COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

CINQUIÈM ÉDITION

TOME I

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES
INTÉGRALES DÉFINIES
DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

GAUTHIER-VILLARS
PARIS

Э. ГУРСА

КУРС
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ЧАСТЬ II

РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
ПРОФ. А. И. НЕКРАСОВА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Б. К. МЛОДЗЕЕВСКОГО

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ВНОВЬ ПРОСМОТРЕННОЕ И ПЕРЕРАБОТАННОЕ
ПО ПЯТОМУ ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ
ПРОФ. В. В. СТЕПАНОВЫМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

ТТ 21—5—2.

Редакционную работу по этой книге провел *С. А. Каменецкий*. Издание оформила *О. Н. Персиянинова*. Корректуру держала *М. X. Яковлева*. Наблюдал за выпуском *В. П. Морев*.
Рукопись сдана в производство 28 января 1933 г. Листы подписаны к печати 11 октября 1933 г. Книга вышла в свет в октябре 1933 г. в количестве 10000 экземпляров, на бумаге формата 62×94/16. Печатных знаков в листе 67 000. Листов в книге $14^3/_4$. Заказ № 535. ГТТИ № 19.
Уполномоченный главлита № В-63839.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига", Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VIII.

РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Глава IX.

ЦЕЛЫЕ РЯДЫ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.

Глава X.

ТЕОРИЯ ОГИБАЮЩИХ. ПРИКОСНОВЕНИЕ.

Глава XI.

КРИВЫЕ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ.

Глава XII.

ПОВЕРХНОСТИ.

ГЛАВА VIII.

РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

I. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ.

148 Общие замечания. Выше (§ 5) мы имели общие условия сходимости ряда. На практике, для того чтобы узнать, является ли данный ряд сходящимся или расходящимся, всего чаще пользуются признаками менее общими, но зато более удобными для применения. Мы приведем из них лишь наиболее употребительные, которые оказываются достаточными для большинства приложений. Сначала мы сделаем несколько замечаний, которые непосредственно выводятся из самого определения сходимости:

1) Если мы умножаем все члены ряда на постоянное число a, отличное от нуля, то новый ряд сходится или расходится одновременно с первым; если первый ряд сходится и имеет суммой S, то сумма второго ряда равна aS.

2) Если мы имеем два сходящихся ряда:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

суммы которых, соответственно, равны S и S', то новый ряд, получаемый их почленным сложением,

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots, \tag{3}$$

сходится и имеет суммой $S + S'$. Аналогичный результат мы имеем, складывая почленно p сходящихся рядов.

3) Если мы изменим значения конечного числа членов ряда, то новый ряд сходится или расходится одновременно с первым, так как это изменение эквивалентно увеличению или уменьшению всех сумм S_n, начиная с достаточно большого значения n, на некоторое постоянное. В частности, ряд является ходящимся или расходящимся одновременно с рядом, который мы получаем, отбрасывая некоторое число членов начиная с первого.

4) Пусть будут S — сумма сходящегося ряда, S_n — сумма $n+1$ первых членов этого ряда, а R_n — сумма ряда, начинающегося с члена u_{n+1}; если мы возьмем за приближенное значение S сумму S_n $n+1$ первых членов, то ошибка, которую мы делаем, очевидно, равна R_n. Так как S_n имеет пределом S, когда n неограниченно возрастает, то разность R_n стремится нулю, и мы всегда можем взять, по крайней мере, теоретически, достаточно большое число членов, чтобы ошибка,

которую мы делаем, заменяя S через S_n, была меньше любого наперед заданного числа. Достаточно знать верхний предел R_n, чтобы оценить полученное приближение. Ясно, что на практике лишь те ряды являются пригодными для фактического вычисления, у которых R_n достаточно быстро стремится к нулю.

149. Ряды с положительными членами. Ряды, все члены которых положительны, имеют большое значение, и мы начнем с их рассмотрения. В каждом таком ряде сумма S_n возрастает вместе с n; поэтому для того, чтобы ряд был сходящимся, достаточно, чтобы при всяком n эта сумма S_n оставалась меньшею некоторого определенного количества. Самый общий прием для решения вопроса о сходимости или расходимости ряда состоит в сравнении предложенного ряда с другим рядом, уже исследованным ранее. Этот прием основан на двух следующих предложениях:

1. *Если все члены какого-нибудь знакоположительного ряда соответственно меньше или равны членам другого знакоположительного сходящегося ряда, то и первый ряд также сходящийся.*

В самом деле, сумма S_n первых n членов предложенного ряда, очевидно, меньше суммы S' второго ряда; следовательно, эта сумма S_n имеет предел S, меньший S'.

2. *Если все члены какого-нибудь знакоположительного ряда соответственно больше членов другого знакоположительного расходящегося ряда, то первый ряд также расходящийся.*

В самом деле, сумма n первых членов первого ряда больше суммы n первых членов второго ряда, и, следовательно, она неограниченно возрастает вместе с n.

Можно также сравнивать два ряда другим способом, основываясь на следующей лемме. *Пусть будут*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \tag{U}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \tag{V}$$

два знакоположительных ряда. Если ряд (U) *сходящийся, и если, начиная с некоторого указателя n, мы постоянно имеем $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, то ряд* (V) *также сходящийся. Если ряд* (U) *расходящийся, и если, начиная с некоторого указателя n, мы постоянно имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, то ряд* (V) *также расходящийся.*

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что неравенство $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$ удовлетворяется для $n \geqslant p$. Так как, умножив все члены ряда на постоянный множитель, мы не изменим ни сходимости ряда, ни отношения любого члена ряда к предыдущему члену, то мы можем предположить, что $v_p < u_p$; тогда мы будем, очевидно, иметь $v_{p+1} < u_{p+1}$, затем $v_{p+2} < u_{p+2}$, и т. д. Следовательно, ряд (V) — сходящийся. Вторая часть леммы доказывается таким же способом.

Таким образом, если нам дан знакоположительный ряд, характер которого относительно его сходимости известен то, пользуясь предыдущими предложениями, мы можем сравнивать с ним другие знакоположительные ряды; в зависимости от того, будем ли мы сравнивать самые члены или только отношения двух последовательных членов, мы получим два предложения, которые позволят в некоторых случаях убедиться в сходимости или расходимости этого второго ряда.

150. Признаки сходимости Коши и Даламбера. Простейший ряд, которым можно воспользоваться для сравнения с ним других рядов, есть геометрическая прогрессия с знаменателем r; эта прогрессия сходящаяся, если $r<1$, и расходящаяся, если $r>1$. Сравнение знакоположительного ряда с геометрическою прогрессиею приводит к следующему признаку сходимости, принадлежащему Коши:

Если в знакоположительном ряде количество $\sqrt[n]{u_n}$, начиная с некоторого члена, постоянно меньше некоторого определенного числа, меньшего единицы, то ряд — сходящийся; если же $\sqrt[n]{u_n}$, начиная с некоторого члена, постоянно больше единицы, то ряд — расходящийся.

В самом деле, в первом случае мы имеем $\sqrt[n]{u_n}<k<1$, и, следовательно, $u_n<k^n$. Таким образом, начиная с некоторого члена, все дальнейшие члены ряда меньше членов геометрической прогрессии с знаменателем k, меньшим единицы. Напротив, во втором случае мы имеем $\sqrt[n]{u_n}>1$ и $u_n>1$; следовательно, общий член ряда не стремится к нулю.

Предыдущий признак применим всякий раз, когда $\sqrt[n]{u_n}$ стремится к пределу; в этом случае мы получаем следующее предложение:

Если, при неограниченном возрастании n, $\sqrt[n]{u_n}$ стремится к некоторому пределу l, то ряд будет сходящимся, если l меньше единицы, и расходящимся, если l больше единицы.

При $l=1$ характер ряда остается сомнительным, за исключением того случая, когда $\sqrt[n]{u_n}$ стремится к единице, оставаясь больше ее: в этом случае ряд — расходящийся.

Точно так же, сравнивая отношение двух последовательных членов знакоположительного ряда с отношением двух последовательных членов геометрической прогрессии, мы приходим к признаку сходимости Даламбера:

Если в знакоположительном ряде, начиная с некоторого члена, отношение каждого члена к предыдущему остается меньшим некоторого определенного числа, меньшего единицы, то ряд — сходящийся. Если это отношение, начиная с некоторого члена, больше единицы, то ряд — расходящийся.

Отсюда следует, что *если при неограниченном возрастании указателя n отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к пределу l, то ряд — сходящийся, если $l<1$, и расходящийся, если $l>1$.* Единственный сомнительный случай — тот, когда $l=1$; но если отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к единице, оставаясь больше ее, то ряд — расходящийся.

151. Различные примечания. I. Признак сходимости Коши применим в более широких случаях, чем признак сходимости Даламбера. В самом деле, предположим, что, начиная с некоторого места, члены данного ряда меньше членов некоторой убывающей геометрической прогрессии, т. е. что при n, большем некоторого определенного числа p, общий член u_n ряда будет меньше Ar^n, где A — постоянное, и r меньше единицы. Такой ряд, по предыдущему (§ 150), будет сходящимся. В этом случае, $\sqrt[n]{u_n} < rA^{\frac{1}{n}}$, и при неограниченном возрастании n левая часть неравенства имеет предел r. Таким образом, обозначая через k некоторое постоянное число, заключающееся между r и 1, мы будем иметь, начиная с некоторого члена, $\sqrt[n]{u_n} < k$. Следовательно, здесь всегда применим признак сходимости Коши, а между тем может случиться, что отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет принимать значения, большие единицы, как бы далеко мы ни шли в данном ряде. Возьмем, например, ряд

$$1 + r|\sin\alpha| + r^2|\sin 2\alpha| + \ldots + r^n|\sin n\alpha| + \ldots,$$

где $r < 1$, и α — какое-нибудь постоянное. Мы имеем $\sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{|\sin n\alpha|} < r$, а между тем отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\right|$$

при неограниченном возрастании n может принимать бесконечное множество раз значения, большие единицы.

Тем не менее полезно удержать и признак сходимости Даламбера, которым часто удобнее пользоваться, чем признаком сходимости Коши. Так, в ряде

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots$$

отношение любого члена к предыдущему, равное $\frac{x}{n+1}$, при неограниченном возрастании n имеет пределом нуль, тогда как непосредственно не видно, какие значения принимает $\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{1\cdot 2\ldots n}}$ при весьма больших значениях n.

II. Если, применяя одно из предыдущих правил, мы нашли, что, начиная с некоторого места, все члены ряда соответственно меньше членов убывающей геометрической прогрессии

$$A,\ Ar,\ Ar^2,\ \ldots,\ Ar^n,\ \ldots,$$

то легко найти предел погрешности, получающейся при замене суммы ряда суммою его m первых членов; эта погрешность, очевидно, меньше суммы прогрессии

$$Ar^m + Ar^{m+1} + Ar^{m+2} + \ldots = \frac{Ar^m}{1-r}.$$

III. Если каждое из выражений $\sqrt[n]{u_n}$ и $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ имеет пределы, то оба эти предела необходимо равны между собою. В самом деле, рассмотрим вспомогательный ряд

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n \ldots, \tag{4}$$

где x положительно. В этом ряде отношение любого члена к предыдущему имеет пределом lx, где l есть предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; следовательно, ряд (4) сходящийся, если $x < \frac{1}{l}$, и расходящийся, если $x > \frac{1}{l}$. Точно так же, если l' есть предел выражения $\sqrt[n]{u_n}$, то выражение $\sqrt[n]{u_nx^n}$ имеет пределом $l'x$, так что ряд (4) будет сходящимся, если $x < \frac{1}{l'}$, и расходящимся, если $x > \frac{1}{l'}$. Чтобы оба эти признака сходимости не противоречили один другому, очевидно, должно быть $l = l'$; если бы, например, было $l > l'$, то всякое число x, содержащееся между $\frac{1}{l}$ и $\frac{1}{l'}$, согласно признаку сходимости Коши делало бы ряд (4) сходящимся, тогда как, согласно признаку Даламбера, то же самое число делало бы этот ряд расходящимся.

IV. Можно даже показать, что если $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к пределу l, то $\sqrt[n]{u_n}$ также стремится к тому же самому пределу * В самом деле, предположим, что начиная с некоторого члена, все отношения

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

содержатся между $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$, где ε — некоторое положительное число, которое мы можем предположить сколь угодно малым, если только n взято достаточно большим. Мы будем иметь:

$$(l-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (l+\varepsilon)^p,$$

или

$$u_n^{\frac{1}{n+p}} (l-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}} (l+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}.$$

Если n будет сохранять свое значение, а p будет неограниченно возрастать, то крайние члены этого двойного неравенства будут стремиться соответственно к $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$. Таким образом мы будем иметь при всяком достаточно большом значении m:

$$l - 2\varepsilon < \sqrt[m]{u_m} < l + 2\varepsilon \text{ **};$$

так как ε произвольно, то отсюда следует, что $\sqrt[m]{u_m}$ имеет пределом число l.

Должно заметить, что обратное предложение неверно. Возьмем, например, ряд

$$1, \ a, \ ab, \ a^2b, \ a^2b^2, \ \ldots, \ a^nb^{n-1}, \ a^nb^n, \ \ldots,$$

где a и b — два различных числа. При неограниченном возрастании n выражение $\sqrt[n]{u_n}$ имеет пределом ab, тогда как отношение любого члена к предыдущему попеременно равно a или b.

Предыдущее предложение может быть полезным при нахождении предела некоторых выражений, имеющих неопределенный вид. Например, из него следует, что $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \ldots n}$ неограниченно возрастает вместе с n, так как отношение $\frac{1 \cdot 2 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$ возрастает неограниченно. Точно так же можно убедиться, что $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n]{\ln n}$ имеют пределами единицу.

152. Применение наибольшего из пределов. Коши представил предыдущее предложение в более общем виде. Пусть будет a_n общий член знакоположительного ряда. Рассмотрим последовательность:

$$a_1, \ a_2^{\frac{1}{2}}, \ a_3^{\frac{1}{3}}, \ \ldots, \ a_n^{\frac{1}{n}}, \ \ldots \tag{5}$$

Если члены этой последовательности не имеют верхнего предела, то общий член a_n не стремится к нулю, и данный ряд расходящийся. Предположим, что все члены последовательности (5) меньше некоторого определенного числа, и пусть будет в этом случае ω наибольший из пределов членов этой последовательности.

---

* Коши, Cours d'Analyse.

** При достаточно большом значении n крайние члены предыдущего неравенства будут отличаться от своих пределов менее чем на ε. *(Ред.)*

Ряд $\sum a_n$ — сходящийся, если ω меньше единицы, и расходящийся, если ω больше еоиницы.

Чтобы доказать первую часть предложения, обозначим через $1-\alpha$ некоторое число, заключающееся между ω и 1. По самому определению наибольшего из пределов (§ 4), существует только конечное число членов последовательности (5), больших $1-\alpha$; следовательно, можно найти такое целое число p, чтобы при всяком значении числа n, большем p, было $\sqrt[n]{a_n} < 1-\alpha$; поэтому ряд $\sum a_n$ будет сходящимся. Напротив, если $\omega > 1$, то существует бесконечное множество членов последовательности (5), больших $1+\alpha$, где $1+\alpha$ есть какое-нибудь число, заключающееся между 1 и ω, и, следовательно, есть бесконечное множество значений указателя n, при которых a_n больше единицы: следовательно, ряд $\sum a_n$ — расходящийся. Сомнительным остается только тот случай, когда $\omega = 1$.

153. Теорема Коши. Когда $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ или $\sqrt[n]{u_n}$ стремятся к единице, но не остаются постоянно большими единицы, то при помощи признаков Даламбера и Коши нельзя узнать, будет ли данный ряд сходящимся или расходящимся. В этом случае нужно сравнивать данный ряд с другими рядами, обладающими тем же самым свойством, и характер которых известен. Следующее предложение, которое Коши вывел из рассмотрения определенных интегралов, позволяет решить вопрос о характере ряда во многих тех случаях, когда применение предыдущих признаков сходимости не приводит к определенному результату.

Пусть будет $\varphi(x)$ функция, которая, начиная с некоторого значения a переменного x, положительна, постоянно убывает и при неограниченном возрастании x стремится к нулю. Кривая $y=\varphi(x)$ имеет ось x асимптотою; определенный интеграл $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ при неограниченном возрастании l может или стремиться к конечному пределу или расти неограниченно. Теорема Коши состоит в том, что *ряд*

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)+\ldots \tag{6}$$

— сходящийся, если предыдущий интеграл стремится к пределу, и расходящийся в противном случае.

В самом деле, предположим, что x заключается между $a+p-1$ и $a+p$, где p — целое положительное число. Из двойного неравенства:

$$\varphi(a+p-1)>\varphi(x)>\varphi(a+p)$$

мы получаем, интегрируя в пределах $a+p-1$, $a+p$:

$$\varphi(a+p-1)>\int_{a+p-1}^{a+p}\varphi(x)\,dx>\varphi(a+p).$$

Полагаем последовательно $p=1, 2, \ldots, n$ и складываем полученные неравенства; мы будем иметь:

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n-1)>\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx,$$

$$\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\ldots+\varphi(a+n)<\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, если при неограниченном возрастании l интеграл $\int\limits_a^l \varphi(x)\,dx$ стремится к некоторому пределу L, то сумма

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n),$$

оставаясь постоянно меньшею $\varphi(a)+L$, также стремится к некоторому пределу; следовательно, ряд (6) — сходящийся. Напротив, если интеграл $\int\limits_a^{a+n} \varphi(x)dx$ возрастает выше всякого предела, то, на основании первого неравенства, сумма

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)$$

также будет возрастать выше всякого предела; следовательно, ряд (6) — расходящийся.

Возьмем, например, $\varphi(x)=\frac{1}{x^\mu}$, где μ положительно, и $a=1$. Функция $\varphi(x)$, очевидно, удовлетворяет всем предыдущим условиям; кроме того, при неограниченном возрастании l интеграл $\int\limits_1^l \frac{dx}{x^\mu}$ стремится к пределу, если μ больше единицы, и только в этом случае. Отсюда следует, что ряд

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\ldots+\frac{1}{n^\mu}+\ldots$$

— сходящийся, если $\mu>1$, и расходящийся, если $\mu\leqslant 1$.

Возьмем еще $\varphi(x)=\frac{1}{x(\ln x)^\mu}$, где μ положительно, и $\ln x$ обозначает неперов логарифм, и положим $a=2$. Предполагая $\mu\neq 1$, имеем:

$$\int\limits_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\mu}=\frac{-1}{\mu-1}\left[(\ln n)^{1-\mu}-(\ln 2)^{1-\mu}\right].$$

Правая часть имеет конечный предел, если $\mu>1$, и неограниченно возрастает вместе с n, если $\mu<1$; кроме того, легко видеть, что при $\mu=1$ интеграл возрастает выше всякого предела. Следовательно, ряд

$$\frac{1}{2(\ln 2)^\mu}+\frac{1}{3(\ln 3)^\mu}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^\mu}+\ldots$$

— сходящийся, если $\mu>1$, и расходящийся, если $\mu\leqslant 1$.

Вообще, ряд, общий член которого есть

$$\frac{1}{n\ln n\ln^2 n\ln^3 n\ldots\ln^{p-1} n(\ln^p n)^\mu},$$

— сходящийся, если $\mu > 1$, и расходящийся, если $\mu \leqslant 1$. В предыдущем выражении обозначения $\ln^2 n$, $\ln^3 n, \ldots$ введены для краткости вместо $\ln \ln n$, $\ln \ln \ln n$, и т. д. Разумеется, здесь целому числу n даются лишь настолько большие значения, чтобы $\ln n$, $\ln^2 n$, $\ln^3 n, \ldots, \ln^p n$ были положительны, и предполагается, что члены ряда, не удовлетворяющие этому условию, т. е. соответствующие меньшим значениям n, заменены нулями. Доказательство здесь такое же, как и для предыдущих рядов; например, если $\mu \neq 1$, то функция

$$\frac{1}{x \ln x \ln^2 x \ldots (\ln^p x)^{\mu}}$$

представляет производную от $\frac{1}{1-\mu}(\ln^p x)^{1-\mu}$, а последняя функция при неограниченном возрастании x стремится к конечному пределу только при $\mu > 1$.

Теорема Коши может иметь также приложения иного рода. Предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем вышеуказанным условиям. Рассмотрим сумму

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p), \tag{7}$$

где n и p — два целых числа, которые оба неограниченно возрастают. Если ряд, общий член которого есть $\varphi(n)$, — сходящийся, то предыдущая сумма имеет пределом нуль, так как она равна разности сумм S_{n+p+1} и S_n, которые обе стремятся к сумме S ряда. Если же ряд расходящийся, то мы не можем высказать о предыдущей сумме никакого общего суждения. Воспользовавшись данным в этом параграфе геометрическим представлением, мы придем к двойному неравенству:

$$\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx < \varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p) < \varphi(n) + \int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx.$$

Так как, при неограниченном возрастании n, $\varphi(n)$ стремится к нулю, то предел рассматриваемой суммы равен пределу интеграла $\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx$ и зависит от того, по какому закону возрастают числа n и p.

Например, чтобы иметь предел суммы

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p},$$

достаточно найти предел определенного интеграла $\int_n^{n+p} \frac{dx}{x} = \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right)$. Ясно, что этот интеграл имеет предел только в том случае, когда имеет предел отношение $\frac{p}{n}$; если предел этого отношения есть α, то сумма предыдущего ряда имеет пределом $\ln(1+\alpha)$, как это уже было доказано выше (§ 18).

Точно так же, чтобы иметь предел суммы

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}},$$

достаточно найти предел интеграла

$$\int_{n}^{n+p} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{n+p} - \sqrt{n}\right).$$

Чтобы последнее выражение имело предел, необходимо, чтобы частное $\frac{p}{\sqrt{n}}$ само имело некоторый предел α. В этом случае предыдущее выражение можно представить в виде:

$$2\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} = 2\frac{\frac{p}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{p}{n}}},$$

и мы видим, что его предел также равен α.

154. Логарифмические признаки. Исходя из ряда (§ 153)

$$\frac{1}{1^{\mu}} + \frac{1}{2^{\mu}} + \ldots + \frac{1}{n^{\mu}} + \ldots,$$

Коши пришел к другому признаку сходимости, совершенно аналогичному признаку, основанному на рассмотрении $\sqrt[n]{u_n}$.

Если, начиная с некоторого члена, отношение $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$ *постоянно больше некоторого определенного числа, большего единицы, то ряд — сходящийся. Если* $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$ *постоянно меньше единицы, то ряд — расходящийся.*

Если при неограниченном возрастании n *отношение* $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$ *стремится к пределу* l, *то ряд — сходящийся, если* $l > 1$, *и расходящийся, если* $l < 1$. *Случай* $l = 1$ *остается сомнительным.*

Чтобы доказать первую часть предложения, заметим, что из неравенства

$$\ln\frac{1}{u_n} > k\ln n$$

следует:

$$\frac{1}{u_n} > n^k,$$

или

$$u_n < \frac{1}{n^k};$$

так как $k > 1$, то данный ряд — сходящийся.

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что, начиная с некоторого члена, мы постоянно имеем $n\alpha_n > k > 1$. Пусть будет μ число, заключающееся между 1 и k, $1 < \mu < k$. Ряд будет наверное сходящимся, если, начиная с некоторого члена, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет меньше отношения $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$ двух последовательных членов ряда, общий член которого есть $n^{-\mu}$. Для этого должно быть:

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}}; \tag{8}$$

разлагая $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ по формуле Тейлора и ограничиваясь тремя членами, мы можем представить неравенство (8) в виде:

$$+\frac{\mu}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2} < 1+\alpha_n,$$

где, при неограниченном возрастании n, λ_n остается постоянно меньшим некоторого определенного числа. Последнее неравенство дает:

$$\mu+\frac{\lambda_n}{n} < n\alpha_n.$$

При неограниченном возрастании n левая часть имеет пределом μ; следовательно, начиная с достаточно большого значения n, эта часть будет постоянно меньше $n\alpha_n$; отсюда вытекает неравенство (8), а следовательно, и сходимость ряда.

Если произведение $n\alpha_n$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу l, то, применяя предыдущее правило, мы получим, что данный ряд будет сходящимся, если $l > 1$, и расходящимся, если $l < 1$. Сомнение остается лишь при $l = 1$, если только $n\alpha_n$ не стремится к единице, оставаясь постоянно меньше ее; в этом случае ряд будет расходящимся.

Если произведение $n\alpha_n$ имеет пределом единицу, то нужно сравнить $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ с отношением двух последовательных членов ряда

$$\frac{1}{2(\ln 2)^{\mu}}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^{\mu}}+\ldots,$$

который будет сходящимся, если $\mu > 1$, и расходящимся, если $\mu \leqslant 1$.

Полагая $n\alpha_n = 1+\beta_n$, мы можем представить отношение двух последовательных членов исследуемого ряда в виде:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}},$$

где, при неограниченном возрастании n, β_n стремится к нулю. *Если, начиная с некоторого члена, произведение $\beta_n \ln n$ постоянно больше некоторого определенного числа, большего единицы, то ряд — сходящийся. Если это отношение постоянно меньше единицы, то ряд — расходящийся*

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что при всех значениях указателя n, бо́льших числа p, мы имеем $\beta_n \ln n > k > 1$. Пусть будет μ такое число, что $1 < \mu < k$. Ряд будет сходящимся, если, начиная с некоторого члена, мы будем иметь:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^{\mu}, \tag{9}$$

или, иначе:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^{\mu};$$

применяя к правой части формулу Тейлора, имеем:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{\mu\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}+\lambda_n\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^2\right\},$$

причем, при неограниченном возрастании n, λ_n по абсолютному значению остается меньшим некоторого определенного числа. По упрощении последнее неравенство обращается в

$$\beta_n \ln n > \mu(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\lambda_n(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\ln n}.$$

При неограниченном возрастании n произведение $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ имеет пределом единицу, так как, по формуле Тейлора, это произведение может быть представлено в виде:

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}(1+\varepsilon), \tag{10}$$

где ε стремится к нулю. Таким образом правая часть предыдущего неравенства имеет пределом μ; следовательно, начиная с некоторого члена, это неравенство наверное справедливо, так как, по условию, $\beta_n \ln n$ больше числа $k > \mu$.

Таким же образом доказывается и вторая часть предложения. Здесь нужно сравнивать отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ с отношением двух последовательных членов ряда, общий член которого есть $\frac{1}{n\ln n}$. Неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

может быть представлено в виде:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right],$$

или

$$\beta_n \ln n < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Как видно из формулы (10), при значениях n, бо́льших единицы, правая часть стремится к единице; следовательно, начиная с некоторого места в ряде, последнее неравенство, наверное, справедливо, так как $\beta_n \ln n$, по условию, меньше единицы.

Из предыдущего предложения следует, что если при неограниченном возрастании n произведение $\beta_n \ln n$ стремится к пределу l, то ряд будет сходящимся, если $l > 1$, и расходящимся, если $l < 1$. Сомнение остается только

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что, начиная с некоторого члена, мы постоянно имеем $n\alpha_n > k > 1$. Пусть будет μ число, заключающееся между 1 и k, $1 < \mu < k$. Ряд будет наверное сходящимся, если, начиная с некоторого члена, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет меньше отношения $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$ двух последовательных членов ряда, общий член которого есть $n^{-\mu}$. Для этого должно быть:

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}}; \tag{8}$$

разлагая $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ по формуле Тейлора и ограничиваясь тремя членами, мы можем представить неравенство (8) в виде:

$$1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2} < 1 + \alpha_n,$$

где, при неограниченном возрастании n, λ_n остается постоянно меньшим некоторого определенного числа. Последнее неравенство дает:

$$\mu + \frac{\lambda_n}{n} < n\alpha_n.$$

При неограниченном возрастании n левая часть имеет пределом μ; следовательно, начиная с достаточно большого значения n, эта часть будет постоянно меньше $n\alpha_n$; отсюда вытекает неравенство (8), а следовательно, и сходимость ряда.

Если произведение $n\alpha_n$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу l, то, применяя предыдущее правило, мы получим, что данный ряд будет сходящимся, если $l > 1$, и расходящимся, если $l < 1$. Сомнение остается лишь при $l = 1$, если только $n\alpha_n$ не стремится к единице, оставаясь постоянно меньше ее; в этом случае ряд будет расходящимся.

Если произведение $n\alpha_n$ имеет пределом единицу, то нужно сравнить $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ с отношением двух последовательных членов ряда

$$\frac{1}{2(\ln 2)^{\mu}} + \ldots + \frac{1}{n(\ln n)^{\mu}} + \ldots,$$

который будет сходящимся, если $\mu > 1$, и расходящимся, если $\mu \leqslant 1$.

Полагая $n\alpha_n = 1 + \beta_n$, мы можем представить отношение двух последовательных членов исследуемого ряда в виде:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n}},$$

где, при неограниченном возрастании n, β_n стремится к нулю. *Если, начиная с некоторого члена, произведение $\beta_n \ln n$ постоянно больше некоторого определенного числа, большего единицы, то ряд — сходящийся. Если это отношение постоянно меньше единицы, то ряд — расходящийся*

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что при всех значениях указателя n, больших числа p, мы имеем $\beta_n \ln n > k > 1$. Пусть будет μ такое число, что $1 < \mu < k$. Ряд будет сходящимся, если, начиная с некоторого члена, мы будем иметь:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^{\mu}, \tag{9}$$

или, иначе:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^{\mu};$$

применяя к правой части формулу Тейлора, имеем:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{\mu\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}+\lambda_n\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^2\right\},$$

причем, при неограниченном возрастании n, λ_n по абсолютному значению остается меньшим некоторого определенного числа. По упрощении последнее неравенство обращается в

$$\beta_n \ln n > \mu(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\lambda_n(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\ln n}.$$

При неограниченном возрастании n произведение $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ имеет пределом единицу, так как, по формуле Тейлора, это произведение может быть представлено в виде:

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}(1+\varepsilon), \tag{10}$$

где ε стремится к нулю. Таким образом правая часть предыдущего неравенства имеет пределом μ; следовательно, начиная с некоторого члена, это неравенство наверное справедливо, так как, по условию, $\beta_n \ln n$ больше числа $k > \mu$.

Таким же образом доказывается и вторая часть предложения. Здесь нужно сравнивать отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ с отношением двух последовательных членов ряда, общий член которого есть $\frac{1}{n\ln n}$. Неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1}\,\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

может быть представлено в виде:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right],$$

или

$$\beta_n \ln n < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Как видно из формулы (10), при значениях n, больших единицы, правая часть стремится к единице; следовательно, начиная с некоторого места в ряде, последнее неравенство, наверное, справедливо, так как $\beta_n \ln n$, по условию, меньше единицы.

Из предыдущего предложения следует, что если при неограниченном возрастании n произведение $\beta_n \ln n$ стремится к пределу l, то ряд будет сходящимся, если $l > 1$, и расходящимся, если $l < 1$. Сомнение остается только для $l=1$, за исключением того случая, когда произведение $\beta_n \ln n$ остается постоянно меньшим единицы; в последнем случае данный ряд — расходящийся.

Если $\beta_n \ln n$ стремится к единице, оставаясь больше ее, то мы можем представить отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ в виде:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1+\gamma_n}{n\ln n}},$$

где, при неограниченном возрастании n, γ_n стремится к нулю. Рассматривая произведение $\gamma_n \ln^2 n$, мы будем иметь предложения, вполне аналогичные предыдущим, и т. д.

Следствие. Если в знакоположительном ряде отношение каждого члена к предыдущему имеет вид:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}},$$

где μ есть положительное число, r — постоянное, и при неограниченном возрастании n абсолютная величина количества H_n остается меньшим некоторого определенного числа, то *ряд — сходящийся, если r больше единицы, и расходящийся — в остальных случаях.*

В самом деле, полагая

$$\frac{u_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{1+\alpha_n},$$

имеем:

$$n\alpha_n=\frac{r-\frac{H_n}{n^{\mu}}}{1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}}},$$

и, следовательно, $\lim n\alpha_n=r$. Таким образом ряд сходится, если $r>1$, и расходится, если $r<1$. Сомнение остается только в том случае, когда $r=1$. Чтобы устранить это сомнение, положим

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}};$$

отсюда имеем:

$$\beta_n \ln n=\frac{\frac{\ln n}{n}-\frac{n+1}{n}H_n\frac{\ln n}{n^{\mu}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}}}.$$

При неограниченном возрастании n правая часть стремится к нулю, каково бы ни было положительное μ; следовательно, ряд — расходящийся.

Предположим, например, что $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ есть рациональная функция от n, стремящаяся к единице при неограниченном возрастании n.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+\ldots};$$

выполняя деление и останавливаясь на члене с $\frac{1}{n^2}$, мы можем представить предыдущее равенство в виде:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{a_1-b_1}{n}+\frac{\varphi(n)}{n^2},$$

где $\varphi(n)$ есть рациональная функция от n, стремящаяся к конечному пределу при неограниченном возрастании числа n. На основании предыдущего, *необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд был сходящимся, будет*:

$$b_1 > a_1 + 1.$$

Последняя теорема принадлежит Гауссу, который доказал ее непосредственно. Это — один из первых по времени общих признаков сходимости *.

156. Ряды абсолютно сходящиеся. Обратимся теперь к рядам, члены которых могут иметь любые знаки. Если, начиная с достаточно далекого члена, знаки всех членов ряда будут одинаковые, то этот случай непосредственно приводится к предыдущему. Поэтому здесь нам нужно рассмотреть только тот случай, когда ряд содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов. Прежде всего мы докажем следующую основную теорему.

Ряд, члены которого имеют произвольные знаки, будет сходящимся, если будет сходящимся ряд, составленный из абсолютных величин членов первого ряда.

Пусть будет

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{11}$$

ряд, члены которого могут иметь любые знаки; пусть, далее, будет

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots \tag{12}$$

ряд, составленный из абсолютных величин членов первого ряда, так что $U_n = |u_n|$. Если ряд (12) — сходящийся, то ряд (11) будет также сходящимся. Это следует из общей теоремы о сходимости. В самом деле, мы имеем:

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p};$$

взяв число n достаточно большим, мы можем, оставляя число p произвольным, сделать вторую сумму меньше всякого данного числа.

В сходимости ряда (11) можно убедиться еще иначе. Представим u_n в виде

$$u_n = (u_n + U_n) - U_n$$

и рассмотрим вспомогательный ряд, общий член которого есть $u_n + U_n$:

$$(u_0 + U_0) + (u_1 + U_1) + \ldots + (u_n + U_n) + \ldots \tag{13}$$

Обозначая соответственно через S_n, S'_n, S''_n суммы n первых членов рядов (11), (12), (13), мы, очевидно, будем иметь:

$$S_n = S''_n - S'_n.$$

По предположению, ряд (12) — сходящийся; точно так же будет сходящимся и ряд (13), который не имеет ни одного отрицательного члена, и общий член которого не превосходит $2U_n$. Таким образом суммы S'_n, S''_n, следовательно, и сумма S_n при неограниченном возрастании n

* Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \ldots$ (Gesammelte Werke, т. III, стр. 138).

стремятся к определенным пределам, т. е. данный ряд (11) — сходящийся. Сверх того, мы видим, что ряд (11) можно рассматривать как полученный от почленного вычитания двух знакоположительных сходящихся рядов.

Ряд, абсолютные величины членов которого образуют сходящийся ряд, называется *абсолютно сходящимся. В таком ряде можно, не изменяя суммы ряда, изменять по произволу порядок его членов.* Рассмотрим сначала сходящийся знакоположительный ряд с суммою S:

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots; \tag{U}$$

пусть будет

$$b_0+b_1+\ldots+b_n+\ldots \tag{V}$$

другой ряд, составленный из тех же членов, как и первый, но расположенных в другом порядке, так что каждый член ряда (U) находится где-нибудь в ряде (V), и, обратно, каждый член ряда (V) находится также и в ряде (U), хотя, может быть, и на другом месте.

Пусть будет S'_m сумма m первых членов ряда (V); так как все эти члены находятся в ряде (U), то ясно, что можно взять настолько большое число n, чтобы m первых членов ряда (V) находились в числе n первых членов ряда (U). Следовательно, должно быть:

$$S'_m<S_n<S,$$

что доказывает, что ряд (V) сходящийся и имеет сумму $S'\leqslant S$. Точно так же должно быть $S\leqslant S'$, и следовательно, $S'=S$. То же рассуждение показывает, что если один из рядов (U) и (V) — расходящийся, то и другой ряд будет также расходящимся.

Мы можем также, не изменяя суммы ряда, соединить в сходящемся знакоположительном ряде вместе члены произвольным образом, т. е. мы можем составить новый ряд, каждый член которого равен сумме произвольного числа членов первого ряда, взятых в любом порядке. Предположим сначала, что мы соединяем вместе члены в том порядке, в каком они входят в данный ряд; пусть будет

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_m+\ldots \tag{14}$$

получающийся при этом новый ряд, в котором, например,

$$A_0=a_0+a_1+\ldots+a_p,\quad A_1=a_{p+1}+\ldots+a_q,$$
$$A_2=a_{q+1}+\ldots+a_r,\quad \ldots$$

Сумма S'_m m первых членов ряда (V) равна сумме S_N N первых членов первоначального ряда, где $N>m$. При неограниченном возрастании m число N также неограниченно возрастает, и следовательно, сумма S'_m имеет тот же самый предел S.

Соединяя оба предыдущих преобразования, мы видим, что если дан сходящийся знакоположительный ряд, то мы можем, не изменяя его суммы, заменить его таким другим рядом, каждый член которого представляет сумму некоторого числа членов первого ряда, взятых в произвольном порядке. Нужно только, чтобы каждый член начального ряда входил в одну из групп, составляющих члены второго ряда, и притом только в одну.

Так как всякий абсолютно сходящийся ряд можно рассматривать как разность двух знакоположительных сходящ-хся рядов, то предыдущие преобразования применимы также и к абсолютно сходящимся рядам. Отсюда видно, что с абсолютно сходящимся бесконечным рядом при вычислениях можно поступать так же, как с суммою конечного числа членов.

157. Ряды условно сходящиеся, или полусходящиеся. Для того чтобы ряд. члены которого имеют разные знаки, был сходящимся, нет необходимости, чтобы ряд, образованный абсолютными величинами его членов, был также непременно сходящимся. Это видно, например, из следующей теоремы о знакопеременных рядах, которую я приведу без доказательства:

Ряд, состоящий из членов, поочередно положительных и отрицательных, будет сходящимся, если абсолютная величина каждого члена меньше абсолютной величины предыдущего члена, и если, кроме того, с возрастанием указателя члены ряда неограниченно убывают по абсолютной величине.

Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \tag{15}$$

— сходящийся. Между тем ряд, составленный из абсолютных величин членов предыдущего ряда, есть ряд гармонический — расходящийся.

Сходящиеся ряды, которые не суть абсолютно сходящиеся, называются *условно сходящимися, полусходящимися* или просто *сходящимися* рядами.

Работы Коши, Лежен-Дирихле и Римана (Riemann) показали, насколько необходимо различать ряды абсолютно сходящиеся и ряды полусходящиеся. Так, в полусходящемся ряде мы не имеем права изменять порядка членов или соединять эти члены между собою произвольным образом; эти преобразования могут повлечь за собою изменение суммы ряда, или даже превратить ряд сходящийся в ряд расходящийся, и обратно.

Возьмем, например, сходящийся ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\ldots,$$

сумма которого, очевидно, равна пределу выражения

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

при неограниченном возрастании m. Расположим члены этого ряда в другом порядке, так, чтобы за каждым положительным членом следовало два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\ldots \tag{16}$$

Рассматривая суммы S_{3n}, S_{3n+1}, S_{3n+2}, легко доказать, что этот новый ряд — сходящийся; его сумма равна пределу выражения

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)$$

при неограниченном возрастании m. Но мы имеем:

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

и, следовательно, сумма второго ряда равна половине суммы первого ряда.

Вообще, если дан ряд сходящийся, но не абсолютно, то можно расположить члены этого ряда в таком порядке, чтобы новый ряд был сходящимся, и чтобы его сумма была равна любому заранее данному числу A. Обозначим через S_p сумму p первых положительных членов этого ряда, через S'_q сумму абсолютных величин q первых отрицательных членов; сумма $p+q$ первых членов, очевидно, равна $S_p - S'_q$. Если оба числа p и q неограниченно возрастают, то должны неограниченно возрастать и суммы S_p и S'_q, так как в противном случае ряд был бы или расходящимся, если неограниченно возрастает одна из двух сумм, или абсолютно сходящимся, если обе суммы стремятся к конечным пределам. С другой стороны, так как данный ряд, по определению, — сходящийся, то общий член его должен стремиться к нулю.

Пользуясь этими замечаниями, мы можем следующим образом составить новый ряд, имеющий своею суммою число A. Возьмем столько положительных членов предложенного ряда в том порядке, в каком они расположены в данном ряде, чтобы их сумма была больше A; напишем вслед за ними первые отрицательные члены данного ряда в том порядке, в котором они стоят, и остановимся тогда, когда сумма всех написанных членов сделается меньше A; затем напишем положительные члены, начиная с того, на котором мы остановились в первый раз, и остановимся тогда, когда сумма всех взятых членов будет больше A; потом опять возьмем отрицательные члены, и т. д. Очевидно, что суммы членов этого нового ряда будут то больше, то меньше количества A, но эти суммы будут отличаться от A на количество, которое беспредельно убывает.

158. Признак Абеля. Абель дал теорему, позволяющую доказать сходимость некоторых рядов, сходимость которых не может быть обнаружена при помощи предыдущих признаков. Доказательство этой теоремы основывается на лемме, которою мы уже пользовались выше (§ 74).

Пусть будет

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

ряд сходящийся или *неопределенный* (т. е. такой, что сумма его n первых членов всегда меньше по абсолютной величине некоторого определенного числа A). С другой стороны, пусть будет

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$$

последовательность положительных чисел, из которых каждое меньше предыдущего, причем $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon_n=0$. *При этих условиях ряд*

$$\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\ldots+\varepsilon_n u_n+\ldots \tag{17}$$

будет сходящимся.

В самом деле, из этих условий следует, что при всяких значениях n и p будет

$$|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<2A;$$

следовательно, на основании только что упомянутой леммы, имеем:

$$|u_{n+1}\varepsilon_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\varepsilon_{n+p}| < 2A\varepsilon_{n+1}.$$

Так как, при неограниченном возрастании n, ε_{n+1} стремится к нулю, то число n можно взять настолько большим, чтобы при всяком p абсолютная величина суммы

$$\varepsilon_{n+1}u_{n+1} + \ldots + \varepsilon_{n+p}u_{n+p}$$

была меньше всякого заранее данного числа. Следовательно, на основании общей теоремы § 5, ряд (17) будет сходящимся.

Если ряд $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ обращается в ряд

$$1-1+1-1+1-1\ldots,$$

члены которого попеременно $+1$ и -1, то предыдущее предложение обращается в приведенную выше теорему о знакопеременных рядах.

Рассмотрим другой пример. Ряд

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin n\theta + \ldots$$

— сходящийся или неопределенный. Если $\sin\theta = 0$, то все члены ряда равны нулю; если $\sin\theta \gtrless 0$, то, по известной формуле тригонометрии, сумма n первых членов равна:

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right);$$

следовательно, эта сумма по абсолютной величине меньше $\dfrac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$. Отсюда заключаем, что при всяком значении количества θ ряд

$$\varepsilon_1\sin\theta + \varepsilon_2\sin 2\theta + \cdots + \varepsilon_n\sin n\theta + \cdots$$

— сходящийся. Точно так же можно доказать, что ряд

$$\varepsilon_1\cos\theta + \varepsilon_2\cos 2\theta + \ldots + \varepsilon_n\cos n\theta + \ldots$$

— сходящийся при всех значениях θ, кроме $\theta = 2k\pi$.

Следствие. Ограничиваясь сходящимися рядами, можно высказать еще более общее предложение. Пусть будет

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходящийся ряд, и пусть будет

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

последовательность положительных чисел, постоянно возрастающих или убывающих и стремящихся при неограниченном возрастании n к пределу k, отличному от нуля. *Ряд*

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots \tag{18}$$

будет также сходящимся.

Для определенности предположим, что числа α_i идут возрастая. Мы можем написать:

$$\alpha_0 = k - \varepsilon_0,\quad \alpha_1 = k - \varepsilon_1,\quad \ldots,\quad \alpha_n = k - \varepsilon_n,\quad \ldots,$$

где числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ образуют последовательность положительных убывающих чисел, причем, при неограниченном возрастании n, ε_n стремится к нулю. Оба ряда

$$ku_0 + ku_1 + \ldots + ku_n + \ldots,$$
$$\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n + \ldots$$

— сходящиеся; следовательно, ряд (18) будет также сходящимся.

II. РЯДЫ С МНИМЫМИ ЧЛЕНАМИ. РЯДЫ КРАТНЫЕ.

159. Определения. В этом параграфе мы укажем на некоторые обобщения понятия ряда. Пусть будет

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{19}$$

ряд, все члены которого — мнимые количества:

$$u_0 = a_0 + b_0 i,\ u_1 = a_1 + b_1 i, \ldots,\ u_n = a_n + b_n i, \ldots$$

Такой ряд называется *сходящимся*, если каждый из двух рядов, составленных из действительных частей и из коэфициентов при i:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{20}$$
$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{21}$$

будет сходящимся. Пусть будут S' и S'' суммы рядов (20) и (21); суммою ряда (19) называется количество $S = S' + iS''$. Очевидно, что здесь так же, как и в предыдущем, эта сумма представляет предел суммы S_n n первых членов ряда (19) при неограниченном возрастании числа n. Мы видим, что ряд с мнимыми членами есть, в сущности, не что иное, как совокупность двух рядов с действительными членами.

Если ряд, образованный модулями членов ряда (19)

$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \ldots, \tag{22}$$

— сходящийся, то каждый из рядов (20) и (21) будет, очевидно, абсолютно сходящимся, так как

$$|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

и

$$|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

В этом случае ряд (19) называется *абсолютно сходящимся*. В таком ряде мы можем, не изменяя суммы, изменять порядок членов или соединять эти члены произвольным образом.

Всякому признаку, позволяющему утверждать, что некоторый знакоположительный ряд — сходящийся, соответствует признак, позволяющий утверждать, что некоторый ряд с любыми членами, действительными или мнимыми, есть абсолютно сходящийся. Так, если в ряде, начиная с некоторого члена, модуль отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ меньше определенного числа, меньшего единицы, то ряд — абсолютно сходящийся. В самом деле, положим $U_i = |u_i|$. Если, начиная с некоторого члена, мы постоянно имеем $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k < 1$, то мы можем представить это неравенство в виде:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < k < 1;$$

это показывает, что ряд модулей

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots$$

— сходящийся. Если при неограниченном возрастании n отношение $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ стремится к пределу l, то ряд будет сходящимся при $l < 1$ и расходящимся при $l > 1$; в самом деле, в последнем случае модуль общего члена u_n не стремится к нулю, и оба ряда (20) и (21) не могут быть одновременно сходящимися. Случай $l = 1$ остается сомнительным.

Вообще, пусть будет ω наибольшим из пределов количеств $\sqrt[n]{U_n}$, когда n неограниченно возрастает. Ряд (19) будет абсолютно сходящимся, если $\omega < 1$, и расходящимся, если $\omega > 1$, так как в последнем случае модуль общего члена не стремится к нулю (§ 152). Случай $\omega = 1$ остается сомнительным; ряд может быть абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся.

160. Умножение рядов. Пусть будут

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{23}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{24}$$

два ряда с членами произвольного вида. Умножим каждый член первого ряда на каждый член второго ряда и соберем вместе все произведения $u_i v_j$ с одинаковою суммою указателей $i + j$; таким образом мы получим новый ряд:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots \\ \ldots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0) + \ldots \end{array}\right\} \tag{25}$$

Если оба ряда (23) и (24) абсолютно сходящиеся, то ряд (25) — также сходящийся и имеет суммою произведение сумм обоих предыдущих рядов. Эта теорема, доказанная Коши, была обобщена Мертенсом (Mertens) *, который показал, что она остается верною и в том случае, когда один ряд абсолютно сходящийся, а другой — только условно сходящийся.

Предположим, например, что ряд (23) — абсолютно сходящийся. Пусть будет w_n общий член ряда (25):

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + n_n v_0.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при неограниченном возрастании n обе разности

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n)(v_0 + v_1 + \ldots + v_n),$$

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n+1})$$

* *Crelle's Journal*, т. LXXIX;

стремятся к нулю. Так как доказательство в обоих случаях одинаково, то мы рассмотрим только первую разность. Расположив ее относительно u_i, мы можем представить ее в виде:

$$\delta = u_0(v_{n+1} + \ldots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \ldots + v_{2n-1}) + \ldots + u_{n-1} v_{n+1} + \\ + u_{n+1}(v_0 + \ldots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + \ldots + v_{n-2}) + \ldots + u_{2n} v_0.$$

Так как ряд (23) абсолютно сходящийся, то сумма

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

остается при всяком n меньшею некоторого определенного положительного числа A; точно так же, вследствие того, что ряд (24) сходящийся, модуль суммы $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ остается при всяком n меньшим некоторого положительного числа B. Пусть будет ε некоторое заранее данное положительное число; мы можем выбрать настолько большое положительное число m, чтобы при $n \geqslant m$ было

$$U_{n+1} + \ldots + U_{n+p} < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$

$$|v_{n+1} + \ldots + v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{A+B},$$

каково бы ни было число p. Взяв число n под этим условием, мы будем иметь верхнюю границу разности δ, заменяя $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ соответственно через $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$; $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+p}$ через $\frac{\varepsilon}{A+B}$ и, наконец, $v_0 + \ldots + v_{n-1}$, $v_0 + \ldots + v_{n-2}, \ldots, v_0$ через B. После этой замены получим:

$$|\delta| < U_0 \frac{\varepsilon}{A+B} + U_1 \frac{\varepsilon}{A+B} + \ldots + U_{n-1} \frac{\varepsilon}{A+B} + \\ + U_{n+1} B + U_{n+2} B + \ldots + U_{2n} B,$$

или

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{A+B}(U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}) + B(U_{n+1} + \ldots + U_{2n}) < \\ < \frac{\varepsilon A}{A+B} + \frac{\varepsilon B}{A+B},$$

или, наконец, $|\delta| < \varepsilon$. Таким образом разность δ имеет пределом нуль.

161. Двойные ряды Рассмотрим прямоугольное поле, ограниченное сверху и слева и неограниченно простирающееся вправо и вниз. Разобьем это поле вертикальными и горизонтальными линиями на квадраты наподобие шахматной доски. Такое поле будет содержать бесконечное множество вертикальных столбцов, которые мы перенумеруем, начиная с 0 до $+\infty$, и бесконечное множество горизонтальных строк, которые мы также перенумеруем, начиная с 0 до $+\infty$. Предположим, что каждой клетке этого поля соответствует некоторое число, которое мы впишем в эту клетку. Пусть будет a_{ik} число, соответствующее клетке, лежащей в i-й строке и в k-м столбце. Мы получим таким образом таблицу, имеющую следующий вид *:

$$\begin{array}{|llllll}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0n} & \ldots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \qquad (26)$$

Мы предположим сначала, что все члены этой таблицы — числа действительные и положительные.

Вообразим теперь ряд линий $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, бесконечно удаляющихся по всем направлениям и образующих вместе с двумя прямыми, ограничивающими таблицу, ряд замкнутых линий, каждая из которых заключает внутри себя все предыдущие. Пусть будут

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

суммы членов таблицы, стоящих внутри этих замкнутых линий.

Если при неограниченном возрастании n сумма S_n стремится к пределу S, то двойной ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} \qquad (27)$$

называется сходящимся и имеет суммою количество S. Чтобы оправдать это определение, нужно доказать, что предел S не зависит от вида кривых C. Предположим, что мы имеем другой ряд линий, удаляющихся в бесконечность по всем направлениям, $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots$, и пусть будут $S'_1, S'_2, \ldots, S'_m, \ldots$ соответствующие им суммы. Когда число m дано, то всегда можно выбрать число n настолько большим, чтобы линия C_n заключала внутри себя линию C'_m; следовательно, мы будем иметь $S'_m < S_n$, и отсюда, при всяком m, $S'_m < S$. Но эта сумма S'_m возрастает вместе с указателем m; следовательно, она стремится к пределу $S' \leqslant S$. Таким же образом мы докажем, что $S \leqslant S'$. Следовательно, $S' = S$.

Мы можем принять за линию C, например, две стороны беспредельно увеличивающегося квадрата или же прямые, равно наклоненные к обеим сторонам поля; соответствующие суммы будут в первом случае:

$$a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n0} + a_{n1} + \ldots + a_{nn} + a_{n-1,n} + \ldots + a_{0n}),$$

а во втором:

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}) +$$
$$+ (a_{20} + a_{11} + a_{02}) + \ldots + (a_{n0} + a_{n-1,1} + \ldots + a_{0n}).$$

* Такая таблица называется также таблицею *с двойным входом*. (*Ред.*)

Если при неограниченном возрастании n одна из этих сумм стремится к некоторому пределу, то будет стремиться к пределу и другая сумма, и оба эти предела будут равны между собою.

Сумму таблицы можно также составлять по строкам или по столбцам. В самом деле, предположим, что двойной ряд (27) — сходящийся, и пусть будет S его сумма. Очевидно, что сумма произвольного числа членов таблицы меньше S; отсюда следует, что все ряды, подобные следующему:

$$a_{i0}+a_{i1}+\ldots+a_{in}+\ldots \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{28}$$

получающиеся из членов какой-нибудь горизонтальной строки, будут сходящимися, так как сумма

$$a_{i0}+a_{i1}+\ldots+a_{in}$$

всегда меньше количества S и возрастает вместе с n. Пусть будут σ_0, $\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots$ суммы полученных таким образом сходящихся рядов; тогда ряд

$$\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_i+\ldots \tag{29}$$

будет также сходящимся. В самом деле, рассмотрим сумму Σa_{ik} тех членов таблицы, у которых $i\leqslant p$, $k\leqslant r$. Эта сумма всегда меньше S; если, оставляя число p постоянным, мы будем неограниченно увеличивать число r, то эта сумма будет иметь пределом

$$\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_p.$$

Таким образом мы всегда имеем $\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_p<S$, и так как эта сумма возрастает вместе с числом p, то отсюда следует, что ряд (29) сходящийся и имеет суммою число $\Sigma\leqslant S$. С другой стороны, если все ряды (28) — сходящиеся, и если новый ряд (29), составленный из сумм первых рядов, — сходящийся и имеет суммою число Σ, то ясно, что сумма любого числа членов таблицы (26) меньше Σ. Следовательно, мы имеем также $S\leqslant\Sigma$, и отсюда $\Sigma=S$.

Все, что было сказано о рядах, получающихся из горизонтальных строк, очевидно, применимо к рядам, получающимся из вертикальных столбцов. Таким образом, чтобы получить сумму двойного ряда, все элементы которого положительны, можно вычислять ее или по строкам, или по столбцам, или же, наконец, брать ограничивающие кривые произвольного вида. В частности, если ряд оказывается сходящимся, когда мы составляем сумму по горизонтальным строкам, то он будет также сходящимся и в том случае, если мы будем вычислять его по столбцам, и его сумма в обоих случаях одна и та же.

Для двойных рядов с положительными членами можно было бы дать ряд теорем, аналогичных теоремам, доказанным выше для простых рядов. Например, если члены двойного знакоположительного ряда соответственно меньше членов другого двойного сходящегося ряда, то и первый ряд также сходящийся, и т. д.

Двойной ряд с положительными членами, не сходящийся, называется *расходящимся*. Сумма элементов соответствующей этому ряду таблицы, расположенных внутри какой-нибудь замкнутой кривой, возрастает выше всякого предела, когда эта кривая неограниченно удаляется по всем направлениям.

Рассмотрим теперь таблицу, в которой не все элементы положительны. Очевидно, что мы можем исключить из рассмотрения те случаи, когда все элементы таблицы отрицательны, или когда есть только конечное число положительных или отрицательных элементов, так как все эти случаи непосредственно приводятся к предыдущему. Поэтому мы предположим, что в рассматриваемой таблице T есть бесконечное множество как положительных, так и отрицательных элементов. Пусть будет a_{ik} общий член таблицы T. Если таблица T_1 с положительными элементами, каждый элемент которой равен абсолютной величине $|a_{ik}|$ соответствующего элемента таблицы T, — сходящаяся, то таблица T называется *абсолютно сходящеюся*. Абсолютно сходящаяся таблица обладает всеми существенными свойствами сходящейся таблицы с положительными членами.

Для доказательства этого предложения рассмотрим две вспомогательных таблицы T' и T'', составленных следующим образом. Таблица T' образована из таблицы T таким образом, что каждый отрицательный элемент заменен нулем, а каждый положительный элемент оставлен на своем месте. Точно так же таблица T'' образована из таблицы T, в которой каждый положительный элемент заменен нулем, а у каждого отрицательного элемента переменен знак. Если таблица T_1 сходящаяся, то каждая из таблиц T' и T'' также сходящаяся, так как каждый элемент, например, таблицы T' не превосходит соответствующего элемента таблицы T_1. Сумма членов ряда T, заключающихся внутри какой-нибудь замкнутой кривой, равна разности между суммою членов таблицы T' и суммою членов таблицы T'', заключающихся внутри той же кривой. Так как обе последних суммы приближаются к некоторому пределу, когда пограничная кривая неограниченно удаляется по всем направлениям, то и первая сумма также стремится к пределу, и этот предел не зависит от вида пограничной кривой. Этот предел называется *суммою таблицы* T. Сумму такой таблицы T можно также вычислять по строкам или по столбцам, как это следует из рассуждений, приведенных по поводу таблиц с положительными элементами. Таким образом ясно, что если данная таблица абсолютно сходящаяся, то каковы бы ни были знаки ее элементов, с нею можно поступать, как с сходящеюся таблицею с положительными членами; но при этом существенно необходимо, чтобы ряд T_1 с положительными членами был сходящимся.

Если таблица T_1 — расходящаяся, то будет расходящеюся, по крайней мере, одна из таблиц T' и T''. Если одна из них, например T', — расходящаяся, а другая T'' — сходящаяся, то сумма элементов таблицы T, заключающихся внутри некоторой замкнутой кривой C, неограниченно возрастает независимо от вида кривой C, когда эта кривая неограниченно удаляется по всем направлениям. Если же обе таблицы T' и T'' расходящиеся, то из предыдущего рассуждения следует только то, что сумма элементов таблицы T, заключающихся внутри замкнутой кривой C, равна разности между двумя суммами, неограниченно возрастающими, когда кривая C неограниченно удаляется по всем направлениям. При этом может случиться, что сумма элементов таблицы T, заключающихся внутри C, приближается к совершенно различным пределам в зависимости от вида кривой C и от того, каким образом удаляется эта кривая, т. е. в зависимости от относительного возрастания числа положительных и отрицательных членов в этой сумме; в некоторых случаях сумма может даже стремиться к бесконечности, или не приближаться ни к какому пределу. В частности, если таблица не будет абсолютно сходящеюся, то мы можем получить совершенно различные суммы, вычисляя отдельно ее по строкам и по столбцам.

Арндт (Arndt) дал следующий пример *. Рассмотрим таблицу:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right),\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right),\ \ldots,\ \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right),\ \ldots\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2,\ \ldots,\ \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2,\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n,\ \ldots,\ \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n,\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Эта таблица содержит бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных элементов. Каждый из рядов, составленных из элементов каждой отдельной строки и каждого отдельного столбца, — сходящийся. Сумма ряда, составленного из элементов n-й строки, очевидно, равна:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Таким образом, вычисляя сумму таблицы по строкам, мы придем к сумме сходящегося ряда:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots,$$

которая равна $\frac{1}{2}$. С другой стороны, рассмотрим ряд, состоящий из членов $(p-1)$-го столбца:

$$\frac{1}{p}\left[\left(\frac{p-1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)^n+\ldots\right]-$$
$$-\frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{p}{p+1}\right)+\left(\frac{p}{p+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p}{p+1}\right)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд — сходящийся, и его сумма равна:

$$\frac{p-1}{p}-\frac{p}{p+1}=\frac{-1}{p(p+1)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}.$$

Следовательно, вычисляя таблицу по столбцам, мы придем к сумме сходящегося ряда:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\right)+\ldots,$$

которая равна $-\frac{1}{2}$.

Из этого примера ясно видно, что двойными рядами можно пользоваться при вычислениях только в том случае, если они будут абсолютно сходящимися.

Перейдем теперь к двойным рядам с мнимыми членами. Если элементы таблицы (26) мнимые, то можно составить две других таблицы T' и T'' таких, чтобы каждый элемент таблицы T' был равен действительной части соответствующего элемента таблицы T, а каждый элемент таблицы T'' был равен коэфициенту при i соответствующего элемента

* Grunert's Archiv, т. XI, стр. 319.

таблицы T. Если таблица T_1, каждый элемент которой равен модулю соответствующего элемента таблицы T, — сходящаяся, то каждая из таблиц T' и T'' будет абсолютно сходящеюся; в этом случае данная таблица T называется также *абсолютно сходящеюся*. Сумма элементов такой таблицы, заключающихся внутри некоторой переменной замкнутой кривой, стремится к пределу, когда пограничная кривая неограниченно удаляется по всем направлениям. Этот предел не зависит от вида пограничной кривой и называется *суммою* данной таблицы. Сумма абсолютно сходящейся таблицы может быть также вычисляема по строкам или по столбцам.

Абсолютно сходящийся двойной ряд можно заменить обыкновениым рядом, состоящим из тех же членов, как и данный двойной ряд. Для этого достаточно показать, что всегда можно перенумеровать клетки поля (26) таким образом, чтобы каждая клетка имела определенный номер, и чтобы ни одна клетка не была пропущена. Другими словами, если мы рассмотрим, с одной стороны, ряд последовательных натуральных чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

а с другой стороны, все пары целых чисел (i, k), где $i \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, то каждую из этих пар можно связать с одним из чисел последовательности натуральных чисел таким образом, чтобы, обратно, каждому числу n соответствовала только одна из этих пар. В самом деле, напишем все эти пары одна за другою следующим образом. Будем писать раньше те пары, у которых сумма чисел $i+k$ меньше, а из двух пар с равными суммами указателей $i+k$ будем писать раньше ту, у которой число i больше. Таким образом мы получим такую последовательность пар:

$$(0, 0);\ (1, 0),\ (0, 1);\ (2, 0),\ (1, 1),\ (0, 2);\ (3, 0),\ (2, 1),\ (1, 2),\ (0, 3);\ \ldots \qquad (30)$$

Вообще, написав все пары, для которых $i+k<n$, мы будем писать все пары для которых $i+k=n$, начиная с пары $(n, 0)$ и затем уменьшая i последовательно на единицу до нуля. Очевидно, что каждая пара (i, k) будет иметь перед собою только конечное число пар и, следовательно, будет занимать в последовательности определенное место. Представим теперь, что мы написали члены двойного абсолютно сходящегося ряда $\Sigma\Sigma a_{ik}$ в указанном выше порядке; мы получим простой ряд:

$$a_{00}+a_{10}+a_{01}+a_{20}+a_{11}+a_{02}+\ldots+a_{n0}+a_{n-1,1}+\ldots; \qquad (31)$$

у этого простого ряда будут те же члены, как и у рассматриваемого двойного ряда, он будет абсолютно сходящимся и будет иметь ту же сумму, как и двойной ряд. Ясно, что этот способ преобразования не является единственным, так как мы можем затем переставлять члены ряда по произволу. Обратно, всякий простой абсолютно сходящийся ряд может быть преобразован в двойной ряд бесконечным множеством способов. Это преобразование с большим успехом применяется при выводе некоторых тождеств *.

Мы видим, что понятие двойного ряда не отличается по существу от обычного понятия ряда. Выше мы видели, что в абсолютно сходящемся ряде можно заменять конечное число членов их суммою, а также располагать члены в произвольном порядке; распространяя эти свойства, мы естественно приходим к введению двойных рядов.

162. Кратные ряды. Понятие двойного ряда может быть еще значительно расширено. Прежде всего можно рассматривать ряды, каждый член которых a_{mn} зависит от двух указателей, изменяющихся от $-\infty$ до $+\infty$. Мы можем вообразить, что члены этого ряда расположены в клетках прямоугольного поля, простирающегося в бесконечность по

* Таннери (Tannery), Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, стр. 67.

всем направлениям; очевидно, что такой двойной ряд $\Sigma\Sigma a_{mn}$ можно разбить на четыре двойных ряда, подобных рассмотренным выше.

Еще более важно следующее обобщение понятия ряда. Рассмотрим ряд, каждый член которого $a_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ зависит от p указателей $m_1, m_2, \ldots, m_p$, изменяющихся от 0 до $+\infty$ или от $-\infty$ до $+\infty$, причем, кроме того, эти указатели могут быть еще стеснены некоторыми неравенствами. Хотя мы и не можем пользоваться геометрическим представлением, как скоро мы имеем более трех указателей, однако нетрудно видеть, что предложения, полученные для двойных рядов, могут быть легко распространены на кратные ряды порядка p.

Предположим сначала, что все члены $a_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ действительны и положительны. Предположим, что мы взяли сумму некоторого числа членов этого ряда; далее, составим вторую сумму, прибавив к первой сумме сумму некоторого числа членов из числа опущенных при составлении первой суммы, и т. д., так, чтобы каждый член предложенного ряда вошел в одну из этих сумм, а следовательно, и во все последующие суммы. Пусть будут $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ полученные таким способом последовательные суммы. Если при неограниченном возрастании числа n сумма S_n стремится к некоторому пределу S, то данный ряд называется сходящимся и будет иметь суммою это число S. Как и в случае рядов с двумя указателями, предел S не зависит от того закона, по какому мы неограниченно увеличиваем число складываемых членов. Если члены имеют разные знаки, или если они мнимые, то и здесь ряд будет сходящимся, если будет сходящимся ряд, составленный из модулей отдельных членов.

163. Обобщение теоремы Коши. Вопрос о сходимости или расходимости кратного ряда часто может быть решен при помощи следующей теоремы, представляющей собою обобщение теоремы Коши (§ 153). Пусть будет $f(x, y)$ функция двух переменных x, y, положительная для всех точек (x, y), лежащих вне некоторой замкнутой кривой Γ, и убывающая с удалением точки (x, y) от начала координат. Рассмотрим, с одной стороны, двойной интеграл $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, распространенный на кольцеобразную площадь, содержащуюся между кривою Γ и некоторою другою внешнею кривою C, которая неограниченно удаляется по всем направлениям. С другой стороны, возьмем ряд с двойным входом $\Sigma f(m, n)$, где мы даем указателям m и n все такие целые положительные и отрицательные значения, при которых точка (m, n) лежит вне кривой Γ.

