \int_0^a \sin(x^2 + y^2)\, dy = \int_0^a \sin x^2\, dx \cdot \int_0^a \cos y^2\, dy + \int_0^a \cos x^2\, dx \cdot \int_0^a \sin y^2\, dy.$$

При неограниченном возрастании a интегралы в правой части имеют предел (§ 88). Можно доказать, что этот предел равен $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и, таким образом, правая часть имеет пределом π. Если же мы будем интегрировать внутри четверти круга с радиусом R, то получим для двойного интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^R \rho \sin \rho^2\, d\rho = -\frac{\pi}{4}\left[\cos \rho^2\right]_0^R = \frac{\pi}{4}[1 - \cos R^2],$$

и при неограниченном возрастании R правая часть делается неопределенною.

128. Функция $\mathrm{B}(p, q)$. Выше мы предполагали, что контур C_n неограниченно удаляется по всем направлениям; но, очевидно, можно предположить, что удаляется в бесконечность только часть этого контура. Это имеет место в приведенном выше примере Кэли, а также и в следующем. Положим

$$f(x, y) = 4x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2},$$

где $p > 0$, $q > 0$. Функция $f(x, y)$ непрерывна и положительна в координатном угле xOy. Интегрируя эту функцию сначала внутри квадрата со стороною a, образованного осями координат и прямыми $x = a$, $y = a$, мы получим для двойного интеграла выражение:

$$\int_0^a 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^a 2y^{2q-1} e^{-y^2} dy.$$

При неограниченном возрастании a каждый из предыдущих интегралов имеет предел. В самом деле, если в интеграле, определяющем функцию $\Gamma(p)$ (§ 90),

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt,$$

мы положим $t = x^2$, то получим:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx. \tag{31}$$

Следовательно, искомый двойной интеграл имеет пределом произведение $\Gamma(p)\Gamma(q)$.

Проинтегрируем теперь ту же функцию внутри четверти круга, ограниченной осями координат и окружностью $x^2 + y^2 = R^2$. Вводя полярные координаты, мы получим для двойного интеграла выражение:

$$\int_0^R 2\rho^{2(p+q)-1} e^{-\rho^2} d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi \, d\varphi.$$

Таким образом, полагая

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi \, d\varphi, \tag{32}$$

мы найдем, что при неограниченном возрастании R искомый двойной интеграл имеет пределом

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p, q).$$

Приравняв оба предела, получим соотношение:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p, q). \tag{33}$$

Интеграл $\mathrm{B}(p, q)$ называется *эйлеровым интегралом первого вида*. Полагая $\sin^2\varphi = t$, мы можем представить его в виде:

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt. \tag{34}$$

Формула (33) приводит вычисление функции $B(p, q)$ к вычислению функции Г. Например, полагая, $p = q = \frac{1}{2}$, получим:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \Gamma(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi = \pi,$$

и следовательно, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Отсюда, по формуле (31), имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вообще, если $q = 1 - p$ и если p заключается между 0 и 1, то

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}\frac{dt}{t}.$$

Ниже мы увидим, что этот интеграл равен $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

129. Интегралы от неограниченных функций. Таким же образом мы определяем двойной интеграл функции $f(x, y)$, которая обращается в бесконечность в одной точке или вдоль некоторой линии. Для этого мы, прежде всего, выделяем точку или линию разрыва из области интегрирования, окружая их весьма малым контуром или контуром, весьма близким к линии разрыва, и затем беспредельно уменьшаем область, внутреннюю по отношению к этому контуру. Например, если вблизи точки (a, b) функция $f(x, y)$ имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^\alpha},$$

где абсолютное значение $\psi(x, y)$ заключено между двумя положительными числами m и M, то двойной интеграл $f(x, y)$ по любой области, не содержащей других точек разрыва кроме точки (a, b), имеет конечное значение, если α меньше единицы, и притом только в этом случае. Доказательство вполне аналогично тому, которое было дано только что (в § 127).

Рассмотрим еще функцию $f(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) она непрерывна в области A, определяемой неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant g(x)$, где $g(x)$ есть функция, непрерывная и положительная между a и b; 2) вблизи линии $y = g(x)$ она имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{[g(x) - y]^\alpha},$$

где α — положительный показатель, а числитель остается ограниченным. Двойной интеграл, распространенный на область δ, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$ и двумя кривыми $y=g(x)-\varepsilon$, $y=g(x)-\eta$, где ε и η положительны и бесконечно малы, имеет выражение

$$\int_a^b dx\int_\varepsilon^\eta \frac{\psi[x,\ g(x)-u]\,du}{u^\alpha}$$

и стремится к нулю, если только α меньше единицы. Двойной интеграл $f(x,\ y)$ по области A имеет, следовательно, конечное значение.

Если установлено, что двойной интеграл неограниченной функции по какой-либо области имеет определенное значение, то для вычисления этого интеграла можно поступать так же, как и в случае ограниченной функции. Пусть, например, требуется вычислить двойной интеграл функции

$$f(x,\ y)=\frac{\psi(x,\ y)}{(x-y)^\alpha}$$

по области, ограниченной прямыми $y=0$, $y=x$, $x=a$, причем функция ψ непрерывна в этой области, а α меньше единицы. Этот интеграл есть предел двойного интеграла

$$I'=\int_h^a dx\int_0^{x-h} f(x,\ y)\,dy,$$

когда h стремится к нулю. Но мы имеем:

$$\int_0^{x-h} f(x,\ y)\,dy=\int_0^x f(x,\ y)\,dy-\eta(x,\ y),$$

где $\eta(x,\ h)$ бесконечно мало и стремится *равномерно* к нулю вместе с h, когда x заключено в интервале $(0,\ a)$. Следовательно, мы можем написать:

$$I'=\int_h^a dx\int_0^x f(x,\ y)\,dy-\int_h^a \eta(x,\ h)\,dx,$$

и I' имеет пределом выражение:

$$I=\int_0^a dx\int_0^x f(x,\ y)\,dy.$$

Таким же образом мы нашли бы для I выражение:

$$I=\int_0^a dy\int_y^a f(x,\ y)\,dx.$$

Следовательно, формула Дирихле (§ 114) в данном случае имеет место.

Примечание. Если двойной интеграл от неограниченной функции, не сохраняющей постоянного знака в области R, не имеет определенного значения в этой области, то мы можем получить неопределенность, совершенно аналогичную той, о которой мы говорили, исследуя случай неограниченной области.

Допустим для определенности, что мы имеем лишь одну точку разрыва. Если мы выделим эту точку посредством кривой c, то двойной интеграл, распространенный на оставшуюся область, может иметь совершенно разные пределы в зависимости от вида кривой c. Возьмем, например,

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

причем областью интеграции служит прямоугольник R, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, где a и b положительны. Выделим прежде всего начало координат, отсекая для этого область, внутреннюю по отношению к прямоугольнику, ограниченному осями координат и прямыми $x = \varepsilon$, $y = \varepsilon'$, где ε и ε' — весьма малые положительные числа. Остающаяся область R' может быть разбита на три прямоугольника прямыми $x = 0$, $x = \varepsilon$, $x = a$, $y = 0$, $y = \varepsilon'$, $y = b$. С другой стороны, мы имеем:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

и последовательно применяя формулу (12) к каждому из трех прямоугольников, мы после некоторых простых преобразований находим:

$$\iint_{R'} f(x, y)\, dx\, dy = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Мы видим, что предел этого двойного интеграла изменяется вместе с пределом отношения $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ при ε и ε', стремящихся к нулю (ср. § 95).

130. Функциональное уравнение Абеля. Исследование одной задачи механики привело Абеля (Abel) к следующему уравнению:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{x - y}}, \tag{35}$$

где $\varphi(x)$ есть данная функция, непрерывная в интервале $(0, a)$, причем a положительно, а $f(y)$ — функция, подлежащая определению. Если эта функция непрерывна при $y = 0$, то ясно, что мы должны иметь $\varphi(0) = 0$. Это мы и предположим сначала.

Помножим обе части уравнения (35) на $\frac{1}{\sqrt{\alpha - x}}$, где α заключено в интервале $(0, a)$, и проинтегрируем обе части нового равенства между пределами 0 и α. Мы находим:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^\alpha dx \int_0^x \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{(\alpha - x)(x - y)}},$$

или, применяя формулу Дирихле к двойному интегралу правой части, получаем:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^\alpha f(y)\, dy \int_y^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha - x)(x - y)}}.$$

Первую квадратуру мы тотчас же берем, полагая

$$x = y\cos^2\varphi + \alpha\sin^2\varphi,$$

и мы имеем:

$$\int_0^a \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{a-x}} = \pi \int_0^a f(y)\,dy. \tag{36}$$

Обе части этого равенства обращаются в нуль при $a=0$; следовательно, нам достаточно будет написать, что производные их равны.

Производная правой части равна $\pi f(a)$; производная левой части, которая была уже нами вычислена (§ 96), имеет выражение

$$\int_0^a \frac{\varphi(x)+2x\varphi'(x)}{2a\sqrt{a-x}}\,dx,$$

или, как нетрудно проверить,

$$\int_0^a \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{a-x}} - \frac{1}{2}\left[\varphi(x)\sqrt{a-x}\right]_0^a.$$

По предположению, $\varphi(0)=0$; следовательно,

$$f(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{a-x}}. \tag{37}$$

Если $\varphi(0)$ не равно нулю, то мы можем написать уравнение (35) в эквивалентной форме (§ 96):

$$\varphi(x)-\varphi(0) = \int_0^x \frac{f(y)-\dfrac{\varphi(0)}{\pi\sqrt{y}}}{\sqrt{x-y}}\,dy.$$

Левая часть нового уравнения обращается в нуль при $x=0$, из формулы (37) мы находим, заменяя в ней a через y:

$$f(y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\varphi(0)}{\sqrt{y}} + \int_0^y \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{y-x}}\right]. \tag{38}$$

131. Поверхностные интегралы. Пусть будут S — правильная поверхность, а $F(M)$ — функция, непрерывным образом изменяющаяся вместе с положением точки M на этой поверхности. Мы можем повторить без изменений рассуждения § 111—112, заменяя части плоскости частями поверхности S. Представим себе, что мы разбили S на меньшие части $s_1, s_2, \ldots, s_n$, площади которых соответственно равны $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, и возьмем на s_i какую-нибудь точку M_i. Сумма $\Sigma F(M_i)\,\sigma_i$ стремится к определенному пределу, когда число n неограниченно возрастает, и притом так, что измерения каждой частичной области поверхности стремятся к нулю. Этот предел называется *поверхностным интегралом*, распространенным на поверхность S, и обозначается символом $\iint\limits_S F\,d\sigma$. Если координаты x, y, z точки поверхности S выражены в функции двух параметров u, v так, что точки S находятся во взаимно однозначном соответствии с точками области D плоскости (u, v), то $F(M)$ есть непрерывная функция $f(u, v)$ переменных (u, v) в этой области, и поверхностный интеграл, если применить обозначения § 124, имеет выражение:

$$\iint_D f(u, v) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Во многих вопросах, в которых мы встречаемся с поверхностными интегралами, $F(M)$ есть линейная функция направляющих косинусов нормали к поверхности. В дальнейшем мы будем предполагать, что эта поверхность имеет две различные стороны, и что если, например, одна из сторон окрашена в красный цвет, а другая — в синий, то мы не можем перейти с красной стороны на синюю по пути, лежащему на поверхности, не пересекая какую-нибудь из кривых, ограничивающих эту поверхность *. Будем рассматривать S как материальную поверхность, имеющую некоторую толщину, и возьмем две бесконечно близкие точки m, m', принадлежащие различным сторонам поверхности. Проведем в точке m нормаль mn в направлении, не пересекающем поверхность: для краткости мы будем говорить, что направление, определенное указанным образом, соответствует данной стороне поверхности. Направление нормали к другой стороне поверхности в точке m' будет противоположно первому. Например, всякая поверхность S, которую параллель к Oz не может встретить в нескольких точках, имеет, очевидно, две стороны; направления нормали составляют, соответственно, острый и тупой угол с осью Oz; *верхней стороной* является та, нормаль к которой составляет с Oz острый угол.

Пусть будут теперь $P(x, y, z)$, $Q(x\ y, z)$, $R(x, y, z)$ три функции, непрерывные на S; α, β, γ — углы, составляемые с осями координат направлением нормали, соответствующим определенной стороне поверхности. Поверхностные интегралы, наиболее часто встречающиеся в приложениях, суть интегралы вида:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma; \tag{39}$$

если мы меняем сторону поверхности, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а следовательно, и сам интеграл, меняют знак. Допустим опять, что координаты точки поверхности S выражены в функции двух параметров u, v так, что точки S находятся во взаимно однозначном соответствии с точками области D плоскости (u, v); мы имеем:

$$\frac{\cos\alpha}{\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}} = \frac{\cos\beta}{\dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}} = \frac{\cos\gamma}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{40}$$

и предшествующий интеграл принимает вид:

$$\pm\iint_D \left[P\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\, dv, \tag{41}$$

где следует взять знак + или знак — в зависимости от того, на какую сторону поверхности распространяется интеграл.

Если поверхность S составлена из нескольких кусков правильных поверхностей, что имеет место, например, в том случае, если эта поверхность имеет *ребра*, вдоль которых встречаются две правильных поверхности с различными касательными плоскостями, то интеграл по поверхности S есть, по определению, сумма интегралов, распространенных на каждую из этих правильных частей поверхности. В дальнейшем мы будем проводить рассуждения в предположении, что S является одной правильной поверхностью, но выводы, полученные ниже, применимы также и к этому более общему случаю, в чем нетрудно убедиться, прилагая рассуждения к каждой из правильных частей и складывая найденные формулы.

* Легко построить поверхность, не удовлетворяющую этому условию. Стоит только изогнуть прямоугольный лист бумаги $ABCD$ и склеить сторону BC со стороной AD так, чтобы точка C совпала с A, а точка B — с D.

Мы приходим к интегралам вида (39), обобщая определение криволинейных интегралов, если заменить линию поверхностью, а простой интеграл — двойным. Пусть будет

$$z = \varphi(x, y)$$

уравнение поверхности S, ограниченной замкнутым контуром Γ, причем функция $\varphi(x, y)$ непрерывна внутри области A плоскости xy, ограниченной замкнутою кривою C — проекцией контура Γ. Пусть, далее, $R(x, y, z)$ — функция, непрерывная на этой поверхности S. Двойной интеграл

$$\iint_A R[x, y, \varphi(x, y)]\, dx\, dy, \tag{42}$$

очевидно, аналогичен криволинейному интегралу, и мы могли бы взять это выражение за определение поверхностного интеграла. Но этот интеграл тотчас же приводится к поверхностному интегралу уже рассмотренного вида, так как мы можем написать его следующим образом (§ 132):

$$\iint_S R(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma,$$

где γ есть острый угол нормали к S с осью Oz; следовательно, он совпадает с поверхностным интегралом, распространенным на верхнюю сторону поверхности S. Тот же интеграл, но с измененным знаком, представил бы поверхностный интеграл, распространенный на нижнюю сторону S. В частности, мы можем сказать, что обыкновенный двойной интеграл $\iint f\, dx\, dy$ представляет собой поверхностный интеграл, распространенный на верхнюю сторону плоскости xy.

Пользуясь этим замечанием, мы приходим к более краткому обозначению поверхностного интеграла (39) при помощи формулы:

$$\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy; \tag{43}$$

при этом следует указать сторону поверхности, на которую распространяется интеграл. Но это обозначение менее отчетливо, чем предыдущие, (39) и (41), к которым всегда следует возвращаться для действительного вычисления интеграла.

Примечание. Пусть будет V — вектор с компонентами P, Q, R, имеющий началом точку $M(x, y, z)$ поверхности; выражение $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ представляет собой алгебраическую величину проекции этого вектора на положительное направление нормали в M. Следовательно, элемент двойного интеграла (39) по абсолютной величине равен объему цилиндра, имеющего основанием элемент $d\sigma$ поверхности S, а высотой — проекцию вектора V, выходящего из точки этого элемента, на нормаль к S в этой точке.

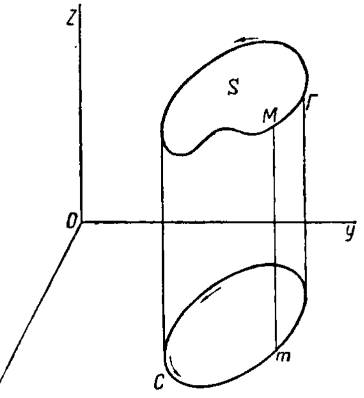
132. Формула Стокса. Если дана система прямоугольных осей координат Ox, Oy, Oz, условимся называть ***прямым направлением*** вращения направление вращения от Ox к Oy для наблюдателя, расположенного на Oz, у которого ноги находятся в точке O, а голова в направлении Oz. Если, например, триэдр имеет расположение, как на черт. 25, где плоскость чертежа есть yOz, а ось Ox направлена вперед, то положительное направление есть вращение справа налево; но результат, который мы получим, не зависит от расположения осей.

Пусть S — правильная двусторонняя поверхность, ограниченная замкнутою кривой Γ. Этот контур Γ может быть описан в двух противоположных направлениях; каждому из них мы поставим в соответствие одну сторону поверхности S при помощи следующего соглашения. Пусть AB — малая дуга кривой Γ, P — точка поверхности S, близкая к этой дуге; проведем в точке P такое направление нормали Pn, чтобы для наблюдателя, ноги которого находятся в P, а голова в направлении Pn, движение точки, пробегающей дугу AB, совершалось бы в прямом направлении.

Упомянутому направлению обхода контура Г мы ставим в соответствие ту сторону поверхности S, для которой направлением нормали является Pn. Например, если S есть часть поверхности, представляемой уравнением $z=\varphi(x, y)$, причем $\varphi(x, y)$ непрерывна в области, ограниченной контуром C, который является проекцией контура Г поверхности S на плоскость xy, то, когда точка M описывает контур Г так, что ее проекция m описывает C в прямом направлении, соответствующей стороной поверхности S является верхняя.

Предположим, что точки поверхности S взаимно однозначно соответствуют точкам области D плоскости (u, v), ограниченной кривою L. Так как эти вспомогательные переменные u, v не входят в окончательный результат, мы можем предположить, что плоскость (u, v) параллельна плоскости xy, и что оси Ou, Ov расположены так же, как Ox, Oy.

Когда точка (u, v) описывает контур L в прямом направлении (§ 92, примечание), то точка (x, y, z) описывает контур Г в некотором направлении, которое мы назовем *положительным направлением*: этому положительному направлению обхода Г соответствует определенная сторона поверхности, которую мы тоже назовем *положительной стороной*. Направляющие косинусы соответствующего направления нормали к поверхности выражаются формулами (40), *где перед* $\sqrt{EG-F^2}$ *надо взять знак* $+$. Для доказательства достаточно установить, что $\cos\gamma$ имеет тот же знак, что $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$. В самом деле, рассмотрим точку P на S и окружающую эту точку замкнутую кривую λ, достаточно малую, чтобы параллели к оси Oz встречали часть s поверхности S, ограниченную кривою λ, не более чем в одной точке; эта поверхность s проектируется на плоскость xy в малую область s', ограниченную кривою λ', которая является проекцией кривой λ. Этой области s поверхности S соответствует в плоскости (u, v) малая область r, ограниченная кривою l. Предположим, что в этой области якобиан $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ положителен; в таком случае, когда точка (u, v) описывает в прямом направлении контур l, точка $(x, y, 0)$ описывает λ' также в прямом направлении, а точка (x, y, z) описывает в положительном направлении контур λ. Этому положительному направлению обхода соответствует положительная сторона поверхности s, которая, согласно только что сделанному замечанию, есть верхняя сторона s. Следовательно, угол γ — острый; точно так же мы можем убедиться, что этот угол будет тупым для всех точек, в которых якобиан $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ отрицателен. Итак, для направляющих косинусов нормали к положительной стороне поверхности S мы имеем формулы:



Черт. 25.

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\, d\sigma &= \frac{D(y, z)}{D(u, v)}\, du\, dv,\\ \cos\beta\, d\sigma &= \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\, du\, dv,\\ \cos\gamma\, d\sigma &= \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Далее, пусть будет $\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx$ криволинейный интеграл, взятый по Г в положительном направлении; его можно заменить криволинейным интегралом

$$\int_l P(x, y, z)\left\{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right\},$$

взятым по L в прямом направлении. Применяя к этому последнему формулу Грина (§ 116), получаем:

$$\int_\Gamma P\,dx=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[P\frac{\partial x}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[P\frac{\partial x}{\partial u}\right]\right\}du\,dv=$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z, x)}{D(u, v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]du\,dv.$$

Последний интеграл, согласно формулам (44), тождественен с интегралом

$$\iint_S\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right]d\sigma=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy,$$

взятым по положительной стороне поверхности S. Путем круговой подстановки x, y, z мы получим две формулы, совершенно сходные с этою:

$$\int_\Gamma Q(x, y, z)\,dy=\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy-\frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz,$$

$$\int_\Gamma R(x, y, z)\,dz=\iint_S\frac{\partial R}{\partial y}dy\,dz-\frac{\partial R}{\partial x}dz\,dx;$$

складывая их с первою, получаем общую формулу Стокса:

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx; \quad (45)$$

при этом направление обхода контура Г и сторона поверхности, на которой производится интеграция, соответствуют друг другу в установленном выше смысле.

133. Применение поверхностных интегралов к вычислению объемов. Подобно тому как площадь замкнутой плоской кривой выражается криволинейным интегралом, взятым вдоль этой кривой, объем, ограниченный замкнутою поверхностью S, может быть выражен поверхностным интегралом. Рассмотрим сначала замкнутую поверхность S, которую каждая параллель к Oz встречает не более как в двух точках. Точки этой поверхности проектируются на плоскость xy внутрь некоторой области A, причем любая точка A представляет собою проекцию двух точек m_1 и m_2 поверхности S. Пусть будут $z_1=f_1(x, y)$, $z_2=f_2(x, y)$ уравнения двух частей S_1 и S_2 поверхности, описанных точками m_1 и m_2 соответственно ($f_1<f_2$). Искомый объем равен разности двух двойных интегралов

$$V=\iint_A f_2(x, y)\,dx\,dy-\iint_A f_1(x, y)\,dx\,dy,$$

из коих первый есть не что иное, как поверхностный интеграл $\iint z\,dx\,dy$, распространенный на *верхнюю* сторону S_2, а второй — интеграл $\iint z\,dx\,dy$, взятый по *верхней* стороне S_1. Разность их равна, следовательно, интегралу $\iint z\,dx\,dy$, распространенному на всю поверхность S и притом на ту ее сторону, которая соответствует направлению внешней нормали. Из соображений симметрии мы можем взять за выражение объема любой из поверхностных интегралов

$$\iint\limits_S z\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_S x\,dy\,dz, \qquad \iint\limits_S y\,dz\,dx,$$

каждый из которых берется по внешней стороне поверхности, и формула распространяется на объем, ограниченный произвольною поверхностью (ср. § 92, примечание).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Проведем в какой-нибудь точке M цепной линии, представляемой в прямоугольных координатах уравнением

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

касательную, продолжим ее до точки ее встречи T с осью Ox и будем вращать фигуру около этой оси. Выразить разность площадей, описанных дугою цепной линии AM, где A есть вершина цепной линии, и касательною MT: 1) в функции абсциссы точки M; 2) в функции абсциссы точки T.

2. Пусть будут Ox, Oy, Oz прямоугольные оси. Рассмотрим линейчатую поверхность, образованную по следующему закону: плоскость zOA вращается вокруг оси Oz; образующая D, лежащая в этой плоскости, наклонена к Oz под постоянным углом, тангенс которого равен λ, и отсекает на OA отрезок OC, равный $\lambda a\theta$, где a обозначает данную длину, а θ есть угол между двумя плоскостями zOx, zOA.

1) Вычислить объем, ограниченный линейчатою поверхностью и плоскостями xOy, zOx, zOA, причем угол θ между двумя последними плоскостями меньше 2π.

2) Вычислить площадь части поверхности, ограниченной плоскостями xOy, zOx, zOA.

3. Вычислить объем, ограниченный поверхностью эллиптического параболоида, представляемого в прямоугольных координатах уравнением

$$\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2},$$

плоскостью xy и поверхностью цилиндра $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

4. Вычислить площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного четырьмя софокусными кривыми второго порядка

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

соответствующими значениям $\frac{c^2}{3}$, $\frac{2c^2}{3}$, $\frac{4c^2}{3}$, $\frac{5c^2}{3}$ параметра λ.

5. Дана кривая, представляемая в прямоугольных координатах уравнением

$$y = \sqrt{2}\,(\sin x - \cos x),$$

причем x изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{5\pi}{4}$. Требуется вычислить:

1) площадь, заключающуюся между этою кривою и осью Ox;
2) объем, образованный этою площадью при вращении ее вокруг Ox;
3) поверхность, ограничивающую этот объем.

6. Пусть будут Ox и Oy прямоугольные оси координат, и A и B — точки на оси Oy. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int [\varphi(y)\, e^x - my]\, dx + [\varphi'(y)\, e^x - m]\, dy,$$

взятый вдоль пути AMB, соединяющего точки A и B, имеющего произвольный вид, но ограничивающего вместе с отрезком AB площадь $AMBA$ данной величины S; здесь m — постоянное, а функция $\varphi(y)$ и ее производная $\varphi'(y)$ непрерывны.

7. Вычисляя двумя различными способами двойной интеграл

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin ax\, dy\, dx,$$

показать, что при a, отличном от нуля, имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \pm \frac{\pi}{2}.$$

8. Найти площадь части поверхности эллипсоида или гиперболоида вращения, заключающуюся между двумя параллельными кругами.

9. *Поверхность трехосного эллипсоида.* Половина всей поверхности $\mathfrak{A}$ равна двойному интегралу:

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = \iint \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^4} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^4} y^2}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\, dx\, dy,$$

взятому внутри эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Из способов, предложенных для приведения этого двойного интеграла к эллиптическим интегралам, наиболее простой принадлежит Каталану; этот способ состоит в преобразовании, указанном в § 115. Обозначая через v функцию под знаком двойного интеграла и изменяя v от 1 до $+\infty$, мы найдем, что двойной интеграл равен пределу при бесконечном l следующей разности:

$$\frac{\pi abl\,(l^2 - 1)}{\sqrt{\left(l^2 - 1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(l^2 - 1 + \frac{c^2}{b^2}\right)}} - \pi ab \int_1^l \frac{(v^2 - 1)\, dv}{\sqrt{\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{b^2}\right)}}.$$

Это выражение имеет неопределенный вид, но мы можем представить его в виде:

$$\int_1 \frac{v^2\, dv}{\sqrt{\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{b^2}\right)}} = \left[\frac{\sqrt{\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{b^2}\right)}}{v}\right]_1^l +$$

$$+ \int_1 \frac{\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) dv}{v^2\sqrt{\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2 - 1 + \frac{c^2}{b^2}\right)}},$$

и легко видеть, что предел приведенного выше выражения равен:

$$\pi ab\left[\frac{c^2}{ab}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\int\limits_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right].$$

10. Если из центра эллипсоида с осями $2a$, $2b$, $2c$ опустим перпендикуляры на касательные плоскости к этому эллипсоиду, то площадь подэрной поверхности равна площади поверхности эллипсоида с полуосями $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{ab}{c}$.

[Вильям Робертс (William Roberts), *Journal de Liouville*, т. XI, 1-я серия, стр. 81.]

11. Показать, вычисляя двумя различными способами двойной интеграл от

$$(x-y)^n f(y),$$

распространенный на площадь треугольника, ограниченного прямыми $y=x_0$, $y=x$, $x=X$, что

$$\int\limits_{x_0}^{X} dx\int\limits_{x_0}^{x}(x-y)^n f(y)\,dy=\int\limits_{x_0}^{X}\frac{(X-y)^{n+1}}{n+1}f(y)\,dy.$$

Вывести отсюда соотношение:

$$\int\limits_{x_0}^{x} dx\int\limits_{x_0}^{x} dx\ldots\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-y)^n f(y)\,dy.$$

Доказать также формулу:

$$\int\limits_{x_0}^{x} x\,dx\int\limits_{x_0}^{x} x\,dx\ldots\int\limits_{x_0}^{x} x\,dx\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\int\limits_{x_0}^{x}(x^2-y^2)^n f(y)\,dy,$$

и проверить эти формулы при помощи диференцирования под знаком интеграла.

12. Пример Шварца (примечание на стр. 303). Дан круглый цилиндр с радиусом основания r и высотой h; разделим высоту на m равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные плоскостям оснований; далее, в полученные сечения вписываем правильные выпуклые n-угольники так, чтобы образующая цилиндра, проходящая через вершину одного из многоугольников, делила пополам дугу, стягиваемую стороною соседнего многоугольника. Вершины этих многоугольников являются вершинами вписанной многогранной поверхности, состоящей из mn равных между собою равнобедренных треугольников, и площадь этой многогранной поверхности равна

$$2mnr\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4+\frac{h^2}{m^2}}.$$

Предел этого выражения при неограниченном увеличении чисел m и n зависит от предела отношения $\frac{m}{n^2}$. Этот предел равен $2\pi rh$ лишь в том случае, когда его отношение стремится к нулю.

ГЛАВА VII.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛОВ.

I. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ.

134. Тройные интегралы. При определении тройных интегралов мы поступаем совершенно аналогично тому, как поступали при определении двойных интегралов (§ 111—112). Здесь следует лишь заменить области двух измерений областями трех измерений и площадь — объемом. Пусть будет $F(x, y, z)$ ограниченная функция, определенная в ограниченной области пространства D. Представим себе, что эта область произвольным способом разбита на n частичных областей $d_1, d_2, \ldots, d_n$, объемы которых соответственно равны $v_1, v_2, \ldots, v_n$, и обозначим через M_i и m_i верхнюю и нижнюю границы F в области d_i. Суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i v_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i$$

стремятся соответственно к пределам I, I', когда число n неограниченно возрастает, и притом так, что каждая из частичных областей безгранично уменьшается во всех своих измерениях, и мы имеем $I' \leqslant I$.

Функция $F(x, y, z)$ называется *интегрируемой* в области D, если мы имеем $I' = I$; общий предел сумм S и s называется тройным интегралом функции $F(x, y, z)$, распространенным на область D. Его обозначают символом:

$$I = \iiint\limits_{D} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

область D называется областью интеграции. Число I есть также предел суммы

$$S' = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i, \tag{1}$$

где (ξ_i, η_i, ζ_i) суть координаты какой-либо точки области d_i или ее границы.

Всякая непрерывная функция интегрируема. Это справедливо и в отношении всякой ограниченной функции, имеющей некоторое число точек разрыва, если только все эти точки могут быть заключены внутри области, объем которой можно взять меньше любого положительного числа. Это имеет место, например, в том случае, когда ограниченная функция $F(x, y, z)$ имеет в области D одну или несколько (правильных) поверхностей разрыва.

Тройные интегралы встречаются в различных вопросах механики, в частности, при определении массы или центра тяжести твердого тела. Предположим, что область D заполнена неоднородным веществом, и пусть $\mu(x, y, z)$ есть плотность в точке (x, y, z), т. е. предел отношения массы, заключенной в шаре бесконечно малого радиуса, описанном из точки (x, y, z) как из центра, к объему этого шара. Если μ_1 и μ_2 суть соответственно наибольшее и наименьшее значения μ в области d_i, то ясно, что масса, содержащаяся в этой области, заключена между $\mu_1 v_i$ и $\mu_2 v_i$; следовательно, она равна $v_i \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, где точка (ξ_i, η_i, ζ_i) надлежащим образом выбрана в d_i. Вся масса равна, следовательно, тройному интегралу $\iiint \mu \, dx\,dy\,dz$, взятому по области D.

135. Способы вычисления. Рассмотрим сначала функцию $F(x, y, z)$, непрерывную в области D, ограниченной двумя плоскостями $z = z_0$, $z = Z$, параллельными плоскости $z = 0$, и цилиндром с образующими, параллельными Oz, сечение которого плоскостью xy есть замкнутая кривая C, ограничивающая плоскую область A. Предположим, что эта плоская область A разбита на меньшие области $a_1, a_2, \ldots, a_n$, площади которых соответственно равны $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, и рассмотрим цилиндры с образующими, параллельными Oz, имеющие основанием области $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Мы вычислим сначала, как и в § 113, главную часть тройного интеграла, распространенного на малую цилиндрическую область D_i, имеющую основанием плоскую область a_i. Представим себе, что эта область D_i сама разбита на малые цилиндрические области плоскостями $z = z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, причем $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ образуют возрастающую последовательность чисел, заключенных между z_0 и Z. Тройной интеграл, распространенный на область D_i, на основании теоремы о среднем равен

$$\omega_i [F(\xi_{i1}, \eta_{i1}, \xi_{i1})(z_1 - z_0) + F(\xi_{i2}, \eta_{i2}, \zeta_{i2})(z_2 - z_1) + \ldots],$$

где $(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik})$ суть координаты некоторой точки внутри малого цилиндра, определенного в D_i плоскостями $z = z_{k-1}$, $z = z_k$. С другой стороны, пусть будут (ξ_i, η_i) координаты какой-либо точки области a_i; мы имеем, на основании теоремы о среднем для простого интеграла:

$$\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i, \eta_i, z)\,dz = F(\xi_i, \eta_i, \zeta_1)(z_1 - z_0) + F(\xi_i, \eta_i, \zeta_2)(z_2 - z_1) + \ldots,$$

где ζ_k содержится между z_{k-1} и z_k. Следовательно, тройной интеграл, распространенный на область D_i, можно написать еще так:

$$\omega_i \left[\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i, \eta_i, z)\,dz + \varepsilon_1 (z_1 - z_0) + \ldots + \varepsilon_k (z_k - z_{k-1}) + \ldots \right],$$

где мы полагаем

$$F(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik}) = F(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) + \varepsilon_k;$$

так как точки (ξ_i, η_i, ζ_k) и $(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik})$ принадлежат одному и тому же частичному цилиндру, то все абсолютные значения $|\varepsilon_k|$ будут меньше любого положительного числа ε, если измерения области a_i и разности $z_k - z_{k-1}$, в свою очередь, меньше другого положительного числа η, зависящего только от ε. Следовательно, тройной интеграл по цилиндрической области D_i равен

$$\omega_i\left[\int_z^Z F(\xi_i, \eta_i, z)\,dz + \rho_i\right],$$

где (ξ_i, η_i) суть координаты какой-либо точки области a_i, а ρ_i *равномерно* стремится к нулю вместе с наибольшим измерением этой области. Искомый тройной интеграл равен, следовательно, пределу суммы $\sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i$, где мы обозначаем:

$$\Phi(x, y) = \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\,dz. \tag{2}$$

Этот предел равен двойному интегралу функции $\Phi(x, y)$, распространенному на область A, и мы имеем:

$$\iiint_D F(x, y, z)\cdot dx\,dy\,dz = \iint_A \Phi(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_A dx\,dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\,dz. \tag{3}$$

Выше мы видели, что вычисление двойного интеграла, в свою очередь, приводится к квадратурам. Если, например, область D есть параллелепипед, образованный шестью плоскостями $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, $z = z_0$, $z = Z$, то область A есть прямоугольник, и тройной интеграл имеет выражение:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0} F(x, y, z)\,dz. \tag{4}$$

Смысл этого символа совершенно ясен. Мы выполняем первую интеграцию, рассматривая x и y как постоянные; результат есть функция двух переменных x и y, которую мы интегрируем затем между пределами y_0 и Y, считая x постоянным, а y — переменным. Результат этой второй интеграции зависит уже только от x, и мы снова интегрируем его между пределами x_0 и X.