При этих условиях *двойной ряд будет сходящимся, если двойной интеграл имеет предел, и обратно.*

Разобьем площадь, заключающуюся между двумя кривыми C и Γ, прямыми, параллельными осям координат, $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $y=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, на некоторое число квадратов и неправильных частей. Если мы возьмем в каждом из квадратов вершину, наиболее удаленную от начала координат, то ясно, что соответствующая сумма $\Sigma f(m, n)$ будет меньше двойного интеграла $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, распространенного на площадь, заключающуюся между C и Γ. Предположим, что кривая C неограниченно удаляется от кривой Γ; если при этом двойной интеграл стремится к некоторому пределу S, то отсюда следует, что сумма любого числа членов двойного ряда всегда меньше некоторого определенного числа; следовательно, этот ряд — сходящийся. Таким же образом мы убеждаемся, что если двойной ряд — сходящийся, то двойной интеграл всегда меньше некоторого определенного числа; следовательно, этот интеграл стремится к некоторому пределу. При сохранении соответствующих предположений теорема распространяется на кратные ряды с p указателями; их следует сравнивать с кратными интегралами порядка p.

Так, например, двойной ряд, общий член которого есть $\frac{1}{(m^2+n^2)^\mu}$, где указатели m и n принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, кроме $m=n=0$, — сходящийся, если $\mu>1$, и расходящийся, если $\mu\leqslant 1$. В самом деле, двойной интеграл

$$\iint \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\mu}, \tag{32}$$

распространенный на площадь, лежащую вне круга с центром в начале координат, имеет конечное значение, если $\mu>1$, и неограниченно возрастает, если $\mu\leqslant 1$ (§ 127).

Как более общий пример рассмотрим кратный ряд с общим членом

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_p^2)^\mu},$$

причем система значений $m_1=m_2=\ldots=m_p=0$ исключается; этот ряд будет сходящимся, если $2\mu>p$*.

164. Кратные ряды с переменными членами. Пусть мы имеем двойной ряд, или, для общности, кратный ряд p измерений, члены которого суть функции произвольного числа m переменных $x, y, z, \ldots$, и который абсолютно сходится в области D. Говорят, что ряд в этой области *сходится равномерно*, если выполняется следующее условие: каково бы ни было наперед заданное положительное число ε, всегда можно найти такое конечное число N членов ряда, что разность между суммой S ряда и суммой какого-либо числа n членов ряда, содержащей N первых членов, по абсолютной величине меньше ε для всех значений переменных $x, y, z, \ldots$ в области D.

Повторяя рассуждения § 29 и 107, доказывают, что сумма равномерно сходящегося ряда, все члены которого суть функции, непрерывные в D, есть также функция непрерывная в этой области; ее можно интегрировать почленно во всякой конечной области δ, имеющей q измерений $(q\leqslant m)$ и содержащейся в D. Точно так же можно произвольное число раз почленно диференцировать абсолютно сходящийся ряд, если только все получаемые таким образом ряды сходятся равномерно.

* Более общие предложения можно найти в Traité d'Analyse Жордана (Jordan), т. I, стр. 163.

Заметим еще, что кратный ряд сходится равномерно, если абсолютная величина любого его члена не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда с постоянными положительными членами (§ 29).

III. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

165. Определения и общие свойства. Пусть будет дана бесконечная последовательность действительных или мнимых членов

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots;$$

рассмотрим последовательность произведений:

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 + u_0, \\
P_1 &= (1 + u_0)(1 + u_1), \\
P_2 &= (1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n &= (1 + u_0)(1 + u_1)\ \ldots\ (1 + u_n).
\end{aligned}$$

Если произведение P_n стремится к некоторому пределу P, то бесконечное произведение

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1 + u_n) = (1 + u_0)(1 + u_1)\ldots(1 + u_n)\ldots \tag{33}$$

называется *сходящимся*; число P называется значением этого произведения.

Очевидно, что, если один из множителей $1 + u_m$ равен нулю, то все произведения P_n, где $n \geqslant m$, равны нулю; следовательно, $P = 0$. Но может случиться, что произведение стремится к нулю, хотя ни один из множителей $1 + u_m$ нулю не равен. Таково, например, произведение

$$P_n = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\ \ldots\ \frac{1}{n};.$$

очевидно, что при неограниченном возрастании n это произведение стремится к нулю. Так как признаки сходимости бесконечного произведения не всегда применимы к этому особому случаю, то мы сохраним название *сходящегося произведения* только за теми произведениями, у которых P_n стремится к некоторому пределу P, *отличному от нуля*. Если P_n имеет пределом нуль, то мы будем говорить, что произведение *равно нулю*; если же P_n не стремится ни к какому пределу, то произведение называется *расходящимся*.

Чтобы бесконечное произведение было сходящимся и не равным нулю, *необходимо*, чтобы u_n стремилось к нулю. В самом деле, если P_n стремится к пределу P, то разность $P_n - P_{n-1} = P_{n-1}u_n$ должна стремиться к нулю; так как множитель P_{n-1} имеет предел P, отличный от нуля, то, следовательно, множитель u_n стремится к нулю. Это рассуждение неприменимо, если произведение равно нулю; на приведенном выше примере нетрудно проверить, что в этом случае u_n может и не стремиться к нулю.

На основании сделанного ранее замечания (см. § 5) исследование сходимости или расходимости бесконечного произведения приводится к изучению того же вопроса для ряда. Положим:

$$v_0 = P_0 = (1 + u_0), \quad v_1 = P_1 - P_0 = (1 + u_0)\,u_1\,, \ \ldots,$$

и, вообще,

$$v_n = P_n - P_{n-1} = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_{n-1})\,u_n; \tag{34}$$

рассмотрим вспомогательный ряд

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{35}$$

Сумма $\Sigma_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, очевидно, равна P_n; таким образом, этот ряд — сходящийся или расходящийся вместе с бесконечным произведением

$$\prod (1 + u_n);$$

если ряд — сходящийся, то его сумма Σ равна значению P бесконечного произведения.

166. Абсолютно сходящиеся произведения. Предположим сначала, что все числа u_n — действительны и положительны. В этом случае произведение P_n возрастает вместе с n, и, чтобы доказать его сходимость, достаточно показать, что при всяком значении числа n произведение P_n остается меньшим некоторого определенного числа. Мы имеем, с одной стороны:

$$P_n > 1 + u_0 + u_1 + \ldots + u_n;$$

с другой стороны, при x положительном имеем $1 + x < e^x$, и, следовательно:

$$P_n < e^{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}.$$

Из первого неравенства видно, что, если произведение P_n стремится к некоторому пределу P, то постоянно $u_0 + u_1 + \ldots + u_n < P$. Следовательно, знакоположительный ряд

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{36}$$

— сходящийся. Обратно, предположим, что этот ряд — сходящийся, и пусть будет S его сумма; тогда из второго неравенства имеем $P_n < e^S$; следовательно, произведение P_n стремится к пределу. Таким образом *бесконечное произведение* $\prod\limits_0^{+\infty} (1 + u_n)$, *в котором все числа* u_n *действительны и положительны, сходится или расходится вместе с рядом* (36).

Рассмотрим теперь бесконечное произведение с произвольными членами, действительными или мнимыми:

$$(1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n) \ldots; \tag{37}$$

пусть будет $U_i = |u_i|$. *Если ряд*

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots \tag{38}$$

— сходящийся, то и бесконечное произведение (37) *будет сходящимся.* В самом деле, положим, как выше:

$$v_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})\,u_n,$$
$$V_n = (1+U_0)(1+U_1)\ldots(1+U_{n-1})\,U_n.$$

На основании предыдущего, если знакоположительный ряд ΣU_i сходящийся, то будет сходящимся и бесконечное произведение $\prod(1+U_i)$, а, следовательно, и ряд

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_n + \ldots \tag{39}$$

Но, очевидно, что $|v_n| < V_n$; следовательно, ряд

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{40}$$

— абсолютно сходящийся, и, как было замечено, сумма этого ряда есть предел произведения

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)$$

при неограниченном возрастании числа n. При этих условиях произведение $\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ называется *абсолютно сходящимся.*

Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения представляют особый интерес, как и абсолютно сходящиеся ряды, с которыми они имеют много общего. Так, в *абсолютно сходящемся бесконечном произведении можно произвольно изменять порядок множителей, не изменяя произведения.* Докажем сначала, что если дано абсолютно сходящееся бесконечное произведение, то для всякого положительного числа ε можно найти такое целое число n, чтобы модуль разности между единицею и произведением любого числа множителей

$$(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)$$

был меньше ε, если все указатели $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ больше n. В самом деле, выполняя в обеих частях умножение, можно непосредственно убедиться, что

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda) - 1| < (1+U_\alpha)(1+U_\beta)\ldots(1+U_\lambda) - 1,$$

и, следовательно,

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda) - 1| < e^{U_\alpha + U_\beta + \ldots + U_\lambda} - 1.$$

Так как ряд ΣU_i — сходящийся, то можно взять число n настолько большим, чтобы сумма $U_\alpha + U_\beta + \ldots + U_\lambda$ была меньше $\ln(1+\varepsilon)$, если все указатели $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ больше n. Следовательно, взяв целое число n достаточно большим, можно сделать правую часть предыдущего неравенства меньшею всякого положительного числа ε.

Заметим при этом, что отсюда вытекает следующее предложение: *абсолютно сходящееся произведение не может быть равно нулю, если ни один из множителей не равен нулю.* В самом деле, предположим, что ни один из множителей произведения не равен нулю; выберем число n настолько большим, чтобы при всяком положительном числе p было:

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\dots(1+u_{n+p})-1|<\alpha,$$

где α — положительное число, меньшее единицы. Очевидно, что модуль бесконечного произведения $\prod\limits_{\nu=1}^{+\infty}(1+u_{n+\nu})$ больше $1-\alpha$, и, следовательно, произведение P, равное предыдущему, умноженному на P_n, не может быть равно нулю.

После этих предварительных рассуждений рассмотрим абсолютно сходящееся бесконечное произведение

$$(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)\dots, \tag{41}$$

и пусть будет

$$(1+u'_0)(1+u'_1)\dots(1+u'_n)\dots \tag{42}$$

другое бесконечное произведение, состоящее из тех же множителей, но взятых в другом порядке. Это второе произведение — также абсолютно сходящееся, так как ряд $\Sigma U'_i$ состоит из тех же членов, как и ряд ΣU_i. Обозначим через P и P' значения этих обоих произведений (41) и (42). Пусть будет P_n произведение n первых множителей произведения (41); все эти множители находятся и в произведении (42), и мы можем взять такое число $m>n$, чтобы произведение P'_m содержало все множители произведения P_n. В этом случае мы имеем:

$$\frac{P'_m}{P_n}=(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\dots(1+u_\lambda),$$

где все указатели α, β, ..., λ больше n; на основании предыдущего можно взять число n настолько большим, чтобы было:

$$\left|\frac{P'_m}{P_n}-1\right|<\varepsilon,$$

как бы ни было мало положительное число ε. Но при неограниченном возрастании числа n число m также неограниченно возрастает, и отношение $\frac{P'_m}{P_n}$ имеет предел $\frac{P'}{P}$. Следовательно, должно быть $P'=P$.

167. Равномерно сходящиеся произведения. Рассмотрим бесконечное произведение (33), где u_0, u_1, ..., u_n, ... суть непрерывные функции, действительные или мнимые, одного или нескольких переменных x, y, t, ..; очевидно, что в этом предположении содержится случай, когда u_0, u_1, u_2, ... суть функции одного комплексного переменного z. Это произведение называется *равномерно сходящимся* в некоторой области D, если определенный выше ряд Σv_n, сумма которого равна значению бесконечного произведения, равномерно сходится в той же области. В этом случае произведение P есть непрерывная функция независимых переменных.

Бесконечное произведение будет равномерно сходящимся, если будет равномерно сходящимся ряд

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots \tag{43}$$

В самом деле, вернемся к ряду (35); мы имеем:

$$v_{n+1} + \ldots + v_{n+p} = P_{n+p} - P_n = P_n[(1+u_{n+1}) \ldots (1+u_{n+p}) - 1],$$

кроме того, очевидно, что

$$|P_n| < (1+U_0)(1+U_1)\ldots(1+U_n) < e^{U_0+U_1+\ldots+U_n},$$

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p}) - 1| < e^{U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+}} - 1.$$

Но так как ряд (43) равномерно сходится в области D, то он представляет в ней непрерывную функцию, которая остается меньшею некоторой границы M; вследствие равномерной сходимости ряда (43) можно выбрать число N настолько большим, чтобы сумма

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p},$$

где $n \geqslant N$, при всяком значении числа p оставалась в области D меньшею некоторого положительного числа α. Следовательно, при таком выборе числа n мы имеем:

$$|v_{n+1} + \ldots + v_{n+p}| < e^M(e^\alpha - 1).$$

Так как число α всегда можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворялось неравенство $e^M(e^\alpha - 1) < \varepsilon$, как бы ни было мало число ε, то отсюда следует, что ряд Σv_n — равномерно сходящийся.

Примечание. Все предыдущие свойства легко распространяются и на бесконечные произведения вида $\Pi(1+u_{mn})$, где каждый множитель имеет два различных указателя m, n, которые могут отдельно изменяться от 0 до $+\infty$. Если двойной ряд ΣU_{mn} сходящийся, то предыдущее произведение имеет вполне определенное значение, не зависящее от того, каким способом возрастает число множителей. Абсолютно сходящийся двойной ряд можно бесконечным множеством способов преобразовать в простой ряд; точно так же и абсолютно сходящееся двойное бесконечное произведение можно бесконечным множеством способов преобразовать в простое абсолютно сходящееся бесконечное произведение. Если все члены u_{mn} суть непрерывные функции некоторых переменных $x, y, \ldots$, и если ряд ΣU_{mn} — равномерно сходящийся в некоторой области D, то бесконечное произведение $\Pi(1+u_{mn})$ само равномерно сходится и представляет в области D непрерывную функцию от $x, y, \ldots$

168. Действительные бесконечные произведения. Возвратимся к бесконечному произведению с действительными множителями:

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$$

и рассмотрим тот случай, когда в последовательности $u_0, u_1, u_2, \ldots$ есть бесконечное множество отрицательных членов. Если все эти члены, начиная с некоторого указателя, заключаются между -1 и 0, то задача приводится к изучению бесконечного произведения вида:

$$(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)\ldots, \tag{44}$$

где $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ — положительны и меньше единицы. О евидно, что с возрастанием числа n произв дение $(1-v_0)\ldots(1-v_n)$ убывает, оставаясь положительным; следовательно, при неограниченном возрастании числа n это произведение стремится к некоторому пределу, но этот предел м жет быть равен или нулю или какому-нибудь положительному числу. Если ряд Σv_i — сходящийся, то бесконечное произведение (44) — абсолютно сходящееся; следоват льно, произведение $(1-v_0)\ldots(1-v_n)$ имеет предел, отличный от нуля (§ 166).

Чтобы исследовать случай, когда ряд Σv_i — расходящийся, заметим, что при вс ком действительном значении x мы имеем:

$$1+x<e^x,$$

так как функция e^x-x-1 имеет минимум при $x=0$. Поэтому

$$1-v_0<e^{-v_0},\quad 1-v_1<e^{-v_1},\ \ldots,\quad 1-v_n<e^{-v_n},$$

и, следовательно,

$$(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)<e^{-(v_0+v_1+\cdots+v_n)}.$$

Так как сумма $v_0+v_1+\ldots+v_n$ неограниченно возрастает вместе с n, то бесконечное произведение равно нулю. Таким образом, если ряд Σv_i — расходящийся, то бесконечное произведение $\Pi(1-v_i)$ равно нулю.

Если последовательность $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных чле ов, то бесконечно произведение может быть сходящимся и отличным от нуля только в том случае, если общий член u_n стремится к нулю (§ 165). Предположим, что это имеет место; так как всегда можно пренебречь конечным числом первых множителей, то мы допустим, что все множители $1+u_n$ положительны. Тогда произведение P_n будет содержать некоторое число множителей, бо́льших единицы, и некотор е число множителей, меньших единицы; очевидно, что единственно сомните ьны случай — тот, когда при неограниченном возрастании числа n произведение множителей, бо́льших единиц , неограниченно возрастает, а произведение множителей, меньших единицы, стремится к нулю. В этом случае, в зависимости от характера произведения, оно может быть сходящимся или расходящимся; но нетрудно доказать, рассуждая, как в случае полусходящихся рядов (§ 157), что в подобном произведении всегда можно расположить множители в таком порядке, чтобы произведение P_n имело пределом любое заданное положительное число.

Если ряд Σu_n — сходящийся, то мы имеем точный признак. *Произведение P_n стремится к положительному пределу или стремится к нулю в зависимости от того, будет ли ряд Σu_n^2 сходящимся или расходящимся*

Для доказательства этого предложения заметим, что отношение

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

при x, стремящемся к нулю, имеет предел $-\frac{1}{2}$; следовательно, должно быть:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}(1+\alpha),$$

причем абс лютная величина количества α остается меньшей $\frac{1}{2}$, если абсолютная величина количества x меньше некоторой границы. Так как при неограниченном возрастании числа n количество u_n стремится к нулю, и так как бесконечное произведение можно начинать с любого множителя, то можно предположить, что

$$\ln(1+u_0)=u_0-\frac{u_0^2}{2}(1+\theta_0),$$

$$\ln(1+u_1)=u_1-\frac{u_1^2}{2}(1+\theta_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ln(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}(1+\theta_n),$$

где все числа $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ заключаются между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что

$$\ln P_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n - \frac{1}{2} u_0^2 (1 + \theta_0) - \ldots - \frac{1}{2} u_n^2 (1 + \theta_n); \tag{45}$$

если оба ряда Σu_n и Σu_n^2 — сходящиеся, то при неограниченном возрастании числа n правая часть стремится к конечному пределу, так как $u_n^2 (1 + \theta_n)$ заключается между $\frac{u_n^2}{2}$ и $\frac{3}{2} u_n^2$. Следовательно, произведение P_n стремится к пределу, отличному от нуля. Напротив, если ряд Σu_n^2 — расходящийся, то правая часть формулы (45) неограниченно возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательною, и, следовательно, P_n стремится к нулю.

Из того же равенства (45) следует, что бесконечное произведение расходится или равно нулю, если ряд Σu_n — расходящийся, и ряд Σu_n^2 — сходящийся. Но должно заметить, что бесконечное произведение может быть сходящимся и в том случае, когда оба ряда Σu_n и Σu_n^2 расходятся. Например, возьмем

$$u_0 = u_1 = u_2 = 0$$

и

$$u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (n > 1);$$

ряд Σu_n — расходящийся, так как сумма S_{2n} больше $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; по той же причине будет расходящимся и ряд Σu_n^2. Тем не менее, бесконечное произведение

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \ldots$$

— сходящееся, так как произведение его $2n$ множителей равно

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

тогда как произведение его $2n+1$ множителей равно предыдущему произведению, умноженному на множитель $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, предел которого равен единице *.

Примеры: 1. Ряд

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \ldots$$

— сходящийся; ряд, состоящий из квадратов его членов, — также сходящийся Следовательно, соответствующее бесконечное произведение

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \ldots$$

— сходящееся; мы уже видели, что оно равно $\frac{2}{\pi}$. Чтобы преобразовать его

* См. Коши, Cours d'Analyse или Oeuvres complètes, т. II, 2-я серия, примечание IX; Прингсгейм, *Mathematische Annalen*, т. 22, 33, 42.

в абсолютно сходящееся произведение, достаточно перемножить попарно последовательные множители; таким образом получим:

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

2. Пусть будет $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ ряд с действительными членами, в котором отношение двух последовательных членов есть рациональная функция количества n, стремящаяся к единице при неограниченном возрастании числа n:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\ldots}{n^p+b_1n^{p-1}+\ldots}.$$

Исключая из рассмотрения случай, когда какой-нибудь из членов этого ряда равен нулю или бесконечности, мы можем положить:

$$u_{n+1}=u_1\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{a_1-b_1}{\nu}+\frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right),$$

где $\varphi(\nu)$ есть рациональная функция от ν, абсолютная величина которой остается меньшей некоторого постоянного числа. Если $a_1-b_1>0$, то все члены ряда

$$\Sigma\left(\frac{a_1-b_1}{\nu}+\frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right), \tag{46}$$

начиная с некоторого, положительны, и этот ряд — расходящийся; следовательно, общий член u_{n+1} первого ряда неограниченно возрастает по абсолютной величине. Если $a_1-b_1=0$, то ряд (46) — абсолютно сходящийся, и u_{n+1} стремится к конечному пределу, отличному от нуля. Наконец, если $a_1-b_1<0$, то все члены ряда (46), начиная с некоторого, отрицательны, и этот ряд — расходящийся; следовательно, при неограниченном возрастании числа n, u_{n+1} стремится к нулю. Эти результаты принадлежат Гауссу (§ 155).

169. Определитель бесконечного порядка. Пусть будет $\sum\limits_{i,k}a_{ik}$ абсолютно сходящийся двойной ряд, в котором каждый из индексов i, k изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Рассмотрим определитель

$$D_m=\begin{vmatrix} 1+a_{-m,-m} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & a_{-m,m} \\ a_{-m+1,-m} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & a_{-m+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,-m} & \ldots & 1+a_{0,0} & \ldots & a_{0,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,-m} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & 1+a_{m,m} \end{vmatrix}$$

Произведение $\Pi_m=\prod\limits_{i,k}(1+|a_{ik}|)$, где оба индекса i и k изменяются от $-m$ до $+m$, превосходит $|D_m|$, так как любой член D_m имеет модулем один из членов Π_m, а это произведение содержит, сверх того, и другие сомножители, которые все являются положительными. Точно так же мы видим, что любой член разности $D_{m+p}-D_m$ имеет модулем один из членов разности $\Pi_{m+p}-\Pi_m$, содержащей, кроме того, и другие члены, которые все положительны. Мы имеем, следовательно:

$$|D_{m+p}-D_m|<\Pi_{m+p}-\Pi_m.$$

Но так как ряд $\Sigma|a_{ik}|$ сходится, то произведение Π_m имеет предел, когда m неограниченно возрастает, следовательно, разность $\Pi_{m+p}-\Pi_m$, а значит, и разность $D_{m+p}-D_m$, стремится к нулю, когда оба числа m и $m+p$ неограниченно возрастают. Отсюда мы заключаем, что определитель D_m также стремится к некоторому пределу (§ 5).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Чтобы бесконечное произведение было сходящимся и не нулем, необходимо и достаточно, чтобы любому положительному числу ε можно было поставить в соответствие такое число n, что мы будем иметь:

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\dots(1+u_{n+p})-1|<\varepsilon,$$

каково бы ни было целое положительное число p.

2. Знакоположительный ряд $u_0+u_1+\dots+u_n+\dots$ сходится или расходится одновременно с рядом

$$\frac{u_0}{s_0}+\frac{u_1}{s_1}+\dots+\frac{u_n}{s_n}+\dots$$

[Можно написать:

$$\frac{s_0}{s_n}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{s_i}\right),$$

и применить теорему § 168.]

3. Вычисляя двумя различными способами сумму членов таблицы с двойным входом, вывести формулы:

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\dots=\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\dots+\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\dots,$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\dots=\frac{1}{1-q}-\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}-\dots,$$

$$\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\dots=\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\dots,$$

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^6}+\frac{5q^5}{1-q^{10}}+\dots=\frac{q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3(1+q^6)}{(1-q^6)^2}+\frac{q^5(1+q^{10})}{(1-q^{10})^2}+\dots,$$

$$\frac{\sqrt{q}}{1+q}-\frac{\sqrt{q^3}}{3(1+q^3)}+\frac{\sqrt{q^5}}{5(1+q^5)}-\dots=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{q}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{q^3}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{q^5}-\dots,$$

при этом предполагается, что $(q)<1$.

4. Пусть будет q положительное число, меньшее единицы. Положим:

$$Q_1=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n}),\quad Q_2=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}),\quad Q_3=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1});$$

доказать формулу:

$$Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3=1.$$

ГЛАВА IX.

ЦЕЛЫЕ РЯДЫ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.

РЯД ТЕЙЛОРА. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

170. Ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ имеет в промежутке $(a,\ a+h)$ неограниченное число производных, то мы можем взять число n, входящее в формулу (§ 18), сколь угодно большим. Если при неограниченном возрастании n остаточный член R_n стремится к нулю, то мы получаем формулу:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots, \quad (1)$$

выражающую, что ряд

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ .\ .+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots$$

— сходящийся и имеет суммою $f(a+h)$. Формула (1) и есть формула Тейлора в тесном смысле, но она законна только в том случае, если при неограниченном возрастании n остаточный член R_n стремится к нулю, тогда как формула (7) (§ 18) предполагает только существование производных до $(n+1)$-го порядка. Заменяя a через x, мы можем представить формулу (1) в виде:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x)+\ldots;$$

полагая же $a=0$ и заменяя h через x, получим:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots \quad (2)$$

Последняя формула иногда называется также *формулою Маклорена* (Maclaurin); но должно заметить, что все эти различные формулы в сущности эквивалентны. Тогда как формула (2) дает разложение функции от x по степеням x, формула (1) дает разложение функции от h по степеням h: достаточно простой замены обозначений, чтобы перейти от одной формулы к другой.

Есть один весьма общий случай, когда можно быть уверенным, что при неограниченном возрастании n остаточный член R_n наверное стремится к нулю; это тот случай, когда при изменении x в промежутке $(a,\ a+h)$ абсолютная величина производной любого порядка остается меньшей определенного числа M. В самом деле, взяв остаточный член в форме, данной Лагранжем, имеем:

$$|R_n| < M \frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2 \ldots (n+1)},$$

и очевидно, что правая часть этого неравенства есть общий член сходящегося ряда. Так будет, например, для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Все производные от e^x равны e^x и, следовательно, имеют все один и тот же максимум в данном промежутке: что касается производных от $\sin x$ и $\cos x$, то их абсолютная величина никогда не превосходит единицы. Поэтому формула (1) приложима к этим функциям при всех значениях a и h. Остановимся на формуле (2); если $f(x) = e^x$, то

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1, \ldots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \ldots,$$

и мы получаем формулу:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2 \ldots n} + \ldots, \tag{3}$$

применимую при всех положительных или отрицательных значениях x. Если a есть некоторое положительное число, то $a^x = e^{x \ln a}$, и, следовательно,

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1} + \frac{(x \ln a)^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{(x \ln a)^n}{1\cdot 2 \ldots n} + \ldots \tag{4}$$

Положим $f(x) = \sin x$; здесь высшие производные образуют периодическую последовательность из четырех членов $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, и значения этих производных при $x = 0$ также образуют периодическую последовательность 1, 0, -1, 0. Таким образом мы имеем для всякого положительного или отрицательного значения x:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (2n+1)} + \ldots,$$

и точно так же для $\cos x$ найдем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2n} + \ldots \tag{6}$$

Возвратимся к общему случаю. Исследование остаточного члена R_n редко бывает таким простым, как в предыдущих примерах; но это исследование можно облегчить, заметив, что если остаточный член стремится к нулю, то ряд

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(a)$$

необходимо сходящийся. Вообще, прежде чем исследовать остаточный член, удобнее убедиться в сходимости ряда; если для данных значений a и h этот ряд расходящийся, то продолжать дальше исследование бесполезно: можно утверждать, что R_n не стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Обратное утверждение неверно. Ряд

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots$$

может быть сходящимся, не представляя, однако, порождающую его функцию $f(x)$; в этом легко убедиться, рассматривая следующий пример, предложенный Коши. Пусть

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}};$$

мы имеем:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}};$$

вообще, производная n-го порядка имеет вид:

$$f^{(n)}(x)=\frac{P}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где P есть некоторый многочлен. Все эти производные равны нулю при $x=0$, так как отношение $e^{-\frac{1}{x^2}}$ к любой положительной степени x стремится к нулю вместе с x; в самом деле, полагая $x=\frac{1}{z}$, мы можем написать:

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{z^m}{e^{z^2}},$$

но выражение $\frac{e^{z^2}}{z^m}$, как известно, неограниченно возрастает вместе с z, как бы велико ни было m. С другой стороны, пусть будет $\varphi(x)$ — функция, для которой имеет место формула (2):

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\ldots$$

Положим

$$F(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{x^2}};$$

мы имеем:

$$F(0)=\varphi(0),\quad F'(0)=\varphi'(0),\quad \ldots,\quad F^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(0),\ \ldots,$$

так что разложение $F(x)$ по формуле Маклорена было бы тождественно предыдущему. Ряд, который мы таким образом получаем, представляет, следовательно, функцию, совершенно отличную от той, которая его порождает.

Вообще, если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны, так же как и все их производные, при $x=0$, не будучи, однако, равными тождественно, то ясно, что они не могут быть обе одновременно разложены в ряд по формуле Маклорена, так как коэфициенты разложения были бы одинаковы для обеих функций.

171. Ряды для $\ln(1+x)$ и для $(1+x)^m$. Функция $\ln(1+x)$ непрерывна и имеет неограниченное число производных, если только x больше -1. Производные ее имеют следующие выражения:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{1\cdot 2\ldots n}{(1+x)^{n+1}}.$$

Исследуем, при каких значениях x можно приложить к этой функции формулу Маклорена (2). Напишем сначала формулу в ее общем виде с остаточным членом:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n.$$

Остаточный член R_n стремится к нулю только в том случае, если ряд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

будет сходящимся: это будет иметь место при значениях x, заключающихся между -1 и $+1$, включая сюда и верхний предел $+1$. Предполагая, что переменное x заключается между этими пределами, возьмем остаточный член в форме, данной Коши:

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\ldots n}\,\frac{(-1)^n 1\cdot 2\ldots n}{(1+\theta x)^{n+1}}=(-1)^n\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

или

$$R_n=(-1)^n x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{1}{1+\theta x}.$$

Предположим сначала $|x|<1$. Тогда первый множитель x^{n+1} стремится к нулю; второй множитель $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ как при положительном, так и при отрицательном x меньше единицы, так как числитель меньше знаменателя: последний множитель остается конечным, так как он меньше $\frac{1}{1-|x|}$. Таким образом при неограниченном возрастании n остаточный член R_n стремится к нулю. При $x=1$ из предыдущего вида остаточного члена нельзя вывести никаких заключений, но взяв остаточный член в форме, данной Лагранжем, при $x=1$ будем иметь:

$$R_n=(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

и очевидно, что, при неограниченном возрастании n, R_n стремится к нулю. Исследование остаточного члена при $x=-1$ бесполезно, так как в этом случае ряд, очевидно, расходящийся. Таким образом при x, заключающемся между $+1$ и -1, мы имеем:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{7}$$

Формула остается применимою и при $x=1$; это дает нам интересное соотношение:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Так как формула (7) применима только при $x\leqslant 1$, то она не позволяет вычислять логарифмы целых чисел. Заменим в этой формуле x через $-x$; новая формула

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots$$

пригодна для значений x, заключающихся между -1 и $+1$; вычитая почленно последнюю формулу из формулы (7), находим:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right).$$

При изменении x от 0 до 1 рациональная дробь $\frac{1+x}{1-x}$ все время возрастает от $+1$ до $+\infty$; таким образом можно вычислить логарифмы всех целых чисел. Но можно получить более быстро сходящийся ряд, вычисляя разность логарифмов двух последовательных целых чисел; для этого положим

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N},\quad \text{или}\quad x=\frac{1}{2N+1};$$

тогда предыдущая формула принимает вид:

$$\ln(N+1)-\ln N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\ldots\right],$$

и мы имеем во второй части очень быстро сходящийся ряд, если только число N достаточно велико.

Примечание. Приложим к функции $\ln(1+x)$ общую формулу Тейлора, положив в ней $a=0$, $h=x$, $n=1$; взяв остаточный член в форме, данной Лагранжем, получим:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

Заменяя в последней формуле x через $\frac{1}{n}$, найдем:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

где θ_n есть положительное число, меньшее единицы. Отсюда можно вывести несколько интересных следствий.

1. Так как гармонический ряд — расходящийся, то сумма

$$\Sigma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

возрастает вместе с n, но разность $\Sigma_n-\ln n$ стремится к конечному пределу В самом деле, представим эту разность в виде:

$$\left(1-\ln\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p}-\ln\frac{p+1}{p}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)+\ln\frac{n+1}{n}.$$

Но $\frac{1}{p}-\ln\frac{p+1}{p}$ есть общий член сходящегося ряда, так как, по предыдущей формуле, мы имеем соотношение:

$$\frac{1}{p}-\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{\theta_p}{2p^2},$$

которое показывает, что этот член меньше общего члена сходящегося ряда $\sum\frac{1}{p^2}$. При неограниченном возрастании n количество

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

стремится к нулю. Таким образом рассматриваемая разность стремится к конечному пределу, носящему название *эйлерова постоянного*. Значение его, с точностью до двадцатого десятичного знака, равно $C=0{,}57721566490153286060$.

2. Рассмотрим выражение

$$\Sigma=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

где n и p — два целых неопределенно возрастающих числа. Мы можем представить это выражение в виде:

$$\Sigma=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right);$$

но

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}=\ln(n+p)+\rho_{n+p},$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\rho_n,$$

причем ρ_{n+p} и ρ_n при неопределенном возрастании n и p стремятся к одному тому же пределу C. Следовательно, мы имеем:

$$\Sigma=\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)+\rho_{n+p}-\rho_n.$$

Но разность $\rho_{n+p}-\rho_n$ стремится к нулю; это показывает, что сумма Σ имее предел только в том случае, если отношение $\frac{p}{n}$ само имеет предел. Если это отношение имеет пределом α, то сумма $\sum$ имеет пределом $\ln(1+\alpha)$.

Например, положив $p=n$, найдем, что сумма

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

имеет пределом $\ln 2$.

Функция $(1+x)^m$ имеет при всяком m вполне определенный смысл, если только $1+x$ положительно; она имеет бесконечную последовательность производных, которые все будут непрерывными функциями от x при положительном $1+x$, так как все выражения их будут одинакового вида:

$$\begin{aligned}
&f'(x)=m(1+x)^{m-1},\\
&f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\\
&f^{(n+1)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

Применяя к этой функции общую формулу Тейлора, находим:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n+R_n.$$

Для того чтобы при неограниченном возрастании n остаточный член R_n стремился к нулю, прежде всего необходимо, чтобы ряд, общий член которого имеет выражение

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n,$$

был сходящимся.

Но в последнем ряде отношение каждого члена к предыдущему равно $\frac{m-n+1}{n}x$, и при неограниченном возрастании n это отношение стремится к $-x$. Таким образом ряд может быть сходящимся только при $|x|\leqslant 1$. Разумеется, здесь исключается тот случай, когда m есть целое положительное число; мы имеем тогда элементарную формулу бинома. Ограничимся тем случаем, когда $|x|<1$. Чтобы показать, что остаточный член стремится к нулю, представим его в виде, данном Коши:

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\ldots n}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}.$$

Первый множитель $\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\ldots n}x^{n+1}$ стремится к нулю как общий член сходящегося ряда; множитель $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ меньше единицы; наконец, последний множитель $(1+\theta x)^{m-1}$ меньше некоторого определенного предела. В самом деле, если $m-1>0$, то мы имеем:

$$(1+\theta x)^{m-1}<2^{m-1};$$

если же $m-1<1$, то $(1+\theta x)^{m-1}<(1-|x|)^{m-1}$. Таким образом при всяком значении x, заключающемся между -1 и $+1$, мы имеем разложение:

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots\\ \ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Случай $x=\pm 1$ мы рассмотрим ниже.

II. ЦЕЛЫЕ РЯДЫ С ОДНИМ ПЕРЕМЕННЫМ.

Теперь мы перейдем к прямому исследованию целых рядов от одного или нескольких переменных, к которым совершенно естественно приводит нас формула Тейлора.

Хотя мы здесь рассматриваем только действительные переменные, тем не менее рассуждения, которыми мы будем пользоваться при изучении целых рядов, непосредственно распространяются и на случай мнимых переменных, если только мы будем всюду заменять слова *абсолютная величина* словом *модуль*

172. Область сходимости. Рассмотрим ряд:

$$A_0+A_1X+A_2X^2+\ldots+A_nX^n+\ldots \tag{9}$$

Предположим сначала, что все коэфициенты A_0, A_1, A_2, ... положительны, и что независимое переменное X может принимать только положительные значения.

Мы можем разбить все положительные числа на два класса; мы скажем, что положительное число X принадлежит к классу (α), если ряд (9) сходится, и что оно принадлежит к классу (β), если этот ряд расходится. Предположим сначала, что существуют положительные числа обоих классов. Так как каждый член ряда (9) с коэфициентом отличным от нуля возрастает вместе с X, очевидно, что любое число класса (α) меньше любого числа класса (β). Следовательно, существует число $R>0$ (§ 2) такое, что для всякого числа X, большего R, ряд (9) расходится, а для всякого X, меньшего R, ряд сходится. Если на место X подставить самое число R, то ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Может случиться, что один из классов (α) или (β) отсутствует.

1. Если не существует ни одного члена в классе (β), то ряд (9) сходится при всяком значении переменного X; таков, например, ряд

$$1+\frac{X}{1}+\frac{X^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{X^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots$$

2. Если не существует никакого положительного числа в классе (α), то ряд (9) расходится, кроме значения $X=0$, и мы полагаем $R=0$.

Таков, например, ряд

$$1+X+1\cdot 2\,X^2+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,X^n+\ldots$$

Рассмотрим теперь целый ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{10}$$

в котором коэфициенты a_i и переменное x могут иметь любые знаки. В последующем мы будем полагать $|a_i|=A_i$, $|x|=X$ так, что ряд (9) будет состоять из абсолютных величин членов ряда (10). Пусть будет R число, определенное выше для ряда (9). Из самого определения числа R очевидно, что ряд (10) будет абсолютно сходящимся при всяком значении переменного x, содержащемся между $-R$ и $+R$. Остается показать, что ряд (10) будет расходящимся, если абсолютная величина переменного x будет больше R. Это вытекает из следующего основного предложения Абеля *:

Если при некотором частном значении x_0 ряд (10) будет сходящимся, то он будет абсолютно сходящимся при всяком значении переменного x, меньшем $|x_0|$ по абсолютной величине.

В самом деле, предположим, что ряд (10) будет сходящимся при $x=x_0$, и пусть будет M положительное число, большее абсолютной величины любого из членов этого ряда при значении переменного $x=x_0$; тогда при всяком значении числа n мы будем иметь:

$$A_n|x_0|^n<M.$$

Но очевидно, что

$$A_nX^n=A_n|x_0|^n\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n<M\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n.$$

Следовательно, ряд (9) будет сходящимся, если $X<|x_0|$; таким образом предложение доказано. Из теоремы Абеля следует, что если при $x=x_0$ ряд (10) будет сходящимся, то ряд (9), состоящий из абсолютных величин членов ряда (10), будет также сходящимся всякий раз, как X будет меньше $|x_0|$. Поэтому не может быть $|x_0|>R$, так как в этом случае число R не было бы верхним пределом значений X, делающих ряд (9) сходящимся.

Таким образом, если дан целый ряд (10), коэфициенты которого имеют произвольные знаки, то существует определенное положительное число R, обладающее следующим свойством; *ряд* (10) *будет абсолютно сходящимся при всяком значении переменного x, заключающемся между $-R$ и $+R$, и расходящимся при всяком значении переменного x, большем R по абсолютной величине.* Промежуток $(-R, +R)$ называется *областью сходимости* ряда. В предельном случае, когда $R=\infty$, область сходимости простирается от $-\infty$ до $+\infty$; если же $R=0$, то она обращается только в одно начало координат. Этого последнего случая мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Приведенное доказательство не дает никаких указаний относительно характера ряда при предельных значениях $x=R$, $x=-R$; при этих

* „Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$“

значениях ряд (10) может быть абсолютно сходящимся, просто сходящимся или расходящимся.

Рассмотрим, например, три ряда:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

Так как в каждом из этих трех рядов предел отношения любого члена к предыдущему равен x, то для них $R=1$. Первый ряд будет расходящимся при $x=\pm 1$, второй ряд будет расходящимся при $x=1$ и сходящимся при $x=-1$; третий ряд будет абсолютно сходящимся при $x=\pm 1$.

Примечание. Теореме Абеля можно дать более общее выражение. В самом деле, для ее доказательства нет необходимости предполагать, что ряд (10) будет сходящимся при значении x_0; достаточно только предположить, что абсолютная величина любого члена ряда

$$a_0+a_1x_0+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$$

остается меньшей некоторого определенного числа. Если это условие удовлетворяется, то при всяком значении переменного x, абсолютная величина которого меньше $|x_0|$, ряд (10) будет абсолютно сходящимся.

Число R связано весьма простым соотношением с числом ω (§ 152), представляющим *наибольший из пределов* членов последовательности

$$A_1,\quad \sqrt{A_2},\quad \sqrt[3]{A_3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{A_n},\ \ldots$$

В самом деле, рассмотрим аналогичную последовательность

$$A_1X,\quad \sqrt{A_2X^2},\ \ldots,\ \sqrt[n]{A_nX^n},\ \ldots;$$

очевидно, что наибольший из пределов членов этой второй последовательности будет ωX. Следовательно, ряд (9) будет сходящимся, если $X<\frac{1}{\omega}$, и расходящимся, если $X>\frac{1}{\omega}$. Таким образом $R=\frac{1}{\omega}$ *.

173. Целый ряд как непрерывная функция переменного. Обозначим через $f(x)$ сумму целого ряда, сходящегося в промежутке от $-R$ до $+R$:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots; \tag{11}$$

пусть будет R' некоторое положительное число, меньшее R. Докажем сначала, что ряд (11) будет равномерно сходящимся в промежутке $(-R', +R')$. В самом деле, при значении переменного x, меньшем R' по абсолютной величине, остаток

$$R_n=a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_{n+p}x^{n+p}+\ldots$$

по абсолютной величине меньше соответствующего остатка сходящегося ряда:

$$A_{n+1}R'^{n+1}+A_{n+2}R'^{n+2}+\ldots$$

* Это теорема была доказана Коши в его „Cours d'Analyse". Адамар (Hadamarb получил ее вновь в своей диссертации.

Отсюда следует, что *при всяком значении переменного x, заключающемся между $-R$ и $+R$, сумма $f(x)$ ряда есть непрерывная функция от x*. В самом деле, очевидно, что если дано какое-нибудь число x_0, меньшее R по абсолютной величине, то можно найти другое положительное число R', которое было бы меньше числа R и больше $|x_0|$. По предыдущему, данный ряд будет равномерно сходящимся в промежутке от $-R'$ до $+R'$; следовательно, его сумма $f(x)$ будет непрерывною функциею переменного при значении x_0, принадлежащем этому промежутку (§ 30).

Это доказательство неприменимо к пределам области сходимости $+R$ и $-R$. Тем не менее, непрерывность ряда сохраняется и при этих предельных значениях всякий раз, когда ряд остается при этих значениях сходящимся. Именно, Абель доказал, что *если при $x=R$ ряд* (11) *остается сходящимся, то сумма ряда* (11) *при $x=R$ равна пределу, к которому стремится сумма $f(x)$ этого ряда, когда x стремится к R, оставаясь меньшим R.*

Достаточно доказать, что ряд (11) равномерно сходится во всем промежутке $(0, R)$, включая конец $x=R$. В самом деле, задав произвольное положительное число ε, выберем настолько большое n, чтобы для всякого p было:

$$|a_{n+1}R^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2}+\ldots+a_{n+p}R^{n+p}|<\varepsilon;$$

это возможно, так как, по предположению, ряд (10) сходится при $x=R$. Пусть будет x положительное число, меньшее R; можно написать:

$$a_nx^n=a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$$

и применить лемму Абеля (§ 74), заметив, что последовательные степени выражения $\frac{x}{R}$ образуют убывающую последовательность. Следовательно, мы имеем также для любого p:

$$|a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_{n+p}x^{n+p}|<\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}<\varepsilon.$$

Сопоставляя это неравенство с предыдущим, мы убеждаемся, что ряд (10) равномерно сходится во всем промежутке $(0, R)$. Следовательно, сумма этого ряда непрерывна в правом конце этого промежутка, так как данные ранее доказательства (§ 29, 30) применимы также к концам промежутка сходимости, если ряд равномерно сходится во всем промежутке, включая концы его.

Таким же образом можно доказать, что если ряд (11) будет сходящимся при $x=-R$, то сумма этого ряда при $x=-R$ есть предел, к которому стремится сумма $f(x)$, когда x стремится к $-R$. Чтобы привести этот случай к предыдущему, нужно только заменить x через $-x$.

Приложение. Это предложение позволяет дополнить доказанную выше (§ 160) теорему об умножении рядов.

Пусть будут

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$
$$S'=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$$

два ряда, сходящиеся, но не абсолютно, а только условно. Ряд, составленный по правилу умножения рядов,

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\ldots+(u_0v_n+\ldots+u_nv_0)+\ldots$$

может быть сходящимся или расходящимся; но если он сходящийся, то его сумма Σ равна произведению сумм двух первых рядов, $\Sigma=SS'$. В самом деле, рассмотрим три целых ряда:

$$\begin{aligned}f(x)&=u_0+u_1x+\ldots+u_nx^n+\ldots,\\ \varphi(x)&=v_0+v_1x+\ldots+v_nx^n+\ldots,\\ \psi(x)&=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)x+\ldots+(u_0v_n+\ldots+u_nv_0)x^n+\ldots\end{aligned}$$

По предположению, при $x=1$ эти ряды будут сходящимися; следовательно, при x, заключающемся между -1 и $+1$, эти ряды будут абсолютно сходящимися, и к ним будет применима теорема Коши об умножении рядов; таким образом получаем соотношение:

$$f(x)\varphi(x)=\psi(x). \tag{12}$$

По теореме Абеля, если x стремится к единице, то $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ стремятся соответственно к S, S', Σ, и так как обе части формулы (1) остаются все время равными между собою, то в пределе имеем $\Sigma=SS'$.

Эта теорема остается верною и для рядов с мнимыми членами и может быть доказана таким же образом.

174. Производные от целого ряда. Диференцируя почленно целый ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

сходящийся в промежутке $(-R, +R)$, мы получим новый целый ряд

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, \tag{13}$$

сходящийся в том же промежутке. Чтобы доказать это, достаточно показать, что ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (13),

$$A_1+2A_2X+\ldots+nA_nX^{n-1}+\ldots \tag{14}$$

будет сходящимся, если $X<R$, и расходящимся, если $X>R$.

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что $X<R$, и пусть будет R' число, заключающееся между X и R, $X<R'<R$. Рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\frac{1}{R'}+\frac{2}{R'}\frac{X}{R'}+\frac{3}{R'}\left(\frac{X'}{R}\right)^2+\ldots+\frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1}+\ldots,$$

который будет сходящимся, так как отношение каждого члена к предыдущему имеет пределом число $\frac{X'}{R}$, меньшее единицы. Умножая члены этого ряда соответственно на множители

$$A_1R',\quad A_2R'^2,\ldots,\quad A_nR'^n,\ldots,$$

которые все меньше некоторого определенного числа, так как $R'<R$, мы получим новый ряд:

$$A_1+2A_2X+\ldots+nA_nX^{n-1}+\ldots,$$

который, очевидно, будет также сходящимся.

Вторая часть предложения доказывается таким же образом. Если бы ряд

$$A_1 + 2A_2X_1 + \ldots + nA_nX_1^{n-1} + \ldots,$$

где $X_1 > R$, был сходящимся, то был бы также сходящимся и ряд

$$A_1X_1 + 2A_2X_1^2 + \ldots + nA_nX_1^n + \ldots,$$

а следовательно, был бы сходящимся и ряд $\sum_1^{+\infty} A_nX_1^n$, все члены которого меньше членов предыдущего ряда; но тогда число R не было бы верхним пределом значений X, делающих ряд (9) сходящимся.

Сумма $f_1(x)$ целого ряда (13) есть непрерывная функция переменного x в промежутке $(-R, +R)$. Так как ряд $f_1(x)$ есть равномерно сходящийся во всем промежутке $(-R', +R')$, где $R' < R$, то в этом промежутке ряд $f_1(x)$ представляет производную от $f(x)$ (§ 30). Но число R' может быть взято сколь угодно близким к числу R; отсюда следует, что при всяком значении x, содержащемся между $-R$ и $+R$, функция $f(x)$ имеет производную, и эта производная представляется рядом $f'(x)$, члены которого суть производные от членов данного ряда $f(x)$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \tag{15}$$

Применяя те же рассуждения к целому ряду (15), мы видим, что ряд $f(x)$ имеет вторую производную

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots,$$

и т. д. Таким образом в промежутке $(-R, +R)$ функция $f(x)$ имеет бесконечное множество производных, и все эти производные представляются рядами, получающимися от почленного диференцирования ряда (11):

$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2 \ldots na_n + 2\cdot 3 \ldots n(n+1)a_{n+1}x + \ldots \tag{16}$$

Полагая в этих формулах $x = 0$, получим:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \ldots,$$

и, вообще,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2 \ldots n},$$

так что разложение $f(x)$ тождественно с разложением по формуле Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2 \ldots n}f^{(n)}(0) + \ldots$$

Так как коэфициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ отличаются от значений функции $f(x)$ и ее производных при $x = 0$ лишь числовыми множителями, то ясно, что функция не может иметь двух различных разложений в целый ряд.

Точно так же, интегрируя почленно целый ряд, мы получим новый целый ряд с произвольным постоянным членом. Этот ряд имеет ту же область сходимости, как и данный ряд, и имеет этот последний ряд своею производною. Интегрируя второй ряд, мы получим третий ряд, два первых коэфициента которого произвольны, и т. д.

Примеры. 1. Геометрическая прогрессия с знаменателем $-x$:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

сходится при всяком значении x, заключающемся между -1 и $+1$, и ее сумма равна $\frac{1}{1+x}$. Интегрируя ее почленно между пределами 0 и x, где $|x|<1$, мы получаем уже известное (§ 171) разложение $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Эта формула верна и при $x=1$, так как при этом значении x ряд, стоящий в правой части, остается сходящимся.

2. При всяком значении x, заключающемся между -1 и $+1$, имеем:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

Интегрируя почленно это равенство между пределами 0 и x, где $|x|<1$, получим:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Так как при $x=1$ ряд, стоящий в правой части, остается сходящимся, то отсюда имеем:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

3. Пусть будет $F(x)$ сумма сходящегося ряда

$$F(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}x^p+\ldots,$$

где m — какое угодно число, и $|x|<1$. Диференцируя, получаем:

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\ldots+\frac{(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots(p-1)}x^{p-1}+\ldots\right].$$

Умножим обе части этого равенства на $(1+x)$ и соберем члены, содержащие одинаковые степени переменного x. Пользуясь тождеством

$$\frac{(m-1)\dots(m-p+1)}{1\cdot 2\dots(p-1)}+\frac{(m-1)\dots(m-p)}{1\cdot 2\dots p}=$$
$$=\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1\cdot 2\dots p},$$

которое легко проверить, мы получим формулу:

$$(1+x)F'(x)=m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1\cdot 2\dots p}x^p+\dots\right],$$

или

$$(1+x)F'(x)=mF(x).$$

Отсюда последовательно находим:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m}{1+x},$$
$$\ln[F(x)]=m\ln(1+x)+\ln C,$$

т. е.

$$F(x)=C(1+x)^m.$$

Для определения постоянного C достаточно заметить, что $F(0)=1$; отсюда имеем $C=1$, и мы приходим к разложению $(1+x)^m$, уже найденному в § 171:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1\cdot 2\dots p}x^p+\dots$$

4. Заменяя в предыдущей формуле x через $-x^2$, m через $-\frac{1}{2}$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\dots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}x^{2n}+\dots$$

Эта формула верна при всяком значении x, заключающемся между -1 и $+1$. Интегрируя обе части между пределами 0 и x, где $|x|<1$, мы получим разложение $\arcsin x$:

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\dots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n(2n+1)}+\dots$$

175. Второе доказательство. Свойства функций, представляемых целыми рядами, могут быть выведены более элементарным способом. Пусть будут x_0 — число, заключенное между $-R$ и $+R$, и x_1 — близкое число, содержащееся в том же промежутке. Чтобы показать, что разность $f(x_1)-f(x_0)$ стремится к нулю, когда, при x_0 постоянном, x_1

стремится к x_0, вычтем почленно ряды, представляющие $f(x_0)$ и $f(x_1)$; мы находим:

$$f(x_1) - f(x_0) = a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1^2 - x_0^2) + \ldots + a_n(x_1^n - x_0^n) + \ldots$$

Общий член этого нового ряда можно написать так:

$$a^n(x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}).$$

Чтобы найти верхнюю границу абсолютной величины этого члена, обозначим через l какое-либо положительное число, меньшее R и большее $|x_0|$; так как в дальнейшем x_1 будет стремиться к x_0, то мы предположим также, что $l > |x_1|$. Абсолютная величина любого из произведений x_1^{n-1}, $x_1^{n-2}x_0, \ldots$ будет тогда меньше l^{n-1}, следовательно, абсолютная величина рассматриваемого общего члена будет меньше, чем $nA_n l^{n-1}|x_1 - x_0|$. Мы имеем, следовательно:

$$|f(x_1) - f(x_0)| < |x_1 - x_0|(A_1 + 2A_2 l + \ldots + nA_n l^{n-1} + \ldots);$$

но ряд, стоящий в скобках, сходится, так как $l < R$ (§ 174). Следовательно, разность $f(x_1) - f(x_0)$ в самом деле стремится к нулю одновременно с $x_1 - x_0$, и функция $f(x)$ непрерывна во всякой точке, заключенной между $-R$ и $+R$.

Чтобы показать, что $f_1(x)$ есть производная функции $f(x)$, достаточно убедиться в том, что разность

$$D = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f_1(x_0)$$

стремится к нулю, когда x_1 стремится к x_0. Отношение $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ равно, как мы только что видели, сумме сходящегося ряда

$$a_1 + a_2(x_1 + x_0) + \ldots + a_n(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}) + \ldots$$

Вычитая почленно из этого ряда ряд, представляющий $f_1(x_0)$, мы находим для D выражение в виде ряда, общий член которого можно написать так:

$$a_n[(x_1^{n-1} - x_0^{n-1}) + (x_1^{n-2}x_0 - x_0^{n-1}) + \ldots + (x_1 x_0^{n-2} - x_0^{n-1})];$$

каждая из разностей $x_1^{n-1} - x_0^{n-1}$, $x_1^{n-2}x_0 - x_0^{n-1}, \ldots$ представляет собою произведение разности $x_1 - x_0$ на произведение вида $x_0^p x_1^q$, где p и q — два целые числа, из коих ни одно не отрицательно, и сумма которых равна $n - 2$. Общее число этих произведений равно, как нетрудно видеть, $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, и абсолютная величина каждого из них меньше, чем l^{n-2}, где число l имеет то же значение, что и выше. Мы имеем, следовательно:

$$|D| < \frac{|x_1 - x_0|}{2}[2A_2 + 6A_3 l + \ldots + n(n-1)A_n l^{n-2} + \ldots],$$

и ряд, стоящий в скобках, сходится, когда l есть положительное число, меньшее R, так как это есть ряд модулей членов целого ряда $f_2(x)$, который мы получаем из $f_1(x)$ почленным диференцированием. Следовательно, D имеет пределом нуль, когда x_1 стремится к x_0.

176. Распространение формулы Тейлора. Пусть будет $f(x)$ сумма целого ряда, сходящегося в промежутке $(-R, +R)$, x_0 — точка, заключающаяся в этом промежутке, и (x_0+h) — другая точка в том же самом промежутке, при условии: $|x_0|+|h|<R$. Ряд

$$a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+\ldots+a_n(x_0+h)^n+\ldots,$$

имеющий сумму $f(x_0+h)$, может быть заменен двойным рядом, который получится из предыдущего, если мы разложим различные степени от (x_0+h) и будем располагать в одной и той же строке одинаковые степени h:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2 \quad +\ldots+a_nx_0^n+\ldots \\ \quad +a_1h\ +2a_2x_0h+\ldots+na_nx_0^{n-1}h+\ldots \\ \quad\ldots+\quad a_2h^2+\ldots+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_nx_0^{n-2}h^2+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (17)$$

Этот двойной ряд будет абсолютно сходящимся. В самом деле, заменяя каждый член этого ряда его абсолютным значением, мы получим новый двойной ряд с положительными членами:

$$\left.\begin{array}{l} A_0+A_1|x_0|+A_2|x_0|^2+\ldots+A_n|x_0|^n+\ldots \\ \ldots+A_1|h|+2A_2|x_0||h|+\ldots+nA_n|x_0|^{n-1}|h|+\ldots \\ \quad\ldots+A_2|h|^2+\ldots+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_n|x_0|^{n-2}|h|^2+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (18)$$

Составляя сумму элементов этой таблицы по вертикальным столбцам, мы получим ряд:

$$A_0+A_1[|x_0|+|h|]+\ldots+A_n[|x_0|+|h|]^n+\ldots,$$

который будет сходящимся, так как, по предположению, $|x|+|h|<R$.

Так как двойной ряд (17) — абсолютно сходящийся, то мы можем суммировать элементы таблицы (17) или по строкам или по столбцам. Суммируя по столбцам, мы получим $f(x_0+h)$. Вычисляя ту же сумму по строкам, мы получим ряд, расположенный по степеням h, в котором коэфициентами при $h, h^2, \ldots$ будут соответственно $f'(x_0)$, $\dfrac{f''(x_0)}{1\cdot 2}, \ldots$ Таким образом, предполагая $|h|<R-|x_0|$, имеем:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+\ldots \quad (19)$$

Формула (19), наверное, применима в промежутке от $x_0-R+|x_0|$ до $x_0+R-|x_0|$, но ряд, стоящий в правой части, иногда может быть сходящимся и в более широких пределах. Рассмотрим, например, функцию $(1+x)^m$, где m не есть целое положительное число. Разложение этой функции по степеням x возможно в промежутке от $x=-1$

до $x=+1$. Пусть будет x_0 значение переменного x, заключающееся в этом промежутке. Мы можем написать:

$$(1+x)^m=(1+x_0+x-x_0)^m=(1+x_0)^m[1+z]^m,$$

где

$$z=\frac{x-x_0}{1+x_0}.$$

Если $|z|<1$, т. е. если значения переменного x заключаются в промежутке от -1 до $1+2x_0$, то функция $[1+z]^m$ может быть разложена по степеням z *. Таким образом, если x_0 положительно, то новый промежуток будет шире прежнего $(-1, +1)$, и следовательно, новая формула даст возможность вычислять значение функции для значений переменного, лежащих вне первоначального промежутка. Развивая это замечание, мы придем к чрезвычайно важному понятию об *аналитическом продолжении*, рассмотрение которого мы отлагаем до следующего тома.

Примечание. Очевидно, что теоремы, доказанные здесь для рядов, расположенных по степеням переменного x, легко могут быть распространены на ряды, расположенные по положительным степеням $x-a$, и, вообще, на ряды, расположенные по положительным степеням любой непрерывной функции $\varphi(x)$. Для этого нужно только рассматривать эти ряды как сложные функции от x с посредствующею функциею $\varphi(x)$. Так, например, ряд, расположенный по положительным степеням $\frac{1}{x}$, будет сходящимся при всех значениях переменного x, превосходящих по абсолютному значению некоторый предел, и будет представлять при этих значениях переменного непрерывную функцию от x. Рассмотрим, например, функцию $\sqrt{x^2-a}$, которую мы можем представить в виде $\pm x\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. При значениях переменного x, по абсолютной величине больших, чем $\sqrt{a}$, выражение $\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ может быть разложено по степеням $\frac{1}{x^2}$; при этом мы получим формулу:

$$\sqrt{x^2-a}=x-\frac{1}{2}\frac{a}{x}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{a^2}{x^3}-\ldots-\frac{1\cdot 3\ldots(2p-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2p}\frac{a^p}{x^{2p-1}}-\ldots,$$

которая дает разложение функции $\sqrt{x^2-a}$, когда $x>\sqrt{a}$. Если $x<-\sqrt{a}$, то предыдущий ряд будет также сходящимся, и его сумма равна $-\sqrt{x^2-a}$. Эта формула может служить для разложения корня квадратного из целого числа, если известен ближайший больший точный квадрат.

177. Усиливающие функции. Выведенные выше свойства целых рядов устанавливают большую аналогию между этими рядами и многочленами. Пусть, например, дано несколько целых рядов $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... ; пусть будет $(-r, +r)$ наименьшая из их областей сходимости. Тогда при

* Полагая $x=x_0+h$, получим $z=\frac{h}{1+x_0}$. Следовательно, разложение по степеням z есть в то же время разложение по степеням h, т. е. формула (19). *(Ред.)*

$|x|<r$ все эти ряды будут абсолютно сходящимися, и мы можем их складывать или перемножать совершенно так же, как мы это делаем с многочленами; вообще, всякий целый многочлен по $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ может быть разложен в целый ряд, сходящийся в том же промежутке $(-r, +r)$.

Чтобы расширить эту аналогию, мы предварительно дадим определение некоторых выражений, которыми будем пользоваться в последующем. Пусть будет $f(x)$ целый ряд:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots;$$

пусть будет $\varphi(x)$ другой целый ряд с положительными коэфициентами:

$$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n+\ldots,$$

сходящийся в известном промежутке. Если каждый из коэфициентов α_n в ряде $\varphi(x)$ равен или больше абсолютной величины соответствующего коэфициента в ряде $f(x)$:

$$\alpha_0 \geqslant |a_0|, \quad \alpha_1 \geqslant |a_1|, \ldots, \quad \alpha_n \geqslant |a_n|, \ldots,$$

то функция $\varphi(x)$ называется по отношению к $f(x)$ *усиливающею функциею*, или *мажорантою* (fonction majorante). Чтобы выразить это отношение между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$, Пуанкаре (Poincaré) предложил следующее обозначение:

$$f(x) \ll \varphi(x).$$

Усиливающие функции оказываются полезными при рассмотрении целых рядов благодаря следующему их свойству, непосредственно вытекающему из их определения. Пусть будет $P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ многочлен с коэфициентами, действительными и положительными, зависящий от $n+1$ первых коэфициентов ряда $f(x)$. Если в этом многочлене мы заменим $a_0, a_1, \ldots, a_n$ соответствующими коэфициентами ряда $\varphi(x)$, то, очевидно, будем иметь:

$$|P(a_0, a_1, \ldots, a_n)| \leqslant P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Например, если $\varphi(x)$ есть мажоранта для $f(x)$, то $[\varphi(x)]^2$ будет мажорантой для $[f(x)]^2, \ldots,$ и, вообще, $[\varphi(x)]^n$ будет мажорантой для $[f(x)]^n$. Точно так же, если φ и φ_1 будут мажорантами соответственно для f и f_1, то произведение $\varphi\varphi_1$ будет усиливающею функциею для произведения ff_1, и т. д.

Если дан целый ряд $f(x)$, сходящийся в промежутке $(-R, +R)$, то нахождение для этого ряда мажоранты есть задача очень неопределенная. Но для упрощения последующих рассуждений нам выгодно выбирать мажоранту как можно более простого вида. Пусть будет r положительное число, меньшее R, но сколь угодно близкое к нему. Так как при $x=r$ ряд $f(x)$ будет абсолютно сходящимся, то абсолютные величины его членов имеют верхнюю границу, которую мы обозначим через M. Следовательно, для всякого значения числа n мы имеем:

$$|a_n|=A_n \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Отсюда следует, что ряд

$$M+M\frac{x}{r}+\ldots+M\frac{x^n}{r^n}\ldots=\frac{M}{1-\frac{x}{r}},$$

общий член которого есть $M\frac{x^n}{r^n}$, будет усиливающею функциею для $f(x)$. Этот вид усиливающей функции самый употребительный; он представляет убывающую геометрическую прогрессию. Если ряд $f(x)$ не имеет постоянного члена, то вместо предыдущей усиливающей функции мы можем взять функцию

$$\frac{M}{1-\frac{x}{r}}-M.$$

За число r можно взять любое число, меньшее R, и ясно, что соответствующее число M, вообще, уменьшается вместе с r, но никогда не может сделаться меньше A_0. Если A_0 не равно нулю, то всегда можно найти такое положительное число $\rho<R$, чтобы функция $\frac{A_0}{1-\frac{x}{\rho}}$ была мажорантой для $f(x)$, т. е. можно положить $M=A_0$. В самом деле, пусть будет

$$M+M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\ldots+M\frac{x^n}{r^n}+\ldots$$

первоначальная усиливающая функция, причем $M>A_0$. Возьмем число ρ, меньшее $r\frac{A_0}{M}$; тогда при $n\geqslant 1$ мы имеем:

$$|a_n\rho^n|=|a_nr^n|\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n<M\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1};$$

отсюда находим $|a_n\rho^n|<A_0$. Но $|a_0|=A_0$; следовательно, ряд

$$A_0+A_0\frac{x}{\rho}+A_0\frac{x^2}{\rho^2}+\ldots+A_0\frac{x^n}{\rho^n}+\ldots$$

будет мажорантой для $f(x)$. Таким образом, вообще, за число M можно взять любое число, большее или равное A_0. Этим свойством мы вскоре воспользуемся.

Точно так же можно доказать, что если $a_0=0$, то за усиливающую функцию можно взять

$$\frac{\mu}{1-\frac{x}{\rho}}-\mu=\frac{\mu}{1-\frac{x}{\rho}}\frac{x}{\rho},$$

где μ — произвольное положительное число *.

---

* Для этого нужно только взять $\rho<r\frac{\mu}{M}$. *(Ред.)*

Примечание. Если для данного целого ряда мы знаем усиливающую функцию в виде убывающей геометрической прогрессии, то мы можем также судить о степени погрешности, получающейся при замене суммы $f(x)$ данного ряда суммой его $n+1$ первых членов (см. § 151, примечание II).

178. Подстановка ряда в ряд. Пусть будет

$$z=f(y)=a_0+a_1y+\ldots+a_ny^n+\ldots \tag{20}$$

ряд, расположенный по степеням переменного y и сходящийся в промежутке $(-R, +R)$. С другой стороны, пусть будет

$$y=\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots \tag{21}$$

другой ряд, сходящийся в промежутке $(-r, +r)$. Если мы заменим в ряде (20) y, y^2, y^3, ... их разложениями в ряды по степеням x, получающимися из формулы (21), то получим двойной ряд:

$$\left.\begin{array}{llll} a_0+a_1b_0 & +a_2b_0^2 & +\ldots+a_nb_0^n+\ldots \\ \quad +a_1b_1x & +2a_2b_0b_1x & +\ldots+na_nb_0^{n-1}b_1x+\ldots \\ \quad +a_1b_2x^2 & +a^2(b_1^2+2b_0b_2)x^2+\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \tag{22}$$

Найдем, при каких условиях этот двойной ряд будет абсолютно сходящимся в некотором промежутке. Прежде всего необходимо, чтобы ряд, стоящий в первой строке,

$$a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\ldots+a_nb_0^n+\ldots$$

был абсолютно сходящимся, т. е. чтобы было $|b_0|<R$. *Это условие вместе с тем и достаточно.* В самом деле если это условие удовлетворяется, то за усиливающую функцию для $\varphi(x)$ мы можем взять выражение вида $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$, где m есть любое положительное число, большее $|b_0|$, и где $\rho<r$ (см. стр. 66). При этом мы можем, очевидно, рассматривать только значения x, заключающиеся в промежутке $(-\rho, +\rho)$. Следовательно, мы можем предположить $m<R$. Пусть будет R' положительное число, заключающееся между m и R. Мы можем взять за мажоранту для $f(y)$ выражение вида:

$$\frac{M}{1-\dfrac{y}{R}}=M+M\frac{y}{R'}+M\frac{y^2}{R'^2}+\ldots$$

Если мы заменим в нем y через $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ и разложим степени переменного y по возрастающим степеням переменного x по формуле бинома, то получим новый двойной ряд:

$$\left.\begin{array}{l} M+M\left(\frac{m}{R'}\right)+\ldots+M\left(\frac{m}{R'}\right)^n+\ldots \\ \ldots+M\left(\frac{m}{R'}\right)\frac{x}{\rho}+\ldots+nM\left(\frac{m}{R'}\right)^n\frac{x}{\rho}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (23)$$

Все коэфициенты последнего ряда положительны и больше абсолютных величин соответствующих коэфициентов ряда (22), так как каждый из коэфициентов таблицы (22) получается из коэфициентов a_0, a_1, $a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ только при помощи сложений и умножений. Следовательно, если двойной ряд (23) — абсолютно сходящийся, то двойной ряд (22) будет подавно абсолютно сходящимся. Если мы заменим в ряде (23) x его абсолютной величиной, то для того чтобы порученный ряд был сходящимся, необходимо, чтобы были сходящимися ляды, составленные из членов каждого столбца таблицы (23), т. е. чтобы было $|x|<\rho$. Если это условие удовлетворяется, то сумма членов $(n+1)$-го столбца по замене x через $|x|$ будет равна

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n.$$

Это показывает, что для абсолютной сходимости ряда (23) сверх того должно быть

$$m<R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right),$$

т. е.

$$|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \quad (24)$$

Так как неравенство (24) влечет за собою предыдущее неравенство $|x|<\rho$, то оно представляет необходимое и достаточное условие, при котором двойной ряд (23) будет абсолютно сходящимся. Следовательно, двойной ряд (22) также будет абсолютно сходящимся при всех значениях переменного x, удовлетворяющих неравенству (24). Заметим, что при этих значениях переменного x ряд $\varphi(x)$ также будет сходящимся, и соответствующее значение переменного y будет меньше R' по абсолютной величине, так как из неравенств

$$|\varphi(x)|<\frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}}, \quad \frac{|x|}{\rho}<1-\frac{m}{R'}$$

следует неравенство $|\varphi(x)|<R'$

Суммируя ряд (22) по столбцам, будем иметь:

$$a_0+a_1\varphi(x)+a_2[\varphi(x)]^2+\ldots+a_n[\varphi(x)]^n+\ldots,$$

т. е. $f[\varphi(x)]$. С другой стороны, суммируя по строкам, мы получим ряд, расположенный по возрастающим степеням x; следовательно, мы имеем:

$$f[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{25}$$

Легко убедиться, что коэфициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots$ выражаются через коэфициенты рядов (20) и (21) следующими формулами:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots + a_n b_0^n + \ldots, \\ c_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_1 b_0 + \ldots + na_n b_0^{n-1} b_1 + \ldots, \\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 (b_1^2 + 2b_0 b_2) + \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}\right\} \tag{26}$$

Мы вывели формулу (25) только для значений x, удовлетворяющих неравенству (24); но это неравенство дает лишь нижнюю границу того промежутка, в котором эта формула применима. Возможно, что эта формула будет иметь место и в более широком промежутке. Полное решение этого вопроса требует изучения функций мнимого переменного; мы возвратимся к нему впоследствии.

Частные случаи. 1. Так как в неравенстве (24) можно предположить число R' сколь угодно близким к числу R, то отсюда следует, что формула (25) будет применима при значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \rho\left(1 - \frac{m}{R}\right)$. Поэтому, если ряд (20) будет сходящимся при всяком значении переменного y, то можно предположить число R бесконечно большим, m — сколь угодно большим, а следовательно, ρ — сколь угодно близким к числу r; отсюда следует, что формула (25) будет применима, если $|x| < r$, т. е. она будет применима в том же самом промежутке, в каком будет сходящимся ряд (21). В частности, если оба ряда $f(y)$ и $\varphi(x)$ — сходящиеся при всех значениях x и y, то число r можно взять сколь угодно большим, и формула (25) будет применима при всех значениях переменного x.

2. Если в ряде (21) постоянный член b_0 равен нулю, то за усиливающую функцию для $\varphi(x)$ можно принять выражение вида:

$$\frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}} - m = \frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}} \frac{x}{\rho},$$

где $\rho < r$, и m — произвольное положительное число. Совершенно так же, как и в общем случае, можно доказать, что формула (25) будет применима и в этом случае, если только

$$|x| < \rho \frac{R'}{R' + m}, \tag{27}$$

причем R' может быть взято сколь угодно близким к R. Промежуток, определяемый неравенством (27), шире промежутка, определяемого неравенством (24).

Последний частный случай особенно часто встречается. Здесь неравенство $|b_0| < R$ удовлетворяется само собою, и коэфициент c_n зависит только от $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$:

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \quad \ldots, \quad c_n = a_1 b_n + \ldots + a_n b_1^n.$$

Примеры. 1. Коши показал, что формулу бинома можно вывести из разложения $\ln(1+x)$. В самом деле, полагая

$$y = \mu \ln(1+x) = \mu\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right),$$

имеем:

$$(1+x)^\mu = e^{\mu \ln(1+x)} = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \ldots;$$

подставляя первое разложение во второе, получим:

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) + \frac{\mu^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right)^2 + \ldots$$

Очевидно, что, расположив правую часть по степеням x, мы будем иметь коэфициентом при x^n некоторый многочлен n-й степени по μ; обозначим его через $P_n(\mu)$. Этот многочлен должен обращаться в нуль при $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и равняться единице при $\mu = n$; этих условий достаточно для его определения

$$P_n = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

2. Пусть будет $z = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, где x заключается между -1 и $+1$. Полагая

$$y = \frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + \ldots,$$

имеем:

$$z = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

Второе разложение возможно при всяком y, первое — только при $|x| < 1$. Подставляя первое разложение во второе, мы получим формулу, применимую для x, содержащегося между -1 и $+1$. Ограничиваясь двумя первыми членами, имеем:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{x}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots\right) + \ldots = e - \frac{e}{2}x + \ldots$$

Это показывает, что если x стремится к нулю, оставаясь положительным, то функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ стремится, возрастая, к числу e.

179. Деление целых рядов. Рассмотрим сначала функцию

$$f(x) = \frac{1}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots},$$

где ряд, стоящий в знаменателе, начинается с единицы и остается сходящимся в промежутке $(-r, +r)$. Полагая

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

имеем:

$$f(x)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\ldots$$

Подставляя первое разложение во второе, мы получим для $f(x)$ разложение в целый ряд:

$$f(x)=1-b_1x+(b_1^2-b_2)x^2+\ldots,$$

имеющее место в некотором промежутке.

Таким же способом мы могли бы получить и разложение обратной величины любого целого ряда, постоянный член которого отличен от нуля.

Пусть теперь требуется разложить в ряд частное двух сходящихся целых рядов:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}.$$

Если b_0 не равно нулю, то мы можем представить это частное в виде:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\cdot\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}.$$

По предыдущему, мы можем заменить правую часть произведением двух сходящихся целых рядов. Следовательно, мы можем представить данное частное в виде целого ряда, сходящегося при значениях x, достаточно близких к нулю:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$$

Освобождаясь от знаменателя и сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, мы получим формулы:

$$a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\ldots+b_nc_0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

из них можно определить последовательно коэфициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Следует заметить, что эти коэфициенты будут те же самые, какие мы получили бы, деля первый ряд на второй по обыкновенному правилу деления многочленов, расположенных по возрастающим степеням x.

Если $b_0=0$, то результат будет иной. Предположим для большей общности, что $\psi(x)=x^k\psi_1(x)$, где k — целое положительное число, а $\psi_1(x)$ — целый ряд, постоянный член которого отличен от нуля. Мы можем написать:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x^k}\,\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}.$$

По предыдущему имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_{k-1}x^{k-1}+c_kx^k+c_{k+1}x^{k+1}+\ldots;$$

отсюда

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{c_0}{x^k}+\frac{c_1}{x^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{k-1}}{x}+c_k+c_{k+1}x+\ldots \tag{28}$$

Таким образом частное этих двух рядов равно сумме рациональной дроби, обращающейся в бесконечность только при $x=0$, и целого ряда, сходящегося в некотором промежутке около значения $x=0$.

Примечание. При вычислении различных степеней целого ряда удобно поступать следующим образом. Взяв логарифмические производные от обеих частей тождества

$$(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)^m=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

и освободившись от знаменателей, мы придем к новому тождеству:

$$\left.\begin{aligned} &m(a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots)=\\ &=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)(c_1+2c_2x+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Легко найти коэфициенты при различных степенях x в обеих частях предыдущего тождества; сравнивая между собою коэфициенты при одинаковых степенях x, мы получим ряд равенств, из которых можно последовательно определить коэфициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, если известен первый коэфициент c_0. Но, очевидно, $c_0=a_0^m$.

180. Разложение $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$. Найдем разложение $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ по степеням z. Полагая $y=2xz-z^2$, имеем при $|y|<1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=(1-y)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2+\ldots,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=1+\frac{2xz-z^2}{2}+\frac{3}{8}(2xz-z^2)^2+\ldots \tag{30}$$

Собирая члены с одинаковыми степенями z, мы получим разложение вида:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=P_0+P_1z+P_2z^2+\ldots+P_nz^n+\ldots, \tag{31}$$

где

$$P_0=1,\quad P_1=x,\quad P_2=\frac{3x^2-1}{2},\ldots$$

P_n есть многочлен n-й степени по x. Эти многочлены могут быть определены последовательно из рекуррентной формулы. В самом деле, диференцируя формулу (31) по z, имеем:

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1+2P_2z+\ldots+nP_nz^{n-1}+\ldots;$$

на основании формулы (31) последнее равенство можно представить в виде:

$$(x-z)(P_0+P_1z+\ldots+P_nz^n+\ldots)=(1-2xz+z^2)(P_1+2P_2z+\ldots).$$

Сравнивая коэфициенты при z^n в обеих частях, мы получим рекуррентную формулу:

$$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}.$$

Эта формула тождественна с формулою, связывающею три последовательных полинома Лежандра (§ 86); кроме того, мы видели, что $P_0 = X_0$, $P_1 = X_1$, $P_2 = X_2$. Таким образом при всяком n мы имеем: $P_n = X_n$, и формула (31) обращается в

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots, \tag{32}$$

где X_n есть n-й полином Лежандра:

$$X_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n].$$

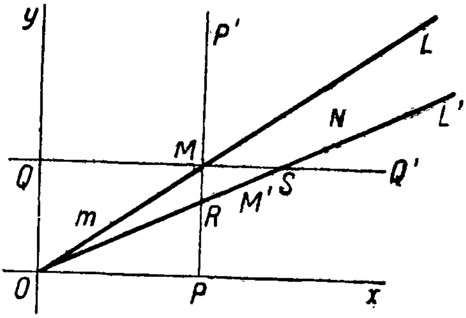
Ниже мы увидим, в каком промежутке применима формула (32).

III. ЦЕЛЫЕ РЯДЫ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

181. Область сходимости. Рассмотрим сначала целый ряд

$$\sum A_{mn} X^m Y^n, \tag{33}$$

все коэфициенты A_{mn} которого положительны и где переменные X и Y сами имеют положительные значения. Ясно, что если этот ряд сходится при системе положительных значений X_0, Y_0, то он будет сходиться при всякой системе значений (X, Y), для которой $X \leqslant X_0$, $Y \leqslant Y_0$. Наоборот, если ряд (33) расходится при значениях X_0, Y_0, то он и подавно будет расходиться, если одновременно $X \geqslant X_0$, $Y \geqslant Y_0$. Другими словами, если ряд (33) сходится в точке M, расположенной в пределах угла XOY, то он сходится во всех точках внутри и на сторонах прямоугольника $OPMQ$ (черт. 30); наоборот, если ряд расходится в точке M, то он расходится во всякой точке, расположенной внутри или на сторонах прямого угла $P'MQ'$.



Черт. 30.

Рассмотрим теперь бесконечную полупрямую OL, лежащую в пределах угла XOY, и точку m, которая описывает эту полупрямую, выходя из начала координат. Координаты этой точки m, а следовательно, и все члены ряда (33), для которых A_{mn} не есть нуль, возрастают, когда точка m удаляется от начала. На этой прямой OL имеется, следовательно, такая пограничная точка M, что ряд (33) сходится во всякой точке отрезка OM, заключенного между началом координат и точкой M, и расходится во всякой точке полупрямой ML за точкой M *.

---

* Если λ есть угловой коэфициент прямой OL, то абсцисса точки M равна обратной величине наибольшего из пределов множества чисел $\sqrt[n]{A_{pq}\lambda^q}$, где $n = p + q$ (Lemaire, *Bulletin des Sciences mathematiques*, 1896, стр. 286).

В частности, может случиться, что точка M совпадает с началом координат; тогда ряд (33) расходится во всякой точке, не лежащей на какой-либо из осей OX или OY. Если точка M находится в бесконечности, то ряд (33), наоборот, сходится, каковы бы ни были X и Y, т. е. в пределах всего угла XOY.

Оставляя в стороне эти крайние случаи, мы можем сказать, что на каждой полупрямой OL, расположенной в пределах угла XOY, имеется точка M, расстояние которой от начала координат изменяется непрерывно вместе с угловым коэфициентом λ этой прямой. В самом деле, пусть будет OL' — полупрямая, близкая к OL (черт. 30). Ряд (33), сходящийся во всякой точке отрезка OM, сходится также в любой точке внутри прямоугольника $OPMQ$ и, следовательно, в любой точке отрезка OR. Наоборот, так как ряд (33) расходится во всякой точке ML, то он расходится также и во всякой точке SL'. Пограничная точка M' полупрямой OL' есть, следовательно, одна из точек отрезка RS, и отсюда мы заключаем, что эта точка M' стремится к совпадению с точкой M, когда OL' стремится к совпадению с OL. Когда полупрямая OL, вращаясь около точки O, описывает угол XOY, точка M описывает некоторую кривую Γ, которая разделяет этот угол XOY на две различные области: внутреннюю область J и внешнюю E. Точка m принадлежит области J, если она расположена между началом координат и пограничной точкой M прямой Om, в противном случае она принадлежит области E. Из самого определения этой кривой Γ следует, что *ряд* (33) *сходится во всякой точке области J и расходится во всякой точке области E*. В точках пограничной кривой Γ ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Эта пограничная кривая Γ может иметь весьма различную форму в зависимости от ряда (33). Из приведенного выше рассуждения следует лишь, что ордината точки этой кривой не может возрастать при возрастании абсциссы, и обратно. Чтобы видеть, что происходит, когда OL стремится к OX, достаточно заметить, что абсцисса точки M не может при этом убывать, а ордината этой точки не может возрастать; следовательно, y стремится к некоторому пределу, между тем как x может либо стремиться к пределу, либо возрастать неограниченно. Следовательно, кривая Γ либо примыкает к некоторой точке A оси OX, либо имеет асимптоту, параллельную OX; этой асимптотой может быть и сама ось OX. Заметим, что если кривая Γ примыкает к точке A оси OX, то ряд (33) не будет непременно расходящимся во всякой точке оси OX за точкой A. Ясно, что все это применимо также и к оси OY.

Примеры. 1. Ряд $\sum M \frac{X^m Y^n}{a^m b^n}$ сходится, если одновременно $X < a$, $Y < b$, и только в этом случае; сумма его равна

$$\frac{M}{\left(1-\frac{X}{a}\right)\left(1-\frac{Y}{b}\right)}.$$

Кривая Γ образована здесь двумя сторонами прямоугольника, параллельными осям.

2. Двойной ряд

$$\sum M \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{X^m Y^n}{a^m b^n} = \frac{M}{1-\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}\right)}$$

сходится, если мы имеем $\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}<1$. Кривая Г есть в данном случае отрезок прямой, заключенный между осями OX, OY.

3. Двойной ряд $\Sigma A_{mn}X^mY^n$, где $A_{mm}=1$, а $A_{mn}=0$ (для $m\neq n$), сходится лишь в том случае когда $XY<1$. Кривая Г представлена ветвью гиперболы, имеющей асимптотами оси координат.

4. Ряд

$$\sum{}' M\left(\frac{X}{a}\right)^m\left(\frac{Y}{b}\right)^n,$$

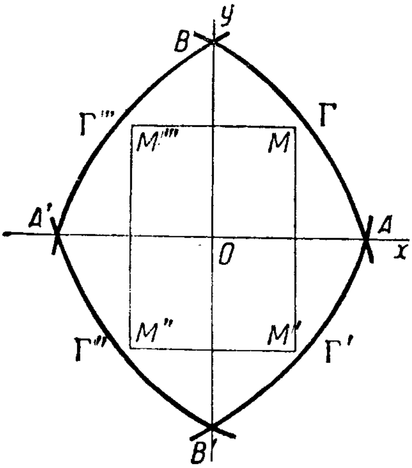
где индексы m и n изменяются от 1 до $+\infty$, сходится внутри того же прямоугольника, что и ряд, приведенный в первом примере, и, све х того, во всех точках осей OX и OY. Когда полупрямая OL стремится к OX, точка M прямой OL стремится к точке с абсциссой a, лежащей на OX, между тем как пограничная точка OX находится в бесконечности.

5. Ряд $\Sigma n!\,X^nY^n$ расходится во всех точках, не принадлежащих осям координат.

182. Свойства целых рядов. Возьмем теперь целый ряд с произвольными коэфициентами

$$F(x, y)=\sum_{m,\,n} a_{mn}x^my^n, \tag{34}$$

и пусть $A_{mn}=|a_{mn}|$, $X=|x|$, $Y=|y|$. Ряд (33), составленный из абсолютных величин членов ряда (34), сходится, если точка с координатами X, Y находится в области J, которую мы только что определили, и притом только в этом случае. Следовательно, ряд (34) абсолютно сходится, если точка с координатами (x, y) принадлежит области D, ограниченной четырьмя кривыми, равными пограничной кривой Г, причем одна из них есть сама кривая Г, а остальные являются симметричными ей относительно осей координат (черт. 31).



Черт. 31.

В точке, внешней по отношению к области D и *не лежащей на осях*, ряд (34) не является абсолютно сходящимся. Мы не можем преобразовать этот ряд в сходящийся, в каком бы порядке мы ни расположили его члены. В самом деле, пусть будут x_0, y_0 — координаты точки, внешней по отношению к D и не лежащей на осях; абсолютная величина общего члена ряда $\Sigma a_{mn}x_0^my_0^n$ не может быть ограничена. Действительно, если бы мы имели

$$|a_{mn}x_0^my_0^n|<M,$$

каковы бы ни были m и n, где M — постоянное число, то общий член ряда (33) был бы меньше, чем

$$M\frac{X^mY^n}{|x_0|^m|y_0|^n},$$

т. е. меньше общего члена ряда, сходящегося при $X<|x_0|$, $Y<|y_0|$. Таким образом точка с координатами $|x_0|$, $|y_0|$ не может быть внешней относительно кривой Г, а следовательно, точка (x_0, y_0) не может быть внешней по отношению к области D. В точках кривой, ограничивающей эту область, ряд (34) может быть сходящимся или расходящимся подобно ряду (33).

Пусть будут a, b — координаты точки области D, внутренней относительно угла xOy. Ряд (34) равномерно сходится внутри прямоугольника $MM'M''M'''$, образованного четырьмя прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, и, следовательно, $F(x, y)$ есть непрерывная функция переменных x и y в этом прямоугольнике. Отсюда следует, что $F(x, y)$ есть функция, непрерывная в любой точке области D; в самом деле, где бы мы ни взяли точку m в этой области, ясно, что мы можем найти другую точку M, такую, что m оказывается внутри прямоугольника, аналогичного прямоугольнику $MM'M''M'''$.

Диференцируя почленно ряд (34) по переменному x или по переменному y, мы получаем два новых ряда:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{m,n} ma_{mn}x^{m-1}y^n, \\ F_2(x, y) &= \sum_{m,n} na_{mn}x^my^{n-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

которые имеют ту же самую область сходимости, что и ряд (34). Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что ряд

$$\sum_{m,n} mA_{mn}X^{m-1}Y^n,$$

например, имеет ту же пограничную кривую Г, что и ряд (33).

Доказательство, совершенно аналогичное доказательству § 174, состоит из двух частей:

1. Если ряд $\sum mA_{mn}X^{m-1}Y^n$ сходится, то это имеет место и в отношении ряда $\sum A_{mn}X^{m-1}Y^n$, а следовательно, и в отношении ряда (33).

2. Обратно, если ряд $\sum A_{mn}X_0^mY_0^n$ сходится, то ряд $\sum mA_{mn}X^{m-1}Y^n$ сходится при $X<X_0$, $Y<Y_0$.

В самом деле, допустим, что, каковы бы ни были m и n,

$$A_{mn}X_0^mY_0^n<M;$$

отсюда мы получаем неравенство:

$$mA_{mn}X^{m-1}Y^n<\frac{Mm}{X_0}\left(\frac{X}{X_0}\right)^{m-1}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n,$$

и правая часть есть общий член сходящегося двойного ряда, сумма которого равна

$$\frac{M}{X_0}\frac{1}{\left(1-\frac{X}{X_0}\right)^2\left(1-\frac{Y}{Y_0}\right)}.$$

Если мы расположим оба ряда $F(x, y)$ и $F_1(x, y)$ по возрастающим степеням x, то, рассматривая y как постоянное, мы получим два ряда, целых относительно x, и в силу способа, которым второй ряд получен из первого, мы имеем:

$$F_1(x, y)=\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Таким же образом мы находим:

$$F_2(x, y)=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

И, вообще, ряд (34) можно произвольное число раз диференцировать почленно в области D. Так, частная производная $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}$ равна сумме двойного ряда, у которого постоянный член есть $m!\ n!\ a_{mn}$; коэфициенты a_{mn} представляют, следовательно, с точностью до числовых коэфициентов значения частных производных функции $F(x,y)$ при $x=y=0$, и формулу (34) можно переписать еще так:

$$F(x, y)=\sum\frac{\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)}{1\cdot 2\ldots m\cdot 1\cdot 2\ldots n}x^m y^n, \tag{34'}$$

что, кстати сказать, показывает, что функция двух переменных может быть разложена в целый ряд лишь единственным способом. Если мы сгруппируем вместе все члены двойного ряда одинаковой степени относительно x и y, то мы получим обыкновенный ряд:

$$F(x, y)=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n+\ldots, \tag{34''}$$

где φ_n есть однородный многочлен степени n относительно x, y, который можно символически представить так:

$$\varphi_n=\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{(n)};$$

это разложение, следовательно, тождественно с тем, которое дается формулой Тейлора (§ 27).

Пусть будут (x_0, y_0) координаты точки области D, а r, ρ — координаты такой точки кривой Γ, что $|x_0|<r$, $|y_0|<\rho$. Возьмем в D близкую точку $(x_0+h,\ y_0+k)$, для которой

$$|x_0|+|h|<r, \quad |y_0|+|k|<\rho.$$

Внутри прямоугольника, образованного четырьмя прямыми

$$x=x_0\pm[r-|x_0|], \quad y=y_0\pm[\rho-|y_0|],$$

функция $F(x, y)$ может быть разложена в целый ряд, расположенны по степеням $x-x_0$ и $y-y_0$:

$$F(x_0+h, y_0+k)=\sum\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\frac{h^m k^n}{m!\,n!}. \qquad (36$$

В этом можно убедиться, заменяя каждый член двойного ряда

$$\sum a_{mn}(x_0+h)^m(y_0+k)^n$$

его разложением по степеням h и k и замечая, что новый кратный ря сходится абсолютно в тех предположениях, которые были сделаны. Рас полагая этот новый ряд по степеням h и k, мы и придем к фор муле (36).

Предыдущие рассуждения и теоремы легко распространяются н целые ряды с произвольным числом переменных. Пусть мы имеем целый ряд с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$; существует, вообще, бесконечнс много *призматоидов*, определяемых, например, условиями:

$$-x_1^0<x_1<x_1^0, \quad -x_2^0<x_2<x_2^0, \ldots, \quad -x_n^0<x_n<x_n^0,$$

внутри которых целый ряд $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сходится абсолютно. Он представляет функцию, непрерывную в этой области, и его можно произвольное число раз диференцировать почленно.

183. Усиливающие функции. Пусть дан какой-нибудь целый ря $f(x, y, z, \ldots)$ с n переменными. Ряд $\varphi(x, y, z, \ldots)$ с n переменным называется по отношению к первому *усиливающим* или *мажорантой* если каждый коэфициент ряда $\varphi(x, y, z, \ldots)$ положителен и больше абсолютной величины соответствующего коэфициента ряда $f(x, y, z, \ldots)$. В сущности доказательство теоремы в § 182 уже было основано н применении усиливающей функции. В самом деле, если ряд $\sum|a_{mn}x^m y^n|$ — сходящийся при $x=r$, $y=\rho$, то функция

$$\varphi(x, y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}=M\sum\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{y}{\rho}\right)^n,$$

где M больше каждого из коэфициентов ряда $\sum|a_{mn}x^m y^n|$, есть усиливающая функция для ряда $\sum a_{mn}x^m y^n$. Функция

$$\psi(x, y)=\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)}$$

может быть также принята за усиливающую функцию для данного двойного ряда; в самом деле, коэфициент при $x^m y^n$ в $\psi(x, y)$ равен коэфициенту при $x^m y^n$ в $M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$ и, следовательно, никак не меньше соответствующего коэфициента в $\varphi(x, y)$.

Точно так же, если нам дан тройной ряд

$$f(x, y, z) = \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

абсолютно сходящийся при $x = r$, $y = r'$, $z = r''$, где r, r', r'' — положительные числа, то этот тройной ряд допускает как усиливающую функцию выражение вида:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)\left(1 - \frac{z}{r''}\right)},$$

которое можно также заменить любым из следующих выражений:

$$\frac{M}{1 - \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r'} + \frac{z}{r''}\right)}, \quad \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left[1 - \left(\frac{y}{r'} + \frac{z}{r''}\right)\right]}, \ldots$$

Если ряд $f(x, y, z)$ не содержит постоянного члена, то за усиливающую функцию для него можно также взять любую из предыдущих функций, уменьшенную на M.

Теорема о подстановке целого ряда в другой целый ряд (§ 178) может быть распространена на ряды со многими переменными. *Если в сходящемся целом ряде с p переменными $y_1, y_2, \ldots, y_p$ мы заменим эти переменные их разложениями в сходящиеся целые ряды с q переменными $x_1, x_2, \ldots, x_q$, не содержащими постоянных членов, то результат такой подстановки можно представить в виде сходящегося целого ряда, расположенного по степеням переменных $x_1, x_2, \ldots, x_q$, если только абсолютные величины этих переменных будут меньше некоторых пределов.*

Так как ход доказательства не зависит от числа переменных, то мы ограничимся рассмотрением следующего частного случая. Пусть будет

$$F(y, z) = \sum a_{mn} y^m z^n \tag{37}$$

целый ряд, сходящийся, если $|y| \leqslant R$, $|z| \leqslant R'$. С другой стороны, пусть будут

$$\left.\begin{aligned} y &= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots, \\ z &= c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

два ряда, не содержащие постоянных членов и сходящиеся, если абсолютная величина переменного x не превосходит ρ. Подставим в ряд (37) вместо y и z их разложения (38). Так как эти разложения сходятся при $|x| < \rho$, то каждое из произведений $y^m z^n$ ряда (37) может быть разложено в целый ряд по x, также сходящийся при $|x| < \rho$. Таким образом, заменяя в ряде (37) каждое из произведений $y^m z^n$ его разложением в целый ряд по x, мы получим тройной ряд, все коэфициенты которого получаются из коэфициентов a_{mn}, b_n, c_n только при помощи сложений и умножений. Нам нужно доказать, что если переменное x не превосходит некоторого предела, то этот тройной ряд будет абсолютно сходящимся, и, следовательно, его можно будет расположить по возрастающим степеням переменного x. Прежде всего очевидно, что за усиливающую функцию для $F(y, z)$ можно взять функцию

$$\Phi(y, z)=\frac{M}{\left(1-\frac{y}{R}\right)\left(1-\frac{z}{R'}\right)}=\sum M\left(\frac{y}{R}\right)^m\left(\frac{z}{R'}\right)^n, \tag{39}$$

а за усиливающую функцию для обоих рядов (38) — выражение вида:

$$\frac{N\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}}, \quad \frac{N'\frac{x}{r'}}{1-\frac{x}{r'}} \tag{40}$$

Любой член рассматриваемого тройного ряда по абсолютной величине меньше соответствующего члена тройного ряда, который таким же способом получен из двойного ряда

$$\sum\frac{M}{R^m R'^n}\left(\frac{NX}{r}+\frac{NX^2}{r^2}+\ldots\right)^m\left(\frac{N'X}{r'}+\frac{N'X^2}{r'^2}+\ldots\right)^n,$$

где $X=|x|$. Для сходимости этого тройного ряда достаточно, чтобы сходился двойной ряд

$$M\sum\left[\frac{N\frac{X}{r}}{R\left(1-\frac{X}{r}\right)}\right]^m\left[\frac{N'\frac{X}{r'}}{R'\left(1-\frac{X}{r'}\right)}\right]^n,$$

т. е. чтобы было одновременно:

$$X<r\frac{R}{R+N}, \quad X<r'\frac{R'}{R'+N'}.$$

Примечание. Если ряды (38) содержат постоянные члены b_0 и c_0, то теорема будет верна и в этом случае, если только $|b_0|<R$, $|c_0|<R'$. В самом деле, мы можем заменить разложение (37) разложением по степеням $y-b_0$ и $z-c_0$ (§ 182) и таким образом придем к предыдущему случаю.

IV. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ.

184. Неявная функция одного переменного. Мы уже установили (гл. III, § 32 и след.) существование неявных функций при определенных условиях относительно непрерывности. В тех случаях, когда левые части данных уравнений разложимы в целые ряды, мы можем притти к более определенным выводам.

Пусть будет $F(x, y)=0$ уравнение, левая часть которого может быть разложена в сходящийся ряд, расположенный по степеням $x-x_0$, $y-y_0$, причем этот ряд не содержит постоянного члена, и коэфициент при $y-y_0$ отличен от нуля. При этих условиях уравнение $F(x, y)=0$ имеет один и только один корень, стремящийся к y_0, когда x стремится к x_0, и этот корень может быть разложен в целый ряд, расположенный по степеням $x-x_0$.

Для упрощения вычислений предположим, что $x_0 = y_0 = 0$, что равносильно перенесению начала координат в точку (x_0, y_0).

Выделив член с первою степенью y и перенося его в другую часть, мы можем представить данное уравнение в виде:

$$y = f(x, y) = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots, \tag{41}$$

причем степень последующих членов будет выше второй. Покажем сначала, что *формально* мы можем удовлетворить уравнению (41), заменяя y рядом:

$$y = c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots \tag{42}$$

и поступая с этим рядом так, как если бы он был сходящимся. В самом деле, сделав подстановку и сравнивая коэфициенты при x в обеих частях уравнения, мы получим условия:

$$c_1 = a_{10}, \quad c_2 = a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \ldots ;$$

вообще, c_n выразится только при помощи сложений и умножений через коэфициенты a_{ik}, где $i + k \leqslant n$, и через предыдущие коэфициенты c_1, $c_2, \ldots, c_{n-1}$. Таким образом мы будем иметь:

$$c_n = P_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \ldots, a_{0n}), \tag{43}$$

где P_n есть многочлен, все коэфициенты которого суть целые положительные числа. Чтобы все предыдущие действия были возможны, нам остается доказать, что полученный таким образом ряд (42) будет сходящимся при достаточно малых значениях переменного x. Для доказательства мы воспользуемся одним весьма общим приемом, основная мысль которого принадлежит Коши; этот прием основан на применении усиливающих функций.

Пусть будет

$$\varphi(x, Y) = \sum b_{mn}x^mY^n$$

усиливающая функция для функции $f(x, y)$, причем $b_{00} = b_{01} = 0$, и каждый из остальных коэфициентов b_{mn} положителен и не меньше $|a_{mn}|$. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$Y = \varphi(x, Y) = \sum b_{mn}x^mY^n \tag{41'}$$

и попытаемся удовлетворить этому уравнению, приняв за Y целый ряд по x:

$$Y = C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots \tag{42'}$$

Как и выше, мы найдем для коэфициентов $C_1, C_2, \ldots$ значения:

$$C_1 = b_{10}, \quad C_2 = b_{20} + b_{11}C_1 + b_{02}C_1^2, \ldots,$$

и, вообще,

$$C_n = P_n(b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{0n}). \tag{43'}$$

Так как все коэфициенты многочлена P_n положительны, и $|a_{mn}| \leqslant b_{mn}$, то из соотношений (43) и (43') непосредственно видно, что $|c_n| < C_n$. Следовательно, если ряд (42') — сходящийся, то и ряд (42) также будет сходящимся. Но за усиливающую функцию $\varphi(x, Y)$ мы можем взять выражение вида:

$$\varphi(x, Y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)}-M-M\frac{Y}{\rho},$$

где M, r, ρ — положительные числа. Тогда вспомогательное уравнение (41'), по освобождении от знаменателя, примет вид:

$$Y^2-\frac{\rho^2 Y}{\rho+M}+\frac{M\rho^2}{\rho+M}\frac{x}{r-x}=0.$$

Это уравнение имеет один корень, равный нулю при $x=0$, именно:

$$Y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}-\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}+\sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\frac{x}{r-x}}.$$

Полагая

$$a=r\left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^2,$$

мы можем представить подкоренное выражение в виде:

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1},$$

и тогда получим:

$$Y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1-\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Отсюда видно, что этот корень Y разлагается в промежутке $(-a, +a)$ в сходящийся ряд. Это разложение должно быть тождественно с тем, которое получается при помощи непосредственной подстановки, т. е. с разложением (42'); следовательно, ряд (42) и подавно сходящийся в промежутке $(-a, +a)$. Нужно, однако, заметить, что этот промежуток есть лишь нижняя граница промежутка сходимости, который может быть в действительности значительно шире.

Из самого способа получения коэфициентов c_n очевидно, что сумма y ряда (42) удовлетворяет уравнению (41). Представим уравнение $F(x, y)=0$ в виде $F(x, y)=y-f(x, y)=0$; пусть будет $y=P(x)$ корень, который мы выше получили. Сделаем в $F(x, y)$ подстановку $y=P(x)+z$ и расположим результат подстановки по степеням x и z. Все члены должны делиться на z, так как этот результат должен быть равен нулю, если $z=0$, каково бы ни было значение переменного x; следовательно, мы будем иметь тождественно:

$$F[x, P(x)+z]=zQ(x, z),$$

причем $Q(x, z)$ есть целый ряд по x и z. Заменяя теперь в $Q(x, z)$ переменное z через $y-P(x)$, мы получим тождество:

$$F(x, y)=[y-P(x)]\,Q_1(x, y).$$

Так как коэфициент при y в $F(x, y)$ равен единице, то постоянный член в $Q_1(x, y)$ также должен равняться единице, и мы можем представить предыдущее тождество в виде:

$$F(x, y) = [y - P(x)][1 + \alpha x + \beta y + \ldots]. \tag{44}$$

Это разложение $F(x, y)$ на произведение двух множителей было дано Вейерштрассом. Оно выделяет корень $y = P(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ и, кроме того, показывает, что уравнение $F(x, y) = 0$ не имеет другого корня, стремящегося к нулю вместе с x, так как второй множитель не стремится к нулю при приближении x и y к нулю.

Примечание. Чтобы последовательно определить коэфициенты в разложении (42), напишем данное уравнение в виде:

$$y = Ax^n + xy\Phi(x, y) + Cx^{n+1} + \ldots + Dy^2 + \ldots, \quad (A \neq 0), \tag{41''}$$

где $\Phi(x, y)$ представляет целый ряд по x и y, и где ненаписанные члены образуют целые ряды, соответственно, по x и по y, из которых один делится на x^{n+1}, а другой на y^2. Первый член искомого ряда есть Ax^n; полагая $y = x^n(A + z)$, мы получим, разделив обе части уравнения (41″) на x^n, уравнение того же вида:

$$z = A_1 x^{n_1} + xz\Phi_1(x, z) + \ldots;$$

первый член разложения для z есть $A_1 x^{n_1}$, следовательно, второй член в разложении y есть $A_1 x^{n+n_1}$: ясно, что этот процесс можно продолжать неограниченно *.

185. Общая теорема. Рассмотрим теперь систему p уравнений с $p + q$ переменными:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Предположим, что функции $F_1, F_2, \ldots, F_p$ будут равны нулю при $x_i = y_k = 0$ $(i = 1, \ldots, q;\ k = 1, \ldots, p)$, и что они разлагаются в целые ряды вблизи этих значений переменных; кроме того, предположим, что при $x_i = y_k = 0$ функциональный определитель $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ *не равен нулю*. При этих условиях *уравнения* (45) *имеют одну и только одну систему решений вида:*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), \ldots, y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *суть целые ряды по* $x_1, x_2, \ldots, x_q$, *обращающиеся в нуль при* $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$.

Мы ограничимся для простоты случаем двух уравнений между двумя функциями u и v и тремя независимыми переменными x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= au + bv + cx + dy + ez + \ldots = 0, \\ F_2 &= a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

---

* Получив некоторое число членов, можно при помощи деления удвоить число членов [См. статью „Sur le développement en série entière d'une branche de fonction implicite" (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1904)].

Так как определитель $ab' - ba'$, по предположению, не равен нулю, то уравнения (46) можно заменить двумя уравнениями вида:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum a_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v &= \sum b_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \end{aligned} \right\} \tag{47}$$

где правые части не содержат ни постоянных членов, ни членов первой степени по u и v. Как и выше, можно доказать, что этим уравнениям можно *формально* удовлетворить, взяв за u и v целые ряды по x, y, z:

$$u = \sum c_{ikl} x^i y^k z^l, \quad v = \sum c'_{ikl} x^i y^k z^l, \tag{48}$$

причем коэфициенты c_{ikl}, c'_{ikl} выразятся через коэфициенты a_{mnpqr}, b_{mnpqr} при помощи одних только сложений и умножений. Чтобы доказать сходимость этих разложений, нужно и здесь сравнить их с аналогичными разложениями, получающимися при решении двух вспомогательных уравнений):

$$U = V = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y+z}{r}\right)\left(1 - \frac{U+V}{\rho}\right)} - M\left(1 + \frac{U+V}{\rho}\right),$$

где M, r, ρ — положительные числа, значения которых были указаны выше. Эти два вспомогательных уравнения приводятся к одному уравнению второй степени:

$$U^2 - \frac{\rho^2 U}{2\rho + 4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho + 4M} \frac{\frac{x+y+z}{r}}{1 - \frac{x+y+z}{r}} = 0.$$

Это уравнение имеет один корень, обращающийся в нуль при $x = y = z = 0$, именно:

$$U = \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} \sqrt{\frac{1 - \frac{x+y+z}{\alpha}}{1 - \frac{x+y+z}{r}}}$$

где

$$\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 4M}\right)^2.$$

Если абсолютные величины переменных x, y, z не превосходят $\frac{\alpha}{3}$, то этот корень разлагается в сходящийся целый ряд. Следовательно, ряды (48) также будут сходящимися между этими пределами.

Пусть будут u_1 и v_1 решения уравнений (47), разлагающиеся в целые ряды по x, y, z. Полагая $u = u_1 + u'$, $v = v_1 + v'$, подставим эти значения u и v в уравнения (47) и расположим результат по степеням x, y, z, u', v'. При этом все члены должны иметь множителей u' и v';

следовательно, возвращаясь к переменным x, y, z, u, v, мы можем представить наши уравнения в виде:

$$\left.\begin{aligned}(u-u_1)f+(v-v_1)\varphi=0,\\ (u-u_1)f_1+(v-v_1)\varphi_1=0,\end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

где $f, \varphi, f_1, \varphi_1$ — целые ряды по x, y, z, u, v. Таким образом решения $u=u_1$, $v=v_1$ отделены; но, кроме того, ясно, что уравнения $F_1=0$, $F_2=0$ не имеют других решений, обращающихся в нуль при $x=y=z=0$. В самом деле, всякое другое решение уравнений $(47)'$ должно обращать в нуль $f\varphi_1-\varphi f_1$; но, сравнивая уравнения (47) и $(47)'$, мы видим, что постоянный член в f и φ_1 равен единице, а в f_1 и φ — нулю. Следовательно, мы не можем удовлетворить уравнению $f\varphi_1-f_1\varphi=0$, взяв для u и v функции, обращающиеся в нуль при $x=y=z=0$.

186. Формула Лагранжа. Рассмотрим уравнение

$$y=a+x\varphi(y) \tag{49}$$

и предположим, что функция $\varphi(y)$ может быть разложена в ряд по возрастающим степеням $y-a$, сходящийся, если абсолютная величина разности $y-a$ не превосходит некоторого предела:

$$\varphi(y)=\varphi(a)+(y-a)\varphi'(a)+\frac{(y-a)^2}{1\cdot 2}\varphi''(a)+\ldots$$

По общей теореме § 184, уравнение (49) имеет один и только один корень, стремящийся к a, когда x стремится к нулю. При достаточно малых значениях x этот корень может быть представлен суммою сходящегося целого ряда:

$$y=a+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

Вообще, пусть будет $f(y)$ функция от y, разложимая в ряд по положительным степеням разности $y-a$. Заменяя в ней y предыдущим разложением, мы получим для $f(y)$ разложение по степеням x, сходящееся при значениях x, заключающихся в некоторых пределах:

$$f(y)=f(a)+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots \tag{50}$$

Формула Лагранжа дает выражения коэфициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ в функции от a. Заметим, что эта задача есть не что иное, как случай общей задачи Коэфициент A_n равен n-й производной от $f(y)$ при $x=0$, деленной на $n!$, причем y определяется уравнением (49); очевидно, что эту производную можно вычислить при помощи известных нам правил. Вычисление кажется сложным, но его можно значительно сократить, воспользовавшись следующими указаниями Лапласа (см. упр. 8, гл. II) Диференцируя уравнение (49) по x и по a, мы получим для частных производных от y следующие формулы:

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),\qquad [1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1;$$

полагая $u=f(y)$, из предыдущих формул будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{51}$$

С другой стороны, пусть будет $F(y)$ какая-нибудь функция от y. Легко убедиться непосредственным диференцированием, что

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]; \tag{51}$$

в самом деле, диференцируя правую и левую часть, получим в обоих случаях

$$F'(y)f'(y)\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial x}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial x}.$$

Докажем, что при всяком целом числе n имеет место формула:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]$$

На основании (51), эта формула верна при $n=1$. Чтобы доказать ее общность, предположим, что она верна при каком-нибудь частном значении числа n. Тогда мы будем иметь:

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^{n-1}\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Но на основании соотношений (51) и (51)' получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right];$$

следовательно,

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Таким образом эта формула верна при всяком n.

Предположим теперь, что $x=0$. Тогда y обратится в a, u — в $f(a)$, и n-я производная от u по x будет равна:

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^n f'(a)].$$

Таким образом разложение $f(y)$ по формуле Тейлора будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}f(y)&=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[\varphi(a)^2f'(a)]+\dots\\&\dots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^nf'(a)]+\dots\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

Это — известная *формула Лагранжа.* Она дает разложение корня y, стремящегося к a, когда x стремится к нулю. Ниже мы увидим, между какими пределами эта формула применима.

Примечание. Из общей теоремы следует также, что корень y, рассматриваемый как функция от x и a, может быть представлен двойным рядом, расположенным по степеням x и a. Этот ряд можно получить, заменяя каждый из коэфициентов A_n его разложением по степеням a. Отсюда следует, что ряд (52) можно диференцировать почленно по параметру a.

Примеры. 1. Уравнение

$$y=a+\frac{x}{2}(y^2-1)\tag{53}$$

имеет корень, равный a при $x=0$. Разложение этого корня по формуле Лагранжа будет:

$$\left.\begin{aligned}y&=a+\frac{x}{2}(a^2-1)+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{d(a^2-1)^2}{da}+\dots\\&\dots+\frac{1}{1\cdot 2\dots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}}+\dots\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

С другой стороны, решая уравнение (53), мы найдем для его корней выражение:

$$y=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2}.$$

Чтобы получить корень, равный a при $x=0$, должно взять знак минус. Диференцируя обе части уравнения (54) по переменному a, мы придем к формуле, отличающейся от полученной выше формулы (32) (§ 180) только обозначениями.

2. Известное в астрономии уравнение Кеплера (Kepler) для эксцентрической аномалии u

$$u=a+e\sin u \tag{55}$$

имеет корень u, равный a при $e=0$. Разложение этого корня по формуле Лагранжа при e, близком к нулю, будет иметь вид:

$$u=a+e\sin a+\frac{e^2}{1.2}\frac{d}{da}(\sin^2 a)+\ldots+\frac{e^n}{1\cdot 2\ldots n}\frac{d^{n-1}(\sin^n a)}{da^{n-1}}+\ldots \tag{56}$$

Лаплас первый доказал при помощи весьма искусных приемов исследований, что предыдущий ряд — сходящийся, если e меньше 0,662743...

187. Обращение функций. Пусть будет

$$y=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{57}$$

ряд, сходящийся в промежутке $(-r, +r)$, причем первый коэфициент a_1 не равен нулю. Будем рассматривать в уравнении (57) y как независимое переменное а x — как функцию от y. По общей теореме (§ 184), это уравнение имеет один и только один корень x, стремящийся к нулю вместе с y, и этот корень разлагается в ряд, расположенный по степеням y:

$$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\ldots+b_ny^n+\ldots \tag{58}$$

Коэфициенты b_1, b_2, $b_3, \ldots$ можно определить последовательно, заменяя в формуле (57) x его разложением (58) и приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях y. Таким образом получим:

$$b_1=\frac{1}{a_1},\quad b_2=-\frac{a_2}{a_1^3},\quad b_3=\frac{2a_2^2-a_1a_3}{a_1^5},\ \ldots$$

Общее выражение коэфициентов b_n мы можем также получить при помощи формулы Лагранжа. В самом деле, полагая

$$\psi(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots,$$

мы можем представить уравнение (57) в виде:

$$x=y\frac{1}{\psi(x)}.$$

Отсюда по формуле Лагранжа получим разложение корня x, обращающегося в нуль вместе с y:

$$x=y\frac{1}{\psi(0)}+\ldots+\frac{y^n}{1\cdot 2\ldots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^n\right]_0+\ldots,$$

причем указатель 0 показывает, что после диференцирований должно заменить x нулем.

Предыдущая задача известна также под именем задачи об *обращении рядов.*

188. Аналитические функции. В последующем мы будем называть *аналитическою функциею* всякую функцию от любого числа независимых переменных x, y, $z, \ldots$, которая вблизи системы значений x_0, y_0, $z_0, \ldots$ может быть разложена в целый ряд, расположенный по степеням $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, ..., — сходящийся, пока абсолютные величины этих разностей не превосходят некоторых пределов. Значения x_0, y_0, z_0 могут при этом подлежать известным ограничениям, на которых мы здесь не будем останавливаться. Из всего изложенного в этой главе следует, что эти функции, так сказать, происходят одни из других. Если даны одна или несколько аналитических функций, то интегрирование или диференцирование, алгебраические действия умножения, деления, подстановки одной функции в другую и т. д. приводят к новым аналитическим функциям. Точно так же решение уравнений, левые части которых — аналитические функции, приводит к аналитическим функциям. Так как простейшие функции — многочлены, показательная и круговые функции — суть функции аналитические, то отсюда понятно, почему первые функции, которыми стали заниматься математики, должны были быть аналитическими. Важное значение этих функций уяснится еще более при изучении функций комплексного переменного и диференциальных уравнений. Однако, несмотря на основное значение аналитических функций, не должно забывать, что они составляют лишь очень частную группу среди всех непрерывных функций*.

---

* Пусть будет $f(x)$ непрерывная функция, допускающая в интервале (a,b) непрерывные производные всех порядков. Если эти производные удовлетворяют условию

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{Mn!}{\rho^n}, \tag{A}$$

где M и ρ — два положительных числа, не зависящих от x, то функция $f(x)$ аналитическая. В самом деле, пусть x_0 и x — две произвольные точки интервала (a, b); если разложить разность $f(x)-f(x_0)$ по степеням $x-x_0$, согласно формуле Тейлора (§ 18), то остаток R_m будет в силу условия (А) по абсолютной величине меньше, чем $M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{\rho^{n+1}}$, и следовательно, стремится к нулю при неограниченном возрастании n, если x заключен между $x_0-\rho$ и $x_0+\rho$.

Обратно, во II томе будет доказано, что условие (А) необходимо, чтобы функция была аналитической.

С. Н. Бернштейн недавно доказал (*Math. Ann.*, Bd. 75, 1914, S. 449) следующую замечательную теорему:

Если все производные неограниченно диференцируемой функции $\varphi(x)$ положительны в интервале (a, b), то функция является аналитической в этом интервале.

Предположим, что $a<b$; пусть x_0 и $x>x_0$ будут два любых значения в этом интервале. Так как все производные функции $\varphi(x)$ положительны, то сама функция и все ее производные возрастают. Поэтому мы получаем последовательно неравенства:

$$\varphi^{(n-1)}(x) > \varphi^{(n)}(x_0)(x-x_0), \quad \varphi^{(n-2)}(x) > \varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}, \ldots$$

$$\ldots, \varphi'(x) > \varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \varphi(x) > \varphi(x_0) + \varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!};$$

отсюда, обратно, получаем, полагая $x=b$:

$$\varphi^{(n)}(x_0) < \frac{Mn!}{(b-x_0)^n},$$

где M обозначает положительное число $\varphi(b)-\varphi(a)$. Отсюда следует, что, если написать, согласно первой формуле Тейлора, разложение $\varphi(x)$ по степеням

189. Аналитические кривые. В § 13 мы определили кривую как геометрическое место, описываемое точкой M, координаты которой суть непрерывные функции $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ параметра t, при изменении этого параметра. Если $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ суть аналитические функции t, т. е. если эти функции в окрестности любого значения t_0 переменного t, заключенного в каком-либо интервале (a, b), разложимы по формуле Тейлора по степеням $t-t_0$, то соответствующая дуга кривой называется *дугой аналитической кривой*. Все наиболее употребительные кривые, встречающиеся в приложениях, суть аналитические кривые или составлены из *конечного* числа дуг аналитических кривых, соединенных своими концами.

Пусть будут x_0, y_0, z_0 координаты точки M_0, принадлежащей какой-либо аналитической кривой, а x, y, z — координаты другой точки M той же кривой, близкой к M_0. Точка M_0 называется *обыкновенной точкой*, если две из трех разностей $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ могут быть разложены в целые ряды, расположенные по степеням третьей, причем оба эти ряда сходятся, если абсолютные величины этих разностей остаются меньше некоторой границы $h>0$. В противном случае точка M_0 называется *особой точкой*. Дуга аналитической кривой, не имеющая особых точек, называется *правильной*.

Из самого определения аналитических кривых следует, что координаты x, y, z точки M, близкой к точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, представляются целыми рядами:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1(t-t_0) + \ldots + a_n(t-t_0)^n + \ldots, \\ y &= y_0 + b_1(t-t_0) + \ldots + b_n(t-t_0)^n + \ldots, \\ z &= z_0 + c_1(t-t_0) + \ldots + c_n(t-t_0)^n + \ldots, \end{aligned} \tag{59}$$

причем эти три ряда сходятся, если только $|t-t_0|$ меньше некоторого положительного числа r.

Для того чтобы точка M_0 была обыкновенной, *достаточно, чтобы один из трех коэфициентов a_1, b_1, c_1 формул* (59) *не был нулем*. Если, например, a_1 не равен нулю, то из первого из уравнений (59) мы найдем разложение $t-t_0$ по степеням $x-x_0$ (§ 184) и, подставляя это значение $t-t_0$ в остальные две формулы, мы получим разложения $y-y_0$, $z-z_0$ по целым степеням $x-x_0$. Обратно, в окрестности обыкновенной точки M_0 уравнения, определяющие аналитическую кривую, могут быть представлены в форме (59), где по крайней мере один из коэфициентов a_1, b_1, c_1 не равен нулю. В самом деле, если, например, $y-y_0$, $z-z_0$ равны целым рядам по степеням $x-x_0$, то достаточно положить $x-x_0=t$, чтобы притти к формуле вида (59), где мы бу-

---

$x-x_0=h$, то абсолютная величина остатка R_{n+1} окажется меньше, чем

$$\frac{M|h|^{n+1}}{(b-x_0-\theta h)^{n+1}},$$

и этот остаток равномерно стремится к нулю, если только

$$|h| < \frac{b-x_0}{2}.$$

дем иметь $a_1 = 1$. Из этого замечания следует, что определение обыкновенной точки не зависит от выбора осей координат. В самом деле, рассматривая кривую Г, получаемую из кривой C гомографическим преобразованием, определяемым формулами

$$X = lx + my + nz + p'',$$
$$Y = l'x + m'y + n'z + p',$$
$$Z = l''x + m''y + n''z + p'',$$

определитель коих не равен нулю, мы имеем:

$$\frac{dX}{dt} = l\frac{dx}{dt} + m\frac{dy}{dt} + n\frac{dz}{dt}, \quad \frac{dY}{dt} = l'\frac{dx}{dt} + \ldots, \quad \frac{dZ}{dt} = l''\frac{dx}{dt} + \ldots,$$

и производные $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ не могут обращаться в нуль одновременно при значении t_0 переменного t, если все три производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ не равны также нулю при этом значении t*.

Если все три коэфициента a_1, b_1, c_1 равны одновременно нулю, то точка M_0 есть, *вообще*, особая точка. Возьмем, например, плоскую кривую, определяемую уравнениями $x = t^2$, $y = t^3$. При $t = 0$ мы имеем $a_1 = b_1 = 0$. Начало координат есть в данном случае особая точка, так как из предыдущих уравнений мы находим $x = y^{\frac{2}{3}}$, и, обратно, $y = x^{\frac{3}{2}}$, и каждая из координат есть дробная степень другой координаты,

Возьмем, наоборот, плоскую кривую, определяемую уравнениями $x = t^2$, $y = t^4$. При $t = 0$ мы имеем попрежнему $a_1 = b_1 = 0$, и, однако, начало координат не есть уже особая точка, так как мы имеем $y = x^2$. Нетрудно заметить, что в этом последнем примере точке кривой соответствуют два различных значения ($\pm t$) параметра.

Пусть будут x_0, y_0 координаты точки M_0 плоской кривой C, представляемой уравнением $F(x, y) = 0$, левая часть которого может быть разложена в целый ряд, расположенный по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$. Если обе частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ не равны одновременно нулю при $x = x_0$, $y = y_0$, то M_0 есть обыкновенная точка. В самом деле, если, например, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$ не равна нулю, то из уравнения $F = 0$ мы находим разложение $y - y_0$ по степеням $x - x_0$ (§ 184).

Точно так же пусть будут x_0, y_0, z_0 координаты точки M_0 пространственной кривой Г, представляемой системой уравнений:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0, \tag{60}$$

---

* Нетрудно видеть, что это свойство распространяется на всякое обратимое преобразование, определяемое аналитическими формулами.

левые части которых суть целые ряды относительно $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. Эта точка M_0 есть обыкновенная точка, если функциональные определители

$$\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(y, z)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(z, x)}$$

не обращаются одновременно в нуль при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Если, например, определитель $\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}$ не равен нулю в точке M_0, то из уравнений (60) можно найти разложения разностей $x-x_0$ и $y-y_0$ в целые ряды, расположенные по степеням $z-z_0$ (§ 185).

Изложенное аналогично тому, что мы имели в § 37 и 43, но полученные здесь результаты являются более точными, так как мы показываем, что неявные функции, о которых идет речь, суть *аналитические* функции независимого переменного.

Примечание I. Рассмотрим, в частности, плоскую кривую C, для чего мы последнее из уравнений (59) заменяем уравнением $z=0$. Чтобы иметь представление о виде кривой вблизи точки M_0, достаточно заметить, что, при бесконечно малых значениях разности $t-t_0$, $x-x_0$ и $y-y_0$ имеют, соответственно, знаки первых членов $a_m(t-t_0)^m$ и $b_n(t-t_0)^n$ правых частей.

Допустим, что $m \leqslant n$. Если *m нечетно* (что всегда имеет место для обыкновенной точки), то кривая имеет обычный вид или представляет точку перегиба. Если *m четно*, то кривая имеет точку возврата первого или второго рода.

Примечание II. Пусть M_0 — обыкновенная точка плоской аналитической кривой C; предположим, например, что $y-y_0$ разложено по степеням $x-x_0$:

$$y-y_0=c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots$$

Если касательная не параллельна оси Ox, то коэфициент c_1 не равен нулю, и мы можем, обратно, вывести из предыдущего соотношения разложение $x-x_0$ по степеням $y-y_0$. Но это уже не будет так, если касательная в точке M_0 параллельна Ox. В этом случае $c_1=0$, и разложение $y-y_0$ по степеням $x-x_0$ начинается с члена степени выше первой; мы уже не можем применить общую теорему § 184. Из исследования, которое будет приведено в дальнейшем (т. II) вытекает, что $x-x_0$ в этом случае может быть разложена по *дробным* степеням $y-y_0$.

190. Двойные точки. Займемся опять исследованием плоской аналитической кривой C вблизи двойной точки. Если мы возьмем эту точку за начало координат, то уравнение кривой будет иметь вид:

$$ax^2+2bxy+cy^2+\varphi_3(x, y)+\ldots=0, \tag{61}$$

где коэфициенты a, b, c не равны нулю одновременно, а ненаписанные члены образуют целый ряд относительно x и y, сходящийся в окрестности точки $x=y=0$. Допустим, далее, что оси координат выбраны так, что c не равно нулю. На основании замечания, сделанного выше (§ 42, сноска), уравнение (61) не может иметь более двух *действительных* корней, стремящихся к нулю вместе с x; в дальнейшем мы покажем, что оно всегда имеет два корня и только два, действительных или мнимых, которые стремятся к нулю вместе с x. Мы легко можем найти выражения этих двух корней, когда b^2-ac не равно нулю.

1. Пусть $b^2-ac>0$. Деля предыдущее уравнение на c, мы можем переписать его следующим образом:

$$F(x, y)=(y-\alpha x)(y-\beta x)+\varphi_3(x, y)+\ldots=0, \tag{62}$$

где α и β суть два *различных* действительных числа. Полагая

$$y = x(\alpha + u),$$

мы можем расположить $F[x, x(\alpha+u)]$ по степеням x и u (§ 177); разделив на x^2, мы получаем уравнение:

$$u(u + \alpha - \beta) + \ldots = 0, \tag{63}$$

все ненаписанные члены которого равны нулю при $x = 0$. В силу общей теоремы (§ 184) это уравнение имеет корень u_1, обращающийся в нуль вместе с x и разложимый по степеням x:

$$u_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

Уравнение (62) также имеет, следовательно, корень y_1:

$$y_1 = \alpha x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \ldots, \tag{64}$$

и таким же образом можно было бы убедиться в том, что это уравнение имеет второй корень

$$y_2 = \beta x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \ldots \tag{65}$$

Следовательно, через начало координат проходят две ветви кривой, и для каждой из них, взятой в отдельности, начало координат является обыкновенной точкой.

Повторяя рассуждения, приведенные в конце § 184, мы легко убеждаемся в том, что $F(x, y)$ может быть представлена в виде произведения трех множителей:

$$F(x, y) = (y - y_1)(y - y_2)(1 + c_1 x + c_2 y + \ldots); \tag{66}$$

это разложение выявляет оба корня y_1 и y_2 уравнения (62) и, сверх того, показывает, что это уравнение не имеет другого корня, стремящегося к нулю одновременно с x.

2. Пусть $b^2 - ac < 0$. Мы знаем, что начало координат есть изолированная двойная точка. Однако вычисления, которые только что были нами намечены, могли бы быть применены и в этом случае, и мы пришли бы к двум сходящимся рядам (64) и (65), формально удовлетворяющим уравнению (62), но с мнимыми коэфициентами. Следовательно, уравнение (62) имеет в этом случае два мнимых сопряженных корня, которые бесконечно малы вместе с x.

Предыдущий метод легко применяется также и к исследованию аналитической кривой вблизи кратной точки произвольного порядка *p с различными касательными*.

3. Пусть $b^2 - ac = 0$. Если за ось x взята касательная в двойной точке, то уравнение имеет вид:

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3 + \ldots \tag{67}$$

Пусть будут $u + \sqrt{v}$ и $u - \sqrt{v}$ два бесконечно малых корня. Если мы заменим y через $u + \sqrt{v}$, то уравнение примет вид:

$$u^2 + 2u\sqrt{v} + v = Ax^3 + Bx^2(u + \sqrt{v}) + Cx(u + \sqrt{v})^2 + D(u + \sqrt{v})^3 + \ldots$$

Приравнивая нулю ряд, образованный членами, рациональными относительно v, и коэфициент при $\sqrt{v}$, мы получаем для определения u и v следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} v &= -u^2 + Ax^3 + Bx^2u + Cxu^2 + Cxv + Du^3 + 3Duv + \ldots, \\ 2u - Dv &= Bx^2 + 2Cxu + 3Du^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

К этой системе можно применить общую теорему § 185, и мы найдем, таким образом, разложения u и v в ряды:

$$\left.\begin{aligned} v &= Ax^3 + \ldots, \\ u &= \frac{B}{2}x^2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

начинающиеся с членов по меньшей мере третьего и второго порядка соответственно. В общем случае пусть будут

$$u = ax^p + \ldots, \quad v = bx^q + \ldots \quad (ab \neq 0, \quad p \geqslant 2, \quad q \geqslant 3)$$

ряды, которые мы, таким образом, получаем. Уравнение (67) имеет два бесконечно малых корня:

$$y = ax^p + \ldots \pm \sqrt{bx^q + \ldots}$$

Вид кривой зависит, прежде всего, от того, является ли q четным или нечетным.

Первый случай. Пусть $q = 2r + 1$ $(r \geqslant 1)$. Допустим, кроме того, что $b > 0$: при значениях x, близких к нулю, ряд, стоящий под радикалом, имеет тот же знак, что и bx^q. Чтобы y было действительно, следует предположить $x > 0$, и оба значения y представляются разложением в ряд, расположенный по степеням $\sqrt{x}$. Если $r + \frac{1}{2} < p$, то членом низшей степени окажется тот, который содержит $x^{r+\frac{1}{2}}$, и мы имеем точку возврата первого рода. Если $r + \frac{1}{2} > p$, то мы имеем точку возврата второго рода.

Второй случай. Пусть $q = 2r$ $(r > 1)$. Значения y будут действительны при бесконечно малых значениях x лишь в том случае, если b положительно. Если это имеет место, то мы имеем две ветви кривой, касающиеся в начале координат оси Ox, и начало координат для каждой из них является обыкновенной точкой, так как мы можем написать эти два корня следующим образом:

$$y = ax^p + \ldots \pm x^r\sqrt{b + b_1x + \ldots}.$$

Если b отрицательно, то начало координат есть изолированная двойная точка.

191. Аналитические поверхности. Часть поверхности S называется *аналитическою*, если вблизи каждой точки M_0 этой части поверхности координаты x, y, z переменной точки M могут быть разложены в целые двойные ряды, расположенные по степеням параметров $t - t_0$, $u - u_0$:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= a_{10}(t - t_0) + a_{01}(u - u_0) + \ldots, \\ y - y_0 &= b_{10}(t - t_0) + b_{01}(u - u_0) + \ldots, \\ z - z_0 &= c_{10}(t - t_0) + c_{01}(u - u_0) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

сходящиеся, если абсолютные величины разностей $t - t_0$, $u - u_0$ не превосходят некоторых пределов. Точка M_0 поверхности S называется *обыкновенною точкою*, если вблизи этой точки одна из трех разностей $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ может быть разложена в двойной целый ряд, расположенный по степеням двух других разностей. Всякая точка M_0, для которой три определителя

$$\frac{D(y, z)}{D(t, u)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(t, u)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(t, u)}$$

не равны одновременно нулю, есть обыкновенная точка поверхности. Например, если первый определитель не равен нулю, то из двух последних уравнений (70) мы получим разложения $t - t_0$, $u - u_0$ по степеням $y - y_0$, $z - z_0$ и, вставляя эти разложения в первое уравнение, получим разложение $x - x_0$ по степеням $y - y_0$ и $z - z_0$.

Предположим, что поверхность S дана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$; пусть будут x_0, y_0, z_0, координаты какой-нибудь точки M_0 этой поверхности. Если функцию $F(x, y, z)$ можно разложить в тройной целый ряд по степеням $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, и если при этом три частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ не равны одновременно нулю, то из общей теоремы (§ 184) следует, что точка M_0 есть обыкновенная точка.

Примечание. Данное выше определение обыкновенной точки кривой и поверхности не зависит от выбора осей координат. Предположим, например, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть обыкновенная точка поверхности S. Тогда координаты соседней точки выразятся формулами вида (70), причем три определителя $\frac{D(y, z)}{D(t, u)}$, $\frac{D(z, x)}{D(t, u)}$, $\frac{D(x, y)}{D(t, u)}$ при $t = t_0$, $u = u_0$ не равны одновременно нулю. Преобразование координат заменяет переменные x, y, z тремя новыми переменными X, Y, Z, представляющими линейные функции старых:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3, \end{aligned}$$

причем определитель $\Delta = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ отличен от нуля. Заменяя x, y, z их разложениями (70), мы получим для X, Y, Z три новых разложения прежнего вида, причем при $t = t_0$, $u = u_0$ не может быть одновременно

$$\frac{D(X, Y)}{D(t, u)} = \frac{D(Y, Z)}{D(t, u)} = \frac{D(Z, X)}{D(t, u)} = 0.$$

В самом деле, из формул преобразования мы найдем:

$$\begin{aligned} x &= A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1, \\ y &= A_2 X + B_2 Y + C_2 Z + D_2, \\ z &= A_3 X + B_3 Y + C_3 Z + D_3, \end{aligned}$$

и легко видеть, что три приведенных выше функциональных определителя от X, Y, Z могут одновременно равняться нулю только в том случае, если равны нулю три определителя от переменных x, y, z.

V. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ. РЯДЫ ПОЛИНОМОВ.