Очевидно, что существует столько же способов выполнить вычисление, сколько имеется перестановок из трех букв, т. е. шесть. Мы можем, например, написать тройной интеграл так:

$$\int_{z_0}^{Z} dz \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} F(x, y, z)\,dy = \int_{z_0}^{Z} \Psi(z)\,dz,$$

обозначая через $\Psi(z)$ двойной интеграл функции $F(x, y, z)$, распространенный на прямоугольник, образованный прямыми $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. К тому же выражению мы пришли бы, разбивая прежде всего область D на малые параллелепипеды тремя системами плоскостей, параллельных плоскостям координат, и вычисляя часть S', происходящую от слоя параллелепипедов, заключенного между двумя соседними плоскостями $z=z_{l-1}$, $z=z_l$; при подходящем выборе точек (ξ, η, ζ) этот слой дает в составе S' сумму

$$\Psi(z_{l-1})(z_l-z_{l-1}),$$

и рассуждение заканчивается, как и выше.

Формула (3) применима также и к ограниченной функции $F(x, y, z)$, имеющей в области интеграции одну или несколько поверхностей разрыва. Предположим, например, что функция F разрывна на некоторых частях двух поверхностей S_1 и S_2, уравнения которых суть:

$$z=\varphi_1(x, y), \qquad (S_1)$$

$$z=\varphi_2(x, y), \qquad (S_2)$$

где φ_1 и φ_2 — две функции, непрерывные в области A $(z_0<\varphi_1<\varphi_2<Z)$. Эти две поверхности S_1 и S_2 разбивают область D на три области, в каждой из которых функция F непрерывна. Для определенности мы предположим, что

1) $F=f_1(x, y, z)$ между плоскостью $z=z_0$ и S_1;
2) $F=f_2(x, y, z)$ между S_1 и S_2;
3) $F=f_3(x, y, z)$ между S_2 и плоскостью $z=Z$;

Каждая из функций f_1, f_2, f_3 предполагается непрерывной в соответствующей области. Мы имеем возможность применить формулу (3) к вычислению тройного интеграла, если положим (§ 114):

$$\int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz=\int_{z_0}^{\varphi_1} f_1(x, y, z)\, dz+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_2(x, y, z)\, dz+\int_{\varphi_2}^{Z} f_3(x, y, z)\, dz.$$

Это замечание позволяет нам вычислить тройной интеграл непрерывной функции $F(x, y, z)$ по области D, ограниченной таким же, как и раньше, цилиндром и двумя поверхностями $z_1=\varphi_1(x, y)$, $z_2=\varphi_2(x, y)$, где φ_1 и φ_2 непрерывны в пределах плоской области A. Для этого стоит лишь взять две вспомогательных плоскости $z=z_0$, $z=Z$ $(z_0<\varphi_1<\varphi_2<Z)$ и вспомогательную функцию $F(x, y, z)$, равную $F(x, y, z)$ в области D и обращающуюся в нуль вне этой области.

Рассуждение § 114 прилагается без изменений, и тройной интеграл функции $F(x, y, z)$ по области D равен

$$\iint_A dx\, dy \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x, y, z)\, dz.$$

Если контур C области A образован двумя отрезками прямых, параллельных Oy, и двумя дугами кривых $y_1=\psi_1(x)$, $y_2=\psi_2(x)$ $(\psi_1<\psi_2)$, то мы имеем:

$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} dy \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x, y, z)\,dz. \tag{5}$$

Пределы φ_1 и φ_2 первой интеграции зависят одновременно от x и от y, пределы ψ_1 и ψ_2 зависят только от x, и наконец, a и b постоянны.

Если область интегрирования D ограничена замкнутой поверхностью Σ, которую параллель к какой-либо из осей координат встречает не более как в двух точках (какова, например, выпуклая поверхность), то мы можем выполнить квадратуры в любой последовательности, но пределы будут вообще совершенно разными в зависимости от порядка, в котором мы производим интегрирование.

Пример. Пусть требуется вычислить тройной интеграл $\iiint z\,dx\,dy\,dz$, распространенный на часть шара $x^2+y^2+z^2=R^2$, заключенную в пределах трехгранника $Oxyz$. Если мы интегрируем сначала по переменному z, затем по переменному y и, наконец, по переменному x, то пределы будут таковы: при постоянных x и y z может изменяться от нуля до $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; при данном x y может изменяться от нуля до $\sqrt{R^2-x^2}$; наконец, x изменяется от нуля до R. Мы имеем, следовательно,

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz;$$

выполняя квадратуры, находим:

$$\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy = \left|\frac{1}{2}(R^2-x^2)\,y - \frac{1}{6}y^3\right|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

и нам остается лишь вычислить определенный интеграл:

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^R (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx;$$

при помощи подстановки $x=R\cos\varphi$ этот интеграл принимает вид:

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\sin^4\varphi\,d\varphi.$$

Искомый тройной интеграл равен, следовательно, $\frac{\pi R^4}{16}$.

Примечание. Вместо того чтобы вычислять сначала сумму элементов, происходящую от ряда цилиндрических областей, мы могли бы поступить иначе. Пусть будет D ограниченная область, заключенная между двумя параллельными плоскостями $z=z_0$, $z=Z$; разделим ее сначала на ряд слоев плоскостями $z=z_i$ $(i=1, 2, \ldots, m-1)$, где $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ образуют возрастающую последовательность чисел, заключенных между z_0 и Z. Разобьем затем каждый из этих слоев на малые цилиндрические области; рассуждая, как в § 135, мы видим, что главная часть тройного интеграла, распространенного на слой, содержащийся между плоскостями $z=z_{l-1}$, $z=z_l$, имеет значение

$$(z_l-z_{l-1})\iint\limits_{A_{l-1}} F(x, y, z_{l-1})\,dx\,dy,$$

где A_{l-1} есть плоская область, общая области D и плоскости $z=z_{l-1}$. Следовательно, если мы положим

$$\Psi(z)=\iint\limits_{A_z} F(x, y, z)\,dx\,dy,$$

где A_z есть плоская область, аналогичная только что определенным, то тройной интеграл будет иметь выражение:

$$\int\limits_{z_0}^{Z} \Psi(z)\,dz.$$

Чтобы вычислить тройной интеграл, распространенный на произвольную область D, следует разбить эту область на сумму областей, подобных тем, которые мы рассматривали, например таких, что прямая, параллельная какому-либо постоянному направлению, встречает граничную поверхность не более как в двух точках.

136. Формула Остроградского (Грина). Для тройных интегралов существует формула, вполне сходная с формулой (15) § 116. Рассмотрим сначала замкнутую поверхность S, которая пересекается с каждою прямой, параллельною оси Oz, не более чем в двух точках; пусть будет $R(x, y, z)$ функция, непрерывная вместе со своею производною $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ внутри этой поверхности. Все точки поверхности S проектируются на плоскость xy точками некоторой области A, ограниченной замкнутым контуром C. Всякой точке (x, y) области A соответствуют две точки поверхности S с координатами $z_1=\varphi_1(x, y)$ и $z_2=\varphi_2(x, y)$. Таким образом поверхность S разделится на две части S_1 и S_2; мы предположим, что $z_1<z_2$. Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz,$$

распространенный на область, ограниченную замкнутою поверхностью S. Производя первую интеграцию по z между пределами z_1 и z_2 (§ 135), мы получим $R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)$ и должны затем взять двойной интеграл

$$\iint [R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)]\,dx\,dy,$$

распространенный на область A. Но двойной интеграл $\iint R(x, y, z_2)\,dx\,dy$ есть не что иное, как интеграл по поверхности (§ 131)

$$\iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

взятый по верхней стороне поверхности S_2. Точно так же двойной интеграл от $R(x, y, z_1)$, взятый с обратным знаком, есть интеграл по поверхности

$$\iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

взятый по нижней стороне поверхности S_1. Следовательно, складывая оба интеграла, мы можем написать:

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

причем второй интеграл взят по *внешней* стороне поверхности S.

При помощи известных уже рассуждений эта формула может быть распространена на объем, ограниченный поверхностью произвольного вида.

Перемещая x, y, z, мы получим из последней формулы две аналогичных формулы:

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz,$$

$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S Q(x, y, z)\,dz\,dx.$$

Складывая эти три формулы, мы приходим к общей формуле Остроградского (Грина) для тройного интеграла:

$$\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dx\,dz + R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

где, как и выше, интегралы в правой части берутся по внешней стороне поверхности.

Например, полагая $P = x$, $Q = R = 0$ или $Q = y$, $P = R = 0$ или $R = z$, $P = Q = 0$, мы видим, что объем, ограниченный поверхностью S, равен любому из трех интегралов по поверхностям:

$$\iint_S x\,dy\,dz, \qquad \iint_S y\,dz\,dx, \qquad \iint_S z\,dx\,dy.$$

137. Соотношение между двумя элементами поверхности. Чтобы вывести формулу замены переменных в тройном интеграле, мы можем применить способ, совершенно аналогичный способу § 117—118. Сначала мы выведем предварительную формулу. Пусть будут

$$x = f(x', y', z'), \quad y = \varphi(x', y', z'), \quad z = \psi(x', y', z') \tag{6}$$

формулы, определяющие точечное преобразование пространства; x', y', z' суть прямоугольные координаты точки m' по отношению к системе прямоугольных координат $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, а x, y, z — координаты соответствующей точки m в прямоугольной системе Ox, Oy, Oz, *имеющей тоже расположение осей, что и первая*, так что обе системы можно совместить. Мы предположим: 1) что точка x, y, z описывает ограниченную область (E), когда точка x', y', z' описывает другую ограниченную область (E'); 2) что точки этих двух областей находятся во взаимно однозначном соответствии; 3) что функции f, φ, ψ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в (E'), и что якобиан $\dfrac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}$ не обращается в нуль в (E').

Соответствие точек обеих областей может быть прямым или обратным. Пусть будут $m't_1'$, $m't_2'$, $m't_3'$ три линейных элемента, образующих в области (E') некоторый триэдр; этим линейным элементам соответствуют в области (E) линейные элементы mt_1, mt_2 mt_3, которые также образуют некоторый триэдр, ибо якобиан функций f, φ, ψ не равен нулю в токе m' (ср. упражнение 13, § 65).

Если этот триэдр $mt_1t_2t_3$ имеет то же расположение осей, что и триэдр $m't'_1\ t'_2\ t'_3$, то соответствие, определяемое формулами (6), называется ***прямым***, в противном случае оно называется *обратным*. Это определение можно заменить следующим. Пусть S, S' — две соответствующие друг другу поверхности в областях E, E', каждая из которых имеет две различных стороны, а Γ, Γ' — замкнутые кривые, которыми эти поверхности ограничены. Выберем на этих контурах два направления обхода, соответствующих друг другу на основании формул (6); этим направлениям обхода отвечает вполне определенная сторона каждой поверхности, на основании соглашения, принятого в § 132. Если эти две стороны поверхностей S, S' также соответствуют друг другу в силу формул (6), то соответствие, определяемое этими формулами, есть прямое; в противном случае оно является обратным.

Рассмотрим теперь две стороны поверхностей S, S', соответствующие друг другу в рассмотренном точечном преобразовании, и пусть будут (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ углы, образуемые с осями направлениями нормалей к этим сторонам. Предположим, что координаты точек обеих поверхностей S, S' выражены в функции двух параметров u и v; выше было объяснено, какой смысл мы вкладываем в выражения: положительное направление на контуре, положительная сторона поверхности. Если соответствие является прямым, то положительной стороне S соответствует положительная сторона S', и на основании формул (44) § 132 и аналогичных формул, относящихся к поверхности S', мы имеем:

$$\cos\gamma\, d\sigma = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv, \quad \cos\gamma'\, d\sigma' = \frac{D(x', y')}{D(u, v)}\, du\, dv,$$

где $d\sigma$ и $d\sigma'$ суть элементы площадей поверхностей S и S'. Если соответствие является обратным, то положительной стороне S соответствует отрицательная сторона S', и во второй формуле $\cos\gamma'$ следует заменить через $-\cos\gamma'$. Деля эти формулы почленно, мы находим:

$$\frac{\cos\gamma\, d\sigma}{\cos\gamma'\, d\sigma'} = \pm \frac{D(x, y)}{D(u, v)} : \frac{D(x', y')}{D(u, v)}, \tag{7}$$

где следует взять знак $+$ или знак $-$ в зависимости от того, является ли соответствие прямым или обратным.

Из этого соотношения вспомогательные переменные u и v можно исключить; в самом деле, мы имеем:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} \cdot \frac{D(x', y')}{D(u, v)} + \frac{D(f, \varphi)}{D(y', z')} \cdot \frac{D(y', z')}{D(u, v)} + \frac{D(f, \varphi)}{D(z', x')} \cdot \frac{D(z', x')}{D(u, v)}.$$

Так как полученное соотношение однородно относительно якобианов $\frac{D(x', y')}{D(u, v)}$, то мы можем заменить в нем эти якобианы пропорциональными им косинусами $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$; мы приходим к следующему соотношению:

$$\cos\gamma\, d\sigma = \pm \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(y', z')} \cos\alpha' + \frac{D(f, \varphi)}{D(z', x')} \cos\beta' + \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} \cos\gamma' \right| d\sigma'. \tag{7'}$$

Аналогичные формулы мы имеем для $\cos\alpha\, d\sigma$, $\cos\beta\, d\sigma$, и эти формулы позволяют заменить любой поверхностный интеграл, распространенный на S, интегралом по поверхности S'.

138. Замена переменных. *Первый способ.* Пусть будут D, D' — две соответствующие друг другу области, взятые в областях (E), (E') и ограниченные замкнутыми поверхностями S, S'. Найдем сначала выражение отношения $\frac{V}{V'}$ объемов этих двух областей.

Мы имеем:

$$V=\int_S z\,dx\,dy=\int_S z\cos\gamma\,d\sigma, \tag{8}$$

где $d\sigma$ есть элемент поверхности S, а γ угол, составляемый с осью Oz направлением внешней нормали. Формула (7') позволяет заменить поверхностный интеграл (8) поверхностным интегралом, распространенным на S'. Мы имеем, таким образом,

$$V=\pm\iint_{S'}\psi(x',y',z')\left[\cos\alpha'\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}+\cos\beta'\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}+\cos\gamma'\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right]d\sigma',$$

где α', β', γ' — углы, составляемые с осями $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ внешнею нормалью к поверхности S'; при этом мы должны взять перед интегралом знак $+$ или знак $-$ в зависимости от того, является ли соответствие прямым или обратным. Этот новый интеграл есть не что иное, как поверхностный интеграл (см. § 131, 132 и 137)

$$\iint_{S'}\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}dy'\,dz'+\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}dz'\,dx'+\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}dx'\,dy',$$

распространенный на внешнюю сторону поверхности S'.

Применим к этому последнему интегралу общую формулу Грина; мы получаем:

$$V=\pm\iiint_{E}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}\right]+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}\right]+\frac{\partial}{\partial z'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right]\right\}dx'\,dy'\,dz'. \tag{8'}$$

Развертывая выражение подинтегральной функции, мы получаем члены двоякого рода; одни из них, как $\psi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial y'}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}$, содержат производную второго порядка, но эти члены, как нетрудно видеть, попарно уничтожаются. Что касается членов, содержащих лишь производные первого порядка, то сумма их равна

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}=\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}.$$

Мы имеем, следовательно,

$$V=\pm\iiint_{E'}\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}dx'\,dy'\,dz',$$

и наконец, применяя теорему о среднем,

$$V=\pm V'\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)}, \tag{9}$$

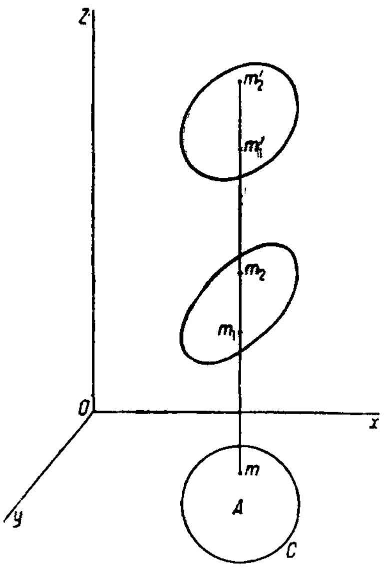
где (ξ,η,ζ) — координаты некоторой точки области E'. Из этой формулы мы прежде всего заключаем, что соответствие является *прямым* или *обратным* в зависимости от того, положителен или отрицателен якобиан $\dfrac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}$ (ср. упражнение 13, § 65), так как V и V' существенно положительны, и мы можем переписать формулу (9) следующим образом:

$$V=V'\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|. \tag{9'}$$

Эта новая формула (9') совершенно аналогична формуле (17) главы VI, и мы выводим из нее тот же самый ряд следствий. В частности, мы непосредственно получаем общую формулу замены переменных в тройных интегралах; для этого достаточно воспроизвести без изменений метод § 118. Если $F(x, y, z)$ есть функция, интегрируемая в области E, то мы имеем:

$$\iiint\limits_{E} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{E'} F(f, \varphi, \psi) \left| \frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x', y', z')} \right| dx'\, dy'\, dz'. \quad (10)$$

§ 139. Замена переменных. Второй способ. Формулу (10) можно доказать также следующим способом. Заметим, прежде всего, что если эта формула доказана для двух или нескольких частных замен переменных, то, на основании известных свойств функционального определителя (§ 52), она будет также верна для замены переменных, получающихся от последовательного выполнения всех этих частных замен. Далее, если формула (10) верна для нескольких областей пространства, то она будет также верна и для области, получающейся от сложения всех предыдущих областей. После этого замечания мы докажем сначала, как и в случае двойного интеграла, что формула (10) применима ко всякому преобразованию, при котором заменено только одно независимое переменное, например к преобразованию вида:



Черт. 26.

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \psi(x', y', z'). \quad (11)$$

Предположим, что обе точки $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ отнесены к одной и той же системе осей (черт. 26), и что каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность, ограничивающую область E, не более, чем в двух точках. На основании формул (11) этой поверхности соответствует некоторая другая поверхность E'. Опишем около обеих поверхностей цилиндр, образующие которого параллельны Oz; он пересечется с плоскостью $z=0$ по некоторой замкнутой кривой C. Каждая точка m области A, ограниченной контуром C, есть проекция некоторых двух точек m_1, m_2 с координатами z_1, z_2 первой поверхности и некоторых двух точек m_1', m_2' с координатами z_1', z_2' второй поверхности. Выберем обозначения таким образом, чтобы было $z_1 < z_2$ и $z_1' < z_2'$. По формулам (11) точке m_1 соответствует или точка m_1', или точка m_2'. Чтобы различить оба эти случая, достаточно обратить внимание на знак $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$. Если $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$ положительно, то z возрастает вместе с z'; тогда точке m_1 соответствует точка m_1' и точке m_2 — точка m_2'. Напротив, если $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$ отрицательно, то, при возрастании z', z убывает; следовательно, точке m_1 соответствует точка m_2' и точке m_2 — точка m_1'. В первом случае имеем:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz = \int_{z_1'}^{z_2'} F[x, y, \psi(x, y, z')]\frac{\partial\psi}{\partial z'}dz';$$

напротив, во втором случае:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz = -\int_{z_1'}^{z_2'} F[x, y, \psi(x, y, z')]\frac{\partial\psi}{\partial z'}dz'.$$

В обоих случаях мы можем написать:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz = \int_{z_1'}^{z_2'} F[x, y, \psi(x, y, z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|dz'. \tag{12}$$

Если теперь мы возьмем от обеих частей этого равенства двойные интегралы, распространенные на область A, то двойной интеграл

$$\iint_A dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz$$

будет не что иное, как тройной интеграл

$$\iiint F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

взятый в области E пространства. Точно так же, заменяя в правой части равенства (12) x через x', а y через y', мы видим, что двойной интеграл от правой части равен тройному интегралу от

$$F[x', y', \psi(x', y', z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|,$$

взятому в области E'. Следовательно, в этом частном случае имеем:

$$\iiint_E F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{E'} F[x', y', \psi(x', y', z')]\left|\frac{\psi}{\partial z'}\right| dx'\,dy'\,dz'.$$

Но здесь определитель $\frac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}$ обращается в $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$, и следовательно, для замены переменных вида (11) формула (10) доказана.

Общая формула (10) применима также к замене переменных, определяемой формулами:

$$x=f(x', y', z'),\quad y=\varphi(x', y', z'),\quad z=z', \tag{13}$$

где не заменено одно только переменное z. Предположим, что эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками двух областей E, E' пространства; тогда, в частности, будут однозначно соответствовать друг другу точки сечений R, R', получающихся от пересечения областей E и E' одною и тою же плоскостью, параллельною плоскости $z=0$. Поэтому, по формуле замены переменных в двойном интеграле, будет:

$$\iint\limits_{R} F(x,y,z)\,bxdy=\iint\limits_{R'} F[f(x', y', z'), \varphi(x', y', z'), z']\left|\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right| dx'dy'; \tag{14}$$

обе части этого равенства зависят только от переменного $z=z'$. Интегрируя еще раз между теми пределами z_1 и z_2, в которых переменное z может изменяться в области E, мы получим формулу:

$$\iiint\limits_{E} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{E'} F[f(x', y', z'), \varphi(x', y', z'), z']\left|\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right| dx'\,dy'\,dz'. \tag{15}$$

Но в этом случае $\dfrac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}=\dfrac{D(x, y)}{D(x', y')}$, так что формула (10) применима также и к замене переменных вида (13).

Покажем теперь, что всякая замена переменных

$$x=f(x_1, y_1, z_1),\quad y=\varphi(x_1, y_1, z_1),\quad z=\psi(x_1, y_1, z_1) \tag{16}$$

может быть получена последовательным выполнением двух предыдущих замен. В самом деле, положим $x'=x_1$, $y'=y_1$, $z'=z$; тогда последнее уравнение можно представить в виде $z'=\psi(x', y', z_1)$, откуда находим $z_1=\pi(x', y', z')$. Таким образом формулы (16) могут быть заменены системою шести уравнений:

$$x=f[x', y', \pi(x', y', z')],\quad y=\varphi[x', y', \pi(x', y', z')],\quad z=z', \tag{17}$$

$$x'=x_1,\qquad y'=y_1,\qquad z'=\psi(x_1, y_1, z_1). \tag{18}$$

Как мы видели, общая формула (10) применима к каждому из преобразований, определяемых формулами (17) и (18); следовательно, она применима также и к замене переменных (16).

Точно так же легко было бы доказать, что общее преобразование (16) можно заменить тремя последовательными преобразованиями вида (11).

140. Элемент объема. Перепишем формулы (6), определяющие замену переменных, заменяя x', y', z' через u, v, w:

$$x=f(u, v, w),\quad y=\varphi(u, v, w),\quad z=\psi(u, v, w). \tag{19}$$

Изменяя немного принятое до сих пор истолкование, будем теперь рассматривать u, v, w как систему криволинейных координат.

Поверхности (u), например, суть поверхности, описанные точкой (x, y, z) при произвольном изменении v и w, когда u сохраняет постоянное значение; поверхности (v) и (w) определяются таким же образом. Если через каждую точку области E пространства проходит единственная поверхность каждого из этих семейств, то они разобьют область E на весьма малые шестигранники, аналогичные параллелепипедам, образуемым плоскостями, параллельными координатным. Объем шестигранника, ограниченного поверхностями (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, (w), $(w+dw)$, где du, dv, dw положительны, по формуле (19) равен:

$$\left\{\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| + \varepsilon\right\} du\, dv\, dw,$$

где ε бесконечно мало вместе с du, dv, dw. Членом $\varepsilon\, du\, dv\, dw$ можно пренебречь, как мы уже неоднократно указывали (§ 72, 118): произведение

$$dV = \left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw \tag{20}$$

называется *элементом объема* в системе криволинейных координат (u, v, w).

Пусть будет ds^2 квадрат линейного элемента в той же самой системе координат; из формул (9) имеем:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw, \quad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \ldots;$$

возведя последние равенства в квадрат и сложив, получим:

$$\begin{aligned} ds^2 = H_1\, du^2 + H_2\, dv^2 + H_3\, dw^2 + 2F_1\, dv\, dw + \\ + 2F_2\, du\, dw + 2F_3\, du\, dv, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_1 = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad H_2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad H_3 = S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2, \\ F_1 = S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad F_2 = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad F_3 = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

причем знак S всегда показывает, что x должно заменить последовательно через y и через z и взять сумму трех получающихся членов. Формула для dV может быть получена весьма просто из формулы для ds^2; в самом деле, составляя квадрат определителя по известному правилу, находим:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix} = M;$$

ледовательно, элемент объема равен $\sqrt{M}\, du\, dv\, dw$.

Рассмотрим, в частности, тот весьма важный случай, когда координатные поверхности (u), (v), (w) образуют тройную ортогональную систему, т. е. когда три поверхности, проходящие через какую-нибудь точку пространства, пересекаются попарно под прямым углом. Тогда касательные прямые к трем линиям пересечения трех поверхностей, взятых попарно, образуют прямой трехгранный угол; поэтому необходимо $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, и эти три условия будут вместе с тем и достаточными. В этом случае формулы для ds^2 и dV принимают следующий простой вид:

$$ds^2 = H_1\,du^2 + H_2\,dv^2 + H_3\,dw^2, \quad dV = \sqrt{H_1 H_2 H_3}\,du\,dv\,dw. \tag{23}$$

Эти формулы легко вывести геометрически. Предположим, что du, dv, dw очень малы, и будем рассматривать элементарный объем, ограниченный поверхностями (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, (w), $(w+dw)$, как весьма малый прямоугольный параллелепипед с плоскими гранями. Пренебрегая бесконечно-малыми высших порядков, мы найдем, что ребра этого параллелепипеда будут соответственно равны $\sqrt{H_1}\,du$, $\sqrt{H_2}\,dv$, $\sqrt{H_3}\,dw$. Приняв диагональ и объем этого элементарного параллелепипеда за линейный элемент и за элемент объема, мы получим формулы (23) Точно так же площадь одной из граней $\sqrt{H_1 H_2}\,du\,dv$ представляет элемент поверхности (w).

Рассмотрим, например, полярные координаты в пространстве:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta, \tag{24}$$

где ρ представляет расстояние точки $M(x, y, z)$ от начала координат, θ — угол, образуемый прямою OM с осью Oz, и φ — угол, образуемый с Ox следом плоскости MOz на плоскости $z=0$. Чтобы иметь все точки пространства, достаточно изменять ρ от 0 до $+\infty$, θ от 0 до π и φ от 0 до 2π. Из формул (24) находим:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\,d\varphi^2, \tag{25}$$

и следовательно,

$$dV = \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi. \tag{26}$$

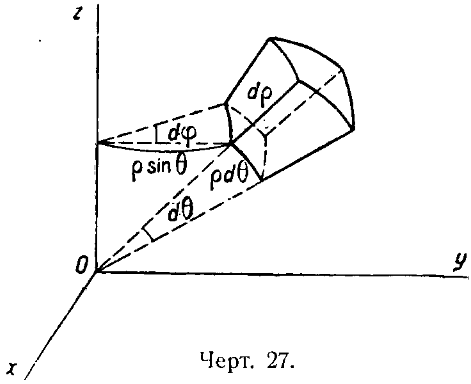
Эти формулы легко получить непосредственно. Три семейства поверхностей (ρ), (θ), (φ) суть соответственно: концентрические сферы с центром в начале координат, круглые конусы с вершиною в начале координат, осью которых служит ось Oz, и, наконец, плоскости, проходящие через Oz. Эти три семейства, очевидно, образуют тройную ортогональную систему. Измерения элементарного тела, как это легко видеть из черт. 27, суть $d\rho$, $\rho\,d\theta$, $\rho\sin\theta\,d\varphi$, и мы приходим к формулам (25) и (26).

Пусть будет $R = f(\theta, \varphi)$ уравнение замкнутой поверхности S, окружающей начало координат, и пересекающейся с каждою полупрямою, выходящею из начала координат, не более, чем в одной точке. Чтобы при помощи переменных ρ, θ, φ вычислить тройной интеграл, распространенный на область, ограниченную этою поверхностью S должно изменять ρ от 0 до R, θ от 0 до π и φ от 0 до 2π. Например, объем, ограниченный этою поверхностью S, равен тройному интегралу:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta \, d\rho;$$

первое интегрирование выполняется непосредственно, и получается

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^3 \sin\theta}{3} \, d\theta.$$



Черт. 27.

Иногда пользуются также цилиндрическими координатами r, ω, z, где $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$. В этом случае мы имеем:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\omega^2 + dz^2, \quad dV = r \, d\omega \, dr \, dz.$$

141. Эллиптические координаты. Поверхности, представляемые уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0, \tag{27}$$

где λ — переменный параметр и $a > b > c > 0$, образуют семейство софокусных поверхностей второго порядка. Через каждую точку пространства проходят три поверхности этого семейства: эллипсоид, двуполостный гиперболоид и однополостный гиперболоид, так как уравнение (27) всегда имеет один корень λ_1, содержащийся между b и c, один корень λ_2, содержащийся между a и b, и один корень λ_3, больший a. Эти три корня λ_1, λ_2, λ_3 называются *эллиптическими координатами* точки, прямоугольные координаты которой суть x, y, z. Каждые две поверхности этого семейства ортогональны; в самом деле, заменяя в уравнении (27) λ сначала через λ_1, потом через λ_2 и вычитая почленно полученные равенства, мы, по разделении на $\lambda_1 - \lambda_2$, получим соотношение:

$$\frac{x^2}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)} + \frac{z^2}{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c)} = 0, \tag{28}$$

из которого видно, что поверхности (λ_1) и (λ_2) ортогональны.

Чтобы получить наиболее простым способом x, y, z в функции λ_1, λ_2, λ_3, заметим, что так как λ_1, λ_2, λ_3 суть корни уравнения (27), то должно быть тождественно:

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) - x^2(\lambda - b)(\lambda - c) - y^2(\lambda - a)(\lambda - c) - z^2(\lambda - a)(\lambda - b) = \\ = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3);$$

полагая в этом тождестве последовательно $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$, получим отсюда:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda_3 - a)(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{(a - b)(a - c)}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda_3 - b)(\lambda_2 - b)(b - \lambda_1)}{(a - b)(b - c)}, \\ z^2 &= \frac{(\lambda_3 - c)(\lambda_2 - c)(\lambda_1 - c)}{(a - c)(b - c)}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Взяв логарифмические производные, имеем:

$$dx = \frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - a} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - a} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - a}\right),$$
$$dy = \frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - b} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - b} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - b}\right),$$
$$dz = \frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - c} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - c} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - c}\right).$$

Составив сумму квадратов последних равенств, найдем, что, на основании соотношения (28) и ему аналогичных, члены с $d\lambda_1 d\lambda_2$, $d\lambda_2 d\lambda_3$, $d\lambda_1 d\lambda_3$ исчезают. Коэфициент при $d\lambda_1^2$ будет:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(\lambda_1 - a)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)^2} + \frac{z^2}{(\lambda_1 - c)^2}\right];$$

заменяя x^2, y^2, z^2 их значениями и делая приведение, получим:

$$M_1 = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)};$$

коэфициенты M_2 и M_3 при $d\lambda_2^2$ и $d\lambda_3^2$ получатся из M_1 круговою перестановкою. Тогда элемент объема будет равен $\sqrt{M_1 M_2 M_3}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3$.

142. Интегралы Дирихле. Пусть требуется вычислить тройной интеграл

$$\iiint x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s\, dx\, dy\, dz,$$

взятый внутри тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. Положим

$$x + y + z = \xi, \qquad y + z = \xi\eta, \qquad z = \xi\eta\zeta,$$

где ξ, η, ζ — новые переменные. Эти формулы можно представить иначе в виде:

$$\xi = x + y + z, \qquad \eta = \frac{y + z}{x + y + z}, \qquad \zeta = \frac{z}{y + z};$$

обратно, мы имеем $x = \xi(1 - \eta)$, $y = \xi\eta(1 - \zeta)$, $z = \xi\eta\zeta$. Если x, y, z положительны и сумма $x + y + z$ меньше единицы, то ξ, η, ζ заключаются между нулем и единицею. Обратно, если ξ, η, ζ заключаются между нулем и единицею, то $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x + y + z < 1$. Таким образом мы заменили тетраэдр кубом.