192. Ряды Фурье. Мы займемся здесь рядами совершенно иного характера, чем ряды, изученные нами выше. В первый раз тригонометрические ряды, повидимому, рассматривались Даниилом Бернулли (Daniel Bernoulli) в задаче о колебании струн. Тот способ определения коэфициентов, который мы здесь изложим, принадлежит Эйлеру.

Пусть будет $f(x)$ функция переменного x, ограниченная и интегрируемая в промежутке (a, b). Мы предположим сначала, что a и b соответственно равны $-\pi$ и $+\pi$; этого всегда можно достигнуть, взяв новое переменное x', связанное с x соотношением:

$$x' = \frac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a}.$$

Предположим, что при всех значениях x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$, мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots \\ \ldots + (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \ldots, \end{aligned} \tag{71}$$

где $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m, \ldots$ — неизвестные постоянные коэфициенты. Эти коэфициенты можно определить следующим простым приемом. Напомним сначала следующие очевидные формулы, в которых предполагается, что m и n — целые положительные числа:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\, dx = 0;\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, dx = 0, \quad \text{если } m \neq 0;\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2}\, dx = 0,\\
&\qquad \text{если } m \neq n;\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}\, dx = \pi, \quad \text{если } m \neq 0;\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2}\, dx = 0,\\
&\qquad \text{если } m \neq n;\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2}\, dx = \pi, \quad \text{если } m \neq 0;\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}\, dx = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Проинтегрируем обе части равенства (71) между пределами $-\pi$ и $+\pi$, причем в правой части произведем интегрирование почленно; мы получим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi a_0;$$

отсюда найдем значение a_0. Умножим теперь обе части соотношения (71) на $\cos mx$ или $\sin mx$ и проинтегрируем между пределами $-\pi$ и $+\pi$. Единственным членом в правой части, интеграл которого между пределами $-\pi$ и $+\pi$ не будет равен нулю, будет член с $\cos^2 mx$ или $\sin^2 mx$; таким образом мы получим следующие формулы:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin mx\,dx = \pi b_m.$$

Следовательно, значения всех коэфициентов определятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha, \\ b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Приведенное здесь вычисление представляет не более как наведение. *Рядом Фурье* называют всякий тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_m\cos mx + b_m\sin mx + \ldots,$$

коэфициенты которого получены по формулам (73) из какой-нибудь интегрируемой функции $f(x)$. Каждой функции $f(x)$, интегрируемой в промежутке $(-\pi, +\pi)$, соответствует некоторый ряд Фурье, но никоим образом не очевидно, что этот ряд Фурье сходится, и что сумма его равна $f(x)$, совершенно так же, как не является очевидной сходимость к данной неограниченно диференцируемой функции составленного для нее ряда Тейлора (§ 170). Мы даже можем утверждать, что ряд Фурье не всегда представляет ту функцию, для которой он построен. В самом деле, пусть будут $f_1(x)$ и $f_2(x)$ две функции, отличающиеся между собой лишь для *конечного* числа значений x между $-\pi$ и $+\pi$; ряд Фурье для обеих функций будет один и тот же (§ 71). Следовательно, по крайней мере одна из этих функций не представляется своим рядом Фурье для всех значений x. Но из самого вида выражений (73) для коэфициентов следует, что если две функции $f(x)$, $\varphi(x)$ представляются своими рядами Фурье, то тем же свойством обладает функция $Af(x) + B\varphi(x)$ при любых постоянных A и B.

Мы дадим систему *достаточных* условий для того, чтобы функция $f(x)$ была разложима в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, +\pi)$. Эти условия, которые мы для краткости будем называть *условиями Дирихле*, таковы:

1. Рассматриваемый интервал ($-\pi$ и $+\pi$) можно разбить на конечное число частичных интервалов, в каждом из которых функция монотонна.

2. Все точки разрыва функции являются *правильными*. Заменив коэфициенты a_i, b_i их значениями (73) и сделав приведения, мы найдем для суммы $2m+1$ первых членов ряда Фурье выражение:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\ldots+\cos m(\alpha-x)\right]d\alpha.$$

Но по известной тригонометрической формуле имеем:

$$\frac{1}{2}+\cos a+\cos 2a+\ldots+\cos ma=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}a}{2\sin\frac{a}{2}},$$

и следовательно,

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}d\alpha,$$

или, полагая $\alpha=x+2y$:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy. \tag{74}$$

193. Исследование интеграла $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$. Выражение, которое мы получили для суммы S_{2m+1}, приводит к разысканию предела определенного интеграла $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ при неограниченном возрастании n.

Первое вполне строгое исследование этого вопроса принадлежит Дирихле (Lejeune-Dirichlet)*; оно основывается на некоторых, уже установленных нами, предложениях, которые мы здесь напомним.

Определенный интеграл

$$\int_0^h\frac{\sin x}{x}dx,$$

* *Crelle's Journal*, т. IV, 1829.

где h — положительное число, положителен и не превосходит интеграла

$$A=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$$

(§ 88); предел его при неограниченном возрастании h равен $\frac{\pi}{2}$ (§ 96).

Определенный интеграл

$$\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

где $h>0$, а n — целое положительное число, по подстановке $nx=y$ принимает вид:

$$\int_0^{nh} \frac{\sin y}{y}\,dy;$$

следовательно, он положителен и не превосходит A, каковы бы ни были n и h, и имеет пределом $\frac{\pi}{2}$, когда n неограниченно возрастает. Отсюда следует, что определенный интеграл

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

где a и b — два произвольных *положительных* числа, стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, так как он равен разности двух интегралов

$$\int_0^b \frac{\sin nx}{x}\,dx, \quad \int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

которые оба стремятся к $\frac{\pi}{2}$. Можно, впрочем, показать это и непосредственно, применяя вторую теорему о среднем; если $a<b$, то функция $\frac{1}{x}$ положительна и убывает между a и b, и мы имеем:

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx=\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin nx\,dx=\frac{1}{a}\,\frac{\cos na-\cos n\xi}{n}.$$

Следовательно, абсолютная величина этого интеграла меньше чем $\frac{2}{na}$, откуда мы заключаем, что он *равномерно* стремится к нулю для всякого значения b, превосходящего a.

Рассмотрим теперь определенный интеграл

$$J=\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx,$$

где $h>0$, а $\varphi(x)$ — функция, положительная и убывающая в интервале $(0, h)$. Тот же интеграл, взятый между произвольными *положительными* пределами в том же интервале, стремится к нулю. В самом деле, предположим, что $a<b$; на основании второй теоремы о среднем мы имеем:

$$\int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\varphi(a)\int_a^\xi \frac{\sin nx}{x}dx,$$

и, следовательно, абсолютная величина интеграла меньше $\frac{2\varphi(a)}{na}$. Но эти вычисления ничего не говорят нам о пределе самого интеграла J.

Чтобы найти этот предел, обозначим через c весьма малое положительное число; мы можем написать:

$$J=\int_0^c \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx+\int_c^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

Второй интеграл, как мы только что видели, при неограниченном возрастании n стремится к нулю. Что же касается первого, то, если число c достаточно мало, функция $\varphi(x)$ весьма мало отличается от $\varphi(+0)$ в интервале $(0, c)$, и представляется довольно вероятным, что этот интеграл должен иметь тот же предел, что и интеграл

$$\int_0^c \varphi(+0)\frac{\sin nx}{x}dx,$$

т. е. $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$. Чтобы доказать это, напишем разность $J-\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$ следующим образом:

$$J-\frac{\pi}{2}\varphi(+0)=\varphi(+0)\left(\int_0^c \frac{\sin nx}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\int_0^c [\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin nx}{x}dx+\int_c^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

Так как функция $\varphi(x)-\varphi(+0)$ убывает в интервале $(0, c)$, то мы напишем второй интеграл так:

$$\int_0^c [\varphi(c)-\varphi(+0)]\frac{\sin nx}{x}dx+\int_0^c [\varphi(x)-\varphi(c)]\frac{\sin nx}{x}dx;$$

так как функция $\varphi(x)-\varphi(c)$ положительна и убывает, то к последнему интегралу можно применить вторую теорему о среднем, и мы окончательно находим:

$$\left|\int_0^c [\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| < 2A[\varphi(+0)-\varphi(c)].$$

Точно так же мы имеем:

$$\left|\int_c^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| < \frac{2\varphi(c)}{nc}.$$

Пусть теперь ε — произвольное положительное число. Так как $\varphi(x)$ имеет пределом $\varphi(+0)$, когда x стремится к нулю, то мы можем взять положительное число c достаточно малым, чтобы имело место неравенство:

$$2A[\varphi(+0)-\varphi(c)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выбрав указанным образом число c, выберем, далее, целое число N так, чтобы $\dfrac{2\varphi(c)}{Nc}$ было меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$ и чтобы, сверх того, при всяком значении $n \geqslant N$ имело место неравенство:

$$\varphi(+0)\left|\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для всех этих значений n мы, таким образом, подавно будем иметь:

$$\left|J-\frac{\pi}{2}\varphi(+0)\right| < \varepsilon,$$

и, следовательно, мы в самом деле имеем:

$$\lim_{n=\infty} J = \frac{\pi}{2}\varphi(+0). \tag{75}$$

При доказательстве предыдущей теоремы мы подчинили функцию $\varphi(x)$ некоторым ограничениям, от которых мы можем теперь освободиться. Если $\varphi(x)$ убывает, не будучи постоянно положительной, от 0 до h, то мы всегда можем прибавить к ней такое положительное постоянное C, чтобы сумма $\psi(x)=\varphi(x)+C$ была от 0 до h положительной и убывающей. Доказанная теорема применима к этой функции $\psi(x)$, и мы можем написать:

$$\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^h \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx - C\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx;$$

правая часть этого равенства имеет пределом $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)-\frac{\pi}{2}C$, т. е. $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$. Если функция $\varphi(x)$ возрастает в промежутке от 0 к h, то $-\varphi(x)$ убывает, и мы имеем:

$$\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx=-\int_0^h -\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx;$$

интеграл имеет пределом $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

Таким же образом мы могли бы доказать, что интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

где a и b — два произвольных положительных числа, а $\varphi(x)$ — функция, монотонная в интервале (a, b), стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Предположим, наконец, что функция $\varphi(x)$ ограничена и что интервал $(0, h)$ можно разбить на конечное число интервалов $(0, a)$, (a, b), (b, c), ..., (l, h), в каждом из которых функция $\varphi(x)$ монотонна. Интеграл от 0 до a имеет пределом $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$, а все остальные, как, например,

$$\int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

имеют пределом нуль. Формула (75) применима, следовательно, и к этой функции.

Интеграл

$$I=\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx, \tag{76}$$

где h есть положительное число, *меньшее* π, может быть написан так:

$$I=\int_0^h f(x)\frac{x}{\sin x}\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Если функция $f(x)$ положительна и возрастает от 0 к h, то это имеет место и в отношении функции $\varphi(x)=f(x)\frac{x}{\sin x}$, а следовательно, мы имеем:

$$\lim_{n=\infty} I=\frac{\pi}{2}\varphi(+0)=\frac{\pi}{2}f(+0). \tag{77}$$

Посредством рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые только что проведены, мы можем последовательно доказать:

1) что формула (77) применима ко всякой функции, монотонной в интервале $(0, h)$;

2) что интеграл
$$\int_a^b f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx,$$

где a и b — два положительных числа, меньших π, а $f(x)$ — функция, монотонная в интервале (a, b), стремится к нулю;

3) наконец, что
$$\lim\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0)\qquad(0<h<\pi),\tag{78}$$

при условии, что интервал $(0, h)$ может быть разложен на конечное число частичных интервалов, в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

194. Функции, разложимые в ряд Фурье. Пусть будет $f(x)$ функция, ограниченная и интегрируемая в интервале $(-\pi, +\pi)$.

Выше мы нашли выражение S_{2m+1} суммы $2m+1$ первых членов соответствующего ряда Фурье [формула (74)]. Разложим этот интеграл на два других, имеющих пределами, соответственно, 0 и $\frac{\pi-x}{2}$, $-\frac{\pi+x}{2}$ и 0, и положим во втором интеграле $y=-z$; мы получим:
$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz.\tag{79}$$

Если x заключается между $-\pi$ и $+\pi$, то значения $\frac{\pi-x}{2}$, $\frac{\pi+x}{2}$ заключены между 0 и π, и мы можем применить теорему предыдущего параграфа, если только функция $f(x)$ удовлетворяет *первому* условию Дирихле, т. е. если интервал $(-\pi, +\pi)$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых функция монотонна. Тогда это условие будет выполнено и для функции $f(x+2y)$ переменного y в интервале $\left(0, \frac{\pi-x}{2}\right)$, и первый интеграл имеет пределом
$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}f(x+0)\right]=\frac{1}{2}f(x+0).$$

Точно так же второй интеграл имеет пределом $\frac{1}{2}f(x-0)$, а следовательно, S_{2m+1} имеет пределом $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Предположим, далее, что x равно одному из пределов, например, $-\pi$. Мы можем написать:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy.$$

Первый интеграл правой части имеет пределом $\frac{1}{2}f(-\pi+0)$; второй интеграл, по замене y через $\pi-z$, принимает вид:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz,$$

и имеет пределом $\frac{1}{2}f(\pi-0)$. Следовательно, сумма ряда Фурье при $x=-\pi$ равна $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$; ясно, что сумма будет та же и при $x=\pi$.

Таким образом, *если интервал* $(-\pi, +\pi)$ *можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых* $f(x)$ *монотонна, то соответствующий ряд Фурье сходится и имеет сумму* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, *когда* x *заключено между* $-\pi$ *и* $+\pi$, *и сумму* $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ *при* $x=\pm\pi$.

Допустим, кроме того, что $f(x)$ имеет лишь правильные точки разрыва; для каждого значения x, заключенного между $-\pi$ и $+\pi$, мы имеем:

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

и сумма ряда Фурье равна $f(x)$. Следовательно, *всякая функция* $f(x)$, *определенная в интервале* $(-\pi, +\pi)$ *и удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в этом интервале в ряд Фурье.* В этом выводе предполагается, однако, что

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2},$$

но это предположение не является логическим следствием того, которое было сделано относительно природы точек разрыва. В самом деле, если мы будем изображать x не отрезком, откладываемым на прямой, а дугою, откладываемою на окружности, радиус которой равен единице, то сумма ряда в какой-нибудь точке m окружности будет равна среднему арифметическому двух пределов, к которым стремятся суммы ряда в двух точках m', m'' окружности, взятых по обе стороны точки m, когда эти точки m', m'' неограниченно приближаются к точке m. Если предельные значения $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$ различны, то точка окружности, диаметрально противоположная началу отсчета дуг, есть точка разрыва, и значение функции в этой точке есть также среднее арифметическое обоих пределов $f(-\pi+0$, $f(\pi-0)$.

Вообще, пусть будет $f(x)$ функция, определенная в каком-нибудь промежутке $(a, a+2\pi)$, длина которого равна 2π, и удовлетворяющая в этом промежутке условиям Дирихле. Очевидно, что существует одна и только одна функция $F(x)$, имеющая период 2π и совпадающая с $f(x)$ в промежутке $(a, a+2\pi)$; при всяком значении x эта функция $F(x)$ представляется суммою тригонометрического ряда, коэфициенты которого a_m и b_m определяются формулами (73):

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos mx\,dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin mx\,dx.$$

Мы можем также написать выражения для коэфициента a_m в виде:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi} F(x)\cos mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{a} F(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi} F(x)\cos mx\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{a+2\pi} F(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} F(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos mx\,dx.$$

Точно так же мы нашли бы:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ определена в каком-нибудь промежутке, длина которого равна 2π, то предыдущие формулы позволяют вычислить коэфициенты разложения этой функции в ряд Фурье, не приводя пределов промежутка к $-\pi$ и $+\pi$.

195. Примеры. 1. Пусть требуется найти ряд Фурье, сумма которого была бы равна -1 при $-\pi < x < 0$ и $+1$ при $0 < x < \pi$. Из формул (73) имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos mx\,dx = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin mx\,dx = \frac{2-\cos m\pi-\cos(-m\pi)}{m\pi}.$$

Если m — число четное, то b_m равно нулю; если же m — нечетное, то b_m равно $\frac{4}{m\pi}$. Умножая все коэфициенты на $\frac{\pi}{4}$, мы получим ряд:

$$y = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} + \ldots \tag{80}$$

Если $-\pi < x < 0$, то сумма этого ряда равна $-\frac{\pi}{4}$, если же $0 < x < \pi$, то его сумма равна $\frac{\pi}{4}$. Точка $x = 0$ есть точка разрыва, и при $x = 0$ сумма ряда равна нулю, как это и должно быть. Вообще, сумма ряда (80) равна $\frac{\pi}{4}$, если $\sin x$ положительно; она равна $-\frac{\pi}{4}$, если $\sin x$ отрицательно, и равна нулю при $\sin x = 0$.

Кривая, представляемая уравнением (80), состоит из бесчисленного множества прямолинейных отрезков, длины которых равны π, лежащих на прямых $y = \pm\frac{\pi}{4}$, параллельных оси Ox, и из бесчисленного множества изолированных точек ($y = 0$, $x = k\pi$), лежащих на оси Ox.

2. Пусть требуется найти разложение переменного x в ряд Фурье в промежутке между 0 и 2π. Мы имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\,dx = 2\pi,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos mx\,dx = \left[\frac{x\sin mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{m\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin mx\,dx = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin mx\,dx = -\left[\frac{x\cos mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{m\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos mx\,dx = -\frac{2}{m}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \ldots \tag{81}$$

Формула (81) верна для всех значений x, заключающихся между 0 и 2π. Приравняв правую часть этой формулы переменному y, мы получим уравнение кривой, состоящей из бесчисленного множества отрезков прямых, параллельных прямой $y=\frac{x}{2}$, и из бесчисленного множества изолированных точек.

Примечания. 1. Если функция, определенная в промежутке $(-\pi, +\pi)$, четная, т. е. если $f(-x)=f(x)$, то все коэфициенты b_m равны нулю, так как, очевидно,

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\,dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Напротив, если функция $f(x)$ нечетная, т. е. если $f(-x)=-f(x)$, то все коэфициенты a_m равны нулю, включая сюда a_0. Если функция определена только в промежутке от 0 до π, то мы можем продолжить ее в промежутке от $-\pi$ до 0, положив:

$$f(-x)=f(x)$$

или

$$f(-x)=-f(x).$$

Таким образом в промежутке от 0 до π функция $f(x)$ может быть также представлена рядом одних синусов или одних косинусов.

2. Пусть будет $f(x)$ функция, разложимая в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, +\pi)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\ldots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\ldots, \tag{82}$$

где коэфициенты вычислены по формулам (73).

Заменяя в этом равенстве x на $-x$, имеем:

$$f(-x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x-b_1\sin x)+\ldots+(a_m\cos mx-b_m\sin mx)+\ldots \tag{83}$$

Из этих двух равенств мы заключаем, что два тригонометрических ряда:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\ldots+a_m\cos mx+\ldots,$$
$$b_1\sin x+\ldots+b_m\sin mx+\ldots$$

сходятся в промежутке $(-\pi, +\pi)$ и представляют, соответственно, функции

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$
$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2};$$

легко проверить, что это действительно ряды Фурье, относящиеся к соответствующим функциям.

196. Различные обобщения. Условия Дирихле *достаточны* для того, чтобы функция была разложима в ряд Фурье, но они отнюдь не являются необходимыми. Выводы § 193–194 позволяют заменить эти условия другими, более общими, условиями.

Пусть будет $f(x)$ — функция *с ограниченным изменением* в промежутке $(-\pi, +\pi)$; мы знаем, что она равна сумме двух монотонных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ в том же промежутке (§ 11). Пусть будут $S(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ ряды Фурье, выведенные для трех функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. На основании того, что мы видели выше, оба ряда $S_1(x)$, $S_2(x)$ сходятся в интервале $(-\pi, +\pi)$, и мы имеем для любой точки внутри этого интервала:

$$S_1(x)=\frac{f_1(x+0)+f_1(x-0)}{2}, \quad S_2(x)=\frac{f_2(x+0)+f_2(x-0)}{2};$$

с другой стороны, любой член ряда $S(x)$ равен сумме соответствующих членов рядов S_1 и S_2. Следовательно, ряд $S(x)$ также сходится и имеет суммой $S_1(x) + S_2(x)$, т. е.

$$\frac{f_1(x+0)+f_2(x+0)+f_1(x-0)+f_2(x-0)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Таким образом *всякой функции* $f(x)$ *с ограниченным изменением в интервале* $(-\pi, +\pi)$ *соответствует сходящийся ряд Фурье, сумма которого равна*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

при всяком значении x, *заключенном между* $-\pi$ и $+\pi$. Таким же образом мы убеждаемся в том, что при $x = \pm\pi$ сумма ряда равна

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}.$$

Если, сверх того, функция $f(x)$ имеет в этом интервале лишь правильные точки разрыва, то ряд Фурье имеет суммой $f(x)$ при всяком значении x, заключенном между $-\pi$ и $+\pi$.

Метод, примененный в § 192 для вычисления коэфициентов ряда Фурье, можно обобщить. Рассмотрим ряд функций, *ортогональных* в интервале (a, b):

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

т. е. таких, что

$$\int_a^b \varphi_m \varphi_n \, dx = 0,$$

каковы бы ни были индексы m и n, предполагаемые различными. Если мы предположим, что функция $f(x)$ в интервале (a, b) разложима в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(x) = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + \ldots + A_n\varphi_n + \ldots,$$

то постоянные коэфициенты A_i тотчас же определяются. В самом деле, помножим обе части предыдущего соотношения на φ_n и проинтегрируем затем между пределами a и b; мы будем иметь, принимая во внимание условия ортогональности:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = A_n \int_a^b \varphi_n^2\,dx,$$

откуда мы и найдем значение коэфициента A_n. В каждом частном случае нам остается еще исследовать, действительно ли полученный таким образом ряд сходится и имеет суммой $f(x)$.

Полиномы Лежандра (§ 86) образуют последовательность функций, ортогональных в интервале $(-1, +1)$. Чтобы иметь возможность вычислить коэфициенты разложения какой-либо функции по этим полиномам, мы должны еще знать численные значения интегралов

$$K_n = \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx.$$

Пусть будет a_n коэфициент при x^n в полиноме X_n; принимая во внимание соотношения (27) и (28) (§ 86), мы можем написать:

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \int_{-1}^{+1} a_n x^n X_n dx = \int_{-1}^{+1} a_n x^{n-1} \frac{(n+1)X_{n+1} + nX_{n-1}}{2n+1}\,dx =$$

$$= \frac{na^n}{2n+1}\int_{-1}^{+1} x^{n-1} X_{n-1} dx.$$

Но мы имеем также:

$$\int_{-1}^{+1} X_{n-1}^2 dx = a_{n-1}\int_{-1}^{+1} x^{n-1}X_{n-1}dx,$$

следовательно, отношение $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ равно $\frac{na_n}{(2n+1)a_{n-1}}$, т. е. $\frac{2n-1}{2n+1}$. Отсюда мы заключаем, что произведение $(2n+1)K_n$ не зависит от n. Для $n=0$ мы тотчас же находим $K_0 = 2$; коэфициент K_n равен, следовательно, $\frac{2}{2n+1}$.

197. Разложение непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса. Пусть будет $y = f(x)$ функция, непрерывная в промежутке (a, b). Вейерштрасс доказал следующее замечательное предложение. *Пусть будет* ε *произвольное заданное положительное число. Можно найти такой многочлен* $P(x)$, *чтобы при всех значениях* x *в промежутке* (a, b) *абсолютная величина разности* $f(x) - P(x)$ *была меньше* ε.

Из множества доказательств этой теоремы наиболее простое принадлежит Лебегу (Lebesgue) *. Рассмотрим сначала следующий частный случай. Пусть будет $\psi(x)$ функция, непрерывная в промежутке от -1 до $+1$ и определенная следующим образом: $\psi(x) = 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 0$, и $\psi(x) = 2kx$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, где k — данное постоянное число. Мы можем представить $\psi(x)$ в виде: $\psi(x) = k[x + |x|]$. С другой стороны, при всех значениях x, заключающихся между -1 и $+1$, мы имеем:

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}.$$

При этих значениях x радикал можно разложить в *равномерно сходящийся* ряд, расположенный по степеням $(1-x^2)$. Таким образом $|x|$, а следовательно и $\psi(x)$ могут быть представлены в этом промежутке многочленом с любою степенью приближения. Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$, непрерывную в промежутке (a, b). Разобьем этот промежуток на n частичных промежутков (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a_n), причем $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_{n-1} < a_n = b$, так, чтобы колебание функции $f(x)$ в каждом из них было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть будет L ломаная линия, состоящая из отрезков прямых, соединяющих между собою в последовательном порядке точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами $a_0, a_1, a_2, \ldots, b$. Ордината любой точки этой ломаной линии, очевидно, есть непрерывная функция $\varphi(x)$ абсциссы, и абсолютная величина разности $f(x) - \varphi(x)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. В самом деле, так как при $a_{\mu-1} < x < a_\mu$ функция $\varphi(x)$ содержится между $f(a_{\mu-1})$ и $f(a_\mu)$, то мы можем написать:

$$\varphi(x) = f(a_{\mu-1}) + \theta[f(a_\mu)] - f(a_{\mu-1})] = f(a_{\mu-1})(1-\theta) + f(a_\mu)\theta,$$

где θ — положительное число, меньшее единицы. Отсюда имеем:

$$f(x) - \varphi(x) = [f(x) - f(a_{\mu-1})](1-\theta) + [f(x) - f(a_\mu)]\,\theta.$$

* *Bulletin des Sciences mathématiques*, стр. 278, 1898.

Так как множитель θ положителен и меньше единицы, то абсолютная величина разности $f-\varphi$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta+\theta)=\frac{\varepsilon}{2}$. Мы можем представить функцию $\varphi(x)$ как сумму n функций, аналогичных вышеуказанной функции $\psi(x)$. В самом деле, пусть будут $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ вершины ломаной линии L, взятые в их последовательном порядке. Функция $\varphi(x)$ может быть представлена как сумма двух функций ψ_1 и φ_1; ψ_1 представляет в промежутке (a, b) ту прямую, на которой лежит сторона A_0A_1, а φ_1 представляет некоторую многоугольную линию $A_0'A_1'\ldots A_n'$, первая сторона которой $A_0'A_1'$ лежит на оси Ox, так как в промежутке (a_0, a_1) мы должны иметь $\varphi(x)=\psi_1(x)$. Фу кция $\varphi_1(x)$, в свою очередь, равна сумме двух непрерывных функций ψ_2 и φ_2; ψ_2 в промежутке между a и a_1 равна нулю, а в промежутке между a_1 и b представляет прямую, на которой лежит сторона $A_1'A_2'$, тогда как φ_2 представляет некоторую многоугольную линию $A_0''A_1''A_2''\ldots A_n''$, три вершины которой A_0'', A_1'', A_2'' лежат на оси Ox, и т. д. Таким образом мы можем представить $\varphi(x)$ как сумму n функций $\varphi(x)=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n$, где ψ_i есть непрерывная функция, равная нулю между a и a_{i-1} и представляемая отрезком некоторой прямой в промежутке между a_{i-1} и b. Сделав замену переменного $X=mx+n$ и выбирая соответствующим образом числа m и n, мы можем представить $\psi_i(x)$ в промежутке $(-1, +1)$ следующим равенством:

$$\psi_i(x)=k[X+|X|].$$

Это показывает, что $\psi_i(x)$ можно представить с любою степенью приближения многочленом. Так как каждую из функций ψ_i можно представить в промежутке (a, b) многочленом с приближением, меньшим $\frac{\varepsilon}{2n}$, то ясно, что сумма этих многочленов будет отличаться от функции $f(x)$ меньше чем на ε.

Из предыдущей теоремы следует, что *всякая функция, непрерывная в промежутке (a, b), может быть представлена в этом промежутке равномерно сходящимся рядом многочленов*. В самом деле, возьмем последовательность положительных убывающих чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, общий член которой ε_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю. На основании предыдущей теоремы, для каждого числа ε этой последовательности мы можем найти такой многочлен $P_i(x)$, чтобы абсолютная величина разности $f(x)-P_i(x)$ во всем промежутке (a, b) была меньше ε_i. Рассмотрим ряд:

$$P_1(x)+[P_2(x)-P_1(x)]+\ldots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\ldots$$

Если x заключается в промежутке (a, b), то этот ряд — сходящийся, и его сумма равна $f(x)$. В самом деле, ясно, что сумма S_n его n первых членов равна $P_n(x)$; следовательно, разность $f(x)-S_n$, абсолютная величина которой остается меньшей ε_n, при неограниченном возрастании n стремится к нулю. Кроме того, ряд будет *равномерно сходящимся*, так как, взяв n достаточно большим, можно сделать абсолютную величину разности $f(x)-S_n$ меньшей произвольно малого положительного числа при всяком значении x, заключающемся в промежутке (a, b).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Применить формулу Лагранжа к разложению по степеням x того корня уравнения $y^2=ay+x$, который обращается в a при $x=0$.

2. Решить ту же задачу для уравнения $y-a+xy^{m+1}=0$. Применить результат к квадратному уравнению $a-bx+cx^2=0$: разложить по степеням c корень, стремящийся к $\frac{a}{b}$, когда c стремится к нулю.

3. Вывести формулу:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4\ldots$$

4. Если x больше $-\frac{1}{2}$, то

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots$$

5. Если $|x|<1$, то

$$x=\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots$$

Чему равна сумма ряда, если $|x|>1$?

6. Вывести формулу:

$$(a+x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\left[1-\frac{nx}{a+x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\ldots\right].$$

7. Показать, что те значения $\sin mx$ и $\cos mx$, которые при $\sin x=0$ равны соответственно 0 и 1, разлагаются в ряды по степеням $\sin x$:

$$\sin mx=m\left[\sin x-\frac{m^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5 x-\ldots\right],$$

$$\cos mx=1-\frac{m^2}{1\cdot 2}\sin^2 x+\frac{m^2(m^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x-\ldots$$

[Можно воспользоваться диференциальным уравнением

$$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2}-y\frac{du}{dy}+m^2u=0,$$

которому удовлетворяют $\cos mx$ и $\sin mx$, рассматриваемые как функции от $y=\sin x$.]

8. Вывести из предыдущих формул разложения

$$\cos(n\arccos x),\quad \sin(n\arccos x).$$

9. Доказать следующие формулы:

$$\ln(x+2)=2\ln(x+1)-2\ln(x-1)+\ln(x-2)+$$
$$+2\left[\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5+\ldots\right]$$

[ряд Борда]

и

$$\ln(x+5)=\ln(x+4)+\ln(x+3)-2\ln x+\ln(x-3)+\ln(x-4)-\ln(x-5)-$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)+\ldots\right]$$

[ряд Аро (Haro)].

10. Функция $f(x)$, непрерывная в промежутке (a, b), для которой

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,dx=0$$

при $n=0, 1, 2, \ldots$, тождественно равна нулю.

Указание. Предполагают, что $f(x)$ разложена в равномерно сходящийся ряд многочленов, и отсюда выводят, что $\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ равен нулю [Мур (Moore)].

— 11. Непрерывная функция, отличная от нуля, не может иметь ряда Фурье, тождественно равного нулю.

Указание. Предположим, что $f(x) > m > 0$ в интервале (a, b), причем a и b заключены между 0 и 2π, и положим:

$$\psi = 1 + \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \cos\frac{a-b}{2}.$$

Доказываем, что интеграл $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\psi^n\,dx$ не может быть нулем для всякого n (см. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, стр. 37). Отсюда заключаем, что две различные непрерывные функции не могут иметь одного и того же ряда Фурье. Следовательно, если ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится равномерно, сумма этого ряда равна $f(x)$

12. Вычислить коэфициенты Фурье для непрерывной функции $f(x)$ с периодом 2π, представляемой ломаной линией. Из равномерной сходимости этого ряда вывести новое доказательство теоремы Вейерштрасса из § 197.

ГЛАВА X.

ТЕОРИЯ ОГИБАЮЩИХ. ПРИКОСНОВЕНИЕ.

В диференциальной геометрии обыкновенно рассматриваются только аналитические линии и поверхности. Но для существования тех геометрических элементов, к определению которых мы теперь переходим, нужно только, чтобы функции имели производные до некоторого конечного порядка. Так, плоская кривая, представляемая уравнением $y=f(x)$, имеет касательную, если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, имеет радиус кривизны, если $f'(x)$ в свою очередь имеет производную $f''(x)$, и т. д.

I. ОГИБАЮЩИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ.

193. Разыскание огибающих. Пусть дано уравнение плоской кривой C:

$$f(x, y, a)=0, \tag{1}$$

зависящее от переменного параметра a. При изменении этого параметра кривая C будет, вообще, непрерывно изменяться по виду и по положению. Если все кривые C касаются некоторой определенной кривой E, то эта кривая E называется *огибающею* кривых C; кривые C называются *огибаемыми* кривою E. Посмотрим, как по данным кривым C узнать, имеют ли эти кривые огибающую, и как найти эту огибающую.

Предположим, что огибающая существует. Пусть будут x, y координаты точки прикосновения M кривой E с огибаемою кривою C, соответствующею значению a параметра. Эти координаты x, y суть неизвестные функции параметра a, удовлетворяющие уравнению (1). Чтобы их найти, нам нужно выразить, что касательная к кривой, описываемой точкою M при изменении a, совпадает с касательною к кривой C. Обозначим через δx и δy количества, пропорциональные направляющим косинусам касательной к огибаемой кривой C, и через $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$ — производные от неизвестных функций $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$. Тогда должно быть:

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\delta x}=\frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}. \tag{2}$$

Так как кривая C представлена уравнением (1), в котором параметр a имеет постоянное значение, то для определения касательной к кривой C мы имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y=0. \tag{3}$$

С другой стороны, и неизвестные функции $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$ также должны удовлетворять уравнению:

$$f(x, y, a)=0,$$

но a обозначает здесь уже не постоянное, как ранее, а независимое переменное; поэтому мы будем также иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{4}$$

Условие (2) вместе с уравнениями (3) и (4) дает:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{5}$$

Уравнения (5) и (1) определяют неизвестные функции $x=\varphi(a)$, в $=\psi(a)$. *Следовательно, в тех случаях, когда огибающая существует, мы получим ее уравнение, исключив параметр a из уравнений*

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

Пусть будет $R(x, y)=0$ результат исключения параметра a из уравнений (1) и (5). Найдем, при каких условиях эта кривая представляет огибающую. Пусть будет C_0 одна из кривых семейства (1), соответствующая значению a_0 параметра; далее, пусть будут (x_0, y_0) координаты точки пересечения M_0 кривых

$$f(x, y, a_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_0}=0. \tag{6}$$

Уравнения (1) и (5) определяют две функции $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$, обращающиеся при $a=a_0$ соответственно в x_0, y_0. Сл ,овательно, при $a=a_0$ мы будем иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{uu}\right)_0+\frac{\partial f}{\partial y_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0=0.$$

Из этого соотношения и из соотношения (3) видно, что в точке (x_0, y_0) касательная к кривой C_0 совпадает с касательною к кривой $R(x, y)=0$, описанной точкою (x, y), если только не будет одновременно $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, т. е. если точка (x_0, y_0) не будет особою точкою кривой C_0. *Таким образом уравнение $R(x, y)=0$ представляет или огибающую кривых C, или же место особых точек этих кривых.*

Этот результат можно дополнить. Если каждая из кривых C имеет одну или несколько особых точек, то место этих особых точек необходимо входит как часть в кривую $R(x, y) = 0$. В самом деле, пусть будут (x, y) координаты одной из этих особых точек. Координаты (x, y) суть функции от a, удовлетворяющие одновременно трем уравнениям:

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

а следовательно, и уравнению $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Отсюда следует, что координаты (x, y) удовлетворяют уравнению $R = 0$, получающемуся от исключения параметра a из уравнений $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. В самом общем случае кривая $R(x, y) = 0$ состоит из двух аналитически различных частей, из которых одна есть собственно огибающая, тогда как другая представляет место особых точек кривых данного семейства.

Пример. Рассмотрим семейство кривых

$$f(x, y, a) = y^4 - y^2 + (x - a)^2 = 0.$$

Мы имеем $\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a)$, и, исключая a из уравнений $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, получим уравнение $y^4 - y^2 = 0$, представляющее три прямых $y = 0$, $y = +1$, $y = -1$. Легко видеть, что можно получить все кривые данного семейства из кривой $y^4 - y^2 + x^2 = 0$, заставляя ее перемещаться параллельно Ox. Но эта последняя кривая имеет двойную точку в начале координат и касается прямых $y = \pm 1$ в точках их пересечения с осью Oy. Следовательно, прямая $y = 0$ есть место двойных точек, тогда как прямые $y = \pm 1$ представляют огибающую в собственном смысле.

Если кривые C имеют огибающую E, то *каждая точка этой огибающей есть предельное положение точки пересечения двух кривых рассматриваемого семейства, соответствующих двум бесконечно близким значениям параметра*. В самом деле, пусть будут

$$f(x, y, a) = 0, \quad f(x, y, a + h) = 0 \tag{7}$$

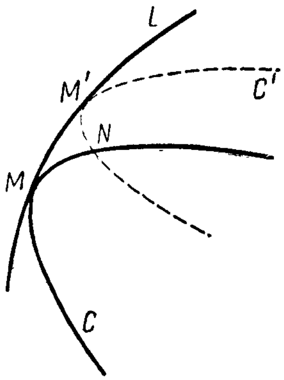
уравнения двух кривых семейства, близких между собою. Уравнения (7), определяющие точки пересечения этих кривых, очевидно, могут быть заменены системою двух равносильных уравнений:

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{f(x, y, a + h) - f(x, y, a)}{h} = 0. \tag{7'}$$

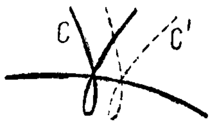
При приближении h к нулю, т. е. при неограниченном приближении второй кривой к первой, второе из этих уравнений обращается в $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, откуда видно, что в пределе эти точки пересечения обращаются в точки огибающей кривой *. Геометрически это свойство почти

* Доказательство представится в более строгом виде, если второе из уравнений (7') написать в форме: $f_a'(x, y, a + \theta h) = 0$. Если точка (x, y) стремится к предельной точке (x_1, y_1), когда h стремится к нулю и производная f_a' непрерывна, то координаты предельной точки удовлетворяют двум соотношениям $f(x_1, y_1, a) = 0$ и $(f_a'(x_1, y_1, a) = 0$.

очевидно. В самом деле, из черт. 32a видно, что точка пересечения N двух близких между собою кривых C, C' неограниченно приближается к точке прикосновения M, когда кривая C' стремится слиться с кривою C. Точно так же из черт. 32b видно, что если кривые (1) имеют двойные точки, то две точки пересечения двух близких между собою кривых C, C' стремятся слиться с этою двойною точкою, когда кривая C' неограниченно приближается к кривой C.



Черт. 32a.



Черт. 32b.

Из предыдущего замечания понятно, почему вместе с огибающею мы должны получить и место особых точек. Предположим, например, что $f(x, y, a)$ есть многочлен m-й степени по a. Для точки $M_0(x_0, y_0)$, взятой произвольно на плоскости, уравнение

$$f(x_0, y_0, a) = 0 \tag{8}$$

дает, вообще, m различных корней для a; следовательно, через точку M_0 проходит m различных кривых рассматриваемого семейства. Но если точка M_0 лежит на кривой $R(x, y) = 0$, то мы имеем одновременно:

$$f(x_0, y_0, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

и уравнение (8) имеет двойной корень относительно a. Таким образом мы видим, что кривая $R(x, y) = 0$ есть место тех точек плоскости, для которых сливаются между собою две из числа кривых семейства (1), проходящих через одну из этих точек. Но из черт. 32a и 32b видно, что приближается ли точка N неограниченно к огибающей или к кривой, представляющей место особых точек, — в обоих случаях две кривые семейства, проходящие через N, весьма близки одна к другой и в пределе стремятся слиться.

Примечание. Часто бывает нужно найти огибающую кривой

$$F(x, y, a, b) = 0, \tag{9}$$

уравнение которой содержит два переменных параметра a и b, связанных соотношением $\varphi(a, b) = 0$. Этот случай не отличается существенно от общего случая, так как мы можем рассматривать b как функцию от a, определяемую уравнением $\varphi = 0$. Согласно выведенному выше правилу, мы должны присоединить к уравнению (9) другое уравнение, которое получим, приравняв нулю производную по a от левой части уравнения (9):

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

Но из соотношения $\varphi(a, b) = 0$ имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

Исключая из двух последних уравнений $\frac{db}{da}$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0. \tag{10}$$

Таким образом мы получим уравнение огибающей, исключая a и b из уравнений $F=0$, $\varphi=0$ и из уравнения (10).

199. Огибающая прямой линии. Возьмем уравнение прямой D в нормальном виде:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-f(\alpha)=0, \tag{11}$$

причем переменным параметром служит угол α. Взяв производную по параметру α получим:

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha)=0. \tag{12}$$

Из уравнений (11) и (12) мы найдем координаты точки прикосновения подвижной прямой D с огибающею:

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha,\\ y&=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Легко убедиться, что касательная к кривой E, описываемой точкою (x, y), есть в самом деле прямая D; действительно, из уравнений (13) имеем:

$$\left.\begin{aligned} dx&=-[f(\alpha)+f''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha,\\ dy&=[f(\alpha)+f''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но $\operatorname{ctg}\alpha$ есть угловой коэфициент прямой D.

Обозначая через s длину дуги огибающей, мы получим из уравнений (14)

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm[f(\alpha)+f''(\alpha)]\,d\alpha,$$

, следовательно,

$$s=\pm\left[\int f(\alpha)\,d\alpha+f'(\alpha)\right].$$

Отсюда видно, что, взяв за $f(\alpha)$ производную от заранее известной функции мы получим спрямляемую кривую *.

Положим, например, $f(\alpha)=l\sin\alpha\cos\alpha$. Полагая в уравнении (11) последовательно $y=0$, $x=0$, получим (черт. 33): $OA=l\sin\alpha$, $OB=l\cos\alpha$, и, следовательно, $AB=l$. Мы видим, что искомая кривая есть огибающая прямолинейного отрезка постоянной длины l, концы которого скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Формулы (13) дают здесь:

$$x=l\sin^3\alpha,\quad y=l\cos^3\alpha,$$

---

* Все количества, входящие в формулу для s:

$$s=\pm\left[f'(\alpha)+\int f(\alpha)\,d\alpha\right],$$

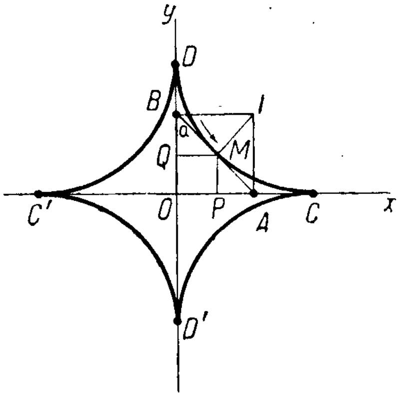
имеют геометрическое значение. Так, α есть угол между Ox и перпендикуляром ON, опущенным из начала координат на подвижную пряму , $f(\alpha)$ — расстояние ON от начала координат до этой прямой, $f'(\alpha)$ равно по абсолютной величине расстоянию MN от точки прикосновения M подвижной прямой с ее огибающею до основания N перпендикуляра, опущенного из начала координат на подвижную прямую. Эта формула спрямления называется иногда *формулою Лежандра.*

и уравнение огибающей будет:

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Это — уравнение гипоциклоиды с четырьмя точками возврата; она имеет вид, представленный на черт. 33. При изменении α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка прикосновения M описывает дугу DC. Длина этой дуги. считая от точки D, равна;

$$s = \int_0^\alpha 3l \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha = \frac{3l}{2} \sin^2\alpha.$$



Черт. 33.

Пусть будут I вершина прямоугольника, построенного на OA и OB, и M — основание перпендикуляра, опущенного из I на AB. Из треугольников AMI, AMP имеем:

$$AM = AI\cos\alpha = l\cos^2\alpha, \quad AP = AM\sin\alpha = l\cos^2\alpha \sin\alpha.$$

Следовательно $OP = OA - AP = l\sin^3\alpha$,
и точка M есть точка прикосновения прямой AB с огибающею. Отсюда получаем

$$BM = l - AM = l\sin^2\alpha;$$

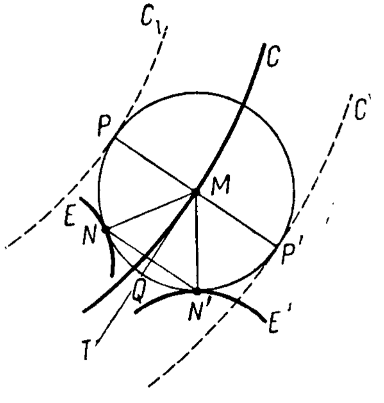
таким образом длина дуги $DM = \frac{3}{2} BM$.

200. Огибающая окружности. Пусть будет

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - \rho^2 = 0 \tag{15}$$

уравнение окружности, где a, b, ρ суть функции переменного параметра t. Мы знаем, что точки, в которых окружность (15) касается огибающей, суть точки пересечения этой окружности с прямою

$$(x-a)a' + (y-b)b' + \rho\rho' = 0. \tag{16}$$



Черт. 34.

Прямая (16) перпендикулярна к касательной к кривой, описываемой центром (a, b) окружности при изменении параметра t; расстояние этой прямой от центра равно $\rho\frac{d\rho}{ds}$, где s — длина дуги кривой C, отсчитываемая от какой-либо определенной точки этой кривой. Прямая (16) пересекает окружность в двух точках N, N', симметричных относительно касательной MT (черт. 34); следовательно, огибающая будет состоять из двух ветвей E, E', которые, вообще, не будут аналитически различными. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если ρ постоянно, то хорда прикосновения NN' обращается в нормаль PP' к кривой C, и огибающая состоит из двух параллельных кривых C_1, C'_1. Мы получим эти кривые, откладывая на нормали к кривой C по обе стороны от точки M постоянную длину ρ.

2. Если $\rho = s + C$, то $\rho \frac{d\rho}{ds} = \rho$, и хорда NN' обращается в касательную к окружности в точке Q. В этом случае обе ветви огибающей сливаются в одну кривую Г, и нормалями к этой огибающей Г служат касательные к кривой C. Кривая C называется в этом случае *разверткою (эволютою)* кривой Г; обратно, кривая Г называется *развертывающею (эвольвентою)* кривой C (см. § 225).

Если $d\rho > ds$, то прямая (16) не пересекает окружности, и огибающая будет мнимая.

Вторичные каустики. Предположим, что радиус переменной окружности пропорционален расстоянию центра этой окружности от некоторой постоянной точки O. Примем эту точку O за начало координат. Тогда уравнение окружности будет иметь вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2(a^2+b^2),$$

где k — постоянный множитель. Уравнение хорды прикосновения будет:

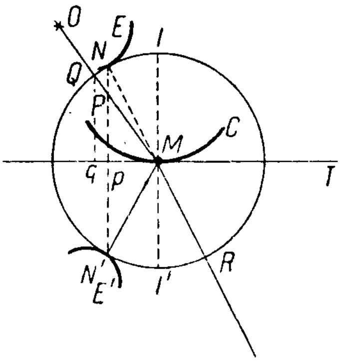
$$(x-a)a' + (y-b)b' + k^2(aa' + bb') = 0.$$

Пусть будут δ и δ' расстояния центра $M(a, b)$ окружности от хорды прикосновения NN' и от параллельной ей прямой, проведенной через начало координат (черт. 35). Из предыдущих уравнений имеем: $\delta = k^2\delta'$. Следовательно, мы получим хорду прикосновения, взяв на радиусе MO такую точку P, чтобы $MP = k^2MO$, и опустив из точки P перпендикуляр на касательную MT к месту центров C данного семейства окружностей. Предположим, что $k < 1$, и пусть будет E ветвь огибающей кривой, расположенная по одну сторону с точкою O относительно касательной к кривой C. Обозначим через i и r углы, образуемые прямыми MO и MN с нормалью MI. Мы будем иметь:

$$\sin i = \frac{Mq}{MQ}, \quad \sin r = \frac{Mp}{MN},$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{Mq}{Mp} = \frac{MQ}{MP} = \frac{1}{k}.$$

Предположим, что в O находится светящаяся точка, и что кривая C служит линиею раздела между средою, в которой находится точка O, и другою средою, показатель преломления которой относительно первой среды равен $\frac{1}{k}$. После преломления падающий луч OM обращается в преломленный луч MR, который, по закону преломления, будет лежать на продолжении прямой MN. Следовательно, все преломленные лучи MR будут нормальными к огибающей E, которая называется *вторичною каустикою через преломление.* Каустика в собственном смысле, или огибающая преломленных лучей, есть развертка вторичной каустики.



Черт. 35.

Вторая ветвь огибающей E' не имеет, разумеется, никакого физического значения; она соответствовала бы отрицательному показателю преломления. Если мы предположим $k = 1$, то огибающая E обратится в самую точку O, тогда как огибающая E' будет геометрическим местом точек, симметричных с точкою O относительно касательной к кривой C. Вместе с тем эта кривая будет также вторичною каустикою *через отражение* для световых лучей, выходящих из точки O и отраженных от кривой C. Таким же образом можно доказать, что если из каждой точки кривой C мы опишем окружность радиусом, пропорциональным расстоянию этой точки от некоторой неподвижной прямой, то огибающею этих окружностей будут вторичные каустики для световых лучей, выходящих из бесконечно удаленной светящейся точки.

201. Поверхности с одним параметром. Пусть будет

$$f(x, y, z, a) = 0 \tag{17}$$

уравнение поверхности S, зависящей от произвольного параметра a. Если существует некоторая поверхность E, касающаяся каждой из поверхностей S вдоль некоторой кривой C, то эта поверхность E называется *огибающей* поверхностей S, а линия прикосновения C поверхностей S и E — *характеристикою.*

Таким образом, чтобы узнать, имеют ли данные поверхности S огибающую, нужно исследовать, можно ли определить на каждой из поверхностей S такую кривую C, чтобы место всех этих кривых, соответствующих различным значениям параметра, касалось каждой поверхности S вдоль соответствующей кривой C. Пусть будут x, y, z координаты какой-нибудь точки M характеристики. Если эта точка не есть особая точка поверхности S, то уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке M будет:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

С другой стороны, вдоль огибающей поверхности E количества x, y, z, a будут функциями двух независимых переменных, удовлетворяющих уравнению (17), и между их диференциалами будет иметь место соотношение:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0. \tag{17'}$$

Чтобы касательная плоскость к поверхности E была тождественна с касательною плоскостью к поверхности S, необходимо и достаточно, чтобы между диференциалами dx, dy, dz существовало соотношение:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Сравнивая это условие с (17'), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0. \tag{18}$$

Такими же приемами, как и в случае плоских кривых (§ 198), можно доказать, что, обратно, уравнение $R(x, y, z) = 0$, получающееся от исключения параметра a из двух уравнений (17) и (18), представляет или огибающую поверхностей S, или же место особых точек этих поверхностей. Характеристика C, представляемая уравнениями (17) и (18), есть также предельное положение линии пересечения поверхности S с бесконечно близкою поверхностью того же семейства.

202. Поверхности, зависящие от двух параметров. Рассмотрим теперь уравнение

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \tag{19}$$

представляющее поверхности S, зависящие от двух параметров a и b. Вообще, не существует такой поверхности, которая касалась бы каждой поверхности рассматриваемого семейства вдоль некоторой кривой. В самом деле, если мы установим между параметрами a и b некоторое соотношение $b=\varphi(a)$, то семейство поверхностей (19) обратится в семейство поверхностей, зависящих уже только от одного параметра, и характеристика этого семейства будет представлена уравнением (19) и уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0, \tag{20}$$

где b связано с a соотношением $b=\varphi(a)$. Эта характеристика зависит, вообще, от произвольной функции $\varphi(a)$, так что на каждой поверхности S есть бесчисленное множество характеристик; следовательно, с изменением a и b эти характеристики не образуют, вообще, одной поверхности. Будем теперь искать, существует ли такая поверхность E, которая касается каждой поверхности S не вдоль кривой, а только в одной или нескольких точках. Если такая поверхность существует, то координаты (x, y, z) точки прикосновения поверхности S с *огибающею* E будут функциями двух переменных параметров a и b, удовлетворяющими соотношению (19); следовательно, при перемещении по поверхности E их диференциалы dx, dy, dz удовлетворяют соотношению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0. \tag{21}$$

Чтобы поверхность E, представляющая место точек (x, y, z), касалась поверхности S, необходимо, кроме того, чтобы было

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$

Принимая во внимание соотношение (21), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0.$$

Так как a и b — переменные независимые, то координаты (x, y, z) точки прикосновения должны одновременно удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0. \tag{22}$$

Следовательно, мы получим уравнение огибающей поверхности, исключив a и b из трех уравнений (19) и (22). Действительно, приведенное рассуждение показывает, что полученная таким образом поверхность касается поверхности S, если только значения (x, y, z), удовлетворяющие уравнениям (19) и (22), не удовлетворяют одновременно уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Следовательно, получающаяся поверхность будет или огибающею поверхностей S, или же местом их особых точек.

Таким образом мы имеем огибающие поверхности двух разных видов, смотря по тому, зависят ли огибаемые поверхности от одного или от двух параметров. Например, касательная плоскость к сфере или к гиперболоиду зависит от двух параметров, и она касается поверхности только в одной точке. Напротив, касательная плоскость к конусу или к цилиндру зависит только от одного переменного параметра, но зато касается своей огибающей поверхности вдоль целой образующей.

203. Развертывающиеся поверхности Если мы имеем семейство плоскостей, зависящих от одного переменного параметра, то поверхность, огибающая плоскости этого семейства, называется *развертывающеюся поверхностью*. Пусть будет

$$z = ax + yf(a) + \varphi(a) \tag{23}$$

уравнение переменной плоскости P, a — переменный параметр, и $f(a)$, $\varphi(a)$ — некоторые функции этого параметра. Характеристика плоскости P представится уравнением (23) и уравнением

$$x + yf'(a) + \varphi'(a) = 0, \tag{24}$$

которое получим, диференцируя уравнение (23) по a. Отсюда видно, что в нашем случае характеристика есть некоторая прямая линия G; следовательно, развертывающаяся поверхность есть поверхность линейчатая. Докажем, что все прямые G касаются некоторой кривой двойной кривизны. Для этого продиференцируем (24) по a; получающееся уравнение

$$yf''(a) + \varphi''(a) = 0 \tag{25}$$

определяет на характеристике G некоторую точку M. При изменении параметра a местом точек M будет некоторая кривая двойной кривизны Γ, касательною к которой служит прямая G. В самом деле, кривая Γ представляется тремя уравнениями (23), (24), (25), из которых мы можем выразить координаты x, y, z в функции параметра a. Диференцируя два первых из этих уравнений и принимая во внимание последнее, получим:

$$dz = a\,dx + f(a)\,dy, \quad dx + f'(a)\,dy = 0. \tag{26}$$

Но те же соотношения (26) мы получим и для характеристики G, диференцируя уравнения (23) и (24) при a постоянном. Отсюда следует, что касательная к кривой Γ параллельна характеристике G; кроме того, обе эти прямые имеют общую точку M; следовательно, они между собою тождественны.

Из предыдущего следует, что ***всякую развертывающуюся поверхность можно определить как место касательных к некоторой кривой двойной кривизны*** Γ. В виде исключения, эта кривая Γ может обратиться в точку на конечном или бесконечном расстоянии; тогда развертывающаяся поверхность обращается в конус или цилиндр. Это будет, если $f''(a) = 0$.

Обратно, место касательных к каждой кривой двойной кривизны Γ есть развертывающаяся поверхность. Пусть будут

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

уравнения кривой Г. Соприкасающаяся плоскость этой кривой (см. дальше, § 214)

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{27}$$

где коэфициенты A, B, C удовлетворяют двум соотношениям:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \quad A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0, \tag{28}$$

зависит только от одного переменного параметра t. Покажем, что характеристика этой плоскости есть касательная прямая к кривой Г. Эта характеристика есть линия пересечения соприкасающейся плоскости с плоскостью

$$dA\,(X-x)+dB\,(Y-y)+dC(Z-z)=0,$$

которая также проходит через точку (x, y, z). Чтобы доказать, что эта линия совпадает с касательною прямою к кривой Г, достаточно показать, что

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$
$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0.$$

Первое из этих соотношений есть одно из соотношений (28), определяющих коэфициенты A, B, C; второе мы получим, диференцируя первое и принимая во внимание вторую из формул (28):

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

Этот способ образования поверхностей дает довольно ясное представление о форме этих поверхностей. Пусть будет AB дуга кривой двойной кривизны. Проведем в каждой точке M дуги AB касательную и рассмотрим только ту из двух частей касательных, считая от точки прикосновения, которая соответствует одному из двух противоположных направлений на этой касательной, например направлению от A до B. Место этих полупрямых есть часть поверхности или полость S_1, ограниченная дугою AB и двумя касательными в точках A и B, простирающимися в одну сторону в бесконечность. Если мы возьмем таким же образом остальные части касательных, то получим другую полость S_2, соединяющуюся с S_1 вдоль дуги AB. Для наблюдателя, помещающегося над кривою, обе полости развертывающейся поверхности будут казаться отчасти закрывающими одна другую. Ясно, что всякая плоскость, проходящая через какую-нибудь точку O дуги AB, будет пересекать обе полости S_1 и S_2 развертывающейся поверхности по двум ветвям кривой, сходящимся в точке O и образующим здесь точку возврата. Вследствие этого кривая двойной кривизны Г называется *ребром возврата* развертывающейся поверхности.

В этом свойстве также легко убедиться вычислением. Примем точку O за начало координат, секущую плоскость — за плоскость xOy, касательную прямую — за ось Oz, и соприкасающуюся плоскость — за плоскость xOz. Если мы примем z за независимое переменное, то разложения координат x, y точки кривой Г будут иметь вид:

$$x=a_2z^2+a_3z^3+\ldots, \quad y=b_3z^3+\ldots,$$

так как в начале координат должно быть:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

Отсюда следует, что уравнения касательной прямой к кривой Γ в точке, близкой к началу координат, будут:

$$\frac{X-a_2z^2-a_3z^3-\ldots}{2a_2z+\ldots}=\frac{Y-b_3z^3-\ldots}{3b_3z^2+\ldots}=Z-z.$$

Полагая $Z=0$, мы получим координаты X, Y точки пересечения касательной прямой с секущею плоскостью. Разложения этих координат начинаются соответственно членом с z^2 и членом с z^3. Следовательно, кривая Γ имеет в начале координат точку возврата.

Пример. Примем за ребро возврата кривую двойной кривизны третьего порядка $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. Уравнение соприкасающейся плоскости к этой кривой будет:

$$t^3-3t^2X+3tY-Z=0. \tag{27}$$

Из определения огибающих поверхностей следует, что мы получим уравнение развертывающейся поверхности, выразив, что уравнение (27), рассматриваемое как уравнение по t, имеет двойной корень, т. е. исключив t из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} t^2-2tX+Y=0,\\ Xt^2-2tY+Z=0. \end{aligned}\right\} \tag{E}$$

Результат исключения будет:

$$(XY-Z)^2-4(X^2-Y)(Y^2-XZ)=0;$$

таким образом искомая развертывающаяся поверхность — четвертого порядка.

Заметим, что уравнения (E) представляют касательную к данной кривой третьего порядка.

204. Диференциальное уравнение развертывающихся поверхностей. Пусть будет $z=F(x,y)$ уравнение развертывающейся поверхности. *Функция $F(x,y)$ удовлетворяет уравнению* $s^2-rt=0$, где r, s, t представляют, как обыкновенно, частные производные второго порядка от функции $F(x,y)$ (§ 26).

В самом деле, касательная плоскость к этой поверхности, представляемая уравнением:

$$Z=pX+qY+z-px-qy,$$

должна зависеть только от одного переменного параметра; следовательно, из трех количеств p, q, $z-px-qy$ произвольно только одно, и, в частности, между количествами p и q должно быть некоторое соотношение $f(p,q)=0$. Отсюда следует, что определитель Якоби

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)}=rt-s^2$$

должен быть тождественно равен нулю.

Обратно, если мы имеем $rt-s^2=0$, то p и q связаны, по крайней мере, одним соотношением. Если этих соотношений будет два, то p и q — постоянные, $p=a$, $q=b$, и функция $F(x,y)$ имеет вид:

$ax+by+c$; следовательно, искомая поверхность есть плоскость. Если же между b и q есть только одно соотношение, то его можно представить в виде: $q=\varphi(p)$, *где p не есть постоянное.* Но мы имеем также

$$\frac{D(z-px-qy, p)}{D(x, y)}=y(rt-s^2),$$

откуда следует, что если $rt-s^2=0$, то $z-px-qy$ есть также некоторая функция $\psi(p)$ от p. Таким образом неизвестная функция $z=F(x, y)$ и ее частные производные p и q удовлетворяют двум соотношениям:

$$q=\varphi(p), \quad z-px-\varphi(p)y=\psi(p).$$

Диференцируя второе из них по x и y, получим:

$$[x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad [x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

Так как p — не постоянное, то должно быть

$$x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

Следовательно, мы получим уравнение искомой поверхности, исключая p из соотношений:

$$z=px+y\varphi(p)+\psi(p), \quad x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

Но это исключение дает огибающую поверхность плоскости, представляемой первым из предыдущих уравнений, если в нем будем рассматривать p как переменный параметр.

205. Огибающая семейства кривых двойной кривизны. Семейство кривых двойной кривизны, зависящее от одного переменного параметра, вообще, не имеет огибающей. Рассмотрим сначала семейство прямых:

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \tag{29}$$

где a, b, p, q — данные функции переменного параметра α. Найдем, при каком условии каждая прямая этого семейства будет касаться некоторой кривой двойной кривизны Г. Пусть будет $z=\varphi(\alpha)$ координата z точки M, в которой прямая D рассматриваемого семейства касается огибающей Г. Эта кривая Г будет представлена уравнениями (29) и уравнением $z=\varphi(\alpha)$, и угловые коэфициенты касательной к этой кривой будут иметь следующие выражения:

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\varphi'(\alpha)+a'\varphi(\alpha)+p', \quad \frac{dy}{d\alpha}=b\varphi'(\alpha)+b'\varphi(\alpha)+q', \quad \frac{dz}{d\alpha}=\varphi'(\alpha),$$

где a', b', p', q' — производные от a, b, p, q по α. Для того чтобы этою касательною была сама прямая D, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\frac{dz}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha}=b\frac{dz}{d\alpha},$$

т. е.

$$a'\varphi(a)+p'=0, \quad b'\varphi(a)+q'=0.$$

Таким образом неизвестная функция $\varphi(a)$ должна удовлетворять двум различным соотношениям; следовательно, рассматриваемое семейство прямых будет иметь огибающую только в том случае, если эти соотношения будут совместимы, т. е. если

$$a'q'-b'p'=0.$$

Если это условие удовлетворяется, то мы получим огибающую, взяв

$$\varphi(a)=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}.$$

Это рассуждение легко обобщить. Рассмотрим семейство кривых двойной кривизны C, зависящее от переменного параметра a; пусть будут

$$F(x, y, z, a)=0, \quad \Phi(x, y, z, a)=0 \tag{30}$$

уравнения этого семейства. Если кривые C касаются некоторой кривой Γ, то координаты (x, y, z) точки M, в которой огибающая Γ касается одной из кривых C, соответствующей некоторому определенному значению a параметра, будут функциями от a, удовлетворяющими двум уравнениям (30) и, кроме того, еще двум другим уравнениям. Пусть будут dx, dy, dz диференциалы, соответствующие перемещению точки M вдоль кривой C; так как на кривой C параметр a остается постоянным, то между этими диференциалами будут иметь место соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

С другой стороны, пусть будут δx, δy, δz, δa диференциалы от x, y, z, a, соответствующие перемещению точки M вдоль кривой Γ. Эти диференциалы удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial a}\delta a=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z+\frac{\partial \Phi}{\partial a}\delta a=0.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы кривые C и Γ касались между собою, будут:

$$\frac{dx}{\delta x}=\frac{dy}{\delta y}=\frac{dz}{\delta z};$$

отсюда, принимая во внимание соотношения (31) и (32), получим:

$$\frac{dF}{\partial a}\delta a = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\delta \alpha = 0.$$

Следовательно, *координаты (x, y, z) точки прикосновения должны удовлетворять уравнениям:*

$$F = 0, \ \Phi = 0, \ \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0. \tag{33}$$

Таким образом для того, чтобы кривые C имели огибающую, необходимо, чтобы при всяком значении параметра a четыре предыдущих уравнения были совместимы. Обратно, если уравнения (33) имеют при всяком α общее решение относительно x, y, z, то из предыдущего следует, что кривая Γ, описываемая точкою (x, y, z), касается в каждой из своих точек соответствующей кривой C. При этом, однако, предполагается, что точка с координатами (x, v, z) не есть особая точка кривой C, т. е. что отношения диференциалов dx, dy, dz действительно определяются уравнениями (31).

Примечание I. Если кривые C представляют характеристики семейства поверхностей $F(x, y, z, \alpha) = 0$, зависящих от одного параметра, то четыре уравнения (33) приводятся только к трем различным уравнениям:

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0. \tag{34}$$

Следовательно, характеристики семейства поверхностей, зависящих от одного параметра, всегда имеют огибающую, представляемую уравнениями (34). Это предложение есть обобщение теоремы, доказанной выше для образующих развертывающейся поверхности (§ 203).

Примечание II. Первое и третье уравнение системы (33) представляют характеристику поверхности из семейства от одного параметра $F(x, y, z, \alpha) = 0$. Второе и четвертое уравнения точно так же представляют характеристику поверхности $\Phi(x, y, z, \alpha) = 0$. Если кривые C имеют огибающую, то всякая точка прикосновения кривой C с огибающей принадлежит одновременно двум характеристикам. Огибающая кривых C составляет часть места пересечения огибающих обеих поверхностей.

Уравнения переменной прямой представляются иногда в виде:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \tag{35}$$

где x_0, y_0, z_0, a, b, c — функции переменного параметра α. Легко найти прямым путем, при каком условии эта прямая имеет огибающую. Обозначим через l общее значение предыдущих отношений; выражения координат любой точки этой прямой будут:

$$x = x_0 + la, \quad y = y_0 + lb, \quad z = z_0 + lc.$$

Посмотрим, нельзя ли принять за l такую функцию от α, чтобы подвижная прямая (35) оставалась касательною прямою во всех точках кривой, описываемой точкою (x, y, z). Для этого должно быть:

$$\frac{x_0' + a'l}{a} = \frac{y_0' + b'l}{b} = \frac{z_0' + c'l}{c}. \tag{36}$$

Обозначая через m общее значение отношений (36) и исключая l и m из получающихся трех линейных уравнений, мы придем к уравнению:

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0. \tag{37}$$

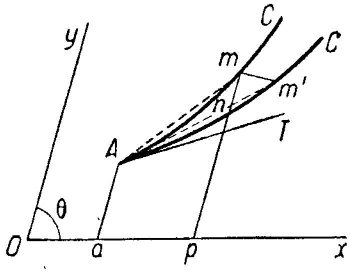
Если условие (37) удовлетворяется, то соотношения (36) определяют l, а следовательно, и огибающую.