Чтобы вычислить функциональный определитель, положим $X = \xi$, $Y = \xi\eta$, $Z = \xi\eta\zeta$, откуда имеем $x = X - Y$, $y = Y - Z$, $z = Z$. Но

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} \cdot \frac{D(X, Y, Z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \xi^2\eta,$$

и тройной интеграл после указанной замены переменных обратится в

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1 - \xi)^s \eta^{q+r+1}(1 - \eta)^p \zeta^r (1 - \zeta)^q\, d\zeta.$$

Подинтегральная функция представляет произведение функции от ξ на функцию от η и на функцию от ζ. Следовательно, данный тройной интеграл равен произведению трех интегралов:

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1 - \xi)^s\, d\xi \cdot \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1 - \eta)^p\, d\eta \cdot \int_0^1 \zeta^r (1 - \zeta)^q\, d\zeta.$$

Вводя функции Γ [см. формулы (33), (34) § 128], мы получим для тройного интеграла выражение:

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}\cdot\frac{\Gamma(q+r+2)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)}\cdot\frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)};$$

по сокращении на общих множителей остается

$$\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

143. Кратные интегралы. Исходя из чисто аналитических выражений, полученных нами для двойного и тройного интегралов, мы можем распространить определение кратного интеграла на функции от произвольного числа независимых переменных. Мы ограничимся здесь только общими указаниями.

Пусть будет $x_1, x_2, \ldots, x_n$ система n независимых переменных. Для краткости мы будем говорить, что каждая система значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ этих переменных представляет некоторую точку в пространстве n измерений. Точно так же всякое соотношение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, в котором левая часть есть непрерывная функция, представляет *поверхность;* если F есть многочлен первой степени, то мы будем говорить, что это уравнение представляет плоскость. Рассмотрим совокупность точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам вида:

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, k); \tag{30}$$

мы будем говорить, что эта совокупность точек образует *область* D в пространстве n измерений. Если для всех точек этой области абсолютная величина каждой из координат x_i не превышает некоторого определенного числа, то мы будем говорить, что область D находится на конечном расстоянии. Если неравенства, определяющие область D, имеют следующий вид:

$$x_1^0\leqslant x_1\leqslant x_1^1,\quad x_2^0\leqslant x_2\leqslant x_2^1,\ \ldots,\ x_n^0\leqslant x_n\leqslant x_n^1, \tag{31}$$

то мы будем называть эту область *призматоидом* и будем говорить, что n положительных чисел $x_i^1-x_i^0$ суть измерения этого призматоида. Наконец, мы будем говорить, что точка области D расположена на *границе* этой области, если для координат этой точки по крайней мере одна из функций ψ_i в формулах (30) равна нулю.

Пусть будет D конечная область, и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция, непрерывная в этой области. Предположим, что область D разбита на меньшие области плоскостями, параллельными плоскостям $x_i=0$ $(i=1, 2 \ldots, n)$*. Возьмем один из призматоидов, ограниченных этими плоскостями и содержащихся внутри области D; пусть будут $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ его измерения, и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ координаты какой-нибудь точки этого призматоида. Если число всех призматоидов, содержащихся внутри области D, неограниченно возрастает так, что все измерения их стремятся к нулю, то сумма

$$S=\sum f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta x_n, \tag{32}$$

распространенная на все эти призматоиды, стремится к некоторому пределу I. Этот предел I называется *n-кратным интегралом* от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, взятым в области D,

$$I=\int\int\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Вычисление n-кратного интеграла и здесь приводится к последовательному вычислению n простых интегралов. Чтобы доказать, что этот закон — общий, достаточно показать, что если он верен для $(n-1)$-кратного интеграла, то он также

* То-есть плоскостями $x_i=\mathrm{const}$. (*Ред.*)

верен и для n-кратного интеграла. Для этого рассмотрим некоторую точку области D

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если мы временно не будем обращать внимания на переменное x_n, то ясно, что точка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ будет описывать некоторую область D' в пространстве $(n-1)$ измерений. Предположим, что область D удовлетворяет следующему условию: всякой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ внутри области D' соответствуют на границе области D только две точки с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(1)})$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(2)})$, причем координаты $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ суть функции $(n-1)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, непрерывные внутри области D'. Если это условие не удовлетворено, то мы разобьем D на такие меньшие области, чтобы это условие выполнялось для каждой из них отдельно. Рассмотрим теперь ряд призматоидов области D, соответствующих одной и той же точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ области D'; можно доказать, как мы это уже делали для двойного интеграла (§ 124), что эти призматоиды дадут в S сумму, равную:

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1} \left[\int\limits_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n + \varepsilon \right],$$

где $|\varepsilon|$ может быть сделано менее всякого положительного числа, если только все количества Δx_i будут достаточно малы. Полагая

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int\limits_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n, \tag{33}$$

мы видим, что I равно пределу суммы

$$\sum \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1},$$

т. е. равно $(n-1)$-кратному интегралу

$$I = \int\int\int \ldots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}, \tag{34}$$

взятому в области D'. Но мы предположили, что высказанное выше предложение верно для $(n-1)$-кратного интеграла; следовательно, оно имеет общий характер.

Мы могли бы рассуждать еще иначе. Рассмотрим совокупность тех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых координата x_n имеет данное значение. Точка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ опишет в пространстве $(n-1)$ измерений некоторую область δ, и легко видеть, что n-кратный интеграл I равен также выражению:

$$I = \int\limits_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} \theta(x_n)\, dx_n, \tag{35}$$

где $\theta(x_n)$ есть $(n-1)$-кратный интеграл $\int\int\int \ldots \int f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$, распространенный на область δ.

Каким бы способом мы ни вычисляли интеграл, пределы для различных интеграций, которые при этом должны быть выполнены, зависят от свойства области D и вообще изменяются в зависимости от перемены порядка интеграций. Исключение составляет только тот случай, когда D есть призматоид, определяемый условиями:

$$x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant X_1, \quad \ldots, \quad x_i^0 \leqslant x_i \leqslant X_i, \quad \ldots$$

В этом случае кратный интеграл имеет выражение:

$$\int_{x_1^0}^{X_1} dx \int_{x_2^0}^{X_2} dx_2 \ldots \int_{x_n^0}^{X_n} f\,dx_n,$$

и мы можем произвольным образом изменять порядок интеграций, не изменяя пределов, соответствующих каждому переменному.

Формула замены переменных также распространяется на n-кратные интегралы. Пусть будут:

$$x_i = \varphi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

формулы преобразования, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между областью D', описываемою точкою $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, и областью D, описываемою точкою $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы имеем:

$$\iiint_D \ldots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \iint_{D'} \ldots \int F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \left| \frac{D(\varphi, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1', \ldots, x_n')} \right| dx_1' \ldots dx_n'. \tag{37}$$

Доказательство этой формулы вполне аналогично предыдущим. Укажем здесь только в общих чертах ход рассуждений.

1. Если формула (37) верна для двух преобразований, то она будет также верна и для того преобразования, которое получается от последовательного выполнения этих двух преобразований.

2. Всякая замена переменных может быть получена как соединение двух замен переменных следующего вида:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x_{n-1}', \quad x_n = \varphi_n(x_1', x_2', \ldots, x_n'), \tag{38}$$

$$x_1 = \psi_1(x_1', \ldots, x_n'), \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1', \ldots, x_n'), \quad x_n = x_n'. \tag{39}$$

3. Формула (37) применима к замене переменных вида (38); это следует из выражения (34) для n-кратного интеграла. Точно так же из выражения (35) для n-кратного интеграла следует, что если мы предположим, что формула (37) доказана для $(n-1)$-кратных интегралов, то эта формула будет применима также и к замене переменных вида (39). Таким образом, переходя последовательно от n к $n+1$, можно доказать, что формула (37) имеет общий характер.

Предположим, например, что требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \iint \ldots \int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)^\beta\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный на область D, определяемую неравенствами

$$0 \leqslant x_1, \quad 0 \leqslant x_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant x_n, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, β — положительные числа.

Сделав замену переменных

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_1, \quad x_2 + \ldots + x_n = \xi_1\xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n,$$

мы заменим область D областью D', определяемою неравенствами

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant \xi_n \leqslant 1.$$

Кроме того, простым вычислением (§ 142) получим:

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} = \xi_1^{n-1} \xi_2^{n-2} \ldots \xi_{n-1}.$$

Подинтегральная функция принимает вид:

$$\xi_1^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+n-1}\,\xi_2^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n+n-2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}(1-\xi_1)^{\beta}(1-\xi_2)^{\alpha_1}\ldots(1-\xi_n)^{\alpha_{n-1}},$$

и искомый интеграл выражается при помощи функции Γ:

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta+n+1)}\,. \tag{40}$$

II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛОВ.

144. Общий метод. Пусть будут $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функции двух независимых переменных x и y. Выражение

$$P\,dx+Q\,dy$$

вообще не представляет полного диференциала от некоторой функции двух переменных x, y. В самом деле, как известно, уравнение

$$du=P\,dx+Q\,dy \tag{41}$$

равносильно двум отдельным уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y). \tag{42}$$

Диференцируя первое из уравнений (42) по y, а второе по x, мы видим, что функция $u(x, y)$ должна удовлетворять двум соотношениям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\,.$$

Таким образом, для того чтобы существовала функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условию (41), должно быть тождественно:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{43}$$

Это необходимое условие вместе с тем и достаточно. В самом деле, существует бесчисленное множество функций $u(x, y)$, частные производные которых по x равны $P(x, y)$; все эти функции заключаются в формуле:

$$u=\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+Y,$$

где x_0 — произвольное постоянное, а Y — произвольная функция переменного y. Чтобы эта функция $u(x, y)$ удовлетворяла уравнению (41), необходимо и достаточно, чтобы ее частная производная по y была равна $Q(x, y)$, т. е. чтобы было:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx+\frac{dY}{dy}=Q(x, y).$$

Но, на основании условия интегрируемости (43), имеем:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = Q(x, y) - Q(x_0, y),$$

и предыдущее соотношение обращается в

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = Q(x_0, y).$$

Правая часть зависит только от y; следовательно, существует бесчисленное множество функций Y от y, удовлетворяющих последнему условию. Все они содержатся в формуле

$$Y = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C,$$

где y_0 есть некоторое частное значение переменного y, а C — произвольное постоянное. Таким образом существует бесчисленное множество функций $u(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (41); они выражаются формулою:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C \tag{44}$$

и различаются между собою только значениями добавочного постоянного C.

Пусть будет, например,

$$P = \frac{x + my}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{y - mx}{x^2 + y^2};$$

условие (43) удовлетворяется, и, полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, имеем:

$$u = \int_{0}^{x} \frac{x + my}{x^2 + y^2}\,dx + \int_{1}^{y} \frac{dy}{y} + C.$$

Выполнив указанные интегрирования, получим:

$$u = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2 + y^2)\right]_0^x + m\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)_0^x + \ln y + C,$$

или, после приведений,

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + m \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C.$$

Этот метод можно распространить на случай любого числа независимых переменных. Мы рассмотрим только случай трех переменных.

Пусть будут P, Q, R функции от x, y, z; уравнение с полными диференциалами

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{45}$$

равносильно трем уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{46}$$

Вычисляя двумя различными способами производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}$, мы получим три необходимых условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{47}$$

Предположим, что эти условия удовлетворены. На основании первого условия существует бесчисленное множество функций $u(x, y, z)$, частные производные которых по x и по y равны соответственно P и Q; все эти функции содержатся в формуле:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + Z,$$

где Z есть произвольная функция от z. Чтобы производная $\frac{\partial u}{\partial z}$ была равна R, необходимо, сверх того, чтобы было

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial z}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x_0, y, z)}{\partial z}\,dy + \frac{dZ}{dz} = R;$$

вследствие соотношений (47) последнее уравнение обращается в

$$R(x, y, z) - R(x_0, y, z) + R(x_0, y, z) - R(x_0, y_0, z) + \frac{dZ}{dz} = R(x, y, z),$$

или

$$\frac{dZ}{dz} = R(x_0, y_0, z).$$

Отсюда мы заключаем, что существует бесчисленное множество функций $u(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнению (45); все они представляются формулою:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C, \tag{48}$$

где x_0, y_0, z_0 — произвольно выбранные числовые значения переменных, а C — произвольное постоянное.

145. Исследование интеграла $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} P\,dx + Q\,dy$. Предыдущий вопрос можно рассматривать с другой точки зрения, которая позволяет исследовать его глубже и приводит к новым результатам. Пусть будут $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области A, ограниченной одним замкнутым контуром C; эта область A может также охватывать всю плоскость, что равносильно предположению, что контур C удален в бесконечность. Криволинейный интеграл

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

взятый вдоль пути L, расположенного целиком внутри A, зависит вообще от пути интегрирования. Найдем прежде всего, при каких условиях этот интеграл зависит только от координат (x_0, y_0), (x_1, y_1) конечных точек этого пути. Пусть будут M и N две каких-нибудь точки области A, и L, L' — два пути, соединяющих эти точки и не пересекающихся между собою; оба эти пути, вместе взятые, образуют замкнутый контур. Для того чтобы криволинейные интегралы, взятые вдоль L и вдоль L', были равны, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы интеграл, взятый в определенном направлении вдоль замкнутого контура, образованного обеими линиями, был равен нулю *. Таким образом предложенный вопрос равносилен следующему. *При каких условиях криволинейный интеграл*

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

взятый вдоль какого-нибудь замкнутого контура, расположенного в области A, будет равен нулю?

Ответ на этот вопрос получается непосредственно из формулы Грина:

$$\int\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{49}$$

где C обозначает какой-нибудь замкнутый контур, расположенный в области A, а двойной интеграл распространен на область, заключающуюся внутри контура C. Очевидно, что если производные от функций P и Q удовлетворяют соотношению:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{43'}$$

то криволинейный интеграл, стоящий в левой части, всегда равен нулю. Это условие вместе с тем и необходимо. В самом деле, предположим, что в области A разность $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ не равна тождественно нулю; так как, по предположению, эта разность есть непрерывная функция, то всегда можно найти настолько малую область a, чтобы в области a знак этой функции был постоянен; тогда из формулы (49) очевидно,

* Так как этот интеграл равен разности интегралов, взятых по обоим путям от точки M до точки N. (*Ред.*)

что криволинейный интеграл, взятый вдоль контура области a, не может быть равен нулю.

Если условия (43') удовлетворяются тождественно, то два пути L, L', имеющие одни и те же крайние точки M, N и не пересекающиеся между этими точками, дадут для криволинейного интеграла одно и то же значение. То же самое будет и в том случае, если между M и N эти пути несколько раз пересекаются, так как достаточно их сравнить с третьим путем L'', не встречающимся с двумя первыми нигде, кроме точек M и N.

Предположим теперь, что один из концов линии интегрирования есть постоянная точка (x_0, y_0), а другой конец — переменная точка (x, y) области A. Интеграл

$$F(x, y) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} P\,dx + Q\,dy, \tag{50}$$

взятый вдоль пути произвольного вида, зависит только от координат (x, y) переменного конца. Частные производные от функции $F(x, y)$ суть как раз $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Например, мы имеем:

$$F(x + \Delta x, y) = F(x, y) + \int\limits_{x, y}^{x_0 + \Delta x, y} P(x, y)\,dx;$$

в самом деле, мы всегда можем предположить, что сначала идем по прежнему пути от точки (x_0, y_0) к точке (x, y), а потом от точки (x, y) к точке $(x + \Delta x, y)$ по прямой, параллельной оси Ox, причем вдоль этой прямой мы имеем $dy = 0$. Прилагая формулу среднего значения, мы можем написать:

$$\frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y) \quad (0 < \theta < 1);$$

при приближении Δx к нулю мы получим $F'_x = P$. Точно так же мы убедились бы, что $F'_y = Q$. Таким образом криволинейный интеграл $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению с полными диференциалами (41), и мы получим общий интеграл этого уравнения, прибавляя к $F(x, y)$ произвольное постоянное.

Новая формула (50) общее формулы (44), так как в ней путь интегрирования остается неопределенным; впрочем, из нее легко вывести формулу (44). Для устранения всяких недоразумений обозначим через (x_0, y_0), (x_1, y_1) координаты обоих концов пути интегрирования и возьмем за путь интегрирования две прямых $x = x_0$, $y = y_1$. Вдоль первой прямой мы имеем $x = x_0$, $dx = 0$, причем y изменяется от y_0 до y_1; вдоль второй прямой $y = y_1$; $dy = 0$, и x изменяется от x_0 до x_1. Следовательно, наш интеграл равен:

$$\int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)\,dx;$$

эта формула отличается от (44) только обозначениями.

Но иногда бывает выгоднее выбрать другой путь интегрирования. Предположим, что, полагая $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ и изменяя t от t_0 до t_1, мы заставляем точку (x, y) описывать некоторую кривую, соединяющую точку (x_0, y_0) с точкою (x_1, y_1). Мы имеем:

$$\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x,y) f'(t) + Q(x,y)\varphi'(t)]\,dt,$$

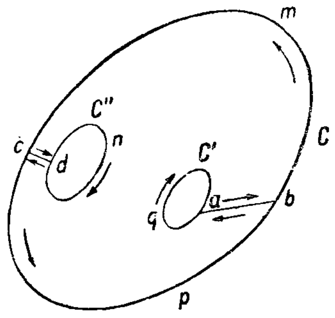
и остается выполнить только одну квадратуру. Например, если мы будем перемещаться по прямой, то нужно положить $x=x_0+t(x_1-x_0)$, $y=y_0+t(y_1-y_0)$ и изменять t от 0 до 1.

Обратно, зная какой-нибудь частный интеграл $\Phi(x, y)$ уравнения (41), мы получим из него криволинейный интеграл посредством формулы:

$$\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} P\,dx + Q\,dy = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0);$$

последняя формула аналогична формуле (8) гл. IV.

146. Периоды. Можно рассматривать и более общие случаи. Заметим прежде всего, что формула Грина применима также к областям, ограниченным несколькими контурами. Рассмотрим, например, область A, ограниченную внешним контуром C и двумя контурами C', C'', расположенными внутри первого (черт. 28). Пусть будут P и Q функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка внутри этой области. (Части плоскости, содержащиеся внутри контуров C', C'', должно рассматривать как не входящие в состав области A; мы не делаем никаких предположений относительно свойств функций P и Q в этих обеих областях.) Соединим контуры C' и C'' поперечными линиями ab, cd с замкнутым контуром C. Мы получим, таким образом, замкнутый контур $abmcdndcpbaqa$, или Γ, который может быть описан непрерывным движением*. Применяя формулу Грина к области, ограниченной этим контуром, мы найдем, что криволинейные интегралы, происходящие от линий ab и cd, исчезнут, так как каждый из них берется в двух противоположных направлениях, и у нас останется



Черт. 28.

$$\int P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy;$$

в этой формуле криволинейный интеграл берется вдоль всего контура области A, т. е. вдоль трех контуров C, C', C'', в направлении, указанном стрелками, так, чтобы область, ограничиваемая этими контурами, оставалась всегда с левой стороны.

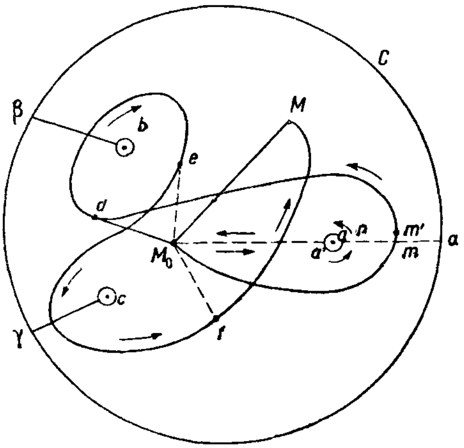
* Поперечные линии ab, cd рассматриваются здесь как двойные, состоящие из двух бесконечно близких линий.

Если в области A функции P и Q удовлетворяют условию $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, то двойной интеграл равен нулю, и мы можем представить полученное соотношение в виде:

$$\int\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{C'} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{C''} P\,dx+Q\,dy, \tag{51}$$

если мы условимся брать здесь все три криволинейных интеграла в одинаковом направлении.

Возвратимся к области A, ограниченной одним контуром C. Пусть будут P и Q функции, удовлетворяющие соотношению $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ и непрерывные вместе со своими производными в области A всюду за исключением конечного числа точек, в которых по крайней мере одна из функций P, Q делается разрывною. Для определенности предположим, что в A находятся три точки разрыва a, b, c. Окружим каждую из этих точек окружностью весьма малого радиуса и соединим эти окружности прорезами с контуром C (черт. 29). Интеграл $\int P\,dx+Q\,dy$, взятый от некоторой постоянной точки (x_0, y_0) до некоторой переменной точки (x, y) вдоль линии, не пересекающей ни одного из прорезов, имеет в каждой точке единственное значение, так как контур C, прорезы и малые окружности образуют вместе одну линию, которую можно описать непрерывным движением. Обозначим через $\overline{F(x, y)}$ значение этого интеграла, взятого вдоль этого *прямого* пути от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$.



Черт. 29.

Путь, состоящий из прямой, соединяющей точку M_0 с точкою a', бесконечно близкою к точке a, из малой окружности радиуса aa' с центром в a и из прямой $a'M_0$, называется *петлею*. Очевидно, что криволинейный интеграл $\int P\,dx+Q\,dy$, взятый вдоль петли, приводится к криволинейному интегралу, взятому только вдоль окружности, окружающей точку a. Если одна из функций P или Q обращается в точке a в бесконечность, то последний интеграл вообще не равен нулю, но он не зависит от радиуса этой малой окружности; он равен некоторому постоянному $\pm\mathfrak{A}$, причем двойной знак соответствует двум направлениям обхода по окружности*. Мы обозначим таким же образом че-

* Нетрудно видеть, что постоянное $\mathfrak{A}$ не зависит от радиуса окружности, окружающей точку a, если только эта окружность достаточно мала. В самом деле, опишем около точки a две концентрических окружности C, C', настолько

рез $\pm\mathfrak{B}$ и $\pm\mathfrak{C}$ значения криволинейного интеграла, взятого вдоль петель, описанных около каждой из особых точек b и c.

Теперь легко видеть, что всякий путь, соединяющий точку M_0 с точкою M, может быть заменен прямым путем, идущим из точки M_0 к точке M, и рядом петель. Например, путь M_0mdefM может быть заменен рядом путей: M_0mdM_0, M_0deM_0, M_0efM_0, M_0fM; путь M_0mdM_0 может быть, в свою очередь, заменен петлею, описанною около особой точки a; то же будет и с другими путями. Наконец, путь M_0fM равносилен прямому пути. Это показывает, что, каков бы ни был путь интегрирования, значение криволинейного интеграла будет иметь вид:

$$F(x, y) = \overline{F(x, y)} + m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B} + p\mathfrak{C}, \tag{52}$$

где m, n, p — три совершенно произвольных целых числа положительных или отрицательных. Количества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ называются *периодами* криволинейного интеграла. Таким образом этот интеграл есть функция от x и y, имеющая бесконечное множество значений, и нам ясно происхождение этой многозначности.

Примечание. После того как проведены разрезы $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, функция $F(x, y)$ будет в области A вполне определенною функциею; но должно заметить, что в двух бесконечно близких точках, лежащих по разные стороны прореза, например в m и m', разность $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ имеет конечное значение. В самом деле, мы имеем:

$$\mathfrak{A} = \int_{M_0}^{m} + \int_{m}^{m'} + \int_{m'}^{M_0}.$$

Это равенство можно представить в виде:

$$\int_{M_0}^{m} = \int_{M_0}^{m'} + \mathfrak{A} + \int_{m'}^{m};$$

но количество $\int_{m'}^{m}$ бесконечно мало, и у нас остается

$$\overline{F(m)} - \overline{F(m')} = \mathfrak{A}.$$

Таким образом вдоль всего разреза $a\alpha$ разность $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ постоянна и равна $\mathfrak{A}$.

Пример. Криволинейный интеграл

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

имеет одну критическую точку — начало координат. Чтобы получить соответствующий период, возьмем данный интеграл вдоль окружности $x^2 + y^2 = \rho^2$. Имеем:

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad x\,dy - y\,dx = \rho^2\,d\omega,$$

и период равен $\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi$. Этот результат легко проверить, так как под знаком интеграла стоит полный диференциал от $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

малых, чтобы внутри них не содержалось ни одной из остальных точек прерывности $b, c, \ldots$ Тогда внутри кольцеобразной области, ограниченной этими двумя окружностями, функции P и Q будут непрерывны вместе со своими производными первого порядка; а так как эта область ограничена двумя контурами — одним внешним и другим внутренним, то, как было показано в начале этого параграфа, значение интеграла $\int P\,dx + Q\,dy$ на внешнем контуре C равно значению того же интеграла на внутреннем контуре C'. (*Ред.*)

147. Обобщение предыдущих результатов. Выводы последних параграфов могут быть распространены без существенных изменений на криволинейные интегралы в пространстве

$$U=\int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z} P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{53}$$

Обозначим через P, Q, R функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области (E) пространства, ограниченной одною замкнутою поверхностью S. Найдем сначала, при каких условиях этот криволинейный интеграл зависит только от концов (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) пути интегрирования, или, что то же, найдем, в каком случае криволинейный интеграл, взятый вдоль какой-нибудь замкнутой кривой Г, равен нулю. По формуле Стокса (§ 132 этот криволинейный интеграл равен интегралу по поверхности

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx,$$

распространенному на какую-нибудь поверхность Σ, ограниченную контуром Г. Для того чтобы при всяком контуре Г этот интеграл по поверхности был равен нулю, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{54}$$

Если эти условия удовлетворяются, то существует функция U переменных x, y, z, полный диференциал которой есть $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ и которая однозначна в части (E) пространства. Чтобы получить значение функции U в какой-нибудь точке, можно выбрать путь интегрирования совершенно произвольный.

Если функции P, Q, R удовлетворяют соотношениям (54), но обращаются в бесконечность во всех точках одной или нескольких линий области (E), то получаются следствия, аналогичные полученным в § 146. Например, если одна из функций P, Q, R обращается в бесконечность во всех точках замкнутой кривой γ, то интеграл U имеет период, равный значению криволинейного интеграла, взятого вдоль замкнутого контура, пересекающего один и только один раз поверхность σ, ограниченную кривою γ.

Относительно интегралов по поверхности также можно поставить вопрос, аналогичный разобранному выше для криволинейных интегралов. Пусть будут A, B, C функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в части (E) пространства, ограниченной одною замкнутою поверхностью S. Пусть будет Σ какая-нибудь поверхность в части (E), ограниченная контуром Г произвольного вида. Интеграл по поверхности

$$I=\iint_{\Sigma} A\,dy\,dz+B\,dz\,dx+C\,dx\,dy \tag{55}$$

зависит вообще от самой поверхности Σ, а не только от одного контура Г. Чтобы этот интеграл зависел только от контура Г, необходимо, чтобы двойной интеграл, распространенный на произвольную замкнутую поверхность, взятую внутри E, был равен нулю. Условие для этого можно непосредственно вывести из формулы Остроградского (§ 136). В самом деле, мы знаем, что предыдущий двойной интеграл, распространенный на какую-нибудь замкнутую поверхность, равен тройному интегралу

$$\iiint\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

распространенному на объем, ограниченный этою поверхностью. Для того чтобы при всяком объеме этот последний интеграл был равен нулю, очевидно, необходимо, чтобы функции A, B, C удовлетворяли соотношению:

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0. \tag{56}$$

Условие (56) вместе с тем и достаточно.

Этот результат легко проверить, пользуясь формулою Стокса. В самом деле, если даны три функции A, B, C, удовлетворяющие соотношению (56), то бесчисленными способами можно найти три такие другие функции P, Q, R, чтобы было

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C. \tag{57}$$

Если эти ур-ния имеют хотя одно решение, то они имеют их бесчисленное множество, так как они не изменяются при замене P, Q, R соответственно через

$$P+\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \qquad Q+\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \qquad R+\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

где λ — произвольная функция от x, y, z. Положим $R=0$; из двух первых соотношений (57) получим:

$$P=\int_{z_0}^{z} B(x, y, z)\,dz+\varphi(x, y), \qquad Q=-\int_{z_0}^{z} A(x, y, z)\,dz+\psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — произвольные функции от x и y. Внося эти значения в последнее уравнение (57), мы представим его в виде:

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=C(x, y, z),$$

или, принимая во внимание условие (56),

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=C(x, y, z_0).$$

Таким образом одну из функций φ, ψ можно взять произвольно.

Определив таким образом функции P, Q, R, удовлетворяющие уравнениям (57), мы найдем, что, по формуле Стокса, интеграл по поверхности I будет равен криволинейному интегралу

$$\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz;$$

следовательно, он зависит только от контура Γ.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Вычислить значение тройного интеграла:

$$\iiint [5(x-y)^2+3az-4a^2]\,dx\,dy\,dz,$$

распространенного на объем, определяемый неравенствами

$$x^2+y^2-az<0, \quad x^2+y^2+z^2-2a^2<0.$$

2. Вычислить площадь поверхности, представляемой уравнением:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2b^2(x^2+y^2)z}{a^2x^2+b^2y^2},$$

и объем, ограниченный этою поверхностью.

3. Исследовать свойства функции:

$$F(X, Y, Z)=\int_{x_0}^{X}dx\int_{y_0}^{Y}dy\int_{z_0}^{Z}f(x, y, z)\,dz,$$

рассматриваемой как функция от X, Y, Z. Распространить на этот случай выводы § 115.

4. Найти объем, ограниченный тою частью поверхности, представляемой уравнением
$$(x^2+y^2+z^2)^3=3a^3xyz,$$
которая расположена в трехгранном угле $Oxyz$.

5. Привести к простому интегралу кратный интеграл:
$$\int\int\ldots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}F(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$
распространенный на область D, определяемую неравенствами
$$0\leqslant x_1,\quad 0\leqslant x_2,\quad \ldots,\quad 0\leqslant x_n,\quad x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant a.$$
(Здесь следует поступать так же, как в § 147.)

6. Привести к простому интегралу кратный интеграл:
$$\int\int\ldots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}F\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right]dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$
распространенный на область D, ограниченную неравенствами:
$$0\leqslant x_1,\quad 0\leqslant x_2,\quad \ldots,\quad 0\leqslant x_n,\quad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\leqslant 1.$$

7. Вывести формулу:
$$\int\int\int\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$
где кратный интеграл распространен на область D, определяемую неравенствами
$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1.$$

8. Вывести формулу:
$$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}F(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\,d\varphi=2\pi\int_{-1}^{+1}F(uR)\,du,$$
где a, b, c — произвольные постоянные, и $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. [Пуассон.]

[Здесь следует обратить внимание на то, что предложенный двойной интеграл представляет интеграл по поверхности, распространенный на сферу $x^2+y^2+z^2=1$, и принять за новую плоскость xy плоскость $bx+cy+az=0$.]

9. Пусть будет $\rho=F(\theta,\varphi)$ уравнение замкнутой поверхности в полярных координатах. Доказать, что объем, ограниченный этою поверхностью, равен двойному интегралу, распространенному на всю поверхность,
$$\frac{1}{3}\int\int\rho\cos\gamma\,d\sigma, \qquad (\alpha)$$
где $d\sigma$ есть элемент поверхности и γ — угол между радиусом-вектором и внешнею нормалью.

10. Рассмотрим эллипсоид, представляемый уравнением:
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1.$$

Будем определять точки его поверхности эллиптическими координатами ν и ρ, т. е. корнями предыдущего уравнения, в котором μ заменено неизвестным (см. § 141). Применение формул (§ 133) к объему этого эллипсоида приводит к следующему соотношению:
$$\int_0^b d\rho\int_b^c\frac{(\nu^2-\rho^2)\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)}}\,d\nu=\frac{1}{b}\pi c^2(c^2-b^2).$$

Применение формулы (α) (упражнение 9) дает также:
$$\int_0^b d\rho\int_b^c\frac{(\nu^2-\rho^2)\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}=\frac{\pi}{2}.$$

[Ламэ.]

ДОПОЛНЕНИЕ.

О ФОРМУЛАХ ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Классическая формула диференцирования под знаком $\int$ (§ 94) непосредственно распространяется на криволинейные, а также и на кратные интегралы, при условии неизменности пути или области интегрирования, если только подинтегральная функция непрерывна и имеет непрерывную производную по переменному параметру. Это обобщение представляет большие трудности, если путь или область интегрирования сами являются переменными. Мы будем предполагать, что подинтегральные функции непрерывны в пределах интеграции, так же как и все их производные, входящие в вычисления.

1. Криволинейные интегралы. Дуга кривой Γ, представляемая уравнениями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

где t изменяется от t_0 до $t_1>t_0$, называется *правильной*, если функции f, φ, ψ, непрерывные в интервале (t_0, t_1), имеют производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, непрерывные в том же интервале. *Обыкновенная* кривая образована из конечного числа правильных дуг, соединенных своими концами; такая кривая может иметь конечное число угловых точек, другими словами, для обыкновенной кривой производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ могут иметь конечное число точек разрыва первого рода между t_0 и t_1. Мы будем рассматривать лишь криволинейные интегралы, взятые вдоль обыкновенных кривых.