II. ПРИКОСНОВЕНИЕ ДВУХ КРИВЫХ, КРИВОЙ И ПОВЕРХНОСТИ.

206. Прикосновение плоских кривых. Пусть будут C и C' две плоские кривые, касающиеся друг друга в точке A. Установим между точками обеих кривых в окрестности точки A такое соответствие, чтобы, когда точка m кривой C, перемещаясь, приходила в A, вместе с нею приходила бы в A и соответствующая ей точка m' кривой C'. Примем за главное бесконечно-малое дугу Am, или, что равносильно этому, — хорду Am, и определим сначала, какое соответствие должно установить между точками m и m', чтобы порядок малости отрезка mm' относительно Am был возможно более высоким *. Отнесем обе кривые к системе прямоугольных или косоугольных осей координат, так, чтобы ось Oy не была параллельна общей касательной AT. Пусть будут

$$y = f(x), \tag{c}$$
$$Y = F(x) \tag{c'}$$

уравнения обеих кривых, и (x_0, y_0) — координаты точки A. Координаты точки m будут $x_0 + h$ и $f(x_0 + h)$, а координаты точки m' будут $x_0 + k$ и $F(x_0 + k)$, причем k есть некоторая функция от h, определяющая характер соответствия между точками обеих кривых и стремящаяся к нулю вместе с h. Заметим, что при таком выборе оси Oy мы можем заменить главное бесконечно-малое Am через $h = ap$ (черт. 36), так как при неограниченном приближении точки m к точке A отношение $\frac{ap}{Am}$ стремится к некоторому конечному пределу, отличному от нуля.



Черт. 36.

Предположим, что при некотором определенном соответствии между точками m и m' отрезок $\overline{mm'}$ относительно h будет бесконечно-малым $(r+1)$-го порядка, тогда $\overline{mm'}^2$ будет бесконечно-малым $(2r+2)$-го порядка. Обозначая через θ угол между осями, будем иметь:

$$\overline{mm'}^2 = [F(x_0 + k)) - f(x_0 + h) + (k - h)\cos\theta]^2 + (k - h)^2 \sin^2\theta;$$

* Очевидно, этот порядок можно получить, ставя в соответствие точке m точку m' кривой C', находящуюся на минимальном расстоянии от m. Но мы покажем, что этот способ соответствия можно заменить бесчисленным множеством других.

отсюда следует, что каждая из разностей $k-h$ и $F(x_0+k)-f(x_0+h)$ должна быть по крайней мере бесконечно-малою $(r+1)$-го порядка, т. е. должно быть:

$$k=h+\alpha h^{r+1},\quad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{r+1},$$

причем α и β суть функции от h, остающиеся конечными, когда h стремится к нулю. Последнюю формулу мы можем представить в виде:

$$F(x_0+h+\alpha h^{r+1})-f(x_0+h)=\beta h^{r+1}.$$

Если мы разложим выражение $F(x_0+h+\alpha h^{r+1})$ по степеням α, то часть, зависящая от α, будет бесконечно-малою по крайней мере $(r+1)$-го порядка. Отсюда следует, что разность

$$\Delta=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

есть бесконечно-малое по крайней мере $(r+1)$-го порядка, но порядок ее малости может быть и выше. Эта разность Δ представляет расстояние mn между двумя точками кривых C и C', лежащими на прямой, параллельной оси Oy. Так как заменою точки m' точкою n можно только увеличить порядок малости отрезка mm', то отсюда следует, что *порядок малости расстояния между соответствующими точками обеих кривых будет всего выше в том случае, когда соответствующие точки m и m' лежат на прямой, параллельной оси Oy*. Если этот порядок равен $r+1$, то говорят, что обе кривые имеют в точке A *прикосновение r-го порядка*.

Примечания. По поводу этого определения можно заметить следующее. Очевидно, что осью Oy может служить любая прямая, не параллельная общей касательной AT. Отсюда следует, что при вычислении порядка прикосновения двух кривых можно считать соответственными точки обеих кривых, лежащие на одной прямой, параллельной произвольной прямой D, лишь бы направление этой прямой D отличалось от направления касательной AT; из предыдущего доказательства видно, что полученный порядок малости не зависит от направления прямой D. В последнем легко убедиться непосредственно. В самом деле, предположим, что через точку m кривой C проведены прямые mm' и mn (черт. 36) по двум определенным направлениям, не параллельным касательной AT. Из $\triangle mm'n$ имеем:

$$\frac{mm'}{mn}=\frac{\sin\angle mnm'}{\sin\angle mm'n}.$$

Когда точка m приближается к A, то углы mnm', $mm'n$ имеют пределы, отличные от 0 и π, так как хорда $m'n$ имеет пределом касательную AT; следовательно, порядок отрезка mm' одинаков с порядком отрезка mn. Отсюда также следует, что каков бы ни был закон соответствия между точками m' и m, mm' не может быть бесконечно-малым порядка высшего, чем порядок бесконечно-малого mn, так как числитель $\sin\angle mnm'$ имеет конечный предел, отличный от нуля.

Мы брали за главное бесконечно-малое дугу Am или хорду Am; но мы получили бы тот же самый результат, взяв за главное бесконечно-малое дугу An кривой C', так как хорды Am и An одинакового порядка малости.

Если кривые C и C' имеют прикосновение r-го порядка, то между точками m, m' можно установить бесчисленными способами соответствие так, чтобы mm' было бесконечно-малым $(r+1)$-го порядка; для этого нужно только взять $k=h+\alpha h^{s+1}$, где $s\geqslant r$, и α есть функция от h, сохраняющая конечное значение при $h=0$. Если же $s<r$, то mm' будет только $(s+1)$-го порядка.

207. Порядок прикосновения. Как видно из предыдущего, для того чтобы получить порядок прикосновения кривых C, C', нужно вычислить порядок малости разности

$$Y-y=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

относительно h. Так как кривые касаются между собою в точке A, то мы имеем:

$$F(x_0)=f(x_0), \qquad F'(x_0)=f'(x_0);$$

но может случиться, что при $x=x_0$ будут равны между собою и некоторые производные высших порядков от обеих функций. Рассмотрим общий случай. Предположим, что мы имеем:

$$\left.\begin{array}{ll} F(x_0)=f(x_0), & F'(x_0)=f'(x_0), \\ F''(x_0)=f''(x_0), \ldots, & F^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0), \end{array}\right\} \tag{38}$$

и пусть ближайшие следующие производные $F^{(n+1)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0)$ будут не равны между собою. Применяя формулу Тейлора к функциям $F(x)$ и $f(x)$, получим:

$$Y=F(x_0)+\frac{h}{1}F'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}F^{(n)}(x_0)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon],$$

$$y=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon'],$$

где ε, ε' — бесконечно-малые; вычитая, будем иметь:

$$Y-y=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon-\varepsilon']. \tag{39}$$

Таким образом порядок прикосновения обеих кривых равен порядку тех наивысших производных от функций $f(x)$ и $F(x)$, которые вместе со всеми предыдущими производными попарно равны между собою при $x=x_0$.

Из условий (38), которые были даны Лагранжем, видно также, что $x=x_0$ есть кратный корень $(n+1)$-го порядка уравнения $F(x)=f(x)$. Но корни этого уравнения определяют абсциссы общих точек обеих кривых C, C'; следовательно, можно сказать, что у кривых, имеющих прикосновение n-го порядка, $n+1$ из их точек пересечения *сливаются в одну точку.*

Из формулы (39) видно, что разность $Y-y$ меняет знак вместе с h при n четном и не меняет знака при n нечетном. Таким образом *кривые, имеющие прикосновение нечетного порядка, не перекрещиваются в точке прикосновения, а кривые, имеющие прикосновение четного порядка, в точке прикосновения перекрещиваются.* Нетрудно видеть, почему это будет так. Рассмотрим, например, кривую C', пересекающую кривую C в трех точках, близких к точке A; если мы будем непрерывно изменять кривую C' так, чтобы все три точки пересечения наконец совпали с точкою A, то в своем предельном положении кривая C' будет иметь прикосновение второго порядка с кривою C, и, построив чертеж, легко видеть, что обе кривые будут перекрещиваться в точке A. Очевидно, что такое же рассуждение применимо и во всех других случаях.

Если, как это и будет в общем случае, уравнения обеих кривых не решены относительно y и Y, то, пользуясь правилами для вычисления производных от неявных функций, можно составить необходимые условия, при которых две кривые будут иметь прикосновение n-го порядка; таким образом эта задача не представляет никаких особых трудностей. Мы рассмотрим только несколько частных случаев, встречающихся наиболее часто. Предположим, что координаты точек каждой из двух кривых выражены в функции переменного параметра:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= \varphi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= f(u), \\ Y &= \psi(u), \end{aligned}\right\} \qquad (C')$$

где x и X суть одинаковые функции от t и u. Пусть при некотором частном значении t_0 мы имеем:

$$\psi(t_0) = \varphi(t_0), \qquad \psi'(t_0) = \varphi'(t_0),$$

так что обе кривые касаются друг друга в точке A с координатами $f(t_0)$, $\varphi(t_0)$. Предположим, что здесь $f'(t_0)$ не равна нулю; тогда общая касательная к обеим кривым в точке A не будет параллельна оси Oy, и мы получим точки обеих кривых, имеющие одну и ту же абсциссу, полагая $u=t$. С другой стороны, так как разность $x-x_0$ первого порядка относительно $t-t_0$, то задача приводится подобно предыдущему к вычислению порядка малости разности $\psi(t)-\varphi(f)$ относительно $t-t_0$. Следовательно, чтобы кривые C, C' имели прикосновение не ниже n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\psi(f_0) = \varphi(t_0),\ \psi'(t_0) = \varphi'(t_0),\ \ldots,\ \psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0); \qquad (40)$$

если при этом производные $\psi^{(n+1)}(t_0)$ и $\varphi^{(n+1)}(t_0)$ не равны между собою, то прикосновение будет как раз n-го порядка.

Рассмотрим еще тот случай, когда кривая C представлена двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= \varphi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

тогда как кривая C' дана уравнением $F(x, y)=0$. Этот случай можно привести к предыдущему. Заменим в $F(x, y)$ переменное x через $f(t)$; пусть будет $y=\psi(t)$ неявная функция, определяемая соотношением:

$$F[f(t), \psi(t)] = 0. \qquad (42)$$

Отсюда видно, что мы можем принять, что кривая C' представлена системою двух уравнений:

$$x = f(t), \quad y = \psi(t). \tag{43}$$

Чтобы кривые C, C' имели в точке A, соответствующей значению t_0 параметра, прикосновение n-го порядка, необходимо, чтобы удовлетворялись найденные выше соотношения (40). Но производные различных порядков от неявной функции $\psi(t)$ получаются из уравнений;

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) = 0, \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} [f'(t)]^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(t) \psi'(t) + \\ &\qquad + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\psi'(t)]^2 + \frac{\partial F}{\partial x} f''(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi''(t) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial^n F}{\partial x^n} [f'(t)]^n + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y} \psi^{(n)}(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Полагая в этих формулах $t = t_0$, $x = f(t_0)$, $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \ldots, \psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0)$, мы будем иметь необходимые условия того, чтобы прикосновение кривых C, C' было n-го порядка. Эти условия можно выразить следующим образом.

Положим:

$$\mathfrak{F}(t) = F[f(t), \varphi(t)].$$

Чтобы данные кривые имели в точке $t = t_0$ прикосновение не ниже n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\mathfrak{F}(t_0) = 0, \quad \mathfrak{F}'(t_0) = 0, \ldots, \mathfrak{F}^{(n)}(t_0) = 0. \tag{45}$$

Корнями уравнения $\mathfrak{F}(t_0) = 0$ служат значения параметра t, соответствующие точкам пересечения обеих кривых. Поэтому предыдущие условия (30) показывают, что значение $t = t_0$ есть $(n+1)$-кратный корень уравнения $\mathfrak{F}(t_0) = 0$, т. е. что $n+1$ точек пересечения рассматриваемых кривых сливаются в одну точку.

208. Соприкасающиеся кривые. Если дана некоторая определенная кривая C и другая кривая C', зависящая от $n+1$ параметров $a, b, c, \ldots, l$ и представляемая уравнением:

$$F(x, y, a, b, c, \ldots, l) = 0, \tag{46}$$

то, вообще, возможно выбрать значения этих $n+1$ параметров таким образом, чтобы в некоторой заранее данной точке кривой C кривая C' имела с кривою C прикосновение n-го порядка. Пусть будут $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ уравнения кривой C. Чтобы кривые C, C' имели в точке $t = t_0$ прикосновение n-го порядка, должны удовлетворяться условия (45), где

$$\mathfrak{F}(t) = F[f(t), \varphi(t), a, b, c, \ldots, l].$$

Когда значение t_0 параметра дано, то из $n+1$ уравнений (45) можно определить значения $n+1$ параметров $a, b, c, \ldots, l$. Полученная таким образом кривая C' называется *соприкасающеюся* с кривою C *(оскулирующею)*.

Применим эту теорию к простейшим линиям. Уравнение прямой $y = ax + b$ зависит от двух параметров a и b; следовательно, соприкасающаяся прямая имеет с данною кривою C, вообще, прикосновение первого порядка. Если $y = f(x)$ есть уравнение кривой C, то параметры a и b должны удовлетворять соотношениям:

$$f(x_0) = ax_0 + b, \quad f'(x_0) = a;$$

внося полученные значения для a и b в уравнение прямой, мы получим уравнение касательной, как этого и следовало ожидать. Уравнение окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \tag{47}$$

зависит от трех параметров: a, b, R; следовательно, соприкасающаяся окружность имеет, вообще, прикосновение второго порядка. Пусть будет $y = f(x)$ уравнение данной кривой; мы получим значения a, b, R из условий, выражающих, что окружность встречает эту кривую в трех сливающихся точках. Эти условия дают вместе с уравнением (47) еще два уравнения:

$$x - a + (y - b)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y - b)y'' = 0. \tag{48}$$

Значения a и b, получающиеся из уравнений (48), тождественны с координатами центра кривизны; таким образом *соприкасающийся круг есть вместе с тем и круг кривизны*. Так как прикосновение будет второго порядка, то отсюда следует, что *круг кривизны плоской кривой пересекает эту кривую в точке прикосновения*.

Все эти результаты можно было предвидеть. В самом деле, так как координаты центра кривизны зависят только от x, y, y', y'', то две кривые, имеющие прикосновение второго порядка, имеют и общий центр кривизны. Но центр кривизны соприкасающегося круга есть, очевидно, центр самого круга; следовательно, круг кривизны тождествен с соприкасающимся кругом, так как последний имеет с кривою прикосновения второго порядка. С другой стороны, рассмотрим два круга кривизны для двух близких между собою точек кривой; разность радиусов, равная длине дуги развертки между двумя центрами кривизны, будет больше расстояния между центрами. Следовательно, один из двух кругов расположен внутри другого, а этого не могло бы быть, если бы вблизи точки прикосновения эти круги были расположены или оба внутри, или оба вне кривой C. Следовательно, они должны пересекать кривую C.

Однако на плоской кривой могут быть некоторые особые точки, в которых соприкасающийся круг не пересекает кривую; это замечание связано с одним общим свойством соприкасающихся кривых. Если нам дана кривая C', зависящая от $n+1$ параметров, то к $n+1$ уравнениям (45) мы можем присоединить еще новое уравнение:

$$\mathfrak{F}^{(n+1)}(t_0) = 0,$$

если только будем рассматривать t_0 как новое неизвестное, которое нужно определить вместе с параметрами $a, b, c, \ldots, l$. Отсюда видно, что на плоской кривой C, вообще, есть такие точки, в которых прикосновение с соприкасающеюся кривою C' будет $(n+1)$-го порядка. Так, например, есть точки, в которых касательная имеет с кривою прикосновение второго порядка; это — точки перегиба, для которых $y''=0$. Чтобы получить точки кривой, в которых соприкасающийся круг имеет прикосновение третьего порядка, нужно продиференцировать последнее из уравнений (48); это дает:

$$3y'y''+(y-b)y'''=0;$$

исключая $y-b$ из этого уравнения и из уравнения (48), будем иметь условие:

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0. \tag{49}$$

Точки, удовлетворяющие этому условию, суть те, для которых $\frac{dR}{dx}=0$, т. е. в которых радиус кривизны имеет максимум или минимум. Например, у эллипса такими точками будут его вершины, у циклоиды — те точки, в которых касательная параллельна основанию.

209. Свойства соприкасающихся кривых. На соприкасающуюся кривую можно смотреть как на предельное положение кривой C', встречающей кривую C в $n+1$ бесконечно близких точках, когда все эти точки слились в одну. Рассмотрим, например, семейство кривых, зависящих от трех параметров a, b, c; пусть будут t_0+h_1, t_0+h_2, t_0+h_3 значения параметра t, близкие к значению t_0. Значения параметров a, b, c для кривой C', встречающей кривую C в трех точках, соответствующих этим значениям параметра t, определяются из трех уравнений:

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0, \quad \mathfrak{F}(t_0+h_2)=0, \quad \mathfrak{F}(t_0+h_3)=0. \tag{50}$$

Вычитая первое уравнение из каждого из двух остальных и применяя к разностям формулу конечных приращений, мы получим равносильную систему уравнений:

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0+k_1)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0+k_2)=0, \tag{51}$$

где k_1 заключается между h_1 и h_2, а k_2 — между h_1 и h_3. Далее, вычитая второе уравнение из третьего и применяя к разности формулу конечных приращений, мы придем к новой системе:

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0+k_1)=0, \quad \mathfrak{F}''(t_0+l_1)=0, \tag{52}$$

где l_1 заключается между k_1 и k_2. Когда h_1, h_2, h_3 стремятся к нулю, то будут стремиться к нулю и k_1, k_2, l_1, и уравнения (52) в пределе обращаются в

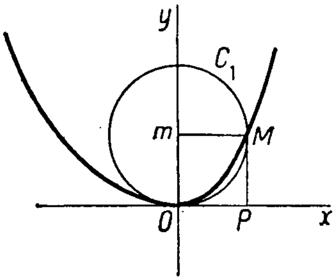
$$\mathfrak{F}(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}''(t_0)=0,$$

а это те самые уравнения, которые определяют соприкасающуюся кривую. Доказательство остается таким же для всякого числа параметров.

Мы можем также определить соприкасающуюся кривую как предельное положение кривой C', касающейся кривой C в p точках и пересекающей эту кривую в q других точках (где $2p+q=n+1$), когда эти $p+q$ точек сливаются в одну.

Например, соприкасающийся круг есть предельное положение круга, проходящего через три точки кривой C, бесконечно близкие к точке прикосновения; вместе с тем соприкасающийся круг есть также предельное положение круга, касающегося в данной точке кривой C и проходящего через другую точку этой кривой, бесконечно близкую к первой.

Остановимся несколько на этом последнем свойстве, которое легко проверить. Примем за начало координат данную точку кривой, за ось Ox — касательную к кривой, и за положительное направление оси Oy то направление нормали, которое обращено к центру кривизны. В начале координат мы будем иметь $y'=0$; следовательно, $R=\frac{1}{y''}$, и по формуле Тейлора получим:



Черт. 37.

$$y=x^2\left(\frac{1}{2R}+\varepsilon\right),$$

где ε бесконечно мало вместе с x. Отсюда следует, что R есть предел выражения $\frac{x^2}{2y}=\frac{\overline{OP}^2}{2\overline{MP}}$, когда точка M приближается к точке O. С другой стороны, пусть будет R_1 радиус круга C_1, касающегося оси Ox в начале координат и проходящего через точку M. Мы имеем:

$$\overline{OP}^2=\overline{Mm}^2=MP\,(2R_1-MP),$$

или

$$\frac{\overline{OP}^2}{2MP}=R_1-\frac{MP}{2},$$

следовательно, предел радиуса R_1 действительно равен радиусу кривизны R.

210. Прикосновение двух кривых двойной кривизны. Порядок прикосновения кривых двойной кривизны определяется таким же образом, как и порядок прикосновения плоских кривых. Рассмотрим две кривые двойной кривизны Γ, Γ', касающиеся между собою в точке A. Пусть будет M точка кривой Γ, близкая к точке A, и пусть точке M кривой Γ соответствует некоторая точка M' кривой Γ' таким образом, что точки M' и M вместе приближаются к точке A. Найдем наивысший возможный порядок малости бесконечно малого расстояния MM' относительно дуги AM, рассматриваемой как главное бесконечно-малое. Если этот наивысший порядок будет равен $n+1$, то мы будем говорить, что кривые Γ и Γ' в точке A имеют *прикосновение n-го порядка*.

Отнесем обе кривые к системе прямоугольных осей*, причем возьмем плоскость yz не параллельною общей касательной к обеим кривым к точке A, и предположим сначала, что уравнения этих кривых имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x), \\ z &= \varphi(x), \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= F(x), \\ Z &= \Phi(x). \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma')$$

Пусть будут x_0, y_0, z_0 координаты точки прикосновения A. Координаты точек M, M' будут соответственно равны:

$$\begin{aligned} &M[x_0+h,\ f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)], \\ &M'[x_0+k,\ F(x_0+k),\ \Phi(x_0+k)], \end{aligned}$$

где k есть некоторая функция от h, зависящая от принятого закона соответствия между точками кривых Γ и Γ' и обращающаяся в нуль вместе с h. Как и в случае плоских кривых (§ 206), за главное бесконечно-малое вместо длины дуги AM можно принять h. Для того чтобы расстояние MM' было бесконечно малым $(n+1)$-го порядка, необходимо, чтобы каждая из разностей

$$k-h, \quad F(x_0+k)-f(x_0+h), \quad \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)$$

была бесконечно малою, по крайней мере, $(n+1)$-го порядка. Следовательно, должно быть:

$$k-h=ah^{n+1}, \quad \begin{aligned} F(x_0+k)-f(x_0+h) &= \beta h^{n+1}, \\ \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h) &= \gamma h^{n+1}, \end{aligned}$$

где при приближении h к нулю количества a, β, γ остаются конечными**. Заменяя в двух последних уравнениях k его значением $h+ah^{n+1}$, полученным из первого уравнения, будем иметь:

$$\begin{aligned} F(x_0+h+ah^{n+1})-f(x_0+h) &= \beta h^{n+1}, \\ \Phi(x_0+h+ah^{n+1})-\varphi(x_0+h) &= \gamma h^{n+1}. \end{aligned}$$

Разлагая $F(x_0+h+ah^{n+1})$ и $\Phi(x_0+h+ah^{n+1})$ в ряды по формуле Тейлора, найдем, что все члены, содержащие a, имеют множителем h^{n+1};

* Пользуясь формулою для расстояния между двумя точками в косоугольных координатах, легко доказать, что здесь в этом предположении нет необходимости.

** Т. е. не обращаются в бесконечность; однако два из них могут обращаться в нуль.

следовательно, для того чтобы расстояние MM' было бесконечно малым $(n+1)$-го порядка, необходимо, чтобы каждая из разностей

$$F(x_0+h)-f(x_0+h),$$
$$\Phi(x_0+h)-\varphi(x_0+h)$$

была бесконечно-малою, по крайней мере, $(n+1)$-го порядка. Отсюда следует, что если расстояние MM' будет бесконечно малым $(n+1)$-го порядка, то расстояние MN между точками M и N обеих кривых с общею абсциссою x_0+h будет бесконечно малым не ниже $(n+1)$-го порядка. Следовательно, мы получим наивысший порядок малости, *считая соответствующими точки обеих кривых, имеющие одну и ту же абсциссу.*

Легко найти этот наивысший порядок прикосновения. Так как в точке A кривые касаются между собою, то мы имеем:

$$f(x_0)=F(x_0),\quad f'(x_0)=F'(x_0),$$
$$\varphi(x_0)=\Phi(x_0),\quad \varphi'(x_0)=\Phi'(x_0).$$

Предположим для общности, что, кроме того,

$$f''(x_0)=F''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=F^{(n)}(x_0),$$
$$\varphi''(x_0)=\Phi''(x_0),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x_0)=\Phi^{(n)}(x_0),$$

но что, по крайней мере, одна из разностей

$$F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0),$$
$$\Phi^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)$$

не равна нулю. В этом случае расстояние MM' будет бесконечно-малым $(n+1)$-го порядка, и прикосновение будет n-го порядка. Этот результат можно выразить следующим образом.

Чтобы найти порядок прикосновения кривых Γ и Γ', нужно рассмотреть проекции (C, C') и (C_1, C_1') этих кривых на плоскости xOy и xOz, вычислить порядок прикосновения C и C', C_1 и C_1' и взять меньшее из этих двух чисел.

Если кривые Γ, Γ' представлены уравнениями:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t), \tag{Γ}$$
$$X=f(u),\quad Y=\Phi(u),\quad Z=\Psi(u), \tag{Γ'}$$

то чтобы эти кривые касались между собою в точке $u=t=t_0$, должно быть:

$$\Phi(t_0)=\varphi(t_0),\quad \Phi'(t_0)=\varphi'(t_0),\quad \Psi(t_0)=\psi(t_0),\quad \Psi'(t_0)=\psi'(t_0).$$

Если мы предположим, что $f'(t_0)$ не равно нулю, то касательная в точке прикосновения не будет параллельна плоскости yOz, и точки обеих кривых, имеющие общую абсциссу, будут соответствовать одному и тому же значению параметра t. Следовательно, чтобы прикосновение было n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы разности $\Phi(t)-\varphi(t)$ и $\Psi(t)-\psi(t)$ были относительно $t-t_0$ бесконечно-малыми $(n+1)$ порядка, т. е. чтобы было

$$\Phi'(t_0)=\varphi'(t_0),\ \ldots,\quad \Phi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0),$$
$$\Psi'(t_0)=\psi'(t_0),\ \ldots,\quad \Psi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0),$$

но чтобы по крайней мере одна из разностей

$$\Phi^{(n+1)}(t_0) - \varphi^{(n+1)}(t_0), \quad \Psi^{(n+1)}(t_0) - \psi^{(n+1)}(t_0)$$

не была равна нулю.

Случай, когда кривая Γ представлена уравнениями:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \tag{53}$$

а кривая Γ' — двумя нерешенными уравнениями:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

легко приводится к предыдущему. Повторяя рассуждения § 207, нетрудно доказать, что, для того чтобы в какой-нибудь точке кривой Γ, соответствующей значению t_0 параметра, рассматриваемые кривые имели прикосновение n-го порядка, должно быть:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{F}(t_0) = 0, \quad \mathfrak{F}'(t_0) = 0, \ldots, \mathfrak{F}^{(n)}(t_0) = 0, \\ &\mathfrak{F}_1(t_0) = 0, \quad \mathfrak{F}_1'(t_0) = 0, \ldots, \mathfrak{F}_1^{(n)}(t_0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

где

$$\mathfrak{F}(t) = F[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \quad \mathfrak{F}_1(t) = F_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)].$$

211. Соприкасающиеся кривые. Пусть будет Γ данная кривая, уравнения которой имеют вид (53); с другой стороны, рассмотрим семейство кривых Γ', зависящее от $2n+2$ параметров $a, b, c, \ldots, l$ и представляемое уравнениями

$$F(x, y, z, a, b, c, \ldots, l) = 0, \quad F_1(x, y, z, a, b, c, \ldots, l) = 0. \tag{55}$$

Вообще, можно выбрать значения этих $2n+2$ параметров таким образом, чтобы соответствующая кривая Γ' этого семейства имела с кривою Γ в данной точке прикосновение n-го порядка. Полученная таким образом кривая называется *соприкасающеюся* с кривою Γ (*оскулирующею*). Уравнениями, определяющими значения параметров $a, b, c, \ldots, l$, будут те же данные выше уравнения (54). Но должно заметить, что эти уравнения будут совместимы только в том случае, если каждая из функций F и F_1 содержит, по крайней мере, $(n+1)$ параметров. Например, если кривые Γ' будут плоскими, то одно из уравнений (55) содержит только три параметра: следовательно, в точке, взятой произвольно на кривой двойной кривизны, плоская кривая не может иметь с кривою двойной кривизны прикосновения выше второго порядка.

Применим эту теорию к простейшим линиям: к прямой и к окружности. Уравнения прямой содержат четыре параметра; следовательно, соприкасающаяся прямая имеет, вообще, с кривою прикосновение только первого порядка. Легко доказать, что соприкасающаяся прямая совпадает с касательною к кривой Γ'. В самом деле, представим уравнения прямой в виде:

$$x = az + p, \quad y = bz + q;$$

для точки прикосновения (x_0, y_0, z_0) с кривою Γ уравнения (54) обращаются в

$$x_0 = az_0 + p, \quad x_0' = az_0', \quad y_0 = bz_0 + q, \quad y_0' = bz_0',$$

откуда имеем:

$$a=\frac{x_0'}{z_0'},\quad b=\frac{y_0'}{z_0'},\qquad p=x_0-\frac{x_0'}{z_0'}z_0,\quad q=y_0-\frac{y_0'}{z_0'}z_0,$$

и мы приходим к уравнениям касательной. Для того чтобы касательная имела с кривою прикосновение второго порядка, должно быть $x_0''=az_0''$, $y_0''=bz_0''$, и, следовательно,

$$\frac{x_0''}{x_0'}=\frac{y_0''}{y_0'}=\frac{z_0''}{z_0'};$$

точки, в которых это имеет место, будут нами рассмотрены ниже (§ 216).

В пространстве уравнения окружности содержат шесть параметров; следовательно, *соприкасающаяся окружность* имеет с кривою Γ прикосновение второго порядка. Представим уравнения окружности в виде:

$$F(x, y, z)=A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$
$$F_1(x, y, z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

причем переменными параметрами будут a, b, c, R и отношения двух из коэфициентов A, B, C к третьему. Уравнения, определяющие значения этих параметров, будут:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$
$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,$$
$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$
$$(x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=0,$$
$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=0,$$

где x, y, z должны быть заменены соответственно через $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Второе и третье из этих уравнений показывают, что плоскость соприкасающегося круга совпадает с соприкасающеюся плоскостью к кривой Γ (§ 214). Что касается двух последних уравнений, то, рассматривая в них a, b, c как текущие координаты, видим, что они представляют линию пересечения нормальной плоскости к кривой Γ в точке (x, y, z) с нормальною плоскостью в точке, бесконечно близкой к точке (x, y, z) (см. далее, § 220).

212. Прикосновение кривой с поверхностью. Рассмотрим поверхность S и кривую Γ, касающуюся этой поверхности в какой-нибудь точке A. Пусть точке M этой кривой, близкой к точке A, соответствует некоторая точка M' поверхности таким образом, что обе точки M и M' вместе приближаются к точке A. Найдем сначала, каким образом нужно выбрать точки M и M', чтобы порядок малости расстояния MM' относительно длины дуги AM был возможно выше. Выберем такую систему прямоугольных осей координат, чтобы касательная к кривой Γ в точке A не была параллельна плоскости yOz, и чтобы касательная плоскость к поверхности S в точке A не была параллельна оси Oz. Пусть будут x_0, y_0, z_0 координаты точки A, $Z=F(x, y)$ — уравнение поверхности S, $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ — уравнения кривой Γ, и предположим, что при некотором законе соответствия между точками M и M' расстояние MM' будет бесконечно малым $(n+1)$-го порядка. Координаты x, y, z точки M будут:

$$x_0+h, \quad f(x_0+h), \quad \varphi(x_0+h);$$

обозначим через X, Y, $Z=F(X, Y)$ координаты точки M. Для того чтобы расстояние MM' было относительно длины дуги AM, или, что то же, относительно h, бесконечно малым $(n+1)$-го порядка, необходимо, чтобы каждая из разностей $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ была бесконечно малою, по крайней мере, $(n+1)$-го порядка. Следовательно, должно быть:

$$X-x=\alpha h^{n+1}, \quad Y-y=\beta h^{n+1}, \quad Z-z=\gamma h^{n+1},$$

где α, β, γ остаются конечными при $h=0$. Отсюда имеем:

$$F(x+\alpha h^{n+1}, y+\beta h^{n+1})-z=\gamma h^{n+1}.$$

Из этого равенства следует, что разность $F(x, y)-z$ сама должна быть бесконечно малою, по крайней мере, $(n+1)$-го порядка. Это показывает, что если мы будем считать соответствующею точке M кривой Γ ту точку N поверхности S, в которой прямая, проходящая через M и параллельная оси Oz, пересекает эту поверхность, то порядок малости расстояния MN будет не ниже порядка малости расстояния MM'. Следовательно, мы получим порядок прикосновения кривой и поверхности, если найдем порядок малости расстояния MN относительно длины дуги AM, или, что то же, относительно h. Иначе можно сказать, что порядок прикосновения кривой и поверхности есть *порядок прикосновения кривой* Γ *с кривою* Γ', *представляющею линию пересечения поверхности* S *с цилиндром, проектирующим кривую* Γ *на плоскость* xOy *параллельно оси* Oz. (При этом очевидно, что за направление оси Oz мы можем принять любое направление, не параллельное касательной плоскости.)

Уравнения кривой Γ' будут:

$$y=f(x), \quad Z=F[x, f(x)]=\Phi(x);$$

по предположению, мы имеем:

$$\Phi(x_0)=\varphi(x_0), \quad \Phi'(x_0)=\varphi'(x_0);$$

если, кроме того, будет:

$$\Phi''(x_0)=\varphi''(x_0), \ldots, \quad \Phi^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0), \quad \Phi^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0),$$

то кривая и поверхность будут иметь прикосновение n-го порядка. Так как уравнение $\Phi(x)=\varphi(x)$ дает абсциссы точек пересечения кривой с поверхностью, то предыдущие условия прикосновения n-го порядка показывают также, что $(n+1)$ точек пересечения кривой с поверхностью сливаются в одну точку A.

Рассмотрим еще тот случай, когда кривая Γ представлена уравнениями $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, а поверхность S — уравнением $F(x, y, z)=0$. Здесь определенная выше кривая Γ' представится уравнениями $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\pi(t)$, где функция $\pi(t)$ определяется соотношением:

$$F[f(t),\ \varphi(t),\ \pi(t)]=0.$$

Чтобы кривые Γ и Γ' имели прикосновение n-го порядка, необходимо, чтобы разность $\pi(t)-\psi(t)$ была относительно $t-t_0$ бесконечно малою $(n+1)$-го порядка, т. е. чтобы было

$$\pi(t_0)=\psi(t_0),\quad \pi'(t_0)=\psi'(t_0),\ \ldots,\quad \pi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0).$$

Вводя, как выше (§ 210), функцию $\mathfrak{F}(t)$, мы можем представить эти условия в виде:

$$\mathfrak{F}(t_0)=0,\quad \mathfrak{F}'(t_0)=0,\ \ldots,\quad \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0.$$

Эти условия выражают, что $n+1$ точек пересечения поверхности с кривою слились в одну точку прикосновения.

Если уравнение поверхности S зависит от $n+1$ параметров $a, b, c, \ldots, l$, то можно выбрать значения этих параметров таким образом, чтобы эта поверхность имела с данною кривою в данной точке прикосновение n-го порядка. Полученная таким образом поверхность называется *соприкасающеюся поверхностью.*

В случае плоскости мы имеем три параметра; эти параметры определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D&=0,\\ Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)\qquad&=0,\\ Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)\qquad&=0.\end{aligned}$$

Мы получили те же самые уравнения, которыми определялась соприкасающаяся плоскость (§ 203); очевидно, что прикосновение будет, вообще, второго порядка. Чтобы порядок прикосновения был выше второго, должно быть

$$Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)=0,$$

т. е. соприкасающаяся плоскость должна быть стационарною (см. ниже, § 215).

Уравнение шара зависит от четырех параметров; следовательно, соприкасающийся шар имеет с кривою Γ прикосновение третьего порядка. Вычисления будут проведены ниже (§ 228).

213. Прямые, соприкасающиеся с данною поверхностью. Если уравнения кривой C зависят от $n+2$ переменных параметров, то можно выбрать значения этих параметров таким образом, чтобы эта кривая имела с данною поверхностью S в данной точке M прикосновение n-го порядка. В самом деле, если мы выразим, что кривая C проходит через точку M и встречает в этой точке поверхность S в $n+1$ слившихся точках, то получим для определения значения этих параметров всего $n+2$ уравнения. Например, уравнения прямой зависят от четырех параметров, следовательно, через каждую точку поверхности проходят одна или несколько прямых, имеющих с поверхностью прикосновение второго порядка. Чтобы найти эти прямые, примем рассматриваемую точку M поверхности S за начало координат и предположим, что ось Oz не лежит в касательной плоскости к поверхности S в точке M. Пусть будет $z=F(x, y)$ уравнение поверхности S относительно этой системы осей. Так как искомая прямая, очевидно, проходит через начало координат, то ее уравнения будут иметь вид:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\rho.$$

Уравнение $c\rho=F(a\rho, b\rho)$ должно иметь $\rho=0$ тройным корнем; следовательно, должно быть:

$$c=ap+bq,$$
$$0=a^2r+2abs+b^2t,$$

где p, q, r, s, t представляют значения производных первого и второго порядков от $F(x, y)$ при $x=y=0$. Первое из этих соотношений показывает, что искомая прямая лежит в касательной плоскости к поверхности, что очевидно a priori. Мы видим, далее, что отношение $\frac{b}{a}$ определяется из уравнения второй степени, корни которого будут действительны, если $s^2-rt>0$. Таким образом через каждую точку поверхности проходят две и только две прямых, имеющих с поверхностью прикосновение второго порядка; эти прямые будут действительными или мнимыми в зависимости от знака s^2-rt. Мы встретимся с этими прямыми в следующей главе при рассмотрении кривизны поверхностей.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Пусть будет C данная кривая третьего порядка, имеющая двойную точку в точке O. Стороны прямого угла MON, вращающегося около точки O, встречают кривую C соответственно в точках M и N. Найти огибающую прямой MN. Рассмотреть, в частности, те случаи, когда уравнение кривой C будет $\lambda y^2=x^3$, и $x^3+y^3=\mu xy$.

2. Найти те точки, в которых кривая, представляемая уравнениями

$$x=a(n\omega-\sin\omega), \quad y=a(n-\cos\omega),$$

имеет с соприкасающимся кругом прикосновение выше второго порядка.

3. Пусть будут m, m_1, m_2 три близких между собою точки некоторой плоской кривой. Найти предельное значение радиуса круга, описанного около треугольника, образованного касательными в точках m, m_1, m_2, когда все эти три точки совпадают между собою.

4. Доказать, что если замкнутая кривая, без точек перегиба, имеет замкнутую развертку, то полная длина этой развертки равна удвоенной разности между суммою значений максимумов радиусов кривизны и суммою значений минимумов радиусов кривизны для всех точек первой кривой.

5. Проведем из каждой точки данной кривой отрезок постоянной длины, образующий с нормалью к кривой постоянный угол. Доказать, что каждая нормаль, проведенная к геометрическому месту концов этих отрезков, проходит через соответствующий центр кривизны данной кривой.

6. Пусть будут r радиус-вектор, проведенный из данного полюса в одну из точек какой-нибудь плоской кривой, и p — расстояние от полюса до касательной

к кривой в этой точке; доказать, что радиус кривизны R выражается формулою $R = \pm r \frac{dr}{dp}$.

7. Доказать, что место фокусов парабол, имеющих с данною кривою в данной точке прикосновение второго порядка, есть окружность.

8. Найти место центров эллипсов с данным направлением осей, имеющих с данною кривою в данной точке прикосновение второго порядка.

9. Пусть будет $F(X, Y; x, y)$ функция от двух пар переменных (x, y), (X, Y). Если рассматривать x и y в уравнении $F=0$ как координаты определенной точки m, а X и Y как текущие координаты, то это уравнение ставит в соответствие каждой точке m плоскости кривую c. Если точка m описывает кривую C, то соответствующие кривые c огибают кривую Γ, определенную двумя уравнениями:

$$F(X, Y; x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Эта кривая Γ выводится из кривой C при помощи преобразования прикосновения; обратное преобразование получается, если переменить ролями пары переменных (x, y) и (X, Y). Распространение на поверхности см. § 59.

Приложение:
$$F = X^2 + Y^2 - Xx - Yy.$$

10. Для того чтобы кривая, представляемая уравнением $F(x, y, a) = 0$, имела прикосновение порядка n со своею огибающею, необходимо и достаточно, чтобы в точке прикосновения было;

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial^n F}{\partial a^n} = 0.$$

Применение к случаю, когда C есть окружность.

11. Всякая поверхность $F(x, y, z, a)$ имеет прикосновение второго порядка с ребром возврата огибающей поверхности, которое определяется тремя уравнениями:

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0.$$

12. Определить геометрическое место центров шаров, имеющих в данной точке прикосновение второго порядка с данною кривою.

13. Если огибающая переменного шара, зависящего только от одного параметра, обращается в кривую Γ, то эта кривая имеет с шаром прикосновение второго порядка.

14*. Пусть дана поверхность S; если из каждой точки S как из центра описать сферу Σ переменного радиуса R, то эта сфера, вообще говоря, касается своей огибающей в двух таких точках M, M', что прямая MM' перпендикулярна касательной плоскости к поверхности S в точке m. Вычислить расстояние δ от точки m до прямой MM'.

Если поверхность отнесена к криволинейной прямоугольной системе координат (u, v), так что $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, то

$$\delta^2 = R^2 \left[\frac{1}{E}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\right].$$

15. Если поверхность S касается плоскости P во всех точках некоторой кривой C, лежащей на этой плоскости, то касательная в любой точке этой кривой имеет прикосновение третьего порядка с поверхностью S.

16*. Для каждой точки M поверхности S существует, вообще говоря, ∞^1 окружностей, имеющих соприкосновение третьего порядка с S. Через каждую касательную прямую к поверхности в точке M проходит плоскость одного и только одного из этих кругов. Если M не есть точка округления, то существует *десять* окружностей, имеющих в точке M прикосновение четвертого порядка с поверхностью

[Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. IV, 2-de série, 1880, стр. 348—384.]

ГЛАВА XI.

КРИВЫЕ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ.

I. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ.

214. Определение и уравнение. У нас несколько раз шла речь (§ 203, 211, 212) о соприкасающейся плоскости и кривой двойной кривизны. Прямое определение этой плоскости аналогично определению касательной. Пусть будет M точка кривой двойной кривизны Γ, и MT — касательная в этой точке. Проведем плоскость через прямую MT и через некоторую точку M' кривой Γ, бесконечно близкую к точке M. Когда точка M' неограниченно приближается к точке M, то эта плоскость будет, вообще, стремиться к некоторому определенному положению; эта предельная плоскость называется *соприкасающеюся плоскостью* кривой Γ в точке M.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть будут

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t) \tag{1}$$

выражения координат точек кривой Γ в функции параметра t; пусть точкам M и M' соответствуют значения t и $t+h$ этого параметра. Уравнение плоскости MTM' будет:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

причем коэфициенты A, B, C должны удовлетворять соотношениям:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0, \tag{2}$$

$$A[f(t+h)-f(t)]+B[\varphi(t+h)-\varphi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)]=0. \tag{3}$$

Заменяя в соотношении (3) выражения $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ их разложениями по формуле Тейлора, получим:

$$A\left\{hf'(t)+\frac{h^2}{1\cdot 2}[f''(t)+\varepsilon_1]\right\}+B\left\{h\varphi'(t)+\frac{h^2}{1\cdot 2}[\varphi''(t)+\varepsilon_2]\right\}+\ldots=0;$$

вычитая отсюда соотношение (2), умноженное на h, и разделив результат на $\frac{h^2}{2}$, мы получим систему, равносильную системе уравнений (2) и (3):

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0,$$

$$A[f''(t)+\varepsilon_1]+B[\varphi''(t)+\varepsilon_2]+C[\psi''(t)+\varepsilon_3]=0,$$

где ε_1, ε_2, ε_3 бесконечно малы вместе с h. При приближении h к нулю последнее соотношение обращается в

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0. \tag{4}$$

Следовательно, уравнение соприкасающейся плоскости будет:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{5}$$

причем коэфициенты A, B, C должны удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} A\,dx+B\,dy+C\,dz&=0,\\ A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z&=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Исключая из (5) и (6) коэфициенты A, B, C, мы можем представить уравнение соприкасающейся плоскости в виде:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

Из всех плоскостей, проходящих через касательную к кривой, *соприкасающаяся плоскость есть та, к которой кривая всего теснее примыкает* (§ 212). Рассмотрим сначала какую нибудь другую плоскость, проходящую через касательную прямую; эта плоскость представится уравнением (5), в котором коэфициенты A, B, C уже не удовлетворяют уравнению (4). Пусть будет $F(t)$ результат подстановки выражений $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ вместо текущих координат X, Y, Z в левую часть уравнения (5); мы будем иметь:

$$F(t)=\frac{h^2}{1\cdot 2}\left[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)+\eta\right],$$

где η бесконечно мало вместе с h. Следовательно, расстояние какой-нибудь точки кривой Γ, близкой к точке M, от рассматриваемой плоскости есть бесконечно-малое *второго порядка*; кроме того, так как $F(t)$ при достаточно малых значениях h сохраняет постоянный знак, то отсюда ясно, что вблизи точки прикосновения кривая Γ расположена вся по одну сторону касательной плоскости.

Иначе будет для соприкасающейся плоскости. Для нее мы имеем: $Af''+B\varphi''+C\psi''=0$, и чтобы получить выражение для $F(t)$, нужно продолжить разложение координат точек кривой Γ до членов третьего порядка относительно h. После подстановки будем иметь:

$$F(t)=\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z}{dt^3}+\eta\right).$$

Отсюда видно, что расстояние точки кривой Γ от соприкасающейся плоскости есть бесконечно-малое *третьего порядка*; сверх того, так как $F(t)$ меняет знак вместе с h, то отсюда следует, что *кривая двойной кривизны пересекает соприкасающуюся плоскость в точке прикосновения.* Эти свойства выделяют соприкасающуюся плоскость из всех других плоскостей, проходящих через касательную прямую.

215. Стационарная соприкасающаяся плоскость. Предыдущие заключения теряют силу в том случае, когда коэфициенты A, B, C соприкасающейся плоскости удовлетворяют соотношению:

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0. \tag{7}$$

В этом случае нужно продолжить разложение координат до членов четвертого порядка, и мы получим результат вида:

$$F(t) = \frac{h^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z}{dt^4} + \eta\right).$$

В точках, удовлетворяющих соотношению (7), соприкасающаяся плоскость называется *стационарною* соприкасающеюся плоскостью. Если $A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z$ не равно нулю, — как это и будет иметь место в общем случае, — то $F(t)$ не меняет знака вместе с h, и *кривая не пересекает стационарной соприкасающейся плоскости.* Кроме того, расстояние от точки кривой до стационарной соприкасающейся плоскости будет бесконечно-малым уже не третьего, а четвертого порядка. Если бы мы имели $A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0$, то нужно было бы продолжить разложение до членов пятого порядка, и т. д.

Исключая A, B, C из соотношений (6) и (7), мы получим уравнение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Корнями этого уравнения служат значения t, соответствующие тем точкам кривой Γ, в которых соприкасающаяся плоскость стационарна. Таким образом на каждой кривой двойной кривизны есть, вообще, некоторое число точек, обладающих этим свойством.

Посмотрим, нет ли таких кривых, для которых все соприкасающиеся плоскости были бы стационарными. Выражаясь более точно, найдем все функции x, y, z переменного t, непрерывные вместе с их производными до третьего порядка, под тем условием, чтобы при изменении t между пределами a и b $(a < b)$ предыдущий определитель Δ был тождественно равен нулю.

Предположим сначала, что один из миноров определителя Δ относительно элементов третьей строки, например $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, не обращается в нуль в промежутке (a, b). Из соотношений

$$\left.\begin{aligned} dz &= C_1 dx + C_2 dy, \\ d^2z &= C_1 d^2x + C_2 d^2y \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

мы найдем для C_1 и C_2 функции от t, непрерывные в этом промежутке. Так как $\Delta = 0$, то эти функции удовлетворяют также соотношению:

$$d^3z = C_1 d^3x + C_2 d^3y. \tag{10}$$

Диференцируя уравнения (9) и принимая во внимание формулу (10), мы получим новые уравнения:

$$dC_1\,dx + dC_2\,dy = 0, \quad dC_1\,d^2x + dC_2\,d^2y = 0,$$

откуда будем иметь: $dC_1 = dC_2 = 0$. Следовательно, коэфициенты C_1, C_2 постоянны, и, интегрируя первое из уравнений (9), получим:

$$z = C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где C_3 — новое постоянное. Отсюда следует, что кривая Γ — плоская.

Если при некотором значении c параметра t, заключающемся между a и b, определитель $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ обращается в нуль, то предыдущее рассуждение неприменимо, так как при этом значении c параметра выражения для C_1 и C_2 обращаются в бесконечность или делаются неопределенными. Предположим для определенности, что в промежутке (a, b) определитель $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ обращается в нуль только один раз при $t = c$, и что при этом значении параметра аналогичный определитель $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ не равен нулю. Из предыдущего рассуждения следует, что все точки кривой Γ, соответствующие значениям параметра t в промежутке от a до c, лежат в одной и той же плоскости P, и что все точки кривой, соответствующие значениям параметра от c до b лежат в одной и той же плоскости Q. С другой стороны, так как при $t = c$ минор $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ не равен нулю, то можно выбрать настолько малое число h, чтобы этот минор не обращался в нуль при изменении t от $c - h$ до $c + h$. Следовательно, все точки кривой Γ, соответствующие значениям параметра t от $c - h$ до $c + h$, также лежат в одной плоскости R. Так как эта плоскость R должна иметь бесконечное множество общих точек с плоскостями P и Q, то эти три плоскости совпадают между собою.

Обобщая это рассуждение, мы найдем, что если определители

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x, \qquad dx\,d^2z - dz\,d^2x, \qquad dy\,d^2z - dz\,d^2y$$

не обращаются одновременно в нуль в промежутке (a, b), то все точки кривой Γ лежат в одной плоскости. Если же эти определители обращаются одновременно в нуль, то может случиться, что кривая Γ состоит из нескольких дуг плоских кривых, лежащих в различных плоскостях и соединяющихся между собою в тех точках, в которых уравнение соприкасающейся плоскости принимает неопределенный вид *.

Если три предыдущих минора в некотором промежутке тождественно равны нулю, то линия Γ есть прямая линия или состоит из отрезков прямых линий. Например, если $\frac{dx}{dt}$ не обращается в нуль в промежутке (a, b), то мы можем написать:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{(dx)^2} = 0, \qquad \frac{d^2z\,dx - dz\,d^2x}{(dx)^2} = 0,$$

откуда

$$dy = C_1\,dx, \qquad dz = C_2\,dx,$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Интегрируя еще раз, получим:

$$y = C_1 x + C_1', \qquad z = C_2 x + C_2';$$

отсюда следует, что в этом случае Γ есть прямая линия.

216. Стационарные касательные. Предыдущие исследования приводят нас к изучению на кривой двойной кривизны некоторых особых точек, которых мы еще не рассматривали. Это те точки, для которых имеют место равенства:

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz}. \tag{11}$$

Касательная к кривой в такой точке называется *стационарною* касательною. Пользуясь выражением расстояния от точки до прямой, легко доказать, что расстояние от какой-нибудь точки кривой Γ до касательной в бесконечно близкой

---

* В первый раз этот особый случай, повидимому, был указан Пеано (Peano). Очевидно, что он имеет исключительно аналитический интерес.

точке, которое будет, вообще, бесконечно-малым второго порядка, для стационарной касательной будет бесконечно-малым третьего порядка. Если кривая Γ обращается в плоскую кривую, то стационарными касательными будут касательные в то ках перегиба. Из рассуждений предыдущих параграфов следует, что единственная линия, все касательные которой стационарны, есть прямая.

В каждой точке, в которой касательная стационарна, мы имеем $\Delta=0$, и уравнение соприкасающейся плоскости прнннимает неопределенный вид. Но эта неопределенность — только кажущаяся. Если мы повторим для этого случая вычисления, сделанные в начале § 214, продолжив разложение координат точки M' до членов третьего порядка, и воспользуемся соотношениями (11), то найдем, что уравнение плоскости, проходящей через касательную в точке M и через бесконечно близкую точку M', может быть представлено в виде:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t)+\varepsilon_1 & \varphi'''(t)+\varepsilon_2 & \psi'''(t)+\varepsilon_3 \end{vmatrix}=0,$$

где ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю одновременно с h. Таким образом эта плоскость стремится к вполне определенному предельному положению, и мы получим уравнение соприкасающейся плоскости, заменяя второе из условий (6) следующим

$$A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z=0.$$

Если бы было также

$$\frac{d^3x}{dx}=\frac{d^3y}{dy}=\frac{d^3z}{dz},$$

то нужно было бы заменить второе из соотношений (6) соотношением:

$$Ad^qx+Bd^qy+C\,d^qz=0,$$

где q есть наименьшее целое число, при котором предыдущее соотношение отлично от соотношения $A\,dx+B\,dy+C\,dz=0$. Мы предоставляем читателю доказать это предложение и исследовать для этих случаев положение кривой относительно соприкасающейся плоскости.

В общем случае для стационарной касательной не имеет места соотношение:

$$A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z=0;$$

в такой особой точке каждая касательная плоскость пересекается с кривою, кроме соприкасающейся плоскости, которая с кривою не пересекается.

Прнложение к некоторым кривым. Рассмотрим кривые двойной кривизны Γ, удовлетворяющие соотношению вида:

$$x\,dy-y\,dx=K\,dz, \tag{12}$$

где K — данное постоянное. Из этого соотношения получим:

$$\left.\begin{aligned} x\,d^2y-y\,d^2x&=K\,d^2z, \\ x\,d^3y-y\,d^3x+dx\,d^2y-dy\,d^2x&=K\,d^3z. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Найдем соприкасающиеся плоскости к кривой Γ, проходящие через данную точку (a, b, c) пространства. Координаты точки прикосновения (x, y, z) должны удовлетворять уравнению:

$$\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0;$$

на основании соотношений (12) и (13) это уравнение обращается в

$$ay-bx+K(c-z)=0. \tag{14}$$

Следовательно, точки прикосновения соприкасающейся плоскости с кривою Γ суть точки пересечения этой кривой с плоскостью, проходящею через точку (a, b, c) и представляемою уравнением (14).

Заменяя dz, d^2z, d^3z их значениями из (12) и (13), мы можем представить уравнение $\Delta=0$, определяющее те точки кривой, в которых соприкасающаяся плоскость стационарна, в виде:

$$\Delta=\frac{1}{K}(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2=0;$$

следовательно, для этих точек мы имеем:

$$\frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{y\,dx-x\,dy}=\frac{d^2z}{dz};$$

отсюда видно, что касательная в этих точках также стационарна.

Легко получить несколько кривых двойной кривизны, удовлетворяющих соотношению (12). Например, можно положить

$$x=At^m,\qquad y=Bt^n,\qquad z=Ct^{m+n},$$

где A, B, C, m, n — постоянные. Простейшими кривыми этого рода будут кривая двойной кривизны третьего порядка $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ и кривая двойной кривизны четвертого порядка $x=t$, $y=t^3$, $z=t^4$. Круговая винтовая линия

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t,\qquad z=Kt$$

удовлетворяет тому же условию.

Чтобы получить все кривые двойной кривизны, удовлетворяющие соотношению (12), представим это соотношение в виде:

$$d(xy-Kz)=2y\,dx.$$

Полагая

$$x=f(t),\qquad xy-Kz=\varphi(t),$$

получим из предыдущего соотношения $2yf'(t)=\varphi'(t)$. Решив эти три уравнения относительно x, y, z, будем иметь общие выражения координат в функции переменного параметра:

$$x=f(t),\qquad y=\frac{\varphi'(t)}{2f'(t)},\qquad Kz=\frac{f(t)\,\varphi'(t)}{2f'(t)}-\varphi(t). \tag{15}$$

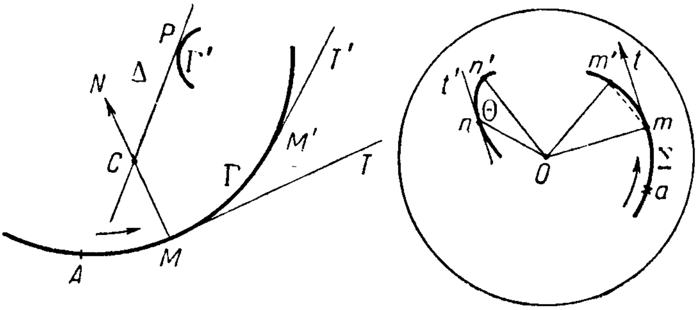
Эти формулы зависят от двух произвольных функций f и φ; но ясно, что, не нарушая общности, мы можем дать одной из этих функций произвольный частный вид, например положить $f(t)=t$.

II. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ. РАЗВЕРТКИ.

217. Сферическая индикатриса. Выберем на кривой двойной кривизны Γ некоторое определенное направление движения, которое примем за положительное, и обозначим через s длину дуги AM кривой, отсчитываемую от некоторой начальной точки A до какой-нибудь точки M и взятую со знаком $+$ или со знаком $-$ в зависимости от того, совпадает ли направление от A к M с положительным направлением, или эти два направления противоположны. Пусть будет MT *положительное* направление касательной прямой в точке M, т. е. направление в сторону возрастания дуг. Если через какую-нибудь точку O пространства мы проведем прямые, параллельные этим касательным, то получим конус S, который является направляющим конусом развертывающейся поверхности, образованной касательными к кривой Γ. Опишем из точки O как из центра сферу радиусом, равным единице, и пусть будет Σ линия пересечения этой сферы с направляющим конусом. Кривая Σ называется *сферической индикатрисою* кривой Γ. Точки этих кривых находятся в однозначном соответствии: каждой точке M кривой Γ соответствует на кривой Σ определенная точка m, в которой прямая, параллельная направлению MT, пересекает сферу.

Когда точка M описывает кривую Γ в положительном направлении, точка m описывает кривую Σ в некотором направлении, которое мы примем за положительное направление на кривой Σ, так чтобы соответствующие дуги s и σ обеих кривых возрастали одновременно (черт. 38).

Очевидно, что при перемещении центра O сферы вся кривая Σ переместится таким же образом; поэтому в последующем мы будем предполагать, что центр O совпадает с началом координат. Точно так же, если мы изменим положительное направление на кривой Γ, то кривая Σ заменится новою кривою, симметричною с прежнею относительно точки O;



Черт. 38.

но должно заметить, что положительное направление mt касательной прямой к кривой Σ не зависит от того, какое из двух направлений на кривой Γ принято за положительное.

Докажем, что плоскость, касающаяся конуса вдоль образующей Om, *параллельна соприкасающейся плоскости к кривой* Γ *в точке* M. В самом деле, пусть будет

$$AX + BY + CZ = 0$$

уравнение плоскости Omm', причем центр O сферы принят за начало координат. Эта плоскость параллельна касательным к кривой Γ в точках M и M'; следовательно, если точкам M и M' соответствуют значения t и $t+h$ параметра, то должно быть:

$$Af'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0, \tag{16}$$

$$Af'(t+h) + B\varphi'(t+h) + C\psi'(t+h) = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) можно заменить следующим:

$$A\frac{f'(t+h) - f'(t)}{h} + B\frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} + C\frac{\psi'(t+h) - \psi'(t)}{h} = 0;$$

но при приближении h к нулю последнее уравнение обращается в

$$Af''(t) + B\varphi''(t) + C\psi''(t) = 0. \tag{18}$$

Уравнения (16) и (18) к которым мы пришли, — те же, какими определяются коэфициенты A, B, C в уравнении соприкасающейся плоскости,

218. Радиус кривизны. Пусть будет ω угол между положительными направлениями MT, $M'T'$ касательных в двух близких между собою точках M, M' кривой Γ. Предел, к которому стремится частное $\frac{\omega}{\operatorname{arc} MM'}$ при неограниченном приближении точки M' к точке M, называется, как и в случае плоских кривых, *кривизною* кривой Γ в точке M. Количество, обратное кривизне, т. е. равное пределу частного $\frac{\operatorname{arc} MM'}{\omega}$, называется *радиусом кривизны*. Радиус кривизны можно определить иначе как предел отношения бесконечно малых дуг MM' и mm'; в самом деле, мы имеем:

$$\frac{\operatorname{arc} MM'}{\omega}=\frac{\operatorname{arc} MM'}{\operatorname{arc} mm'}\cdot\frac{\operatorname{arc} mm'}{\overline{mm'}}\cdot\frac{\overline{mm'}}{\omega},$$

а при приближении m' к m каждое из отношений $\frac{\operatorname{arc} mm'}{\overline{mm'}}$, $\frac{\overline{mm'}}{\omega}$ имеет пределом единицу. Так как дуги $s=MM'$ и $\sigma=mm'$ изменяются в одинаковом направлении, то мы имеем:

$$R=\frac{ds}{d\sigma}. \tag{19}$$

Пусть будут

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \tag{20}$$

уравнения кривой Γ, причем точка O взята за начало координат. Тогда координатами (α, β, γ) точки m будут направляющие косинусы касательной MT:

$$\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \beta=\frac{dy}{ds}, \quad \gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Отсюда имеем:

$$d\alpha=\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^2}, \quad d\beta=\frac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{ds^2}, \quad d\gamma=\frac{ds\,d^2z-dz\,d^2s}{ds^2},$$

$$d\sigma^2=d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=\frac{(ds\,d^2x-dx\,d^2s)^2+(ds\,d^2y-dy\,d^2s)^2+(ds\,d^2z-dz\,d^2s)^2}{ds^4}.$$

Возводя в квадрат и принимая во внимание выражения для ds^2 и $ds\,d^2s$, получим:

$$d\sigma^2=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2}{ds^4}.$$

Вводя обозначения

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y, \quad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z, \quad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x, \tag{21}$$

которыми мы далее будем пользоваться, и применяя тождество Лагранжа, мы можем представить предыдущее выражение в виде:

$$d\sigma^2=\frac{A^2+B^2+C^2}{ds^4}.$$

При этом формула (19) для радиуса кривизны обращается в

$$R^2 = \frac{ds^6}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{22}$$

Мы видим, что R^2 есть рациональная функция от x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''. Самый радиус кривизны имеет иррациональное выражение, но он рассматривается как количество существенно положительное.

Примечание. Если за независимое переменное взята длина дуги s кривой Г, то функции $f(s)$, $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ будут удовлетворять уравнению:

$$f'^2(s) + \varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1.$$

Далее, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = f'(s), && \beta = \varphi'(s), && \gamma = \psi'(s), \\ &d\alpha = f''(s)\,ds, && d\beta = \varphi''(s)\,ds, && d\gamma = \psi''(s)\,ds, \\ &d\sigma^2 = \left\{[f''(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2\right\} ds^2, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

и выражение для радиуса кривизны принимает особенно простой вид:

$$\frac{1}{R^2} = [f''(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2. \tag{24}$$

219. Главная нормаль. Центр кривизны. Проведем через точку M кривой Г прямую, параллельную касательной прямой mt к кривой Σ в точке m, и рассмотрим на этой прямой направление MN, параллельное положительному направлению mt. Полученная таким образом прямая называется *главною нормалью* кривой Г; это та нормаль, которая лежит в соприкасающейся плоскости, так как mt перпендикулярно к Om, и плоскость Omt параллельна соприкасающейся плоскости (§ 217). Направление MN называется *положительным направлением главной нормали*. Это есть вполне определенное направление, так как направление касательной mt не зависит от направления, выбранного на кривой Г. Ниже мы увидим, как можно определить это направление, не пользуясь индикатрисою.

Отложим на направлении MN, начиная от точки M, длину MC, равную радиусу кривизны; полученная таким образом точка C называется *центром кривизны* кривой Г в точке M, а круг, описанный в соприкасающейся плоскости из точки C как из центра радиусом, равным MC, называется *кругом кривизны*. Пусть будут α', β', γ' направляющие косинусы главной нормали. Координаты x_1, y_1, z_1 центра кривизны будут равны:

$$x_1 = x + R\alpha', \quad y_1 = y + R\beta', \quad z_1 = z + R\gamma'.$$

Но мы имеем:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = R\frac{d\alpha}{ds} = R\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3},$$

и такие же формулы имеют место для β' и γ'. Заменяя в формуле для x_1 количество α' его значением, получим:

$$x_1 = x + R^2\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}.$$

Коэфициент при R^2 можно иначе представить в виде:

$$\frac{ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s}{ds^4} = \frac{d^2x(dx^2+dy^2+dz^2) - dx(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)}{ds^4},$$

или, вводя коэфициенты A, B, C:

$$\frac{B\,dz - C\,dy}{ds^4}.$$

Значения для y_1 и z_1 получатся круговою подстановкою из значения для x_1, и таким образом мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + R^2\frac{B\,dz - C\,dy}{ds^4}, \\ y_1 &= y + R^2\frac{C\,dx - A\,dz}{ds^4}, \\ z_1 &= z + R^2\frac{A\,dy - B\,dx}{ds^4}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Эти выражения для x_1, y_1, z_1 рациональны относительно x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''.

Проведем через точку M плоскость Q, перпендикулярную к MN; эта плоскость пройдет через касательную MT и не пересечет в точке M кривой Γ (§ 214). Покажем, что центр кривизны и все точки кривой Γ, близкие к точке M, лежат по одну сторону этой плоскости Q. Чтобы это доказать, примем за независимое переменное длину дуги s кривой Γ, отсчитываемую от точки M. Для координат X, Y, Z точки M', близкой к M, мы будем иметь выражения:

$$X = x + \frac{s}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon\right),$$

и соответствующие выражения для координат Y и Z. Но так как за независимое переменное принято s, то

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R}\alpha',$$

и формула для X принимает вид:

$$X = x + \alpha s + \left(\frac{\alpha'}{R} + \varepsilon\right)\frac{s^2}{1\cdot 2}.$$

Заменяя в левой части уравнения плоскости Q

$$\alpha'(X - x) + \beta'(Y - y) + \gamma'(Z - z) = 0$$

текущие координаты X, Y, Z приведенными выше разложениями координат точки M', получим:

$$\frac{s}{1}(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + \frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{R} + \eta\right) = \frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \eta\right),$$

где η бесконечно мало одновременно с s; но это количество положительно при всех значениях s, близких к нулю. Точно так же, заменяя X, Y, Z координатами $x+R\alpha'$, $y+R\beta'$, $z+R\gamma'$ центра кривизны, мы найдем, что результат подстановки будет равен R, т. е. количеству существенно положительному. Таким образом все точки кривой Γ, близкие к M, а также и центр кривизны лежат по одну сторону касательной плоскости, и следовательно, теорема доказана.