Пусть будут

$$x=f(t, \alpha), \quad y=\varphi(t, \alpha), \quad z=\psi(t, \alpha)$$

уравнения семейства кривых Γ, зависящих от переменного параметра α; функции f, φ, ψ, как и все их производные, которые будут входить в вычисления, предполагаются непрерывными в области изменения α и t. С другой стороны, пусть будут $t_0(\alpha)$ и $t_1(\alpha)$ две непрерывные функции параметра α, также имеющие непрерывные производные; дуга AB кривой Γ, получаемая при изменении t от t_0 до t_1, перемещается, деформируясь непрерывным образом при изменении параметра α. Концы A и B этой дуги, вообще, также перемещаются и описывают, соответственно, кривые γ_0, γ_1. Координаты этих двух точек (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) суть функции параметра α, имеющие выражения:

$$x_0=f(t_0, \alpha), \quad y_0=\varphi(t_0, \alpha), \quad z_0=\psi(t_0, \alpha),$$
$$x_1=f(t_1, \alpha), \quad y_1=\varphi(t_1, \alpha), \quad z_1=\psi(t_1, \alpha).$$

Пусть нам даны три непрерывные функции $P(x, y, z, \alpha)$, $Q(x, y, z, \alpha)$, $R(x, y, z, \alpha)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка; определенный интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_{AB} P(x, y, z, \alpha)\,dx+Q(x, y, z, \alpha)\,dy+R(x, y, z, \alpha)\,dz \qquad (1)$$

есть функция параметра α; наша задача заключается в том, чтобы вычислить производную этой функции. Достаточно, очевидно, произвести вычисления для интеграла

$$I_x(\alpha)=\int\limits_{AB} P(x, y, z, \alpha)\,dx,$$

который мы можем заменить обыкновенным определенным интегралом

$$I_x(\alpha)=\int\limits_{t_0}^{t_1} P(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{\partial f}{\partial t}\,dt.$$

К этому интегралу мы можем применить классическую формулу дифференцирования (§ 94), что дает:

$$I'_x(\alpha)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\,dt+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} P\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial t}\,dt+P(x_1, y_1, z_1, \alpha)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_1\frac{dt_1}{d\alpha}-P(x_0, y_0, z_0, \alpha)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0\frac{dt_0}{d\alpha};$$

интегрируя по частям второй интеграл, получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} P\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial t}\,dt=\left(P\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{t_0}^{t_1}-\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)dt,$$

и мы имеем, возвращаясь к первоначальному обозначению:

$$I'_x(\alpha)=\int\limits_{AB}\frac{\partial P}{\partial \alpha}\,dx+\int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)dx-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dy-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dz+$$
$$+\left(P\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha}+P\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{t_0}^{t_1}.$$

Смысл обинтегрированного члена ясен; в самом деле, производная $\frac{dx_0}{d\alpha}$ сложной функции $x_0=f(t_0, \alpha)$ от параметра α равна:

$$\frac{\partial f}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial \alpha}+\frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Обинтегрированный член равен, следовательно, разности:

$$P(x_1, y_1, z_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha}-P(x_0, y_0, z_0, \alpha)\frac{dx_0}{d\alpha}=\left[P(x, y, z, \alpha)\frac{dx}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Выражения производных от интегралов

$$I_y(\alpha)=\int_{AB} Q\,dy \quad \text{и} \quad I_z(\alpha)=\int_{AB} R\,dz$$

находятся таким же образом; можно, впрочем, получить их из $I'_x(\alpha)$ круговой перестановкой букв x, y, z; складывая эти три производные, мы получаем, наконец, для $I'(\alpha)$ следующее выражение:

$$I'(\alpha)=\int_{AB} \frac{\partial P}{\partial \alpha}dx+\frac{\partial Q}{\partial \alpha}dy+\frac{\partial R}{\partial \alpha}dz+\int_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dx-\frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\right)+$$
$$+\int_{AB}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dy-\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dz\right)+\int_{AB}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}dz-\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dx\right)+$$
$$+\left[P(x, y, z, \alpha)\frac{dx}{d\alpha}+Q(x, y, z, \alpha)\frac{dy}{d\alpha}+R(x, y, z, \alpha)\frac{dz}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{2}$$

Для того чтобы перейти к случаю плоской кривой, достаточно положить $z=\psi=0$, и формула принимает вид:

$$I'(\alpha)=\int_{AB}\frac{\partial P}{\partial \alpha}dx+\frac{\partial Q}{\partial \alpha}dy+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dx-\frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\right)+$$
$$+\left[P(x, y, \alpha)\frac{\partial x}{d\alpha}+Q(x, y, \alpha)\frac{\partial y}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{3}$$

Мы напишем эти формулы в несколько ином виде, вводя обозначение, заимствованное из вариационного исчисления. Если U есть функция параметра α, которая может зависеть и от других переменных, то мы называем *вариацией* U и обозначаем через δU произведение $\frac{\partial U}{\partial \alpha}\delta\alpha$, т. е. главную часть приращения, которое получает U, когда мы даем α приращение $\delta\alpha$, причём предполагается, что остальные переменные, от которых может зависеть U, сохраняют свои значения. Так, мы имеем:

$$\delta x=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha, \qquad \delta P=\frac{\partial P}{\partial \alpha}\delta\alpha, \ldots$$

В отношении координат концевых точек A и B необходимо ввести еще некоторое различие: например, $x_0=f(t_0, \alpha)$ можно рассматривать как функцию двух независимых переменных t_0 и α, и мы имеем:

$$\delta x_0=\frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha.$$

Но так как t_0 есть функция α, то x_0 в действительности есть сложная функция α, и мы положим:

$$\Delta x_0=\frac{dx_0}{d\alpha}\delta\alpha=\left[\frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial t_0}\frac{dt_0}{d\alpha}+\frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}\right]\delta\alpha;$$

аналогично определяются Δy_0, Δz_0, Δx_1, Δy_1, Δz_1.

Умножая обе части формулы (2) на $\delta\alpha$, мы получаем выражение вариации $\delta I = I'(\alpha)\,\delta\alpha$:

$$\delta I = \int\limits_{AB} \delta P\,dx + \delta Q\,dy + \delta R\,dz + \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\delta y\,dx - \delta x\,dy) +$$
$$+ \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)(\delta z\,dy - \delta y\,dz) + \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(\delta x\,dz - \delta z\,dx) +$$
$$+ [P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z]_A^B, \tag{4}$$

где положено, например,

$$[P\Delta x]_A^B = P(x_1, y_1, z_1, \alpha)\,\Delta x_1 - P(x_0, y_0, z_0, \alpha)\,\Delta x_0.$$

Правая часть формулы (4) содержит три члена: первый интеграл обязан своим происхождением вариации функций P, Q, R при изменении α на бесконечно малую величину $\delta\alpha$, и мы могли бы получить его непосредственно, не обращая внимания на деформацию пути интегрирования. Член, стоящий вне знака $\int$, зависит лишь от бесконечно малых перемещений концов A и B пути интегрирования; мы получили бы этот член, прибавляя к интегралу, взятому вдоль AB, два элемента интеграла, взятые вдоль $A'A$ и $B'B$, где A' и B' суть концы нового пути интегрирования $A'B'$, соответствующего значению $\alpha + \delta\alpha$ параметра. Второй интеграл, к которому мы еще вернемся, происходит от деформации самого пути интегрирования.

Формулы (2) и (4), которые были выведены нами лишь для правильной дуги, легко распространяются на случай, когда путь интегрирования имеет конечное число угловых точек. Если, например, дуга AB состоит из двух правильных дуг AC, CB, соединенных в точке C с координатами x_2, y_2, z_2, то мы можем применить формулу (4) к каждой из дуг AC, CB; при сложении обеих формул член $P(x_2, y_2, z_2, \alpha)\,\Delta x_2 + \ldots$ исчезает, и формула (4) применима, таким образом, ко всей дуге AB. В частности, если интеграл взят вдоль замкнутого контура, то член, стоящий вне знака $\int$, исчезает, каково бы ни было число правильных дуг, из которых состоит этот контур. Отсюда легко можно было бы вывести условия, необходимые и достаточные для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

взятый вдоль какой-нибудь кривой Γ, соединяющей две точки A и B, не изменялся, когда мы деформируем эту кривую непрерывным образом, оставляя неизменными ее концы (§ 147).

Возвратимся к интегралу, стоящему во второй строке формулы (4) и происходящему от деформации контура. Положим

$$L = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad M = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad N = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и обозначим через α', β', γ' углы, составляемые положительным направлением касательной к Γ с положительными направлениями осей;

исследуемый интеграл есть не что иное, как $\int\limits_{AB} H\,ds$, где H равно определителю

$$H=\begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ L & M & N \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

Этот определитель H по абсолютной величине равен объему параллелепипеда, построенного на следующих трех векторах: 1) вектор mm', началом которого служит точка $m(x, y, z)$ кривой Γ, а концом — точка $m'(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ варьированной бесконечно близкой кривой Γ'; 2) вектор $m\mathfrak{T}$, имеющий началом точку m, и компонентами L, M, N (*вихревой вектор*); 3) вектор mt, который мы получаем, откладывая длину, равную единице, на положительном направлении касательной. Пусть будут $V=\sqrt{L^2+M^2+N^2}$ длина вихревого вектора, δn — расстояние точки m' от касательной mt, θ — угол (от 0 до π) вихревого вектора с элементом плоскости, проходящей через mt и mm'. Мы имеем, с точностью до знака:

$$H=V\delta n\sin\theta,$$

и эта формула будет обладать общностью, если мы условимся приписывать δn определенный знак, а именно знак $+$, если триэдр $mtm'\mathfrak{T}$ имеет то же расположение осей, что и триэдр $Oxyz$, и знак — в противном случае.

Следовательно, общая формула (4) может быть написана в сокращенной форме:

$$\delta I=\int\limits_{AB}\delta P\,dx+\delta Q\,dy+\delta R\,dz+V\delta n\sin\theta\,ds+[P\Delta x+Q\Delta y+R\Delta z]_B^A. \quad (5)$$

В случае плоской кривой второй интеграл можно написать так:

$$\int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\delta y\,dx-\delta x\,dy)=\int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\cos\alpha'\,\delta y-\cos\beta'\,\delta x)\,ds,$$

где α' и β' суть углы положительного направления касательной с осями; $\delta n=\cos\alpha'\,\delta y-\cos\beta'\,\delta x$ представляет проекцию вектора mm' на направление нормали в m к Γ, которое составляет угол $+\frac{\pi}{2}$ с положительным направлением касательной (отсчитываемый от Ox к Oy); тогда общая формула для δI принимает вид:

$$\delta I=\int\limits_{AB}\delta P\,dx+\delta Q\,dy+\int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta n\,ds+[P\Delta x+Q\Delta y]_A^B. \quad (6)$$

В этих последних формулах часть δI, происходящая от деформации пути интегрирования, зависит лишь от бесконечно малого перемещения каждой точки m кривой Γ в направлении, перпендикулярном к касательной в m. Этот результат понятен a priori, так как всякое бесконечно малое перемещение mm' всегда может быть разложено на касательное и нормальное перемещения. Часть δI, происходящая от касательного перемещения, равна нулю, так как при этой деформации кривая Γ преобразуется сама в себя, и каждый элемент интеграла заменяется бесконечно близким элементом. Ясно, впрочем, что в уравнения, определяющие путь интегрирования, входит некоторый элемент произвола: это именно — выбор вспомогательного переменного t. Мы можем заменить t другим переменным τ, связанным с t соотношением $t = \pi(\tau, \alpha)$, так что t возрастает от t_0 до t_1, когда τ возрастает от τ_0 до τ_1. При этой замене выражения $\delta x, \delta y, \delta z$ изменяются, между тем как $I(\alpha)$, а следовательно, и δI, не зависят от выбора переменного t. С другой стороны, первый и третий члены δI сами не зависят от этого выбора, следовательно, то же самое будет иметь место и в отношении того члена δI, который один только содержит $\delta x, \delta y, \delta z$. Это замечание позволяет выбрать произвольно форму соответствия между точкой $m(x, y, z)$ пути AB и бесконечно близкою точкой $m'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ соседней кривой Γ', причем, однако, следует обращать внимание на условия непрерывности. В частности, можно поставить в соответствие точке m кривой Γ точку m', лежащую в плоскости, нормальной к Γ в точке m, или выбрать t так, чтобы предельные значения t_0 и t_1 не зависели от α; в этом случае точки обеих дуг AB и $A'B'$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Практически нам нет надобности иметь явные выражения функций

$$x = f(t, \alpha), \quad y = \varphi(t, \alpha), \quad z = \psi(t, \alpha),$$

которые мы предполагали известными в наших рассуждениях. Если мы знаем обе бесконечно близкие кривые Γ, Γ', соответствующие значениям α и $\alpha+\delta\alpha$ параметра, то нам достаточно будет взять за $\delta x, \delta y, \delta z$ такие бесконечно-малые первого порядка по отношению к $\delta\alpha$, чтобы точке (x, y, z) дуги AB соответствовала точка $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, расположенная на Γ'.

Примеры. 1. Предположим, что кривая Γ представляет собою отрезок прямой AB, соединяющий точку A $(0, \alpha)$ с точкою B $(\alpha, 0)$. Мы можем положить

$$x = t, \quad y = \alpha - t, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \alpha,$$

что дает:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha, \quad y_1 = 0, \quad \delta x = 0, \delta y = \delta\alpha,$$

$$\Delta x_0 = \Delta y_1 = 0, \quad \Delta y_0 = \delta\alpha, \quad \Delta x_1 = \delta\alpha.$$

Если мы имеем:

$$I = \int\limits_{AB} P(x, y, \alpha)\, dx + Q(x, y, \alpha)\, dy,$$

то, следовательно,

$$\delta I = \int\limits_{AB} \delta P\, dx + \delta Q\, dy + \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \delta\alpha\, dx + [P(\alpha, 0, \alpha) - Q(0, \alpha, \alpha)]\, \delta\alpha,$$

или, замечая, что вдоль AB мы имеем $dy + dx = 0$:

$$\delta I = \int\limits_0^\alpha (\delta P - \delta Q)\, dx + \int\limits_0^\alpha \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \delta\alpha\, dx + \alpha\, [P(\alpha, 0, \alpha) - Q(0, \alpha, \alpha)]\, \delta\alpha.$$

Мы могли бы положить также

$$x = \alpha t, \quad y = \alpha(1 - t), \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1$$

и получить тот же результат.

2. Если часть пути интегрирования неизменна, то второй интеграл, происходящий от этой части, равен нулю, так как соответствующее нормальное перемещение δn равно нулю. Рассмотрим, например, замкнутый контур $ABMA$, составленный из отрезка AB оси Ox, идущего от точки $A(-r, 0)$ к точке $B(r, 0)$, и полуокружности, описанной на AB как на диаметре над осью, причем этот кон-

тур обходится в положительном направлении. Пусть будет $I(r)$ интеграл

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

взятый вдоль этого контура. Мы имеем $\delta n = 0$ вдоль AB, и $\delta n = -\delta r$ вдоль BMA; следовательно:

$$\delta I = -\delta r \int\limits_{BMA} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) ds = -\delta r \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) r\,d\varphi.$$

2. Двойные интегралы. Пусть будет

$$I(\alpha) = \iint\limits_D F(x, y, \alpha)\,dx\,dy$$

двойной интеграл, распространенный на область D, ограниченную замкнутою кривою Γ, изменяющейся вместе с α и состоящей из конечного числа правильных дуг. Обозначим через $U(x, y, \alpha)$ функцию, производная которой по переменному x равна F. Если область D ограничена одною замкнутою кривою Γ, которую каждая параллель к Ox может встретить не более как в двух точках, — предположение, которое мы прежде всего сделаем, — то мы можем взять за $U(x, y, \alpha)$ функцию, однозначную и непрерывную в D. Достаточно будет взять тот интеграл уравнения $\frac{\partial U}{\partial x} = F$, который обращается в нуль во всех точках некоторой вспомогательной кривой в области D, пересекающей параллели $y = C$ лишь в одной точке. Мы имеем, на основании формулы Грина:

$$I(\alpha) = \int\limits_\Gamma U(x, y, \alpha)\,dy,$$

причем интеграл берется в положительном направлении. Вариация δI имеет выражение, согласно общей формуле (6):

$$\delta I = \int\limits_\Gamma \delta U\,dy - \int\limits_\Gamma \frac{\partial U}{\partial x}(\delta y\,dx - \delta x\,dy),$$

так как кривая замкнута; δx и δy обозначают вариации x и y при переходе от точки (x, y) кривой Γ к бесконечно близкой точке $(x + \delta x, y + \delta y)$ нового контура. Применяя опять формулу Грина, мы можем написать первый интеграл так:

$$\int\limits_\Gamma \delta U\,dy = \delta\alpha \int\limits_\Gamma \frac{\partial U}{\partial \alpha}\,dy = \delta\alpha \iint\limits_D \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha\,\partial x}\,dx\,dy = \delta\alpha \iint\limits_D \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,dx\,dy,$$

и мы имеем окончательно:

$$\delta I = \iint\limits_D \delta F\,dx\,dy + \int\limits_\Gamma F(\delta x\,dy - \delta y\,dx). \tag{7}$$

Применяя рассуждение, которым мы часто пользовались, мы можем распространить эту формулу на случай, когда контур Γ может встречаться с параллелью к Ox более чем в двух точках, а также на случай, когда область D ограничена несколькими замкнутыми кривыми; при этом мы должны предположить, что в последнем интеграле весь контур Γ пробегается в положительном направлении. Мы видим, что δI

составляется из двух членов: двойного интеграла, происходящего от вариации F, и простого интеграла, происходящего от вариации контура. Пусть будут α'', β'' углы, составляемые с осями направлением внешней нормали; ***если мы считаем нормальную вариацию δn положительной в этом именно направлении***, то мы имеем:

$$\delta x = \delta n \cos \alpha'', \quad \delta y = \delta n \cos \beta'',$$

и с другой стороны (§ 92):

$$dx = -ds \cos \beta'', \quad dy = ds \cos \alpha''.$$

Мы имеем, следовательно:

$$\delta x\, dy - \delta y\, dx = ds\, \delta n,$$

и криволинейный интеграл, представляющий вариацию I, происходящую от вариации контура, равен

$$\int_{\Gamma} F \delta n\, ds.$$

Этот результат нетрудно истолковать. Предположим, например, $\delta n > 0$; приращение, получаемое I при переходе от области, ограниченной контуром Γ, к области, ограниченной Γ', равно двойному интегралу, распространенному на область, заключенную между Γ и Γ'. Но так как измерение δn этой области бесконечно мало, то двойной интеграл приводится к криволинейному интегралу вдоль Γ; элемент этого криволинейного интеграла в точности равен $F \delta n\, ds$, так как $\delta n\, ds$ представляет площадь бесконечно малой области, ограниченной дугою ds контура Γ, нормалями в обоих концах этой дуги и соответствующею дугою контура Γ'.