220. Полярная прямая. Полярная поверхность. Перпендикуляр Δ к соприкасающейся плоскости, проведенный через центр кривизны, называется *полярною прямою*. Эта прямая есть характеристика плоскости, нормальной к кривой Γ. В самом деле, очевидно, что линия пересечения двух нормальных плоскостей, проходящих через две близкие точки M и M' кривой Γ, есть прямая D, перпендикулярная к касательным MT и $M'T'$, а следовательно и к плоскости mOm'. Когда точка M' приближается к точке M, то, в пределе плоскость mOm' делается параллельною соприкасающейся плоскости, и следовательно, прямая D в пределе обращается в прямую, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости. Чтобы доказать, что эта прямая проходит через центр кривизны, примем за независимое переменное длину дуги s кривой Γ. Уравнение нормальной плоскости будет:

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0. \tag{26}$$

Характеристика нормальной плоскости определится уравнениями (26) и (27):

$$\frac{\alpha'}{R}(X-x)+\frac{\beta'}{R}(Y-y)+\frac{\gamma'}{R}(Z-z)-1=0. \tag{27}$$

Уравнение (27) представляет плоскость, перпендикулярную к главной нормали и проходящую через центр кривизны. Следовательно, линия пересечения этих двух плоскостей есть полярная прямая.

Отсюда видно, что центр кривизны совпадает с центром соприкасающегося круга (§ 211), и что, следовательно, круг кривизны тождествен с соприкасающимся кругом. Этот результат можно было заранее предвидеть, потому что две кривые, имеющие соприкосновение второго порядка, имеют один и тот же круг кривизны, так как для обеих этих кривых y', z', y'', z'' имеют одинаковые значения.

Линейчатая поверхность, образуемая полярными прямыми, называется *полярною поверхностью*. Как видно из предыдущего, полярная поверхность есть в то же время развертывающаяся поверхность, огибающая нормальных плоскостей к кривой Γ. Если кривая Γ плоская, то полярная поверхность есть цилиндр, имеющий своим перпендикулярным сечением развертку кривой Γ. В этом частном случае все предыдущие свойства вполне очевидны.

221. Кручение. Заменяя в определении кривизны касательную прямую соприкасающеюся плоскостью, мы придем к новому геометрическому элементу, который служит мерою той скорости, с какою вращается соприкасающаяся плоскость, когда точка M движется по кривой Γ. Пусть будет ω' угол между двумя соприкасающимися плоскостями в двух бесконечно близких точках M и M'. Предел частного $\frac{\omega'}{\operatorname{arc} MM'}$ при неограниченном приближении точки M' к точке M называется *кручением* кривой в точке M. Количество, обратное кручению, называется *радиусом кручения*.

Прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*. Выберем на бинормали положительное направление (какое из двух направлений мы примем за положительное, это мы установим далее) и обозначим через α'', β'', γ'' соответствующие ему направляющие косинусы. Прямая, проходящая через начало координат и параллельная этому направлению, пересечет сферу с радиусом, равным единице, в некоторой точке n, которую мы будем считать соответствующею точке M кривой Γ. Местом точек n будет некоторая сферическая кривая Θ, и, как и выше, легко доказать, что радиус кручения T можно также определить как предел отношения соответствующих бесконечно малых дуг $\operatorname{arc} MM'$, $\operatorname{arc} nn'$ кривых Γ и Θ. Таким образом мы имеем:

$$T^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2},$$

где τ обозначает длину дуги кривой Θ.

Координатами точки n будут α'', β'', γ'', т. е.:

$$\alpha'' = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta'' = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma'' = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

причем во всех трех формулах корень должен быть взят с одинаковым знаком. Из этих формул мы получим $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$; например,

$$d\alpha'' = \pm\frac{(A^2+B^2+C^2)\,dA - A\,(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как $d\tau^2 = d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2$, то из предыдущего будем иметь:

$$d\tau^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2) - (A\,dA + B\,dB + C\,dC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2},$$

или, на основании тождества Лагранжа:

$$d\tau^2 = \frac{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Числитель этого выражения можно упростить, пользуясь соотношениями

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0;$$

из них мы имеем:

$$\frac{dx}{B\,dC - C\,dB} = \frac{dy}{C\,dA - A\,dC} = \frac{dz}{A\,dB - B\,dA} = \frac{1}{K}, \tag{28}$$

где через $\frac{1}{K}$ обозначено общее значение этих отношений. Отсюда получаем:

$$d\tau^2 = \frac{K^2\, ds^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Что касается значения K, то, развертывая, мы получим:

$$K = \frac{(dz\, d^2x - dx\, d^2z)(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - (dx\, d^2y - dy\, d^2x)(dz\, d^3x - dx\, d^3z)}{dx} =$$
$$= dz\, d^2x\, d^3y - dx\, d^2z\, d^3y + dx\, d^2y\, d^3z - dy\, d^2x\, d^3z + dy\, d^2z\, d^3x - dz\, d^2y\, d^3x.$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как развернутый определитель Δ [§ 215, (8)]. Таким образом мы имеем:

$$d\tau = \pm \frac{\Delta\, ds}{A^2 + B^2 + C^2},$$

и, следовательно,

$$T = \pm \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}. \tag{29}$$

Если мы будем рассматривать радиус кручения T, подобно радиусу кривизны R, как количество существенно положительное, то для T нужно брать абсолютную величину правой части выражения (29). Но полученное выражение (29) рационально относительно x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', а потому естественно брать в правой части формулы (29) всегда один и тот же знак, т. е. рассматривать радиус кручения как длину, взятую с определенным знаком. При этом оказывается, что в зависимости от того, будет ли для точки M радиус кручения иметь положительное или отрицательное значение, кривая Γ вблизи точки M будет иметь двоякое расположение.

Так как теперь знак T зависит только от знака Δ, то рассмотрим, как меняется вид кривой Γ вблизи точки M в зависимости от знака определителя Δ. Предположим, что трехгранный угол $Oxyz$ расположен таким образом, что для наблюдателя, стоящего на плоскости xOy в точке O со стороны положительных z, вращение от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy кажется совершающимся на 90° справа налево.

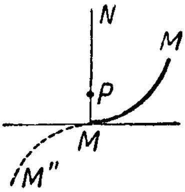
Выберем теперь на бинормали положительное направление MN_b таким образом, чтобы трехгранный угол (MT, MN, MN_b) имел то же расположение ребер, как и трехгранный угол $Oxyz$*. Тогда, если мы будем перемещать непрерывно кривую Γ так, чтобы точка M пришла в O, касательная MT совпала с положительным направлением оси Ox, и главная нормаль MN — с положительным направлением оси Oy, то MN_b совпадет с положительным направлением оси Oz. При этом движении абсолютная величина радиуса кручения T остается неизменной; поэтому определитель Δ не может обратиться в нуль и, следовательно, не меняет-

* Трехгранный угол, образованный касательною, нормалью и бинормалью, называется *основным трехгранным углом (триэдром)* для данной точки кривой. *(Ред.)*

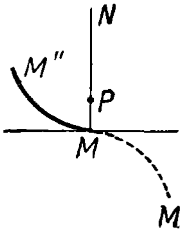
знака*. Предположим, что кривая Г отнесена к этой новой системе координат, и что значение параметра $t=0$ соответствует началу координат. Выражения координат точки, близкой к началу, будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + t^2(a_2+\varepsilon), \\ y &= b_2 t^2 + t^3(b_3+\varepsilon'), \\ z &= t^3(c_3+\varepsilon''), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где ε, ε', ε'' бесконечно малы вместе с t; в самом деле, при $t=0$ при таком выборе осей должно быть: $dy=dz=d^2z=0$. Мы можем предположить, что $a_1>0$, так как в противном случае достаточно заменить t через $-t$, чтобы a_1 изменилось в $-a_1$; количество b_2 — положительно, так как при значениях t, близких к нулю, y должно быть положительно; наконец, c_3 может быть как положительным, так и отрицательным. Но при $t=0$ мы имеем $\Delta=12a_1b_2c_3dt^6$, так что знак определителя Δ одинаков со знаком количества c_3. Поэтому нужно различать два случая в зависимости от знака c_3. Если $c_3>0$, то x и z отрицательны при изменении t от $-h$ до 0, и положительны при изменении t от 0 до $+h$, где h есть малое положительное число. В таком случае наблюдатель, стоящий на соприкасающейся плоскости в точке M и обращенный лицом к центру кривизны P, увидел бы дугу MM' вправо от себя над соприкасающеюся плоскостью, а дугу MM'' влево под соприкасающеюся плоскостью (черт. 39a), следовательно, это — *правая* кривая (dextrorsum). Если бы было $c_3<0$, то расположение кривой было бы обратным (черт. 39b), и кривая была бы *левою* (sinistrorsum). При этом безразлично, на которой из двух сторон соприкасающейся плоскости будет стоять наблюдатель. Вид правой кривой имеет штопор; из вьющихся растений боб имеет вид правой кривой, а хмель — левой. Эти два расположения кривой существенно различны. Например, две винтовые линии с одинаковым ходом, начерченные на двух круглых цилиндрах с одинаковым радиусом, наложимы одна на другую, если они обе правые или обе левые; если же одна правая, а другая левая, то одна из них наложима на винтовую линию, симметричную с другою относительно какой-либо плоскости.



Черт. 39a.



Черт. 39b.

В последующем мы будем писать формулу радиуса кручения T в виде:

$$T=-\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}. \tag{31}$$

* Впрочем, легко доказать непосредственным вычислением, что при переходе от одной системы прямоугольных осей к другой системе прямоугольных осей с тем же расположением осей знак определителя Δ не меняется.

Кривая будет левою в тех точках, где T положительно, и правою в тех точках, где T отрицательно. Если бы трехгранный угол имел обратное расположение, то и предыдущее правило нужно было бы заменить обратным.

222. Формулы Френе. Каждая точка M кривой Γ представляет вершину прямого трехгранного угла, образованного касательною, главною нормалью и бинормалью и расположенного одинаково с трехгранным углом $Oxyz$. Положительное направление главной нормали — вполне определенное; напротив, положительное направление касательной может быть взято произвольно и, в свою очередь, определяет собою положительное направление бинормали. Диференциалы от девяти направляющих косинусов (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ этих трех прямых выражаются весьма просто через R, T и через самые косинусы при помощи формул, данных Френе (Frenet)*. Мы уже вывели формулы для $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}. \tag{32}$$

Направляющие косинусы положительного направления бинормали будут:

$$\alpha''=\varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\beta''=\varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma''=\varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $\varepsilon=\pm 1$.

Так как трехгранный угол (MT, MN, MN_b) расположен одинаково с углом $Oxyz$, то должно быть:

$$\alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma'',$$

или

$$\alpha'=\varepsilon\frac{B\gamma-C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

С другой стороны, формулу для $d\alpha''$ можно представить в виде:

$$d\alpha''=\varepsilon\frac{B(B\,dA-A\,dB)+C(C\,dA-A\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или, принимая во внимание соотношения (28) и значение количества K:

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\varepsilon\Delta\frac{C\beta-B\gamma}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\alpha'\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

---

* *Nouvelles Annales de Mathématiques*, стр. 284, 1864.

Коэфициент при α' есть не что иное, как $\frac{1}{T}$ [формула (31)]; вычисляя таким же образом $\frac{d\beta''}{ds}$, $\frac{d\gamma''}{ds}$, получим*:

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T},\quad \frac{d\beta''}{ds}=\frac{\beta'}{T},\quad \frac{d\gamma''}{ds}=\frac{\gamma'}{T};\tag{33}$$

эти формулы сходны с формулами (32).

Чтобы получить $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, продиференцируем известные нам соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1,\\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0,\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0;\end{aligned}$$

заменяя $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$ их значениями из (32) и (33), будем иметь:

$$\begin{aligned}\alpha'\,d\alpha'+\beta'\,d\beta'+\gamma'\,d\gamma'&=0,\\ \alpha\,d\alpha'+\beta\,d\beta'+\gamma\,d\gamma'+\frac{ds}{R}&=0,\\ \alpha''d\alpha'+\beta''d\beta'+\gamma''d\gamma'+\frac{ds}{T}&=0.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, получим:

$$\frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T},\quad \frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta''}{T},\quad \frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}.\tag{34}$$

Формулы (32), (33), (34) суть искомые формулы Френе.

Примечание. Из формулы (33) видно, что касательная к сферической кривой Θ, описанной точкою n с координатами α'', β'', γ'', параллельна главной нормали. Это можно доказать и геометрически. В самом деле, рассмотрим конус S', вершина которого лежит в точке O, а направляющею линиею служит кривая Θ. Образующая On этого конуса перпендикулярна к плоскости. касающейся конуса S вдоль образующей Om (§ 221), и, следовательно, конус S' есть дополнительный конус к конусу S. Но, как известно, свойства дополнительных конусов взаимны, так что, обратно, образующая Om конуса S перпендикулярна к плоскости, касающейся конуса S' вдоль On. Так как касательная mt к кривой Σ перпендикулярна к прямым Om и On, то она перпендикулярна к плоскости mOn. По той же причине касательная nt' к кривой Θ перпендикулярна к плоскости mOn. Следовательно, прямые mt и nt' параллельны.

223. Разложение координат x, y, z, по степеням s. Если даны две функции независимого переменного s, $R=\varphi(s)$, $T=\psi(s)$, из которых первая положительна, то существует кривая двойной кривизны Γ, вполне определенная по своему виду, но не по положению в пространстве,

---

* Если бы мы взяли формулу кручения в виде: $\frac{1}{T}=\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}$, то формулы Френе нужно было бы написать в виде: $d\alpha''=-\frac{\alpha' ds}{T},\ldots$

у которой радиус кривизны и радиус кручения выражаются этими двумя формулами в функции длины ее дуги, отсчитываемой от некоторой точки этой кривой. Строгое доказательство этого предложения может быть дано лишь после теории диференциальных уравнений. Мы здесь только покажем, каким образом можно найти разложения координат точки искомой кривой по степеням s, предполагая, что эти разложения возможны.

Примем за оси координат касательную, главную нормаль и бинормаль в точке O и будем отсчитывать длину дуги этой кривой, начиная от точки O. Выражения координат точки кривой, близкой к началу координат, будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{s}{1}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \ldots, \\ y &= \frac{s}{1}\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \ldots, \\ z &= \frac{s}{1}\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Но мы имеем:

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{da}{ds} = \frac{a'}{R},$$

и, диференцируя еще раз:

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{a'}{R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{1}{R}\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right).$$

Вообще, последовательное применение формул Френе даст для $\frac{d^nx}{ds^n}$ выражение вида:

$$\frac{d^nx}{ds^n} = L_n a + M_n a' + P_n a'',$$

где L_n, M_n, P_n — известные функции от R, T и от их производных по s различных порядков. Таким же образом, заменяя a, a', a'' соответственно через β, β', β'' и γ, γ', γ'', мы получим производные от y и z. Но в начале координат должно быть $a_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $a'_0 = 0$, $\beta'_0 = 1$, $\gamma'_0 = 0$, $a''_0 = 0$, $\beta''_0 = 0$, $\gamma''_0 = 1$, поэтому, ограничиваясь в формулах (35) тремя первыми членами, мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{s}{1} - \frac{s^3}{6R^2} + \ldots, \\ y &= \frac{s^2}{2R} - \frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds} + \ldots, \\ z &= -\frac{s^3}{6RT} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

причем дальнейшие члены будут выше третьей степени. Понятно, что в формулах (36) R, T, $\frac{dR}{ds}$, ... должны быть заменены их значениями при $s=0$.

С помощью этих формул легко вычислить главные части некоторых бесконечно-малых. Так, расстояние от какой-нибудь точки кривой до соприкасающейся плоскости в бесконечно близкой точке той же кривой есть бесконечно-малое третьего порядка, и его главная часть равна $-\frac{s^3}{6RT}$. Расстояние от точки кривой до оси Ox, т. е. касательной, есть бесконечно-малое второго порядка, и его главная часть равна $\frac{s^2}{2R}$ (§ 209). Вычислим еще длину бесконечно малой хорды c. Мы имеем:

$$c^2=x^2+y^2+z^2=s^2-\frac{s^4}{12R^2}+\dots,$$

причем дальнейшие члены будут выше четвертой степени. Отсюда следует:

$$c=s\left(1-\frac{s^2}{12R^2}+\dots\right)^{\frac{1}{2}}=s\left(1-\frac{s^2}{24R^2}+\dots\right);$$

таким образом разность $s-c$ есть бесконечно-малое *третьего порядка*, и его главная часть равна $\frac{s^3}{24R^2}$.

Точно так же можно доказать, что кратчайшее расстояние между касательными в двух бесконечно близких точках кривой есть бесконечно-малое третьего порядка, главная часть которого равна $\frac{s^3}{12RT}$. Эта теорема принадлежит Буке (Bouquet).

224. Естественное (внутреннее) уравнение кривой. Если радиус кручения кривой T равен бесконечности, то кривая плоская, так как Δ должно быть равно нулю (§ 215), и в этом случае определяющие кривую диференциальные уравнения интегрируются в квадратурах.

Вообразим, что за независимое переменное взята дуга s; прямоугольные координаты x и y как функции s удовлетворяют двум уравнениям (§ 218, примечание):

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \quad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\left[\frac{1}{\varphi(s)}\right]^2. \tag{37}$$

Первому из этих уравнений можно удовлетворить, полагая $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$, где через α обозначен угол, образуемый с осью x положительным направлением касательной, и тогда второе из уравнений (37) дает нам:

$$d\alpha=\pm\frac{ds}{\varphi(s)};$$

эту формулу можно было бы написать непосредственно, исходя из определения радиуса кривизны.

Интегрируя, имеем:

$$\alpha=\alpha_0\pm\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)},$$

и затем находим x и y при помощи двух новых квадратур:

$$x=x_0+\int\limits_{s_0}^{s}\cos\alpha\,ds,\quad y=y_0+\int\limits_{s_0}^{s}\sin\alpha\,ds.$$

Получающиеся кривые зависят от трех постоянных: x_0, y_0, α_0; но, если мы будем обращать внимание только на форму кривой, а не на ее положение, то получим в сущности, только одну кривую. В самом деле, рассмотрим частную кривую C, представляемую уравнениями:

$$X=\int\limits_{s_0}^{s}\cos\left[\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds,\quad Y=\int\limits_{s_0}^{s}\sin\left[\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds.$$

Если мы в выражении для α возьмем знак плюс, то общие формулы могут быть представлены в виде:

$$x=x_0+X\cos\alpha_0-Y\sin\alpha_0,$$
$$y=y_0+X\sin\alpha_0+Y\cos\alpha_0.$$

Следовательно, они представляют ту же кривую C, но иначе расположенную относительно осей координат. Точно так же, если мы возьмем при $\varphi(s)$ знак минус, то получим кривую, симметричную с кривою C относительно оси X. Следовательно, плоская кривая будет вполне определена по своей форме, если известен радиус кривизны кривой в функции длины дуги. Уравнение $R=\varphi(s)$ называется *естественным уравнением* (équation intrinsèque) кривой. Вообще, если дано соотношение между двумя из количеств R, s, α, то кривая будет вполне определена по своей форме, и координаты ее точек могут быть получены посредством квадратур. Так, если известен радиус кривизны R в функции угла α, $R=f(\alpha)$, то мы имеем: $ds=f(\alpha)\,d\alpha$ и затем

$$dx=\cos\alpha\,f(\alpha)\,d\alpha,$$
$$dy=\sin\alpha\,f(\alpha)\,d\alpha,$$

и x и y получаются посредством двух квадратур. Если, например, R постоянно, то из предыдущих формул имеем:

$$x=x_0+R\sin\alpha,\quad y=y_0-R\cos\alpha;$$

следовательно, искомая кривая есть окружность с радиусом, равным R. Этот результат следует также непосредственно из свойства развертки; так как длина дуги развертки искомой кривой должна равняться нулю, то развертка рассматриваемой кривой должна обратиться в точку.

Найдем еще плоскую кривую, радиус кривизны которой был бы обратно пропорционален длине дуги, $R=\dfrac{a^2}{s}$. Мы имеем:

$$\alpha=\int\limits_{0}^{s}\frac{s\,ds}{a^2}=\frac{s^2}{2a^2};$$

далее

$$x=\int\limits_{0}^{s}\cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds,\quad y=\int\limits_{0}^{s}\sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds.$$

Хотя эти интегралы не выражаются через элементарные функции, тем не менее нетрудно составить представление о форме этой кривой. Когда s изменяется от 0 до $+\infty$, то x и y, проходя через бесконечное множество максимумов и минимумов, стремятся к некоторому общему конечному пределу (§ 87); следовательно, кривая имеет форму спирали и приближается асимптотически к некоторой точке на прямой $y=x$*.

225. Развертывающие и развертки. Кривая Γ_1 называется *развертывающею* (*эвольвентою*) кривой Γ, если касательные к кривой Γ входят в состав нормалей к кривой Γ_1; обратно, кривая Γ называется *разверткою* (*эволютою*) кривой Γ_1. Очевидно, что все развертывающие кривой Γ лежат на развертывающейся поверхности, ребром возврата которой служит кривая Γ, и пересекают ортогонально образующие этой поверхности.

Пусть будут (x, y, z) координаты какой-нибудь точки M кривой Γ, α, β, γ — направляющие косинусы касательной к кривой Γ и l — длина отрезка MM_1 между точкою M и точкою M_1, в которой развертывающая пересекает касательную к развертке в точке M. Координаты точки M_1 будут:

$$x_1 = x + l\alpha, \quad y_1 = y + l\beta, \quad z_1 = z + l\gamma,$$

откуда

$$dx_1 = dx + l\,d\alpha + \alpha\,dl, \quad dy_1 = dy + l\,d\beta + \beta\,dl, \quad dz_1 = dz + l\,d\gamma + \gamma\,dl.$$

Чтобы кривая, описываемая точкою M_1, была нормальна к MM_1, необходимо и достаточно, чтобы было

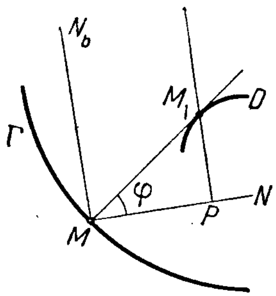
$$\alpha\,dx_1 + \beta\,dy_1 + \gamma\,dz_1 = 0,$$

т. е

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + dl + l(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0,$$

или $ds + dl = 0$.

Следовательно, развертывающие кривой двойной кривизны Γ получаются таким же построением, как и развертывающие плоской кривой.



Черт. 40.

Найдем теперь все различные развертки данной кривой двойной кривизны Γ. Для этого, очевидно, нужно соединить все нормали к кривой Γ в такие семейства, чтобы нормали каждого семейства образовали развертывающуюся поверхность (черт. 40). Всякая нормаль MM_1 определяется как пересечение нормальной плоскости с одной из плоскостей, проходящих через касательную к кривой Γ. Если семейство нормалей MM_1 имеет огибающую, то точка прикосновения M_1 этой прямой с огибающею лежит на пересечении нормальной плоскости с бесконечно близкою нормальной плоскостью (§ 205, примечание II), т. е. на полярной прямой. Следовательно, *все развертки лежат на полярной поверхности.*

Пусть будет D одна из этих разверток, φ — угол между направлением MM_1 и положительным направлением главной нормали, отсчиты-

* Очевидно, что эта кривая расположена симметрично относительно начала, и что значению $s=-\infty$ соответствует вторая асимптотическая точка кривой, симметричная с первою точкою. *(Ред.)*

ваемый, как в тригонометрии, принимая за положительное направление вращения в нормальной плоскости направление вращения на угол $\frac{\pi}{2}$, которое приводит к совпадению положительное направление главной нормали с положительным направлением бинормали (черт. 40). Если λ, μ, ν будут направляющие косинусы этого направления, то для того, чтобы прямая MM_1 образовала развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы было (§ 205):

$$H=\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0. \tag{38}$$

Из соотношений

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0, \quad \lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=\cos\varphi, \quad \lambda\alpha''+\mu\beta''+\nu\gamma''=\sin\varphi$$

получаем:

$$\lambda=\alpha'\cos\varphi+\alpha''\sin\varphi, \quad \mu=\beta'\cos\varphi+\beta''\sin\varphi, \quad \nu=\gamma'\cos\varphi+\gamma''\sin\varphi,$$

и следовательно, по формулам Френе:

$$\frac{d\lambda}{ds}=-\alpha\frac{\cos\varphi}{R}+\alpha'\sin\varphi\left(\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}\right)-\alpha''\cos\varphi\left(\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}\right),$$

а $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$ получатся из этой формулы заменой α, α', α'', соответственно, через β, β', β'' и γ, γ', γ''. Если полученные значения λ, μ, ν, $\frac{d\lambda}{ds}$, $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$ подставить в определитель, он представится как сумма шести определителей; приняв во внимание те из них, которые обратятся в нуль, так как имеют две равных строки, мы получим формулу:

$$\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}=\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Приравнивая левую часть нулю, мы получим уравнение *, из которого угол φ определится при помощи квадратуры:

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^s\frac{ds}{T}. \tag{40}$$

* Этот простой результат может быть получен из геометрических соображений. Пренебрегая бесконечно-малыми третьего порядка, можно предположить, что точка M' кривой Γ, соседняя с M, расположена на круге кривизны кривой Γ в точке M, так что касательная в точке M' служит касательной к окружности. Чтобы две нормали — в точках M и M' — встречались, необходимо и достаточно, чтобы эти две прямые образовывали одинаковый угол с соприкасающейся плоскостью в точке M. Но угол между двумя соприкасающимися плоскостями в M и в M' равен $\frac{ds}{T}$ в силу самого определения кручения. Следовательно, при переходе от точки M к бесконечно близкой точке M' угол нормали с соответствующей соприкасающейся плоскостью возрастает на $d\varphi=\frac{ds}{T}$. Мы пришли к полученному выше результату.

Если мы рассмотрим два различных значения угла φ, соответствующих двум различным значениям постоянного φ_0, то разность этих двух значений угла φ будет оставаться постоянною вдоль кривой Г. Отсюда следует, что *две нормали кривой* Г, *касающиеся двух различных разверток, пересекаются под постоянным углом.* Если известно одно какое-нибудь семейство нормалей кривой Г, образующих развертывающуюся поверхность, то мы получим все другие развертывающиеся поверхности, образованные нормалями кривой Г, если повернем все нормали первого семейства на произвольный, но постоянный угол около точек, в которых они пересекают кривую Г.

Примечание I. Если кривая Г — плоская, то T равно бесконечности, и формула (40) дает $\varphi=\varphi_0$. Развертка, соответствующая значению $\varphi_0=0$, есть обыкновенная плоская развертка, представляющая в то же время место центров кривизны кривой Г. Кроме этой развертки есть еще бесчисленное множество других разверток; все они расположены на цилиндре, перпендикулярным сечением которого служит обыкновенная развертка, и представляют кривые двойной кривизны, называемые *винтовыми линиями*; эти линии будут нами рассмотрены в следующем параграфе. Это — единственный случай, когда место центров кривизны кривой есть в то же время ее развертка. В самом деле, для этого должно быть $\varphi=0$; но для того чтобы уравнение (40) удовлетворялось при $\varphi=0$, необходимо, чтобы T было бесконечно велико, т. е. чтобы было $\Delta=0$. Следовательно, в этом случае кривая Г должна быть плоскою (§ 215).

Примечание II. Если кривая D есть развертка кривой Г, то, обратно, кривая Г есть развертывающая кривой D. Следовательно, обозначая через s_1 дугу развертки, отсчитываемую в надлежащем направлении, имеем:

$$ds_1=d(MM_1);$$

таким образом все развертки кривой суть спрямляемые кривые*.

226. Винтовые линии. Пусть будет C какая-нибудь плоская кривая; если мы отложим от каждой точки m этой кривой на перпендикуляре к плоскости кривой C длину mM, пропорциональную длине дуги кривой C, отсчитываемой от некоторой постоянной точки A, то получим кривую двойной кривизны Г, представляющую место точек M. Эта кривая двойной кривизны Г называется *винтовою линиею*. Примем за плоскость xOy плоскость кривой C, и пусть будут

$$x=f(\sigma),\quad y=\varphi(\sigma)$$

выражения координат какой-нибудь точки m кривой C в функции длины ее дуги σ. Координаты соответствующей точки M кривой Г будут:

$$x=f(\sigma),\quad y=\varphi(\sigma),\quad z=K\sigma, \tag{41}$$

где K — постоянный множитель, причем функции f и φ удовлетворяют соотношению $f'^2+\varphi'^2=1$. Обозначая через s длину дуги кривой Г, из формул (41) имеем

$$ds^2=(f'^2+\varphi'^2+K^2)\,d\sigma^2=(1+K^2)\,d\sigma^2,$$

и следовательно, $s=\sigma\sqrt{1+K^2}+H$, где H — постоянное. Если мы условимся отсчитывать длины дуг s и σ от одной и той же точки A кривой C, то будем иметь $H=0$ и $s=\sigma\sqrt{1+K^2}$. Направляющие косинусы касательной к кривой Г будут:

$$\alpha=\frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}},\quad \beta=\frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}},\quad \gamma=\frac{K}{\sqrt{1+K^2}}. \tag{42}$$

Так как γ не зависит от σ, то касательные к винтовой линии образуют с осью Oz постоянный угол. Это свойство — характеристическое для винтовой линии. *Вся-*

* Т. е. кривые, у которых длина дуги может быть выражена при помощи функций, предполагаемых известными. *(Ред.*

кая кривая, касательные к которой образуют с некоторым определенным направлением постоянный угол, есть винтовая линия. Для доказательства этого предложения примем за ось Oz прямую, параллельную этому направлению, и пусть будет C проекция искомой кривой Γ на плоскость xOy. Уравнения кривой Γ всегда можно представить в виде:

$$x = f(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma), \quad z = \psi(\sigma), \tag{43}$$

где функции f и φ удовлетворяют соотношению $f'^2 + \varphi'^2 = 1$; для этого нужно только принять за независимое переменное длину дуги σ кривой C. Отсюда имеем:

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}} = \frac{\psi'}{\sqrt{1 + \psi'^2}}.$$

Для того, чтобы γ было постоянно, необходимо и достаточно, чтобы было постоянно ψ', откуда следует, что $\psi(\sigma)$ должно быть вида: $K\sigma + z_0$. Если мы перенесем начало координат в точку $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$, то получим для кривой Γ уравнения (41).

Так как для винтовой линии γ — постоянно, то из формулы $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}$ следует $\gamma' = 0$. Следовательно, главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к образующим цилиндра; так как, кроме того, главная нормаль перпендикулярна к касательной к винтовой линии, то она совпадает с нормалью к цилиндру, и соприкасающаяся плоскость будет нормальна к поверхности цилиндра. Бинормаль винтовой линии лежит в касательной плоскости к цилиндру и перпендикулярна к касательной к винтовой линии; отсюда следует, что бинормаль также образует с Oz постоянный угол.

Так как $\gamma' = 0$, то из формулы $\frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}$ имеем: $\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma''}{T} = 0$; таким образом для винтовой линии отношение $\frac{T}{R}$ постоянно.

Каждое из этих свойств характеризует винтовую линию. Докажем, например, что *всякая кривая, для которой отношение $\frac{T}{R}$ постоянно, есть винтовая линия* (Ж. Бертран).

Из формул Френе имеем:

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''} = \frac{d\beta}{d\beta''} = \frac{d\gamma}{d\gamma''} = \frac{T}{R} = \frac{1}{H};$$

если H постоянно, то, интегрируя, получим:

$$\alpha'' = H\alpha - A, \quad \beta'' = H\beta - B, \quad \gamma'' = H\gamma - C,$$

где A, B, C — новые постоянные. Складывая эти уравнения, предварительно умножив их на α, β, γ, соответственно получим:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = H;$$

это уравнение можно иначе представить в виде:

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{H}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Но $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ суть направляющие косинусы некоторой прямой Δ, и предыдущее соотношение показывает, что касательная к искомой кривой образует с этим направлением постоянный угол; следовательно, искомая кривая есть винтовая линия.

Вычислим еще радиус кривизны винтовой линии. Принимая во внимание найденные выше значения (42) для α, β, имеем:

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1 + K^2} f''(\sigma), \quad \frac{\beta'}{R} = \frac{1}{1 + K^2} \varphi''(\sigma),$$

и так как $\gamma'=0$,

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{(1+K^2)^2}\,[f''^2(\sigma)+\varphi''^2(\sigma)]. \tag{44}$$

Следовательно, отношение $\frac{1+K^2}{R}$ не зависит от K. Но легко видеть, что при $K=0$ это отношение равно обратному значеиию $\frac{1}{r}$ радиуса кривизны перпендикулярного сечения C (§ 218). Таким образом формулу (44) можно также представить в виде $R=r(1+K^2)$; отсюда видно, что радиус кривизны винтовой линии находится в постоянном отношении к радиусу кривизны кривой C.

Отсюда легко получить все кривые, для которых R и T постоянны. В самом деле, так как $\frac{T}{R}$ постоянно, то, по теореме Бертрана, искомые кривые суть винтовые линии. Далее, так как R постоянно, то постоянен также и радиус кривизны r кривой C. Следовательно, эта кривая C есть окружность, и *искомая кривая есть винтовая линия, проведенная на круглом цилиндре*. Это предложение принадлежит Пюизё (Puiseux) *.

227. Кривые Бертрана. Главные нормали каждой плоской кривой служат вместе с тем главными нормалями к бесчисленному множеству других плоских кривых, параллельных первой. Бертран поставил задачу о разыскании всех кривых двойной кривизны, для каждой из которых главные нормали были бы в то же время главными нормалями некоторой другой кривой двойной кривизны. Предположим, что координаты x, y, z точек искомой кривой Γ выражены в функции длины s ее дуги. Отложим на каждой главной нормали к кривой Γ отрезок длины l, и пусть будут X, Y, Z координаты конечной точки этого отрезка; мы будем иметь:

$$X=x+l\alpha',\quad Y=y+l\beta',\quad Z=z+l\gamma'. \tag{45}$$

Для того чтобы главная нормаль к кривой Γ была в то же время главною нормалью к кривой Γ', описываемой точкою (X, Y, Z), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\alpha'\,dX+\beta'\,dY+\gamma'\,dZ=0,$$

$$\alpha'(dY\,d^2Z-dZ\,d^2Y)+\beta'(dZ\,d^2X-dX\,d^2Z)+\gamma'(dX\,d^2Y-dY\,d^2X)=0\ **.$$

Из первого соотношения следует: $dl=0$; это показывает, что длина l должна быть постоянною. Заменяя затем во втором соотношении $dX, d^2X, dY, \ldots$ их значениями, выведенными из формул Френе и из формул, получающихся от их диференцирования, после приведения получим:

$$\frac{1}{T}\,d\left(1-\frac{l}{R}\right)=\left(1-\frac{l}{R}\right)d\left(\frac{1}{T}\right);$$

интегрируя это уравнение, будем иметь:

$$\frac{l}{R}+\frac{l'}{T}=1, \tag{46}$$

где l' — новое постоянное. Следовательно, *искомые кривые суть те, для которых существует линейное соотношение между кривизною и кручением*. Очевидно, что это условие и достаточно, причем длина l дается самим соотношением (46).

Один замечательный частный случай этих кривых, именно, тот, когда радиус кривизны постоянен, был уже раньше рассмотрен Монжем. В этом случае соот-

* В этом доказательстве предполагается, что дело идет о действительных кривых, так как выше предполагалось, что $A^2+B^2+C^2$ не равно нулю (см. диссертацию Лиона (Lyon) „Sur les courbes à torsion constante“, 1890).

** Последнее уравнение выражает, что главная нормаль с направляющими косинусами α', β', γ' перпендикулярна к бинормали кривой Γ' [§ 218, формула (21)]. *(Ред.)*

ношение (46) обращается в $l = R$, и следовательно, кривая Γ', представляемая уравнениями (45), есть место центров кривизны кривой Γ. Предполагая $l = R =$ постоянному, из уравнений (45) имеем:

$$dX = -\frac{R}{T}\alpha'' ds, \quad dY = -\frac{R}{T}\beta'' ds, \quad dZ = -\frac{R}{T}\gamma'' ds; \tag{47}$$

эти формулы показывают, что касательная к кривой Γ' есть полярная прямая кривой Γ. Радиус кривизны R' кривой Γ' будет равен:

$$R'^2 = \frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2} = R^2.$$

Следовательно, радиус кривизны R' кривой Γ' также постоянен и равен R. Кроме того, легко видеть, что связь между кривыми Γ и Γ' взаимна; каждая из них есть ребро возврата полярной поверхности другой. Все эти свойства легко проверить непосредственно на частном случае круглого винта.

Примечание. Нетрудно получить общие формулы, представляющие все кривые двойной кривизны, радиус кривизны которых имеет постоянное значение. Пусть будет R данный постоянный радиус, и пусть будут α, β, γ некоторые функции переменного параметра, удовлетворяющие соотношению $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Уравнения

$$X = R\int \alpha\, d\sigma, \quad Y = R\int \beta\, d\sigma, \quad Z = R\int \gamma\, d\sigma, \tag{48}$$

где $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$, представляют искомую кривую, и легко доказать, что мы получаем таким образом все кривые, обладающие требуемым свойством. В самом деле, α, β, γ суть не что иное, как направляющие косинусы касательной к кривой, представляемой уравнениями (48), а σ — длина дуги сферической индикатрисы (§ 217).

228. Соприкасающийся шар. Мы применим еще формулы Френе к определению соприкасающегося шара. Предположим для упрощения вычислений, что координаты x, y, z кривой Γ выражены в функции длины s ее дуги. Для того чтобы шар радиуса ρ с центром в точке (a, b, c) имел с кривою Γ в данной точке этой кривой прикосновение третьего порядка, должно быть:

$$\mathfrak{F}(s) = 0, \quad \mathfrak{F}'(s) = 0, \quad \mathfrak{F}''(s) = 0, \quad \mathfrak{F}'''(s) = 0, \tag{49}$$

где

$$\mathfrak{F}(s) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2, \tag{50}$$

причем предполагается, что x, y, z выражены в функции s. Раскрывая три последних уравнения и применяя формулы Френе, получим:

$$\mathfrak{F}'(s) = (x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma = 0,$$

$$\mathfrak{F}''(s) = (x-a)\frac{\alpha'}{R} + (y-b)\frac{\beta'}{R} + (z-c)\frac{\gamma'}{R} + 1 = 0,$$

$$\mathfrak{F}'''(s) = -\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right) - \frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R} + \frac{\beta''}{T}\right) - \frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma''}{T}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}[(x-a)\alpha' + (y-b)\beta' + (z-c)\gamma'] = 0.$$

Эти уравнения определяют a, b, c. Рассматривая в первом из них a, b, c как текущие координаты, мы видим, что первое уравнение представляет нормальную плоскость к кривой Γ в точке (x, y, z), а два последних уравнения получаются из первого диференцированием по переменному параметру s. Следовательно, центр соприкасающегося шара совпадает с точкой, где полярная прямая касается своей огибающей. Чтобы решить эти три уравнения, заметим, что, принимая во внимание два первых уравнения, мы можем представить последнее уравнение в виде:

$$(x-a)\alpha''+(y-b)\beta''+(z-c)\gamma''=T\frac{dR}{ds}. \tag{51}$$

Отсюда легко получим:

$$\left.\begin{aligned} a&=x+R\alpha'-T\frac{dR}{ds}\alpha'',\\ b&=y+R\beta'-T\frac{dR}{ds}\beta'',\\ c&=z+R\gamma'-T\frac{dR}{ds}\gamma''. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Радиус соприкасающегося шара дается формулой:

$$\rho^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2. \tag{53}$$

Если R постоянно, то центр соприкасающегося шара совпадает с центром кривизны, что согласно с результатом, полученным выше (§ 227).

III. СВОЙСТВА ПРЯМЫХ ЛИНИЙ.

Положение прямой в пространстве зависит от четырех переменных параметров. Следовательно, в зависимости от числа данных соотношений между этими четырьмя параметрами можно рассматривать совокупность прямых линий, зависящих от одного, от двух и от трех переменных параметров. Переменная прямая, зависящая от *одного* переменного параметра, образует *линейчатую поверхность*. Семейство прямых, зависящих от *двух* различных переменных параметров, называется *конгруэнцией прямых*. Наконец, *комплексом прямых* называется всякое семейство прямых, зависящих от *трех* параметров.

229. Линейчатые поверхности. Пусть будут в системе прямоугольных координат

$$x=az+p,\quad y=bz+q \tag{54}$$

уравнения переменной прямой G, где a, b, p, q — функции одного переменного параметра u. Посмотрим, как изменяется положение касательной плоскости к поверхности S, образованной прямой G, когда точка прикосновения M перемещается вдоль прямолинейной образующей G. Уравнения (54) вместе с уравнением $z=z$ дают выражения координат точек поверхности S в функции независимых параметров z и u; следовательно, по § 61, уравнение касательной плоскости P к поверхности S в точке $M(x, y, z)$ будет:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z\\ a & b & 1\\ a'z+p' & b'z+q' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

где a', b', p', q' обозначают производные от a, b, p, q по u. Заменяя x через $az+p$, y через $bz+q$ и раскрывая определитель, получим:

$$(b'z+q')(X-aZ-p)-(a'z+p')(Y-bZ-q)=0. \qquad (55)$$

Из уравнения (55) прежде всего видно, что касательная плоскость к поверхности всегда проходит через образующую G, что можно было видеть заранее; кроме того, отсюда видно, что при перемещении точки прикосновения M вдоль образующей касательная плоскость вращается вокруг этой образующей, за исключением того случая, когда отношение $\frac{a'z+p'}{b'z+q'}$ не зависит от z, т. е. когда $a'q'-b'p'=0$; этот частный случай мы пока выделим из рассмотрения. Так как последнее отношение — первой степени относительно z, то всякая плоскость, проходящая через образующую, касается поверхности в одной и только в одной точке этой образующей. Когда точка прикосновения удаляется вдоль образующей в бесконечность, то касательная плоскость P стремится к некоторому предельному положению P', которое называется *касательною плоскостью в бесконечно удаленной точке образующей.* Уравнение плоскости P' будет:

$$b'(X-aZ-p)-a'(Y-bZ-q)=0. \qquad (56)$$

Пусть будет ω угол между этою плоскостью P' и касательною плоскостью P к поверхности в точке $M(x, y, z)$ той же образующей. Направляющие косинусы (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ нормалей к плоскостям P и P', соответственно, пропорциональны количествам

$$b'z+q', \quad -(a'z+p'), \quad b(a'z+p')-a(b'z+q')$$

и

$$b', \quad -a', \quad a'b-ab';$$

следовательно,

$$\cos\omega=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\frac{Az+B}{\sqrt{A}\sqrt{Az^2+2Bz+C}},$$

где

$$\begin{aligned} A&=a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2,\\ B&=a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp'),\\ C&=p'^2+q'^2+(aq'-bp')^2. \end{aligned}$$

Вычисляя $\operatorname{tg}\omega$ и применяя тождество Лагранжа, получим после приведения:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{Az+B}=\frac{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}{Az+B}. \qquad (57)$$

Из формулы (57) видно, что предельная касательная плоскость P' перпендикулярна к касательной плоскости P_1 в некоторой точке O_1 на образующей G; координата z_1 этой точки равна:

$$z_1=-\frac{B}{A}=-\frac{a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp')}{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2}. \qquad (58)$$

Точка O_1 называется *центральною точкою* образующей G, а касательная плоскость P_1 в точке O_1 называется *центральною плоскостью.* Так как угол θ между касательною плоскостью в какой-нибудь точке M образующей и центральною плоскостью P_1 равен $\frac{\pi}{2}-\omega$, то формула (57) может быть заменена следующею:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{A(z-z_1)}{\sqrt{AC-B^2}}=\frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2](z-z_1)}{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Пусть будет ρ расстояние центральной точки O_1 от точки M прикосновения касательной плоскости, взятое со знаком плюс или минус в зависимости от того, образует ли направление O_1M с осью Oz острый или тупой угол. Мы будем иметь: $\rho=(z-z_1)\sqrt{1+a^2+b^2}$, и предыдущую формулу можно представить в виде:

$$\operatorname{tg}\theta=k\rho, \tag{59}$$

где

$$k=\frac{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2}{(a'q'-b'p')(1+a^2+b^2)}; \tag{60}$$

множитель k называется *параметром распределения* линейчатой поверхности. Формулою (59) выражается весьма просто закон вращения касательной плоскости вокруг образующей; в нее входят только элементы, имеющие геометрическое значение; в самом деле, ниже мы увидим, как можно определить геометрически параметр k.

Эта формула представляет, однако, некоторую неопределенность, так как непосредственно не видно, в каком направлении должно отсчитывать угол θ; другими словами, неизвестно, в каком направлении вращается касательная плоскость вокруг образующей, когда точка прикосновения перемещается вдоль этой образующей.

Это направление вращения вполне определяется знаком параметра k. Чтобы это себе уяснить, вообразим наблюдателя, лежащего вдоль образующей G. При перемещении точки прикосновения M вдоль образующей в направлении от ног к голове наблюдателя последний будет видеть, что касательная плоскость вращается или слева направо, или справа налево. Нетрудно сообразить, что определенное таким образом направление вращения сохранится и в том случае, когда наблюдатель переменит положение так, что ноги его будут находиться в том месте, где была прежде голова, и обратно. Два гиперболических параболоида, имеющих общую образующую и симметричных относительно плоскости, проходящей через эту образующую, дают ясное представление об этих двух различных расположениях. Переместим теперь непрерывным движением координатные оси таким образом, чтобы начало координат совпало с центральною точкою O_1, ось Oz — с образующею G, и плоскость xOz — с центральною плоскостью P_1. Ясно, что выражение (60) параметра распределения сохранит при этом свое значение*, и фор-

* Это видно из формулы (59), где θ и ρ имеют геометрическое значение, не зависящее от выбора системы координат. *(Ред.)*

мула (59) обращается для новой системы осей в

$$\operatorname{tg}\theta = kz, \tag{59'}$$

где θ обозначает угол между касательною плоскостью и плоскостью $y=0$, отсчитываемый в надлежащем направлении. При значении u_0 параметра, соответствующем оси Oz, мы должны иметь $a=b=p=q=0$; при этом уравнение касательной плоскости (55) обращается в

$$(b'z+q')X-(a'z+p')Y=0.$$

Чтобы начало координат было центральною точкою, а плоскость xOz — центральною плоскостью, должно быть $a'=0$, $q'=0$; следовательно, уравнение касательной плоскости принимает вид: $Y=\frac{b'z}{p'}X$, причем формула (60) дает $k=-\frac{b'}{p'}$. Отсюда видно, что в формуле (59') за положительное направление отсчета угла θ нужно принимать направление вращения от оси Oy к оси Ox. Если оси координат имеют такое же расположение, как выше в § 221, то наблюдатель, лежащий вдоль оси Oz, будет видеть, что касательная плоскость поворачивается слева направо, если k положительно, и справа налево, если k отрицательно.

Место центральных точек всех образующих линейчатой поверхности называется *линиею сжатия* (ligne de striction), или *горловою линиею*. Координаты точек этой линии выражаются в функции параметра u уравнениями (54) и (58).

Примечание. Если для данной образующей мы имеем $a'q'=b'p'$, то касательные плоскости к поверхности во всех точках этой образующей совпадают между собою. Если последнее соотношение имеет место для всех образующих, т. е. при всех значениях параметра u, то линейчатая поверхность есть развертывающаяся поверхность (§ 205). В последнем случае нетрудно притти к результатам, полученным в § 205. В самом деле, если a' и b' не равны одновременно нулю, то касательные плоскости к поверхности во всех точках образующей G совпадают между собою; но в точке $z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$, т. е. в точке прикосновения образующей с ее огибающею уравнение касательной плоскости делается неопределенным. Принимая во внимание соотношение $a'q'=b'p'$, легко доказать, что значение z_1, определяемое формулою (58), тождественно с значением $z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$. Следовательно, для развертывающейся поверхности линия сжатия совпадает с ребром возврата. Что касается параметра распределения, то для развертывающейся поверхности он равен бесконечности.

Если для каждой образующей $a'=b'=0$, то поверхность есть цилиндр; в этом случае центральная точка неопределенна.

Центральную точку и параметр распределения можно определить еще иначе. Рассмотрим вместе с G соседнюю образующую G_1, соответствующую значению параметра $u+h$. Уравнения образующей G_1 будут:

$$x=(a+\Delta a)z+p+\Delta p, \quad y=(b+\Delta b)z+q+\Delta q. \tag{61}$$

Пусть будет δ кратчайшее расстояние между обеими прямыми G и G_1, α — угол между этими прямыми, и X, Y, Z — координаты точки пересечения образующей G

с общим перпендикуляром к обеим образующим. По известным формулам аналитической геометрии имеем:

$$Z = -\frac{\Delta a\,\Delta q + \Delta b\,\Delta p + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)\,[(a+\Delta a)\,\Delta q - (b+\Delta b)\,\Delta p]}{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2},$$

$$\delta = \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{(a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2 + 1}}.$$

При приближении h к нулю Z обращается в пределе в найденное выше выражение (58) для z_1, а $\frac{\sin\alpha}{\delta}$ дает в пределе k. Следовательно, центральная точка есть предельное положение основания общего перпендикуляра к образующим G и G_1, а параметр распределения равен пределу отношения $\frac{\sin\alpha}{\delta}$.

Заменим в выражении для δ количества Δa, Δb, Δp, Δq их разложениями по степеням h:

$$\Delta a = ha' + \frac{h^2}{1\cdot 2}a'' + \ldots,$$

и ему подобными для Δb, Δp, Δq. Тогда числитель выражения для δ будет равен:

$$\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p = h^2(a'q' - b'p') + \frac{h^3}{2}(a''q' + a'q'' - b''p' - b'p'') + \ldots,$$

тогда как знаменатель будет всегда первой степени относительно h. Мы видим, что δ есть, вообще, бесконечно-малое первого порядка, за исключением случая развертывающихся поверхностей, когда мы имеем $a'q' - b'p' = 0$. Но коэфициент при $\frac{h^3}{2}$ есть производная от $a'q' - b'p'$; следовательно, в случае развертывающихся поверхностей этот коэфициент также равен нулю, и потому для развертывающейся поверхности кратчайшее расстояние между двумя бесконечно близкими образующими будет бесконечно-малым не второго, а третьего порядка (§ 223). Это замечание принадлежит Буке, который, кроме того, доказал, что если для какой-нибудь поверхности это расстояние представляет бесконечно-малое четвертого порядка, то оно должно равняться нулю; это будет только в том случае, когда рассматриваемые прямые линии или касаются плоской кривой, или образуют коническую поверхность. Чтобы в этом убедиться, нужно только продолжить разложение выражения $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$ до членов четвертого порядка.

230. Конгруэнции. Фокальные поверхности. Всякая совокупность прямых

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{62}$$

где a, b, p, q зависят от двух переменных параметров α и β, называется *конгруэнцией прямых*. Вообще, через каждую точку пространства проходит несколько линий конгруэнции, так как при данных значениях x, y, z мы имеем для определения α и β два уравнения (62). Если между параметрами α и β мы установим некоторое соотношение, то переменная прямая G, представляемая уравнениями (62), образует линейчатую поверхность, которая, вообще, не будет развертывающеюся. Для того чтобы эта поверхность была развертывающеюся, должно быть, как мы видели:

$$da\,dq - db\,dp = 0;$$

заменяя здесь da через $\frac{\partial a}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial\beta}d\beta, \ldots$, получим:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial\beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial q}{\partial\beta}d\beta\right) - \left(\frac{\partial b}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial b}{\partial\beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial p}{\partial\beta}d\beta\right) = 0. \tag{63}$$

Из этого уравнения второй степени относительно $\frac{d\beta}{d\alpha}$ мы получим, вообще, два различных решения для $\frac{d\beta}{d\alpha}$:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\psi_1(\alpha, \beta), \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}=\psi_2(\alpha, \beta). \tag{64}$$

При некоторых весьма общих условиях, которые мы укажем впоследствии и которые мы будем предполагать здесь выполненными, каждому из уравнений (64) можно удовлетворить, приняв за β одну из бесчисленного множества некоторых определенных функций от α; при этом каждое из этих уравнений имеет один и только один интеграл, принимающий при $\alpha=\alpha_0$ данное значение β_0. Следовательно, каждая прямая G конгруэнции принадлежит двум развертывающимся поверхностям, все образующие которых будут прямыми этой же конгруэнции. Пусть будут Γ и Γ' ребра возврата этих двух развертывающихся поверхностей, A и A' — точки прикосновения прямой G к Γ и к Γ'. Эти точки A и A' называются *фокальными точками* образующей. Их можно найти следующим образом, не интегрируя уравнения (63), определяющего развертывающиеся поверхности конгруэнции. Координата z каждой из этих точек должна одновременно удовлетворять двум соотношениям:

$$z\,da+dp=0, \quad z\,db+dq=0\ *;$$

заменяя здесь da, db, dp, dq их выражениями, получим:

$$z\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta\right)+\frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial p}{\partial \beta}d\beta=0,$$
$$z\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial b}{\partial \beta}d\beta\right)+\frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial q}{\partial \beta}d\beta=0.$$

Исключая из этих уравнений z, мы придем к уравнению (63); но если мы исключим из них $\frac{d\beta}{d\alpha}$, то получим уравнение второй степени, определяющее обе фокальные точки:

$$\left(z\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \beta}+\frac{\partial q}{\partial \beta}\right)-\left(z\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \alpha}+\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)=0. \tag{65}$$

Место фокальных точек A и A' образует две поверхности Σ и Σ', уравнение которых получим, исключая α и β из уравнений (62) и (65). Эти поверхности не будут, вообще, аналитически различными, а образуют две полости одной и той же поверхности; эта поверхность называется *фокальною поверхностью*. Легко видеть, что фокальная поверхность есть место ребер возврата развертывающихся поверхностей конгруэнции. В самом деле, по самому определению кривой Γ очевидно, что касательная прямая к этой кривой в какой-нибудь ее точке A принадлежит к конгруэнции; следовательно, точка A есть одна из фокальных точек этой прямой. Очевидно, что каждая прямая конгруэнции касается обеих полостей Σ и Σ' фокальной поверхности, так как такая прямая касается двух кривых Γ и Γ', расположенных на этих полостях.

Касательные плоскости к полостям Σ и Σ' фокальной поверхности в точках A и A' находятся следующим образом (черт. 41 на стр. 204). Предположим, например, что прямая G, перемещаясь, остается касательною к кривой Γ; при этом она остается также касательною и к полости Σ', и ее точка прикосновения с Σ' описывает некоторую кривую γ', которая необходимо отлична от кривой Γ'. Следовательно, развертывающаяся поверхность, образованная прямою G, будет касаться

---

* Так как прямая (62) касается кривой Γ в точке A, то для перемещения по кривой Γ имеем:

$$dx=a\,dz, \quad dy=b\,dz.$$

(Ред.)

в точке A' полости Σ'; в самом деле, так как касательные плоскости к обеим поверхностям имеют общими прямую G и общую касательную прямую к кривой γ', то эти касательные плоскости совпадают между собою. Следовательно касательною плоскостью к полости Σ' в точке A' будет соприкасающаяся плоскость к кривой Γ в точке A. Точно так же можно убедиться, что касательною плоскостью к полости Σ в точке A будет соприкасающаяся плоскость к кривой Γ' в точке A'. Эти две плоскости называются *фокальными плоскостями* конгруэнции.

Можно непосредственно определить фокальные плоскости следующим путем Пусть будет

$$x - az - p + \lambda (y - bz - q) = 0$$

уравнение фокальной плоскости, проходящей через G прямую конгруэнции. Когда эта прямая, перемещаясь, описывает одну из развертывающихся поверхностей конгруэнции, α, β и λ являются функциями переменного параметра, так что характеристикой этой плоскости является сама прямая G. Но эта характеристика есть пересечение переменной плоскости с плоскостью, уравнение которой есть

$$-z da - dp + d\lambda (y - bz - q) - \lambda (z db + dq) = 0.$$

Чтобы эта вторая плоскость проходила через прямую G, необходимо иметь:

$$da + \lambda db = 0, \quad dp + \lambda dq = 0$$

Исключая λ, мы приходим к уравнению (63); но, если исключить отношение $\frac{d\beta}{d\alpha}$, мы получим уравнение второго порядка относительно λ, которое определяет две фокальные плоскости:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial b}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial q}{\partial \beta}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial b}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) = 0. \tag{66}$$

Может случиться, что одна из двух полостей фокальной поверхности обращается в линию C. В этом случае прямые конгруэнции остаются касательными к полости Σ и пересекаются с линиею C; одно из семейств развертывающихся поверхностей будет состоять из конусов, описанных около поверхности Σ, с вершинами в точках линии C. Если обе полости фокальной поверхности обращаются соответственно в линии C и C', то оба семейства развертывающихся поверхностей состоят из конусов, имеющих вершины в точках одной из кривых C, C' и проходящих через другую. Если линии C и C' — прямые, то конгруэнция называется *линейною конгруэнциею*.

231. Конгруэнции нормалей. Очевидно, что нормали ко всякой поверхности образуют конгруэнцию, но обратное предложение неверно; не всегда существует поверхность, нормальная ко всем прямым данной конгруэнции. В самом деле, найдем, при каком условии все прямые, представляемые уравнением (62), нормальны к некоторой поверхности. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $f(\alpha, \beta)$, чтобы поверхность S, представляемая уравнениями:

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \quad z = f(\alpha, \beta), \tag{67}$$

имела нормалями именно прямые G. Следовательно, мы должны иметь:

$$a\, dx + b\, dy + dz = 0,$$

или

$$a \frac{\partial x}{\partial \alpha} + b \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$a \frac{\partial x}{\partial \beta} + b \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0;$$

заменив в этих уравнениях x через $az+p$, y через $bz+q$ и разделив их на $\sqrt{a^2+b^2+1}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)+\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}+b\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial \beta}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)+\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \beta}+b\dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Для того чтобы эти уравнения были совместимы, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}+b\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \beta}+b\dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right). \tag{69}$$

Если условие (69) удовлетворяется, то из уравнений (68) можно определить z квадратурою. Получающиеся поверхности зависят от одного произвольного постоянного, входящего при интеграции, и образуют семейство параллельных поверхностей.

Чтобы выяснить геометрический смысл условия (69), заметим, что условие перпендикулярности двух фокальных плоскостей, проходящих через какую-нибудь прямую конгруэнции, есть

$$1+\lambda_1\lambda_2+(a+b\lambda_1)(a+b\lambda_2)=0,$$

где λ_1 и λ_2 суть корни уравнения (66). Если заменить $\lambda_1+\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2$ их значениями, это условие примет вид:

$$(1+a^2)\frac{D(b, q)}{D(\alpha, \beta)}+(1+b^2)\frac{D(a, p)}{D(\alpha, \beta)}=ab\left[\frac{D(a, q)}{D(\alpha, \beta)}+\frac{D(b, p)}{D(\alpha, \beta)}\right],$$

и оно тождественно с условием (69).

Мы получаем следующую важную теорему:

Для того чтобы прямые конгруэнции были нормалями к некоторой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы фокальные плоскости, проходящие через каждую прямую конгруэнции, были взаимно перпендикулярны.

Примечание I. Если мы примем за переменные параметры α и β косинусы углов, образуемых прямою с осями Ox и Oy, то будем иметь:

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$

и уравнения (68) обратятся в

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\beta\frac{\partial q}{\partial \alpha}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial \beta}+\beta\frac{\partial q}{\partial \beta}=0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Условие интегрируемости (69) принимает вид: $\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}=\dfrac{\partial p}{\partial \beta}$, откуда следует, что p и q суть частные производные от некоторой функции $F(\alpha, \beta)$:

$$p=\frac{\partial F}{\partial \alpha},\quad q=\frac{\partial F}{\partial \beta},$$

причем функция $F(\alpha, \beta)$ получается посредством квадратуры. Найдя F, мы затем получим z, интегрируя уравнение с полными диференциалами:

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)=-\left(\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)d\alpha-\left(\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\right)d\beta;$$

отсюда имеем:

$$z=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C+F-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\right),$$

где C — произвольное постоянное.

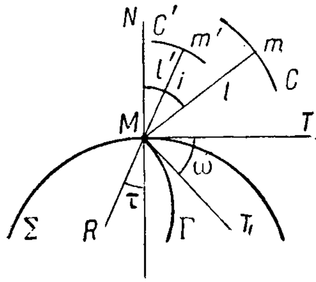
Примечание II. Нормали к некоторой кривой Г являются также нормалями к трубчатой поверхности, являющейся огибающей семейства шаров постоянного радиуса, центры которых лежат на кривой Г; следовательно, они образуют конгруэнцию нормалей. Одна из полостей фокальной поверхности обращается в кривую Г, а другою является полярная поверхность кривой Г. Одна из проходящих через нормаль MN фокальных плоскостей есть нормальная плоскость кривой Г, а другая фокальная плоскость проходит через касательную MT кривой Г; очевидно, что они ортогональны.

Нормали к тору образуют конгруэнцию, у которой обе фокальные поверхности обращаются в две линии — ось тора и окружность, являющуюся местом центров меридианов.

231а. Теорема Малюса. Если световые лучи, выходящие из какой-нибудь точки, отражаются или преломляются какою-нибудь поверхностью, то после отражения или преломления они будут нормальны к некоторому семейству параллельных поверхностей. Эта теорема, принадлежащая Малюсу (Malus), была распространена на случай нескольких последовательных отражений или преломлений Коши, Дюпеном, Жергонием (Gergonne) и Кетле (Quételet), и мы имеем следующую более общую теорему:

Если световые лучи нормальны к какой-нибудь поверхности, то после любого числа отражений и преломлений они также остаются нормальными к некоторой поверхности.

Так как отражение лучей можно рассматривать как преломление с показателем —1, то достаточно доказать эту теорему только для случая однократного преломления. Пусть будет S поверхность, нормальная к световым лучам, mM — падающий луч, встречающий поверхность раздела Σ двух сред в точке M, MR — луч преломленный. По закону Декарта падающий луч Mm, преломленный луч MR и нормаль MN лежат в одной плоскости, и между углами i и τ (черт. 40а) существует соотношение: $n\sin i=\sin\tau$. Для определенности мы предположим $n<1$, как это принято на черт. 40а. Обозначим расстояние Mm через l и отложим на продолжении преломленного луча длину $l'=Mm'$, равную k-кратной длине l, где k обозначает некоторый постоянный множитель, который мы определим ниже. Геометрическим местом всех точек m', лежащих на различных лучах будет некоторая поверхность S'.



Черт. 40а.

Докажем, что можно выбрать множитель k таким образом, чтобы преломленный луч Mm' был нормален к поверхности S'. В самом деле, пусть будет C какая-нибудь кривая, лежащая на поверхности S. Когда точка m описывает кривую C, точка M описывает на поверхности Σ некоторую кривую Г, а соответствующая точка m' описывает на поверхности S' некоторую другую кривую C'. Пусть будут s, σ, s' длины дуг кривых C, Г, C', измеряемые от некоторых соответственных постоянных точек на этих кривых, и ω — угол между касательною MT_1 к кривой Г и линиею пересечения MT касательной плоскости к поверхности Σ в точке M с нормальною плоскостью к этой поверхности, проходящею через падающий луч Mm; далее, пусть будут φ и φ' углы касательной MT_1 с прямыми Mm и Mm'. Чтобы вычислить, например, $\cos\varphi$, отложим на Mm длину, равную единице, и спроектируем ее на прямую MT_1.

Для этого мы можем сначала проектировать эту длину на MT и затем проектировать полученную проекцию на MT_1. Поступая точно так же с единицею длины, отложениою на Mm', мы получим соотношения:

$$\cos\varphi = \sin i \cos\omega, \quad \cos\varphi' = \sin\tau \cos\omega.$$

Применяя к отрезкам Mm и Mm' формулу (16) § 81 для диференциала отрезка прямой, получим:

$$dl = -d\sigma \cos\omega \sin i,$$
$$dl' = -d\sigma \cos\omega \sin\tau - ds' \cos\theta,$$

где θ есть угол между прямою $m'M$ и касательною к кривой C'. Заменяя dl через $k\,dl'$, из предыдущих уравнений будем иметь:

$$\cos\omega\, d\sigma (k \sin i - \sin\tau) = ds' \cos\theta.$$

Если мы положим $k = n$, то получим:

$$ds' \cos\theta = 0.$$

Отсюда следует, что при $k = n$ луч Mm' будет нормален к кривой C', а так как кривая C' есть произвольная кривая, лежащая на поверхности S', то он будет нормален и к самой поверхиости S'. Эта поверхность S' называется *антикаустикою* или *вторичною каустикою*. Очевидно, что поверхность S' есть огибающая сфер, описанных из точки M как из центра, радиусами, равными n-кратной длине Mm. Таким образом мы получаем следующую теорему:

Пусть падающие лучи нормальны к некоторой поверхности S; будем рассматривать эту поверхность как огибающую семейства сфер, центры которых лежат на поверхности раздела Σ. Тогда антикаустикою для преломленных лучей будет огибающая семейства сфер с теми же самыми центрами, радиусы которых относятся к радиусам соответствующих сфер первого семейства, как единица к показателю преломления.

Эта огибающая поверхность состоит из двух полостей, соответствующих равным и противоположным по знаку показателям преломления. Вообще, эти две полости не будут аналитически различны и представляют две полости поверхности, представляемой неразложимым уравнением.

232. Комплексы. Совокупность прямых, зависящих от трех переменных параметров, называется *комплексом прямых*. Пусть будут

$$x = az + p, \quad y = bz + q \tag{71}$$

уравнения некоторой прямой. Каждое соотношение между a, b, p, q

$$F(a, b, p, q) = 0 \tag{72}$$

определяет некоторый комплекс прямых, и обратно. Если F есть целый многочлен по a, b, p, q, то комплекс называется *алгебраическим*. Прямые комплекса, проходящие через данную точку (x_0, y_0, z_0), образуют конус с вершиною в точке (x_0, y_0, z_0). Мы получим уравнение этого конуса, исключая a, b, p, q из соотношений (71), (72) и (73):

$$x_0 = az_0 + p, \quad y_0 = bz_0 + q; \tag{73}$$

следовательно, уравнение этого конуса будет:

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}, \frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0}, \frac{y_0 z - y z_0}{z - z_0}\right) = 0. \tag{74}$$

В каждой плоскости лежит бесконечное множество прямых, принадлежащих к данному комплексу; эти прямые огибают некоторую кривую, называемую *кривою комплекса*. Если комплекс — алгебраический, то *порядок конуса комплекса равен классу кривой комплекса*. В самом деле, предположим, что требуется найти число прямых комплекса, проходящих через данную точку A и лежащих в некоторой плоскости P, проходящей через эту точку. Для этого можно поступать двумя способами: можно или пересечь плоскостью P тот конус комплекса, вершина которого находится в точке A, или провести через точку A касательные прямые к кривой комплекса, расположенной в плоскости P. Так как в обоих случаях мы должны получить одно и то же число, то теорема доказана.