3. Интегралы по поверхности. Пусть будет

$$I(\alpha) = \iint_S A(x, y, z, \alpha)\, dy\, dz + B(x, y, z, \alpha)\, dz\, dx + C(x, y, z, \alpha)\, dx\, dy$$

поверхностный интеграл, распространенный на правильную часть поверхности S, которая при изменении параметра α деформируется непрерывным образом, так же как и контур Γ, ограничивающий эту поверхность. Функции A, B, C предполагаются непрерывными, как и все их частные производные, входящие в вычисления. За ***положительную сторону S*** мы примем ту, по которой берется интеграл; этой стороне соответствует направление обхода контура Γ (§ 132), которое мы назовем ***положительным направлением***. Предположим, что поверхность S определяется уравнениями:

$$x = f(u, v, \alpha), \quad y = \varphi(u, v, \alpha), \quad z = \psi(u, v, \alpha),$$

которые устанавливают соответствие точек поверхности S с точками области R плоскости (u, v), ограниченной замкнутым контуром L, который также непрерывным образом деформируется при изменении параметра α. Кроме того, мы предположим, что оси Ou, Ov имеют такое расположение, при котором положительному направлению на контуре Γ соответствует *положительное направление* на L (§ 132). Мы всегда можем сделать это предположение, так как вспомогательные переменные u, v в окончательный результат не входят.

Поверхностный интеграл $I(\alpha)$ равен двойному интегралу, распространенному на область R плоскости (u, v) (§ 131):

$$I(\alpha)=\iint_R \left[A(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+B(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+\right.$$
$$\left.+C(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right] du\, dv.$$

Для того чтобы найти $I'(\alpha)$, достаточно применить к этому интегралу формулу (7), заменяя в ней x и y через u и v соответственно; при этом следует разделить сначала все члены $\delta I(\alpha)$ на $\delta\alpha$. Эта производная составляется из двух частей: двойного интеграла, распространенного на R, и криволинейного интеграла, взятого вдоль L. Мы займемся сначала двойным интегралом; один из членов этого интеграла, — тот, который зависит от C, равен:

$$\iint_R \left\{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}+C\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]\right\} du\, dv;$$

остальные два члена получаются из него круговой перестановкой (A, B, C) и (f, φ, ψ). Собирая члены с $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$, мы получаем на первом месте двойной интеграл:

$$\iint_R \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right] du\, dv,$$

который равен поверхностному интегралу

$$\iint_S \frac{\partial A}{\partial \alpha}\, dy\, dz+\frac{\partial B}{\partial \alpha}\, dz\, dx+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\, dx\, dy. \qquad (\text{I})$$

Двойной интеграл

$$\iint_R C\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right] du\, dv$$

можно преобразовать следующим образом. Простые вычисления показывают, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}\right];$$

формула Грина дает нам, далее (§ 116):

$$\iint_R C\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}\right] du\, dv=\int_L C\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}\, dv-\iint_R \frac{\partial C}{\partial u}\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}\, du\, dv,$$

$$\iint_R C\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}\right] du\, dv=-\int_L C\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}\, du-\iint_R \frac{\partial C}{\partial v}\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}\, du\, dv.$$

После этого преобразования в двойном интеграле остаются следующие члены, содержащие C:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\ldots,$$

причем те два члена, которые не написаны, получаются из первого круговой перестановкой букв u, v, α. Коэфициенты при $\frac{\partial C}{\partial x}$ и $\frac{\partial C}{\partial y}$ равны нулю, а коэфициент при $\frac{\partial C}{\partial z}$ равен

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}.$$

Из симметричности формул следует, что коэфициенты при $\frac{\partial A}{\partial x}$ и $\frac{\partial B}{\partial y}$ под знаком $\iint$ будут те же самые, а коэфициенты при $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial z}$ равны нулю. Следовательно, мы получаем в составе $I'(\alpha)$ новый двойной интеграл

$$\iint\limits_R\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]du\,dv,$$

который равен поверхностному интегралу

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\,dz+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dz\,dx+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dx\,dy\right). \qquad \text{(II)}$$

Кроме того, мы имеем простой интеграл, полученный в результате произведенной нами интеграции по частям, в котором член, содержащий C, есть

$$\int\limits_L C\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}dv+\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}du\right].$$

Наконец, мы имеем простой интеграл, происходящий от вариации контуров Γ и L; пусть будут

$$u_0=\pi(t, \alpha), \qquad v_0=\chi(t, \alpha)$$

координаты точки контура L, выраженные в функции параметра α и вспомогательного переменного t, определяющего положение точки на контуре. В составе $I'(\alpha)$ простой интеграл, происходящий от вариации контура, есть, как мы только что видели [формула (7)],

$$\int\limits_L\left[A\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+B\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+C\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]\left(\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}dv-\frac{\partial v_0}{\partial \alpha}du\right);$$

кладывая эти два простых интеграла, мы видим, что коэфициент при C под знаком $\int$ равен

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}dv+\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}du+\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}dv-\frac{\partial v_0}{\partial \alpha}du\right),$$

где вместо u и v следует поставить u_0 и v_0. Пусть будут (x_0, y_0, z_0) координаты точки контура Г, соответствующей точке (u_0, v_0) контура L; x_0, y_0, z_0 являются сложными функциями от α:

$$x_0 = f(u_0, v_0, \alpha), \qquad y_0 = \varphi(u_0, v_0, \alpha), \qquad z_0 = \psi(u_0, v_0, \alpha);$$

мы имеем, следовательно:

$$\frac{dx_0}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \frac{dy_0}{d\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \ldots,$$

и коэфициент при C можно написать так:

$$\frac{dx_0}{d\alpha}dy - \frac{dy_0}{d\alpha}dx.$$

В силу симметрии мы, в конце концов, видим, что криволинейный интеграл по L, входящий в выражение $I'(\alpha)$, может быть заменен криволинейным интегралом, взятым вдоль Г:

$$\int_{\Gamma} A\left(\frac{dy_0}{d\alpha}dz - \frac{dz_0}{d\alpha}dy\right) + B\left(\frac{dz_0}{d\alpha}dx - \frac{dx_0}{d\alpha}dz\right) + C\left(\frac{dx_0}{d\alpha}dy - \frac{dy_0}{d\alpha}dx\right). \quad \text{(III)}$$

Складывая все три интеграла (I), (II), (III), мы имеем, наконец:

$$\begin{aligned} I'(\alpha) = & \iint_S \frac{\partial A}{\partial \alpha}dy\,dz + \frac{\partial B}{\partial \alpha}dz\,dx + \frac{\partial C}{\partial \alpha}dx\,dy + \\ & + \iint_S \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\,dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dz\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dx\,dy\right) + \\ & + \int_{\Gamma} A\left(\frac{dy_0}{d\alpha}dz - \frac{dz_0}{d\alpha}dy\right) + B\left(\frac{dz_0}{d\alpha}dx - \frac{dx_0}{d\alpha}dz\right) + \\ & + C\left(\frac{dx_0}{d\alpha}dy - \frac{dy_0}{d\alpha}dx\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Умножая обе части на $\delta\alpha$, мы получаем выражение δI:

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_S \delta A\,dy\,dz + \delta B\,dz\,dx + \delta C\,dx\,dy + \\ & + \iint_S \left(\frac{dA}{dx} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)(\delta x\,dy\,dz + \delta y\,dz\,dx + \delta z\,dx\,dy) + \\ & + \int_{\Gamma} A(\Delta y_0\,dz - \Delta z_0\,dy) + B(\Delta z_0\,dx - \Delta x_0\,dz) + C(\Delta x_0\,dy - \Delta y_0\,dx), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \alpha}\delta\alpha, \quad \delta x = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha, \quad \Delta x_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha, \ \ldots$$

Мы видим, что δI составляется из трех членов, из коих первый происходит от вариации функций A, B, C в зависимости от α, второй — от деформации поверхности S и последний — от деформации контура Γ. Пусть будут λ, μ, ν углы, составляемые положительным направлением нормали к S с осями, $d\sigma$ — элемент площади; мы можем написать второй интеграл так:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)(\cos\lambda\,\delta x+\cos\mu\,\delta y+\cos\nu\,\delta z)\,d\sigma =$$

$$=\iint\limits_S \left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\delta n\,d\sigma, \tag{10}$$

где δn есть проекция на положительное направление нормали вектора, соединяющего точку (x, y, z) поверхности S с точкой $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ бесконечно близкой поверхности S', т. е. нормальное бесконечно малое перемещение точки поверхности S при деформации. Мы видим, как и выше, что второй интеграл зависит лишь от этого нормального перемещения; мы можем взять за δn бесконечно малую длину отрезка нормали, заключенного между S и S', что эквивалентно установлению определенной формы соответствия между S и S'.

Что касается простого интеграла, то мы можем интерпретировать его подобно аналогичному интегралу формулы (4). Пусть будут: V — длина вектора, имеющего началом точку (x_0, y_0, z_0), а компонентами A, B, C; θ — угол этого вектора с плоским элементом, определяемым касательною к Γ и бесконечно малым перемещением Δx_0, Δy_0, Δz_0 точки (x_0, y_0, z_0) контура Γ; δ'_n — расстояние точки $(x_0+\Delta x_0,\ y_0+\Delta y_0,\ z_0+\Delta z_0)$, от касательной к Γ в точке (x_0, y_0, z_0), взятое с соответствующим знаком. Этот простой интеграл можно написать еще так:

$$\int\limits_\Gamma V\sin\theta\,\delta'_n\,ds. \tag{11}$$

Как и в случае криволинейного интеграла, мы можем установить между точкой контура Γ и бесконечно близкой точкой деформированного контура Γ' соответствие по какому угодно закону.

Предположим, в частности, что точке m (x_0, y_0, z_0) контура Γ мы ставим в соответствие точку $m'(x_0+\Delta x_0,\ y_0+\Delta y_0,\ z_0+\Delta z_0)$, расположенную в плоскости, нормальной к Γ в точке m; тогда мы имеем:

$$\Delta x_0=\delta'_n\cos\lambda'',\quad \Delta y_0=\delta'_n\cos\mu'',\quad \Delta z_0=\delta'_n\cos\nu'',$$

где δ'_n есть расстояние mm', а λ'', μ'', ν'' — углы направления mm' с осями. Пусть будут, далее, λ', μ', ν' углы положительного направления касательной к Γ с осями; интеграл (11) равен также

$$\int [A(\cos\mu''\cos\nu'-\cos\nu''\cos\mu')+B(\cos\nu''\cos\lambda'-\cos\lambda''\cos\nu')+C\ldots]\,\delta'_n\,ds,$$

что можно написать еще так:

$$\int\limits_\Gamma (A\cos\lambda_1+B\cos\mu_1+C\cos\nu_1)\,\delta'_n\,ds,$$

где λ_1, μ_1, ν_1 суть углы, образуемые с осями нормалью к полосе S'', описываемой контуром Γ, когда параметр α получает приращение $\delta\alpha$. Но $\delta_n' ds$ представляет бесконечно малый элемент площади, описанной дугой ds контура Γ при изменении α на $\delta\alpha$, — элемент, который мы можем принять за прямоугольник. Предшествующий простой интеграл равен, следовательно, двойному интегралу

$$\iint\limits_{S''} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

распространенному на поверхность бесконечно узкой полосы S'', причем сторона поверхности, на которую распространяется интегрирование, определяется соображениями, приведенными выше.

Полученный результат нетрудно истолковать при помощи формулы Грина. Предположим, что мы переходим от S к S', сообщая каждой точке поверхности S бесконечно малое перемещение δn в положительном направлении нормали. Тогда обе поверхности S и S' и бесконечно узкая полоса S'' ограничивают некоторую область D. Приращение I, происходящее от деформации S и Γ, равно сумме поверхностных интегралов, распространенных на внешнюю сторону поверхностей S и S'. На основании формулы Грина эта сумма равна тройному интегралу

$$\iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

распространенному на область D, сложенному с поверхностным интегралом

$$\iint\limits_{S''} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

взятым по *внутренней* стороне полосы S''.

Так как измерение δn области D бесконечно мало, то тройной интеграл по этой области приводится к двойному интегралу, распространенному на область S, элемент которого равен

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \delta n\,d\sigma,$$

потому что $\delta n\,d\sigma$ есть элемент объема бесконечно малого прямого цилиндра, заключенного между S и S', основанием которого является элемент поверхности S, имеющий площадь $d\sigma$. Точно так же, так как одно из измерений поверхности S'' бесконечно мало, то двойной интеграл, распространенный на эту поверхность, обращается в криволинейный интеграл по Γ, элемент которого есть

$$(A \cos\lambda_1 + B \cos\mu_1 + C \cos\nu_1)\,\delta_n' ds,$$

так как $\delta_n' ds$ есть площадь элемента поверхности, заключенного между двумя бесконечно близкими нормалями в концах дуги ds контура Γ и контурами Γ, Γ'.

Формула (9), как и в § 1, распространяется на любую поверхность, составленную из конечного числа кусков правильных поверхностей; если поверхность замкнутая, то криволинейный интеграл исчезает. Результат, полученный для вариации криволинейного интеграла, можно было бы точно так же сопоставить с формулой Стокса.

4. Тройные интегралы. Рассмотрим, наконец, тройной интеграл

$$I(\alpha)=\iiint\limits_D F(x, y, z, \alpha)\,dx\,dy\,dz, \tag{12}$$

распространенный на область D, ограниченную замкнутою поверхностью S, изменяющеюся вместе с параметром α. Мы предположим сначала, что параллель к одной из осей, например к Oz, встречает эту поверхность не более как в двух точках. Тогда существует функция $U(x, y, z, \alpha)$, непрерывная в D и удовлетворяющая соотношению (см. § 2):

$$\frac{\partial U}{\partial z}=F(x, y, z, \alpha),$$

и мы имеем также:

$$I(\alpha)=\iint\limits_S U(x, y, z, \alpha)\,dx\,dy, \tag{13}$$

причем интеграл распространяется на внешнюю сторону поверхности S. Так как поверхность S — замкнутая, то, применяя к этому интегралу общую формулу (8), мы находим:

$$I'(\alpha)=\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial \alpha}\,dx\,dy+\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dy\,dz+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\,dz\,dx+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\,dx\,dy\right),$$

или, умножая на $\delta\alpha$ и принимая во внимание соотношение между U и F:

$$\delta I=\iiint\limits_D \delta F\,dx\,dy\,dz+\iint\limits_S F(x, y, z, \alpha)(\delta x\,dy\,dz+\delta y\,dz\,dx+\delta z\,dx\,dy), \tag{14}$$

где δx, δy, δz обозначают вариации координат точки (x, y, z) граничной поверхности S, и поверхностный интеграл берется по внешней стороне. Формула, как и выше (§ 2), распространяется на поверхность произвольной формы. Можно также написать двойной интеграл, входящий в выражение δI, следующим образом:

$$\iint\limits_S F(x, y, z, \alpha)\,\delta n\,d\sigma,$$

где $d\sigma$ есть элемент площади поверхности S, а δn — нормальное бесконечно малое перемещение в направлении внешней нормали.

Но $\delta n\,d\sigma$ есть, с точностью до знака, объем бесконечно малого прямого цилиндра, имеющего основание $d\sigma$ и высоту δn, так что рассматриваемый двойной интеграл представляет значение тройного интеграла

$$\iiint F\,dx\,dy\,dz,$$

распространенного на область, заключенную между двумя бесконечно близкими поверхностями S и S', причем каждый элемент этого интеграла взят с подходящим знаком.

УКАЗАТЕЛЬ*

(Цифры обозначают страницы настоящего полутома)

* Полный указатель ко всему курсу анализа Э. Гусева будет дан в конце III-го тома.