Если конус комплекса обращается в плоскость, то комплекс называется *линейным*; в этом случае уравнение (72) будет иметь вид:

$$Aa + Bb + Cp + Dq + E(aq - bp) + F = 0. \tag{75}$$

Местом прямых комплекса, проходящих через данную точку (x_0, y_0, z_0), будет плоскость, представляемая уравнением:

$$\begin{aligned} &A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(x_0 z - z_0 x) + \\ &+ D(y_0 z - z_0 y) + E(y_0 x - x_0 y) + F(z - z_0) = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Так как кривая линейного комплекса должна быть первого класса, то она обращается в точку, т. е. все прямые комплекса, лежащие в данной плоскости, проходят через некоторую точку этой плоскости; эта точка называется *полюсом*, или *фокусом*. Следовательно, линейный комплекс устанавливает соответствие между точками и плоскостями пространства таким образом, что каждой точке пространства соответствует определенная плоскость, проходящая через эту точку, и каждой плоскости соответствует определенная точка, лежащая в этой плоскости. Точно так же линейным комплексом устанавливается соответствие и между прямыми в пространстве. В самом деле, пусть будет D прямая, не принадлежащая к комплексу; далее, пусть будут F и F' фокусы двух плоскостей, проходящих через эту прямую, и Δ — прямая FF'. Всякая плоскость, проходящая через прямую Δ, имеет фокус в точке φ пересечения этой плоскости с прямою D, так как прямые φF, $\varphi F'$, очевидно, принадлежат к комплексу, так как проходят через фокусы F и F' и лежат в плоскостях, которым соответствуют эти фокусы. Отсюда следует, что всякая прямая, пересекающая прямые D и Δ, принадлежит к комплексу, и что фокус каждой плоскости, проходящей через прямую D, есть точка пересечения этой плоскости с прямою Δ. Прямые D и Δ называются *сопряженными прямыми*; каждая из них есть место фокусов плоскостей, проходящих через другую.

Если прямая D обращается в бесконечно удаленную прямую, то плоскости, проходящие через D, будут между собою параллельны, и из предыдущего видно, что место фокусов плоскостей, параллельных некоторой данной плоскости, есть прямая линия. Легко было бы убедиться, что всегда есть плоскость, обладающая тем свойством, что место фокусов плоскостей, ей параллельных, есть прямая, к ней перпендикулярная. Если мы примем эту прямую за ось Oz, то каждая плоскость, фокус которой лежит на оси Oz, должна быть параллельна плоскости xOy. На основании уравнения (76) необходимым и достаточным условием этого будет $A = B = C = D = 0$, и уравнение комплекса принимает следующий простой вид:

$$aq - bp + K = 0; \tag{77}$$

при этом плоскость, фокус которой лежит в точке (x, y, z), представится уравнением:

$$Xy - Yx + K(Z - z) = 0, \tag{78}$$

где X, Y, Z — текущие координаты.

В виде примера найдем кривые, которых касательные принадлежали бы к предыдущему комплексу. Рассмотрим одну из таких кривых. Предположим, что координаты x, y, z ее точек выражены в функции переменного параметра; уравнения касательной в какой-нибудь точке этой кривой представятся уравнениями:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Для того чтобы эта касательная принадлежала к комплексу, необходимо и достаточно, чтобы она была расположена в плоскости (78), имеющей фокусом точку (x, y, z), т. е. чтобы было:

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz. \tag{79}$$

Выше (§ 216) мы видели, каким образом можно получить все функции x, y, z переменного параметра, удовлетворяющие этому условию; следовательно, мы можем найти все кривые, обладающие требуемым свойством.

Выводы, полученные в § 216, выражаются весьма просто с точки зрения теории комплексов. Так, например, диференцируя уравнение (79), получим:

$$x\,d^2y - y\,d^2x = K\,d^2z; \tag{80}$$

из соотношений (79) и (80) следует, что соприкасающеюся плоскостью в точке (x, y, z) служит плоскость (78). Таким образом мы получаем следующую теорему:

Если касательные прямые к кривой двойной кривизны принадлежат к линейному комплексу, то соприкасающеюся плоскостью в каждой точке этой кривой будет та плоскость, для которой эта точка служит фокусом. [Аппель (Appell).]

Предположим, что требуется провести через точку O пространства соприкасающиеся плоскости к некоторой кривой двойной кривизны Γ, касательные к которой принадлежат к линейному комплексу. Пусть будет M точка прикосновения одной из этих плоскостей. На основании предыдущей теоремы, прямая MO есть прямая комплекса, и следовательно, точка M лежит в плоскости, имеющей фокусом точку O. Обратно, если точка M кривой Γ лежит в плоскости, имеющей фокусом точку O, то прямая MO, принадлежащая к комплексу, лежит в соприкасающейся плоскости к кривой в точке M, и эта соприкасающаяся плоскость проходит через точку O. Следовательно, искомыми точками прикосновения будут точки пересечения кривой Γ с плоскостью, имеющей фокусом точку O (§ 216).

Линейные комплексы встречаются во многих геометрических и механических теориях (см., например, докторские диссертации Аппеля и Пикара *).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти в конечном виде уравнения разверток кривой, пересекающей под постоянным углом прямолинейные образующие прямого круглого конуса. Исследовать полученные решения.

2. Существуют ли такие кривые двойной кривизны Γ, чтобы точки пересечения данной плоскости P с касательною, с главною нормалью и с бинормалью в каждой точке этой кривой были вершинами равностороннего треугольника?

3. Пусть будет Γ ребро возврата поверхности, огибающей семейство сфер (т. е. Γ есть огибающая характеристических окружностей этого семейства). Доказать, что кривая, представляющая место центров переменной сферы, лежит на полярной поверхности кривой Γ. Обратное предложение.

4. Пусть будет Γ данная кривая двойной кривизны, M — точка кривой Γ, и O — данная точка пространства. Проведем через точку O прямую, параллельную полярной прямой кривой Γ для точки M, и отложим на ней длину ON, равную радиусу кривизны кривой Γ в точке M. Доказать, что соответственные линейные элементы кривой Γ', описываемой точкою N, и кривой Γ'', местом центров кривизны кривой Γ; равны и взаимно перпендикулярны; кроме того, радиусы кривизны в соответственных точках кривых Γ' и Γ'' равны между собою.

[Рукэ (Rouquet).]

5. Доказать, что, если радиус шара, соприкасающегося с кривою двойной кривизны Γ, имеет постоянную длину a, то или кривая Γ лежит на шаре радиуса a, или радиус кривизны кривой Γ постоянен и равен a.

6. Доказать, что для того, чтобы местом центров кривизны винтовой линии, проведенной на некотором цилиндре, была другая винтовая линия, проведенная на цилиндре с образующими, параллельными образующим первого цилиндра, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярным сечением этого второго цилиндра была окружность. [Тиссо (Tissot, *Nouvelles Annales*, т. XI, 1852.]

---

*) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1876 и 1877.

7*. Если две кривые двойной кривизны имеют общие главные нормали, то соприкасающиеся плоскости к обеим кривым в точках пересечения этих кривых с одною и тою же нормалью образуют постоянный угол. Эти две точки и центры кривизны обеих кривых образуют систему четырех точек, ингармоническое отношение которых постоянно. Произведение радиусов кручения обеих кривых в соответственных точках также постоянно.

[П. Серре, Мангейм (Mannheim), Шелль (Schell).]

8*. Пусть будут x, y, z прямоугольные координаты точек кривой двойной кривизны, и s — длина дуги этой кривой. Кривая Γ_0 представляемая уравнениями

$$x_0=\int\alpha'' ds,\quad y_0=\int\beta'' ds,\quad z_0=\int\gamma'' ds,$$

где x_0, y_0, z_0 — текущие координаты, называется *дополнительною кривою* (courbe adjointe), а кривые, представляемые уравнениями:

$$X=x\cos\theta+x_0\sin\theta,\quad Y=y\cos\theta+y_0\sin\theta,\quad Z=z\cos\theta+z_0\sin\theta,$$

где X, Y, Z — текущие координаты, а θ — постоянный угол, называются *присоединенными кривыми* (courbes associé s). Найти для этих кривых расположение основного трехгранного угла (§ 228), а также радиусы кривизны и кручения.

Если кривизна кривой Γ постоянна, то кривая Γ_0 имеет постоянное кручение, и присоединенными кривыми будут кривые Бертрана (§ 233). Вывести отсюда общие уравнения этих последних. [Коши.]

9*. Найти кривые Γ, расположенные на поверхности вращения 2-го порядка S, касательные к которым в каждой точке образуют постоянный угол с прямой, проведенной через эту точку параллельно оси вращения. Исследовать различные формы этих кривых в зависимости от характера поверхности. Показать, что эти кривые пересекают под постоянным углом образующие конусов, направляющей которых служит кривая Γ и вершины которых суть фокусы среднего сечения, расположенные на оси. Если поверхность S является круговым конусом, то имеем обычную цилиндро-коническую винтовую линию. (См. Pirondini, *Journ. de Crelle*, 118, 1897, p. 61; *G. Scheffers Leipzig Berichte*, 1902, p. 369; *E. Cesaro*, *Rendiconti di Napoli*, 1903, p. 73.)

Если кривая Γ пересечений двух конусов с вершинами S и S' пересекает под постоянным углом образующие этих двух конусов, то она пересекает под постоянным углом также образующие третьего конуса с вершиной в точке S''', расположенной на прямой SS'. Кривая Γ расположена на поверхности вращения, среднее сечение которой есть овал Декарта, а точки S, S', S'' — фокусы этой кривой. (Cesaro, ib.)

10. Для того чтобы прямая, неизменно связанная с основным трехгранным углом кривой двойной кривизны Γ и проходящая через вершину этого угла, образовала развертывающуюся поверхность, необходимо, чтобы эта прямая совпадала с касательною, за исключением того случая, когда кривая Γ есть винтовая линия. В последнем случае существует бесчисленное множество прямых, обладающих требуемым свойством.

Для кривой Бертрана существуют два гиперболических параболоида, неизменно связанных с основным трехгранным углом, все прямолинейные образующие которых образуют развертывающиеся поверхности.

[Чезаро (Cesaro), *Rivista di Matematica*, т. II, стр. 155, 1892.]

11*. Для того чтобы главные нормали кривой двойной кривизны были бинормалями другой кривой двойной кривизны, между радиусом кривизны и радиусом кручения первой кривой должно существовать соотношение вида:

$$A\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}\right)=\frac{B}{R},$$

где A и B — постоянные.

[Мангейм, *Comptes rendus*, 1877.]

[Случаи, когда прямая, проходящая через точку кривой двойной кривизны и неразрывно связанная с основным трехгранным углом, остается во все время движения главною нормалью или бинормалью другой кривой двойной кривизны, были изучены Пелле (Pellet), (*Comptes rendus*, май, 1887), Чезаро (*Nouvelles Annales*, 1888, стр. 147), Балитраном (Balitrand) (*Mathesis*, 1894, стр. 159).]

12. Доказать, что если соприкасающаяся плоскость кривой двойной кривизны Г, постоянно касается одной и той же сферы с центром O, то 1) плоскость, проходящая через касательную к кривой Г и перпендикулярная к главной нормали, проходит через точку O, 2) отношение радиуса кривизны к радиусу кручения есть линейная функция длины дуги кривой Г. Обратные теоремы.

13. Проекция на плоскости P кривой двойной кривизны Г параллельно касательной mT в точке M этой кривой имеет точку возврата в точке m, являющейся проекцией точки M кривой, и касательная в точке возврата есть след на плоскости P соприкасающей я плоскости к кривой Г в точке M. Исследовать случай стационарной соприкасающейся плоскости в точке M.

14*. В каждой точке M кривой Г проводим нормаль, которая образует переменный угол φ с главной нормалью, и на ней откладываем постоянную длину $MM' = l$. Кривая C', описываемая точкой M', нормальна к той же прямой $M'M$. Определить угол φ так, чтобы касательные к кривым C и C' в соответствующих точках M, M' образовали постоянный угол V. Частный случай: $V = \frac{\pi}{2}$.

Принимая за неизвестное $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, получаем уравнение Риккати.

[Darboux, *Comptes rendus*, *t.* 146, 1908, стр. 881.]

15. Найти главную часть кратчайшего расстояния между двумя бесконечно близкими главными нормалями и предельное положение основания общего перпендикуляра.

ГЛАВА XII.

ПОВЕРХНОСТИ.

I КРИВИЗНА КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ.

233. Основная формула. Теорема Менье. Каждая поверхность S может быть определена системой трех уравнений:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \tag{1}$$

где x, y, z — прямоугольные координаты точек этой поверхности, u и v — два переменных параметра.

Три функции f, φ, ψ не обязательно должны быть аналитическими, мы предположим только, что они непрерывны и допускают непрерывные частные производные двух первых порядков в любой точке поверхности за исключением особых. Если три детерминанта

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

не обращаются одновременно в нуль при некоторой системе значений u, v, то соответствующая точка M поверхности — точка обыкновенная (§ 61), в ее окрестности одна из координат x, y, z есть непрерывная функция двух других, допускающая непрерывные частные производные первого и второго порядка.

Будем исследовать кривизну различных кривых на поверхности в какой-нибудь обыкновенной точке. Можно было бы предположить, что в окрестности этой точки поверхность представлена уравнением $z = F(x, y)$, но формулы, которые мы будем получать, примут более симметричный вид и более общее выражение, если сохранить три уравнения (1).

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности в точке (x, y, z):

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0; \tag{2}$$

коэфициенты A, B, C должны удовлетворять двум соотношениям:

$$\mathrm{S}\, A\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \mathrm{S}\, A\frac{\partial x}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Значение S здесь вполне очевидно. Из этих уравнений следует:

$$A = K\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B = K\frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C = K\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \tag{4}$$

где K — постоянный или переменный множитель, который может быть выбран вполне произвольно*. Если, например, поверхность представлена уравнением $z=F(x, y)$, то, положив $x=u$, $y=v$, $K=-1$, получим:

$$A=p,\ B=q,\ C=-1,$$

где p и q — обычные обозначения первых частных производных от z.

В уравнениях (1) u и v могут быть функциями одного переменного α; в этом случае точка (x, y, z) описывает на поверхности S некоторую кривую Γ. Направляющие косинусы касательной к этой кривой пропорциональны диференциалам:

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,\quad dz=\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

каждой величине отношения $\frac{dv}{du}$ соответствует определенная касательная к поверхности в точке (u, v); значения соответствующих направляющих косинусов легко вычислить.

Вдоль кривой Γ диференциалы dx, dy, dz удовлетворяют соотношению

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \tag{5}$$

которое, очевидно, выражает, что касательная к кривой Γ лежит в касательной плоскости к поверхности. Приравняв нулю полный диференциал левой части этого уравнения (§ 37), получим некоторое соотношение между диференциалами второго порядка от x, y, z:

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z+dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0, \tag{6}$$

которому нетрудно дать весьма простое геометрическое истолкование.

Прежде всего заметим, что $dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz$ есть некоторая квадратичная форма от du и dv:

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2; \tag{7}$$

ее коэфициенты D, D', D'' выводятся диференцированием выражений x, y, z, A, B, C.

$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z$ представляет с точностью до некоторого множителя косинус угла между двумя прямыми, направляющие косинусы которых пропорциональны, соответственно, (A, B, C) и (d^2x, d^2y, d^2z). Прямая, соответствующая параметрам A, B, C, есть нормаль к поверхности; за положительное направление на ней мы выберем то, которое имеет направляющие косинусы

$$\left.\begin{aligned}\lambda=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mu=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \nu=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

* Ясно, что можно раз навсегда установить величину множителя K, положив, например, $K=\pm 1$. Но для приложений выгодно оставить этот множитель неопределенным, чтобы, выбирая его в каждом частном случае, придать, если это возможно, наиболее простой вид выражениям коэфициентов A, B, C,

Далее, приняв за независимое переменное длину дуги s кривой Γ, будем иметь:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\gamma'}{R},$$

где α', β', γ' и R — обозначения, принятые в § 223. Разделив обе части равенства (6) на ds^2, напишем его в виде:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}(\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma')=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2};$$

здесь E, F, G — гауссовы обозначения коэфициентов первой квадратичной формы (§ 124):

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

Обозначив через θ угол, образуемый главною нормалью к кривой Γ положительным направлением нормали к поверхности, получим:

$$\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=\cos\theta;$$

с помощью этого равенства предыдущее выражение приводит к следующей весьма важной формуле:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}\cos\theta=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}, \tag{9}$$

которая, очевидно, вполне эквивалентна формуле (6). В этом соотношении радикал $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ и радиус кривизны R — существенно положительные величины, следовательно, знак $\cos\theta$ совпадает со знаком правой части. При заданной системе величин u, v правая часть равенства (9) зависит только от отношения $\frac{dv}{du}$, т. е. от направления касательной к кривой Γ в точке M. Пусть будут: Γ' некоторая другая кривая на поверхности, касающаяся первой в точке M, R' — ее радиус кривизны, θ' — угол между главной нормалью и положительным направлением нормали к поверхности. Правая часть формулы (9) имеет одну и ту же величину для обеих кривых, следовательно

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{\cos\theta'}{R'}. \tag{10}$$

Рассмотрим, в частности, две кривые Γ и Γ', имеющие в точке M общую соприкасающуюся плоскость (отличную от касательной плоскости к поверхности). Обе эти кривые имеют, очевидно, общую касательную в точке M — прямую пересечения касательной плоскости к поверхности и соприкасающейся плоскости кривой. Следовательно, к ним можно применить формулу (10). Направления двух главных нормалей могут либо совпадать, либо быть взаимно противоположными, т. е. возможно либо $\theta=\theta'$, либо $\theta=\pi-\theta'$. Однако последнее предположение должно быть отвергнуто ввиду того, что $\cos\theta$ и $\cos\theta'$ имеют один и тот же знак. Таким образом $\theta'=\theta$ и $R'=R$. Две кривые Γ и Γ' с совпадающими направлениями главных нормалей и равными радиусами кривизны имеют, очевидно, и общий центр кривизны. Итак, *все кривые некоторой поверхности, проходящие через какую-нибудь точку M и имеющие в этой точке общую соприкасающуюся плоскость (отличную от касательной плоскости к поверхности), имеют также общий центр кривизны*. В частности, все эти кривые имеют тот же центр кривизны, что и плоское сечение поверхности их общею соприкасающеюся плоскостью.

Таким образом оказывается, что совершенно достаточно исследовать только плоские сечения поверхности, проходящие через точку M. Мы сначала рассмотрим, как изменяется кривизна различных плоских сечений, если секущие плоскости имеют общую касательную MT.

Можно предположить без ущерба общности, что для этой касательной

$$D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''\,dv^2 > 0,$$

так как при перемене знаков A, B, C, что соответствует перемене положительного направления нормали, очевидно, также изменятся и знаки коэфициентов D, D', D''.

Для всех секущих плоскостей $\cos\theta$ положителен, и угол θ — острый; в частности, для нормального сечения через MT угол θ' равен нулю. Пусть R' — радиус кривизны этого сечения; соотношение (10) в таком случае приведется к виду:

$$R = R'\cos\theta.$$

Отсюда следует, как легко видеть, что *центр кривизны любого наклонного плоского сечения поверхности есть ортогональная проекция на плоскость наклонного сечения центра кривизны нормального сечения, имеющего с первым общую касательную* (теорема Менье).

Благодаря этой теореме исследование кривизны плоских сечений сводится к исследованию сечений только нормальными плоскостями. Результаты, относящиеся к этому последнему вопросу, получены Эйлером.

Заметим прежде всего, что для нормальных сечений равенство (9) принимает две различные формы в зависимости от знака выражения

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Чтобы избежать этого неудобства, мы будем относить радиусу кривизны R некоторого нормального сечения знак плюс, если направление от точки M к центру кривизны совпадает с положительным направлением нормали к поверхности, и знак минус, если эти направления противоположны. При этом условии R определяется во всех случаях формулой:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{11}$$

которая указывает, и теперь уже вполне однозначно, положение центра кривизны.

На основании формулы (11) легко сделать заключение о характере расположения поверхности по отношению к касательной плоскости в смежности с точкой прикосновения. Если $D'^2 - DD'' < 0$, то трехчлен $D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$ не изменяет знака при вращении секущей плоскости вокруг нормали, центры кривизны всех нормальных сечений расположены по одну сторону касательной плоскости, по ту же сторону расположены и все точки поверхности, близкие к точке прикосновения. В этом случае говорят, что поверхность — *выпуклая в данной точке*, и сама точка M называется *эллиптической*.

Напротив, если $D'^2-DD''>0$, трехчлен $D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$ обращается в нуль при двух положениях секущей плоскости, для соответствующих нормальных сечений точка M будет точкой перегиба. Если секущая плоскость, вращаясь вокруг нормали, остается в одном из двугранных углов, образованных этими двумя плоскостями, R не меняет знака, и соответствующие сечения, в смежности с точкой M, будут лежать по одну сторону от касательной плоскости. При переходе секущей в смежный двугранный угол R переменит знак, и соответствующие сечения расположатся с другой стороны. Поверхность, следовательно, пересекает касательную плоскость вблизи точки прикосновения; такая точка называется *гиперболической*

Наконец, если в рассматриваемой точке $D'^2-DD''=0$, то все нормальные сечения расположены по одну сторону от касательной плоскости, за исключением одного, которое имеет бесконечно большой радиус кривизны и, вообще говоря, эту плоскость пересекает. В этом случае, точка M называется *параболической*.

Рассмотрим поверхность S, определенную уравнением $z=F(x, y)$; приняв $A=p$, $B=q$, $C=-1$, непосредственно получим: $D=r$, $D'=s$, $D''=t$, где p, q, r, s, t — обычные обозначения Монжа, и $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$.

Положительное направление нормали имеет направляющие косинусы

$$\lambda=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \mu=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\tag{12}$$

и составляет острый угол с Oz. Пусть будут α, β, γ направляющие косинусы касательной к нормальному сечению в точке M. Так как du и dv пропорциональны α, β, формулу (11) можно написать в виде:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2},\tag{13}$$

или, принимая во внимание соотношения

$$\gamma=p\alpha+q\beta,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

в более простом виде:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2.\tag{13'}$$

По знаку трехчлена $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ можно судить о том, как расположена поверхность относительно касательной плоскости в смежности с точкой прикосновения: над этой плоскостью, или под ней. Точка прикосновения будет эллиптической, если $s^2-rt<0$, гиперболической, если $s^2-rt>0$, и параболической, если $s^2-rt=0$.

Этот результат легко подтвердить исследованием разности $\delta = z - z'$, где z и z' — аппликаты двух точек: точки (x, y, z) поверхности и точки (x, y, z') касательной плоскости. Пусть будут (x_0, y_0) координаты точки прикосновения p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 — значения производных от $F(x, y)$ в этой точке. Тогда имеем:

$$\delta = F(x, y) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0),$$

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right)_0 = r_0, \quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)_0 = s_0, \quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)_0 = t_0.$$

Если $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$, δ имеет максимум или минимум в точке M (§ 45), и так как δ обращается в этой точке в нуль, то сохраняет постоянный знак в некоторой малой окрестности M.

Напротив, если $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$, для δ не будет ни максимума, ни минимума, следовательно, знак δ в соседстве с M будет изменяться.

234. Две основные квадратичные формы. Одновременно с формой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

будем исследовать квадратичную форму

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

По самому ее определению коэфициенты D, D', D'' имеют следующие значения:

$$D = \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad D'' = \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad 2D' = \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}. \tag{14}$$

Выражение D' можно упростить, пользуясь равенствами (3); диференцируя первое из этих равенств по v, второе — по u, получим:

$$\mathrm{S}A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \mathrm{S}A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

откуда:

$$D' = \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{14'}$$

Для коэфициентов D, D', D'' могут быть получены выражения, содержащие только производные от x, y, z по u и v.

Написав тождество (6) в виде:

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = -(A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z),$$

найдем, сравнивая обе части этого равенства:

$$D = -\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Заменяя в этом равенстве A, B, C их значениями (4), мы замечаем, что коэфициент при K есть разложение определителя, и мы получаем:

$$D = -K \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Аналогично определяются:

$$\left.\begin{aligned} D' &= -K \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} \\ \text{и} \\ D'' &= -K \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Коэфициенты D, D', D'', так же как и A, B, C, определяются лишь с точностью до произвольного множителя K, тогда как квадратичная форма

$$\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{17}$$

определена с точностью до знака, независимо от K. Форма (17) имеет весьма простое геометрическое значение. Обозначим через δ расстояние с соответствующим знаком точки поверхности с гауссовыми координатами $(u + du,\ v + dv)$ от касательной плоскости в точке (u, v). Если развернем δ в ряд по степеням du и dv, то члены первого порядка обращаются в нуль вследствие соотношений (3), а члены второго порядка

$$\frac{1}{2}\,\frac{A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

представляют, с точностью до множителя $-\frac{1}{2}$, форму (17). Таким образом общая формула (11), определяющая радиус кривизны нормального сечения, может быть написана в виде:

$$\frac{1}{R} = 2 \lim \frac{\delta}{ds^2},$$

что вполне согласуется с указанным уже ранее результатом (§ 209).

235. Теоремы Эйлера. Индикатриса. Чтобы исследовать изменение радиуса кривизны нормального сечения, примем рассматри-аемую точку поверхности за начало координат и касательную плоскость к поверхности в этой точке — за плоскость xOy. При таком выборе осей мы имеем $p=q=0$, и формула (13) обращается в

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi, \tag{18}$$

где φ есть угол между осью Ox и линиею пересечения секущей плоскости с плоскостью xOy. Приравнивая нулю производную от правой части уравнения (18) мы найдем, что R будет иметь максимум или минимум для двух взаимно перпендикулярных направлений. Для более подробного исследования изменения радиуса кривизны R во всех возможных частных случаях, выгодно воспользоваться следующим геометрическим представлением. Отложим на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью xOy длину Om, равную корню квадратному из абсолютной величины соответствующего радиуса кривизны. При вращении секущей плоскости вокруг нормали точка m опишет некоторую кривую, называемую *индикатрисой*, и очевидно, что из рассмотрения этой кривой мы получим наглядное представление о ходе изменения радиуса кривизны нормального сечения.

Рассмотрим три возможных случая.

1) $s^2-rt<0$. В этом случае радиус кривизны R сохраняет один и тот же знак; предположим, что R положительно. Выражения координат точки m будут $\xi=\sqrt{R}\cos\varphi$, $\eta=\sqrt{R}\sin\varphi$, и следовательно, уравнение индикатрисы будет иметь вид:

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1. \tag{19}$$

Это — уравнение эллипса с центром в начале координат. Отсюда видно, что R будет иметь максимум, когда след секущей плоскости совпадает с большою осью эллипса, и минимум, когда след секущей плоскости совпадает с малою осью, и что две секущие плоскости, следы которых равно наклонены к осям индикатрисы, дают для радиуса кривизны R равные значения. Нормальные сечения, проходящие через оси индикатрисы называются *главными нормальными сечениями*, а соответствующие радиусы кривизны — *главными радиусами кривизны*. Если мы примем за оси Ox и Oy оси индикатрисы, то будем иметь $s=0$, и формула (18) обратится в

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi.$$

Главные радиусы кривизны R_1 и R_2 получатся, если мы положим $\varphi=0$ или $\varphi=\frac{\pi}{2}$; отсюда находим $\frac{1}{R_1}=r$, $\frac{1}{R_2}=t$, и следовательно:

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{20}$$

2) $s^2 - rt > 0$. В этом случае нормальные сечения, соответствующие значениям угла φ, которые удовлетворяют уравнению

$$r \cos^2\varphi + 2s \cos\varphi \sin\varphi + t \sin^2\varphi = 0,$$

имеют бесконечно большие радиусы кривизны. Пусть будут L'_1OL_1, L'_2OL_2 следы этих нормальных сечений на плоскости xOy. Предположим, что когда след секущей плоскости проходит в угле L_1OL_2, то предыдущий трехчлен положителен. Обозначая, как и в первом случае, через ξ и η координаты точки m, мы найдем, что соответствующая часть индикатрисы представится уравнением:

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = 1.$$

Это — уравнение гиперболы, для которой асимптотами служат прямые L'_1OL_1 и L'_2OL_2; но, если след секущей плоскости проходит в угле L'_2OL_1, то мы будем иметь $R < 0$, и, чтобы получить соответствующую часть индикатрисы, должно положить

$$\xi = \sqrt{-R}\cos\varphi, \quad \eta = \sqrt{-R}\sin\varphi.$$

Мы получим уравнение гиперболы:

$$r\xi^2 + 2s\,\xi\eta + t\eta^2 = -1,$$

сопряженной с первою. При помощи этих двух сопряженных гипербол можно составить представление о ходе изменения радиуса кривизны нормального сечения. Приняв за оси координат главные оси обеих гипербол, мы найдем, что общая формула (18) и в этом случае может быть представлена в виде (20), где R_1 и R_2 обозначают главные радиусы кривизны, из которых один положителен, а другой отрицателен.

3) $s^2 - rt = 0$. В этом случае радиус кривизны R сохраняет постоянный знак, например знак плюс. Индикатриса представится и в этом случае уравнением (19), но так как здесь эта кривая принадлежит к параболам и вместе с тем имеет центр в начале координат, то она может быть только парою параллельных прямых. Приняв за ось Oy прямую, параллельную этим обеим прямым, мы будем иметь в этой системе осей $s = 0$, $t = 0$, и общая формула (18) примет вид:

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi,$$

или

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

Эту формулу можно также рассматривать как предельный случай формулы (20), когда один из главных радиусов кривизны R_2 обращается в бесконечность.

Формулы Эйлера можно также вывести, не пользуясь формулою (13). Приняв рассматриваемую точку поверхности за начало координат, а касательную плоскость — за плоскость xOy и продолжая разложение z по формуле Тейлора до членов третьего порядка, мы можем написать:

$$z = \frac{rx^2 + 2sxy + ty^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

где опущенные члены — не ниже третьего порядка. Чтобы получить радиус кривизны сечения, образованного плоскостью $y = x \operatorname{tg} \varphi$, сделаем сначала преобразование координат:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

и положим затем $y' = 0$. Мы получим разложение z по степеням x':

$$z = \frac{r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi}{1\cdot 2} x'^2 + \ldots,$$

и, воспользовавшись замечанием § 209, придем к формуле (18).

Примечание. Линия пересечения поверхности со своею касательною плоскостью имеет уравнение:

$$0 = rx^2 + 2sxy + ty^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots$$

Эта кривая имеет двойную точку в начале координат, и касательные в этой двойной точке суть асимптотические касательные. Вообще, если две поверхности S, S_1 касаются в начале координат плоскости xOy, то проекция линии пересечения этих поверхностей на плоскость xOy представится уравнением:

$$0 = (r - r_1)x^2 + 2(s - s_1)xy + (t - t_1)y^2 + \ldots,$$

где r_1, s_1, t_1 относятся к поверхности S_1, а r, s, t — к поверхности S. Характер двойной точки зависит от знака выражения $(s - s_1)^2 - (r - r_1)(t - t_1)$; если это количество равно нулю, то кривая пересечения имеет, вообще, в начале координат точку возврата.

Таким образом в каждой точке поверхности есть четыре замечательных положения касательной прямой: две взаимно перпендикулярных касательных, для которых радиус кривизны R будет максимум или минимум, и две *асимптотических* или *главных* касательных, для которых R равно бесконечности. Последние касательные мы получим, приравнивая нулю трехчлен $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ (§ 213)*.

Мы теперь покажем, как определяются главные нормальные сечения и главные радиусы кривизны в любой системе прямоугольных осей,

236 Главные радиусы кривизны. Исследуя индикатрису, легко уяснить, что каждому значению R соответствуют, вообще говоря, два нормальных сечения, действительных или мнимых, радиусы кривизны которых равны R. Исключением является тот случай, когда R равен одному из главных радиусов кривизны; тогда найдется только одно нормальное сечение, именно, главное, которое имеет R своим радиусом кривизны.

Для определения нормальных сечений, имеющих радиус кривизны R, служит общая формула (11), которую мы напишем в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{21}$$

где положено: $R = \rho\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Для данного значения ρ уравнение (21) является уравнением второго порядка относительно $\frac{dv}{du}$.

$$(\rho D - E)\,du^2 + 2(\rho D' - F)\,du\,dv + (\rho D'' - G)\,dv^2 = 0, \tag{22}$$

* Следует обратить внимание на различие между *главными направлениями* в точке поверхности и *главными касательными* в этой точке. Главные направления суть направления осей индикатрисы; для них R есть максимум или минимум. Главные касательные суть асимптоты индикатрисы; для них $R = \infty$. (*Ред.*)

корни которого определяют направление касательной к нормальному сечению, имеющему радиус кривизны R.

Если R — один из главных радиусов кривизны, уравнение (22) имеет двойной корень, и отношение $\frac{dv}{du}$ должно удовлетворять двум условиям:

$$\left.\begin{aligned}(\rho D - E)\,du + (\rho D' - F)\,dv = 0,\\ (\rho D' - F)\,du + (\rho D'' - G)\,dv = 0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Эта система уравнений определяет сразу и главные радиусы кривизны и главные нормальные сечения. Исключая $\frac{dv}{du}$, получим уравнение второй степени относительно ρ:

$$(\rho D' - F)^2 - (\rho D - E)(\rho D'' - G) = 0. \tag{24}$$

Чтобы получить уравнение, определяющее главные радиусы кривизны R и R', следует в (24) заменить ρ через $\frac{R}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Далее исключая ρ, из уравнений (23) получим уравнение второй степени относительно $\frac{dv}{du}$:

$$(D\,du + D'dv)(F\,du + G\,dv) - (D'du + D''dv)(E\,du + F\,dv) = 0, \tag{25}$$

корни которого определяют направление касательной к главному нормальному сечению.

По самой природе вопроса корни уравнения (24) всегда действительны. Если R и R' — главные радиусы кривизны, то произведение RR' определяется равенством:

$$\frac{1}{RR'} = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)(A^2 + B^2 + C^2)}, \tag{26}$$

с помощью которого можно произвести проверку известных уже результатов. Так как $EG - F^2$ всегда положительно, то RR' имеет тот же знак, что и $DD'' - D'^2$. В параболической точке один из главных радиусов кривизны равен бесконечности, и $\frac{1}{RR'}$ равно нулю.

Для того чтобы уравнение (24) имело равные корни, необходимо, чтобы индикатриса была кругом. В этом случае все нормальные сечения имеют один и тот же радиус кривизны, и правая часть формулы (11) должна быть независимой от $\frac{dv}{du}$; необходимым и достаточным условием этого являются равенства:

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}. \tag{27}$$

Точка, удовлетворяющая этим условиям, называется *точкой округления* (*омбиликальной* точкой). В этой точке уравнение (25) удовлетворяется тождественно, так как все диаметры круга являются его осями симметрии.

Если поверхность определена уравнением $z=F(x, y)$, то, положив $u=x$, $v=y$, приведем уравнения (24), (25) и (27) соответственно к следующим:

$$(rt-s^2)R^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]R+ \\ +(1+p^2+q^2)=0, \tag{24'}$$

$$\alpha^2[(1+p^2)s-pqr]+\alpha\beta[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+ \\ +\beta^2[pqt-(1+q^2)s]=0, \tag{25'}$$

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}. \tag{27'}$$

Их можно вывести либо как частные случаи общих формул, либо непосредственно из формулы (13).

В некоторых случаях можно определить главные нормальные сечения поверхности из геометрических соображений. Например, если у поверхности S есть плоскость симметрии, проходящая через точку M этой поверхности, то прямая пересечения этой плоскости с касательною плоскостью в точке M есть, очевидно, ось индикатрисы, и сечение поверхности плоскостью симметрии есть одно из главных нормальных сечений. Так, в каждой точке поверхности вращения меридиан есть одно из главных нормальных сечений; следовательно, плоскость второго главного нормального сечения проходит через нормаль к поверхности и касается параллели. Но центр кривизны одного из наклонных сечений, проходящих через касательную прямую к параллели, известен, — именно, центр самой параллели. По теореме Менье, отсюда следует, что центр кривизны второго главного сечения лежит в точке пересечения нормали с осью поверхности.

В каждой точке развертывающейся поверхности мы имеем $s^2-rt=0$, и индикатриса состоит из пары параллельных прямых. В этом случае одно из главных сечений совпадает с образующею, и соответствующий радиус кривизны бесконечно велик. Плоскость второго главного сечения перпендикулярна к образующей. Все точки развертывающейся поверхности — *параболические*, и это единственные поверхности, обладающие этим свойством (§ 204).

Если неразвертывающаяся поверхность в некоторых точках выпуклая, а в других — седлообразная, то эта поверхность имеет, вообще, целую линию параболических точек, отделяющую области, где s^2-rt положительно, от областей, где s^2-rt отрицательно. Например, на торе такими линиями будут две крайние параллели.

На выпуклой поверхности существует, вообще, только несколько отдельных точек округления. Докажем, что единственная действительная поверхность, все точки которой суть точки округления, есть сфера. Обозначим через λ, μ, ν направляющие косинусы нормали к поверхности; диференцируя формулы (12), получим

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{pqt-(1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или, по формулам (27'):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\mu}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Первое соотношение показывает, что зависит только от x, второе, — что μ зависит только от y; следовательно, общее значение производных $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ не зависит ни от x, ни от y, т. е. оно равно некоторому постоянному $\frac{1}{a}$. Отсюда следует:

$$\lambda=\frac{x-x_0}{a},\quad \mu=\frac{y-y_0}{a},\quad \nu=\frac{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{a},$$

$$p=-\frac{\lambda}{\nu}=-\frac{x-x_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},$$

$$q=-\frac{\mu}{\nu}=-\frac{y-y_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

Интегрируя два последних уравнения, находим:

$$z=z_0+\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

а это — уравнение сферы. Точно так же можно было бы доказать, что если $\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, то поверхность есть плоскость. Кроме этих решений, уравнения (27') имеют еще бесчисленное множество мнимых решений, удовлетворяющих уравнению $1+p^2+q^2=0$; в этом можно убедиться, диференцируя это последнее соотношение по x и по y.

II. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ. ЛИНИИ КРИВИЗНЫ.

237. Асимптотические линии. В каждой гиперболической точке поверхности существуют две касательные, для которых соответствующие нормальные сечения имеют бесконечно большие радиусы кривизны: это — асимптоты индикатрисы. Линии, лежащие на данной поверхности и касающиеся в каждой своей точке одной из этих асимптот, называются *асимптотическими линиями*. При перемещении по одной из этих линий параметры u, v являются функциями одного переменного; чтобы касательная к кривой совпадала с асимптотой индикатрисы, du и dv должны удовлетворять соотношению:

$$Ddu^2+2D'du\,dv+D''dv^2=0. \tag{28}$$

Разрешая это уравнение относительно $\frac{dv}{du}$ и замечая, что коэфициенты D, D', D'' суть функции u и v, получим:

$$\frac{dv}{du}=\varphi_1(u,v),\quad \frac{dv}{du}=\varphi_2(u,v). \tag{29}$$

Ниже мы покажем, что каждое из этих уравнений имеет бесчисленное множество интегралов, и что каждая пара значений (u_0, v_0) определяет, вообще, один и только один интеграл. Следовательно, через каждую точку поверхности проходят, вообще, две и только две асимптотические линии. Диференциальное уравнение (28) может быть еще написано в эквивалентной форме:

$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0, \tag{30}$$

которая оказывается обычно более удобной в приложениях. В случае, если поверхность определена уравнением $z = F(x, y)$, предыдущее диференциальное уравнение приведется к виду:

$$dp\,dx + dq\,dy = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{31}$$

Асимптотические линии можно определить еще на основании следующего их свойства, которое совершенно не вводит метрических соотношений: ***асимптотические линии поверхности суть такие линии, в каждой точке которых соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью к поверхности.*** В самом деле, для того чтобы соприкасающаяся плоскость совпадала с касательной плоскостью, необходимо и достаточно, чтобы одновременно было:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \quad A\,d^2x + B\,a^2y + C\,d^2z = 0.$$

Первое уравнение удовлетворяется для всякой кривой, лежащей на поверхности, тогда как второе, вследствие тождества (6), совпадает с уравнением (30).

Нетрудно видеть, почему эти два определения асимптотических линий равносильны. Так как радиус кривизны нормального сечения, касающегося асимптоты индикатрисы, равен бесконечности, то, по теореме Менье, равен бесконечности и радиус кривизны асимптотической линии, если только соприкасающаяся плоскость не будет перпендикулярна нормали к поверхности; в последнем случае формула Менье принимает неопределенный вид. Следовательно, соприкасающаяся плоскость асимптотической линии должна совпадать с касательною плоскостью к поверхности всякий раз, как радиус ее кривизны не равен постоянно бесконечности; но в последнем случае мы получили бы прямую линию, соприкасающаяся плоскость которой неопределенна. Из этого определения асимптотических линий следует, что асимптотические линии сохраняются при всяком гомографическом преобразовании. Очевидно также, что диференциальное уравнение асимптотических линий имеет одинаковый вид в прямоугольных и в косоугольных осях координат, так как уравнение соприкасающейся плоскости в обоих случаях одинаково.

Асимптотические линии существуют, конечно, только на поверхностях седлообразных. Но, если поверхность аналитическая, то, каков бы ни был знак количества $s^2 - rt$, диференциальное уравнение (28) имеет всегда бесчисленное множество интегралов, действительных или мнимых. Поэтому мы будем говорить, что аналитическая выпуклая поверхность имеет две системы мнимых асимптотических линий. Так, асимптотическими линиями однополостного гиперболоида будут две системы прямолинейных образующих; для эллипсоида или шара эти образующие — мнимые, но они также удовлетворяют диференциальному уравнению асимптотических линий.

Примеры. 1. Найдем асимптотические линии поверхности

$$z = x^m y^n.$$

Мы имеем:

$$r = m(m-1)x^{m-2}y^n, \quad s = mnx^{m-1}y^{n-1}, \quad t = n(n-1)x^m y^{n-2},$$

и диференциальное уравнение (31) принимает вид:

$$m(m-1)\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)^2 + 2mn\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right) + n(n-1) = 0.$$

Решая это уравнение, получим для отношения $\frac{y\,dx}{x\,dy}$ два значения h_1 и h_2. Следовательно, асимптотическими линиями будут линии поверхности, проектирующиеся на плоскость xOy по кривым

$$y^{h_1} = C_1 x, \quad y^{h_2} = C_2 x.$$

2. Рассмотрим, например, коноид $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Уравнение $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ равносильно уравнениям $x = u$, $y = uv$, $z = \varphi(v)$, и соотношения (3) обращаются в

$$A + Bv = 0, \quad Bu + C\varphi'(v) = 0.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, принимая $C = -u$, $A = -v\varphi'(v)$, $B = \varphi'(v)$, и диференциальное уравнение (30) принимает вид:

$$u\varphi''(v)\,dv^2 - 2\varphi'(v)\,du\,dv = 0.$$

Одно из решений этого уравнения есть $v = \text{const}$; из него получим прямолинейные образующие. Разделив уравнение на dv, получим:

$$\frac{\varphi''(v)\,dv}{\varphi'(v)} = \frac{2du}{u};$$

отсюда имеем:

$$u^2 = C\varphi'(v).$$

Следовательно, асимптотические линии второй системы проектируются на плоскость xOy по кривым

$$x^2 = C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Укажем еще поверхность, рассмотренную Жамэ (Jamet), уравнение которой может быть приведено к виду:

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = F(z).$$

Если принять за независимые переменные z и $\frac{y}{x} = u$, то диференциальное уравнение асимптотических линий будет:

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}\,dz = \pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}\,du,$$

и, очевидно, проинтегрируется в двух квадратурах.

4. Геликоид есть поверхность, представляемая уравнениями:

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = f(\rho) + h\omega.$$

Предоставляем читателю доказать, что диференциальное уравнение асимптотических линий геликоида будет:

$$\rho f''(\rho)\,d\rho^2 - 2h\,d\omega\,d\rho + \rho^2 f'(\rho)\,d\omega^2 = 0,$$

откуда ω получается при помощи квадратуры.

238. Асимптотические линии линейчатых поверхностей. Уравнения всякой линейчатой поверхности могут быть представлены в виде:

$$x = x_0 + \alpha u, \quad y = y_0 + \beta u, \quad z = z_0 + \gamma u,$$

где $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ — функции второго переменного параметра v. При $u = 0$ и при изменении v точка (x_0, y_0, z_0) описывает некоторую кривую Г поверхности; с другой стороны, при v постоянном и при изменении u точка (x, y, z) описывает прямолинейную образующую поверхности, и переменное u пропорционально расстоянию точки (x, y, z) от точки (x_0, y_0, z_0), в которой рассматриваемая образующая пересекает кривую Г.

Для простоты предположим, что мы положили $K = \pm 1$ в формулах (4); выражения (15) и (16) непосредственно показывают, что $D = 0$, что D' не зависит от u, и что D'' есть многочлен не выше второй степени относительно u.

Разделив левую часть уравнения (28) на множитель dv, соответствующий прямолинейным образующим, мы получим диференциальное уравнение второй системы асимптотических линий:

$$\frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = 0, \tag{32}$$

где L, M, N — функции переменного v. Уравнения этого вида обладают замечательными свойствами, которые будут указаны позднее. Так, например, мы увидим, что *ангармоническое отношение каких-нибудь четырех интегралов уравнения* (32) *постоянно.* Отсюда следует, что ангармоническое отношение четырех точек пересечения прямолинейной образующей с четырьмя асимптотическими линиями второй системы постоянно; это дает возможность найти все асимптотические линии второй системы, если три из них известны. Мы увидим также, что если известен один или два интеграла уравнения (32), то можно найти все другие интегралы, соответственно, двумя или одною квадратурою. Если все прямолинейные образующие поверхности встречают некоторую прямую, то эта прямая есть одна из асимптотических линий второй системы, и следовательно, все другие асимптотические линии второй системы можно найти двумя квадратурами. Если поверхность имеет две прямолинейных направляющих, то известны две асимптотические линии второй системы, и для определения остальных нужно будет выполнить одну квадратуру. Но в этом случае решение еще более упрощается. В самом деле, если нам дана линейчатая поверхность, имеющая две прямолинейных направляющих, то эту поверхность можно преобразовать гомографически таким образом, чтобы одна из этих направляющих обратилась в бесконечно удаленную прямую; тогда рассматриваемая поверхность обратится в коноид, а мы видели выше (§ 237), что асимптотические линии коноида получаются без квадратур*.

---

* В коноиде, рассмотренном в § 237, прямолинейная направляющая (ось коноида) была перпендикулярна к образующим; однако легко видеть, что уравнение асимптотических линий будет иметь такой же вид и в том случае, когда прямолинейная направляющая будет наклонена к образующим под любым углом. *(Р. д.)*

239. Сопряженные линии. Две прямые, проходящие через точку поверхности S, лежащие в касательной плоскости и представляющие два сопряженных диаметра индикатрисы в этой точке, называются *сопряженными касательными* к поверхности. Очевидно, что каждой прямой, касательной к поверхности, соответствует сопряженная касательная прямая, которая совпадает с первой, если это — асимптотическая касательная, и притом только в этом случае. Пусть будут du и dv направляющие параметры некоторой касательной к поверхности, заданной в криволинейных координатах; проекция этой касательной на плоскость x, y имеет угловой коэфициент

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv}{\frac{\partial f}{\partial u}\,du+\frac{\partial f}{\partial v}\,dv},$$

так что ангармоническое отношение четырех касательных к поверхности в точке $M(u, v)$ равно ангармоническому отношению четырех соответствующих значений $\frac{dv}{du}$. Пусть будут (du, dv) и $(\delta u, \delta v)$ направляющие параметры двух касательных MT и MT', c и c' — корни уравнения

$$D+2D'm+D''m^2=0,$$

которое определяет в точке M асимптотические касательные. Для того чтобы MT и MT' были сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{dv-c\,du}{dv-c'\,du}+\frac{\delta v-c\,\delta u}{\delta v-c'\,\delta u}=0.$$

Освобождаясь от знаменателя и заменяя cc', $c+c'$ их выражениями через D, D', D'', получим:

$$D\,du\,\delta u+D'\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D''\,dv\,\delta v=0. \tag{33}$$

Принимая во внимание выражения коэфициентов D, D', D'', это условие можно записать еще в другой, эквивалентной ему форме:

$$dA\,\delta x+dB\,\delta y+dC\,\delta z=0, \quad \delta A\,dx+\delta B\,dy+\delta C\,dz=0, \tag{34}$$

полагая, вообще,

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u}\,du+\frac{\partial F}{\partial v}\,dv, \quad \delta F=\frac{\partial F}{\partial u}\,\delta u+\frac{\partial F}{\partial v}\,\delta v.$$

Если на поверхности S дана какая-нибудь кривая Γ, то огибающая касательных плоскостей к поверхности S в точках кривой Γ есть развертывающаяся поверхность, касающаяся поверхности S по кривой Γ. *В каждой точке M кривой Γ образующая этой развертывающейся поверхности есть касательная прямая к поверхности S, сопряженная с касательною к кривой Γ.*

В самом деле, вдоль кривой Γ величины x, y, z, A, B, C суть функции некоторого переменного параметра α; характеристика касательной плоскости определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \\ dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

если принять во внимание соотношение (5) (буква d обозначает диференцирование по α). Если обозначить направляющие параметры этой характеристики через δx, δy, δz, то вторая формула (35) приводит к соотношению:

$$dA\,\delta x+dB\,\delta y+dC\,\delta z=0,$$

которое тождественно с равенством (34); отсюда следует верность высказанной нами теоремы. В частности, если линия Γ асимптотическая, то характеристики совпадают с касательною к кривой Γ, которая, следовательно, является в этом случае ребром возврата развертывающейся поверхности (§ 238).

Говорят, что два семейства кривых на поверхности, из которых каждое зависит от одного переменного параметра, образуют ***сопряженную сеть***, если касательные к двум кривым обоих семейств, проходящим через одну и ту же точку поверхности, будут в каждой точке сопряженными. Очевидно, что на каждой поверхности существует бесчисленное множество сопряженных сетей, причем одно семейство кривых может быть взято произвольно, тогда второе семейство определится из диференциального уравнения первого порядка. В самом деле, пусть будет $F(u, v)=K$ уравнение одного семейства кривых, зависящее от одного переменного параметра K. Из уравнения $dF=0$ можно получить:

$$\frac{dv}{du}=G(u, v),$$

и тогда из (33) величина $\dfrac{\delta v}{\delta u}$ определится в функции u и v, т. е. получится диференциальное уравнение первого порядка.

В качестве примера найдем условия, при которых кривые $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ образуют сопряженную сеть. Мы можем положить в этом случае $du=0$, $\delta v=0$, и условие (33) обратится в $D'=0$, или

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0,$$

Эти условия показывают, что x, y, z представляют собою три интеграла уравнения вида:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\frac{\partial\theta}{\partial u}+N\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{36}$$

где M и N — произвольные функции от u и v. Значит, достаточно знать три различных интеграла какого-нибудь уравнения вида (36), чтобы иметь уравнение поверхности, отнесенной к сопряженной системе. Например, если принять $M=N=0$, то всякий интеграл уравнения (36) будет равен сумме функции от u и функции от v; следовательно, на всякой поверхности, представляемой уравнениями:

$$x=f(u)+f_1(v),\quad y=\varphi(u)+\varphi_1(v),\quad z=\psi(u)+\psi_1(v), \tag{37}$$

кривые (u) и (v) образуют сопряженную сеть.

Поверхности вида (37) называются *поверхностями переноса*. Каждая такая поверхность может быть образована двумя различными способами поступательным движением некоторой неизменяемой кривой Г, одна из точек которой описывает некоторую другую кривую Г'. В самом деле, рассмотрим четыре точки M_0, M_1, M_2, M, соответствующие значениям (u_0, v_0), (u, v_0), (u_0, v), (u, v) параметров u и v. На основании формул (37), эти точки будут вершинами параллелограма *. Если, оставляя v_0 постоянным, мы будем изменять u, то точка M_1 опишет некоторую кривую Г поверхности; точно так же, если при постоянном u_0 мы будем изменять v, то точка M_2 опишет некоторую другую кривую Г' поверхности. Следовательно, эта поверхность может быть образована как поступательным движением кривой Г, причем точка M_2 описывает кривую Г', так и поступательным движением кривой Г', причем точка M_1 описывает кривую Г. Из самого способа образования таких поверхностей очевидно, что оба семейства кривых — сопряженные; в самом деле, например, касательные прямые, проведенные к различным положениям кривой Г' в тех точках, где эта кривая пересекает кривую Г, образуют цилиндр, описанный около поверхности вдоль кривой Г; следовательно, касательные к кривым Г и Г' — сопряженные.

240. Линии кривизны. Линия, лежащая на поверхности S, называется *линией кривизны* этой поверхности, если касательные ее в каждой точке имеют направление одной из осей индикатрисы. Эти линии, следовательно, определяются диференциальным уравнением, полученным уже нами раньше:

$$(D\,du+D'\,dv)(F\,du+G\,dv)-(D'\,du+D''\,dv)(E\,du+F\,dv)=0, \tag{25}$$

которое дает всегда два действительных значения $\frac{dv}{du}$. Из общей теории диференциальных уравнений следует, что в каждой обыкновенной точке поверхности (притом не являющейся точкой округления) проходят две и только две линии кривизны, из которых каждая касается одной из осей индикатрисы. На каждой действительной поверхности, отличной от сферы и плоскости, имеются два семейства линий кривизны, образующих одновременно и ортогональную и сопряженную сеть.

Линии кривизны могут быть определены еще следующим их свойством: ***это такие линии, лежащие на поверхности S, вдоль которых нормали к S образуют развертывающуюся поверхность.***

В самом деле, напишем уравнение нормали:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C};$$

---

* Поэтому, при переходе u_0 в u отрезок M_0M_2 перемещается поступательно в положение M_1M, и точно так же при переходе v_0 в v отрезок M_0M_1 перемещается поступательно в положение M_2M. (*Ред.*)

необходимым и достаточным условием того, чтобы эта прямая образовывала развертывающуюся поверхность, является следующее (§ 205):

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0, \tag{38}$$

или, развертывая диференциалы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} du + \frac{\partial A}{\partial v} dv & \frac{\partial B}{\partial u} du + \frac{\partial B}{\partial v} dv & \frac{\partial C}{\partial u} du + \frac{\partial C}{\partial v} dv \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы доказать тождественность этого диференциального уравнения с уравнением (25), умножим элементы первого столбца определителя на $\frac{\partial x}{\partial u}$, второго — на $\frac{\partial y}{\partial u}$, третьего — на $\frac{\partial z}{\partial u}$ и заменим элементы первого столбца суммой соответствующих произведений; аналогичные действия можно выполнить для переменного v. Пользуясь выражениями коэфициентов E, F, G и D, D', D'' [формулы (14) и (14')], можно уже окончательно написать:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv & \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ 0 & 0 & C \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv & \frac{\partial C}{\partial u} du + \frac{\partial C}{\partial v} dv \end{vmatrix} = 0;$$

в таком виде легко усмотреть тождественность этого уравнения с уравнением (25).

Найденный результат легко может быть получен также с помощью свойств разверток пространственных кривых и сопряженных касательных.

Пусть будет Γ некоторая линия на поверхности S, вдоль которой нормали к S образуют развертывающуюся поверхность. Если повернем каждую из этих нормалей в плоскости, нормальной к Γ, на прямой угол вокруг точки M, она совпадет с прямою MT', лежащею в касательной плоскости и перпендикулярною к касательной MT кривой Γ. Прямые MT' образуют также некоторую развертывающуюся поверхность, касающуюся S вдоль Γ (§ 225). Следовательно, прямые MT и MT' суть сопряженные касательные и, вследствие своей ортогональности, являются осями индикатрисы.

Обратное положение доказывается аналогичным способом.

В приложениях удобнее брать диференциальное уравнение линий кривизны в форме (38), так как при этом не требуется предварительно вычислять коэфициенты E, F, G, D, D', D''. Допустим, например, что поверхность определена уравнением $z=F(x, y)$; в этом случае уравнения нормали суть:

$$\left.\begin{aligned} X&=-pZ+x+pz, \\ Y&=-qZ+y+qz. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Для того чтобы эти прямые образовывали развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы два уравнения (§ 205)

$$-Z\,dp+d(x+pz)=0, \quad -Zdq+d(y+qz)=0 \tag{40}$$

удовлетворялись при одних и тех же значениях Z, т. е. чтобы было:

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq},$$

или после упрощения:

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}.$$

Заменяя dz, dp, dq их выражениями, получим диференциальное уравнение:

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pqdy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}, \tag{41}$$

которое тождественно с уравнением (25′), если в нем заменить dx и dy, соответственно, через α и β.

1. Найдем, например, линии кривизны геликоида

$$z=a\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Полагая

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad z=a\theta,$$

получим для определения A, B, C два условия:

$$A\cos\theta+B\sin\theta=0, \quad -A\rho\sin\theta+B\rho\cos\theta+Ca=0.$$

Если принять $C=\rho$, то получим:

$$A=a\sin\theta, \quad B=-a\cos\theta.$$

Диференциальное уравнение (38) после приведения подобных членов примет вид:

$$d\rho^2-(\rho^2+a^2)\,d\theta^2=0,$$

откуда

$$d\theta=\pm\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}}.$$

Взяв какой-нибудь определенный знак, например $+$, произведем интегрирование:

$$\rho+\sqrt{\rho^2+a^2}=ae^{\theta-\theta_0}$$

и

$$\rho=\frac{a}{2}\left[e^{\theta-\theta_0}-e^{-(\theta-\theta_0)}\right].$$

Проекции линий кривизны на плоскость xOy суть равные между собою спирали, которые легко построить.

2. Найдем линии кривизны параболоида $z=\frac{xy}{a}$. Мы имеем:

$$p=\frac{y}{a},\quad q=\frac{x}{a},\quad r=t=0,\quad s=\frac{1}{a};$$

диференциальное уравнение (41) обращается в

$$(a^2+y^2)\,dx^2=(a^2+x^2)\,dy^2.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\pm\frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}}=0.$$

Взяв, например, перед обоими корнями знак плюс, мы получим следующий общий интеграл предыдущего диференциального уравнения:

$$(x+\sqrt{x^2+a^2})(y+\sqrt{y^2+a^2})=C;$$

этот интеграл дает одну из систем линий кривизны. Полагая

$$\lambda=x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2} \tag{42}$$

и пользуясь тождеством

$$(x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2})^2+a^4=[xy+\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+a^2)}]^2,$$

мы можем представить предыдущий интеграл в виде:

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+a^4}=C.$$

Отсюда следует, что проекции одной из двух систем линий кривизны могут быть также представлены уравнением (42), где λ обозначает произвольное постоянное. Точно так же мы нашли бы, что уравнение линий кривизны другой системы будет:

$$x\sqrt{y^2+a^2}-y\sqrt{x^2+a^2}=\mu. \tag{43}$$

Пользуясь уравнением параболоида $xy=az$, мы можем представить уравнение (42) и (43) в виде:

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=C,\qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=C'.$$

Но выражения $\sqrt{x^2+z^2}$ и $\sqrt{y^2+z^2}$ представляют расстояния точки (x, y, z) соответственно от осей Oy и Ox; следовательно, *линии кривизны параболоида суть такие кривые, для которых сумма или разность расстояний каждой их точки от осей Ox и Oy постоянна.*

241. Развертка поверхности. Пусть будет C линия кривизны поверхности S. Когда точка M описывает кривую C, нормаль к поверхности MN остается касательною к некоторой кривой Γ. Обозначим через A точку прикосновения линий MN и Γ, и пусть будут X, Y, Z координаты этой точки. Координата Z определяется любым из уравнений (40), причем эти оба уравнения приводятся к одному, так как C есть линия кривизны. Мы можем представить уравнения (40) в виде:

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

Умножая числители и знаменатели обеих дробей соответственно на dx и dy, получим, по свойству равных отношений:

$$Z-z=\frac{dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}.$$

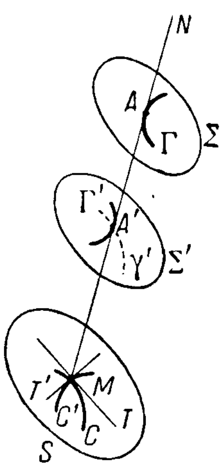
Но dx, dy, dz пропорциональны направляющим косинусам α, β, γ касательной к линии кривизны, и мы имеем:

$$Z - z = \frac{1}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

Сравнивая эту формулу с формулою (13), дающею алгебраическое значение радиуса кривизны R нормального сечения, касательного к линии кривизны, мы видим, что предыдущее соотношение можно представить в виде:

$$Z - z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = R\nu, \tag{44}$$

где ν есть косинус острого угла, образуемого положительным направлением нормали к поверхности с осью Oz. Но, с другой стороны, $z + R\nu$ представляет координату z_1 центра кривизны этого нормального сечения. Таким образом формула (44) показывает, что *точка прикосновения A нормали MN с ее огибающею Γ совпадает с центром кривизны главного нормального сечения, касающегося линии C в точке M.* Таким образом кривая Γ есть геометрическое место этих центров кривизны. Если мы рассмотрим все линии кривизны одного семейства с C, то местом соответствующих кривых Γ будет некоторая поверхность Σ, для которой все нормали поверхности S будут касательными. В самом деле, каждая нормаль, например нормаль MN, касается в точке A одной из кривых Γ, а все кривые Γ лежат на поверхности Σ.



Черт. 41.

Рассмотрим теперь линию кривизны C' другого семейства, проходящую через точку M и пересекающую ортогонально первую линию C. Нормали к поверхности S вдоль кривой C' также будут касательными к некоторой кривой Γ', представляющей место центров кривизны нормальных сечений поверхности S, касающихся кривой C'. Местом этих кривых Γ', соответствующих всем линиям кривизны одного семейства с C', будет некоторая поверхность Σ', для которой, как и для Σ, все нормали поверхности S будут касательными. Поверхности Σ, Σ', вообще, аналитически не различны, а составляют две полости одной поверхности, представляемой неразложимым уравнением.

Нормаль MN поверхности S касается полостей Σ, Σ' в двух главных центрах кривизны A и A' поверхности S в точке M. Легко найти касательные плоскости к этим двум полостям в точках A и A' (черт. 41). Когда точка M описывает кривую C, нормаль MN образует развертывающуюся поверхность D, для которой кривая Γ служит ребром возврата. С другой стороны, точка прикосновения A' этой нормали MN с поверхностью Σ', описывает некоторую кривую γ', отличную от Γ', так как прямая MN не может оставаться одновременно касательною к двум кривым Γ и Γ'. Следовательно, развертывающаяся поверхность D и поверхность Σ' касаются между собою в точке A', и следовательно, касательная плоскость к поверхности Σ' в точке A' касается развертывающейся поверхности D вдоль прямой MN; таким образом искомою касательною плоскостью будет плоскость MNT, проходящая через нормаль MN и через касательную прямую к кривой C. Точно так же можно убедиться, что касательною плоскостью к поверхности Σ в точке A будет плоскость NMT', проходящая через касательную прямую ко второй линии кривизны C'.

Это подтверждает ранее полученный результат (§ 231) и приводит к следующему важному свойству разверток. Проведем из какой-нибудь точки O пространства нормаль OM к поверхности S, и пусть будут A и A' главные центры кривизны поверхности S, лежащие на этой нормали. Касательные плоскости в точках A и A' к обеим полостям Σ, Σ' развертки взаимно перпендикулярны. Так как эти плоскости проходят через точку O, то ясно, что *для наблюдателя, смотрящего из любой точки O пространства, обе полости развертки поверхности S будут казаться пересекающимися под прямым углом.* Обратное предложение было доказано выше (§ 231).

242. Формулы Родрига. Если λ, μ, ν обозначают направляющие косинусы нормали к поверхности, а R — один из главных радиусов кривизны, то координаты соответствующего центра кривизны будут:

$$X = x + R\lambda, \quad Y = y + R\mu, \quad Z = z + R\nu. \tag{45}$$

Когда точка (x, y, z) описывает линию кривизны, касательную к тому нормальному сечению, радиус кривизны которого равен R, то, как мы видели, соответствующий центр кривизны описывает некоторую кривую Γ, касающуюся нормали MN к поверхности S. Следовательно, должно быть:

$$\frac{dX}{\lambda} = \frac{dY}{\mu} = \frac{dZ}{\nu};$$

заменяя X, Y, Z их значениями из (45), имеем:

$$\frac{dx + R\,d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + R\,d\mu}{\mu} = \frac{dz + R\,d\nu}{\nu}.$$

Общее значение этих отношений равно нулю; в самом деле, умножая числитель и знаменатель первого отношения на λ, второго — на μ, и третьего — на ν и складывая числители и знаменатели получившихся отношений, мы получим отношение, равное предыдущим, у которого знаменатель равен единице, тогда как числитель

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz + R(\lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu)$$

тождественно равен нулю. Таким образом мы получаем формулы Родрига (Olinde Rodrigues):

$$dx + R\,d\lambda = 0, \quad dy + R\,d\mu = 0, \quad dz + R\,d\nu = 0; \tag{46}$$

эти формулы имеют большое значение в теории поверхностей. Должно заметить, что формулы (46) применимы, конечно, только к перемещению точки (x, y, z) по линии кривизны.

Примечание. Для вывода уравнения, определяющего главные радиусы кривизны, можно воспользоваться также свойствами развертки поверхности. Заменим в формуле (45) λ, μ, ν их выражениями (8) и положим:

$$R = \rho \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

тогда получим:

$$X = x - \rho A, \quad Y = y - \rho B, \quad Z = z - \rho C.$$

Так как точка X, Y, Z описывает кривую, касающуюся нормали к поверхности S, когда точка (x, y, z) движется по линии кривизны, то должно быть:

$$\frac{dx - \rho\, dA - A\, d\rho}{A} = \frac{dy - \rho\, dB - B\, d\rho}{B} = \frac{dz - \rho\, dC - C\, d\rho}{C},$$

или, обозначая через $-d\rho + K$ общую величину этих отношений:

$$dx - \rho\, dA - AK = 0, \quad dy - \rho\, dB - BK = 0, \quad dz - \rho\, dC - CK = 0. \tag{47}$$

Исключая из этих уравнений ρ и K, получим диференциальное уравнение (38) линий кривизны; но, если заменить dx, dy, dz, dA, dB, dC через

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \ldots, \quad \frac{\partial C}{\partial u} du + \frac{\partial C}{\partial v} dv$$

и после этого исключить du, dv, K, то придем к уравнению, определяющему ρ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \rho \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} - \rho \frac{\partial A}{\partial v} & A \\ \frac{\partial y}{\partial u} - \rho \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} - \rho \frac{\partial B}{\partial v} & B \\ \frac{\partial z}{\partial u} - \rho \frac{\partial C}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} - \rho \frac{\partial C}{\partial v} & C \end{vmatrix} = 0. \tag{48}$$

Преобразованием, вполне аналогичным тому, которое мы проводим в § 240, это уравнение может быть приведено к форме (24), но уравнение (48) удобнее для пользования, так как оно не требует предварительного вычисления коэфициентов E, F, G, D, D', D''.

В качестве приложения найдем главные радиусы кривизны геликоида. В этом случае, если несколько изменить обозначения, употребленные раньше, мы напишем:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$
$$A = a \sin v, \quad B = -a \cos v, \quad C = u.$$

Уравнение (48) примет вид:

$$a^2 \rho^2 = a^2 + u^2,$$

откуда $R = \pm \frac{a^2 + u^2}{a}$. *Главные радиусы кривизны геликоида равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

243. Теорема Иоахимсталя. Для некоторых поверхностей линии кривизны можно определить из геометрических соображений. Так, очевидно, что линиями кривизны поверхности вращения будут меридианы и параллели этой поверхности, так как эти кривые касаются в каждой своей точке одной из осей индикатрисы. Это легко проверить, заметив, что нормали к поверхности вдоль меридиана образуют плоскость, а нормали к поверхности вдоль параллели образуют круглый конус, т. е. в обоих случаях нормали образуют развертывающиеся поверхности.

У развертывающейся поверхности одно семейство линий кривизны состоит из образующих. Другое семейство состоит из ортогональных траекторий этих образующих, т. е. из развертывающих ребра возврата (§ 225). Эти линии могут быть получены одною квадратурою. Если известна одна из развертывающих, то все остальные линии кривизны этого семейства можно получить из нее без всякой квадратуры. Все эти результаты легко проверить непосредственным вычислением.

Теория разверток кривой двойной кривизны привела Иоахимсталя (Ioachimsthal) к важной теореме, имеющей в этой теории обширное применение. Пусть две поверхности S и S' пересекаются по некоторой линии C, служащей линиею кривизны для каждой из этих поверхностей. Нормали MN и MN' к поверхностям S и S' вдоль кривой C образуют две развертывающихся поверхности. Но каждая из прямых MN и MN' нормальна к кривой C. Отсюда, по § 225, следует, что *если две поверхности имеют общую линию кривизны, то вдоль этой линии они пересекаются под постоянным углом.*

Обратно, *если две поверхности пересекаются под постоянным углом, и если линия пересечения есть линия кривизны для одной из этих поверхностей, то она будет также линиею кривизны и для другой.* В самом деле, известно, что если семейство нормалей кривой двойной кривизны C образует развертывающуюся поверхность, то семейство нормалей, которое получим, поворачивая каждую из этих нормалей на постоянный угол в нормальной плоскости к кривой C, также образует развертывающуюся поверхность.

Всякая плоская или сферическая кривая есть линия кривизны плоскости или сферы. Отсюда, по теореме Иоахимсталя, следует, что *для того чтобы плоская или сферическая кривая, расположенная на поверхности, была линиею кривизны этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы поверхность пересекала по этой линии плоскость или сферу под постоянным углом.*

244. Теорема Дюпена. Мы уже неоднократно встречались с тройными ортогональными системами поверхностей (§ 65, 140). Теория таких систем исходит из замечательной теоремы Дюпена (Dupin), которую мы здесь докажем.

Если даны три семейства поверхностей, образующих тройную ортогональную систему, то линия пересечения каждых двух поверхностей различных семейств будет линиею кривизны для каждой из этих поверхностей.

Допустим, что прямоугольные координаты x, y, z точек нашего пространства выражены в функции трех параметров u, v, w так, что три семейства поверхностей (u), (v), (w) образуют тройную ортогональную систему. Условием ортогональности являются следующие три соотношения:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0. \tag{49}$$

Диференцируя эти выражения, соответственно, по u, v, w, получим:

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\ S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=0,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0,$$

откуда, после очевидного преобразования, имеем:

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial w}=0,\ S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0,\ S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0. \tag{50}$$

Исключая производные $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ из двух первых уравнений (49) и последнего (50), выведем условие:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0,$$

которое выражает, что на поверхности (w) кривые $u=C$ и $v=C'$ образуют сопряженную сеть. Эта сеть одновременно сопряженная и ортогональная и состоит, следовательно, из линий кривизны.

Весьма замечательный пример тройной ортогональной системы представляют собою софокусные поверхности второго порядка (§ 141); по всей вероятности, рассмотрение этих поверхностей и привело Дюпена к общей теореме. Из теоремы Дюпена следует, что линии кривизны эллипсоида или гиперболоида (которые еще ранее были определены Монжем) суть линии пересечения этой поверхности с софокусными поверхностями второго порядка.

Параболоиды, представляемые уравнением:

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda,$$

где λ — переменный параметр, также образуют тройную ортогональную систему; отсюда можно получить линии кривизны параболоида. Упомянем еще приведенную выше (§ 240) тройную ортогональную систему:

$$\frac{xy}{z}=\alpha,\quad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=\beta,\ \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=\gamma.$$

Разыскание тройных ортогональных систем составляет одну из наиболее интересных и наиболее трудных задач диференциальной геометрии. Этому вопросу посвящено очень много исследований, результаты которых собраны Дарбу в его книге*. Любая поверхность S входит в состав

* Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 1910.

бесконечного множества тройных ортогональных систем. Одна из этих систем состоит из поверхностей, параллельных поверхности S, и из двух семейств развертывающихся поверхностей, образованных нормалями к поверхности S вдоль линий кривизны этой поверхности. В самом деле, пусть будет O какая-нибудь точка нормали MN к поверхности S в точке M, MT и MT' — касательные прямые к двум линиям кривизны C, C', проходящим через точку M. Касательная плоскость к поверхности, параллельной поверхности S и проходящей через точку O, будет параллельна касательной плоскости к поверхности S в точке M; касательными плоскостями к развертывающимся поверхностям, образованным нормалями к поверхности S вдоль кривой C и вдоль кривой C', будут служить, соответственно, плоскости NMT и NMT'. Но эти три плоскости попарно взаимно перпендикулярны, что и доказывает, что рассматриваемая система будет тройною ортогональною.

При помощи преобразования обратными радиусами-векторами из каждой тройной ортогональной системы можно получить бесконечное множество других аналогичных систем, так как это преобразование сохраняет величину углов. Так как мы только что видели, что всякая поверхность является членом некоторой тройной ортогональной системы, то отсюда следует, что при всяком преобразовании обратными радиусами-векторами *линии кривизны первоначальной поверхности преобразуются в линии кривизны новой поверхности*. Это легко проверить непосредственно.

245. Геодезическое кручение. Со свойствами линий кривизны связана некоторая важная геометрическая величина, зависящая от производных третьего порядка. В теории пространственных кривых (§ 225) существует соотношение:

$$\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}=H=\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \qquad (51)$$

где α, β, γ — направляющие косинусы касательной к какой-нибудь кривой Γ, лежащей на поверхности S, λ, μ, ν — направляющие косинусы нормали к этой же поверхности, θ — угол между нормалью к поверхности и главною нормалью к кривой Γ, отсчитываемый так же, как в § 225, T — радиус кручения кривой Γ.

Пусть координаты x, y, z точек S выражены с помощью параметров u, v; тогда косинусы λ, μ, ν суть также функции u, v; таким образом все элементы определителя H выражаются с помощью u, v, $\frac{dv}{du}$. Следовательно, *выражение* $\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}$ *имеет одну и ту же величину для всех кривых, лежащих на поверхности и касающихся друг друга в точке* (u, v).

О. Боннэ, которому принадлежит этот важный результат, назвал величину H *геодезическим кручением*. Чтобы исследовать изменение геодезического кручения в зависимости от положения касательной, выберем за оси x, y оси индикатрисы; при этом поверхность определится уравнением:

$$z=\frac{x^2}{2R}+\frac{y^2}{2R'}+\ldots,$$

Для какой-нибудь кривой Γ, проходящей на поверхности через начало координат касательная к которой образует угол ω с осью x, будет $\alpha=\cos\omega$, $\beta=\sin\omega$, $\gamma=0$ $\lambda=\mu=0$, $\nu=1$, $\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\cos\omega}{R}$, $\frac{d\mu}{ds}=\frac{\sin\omega}{R'}$, и формула (51) примет вид:

$$\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\sin\omega\cos\omega. \qquad (51\text{bis})$$

Согласно этой формуле, являющейся дополнением к формуле Эйлера, геодезическое кручение кривой Г обращается в нуль в том и только в том случае, когда кривая Г касается какой-нибудь оси индикатрисы. Следовательно, линии кривизны могут быть определены как *линии на поверхности, в каждой точке которых геодезическое кручение равно нулю.* Впрочем, этот результат следует и непосредственно из формулы (51), так как, приравнивая нулю правую часть этого равенства, получим диференциальное уравнение линий кривизны. Заметим еще, что при замене ω на $\omega+\frac{\pi}{2}$ в формуле (51bis) правая часть ее меняет знак; следовательно, если две кривые на поверхности пересекаются под прямым углом, то *сумма геодезических кручений обеих кривых в точке пересечения равна нулю.*

Если две поверхности S и S' пересекаются под постоянным углом по некоторой кривой Г, то разность $\theta-\theta'$ остается неизменной вдоль этой линии, и следовательно, геодезическое кручение Г имеет одну и ту же величину для обеих поверхностей.

Теорема Иоахимсталя получается как прямое следствие этого результата. При помощи свойств геодезического кручения можно весьма просто доказать теорему Дюпена. Пусть будут S_1, S_2, S_3 три поверхности, проходящие через точку M и относящиеся, соответственно, к трем семействам тройной ортогональной системы. Пусть будут Γ_1, Γ_2, Γ_3 линиями пересечения соответственно S_2 и S_3, S_3 и S_1, S_1 и S_2. Поверхности S_2 и S_3 ортогональны вдоль Γ_1, следовательно, геодезическое кручение кривой Γ_1 одно и то же для обеих поверхностей; обозначим его через τ_1. Для кривых Γ_2 и Γ_3 аналогичное значение имеют буквы τ_2 и τ_3; величины этих геодезических кручений в точке M удовлетворяют соотношениям:

$$\tau_1+\tau_2=0,\quad \tau_2+\tau_3=0,\quad \tau_3+\tau_1=0,$$

ибо, например, на поверхности S_2 кривые Γ_1 и Γ_2 являются ортогональными. Следовательно, в точке M мы имеем:

$$\tau_1=\tau_2=\tau_3=0.$$

Так как M — любая точка пространства, то кривые Γ_i действительно являются линиями кривизны для обеих поверхностей S_k, которым они принадлежат *.

* Теоремы Менье и Боннэ не являются специальным свойством линий, лежащих на поверхности. Эти свойства распространяются на все системы кривых Г, удовлетворяющих одному и тому же соотношению вида:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

где A, B, C — функции от x, y, z. Существует бесчисленное множество кривых этого рода, зависящих от одной произвольной функции, так как можно произвольно задать, например, y как функцию x:

$$y=f(x),$$

и z определится из диференциального уравнения первого порядка. Касательные к кривым Г, проходящим через данную точку пространства, лежат в плоскости P, перпендикулярной к прямой Δ с направляющими параметрами A, B, C. *Для всех таких кривых, имеющих в данной точке общую касательную, два выражения:* $\frac{\cos\theta}{R}$, $\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}$ *имеют одну и ту же величину*; здесь R и T имеют обычное значение, а θ — угол, образуемый прямою Δ с главной нормалью к кривой Г.

В самом деле, мы можем предположить, что A, B и C равны направляющим косинусам нормали к плоскости P, и очевидно, что член $\frac{dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz}{ds^2}$ в формуле (6) и определитель H в формуле (51) зависят только от x, y, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

246. Приложение к некоторым семействам поверхностей. Найдено много поверхностей, линии кривизны которых удовлетворяют определенным геометрическим условиям. Мы приведем здесь несколько наиболее простых результатов этих изысканий.

Найдем все поверхности, для которых одною из систем линий кривизны являются окружности. По теореме Иоахимсталя, плоскость каждой из этих окружностей должна пересекать поверхность под постоянным углом. Отсюда следует, что все нормали к поверхности вдоль окружности C этой системы должны пересекать ось окружности (т. е. перпендикуляр, проведенный к плоскости окружности через ее центр) в одной точке O. Сфера, описанная из точки O и проходящая через окружность C, касается поверхности вдоль C; следовательно, рассматриваемая поверхность есть огибающая сфер, зависящих от одного переменного параметра. Обратно, всякая поверхность, огибающая семейство сфер, представляет решение задачи, так как характеристики этого семейства, которые будут окружностями, составляют, очевидно, одно из семейств линий кривизны.

Поверхности вращения представляют, очевидно, частный случай поверхностей этого рода. Другой интересный частный случай представляют *трубчатые поверхности* (surfaces canaux), т. е. поверхности, огибающие сферу с постоянным радиусом R, центр которой описывает некоторую произвольную кривую Γ. Характеристиками этого семейства сфер будут окружности с радиусом R, центр которых описывает кривую Γ и плоскость которых остается нормальною к кривой Γ. Нормали к поверхности будут также нормалями и к кривой Γ; следовательно, линиями кривизны второй системы будут линии пересечения поверхности с развертывающимися поверхностями, образованными нормалями к кривой Γ.

Если, кроме первой, и вторая система линий кривизны поверхности будет состоять из окружностей, то, на основании предыдущего, эту поверхность можно рассматривать как огибающую любого из двух семейств сфер, зависящих от одного переменного параметра. Пусть будут S_1, S_2, S_3 сферы одного и того же семейства, C_1, C_2, C_3 — соответствующие характеристики, и M_1, M_2, M_3 — точки пересечения характеристик C_1, C_2, C_3 с линиею кривизны C' второй системы. Сфера S', касающаяся поверхности во всех точках окружности C', касается также и трех сфер S_1, S_2, S_3 соответственно в точках M_1, M_2, M_3. Следовательно, *искомая поверхность есть огибающая переменной сферы, касающейся трех постоянных сфер.* Эта поверхность известна под именем *циклиды Дюпена*. Мангейм дал изящное доказательство того, что циклиду Дюпена можно получить из тора преобразованием обратными радиусами-векторами. Пусть будет γ окружность, ортогональная к трем сферам S_1, S_2, S_3. После преобразования обратными радиусами-векторами с полюсом в какой-нибудь точке окружности γ, эта окружность обратится в прямую OO', а сферы S_1, S_2, S_3 обратятся соответственно в сферы Σ_1, Σ_2, Σ_3, ортогональные к прямой OO'; следовательно, центры преобразованных сфер будут лежать на прямой OO'. Пусть будут C'_1, C'_2, C'_3 сечения этих сфер плоскостью, проходящею через OO', C' — окружность, касающаяся окружностей C'_1, C'_2, C'_3, и Σ' — сфера, имеющая C' большим кругом. Ясно, что при вращении фигуры вокруг прямой OO' сфера Σ' остается касательною к трем сферам Σ_1, Σ_2, Σ_3, и огибающею поверхностью сферы Σ' будет тор, имеющий меридианом окружность C'.

Определим, далее, поверхности, у которых одним из семейств линий кривизны были бы плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях. Примем за плоскость xOy плоскость, параллельную плоскостям линий кривизны, и пусть будет

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = F(\alpha, z)$$

уравнение касательной к плоскому сечению, образованному на поверхности плоскостью, параллельною плоскости xOy. $F(\alpha, z)$ есть функция двух переменных α и z, вид которой зависит от вида рассматриваемой поверхности. Так как самое сечение представляет огибающую касательных к нему прямых, то мы получим координаты x, y точек поверхности, присоединяя к предыдущему уравнению соотношение:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Следовательно, выражения координат x, y, z будут:

$$x = F\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\sin\alpha, \quad y = F\sin\alpha + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cos\alpha, \quad z = z. \tag{52}$$

Выбирая соответствующим образом функцию $F(\alpha, z)$, можно всякую поверхность представить уравнениями вида (52); исключение представляют только линейчатые поверхности, для которых направляющею плоскостью служит плоскость $z = 0$.

Легко вывести, что коэфициенты A, B, C касательной плоскости к поверхности будут:

$$A = \cos\alpha, \; B = \sin\alpha, \; C = -\frac{\partial F}{\partial z};$$

следовательно, косинус угла, образуемого нормалью к поверхности с осью Oz, будет:

$$\nu = \frac{-F'_z}{\sqrt{1 + F_z'^2}}.$$

По теореме Иоахимсталя, для того чтобы сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy, были линиями кривизны этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы эти плоскости пересекали поверхность под постоянным углом, т. е. чтобы ν не зависело от α. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $F^z(\alpha, z)$ зависела только от переменного z; следовательно, $F(\alpha, z)$ должна иметь вид:

$$F(\alpha, z) = \varphi(z) + \psi(\alpha),$$

причем φ и ψ — произвольны. Вставляя найденное выражение функции $F(\alpha, z)$ в уравнения (52), мы получим самые общие уравнения искомых поверхностей:

$$\left.\begin{aligned} x &= \psi(\alpha)\cos\alpha - \psi'(\alpha)\sin\alpha + \varphi(z)\cos\alpha, \\ y &= \psi(\alpha)\sin\alpha + \psi'(\alpha)\cos\alpha + \varphi(z)\sin\alpha, \\ z &= z. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Эти поверхности могут быть образованы следующим образом. Если рассматривать в двух первых уравнениях (53) z как постоянное, а α — как переменное, то эти уравнения представляют семейство кривых, по которым проектируются на плоскость $z = 0$ сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy; но все эти кривые параллельны кривой, которую получим, положив в двух первых уравнениях (53) $\varphi(z) = 0$. Отсюда получается для рассматриваемых поверхностей следующее построение: *возьмем в плоскости $z = 0$ произвольную кривую и проведем в этой плоскости кривые, к ней параллельные; затем переместим все эти кривые параллельно оси Oz на различные расстояния по какому-нибудь произвольному закону. Тогда все эти кривые образуют в своих новых положениях поверхность, представляющую самое общее решение задачи.*

Легко видеть, что предыдущий способ построения можно заменить следующим. *Искомые поверхности могут быть образованы плоскою кривою произвольного вида, плоскость которой катится без скольжения по поверхности цилиндра с произвольным основанием.* Следовательно, это *лепные поверхности* (surfaces moulures). В этом легко убедиться из формул (53), рассматривая кривые $\alpha = \text{const}$. Здесь оба семейства линий кривизны состоят из плоских кривых

$$z = \text{const} \text{ и } \alpha = \text{const}.$$

III. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

247. Сферическое отображение. Пусть будет Σ некоторая двусторонняя поверхность или часть такой поверхности (§ 131). Выбрав одну из сторон, рассмотрим в каждой точке M направление MN нормали, соответствующее этой стороне. Проведем через центр O сферы S, радиус которой примем равным единице, полупрямую, параллельную положительному направлению MN нормали к поверх ности Σ. Точку m пересечения этой полупрямой со сферой S будем считать соответствующей точке M. Очевидно, каждой точке M на Σ соответствует определенная точка m на S; касательные плоскости Σ и S в соответствующих точках параллельны и, если выбрать за положительное направление нормали сферы направление, идущее от центра O к точке m, положительные направления нормалей обеих поверхностей тоже совпадут. Каждой кривой C на Σ соответствует некоторая кривая c на S — *сферическое изображение кривой* C.

В точке m, соответствующей M, касательная mt к кривой c перпендикулярна направлению, сопряженному на Σ с касательной MT к кривой C.

В самом деле, пусть будут M и M' две близкие точки кривой C, m и m' — соответствующие им точки c, D — прямая пересечения плоскостей, касательных к Σ в точках M и M', d — прямая пересечения касательных плоскостей к сфере в точках m и m'. Так как эти плоскости попарно параллельны, ясно, что d параллельна D. Когда точка M' неограниченно приближается к M, прямая D стремится к предельному положению - касательной MT', сопряженной на поверхности Σ с касательной MT к C (§ 239). Точно так же d стремится к предельному положению mt', сопряженному с mt на сфере. Но mt' перпендикулярна к mt, а так как mt' и MT' параллельны, то mt перпендикулярна MT', что и требовалось доказать.

Для того чтобы прямые MT и mt были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы MT была перпендикулярна сопряженной с нею касательной, т. е. чтобы MT была осью индикатрисы поверхности Σ. Отсюда следует: *касательные к линиям кривизны Σ и к их сферическим изображениям в соответствующих точках параллельны.* Очевидно, что линии кривизны суть единственные кривые на Σ, обладающие этим свойством.

Этот результат можно вывести из формул Родрига. В самом деле, если выбрать за начало координат центр сферы S, координаты точки m будут равны направляющим косинусам λ, μ, ν положительного направления нормали. Условие того, чтобы кривые C и c, описываемые точками $M(x, y, z)$ и $m(\lambda, \mu, \nu)$, имели параллельные касательные в соответствующих точках

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{dy}{d\mu}=\frac{dz}{d\nu},$$

удовлетворится при наличии соотношений, выражаемых формулами (46).

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади $d\sigma$ поверхности Σ вокруг точки M и соответствующий элемент $d\sigma'$ сферы.

Чтобы определить отношение $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$, мы применим вычисление § 137, заметив, что в данном случае нормали обеих поверхностей параллельны, и отношение $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$ равно отношению элементов $\frac{d\omega'}{d\omega}$ плоскости xOy. Предположим, что в окрестности точки M поверхность Σ определена уравнением $z=f(x, y)$, и что за положительное направление нормали выбрано направление, образующее острый угол с осью Oz. Координаты точки m тогда будут:

$$x'=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad y'=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad z'=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

откуда

$$\frac{d\omega'}{d\omega}=\left|\frac{D(x', y')}{D(x, y)}\right|=\left|\frac{D(x', y')}{D(p, q)}\right|\cdot\left|\frac{D(p, q)}{D(x, y)}\right|,$$

или, после весьма простых преобразований:

$$\frac{d\omega'}{d\omega}=\frac{|rt-s^2|}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Правая часть этой формулы есть не что иное, как абсолютная величина гауссовой кривизны $\frac{1}{RR'}$ поверхности Σ. Отсюда следует, что гауссова кривизна может быть определена вполне аналогично кривизне кривой (§ 218). Но тогда как кривизна кривой содержит в своем выражении радикал, полная кривизна поверхности выражается рационально через частные производные z и имеет знак, совпадающий с $rt-s^2$. Этот знак можно истолковать при помощи сферического отображения. Представим себе двух наблюдателей, из которых один стоит на поверхности Σ в некоторой ее точке, другой — на сфере, в точке, соответствующей первой; предположим при этом, что направление от ног к голове каждого совпадает с положительным направлением нормалей. Когда первый наблюдатель обходит контур площади $d\sigma$ так, что площадь остается слева от него, второй наблюдатель, в соответствии с первым, обойдет контур элемента $d\sigma'$, оставляя площадь элемента либо слева, либо справа; $rt-s^2$ и, следовательно, $\frac{1}{RR'}$, положительно в первом случае и отрицательно во втором (§ 236).

Примечание. Если точка M поверхности Σ не параболическая, то $rt-s^2$ не нуль, и по теории неявных функций (§ 38, 185) точки поверхности Σ вблизи M и точки сферы вблизи m соответствуют друг другу взаимно однозначно. Но это, вообще говоря, не имеет места вблизи параболической точки, как легко показать на примере.

Пусть AMB будет дуга плоской кривой, имеющая в M точку перегиба, так что дуги AM и BM имеют противоположно направленные выпуклости. Вращая дугу AMB вокруг оси, лежащей в ее плоскости, получим поверхность вращения Σ, на которой параллель p, образованная точкой M, есть место параболических точек. Поверхности Σ_1 и Σ_2, описанные дугами AM и BM, имеют своими сферическими изображениями две области, которые частично покрывают друг друга и обе примыкают к параллели p, соответствующей P. Такого рода сферическое отображение поверхности Σ можно представить при помощи листа бумаги, сложенного вдоль параллели и дважды перекрывающего часть пояса сферы, ограниченной этой параллелью (§ 117, примечание).

Рассмотрим еще тор — поверхность, образованную вращением окружности C, лежащей в вертикальной плоскости, вокруг некоторой вертикали OO' этой плоскости, не пересекающей C. Точки A и B, самая высокая и самая низкая точки окружности C, разделяют C на две дуги C_1 и C_2; пусть дуга C_2 — ближайшая к оси.

При вращении вокруг OO' дуга C_1 образует выпуклую поверхность Σ_1, каждой точке которой взаимно однозначно соответствуют точки сферы S, если не принимать во внимание при этом крайних параллелей Σ_1 и двух противоположных полюсов S. Дуга C_2 описывает поверхность отрицательной кривизны Σ_2, все точки которой, при том же ограничении взаимно однозначно соответствуют точкам сферы S. Что касается крайних параллелей, образованных точками A и B, им соответствуют противоположные полюсы сферы. Можно осуществить это сферическое отображение тора при помощи двух равных, вложенных друг в друга шаров, предполагая, что их внешние поверхности соединяются только в двух полюсах.

248. Наложение поверхностей. При сферическом отображении каждой точке некоторой поверхности соответствует определенная точка сферы, и обратно. Рассмотрим теперь более общий случай точечного соответствия двух поверхностей.

Пусть даны две какие-нибудь поверхности S и S'; предположим, что прямоугольные координаты точек S выражены через два переменных параметра u и v, и прямоугольные координаты точек S' — через два других переменных параметра u' и v'.

Если между двумя парами переменных (u, v) и (u', v') установить соответствие равенствами

$$u' = g(u, v), \quad v' = h(u, v) \tag{54}$$

так, что якобиан $\frac{D(u', v')}{D(u, v)}$ не равен тождественно нулю, то этим самым устанавливается и точечное соответствие между обеими поверхностями.

Очевидно, что всякое соответствие такого рода может быть определено при помощи формул, аналогичных (54), если выбрать подходящим способом функции g и h.

В связи с вопросами точечного соответствия поверхностей можно поставить большое число весьма важных задач. Найдем, например, в каком случае соответствующие дуги двух произвольных кривых имеют одну и ту же длину.

Пусть линейные элементы ds^2 и ds'^2 двух поверхностей определены формулами:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{55}$$

$$ds'^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2. \tag{56}$$

Заменяя в (56) u', v' их выражениями (54), получим:

$$ds'^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\,\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2; \tag{56'}$$

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ весьма просто выражаются через g, h и их производные. Если при соответствии, определенном формулами (54), сохраняются длины линий, мы должны иметь $ds' = ds$ при каких угодно du и dv, откуда:

$$\mathfrak{E} = E, \quad \mathfrak{F} = F, \quad \mathfrak{G} = G; \tag{57}$$

в этом случае говорят, что поверхности S и S' *налагаются* друг на друга *. Для того чтобы две поверхности S и S', линейные элементы которых определяются, соответственно, формулами (55) и (56), могли быть наложены одна на другую, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти функции $g(u, v)$ и $h(u, v)$, удовлетворяющие соотношениям (57). Эти *две* функции должны, следовательно, удовлетворять системе *трех* уравнений в частных производных первого порядка; если коэфициенты E, F, G, E', F', G' выбраны произвольно, эти уравнения, вообще говоря, окажутся несовместными, и функции $g(u, v)$, $h(u, v)$ не определятся. Чтобы определить, наложимы ли друг на друга две поверхности, т. е. чтобы определить, совместны ли уравнения (57), достаточно выполнить операции диференцирования и исключения. Доказательства этого положения мы приводить не будем.

Можно поставить иную задачу, отличную от этой, именно: определить все поверхности, налагающиеся на некоторую данную, или, другими словами, определить все поверхности, допускающие *данный* линейный элемент.

Решение этой задачи требует интегрирования системы трех уравнений в частных производных первого порядка:

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = F, \quad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G; \tag{58}$$

здесь E, F, G — три данные функции переменных u, v; x, y, z — три неизвестные функции. Полное интегрирование этой системы удается выполнить лишь в весьма немногих частных случаях; его можно свести к интегрированию одного уравнения в частных производных второго порядка.

---

* Или что одна из них является *изгибанием* другой. (*Ред.*)

Рассмотрим, в частности, геликоид S, определенный формулами:

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = f(\rho) + a\omega, \tag{59}$$

где $2\pi a$ — общий шаг винтовой линии. Квадратичная форма ds^2 может быть написана в виде:

$$ds^2 = (\rho^2 + a^2)\left[d\omega + \frac{af'(\rho)}{\rho^2 + a^2}\,d\rho\right]^2 + \frac{a^2 + \rho^2 + \rho^2 f'^2(\rho)}{\rho^2 + a^2}\,d\rho^2. \tag{60}$$

Положим:

$$du = \sqrt{\frac{a^2 + \rho^2 + \rho^2 f'^2(\rho)}{\rho^2 + a^2}}\,d\rho,$$

$$dv = d\omega + \frac{af'(\rho)}{\rho^2 + a^2}\,d\rho;$$

u и v определятся отсюда в квадратурах; $\rho^2 + a^2$ есть функция U одного только переменного u, так что ds^2 для всякого геликоида может быть приведен к форме:

$$ds^2 = du^2 + U dv^2. \tag{61}$$

Заметим, что кривые (u) и (v) суть, соответственно, винтовые линии поверхности и их ортогональные траектории; следовательно, эти траектории всегда могут быть получены в квадратурах.

Пусть S' — некоторый другой геликоид, определенный формулами:

$$x' = r\cos\theta, \quad y' = r\sin\theta, \quad z' = \varphi(r) + b\theta, \tag{59'}$$

для которого

$$ds'^2 = (r^2 + b^2)\left[d\theta + \frac{b\varphi'(r)}{r^2 + b^2}\,dr\right]^2 + \frac{b^2 + r^2 + r^2\varphi'^2(r)}{b^2 + r^2}\,dr^2. \tag{62}$$

Для того чтобы два геликоида были наложимы друг на друга, при условии соответствия винтовых линий обеих поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы можно было определить функции r от ρ и θ от ω и ρ, удовлетворяющие трем условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\left[1 + \frac{r^2\varphi'^2(r)}{r^2 + b^2}\right]dr^2 = \left[1 + \frac{\rho^2 f'^2(\rho)}{\rho^2 + a^2}\right]d\rho^2, \\ &c^2(r^2 + b^2) = \rho^2 + a^2, \\ &d\theta + \frac{b\varphi'(r)}{r^2 + b^2}\,dr = c\left[d\omega + \frac{af'(\rho)}{\rho^2 + a^2}\,d\rho\right], \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

где c — некоторая постоянная, отличная от нуля*. Вторая из этих формул приводится к виду:

$$\rho^2 = c^2(r^2 + b^2) - a^2;$$

* Первое условие (63) выражает, что ортогональные траектории винтовых линий соответствуют друг другу на обеих поверхностях и имеют равные линейные элементы. Два других условия выражают, что уравнение, определяющее θ в функции ω и ρ, интегрируемо.

заменяя ρ этим выражением в первом условии, найдем $\varphi(r)$ квадратурой. Далее:

$$\theta = c\omega + ca\int \frac{f'(\rho)}{\rho^2 + a^2} d\rho - \int \frac{b\varphi'(r)}{r^2 + b^2} dr.$$

Следовательно, *существует бесконечное множество геликоидов, зависящих от двух произвольных постоянных b и c, налагающихся на данный геликоид с соответствием винтовых линий.*

Постоянная b, с точностью до множителя 2π, равна шагу второго геликоида S'. Если положить $b = 0$, то S' будет поверхностью вращения; отсюда получается теорема Бура: *каждая поверхность геликоида наложима на некоторую поверхность вращения*, причем винтовые линии одной поверхности соответствуют параллелям другой. Легко видеть, что эта поверхность вращения зависит от произвольного постоянного c.

Примеры. 1. Пусть $f(\rho) = 0$. Поверхность S есть прямой геликоид с направляющей плоскостью. Если положить $b = 0$, $c = 1$, формулы (63) приведут к уравнению:

$$\varphi(r) = a \ln \left\{\frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right\}.$$

Соответствующая поверхность вращения есть поверхность, образуемая вращением цепной линии вокруг ее основания.

2. Пусть $f(r) = r$. Полагая $b = 0$, $c = 1$, получим:

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 - a^2} + C.$$

Профиль геликоида есть прямая, встречающая ось Oz под углом 45°, а поверхность вращения — однополостный гиперболоид, образованный вращением равносторонней гиперболы.

249. Поверхности, налагающиеся на плоскость. Для плоскости мы имеем:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

где u и v — прямоугольные координаты ее точек. Следовательно, все поверхности, налагающиеся на плоскость, определятся совместным интегрированием трех уравнений:

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

Приведем доказательство О. Боннэ, установившего, что это — развертывающиеся поверхности.

Диференцируя три предыдущие уравнения по u и по v, получим шесть равенств:

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Из двух уравнений, в которые входят $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, следует, что эти три производные, соответственно, пропорциональны якобианам $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$,

$\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$. Мы предположим, что эти три якобиана не обращаются тождественно в нуль, так как в противном случае точка (x, y, z) описывала бы не поверхность, а кривую. Легко видеть, что производное $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, а также и $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ пропорциональны тем же якобианам. Отсюда следуют соотношения:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}},$$

которые показывают, что якобиан любой пары из трех производных: $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ равен тождественно нулю. Следовательно, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ суть функции одного переменного t. Так же можно показать, что $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ — функции одного переменного t'. С другой стороны, из соотношения

$$S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

вытекает, что эти два переменных t и t' приводятся к одному. Следовательно, все шесть частных производных первого порядка являются функциями одной из них; угловые коэфициенты p и q касательной плоскости, получаемые из уравнения $dz = p\,dx + q\,dy$, также зависят только от одного переменного, и поэтому исследуемая поверхность есть поверхность развертывающаяся (§ 204)*.

Обратно, пусть будет S некоторая развертывающаяся поверхность, образованная касательными какой-нибудь кривой Γ; примем за переменные параметры дугу σ кривой Γ, отсчитываемую от произвольного начала, и расстояние l точки образующей от точки прикосновения.

Координаты точек поверхности S определяются равенствами:

$$X = x + l\alpha, \quad Y = y + l\beta, \quad Z = z + l\gamma,$$

где x, y, z — координаты точек кривой Γ, α, β, γ — направляющие косинусы касательной. Формулы Френе дают:

$$dX = \alpha(d\sigma + dl) + \frac{l\alpha' \, d\sigma}{R}, \quad dY = \beta(d\sigma + dl) + \frac{l\beta' \, d\sigma}{R}, \ldots,$$

* Лебег (Lebesgue) в свой диссертации показал, что существуют *нелинейчатые* поверхности такие, что во можно установить соответствие между точками этих поверхностей и точками плоскости так, что каждой спрямляемой линии плоскости соответствует спрямляемая линия поверхности, имеющая ту же длину. Этот результат не противоречит доказанной в тексте теореме, так как доказательство существенно основывается на наличии у x, y, z непрерывных частных производных первого и второго порядка, что не имеет места для поверхностей Лебега.

следовательно:

$$ds^2 = (d\sigma + dl)^2 + l^2 \frac{d\sigma^2}{R^2}, \tag{64}$$

где R — радиус кривизны кривой Г. Отсюда непосредственно еще не видно, приводится ли ds^2 к форме $du^2 + dv^2$. Чтобы показать, что это всегда возможно сделать, достаточно заметить, что ds^2 зависит исключительно лишь от функции $\frac{1}{R} = \varphi(\sigma)$, определяющей зависимость радиуса кривизны R от дуги σ. Пусть будет Г′ какая-нибудь другая кривая, для которой функция $\varphi(\sigma)$ та же самая; линейный элемент ds^2 развертывающейся поверхности, имеющей Г′ ребром возврата, выражается, очевидно, равенством (64). Обе поверхности Г и Г′ налагаются, следовательно, друг на друга с соответствием образующих. Но среди кривых Г′, наверное, существует плоская кривая; развертывающаяся поверхность, образованная ее касательными, есть плоскость; отсюда и вытекает то, что мы хотели доказать. После этого легко получить формулы, определяющие соответствие между поверхностью и плоскостью. Из естественного уравнения

$$\frac{1}{R} = \varphi(\sigma)$$

плоской кривой C получаются ее параметрические уравнения (§ 224):

$$x_1 = \int \cos\theta\, d\sigma, \quad y_1 = \int \sin\theta\, d\sigma,$$

где

$$\theta = \int \frac{d\sigma}{R};$$

откладывая от точки прикосновения по касательной длину l, получим точку с координатами $u = x_1 + l\cos\theta$, $v = y_1 + l\sin\theta$.

Из формулы (64) непосредственно получаем:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Из предыдущего доказательства следует соответствие между точками развертывающейся поверхности S и точками плоскости. Плоская кривая C, заданная естественным уравнением

$$\frac{1}{R} = \varphi(\sigma),$$

вполне определена по форме (§ 224), а соответствие между точками кривых Г и C определяет соответствие между направлениями касательных обеих кривых. Пусть теперь будет P некоторая точка поверхности S, лежащая на касательной к кривой Г в точке M на расстоянии $MP = l$. Отложим на касательной в точке m кривой C, соответствующей M, в направлении, соответствующем направлению MP, длину $mp = l$; полученная точка p будет соответствовать точке P поверхности S. Легко видеть, что точкам поверхности S соответствуют только те точки плоскости, которые лежат в области II, внешней по отношению к кривой C, и что это соответствие, вообще, не однозначно. Рассмотрим, например, обыкновенную винтовую линию; пусть ее постоянный радиус кривизны равен R. Развертывающаяся поверхность, образованная полукасательными, проведенными в определенном направлении в точках одного оборота этой спирали, однозначно налагается на область II плоскости, внешнюю относительно круга радиуса R; но развертывающаяся поверхность, образованная касательными во всех точках спирали, покрывает область II бесконечное число раз.

250. Геодезическая кривизна. Геодезические линии. Пусть будет Γ некоторая кривая, лежащая на поверхности S, и γ — ее ортогональная проекция на касательную плоскость к S в точке M кривой Γ. Кривизна $\frac{1}{\rho_g}$ этой плоской кривой в точке M называется *геодезической кривизной* кривой Γ. Укажем важнейшее свойство этой величины: *если даны две налагающиеся поверхности S и S' и две соответствующие кривые Γ и Γ' на них, то геодезические кривизны этих линий в соответствующих точках равны.*

Предположим, что кривая Γ определена на своей поверхности уравнением в криволинейных координатах $v = \Pi(u)$. Для доказательства высказанной теоремы достаточно показать, что радиус геодезической кривизны ρ_g выражается исключительно с помощью коэфициентов E, F, G.

Выберем на S такую систему криволинейных координат, чтобы кривая Γ имела уравнение $v = v_0$. Для определения радиуса геодезической кривизны Γ в точке $M_0(u_0, v_0)$ предположим, что начало координат взято в точке M_0, что касательная плоскость совпадает с плоскостью xy, а касательная к Γ — с осью Ox. В этой системе координат мы имеем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 = \sqrt{E_0}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 = \sqrt{G_0}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 = 0.$$

Радиус кривизны кривой γ — проекции Γ на плоскость xOy — в начале координат имеет выражение:

$$\rho_g = \frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial y}{u}\right)_0^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_0\right|} = \frac{E_0}{\left|\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|_0}.$$

Из двух соотношений:

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

получается:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0.$$

При $u = u_0$, $v = v_0$ эти равенства приводят к формуле:

$$\sqrt{G_0}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_0,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{2}\frac{\left|\frac{\partial E}{\partial v}\right|_0}{E_0\sqrt{G_0}}, \tag{65}$$

что мы и хотели показать.

Кривые, лежащие на некоторой поверхности и имеющие во всех своих точках геодезическую кривизну, равную нулю, называются *геодезическими линиями* этой поверхности. По предыдущей теореме, если две поверхности S, S' налагаются друг на друга, то геодезическим линиям одной из этих поверхностей на второй соответствуют также геодезические.

Геодезические линии могут быть определены еще как *линии поверхности, соприкасающаяся плоскость которых в каждой точке проходит через нормаль поверхности.*

В самом деле, пусть будут Γ — некоторая кривая на поверхности и γ — ее ортогональная проекция на касательную плоскость, R и ρ_g — радиусы кривизны Γ и γ, θ — угол между соприкасающейся плоскостью кривой Γ и нормалью поверхности. Применим теорему Менье к цилиндру, проектирующему Γ на касательную плоскость; по этой теореме:

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{\cos\theta}{R}.$$

Если Γ — геодезическая линия, то $\frac{1}{\rho_g}$ равна нулю, и следовательно, $\cos\theta=0$, т. е. соприкасающаяся плоскость содержит нормаль к поверхности. Отсюда следует, что вдоль геодезической x, y, z суть функции одного переменного, удовлетворяющие соотношению:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0, \tag{66}$$

где A, B, C — направляющие параметры нормали к поверхности. Координаты x, y, z выражены в функции двух параметров u и v; выбирая один из них, например u, за независимое переменное и развертывая предыдущее уравнение, получим диференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2v}{du^2}=F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right), \tag{67}$$

интегрирование которого дает геодезические линии. Интеграл этого уравнения содержит два произвольных постоянных, следовательно, через всякую обыкновенную точку поверхности проходит бесконечное множество геодезических; но, если задать в касательной плоскости этой точки некоторое определенное направление, то геодезическая линия, выходящая в этом направлении, вполне определится.

Геодезическими линиями плоскости являются лежащие на ней прямые, на сфере это — большие круги, на развертывающейся поверхности это – линии, соответствующие при наложении на плоскость прямым.

Рассмотрим в качестве примера какую-нибудь кривую Γ и ее развертку (эволюту) D (черт 40, § 225). Соприкасающаяся плоскость к D в точке M_1 содержит касательную к кривой Γ в точке M, а следовательно, и нормаль в M_1 к полярной поверхности кривой Γ, которая является огибающей нормальных плоскостей этой последней. Отсюда следует, что развертки кривой суть геодезические линии ее полярной поверхности. Основываясь на геометрических свойствах можно показать, что при наложении полярной поверхности на плоскость эволюты кривой Γ преобразуются в прямые линии, проходящие через одну точку.

Плоскости, проходящие через каждую точку M пространственной кривой Γ перпендикулярно главной нормали, огибают развертывающуюся поверхность S, проходящую через Γ.

На этой поверхности Γ есть геодезическая линия, так как нормали к S совпадают с главными нормалями Γ. При наложении S на плоскость кривая Γ развернется в прямую линию. Поэтому плоскости, перпендикулярные главным нормалям кривой, называются *спрямляющими* [Ланкре (Lancret)].

Рассмотрим еще две полости Σ и Σ' развертки какой-нибудь поверхности S. Нормали MN поверхности S вдоль линий кривизны образуют развертывающуюся поверхность, имеющую ребром возврата некоторую кривую Γ поверхности Σ; соприкасающаяся плоскость в точке A этой кривой касается в точке A' поверхности Σ' (§ 241). Следовательно, она перпендикулярна к касательной плоскости Σ в A, т. е. Γ есть геодезическая линия на поверхности Σ. *Эволюты линий кривизны какой-нибудь поверхности S, лежащие на одной из полостей развертки этой поверхности, суть геодезические линии этой полости развертки.*

Обратно, рассмотрим на какой-нибудь поверхности Σ семейство геодезических линий, зависящих от одного произвольного параметра, так что через каждую точку поверхности проходит одна и только одна геодезическая этого семейства. *Касательные к этим геодезическим являются нормалями к некоторому семейству параллельных поверхностей.*

Для доказательства достаточно показать, что фокальные плоскости конгруэнции этих нормалей ортогональны (§ 231). Пусть будет Г одна из геодезических линий, MT — касательная в какой-нибудь ее точке. Одна из фокальных плоскостей, проходящих через MT, есть, очевидно, соприкасающаяся плоскость в M к кривой Г. Чтобы найти вторую фокальную плоскость, нужно определить вторую развертывающуюся поверхность конгруэнции, проходящую через MT. Из § 239 следует, что этой развертывающейся поверхностью будет поверхность, огибаемая касательными плоскостями поверхности вдоль кривой Г', сопряженной с кривою Г в точке M. Вторая фокальная плоскость есть, следовательно, касательная плоскость к Σ в точке M; эти две плоскости, очевидно, ортогональны.

Примечание. Квадратичная форма ds^2 принимает особенно простой вид, если выбрать за координатные линии (v) семейство геодезических, за линии (u — их ортогональные траектории. В этом случае $F=0$, и по формуле (55), определяющей геодезическую кривизну линии (v), $\frac{\partial E}{\partial v}=0$; коэфициент E, следовательно, есть некоторая функция U одного только переменного u Заменяя u через $\int \sqrt{U}\,du$, приведем выражение ds^2 к виду:

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2;$$

коэфициент G здесь — произвольная функция u и v.

251. Полная кривизна Теорема Гаусса. Как нам уже известно, *полной кривизной* поверхности называется величина $\frac{1}{RR'}$, обратная произведению главных радиусов кривизны.

Докажем весьма важную теорему Гаусса.

Если S и S' — две налагающиеся поверхности, то полная кривизна их в соответствующих точках одинакова.

Для доказательства, как и всегда при установлении свойств, инвариантных относительно изгибания, достаточно выразить полную кривизну поверхности через E, F, G.

Выберем в формуле (4) неопределенный множитель K равным -1; соотношение (26) приведется к виду (§ 236):

$$\frac{1}{RR'}=\frac{DD''-D'^2}{(EG-F)^2};$$

остается, следовательно, показать, что $DD''-D'^2$ выражается через E, F, G (и их производные). Чтобы упростить вычисления, предположим, что поверхность отнесена к системе криволинейных координат, составленной из семейства геодезических и их ортогональных траекторий; тогда будем иметь: $E=1$, $F=0$ Из общих формул (58) получим последовательно диференцированием следующее:

$$\left.\begin{gathered}
\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,\\
\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\\
\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},
\end{gathered}\right\}\tag{68'}$$

и следовательно:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.\tag{69}$$

Снова диференцируя (69) по u и второе уравнение (68') по v, получим:

$$\mathrm{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}+\mathrm{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2=0,$$

и наконец:

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \tag{70}$$

Чтобы найти произведение DD'', перемножим по общему правилу два определителя формул (15) и (16). С помощью предыдущих соотношений это произведение примет вид:

$$G\,\mathrm{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Точно так же D'^2 будет равняться

$$G\,\mathrm{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2,$$

откуда:

$$DD''-D'^2=G\,\mathrm{S}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right]=-\frac{G}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

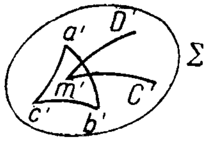
и полная кривизна в точке (u, v) определится формулой:

$$\frac{1}{RR'}=-\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}, \tag{71}$$

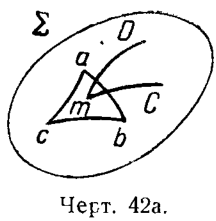
что доказывает теорему Гаусса. Как следствие этой теоремы непосредственно получается результат, установленный выше для поверхностей, налагающихся на плоскость (§ 249). В самом деле, во всех точках этих поверхностей гауссова кривизна должна равняться нулю, т. е. $rt-s^2=0$. Следовательно, интегральные поверхности этого уравнения — поверхности развертывающиеся (§ 204).

Теорема Гаусса позволяет также расширить результат § 248 относительно геликоидов. Если S и S' — две поверхности, налагающиеся одна на другую, *полная кривизна которых не равна постоянному*, то линии, на которых гауссова кривизна сохраняет постоянное значение, образуют на S и S' два семейства, которые по теореме Гаусса должны соответствовать друг другу при рассматриваемом преобразовании. В частности, если S и S' — два геликоида, то линии, вдоль которых полная кривизна равна постоянной, суть, очевидно, винтовые линии, и поэтому формулы § 248 дают все геликоиды, налагающиеся на данный геликоид, если его гауссова кривизна не постоянна.

252. Конформное преобразование. Рассмотрим теперь соответствие между точками двух поверхностей, при котором сохраняются углы. Пусть (x, y, z) — прямоугольные координаты точек некоторой поверхности S, и (x', y', z') — прямоугольные координаты соответствующих точек поверхности S'. Предположим, что x, y, z, x', y', z' выражены в функции двух переменных параметров u, v таким образом, что соответствующие точки обеих поверхностей определяются одной и той же



Черт. 42.



Черт. 42а.

системой величин параметров u, v. Пусть будут C и D две кривые на поверхности S, проходящие через точку m этой поверхности, C' и D' — соответствующие кривые поверхности S', проходящие через точку m' (черт. 42). Вдоль кривой C параметры являются функциями одного переменного t. обозначим их диференциалы через du и dv; точно так же u и v являются вдоль D функциями другого переменного t'; их диференциалы мы обозначим через δu и δv. Вообще, мы будем обозначать буквами d и δ диференциалы, относящиеся к перемещению точки, соответственно, вдоль C или D.

Параметры направления касательной к кривой C суть:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

и соответственно, для кривой D:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \delta v, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \delta v.$$

Пусть будет ω угол между касательными кривых C и D; $\cos\omega$ выразится формулой:

$$\cos\omega = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}},$$

которая, если ввести коэфициенты E, F, G, примет вид:

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \quad (72)$$

Точно так же, если ω' — угол между касательными к кривым C и D', то

$$\cos\omega' = \frac{E'\,du\,\delta u + F'(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G'\,dv\,\delta u}{\sqrt{E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2}\sqrt{E'\delta u^2 + 2F'\delta u\,\delta v + G'\delta v^2}}. \quad (73)$$

Если при рассматриваемом преобразовании не изменяются величины углов, то $\cos\omega = \cos\omega'$ при каких угодно du, dv, δu, δv; $\cos^2\omega$ и $\cos^2\omega'$ суть рациональные функции отношений $\frac{\delta v}{\delta u}$, $\frac{dv}{du}$, которые должны быть равны при всех значениях этих величин. Для этого необходимо, чтобы соответствующие коэфициенты обеих дробей (72) и (73) были пропорциональны, т. е. чтобы было

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} = \lambda^2, \quad (74)$$

где λ — некоторая функция параметров u, v; эти условия, очевидно, и достаточны, так как $\cos\omega$, например, есть однородная функция нулевой степени от E, F, G.

Условия (74) могут быть заменены одним: $ds'^2 = \lambda^2 ds^2$, или

$$ds' = \lambda\,ds, \quad (75)$$

которое выражает, что отношение двух бесконечно малых соответствующих друг другу дуг стремится к пределу, независимому от du и dv.

Этот результат можно получить непосредственно. В самом деле, возьмем на первой поверхности бесконечно малый треугольник abc; пусть будет $a'b'c'$ соответствующий ему треугольник второй поверхности. Заменим эти два криволинейных треугольника прямолинейными; так как отношения $\frac{a'b'}{ab}$, $\frac{a'c'}{ac}$, $\frac{b'c'}{bc}$ стремятся к одному пределу $\lambda(u, v)$, эти треугольники подобны, и следовательно, в пределе соответствующие углы будут равны.

Соответствующие бесконечно малые фигуры двух поверхностей S и S' могут быть рассматриваемы как подобные, так как они имеют пропорциональные дуги и равные углы; такого рода преобразование, сохраняющее подобие в бесконечно малых частях, называется *конформным отображением*.

В частности, если $\lambda = 1$, сохраняются не только углы, но и длины дуг, т. е. рассматриваемое преобразование будет изгибанием, которое является, таким образом, частным случаем более общего конформного преобразования.

Если даны две поверхности S и S', и между ними установлено некоторое точечное соответствие, то всегда можно узнать, удовлетворяются ли при этом условия (74), т. е. будет ли это соответствие конформным. Но можно решать и другие задачи; например, даны две поверхности S и S', определить все соответствия между точками этих поверхностей, при которых сохраняются углы.

Предположим, что координаты (x, y, z) точек поверхности S выражены в функции двух параметров (u, v), и координаты (x', y', z') точек поверхности S' — в функции двух других параметров (u', v'). Пусть будут

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

выражения квадратов соответствующих линейных элементов. Предложенная задача может быть поставлена в следующей форме: *найти две функции* $u' = \Pi_1(u, v)$ *и* $v' = \Pi_2(u, v)$ *так, чтобы тождественно выполнялось соотношение:*

$$E'\,d\Pi_1^2 + 2F'\,d\Pi_1\,d\Pi_2 + G'd\Pi_2^2 = \lambda^2(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2),$$

где λ *— неопределенная функция переменных* u, v.

Из общей теории диференциальных уравнений следует, что эта задача всегда допускает бесконечное множество решений. Мы приведем доказательство только для одного частного случая.

253. Конформное соответствие между плоскостями. Всякое соответствие между точками двух плоскостей определяется формулами:

$$X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y), \tag{76}$$

где (X, Y) и (x, y) — прямоугольные координаты их точек. По предыдущему, чтобы это преобразование было конформным, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось равенство:

$$dX^2 + dY^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2),$$

где λ есть некоторая функция от x, y, не зависящая от диференциалов. Развертывая диференциалы dX, dY и отождествляя обе части, найдем, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ должны удовлетворять двум уравнениям:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}=0. \tag{77}$$

Частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ не могут одновременно равняться нулю, так как из первого соотношения (77) тогда получится: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}=0$, и функции P и Q будут постоянными. Поэтому на основании второго условия можно написать:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mu\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\mu\frac{\partial P}{\partial y},$$

где μ — вспомогательное неизвестное. Вводя эти величины в первое соотношение (77), получим:

$$(\mu^2-1)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right]=0,$$

откуда $\mu=\pm 1$. Функции P и Q должны, следовательно, удовлетворять одной из двух систем соотношений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}&=\frac{\partial Q}{\partial y},\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=-\frac{\partial Q}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}&=-\frac{\partial Q}{\partial y},\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{78'}$$

из которых вторая обращается в первую при замене Q на $-Q$.

Преобразования (существующие в бесконечном числе), определяемые формулами (78) и (78'), называются также изогональными преобразованиями плоскости. Они тесно связаны с теорией функций комплексного переменного (см. II том, часть 1).

254. Географические карты. Построить карту какой-нибудь поверхности значит установить соответствие ее точек с точками плоскости так, чтобы соответствующие углы при этом были равны. Предположим, что координаты точек рассматриваемой поверхности выражены в функции двух переменных параметров (u, v), и пусть

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

— квадрат ее линейного элемента. Пусть будут, далее, (α, β) прямоугольные координаты точек некоторой плоскости P, соответствующих точкам (u, v) поверхности. Вопрос сводится к разысканию двух функций

$$u=\pi_1(\alpha, \beta), \quad v=\pi_2(\alpha, \beta)$$

так, чтобы имело место тождество:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

где λ — некоторая функция α, β, не содержащая диференциалов. Эта задача допускает бесконечное множество решений, которые все могут быть сведены к одному при помощи конформного соответствия между двумя плоскостями. В самом деле, предположим, что одновременно:

$$ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2), \quad ds^2 = \lambda' (d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

тогда

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{\lambda'}{\lambda} (d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

и следовательно, одно преобразование сводится к другому при помощи изогонального преобразования плоскости.

Примеры. 1. *Проекция Меркатора.* Всегда можно построить карту поверхности вращения так, чтобы меридианам и параллелям соответствовали прямые параллельные осям координат.

Пусть будут

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = f(\rho)$$

координаты точек поверхности вращения с осью Oz. Тогда линейный элемент

$$ds^2 = d\rho^2 [1 + f'^2(\rho)] + \rho^2 d\omega^2 = \rho^2 \left[d\omega^2 + \frac{1 + f'^2(\rho)}{\rho^2} d\rho^2\right]$$

может быть записан в виде:

$$ds^2 = \rho^2 [dX^2 + dY^2],$$

если положить:

$$X = \omega, \quad Y = \int \frac{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}}{\rho} d\rho.$$

В случае сферы радиуса R можно выразить координаты формулами:

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \quad y = R \sin\theta \sin\varphi, \quad z = R\cos\theta,$$

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = R^2 \sin^2\theta \left(d\varphi^2 + \frac{d\theta^2}{\sin^2\theta}\right),$$

и мы полагаем:

$$X = \varphi, \quad Y = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

Полученная проекция называется проекцией Меркатора; в ней меридианам сферы соответствуют прямые, параллельные оси OY, а параллелям — отрезки прямых, параллельных OX. Чтобы отобразить всю поверхность сферы, нужно изменять φ от 0 до 2π и θ от 0 до π; X изменяется тогда от 0 до 2π и Y от $-\infty$ до $+\infty$. Карта имеет вид бесконечной полосы ширины 2π.

Кривые на сфере, пересекающие меридианы под постоянным углом, называются *локсодромами* и отображаются на плоскость в виде прямых линий.

2. *Стереографическая проекция.* Линейный элемент сферы можно написать еще в форме:

$$ds^2 = 4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{R^2 d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\right) + R^2 \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\, d\varphi^2,$$

или

$$ds^2 = 4\cos^4\frac{\theta}{2}\,(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2),$$

если положить

$$\rho = R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \omega = \varphi.$$

Но $d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$ представляет квадрат линейного элемента плоскости, отнесенной к полярным координатам (ρ, ω). Для установления конформного отображения сферы на плоскость достаточно, следовательно, поставить в соответствие точкам (θ, φ) сферы точки плоскости с полярными координатами (ρ, ω). Легко видеть, что ρ и ω суть координаты стереографической проекции точек (θ, φ) сферы на экваториальную плоскость из полюса.

3. *Карта тора.* Рассмотрим тор, образованный вращением окружности радиуса R вокруг оси, лежащей в ее плоскости на расстоянии a от центра (мы предположим $a > R$). Выберем ось вращения за ось z, плоскость, содержащую центры вращающейся окружности, за плоскость x, y. Тогда координаты точек поверхности тора определятся формулами:

$$x = (a + R\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (a + R\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = R\sin\theta,$$

причем θ и φ изменяются от $-\pi$ до $+\pi$. Отсюда:

$$ds^2 = (a + R\cos\theta)^2 \left[d\varphi^2 + \frac{R^2\, d\theta^2}{(a + R\cos\theta)^2}\right].$$

Чтобы получить карту поверхности, положим:

$$X = \varphi, \quad Y = e\int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{1 + e\cos\theta} = \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

где через e обозначено отношение $\frac{R}{a}$, меньшее единицы. Точкам поверхности тора соответствуют, таким образом, точки прямоугольника, стороны которого равны 2π и $\frac{2\pi e}{\sqrt{1 - e^2}}$.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Найти линии кривизны развертывающейся поверхности — огибающей семейства плоскостей, представляемых в прямоугольных координатах уравнением:

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + R\sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)},$$

где α — переменный параметр, $\varphi(\alpha)$ — произвольная функция этого параметра, и R — данное постоянное.

2. Найти, при каких условиях прямая $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, где a, b α, β — функции некоторого переменного параметра, образует развертывающуюся поверхность, у которой линии кривизны, перпендикулярные к образующим, расположены на концентрических сферах.

3. Найти линии кривизны поверхности, представляемой в прямоугольных координатах уравнением: $e^z = \cos x \cos y$.

4. Рассмотрим трехосный эллипсоид, представляемый в прямоугольных координатах уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

и сечение E этого эллипсоида плоскостью xOz. Требуется найти для каждой точки M эллипса E: 1) выражения главных радиусов кривизны R_1, R_2 эллипсоида; 2) соотношение между R_1 и R_2; 3) место центров кривизны главных сечений, когда точка M перемещается по эллипсу E.

5. Составить уравнение второй степени, определяющее главные радиусы кривизны для каждой точки параболоида, представляемого в прямоугольных координатах уравнением:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,$$

и выразить в функции переменного z главные радиусы кривизны в каждой точке линии пересечения предыдущего параболоида с параболоидом

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=2z-\lambda.$$

6. Найти место центров кривизны главных сечений параболоида $xy=az$ для различных точек оси Ox.

7. Найти уравнение поверхности, представляющей место центров кривизны сечений данной поверхности S плоскостями, проходящими через данную точку M этой поверхности.

8. Пусть будет MT касательная прямая в точке M к данной поверхности второго порядка, O — центр кривизны сечения этой поверхности какою-нибудь плоскостью, проходящею через MT, и O' — центр кривизны развертки этого сечения. Найти место точек O', когда секущая плоскость вращается вокруг MT.

9. Найти асимптотические линии тора, образованного вращением круга вокруг одной из его касательных.

10. Пусть будет C данная кривая в плоскости zOx прямоугольной системы координат. Рассмотрим поверхность, образованную окружностью, плоскость которой остается параллельною плоскости xOy, центр которой описывает кривую C, а радиус изменяется таким образом, что окружность постоянно пересекается с осью Oz. Составить диференциальное уравнение асимптотических линий этой поверхности, принимая за независимые переменные координату z какой-нибудь ее точки и угол θ между радиусом окружности, проходящим через эту точку, и линией пересечения плоскости окружности с плоскостью zOx. Применить полученные выводы к случаю, когда кривая C есть парабола, вершиною которой служит точка O, а осью — ось Ox.

11. Линейчатая поверхность касается другой линейчатой поверхности во всех точках прямолинейной образующей Δ этой последней поверхности; кроме того, все образующие первой поверхности пересекаются с прямою Δ. Найти асимптотические линии первой линейчатой поверхности.

12. Найти на прямом геликоиде такие линии, в каждой точке которых соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в этой точке.

13. Найти асимптотические линии линейчатой поверхности, представляемой уравнениями:

$$x=(1+u)\cos v,\quad y=(1-u)\sin v,\quad z=u.$$

14*. Доказать, что сечения поверхности S плоскостями, проходящими через прямую Δ, и линии прикосновения конусов, описанных около поверхности S и имеющих вершины в точках прямой Δ, образуют на поверхности S сопряженную сеть.

[Кенигс (Koenigs).]

15*. Если неизменяемая прямая движется таким образом, что три ее точки остаются соответственно в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, то эта прямая остается постоянно нормальною к некоторому семейству параллельных поверхностей. Одна из этих поверхностей есть геометрическое место середины отрезка этой прямой между точкою ее пересечения с одною из плоскостей координат и основанием перпендикуляра, опущенного на эту прямую из начала координат.

[Дарбу, *Comptes rendus*, т. XCII, стр. 446, 1881.]

16*. На всякой поверхности есть мнимая линия кривизны, представляющая геометрическое место точек, для которых $1+p^2+q^2=0$.

Для доказательства этого предложения нужно показать, что диференциальное уравнение линий кривизны может быть представлено в виде:

$$(dp\,dy - dq\,dx)(1 + p^2 + q^2) + (p\,dy - q\,dx)(p\,dp + q\,dq) = 0.$$

[Дарбу, *Annales de l'École Normale*, 1884.]

17*. *Формула Лагерра* (Laguerre). Пусть будет $F(x, y, z) = 0$ уравнение поверхности S; когда точка (x, y, z) описывает кривую Γ на этой поверхности, то диференциалы первых трех порядков удовлетворяют трем соотношениям (§ 24):

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}d^2x + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y + \frac{\partial F}{\partial z}d^2z + \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}d^3x + \frac{\partial F}{\partial y}d^3y + \frac{\partial F}{\partial z}d^3z + 3d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)d^2x + 3d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)d^2y + 3d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)d^2z +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(3)} = 0, \tag{3}$$

из которых первое выражает, что существует касательная плоскость, а второе эквивалентно теореме Менье. Чтобы дать геометрическое истолкование третьему, мы можем заменить в нем $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ направляющими косинусами λ, μ, ν нормали. В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda H, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu H, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \nu H,$$

где мы положили

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2};$$

принимая во внимание соотношение (2) можно написать уравнение (3) так:

$$\lambda\,d^3x + \mu\,d^3y + \nu\,d^3z + 3\,[d\lambda\,d^2x + d\mu\,d^2y + d\nu\,d^2z] = \Phi(x, y, z, dx, dy, dz);$$

Φ есть кубическая форма от dx, dy, dz, с коэфициентами, зависящими от x, y, z. Разделив на ds^3, заключаем отсюда, что выражение

$$\lambda\frac{d^3x}{ds^3} + \mu\frac{d^3y}{ds^3} + \nu\frac{d^3z}{ds^3} + 3\left[\frac{d\lambda}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d\mu}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d\nu}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right] = K,$$

сохраняет одно и то же значение в точке поверхности для кривых, лежащих на поверхности и касающихся друг друга в этой точке; этот результат можно было бы также получить, диференцируя формулу (7) § 233 и принимая во внимание выражения для D, D', D''.

Заменим теперь $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, ... их выражениями по формулам Френе (§ 222). Предыдущее выражение примет вид:

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{RT} + \frac{3}{R}\left(\alpha'\frac{d\lambda}{ds} + \beta'\frac{d\mu}{ds} + \gamma'\frac{d\nu}{ds}\right),$$

где через θ обозначен угол между нормалью к поверхности и главною нормалью кривой. С другой стороны, диференцируя соотношение

$$\cos\theta = \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma',$$

получаем:

$$-\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}=\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}-\lambda\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\mu\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-\nu\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right),$$

следовательно,

$$\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}=\sin\theta\left(\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}\right).$$

Заменяя $\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}$ этим выражением, мы видим, что *выражение*

$$K=-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\cos\theta+\frac{\sin\theta}{R}\left(\frac{2}{T}-3\frac{d\theta}{ds}\right)$$

имеет одно и то же значение для всех кривых, лежащих на поверхности и касающихся друг друга в одной точке.

(Лагерр.)

18*. *Формула Эннепера* (Enneper). Кручение асимптотической линии дается формулой:

$$T=\pm\sqrt{-RR'},$$

где R и R' — главные радиусы кривизны.

Указание. Для доказательства достаточно применить к асимптотической линии формулу Френе:

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T}$$

и заметить, что бинормаль совпадает с нормалью к поверхности. Для облегчения вычислений следует взять точку поверхности за начало координат, касательную плоскость за плоскость xy, касательную к асимптотической линии за ось y. Можно вывести формулу Эннепера также из формулы (51bis) (§ 245).

19*. *Формула Бельтрами* (Beltrami). Пусть будет ρ_0 радиус кривизны асимптотической линии, ρ — радиус кривизны той ветви кривой, получаемой пересечением поверхности с касательной плоскостью, которая касается асимптоты; эти величины связаны соотношением:

$$\rho=\frac{3}{2}\rho_0.$$

Указание. Если поверхность представлена уравнением:

$$z=2bxy+cy^2+Ax^3+3Bx^2y+\ldots,$$

то кривая, являющаяся пересечением поверхности и плоскости $z=0$, имеет ветвь, касающуюся оси x, уравнение которой есть:

$$y=-\frac{Ax^2}{2b}+\ldots;$$

в начале координат мы имеем:

$$y'=0,\quad y''=\frac{A}{b}.$$

С другой стороны, значение y'' в начале для асимптотической линии легко получается из диференциального уравнения этих линий:

$$(6Ax+\ldots)+(4b+\ldots)y'+(2c+\ldots)y'^2=0.$$

[Beltrami, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2-e série, *t.* IV, стр. 258, 1865.]

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*)

(Цифры в указателе соответствуют номерам страниц)

*) Подробный указатель ко всему „Курсу математического анализа" Э. Гурса будет дан в конце III тома.