COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT

Membre de L'Institut
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

CINQUIÈME ÉDITION

TOME II

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE

GAUTHIER — VILLARS
PARIS

Э. ГУРСА

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ ВТОРОЙ

ЧАСТЬ II

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
ПРОФ. А. И. НЕКРАСОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Б. К. МЛОДЗЕЕВСКОГО

ВНОВЬ ПРОСМОТРЕН И ПЕРЕРАБОТАН
ПО ПЯТОМУ ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ
ПРОФ. В. В. СТЕПАНОВЫМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

ТТ 11-5-2.

Редакционную работу по этой книге провел *И. Н. Бронштейн.* Издание оформила *О. Н. Персиянинова.* Корректуру держал *С. Ф. Морошкин.* Наблюдал за выпуском *Е. М. Богданов.*

Рукопись сдана в производство 4/V 1932 г. Листы подписаны к печати 5/XII 1932 г. Книга вышла в свет в декабре 1932 г. в количестве 5 000 экземпляров на бумаге формата 62×94. Печатн. знаков в листе 67 000, листов в книге 18. Заказ № 1436. ГТТИ 429. Уполномоченный Главлита № В-39552.

1-я типография Огиза РСФСР „Образцовая". Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава XVIII.

Стр.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Глава XIX.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

Глава XX.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Глава XXI.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

ГЛАВА XVIII.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

I. ПОЛУЧЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

362. Исключение постоянных. Рассмотрим семейство плоских кривых, представляемое уравнением

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \tag{1}$$

зависящим от n произвольных постоянных. Дадим этим постоянным определенные, но произвольные, значения; последовательные производные от функции y переменного x, определяемой предыдущим уравнением, удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' &= 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y} y^{(n)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Останавливаясь на соотношении, определяющем производную n-го порядка, мы получим всего $n+1$ соотношений между x, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ и постоянными $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Исключая эти постоянные, мы придем, вообще, только к одному соотношению между x, y, y', ..., $y^{(n)}$:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

Из самого происхождения этого уравнения очевидно, что всякая функция, определяемая соотношением (1), удовлетворяет уравнению (3), каковы бы ни были значения, даваемые постоянным c_i. Соотношение (1) называется *частным* интегралом диференциального уравнения (3). Совокупность этих частных интегралов называется *общим интегралом* того же уравнения*. Пользуясь геометрическими терминами, что часто бывает удобно, мы будем также говорить, что всякая кривая, представляемая уравнением (1), есть *интегральная кривая* уравнения (3), или уравне-

---

* Часто *общим интегралом* диференциального уравнения (3) называют соотношение (1), где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеют постоянные, но произвольные, значения. Давая этим постоянным определенные частные значения, мы получим *частный интеграл*.

(*Ред.*)

ние (3) есть диференциальное уравнение семейства рассматриваемых кривых. Мы видим, что *порядок* диференциального уравнения равен числу произвольных постоянных, от которых зависит это семейство кривых. Ясно, впрочем, что из предыдущего рассуждения никак не следует, что уравнение (3) не имеет других интегралов кроме представляемых уравнением (1); и действительно, как мы увидим несколько ниже, оно может иметь и другие интегралы.

Все предыдущее неприменимо к исключительным случаям, когда, исключая n параметров c_i из $n+1$ соотношений (1) и (2), мы придем к нескольким различным соотношениям между $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Тогда можно было бы составить из них одно соотношение, не содержащее $y^{(n)}$, так что рассматриваемое семейство кривых состояло бы из интегральных кривых диференциального уравнения, порядок которого ниже числа n. Это будет иметь место, если кривые зависят на самом деле только от $n-p$ параметров ($p>0$); например, кривые, представляемые уравнением $F[x, y, \varphi(a, b)]=0$, только повидимому зависят от двух произвольных параметров a и b: на самом деле они зависят только от одного переменного параметра $c=\varphi(a, b)$. Но понижение порядка диференциального уравнения может произойти также в другом случае; например, кривые, представляемые уравнением $y^2=2axy+bx^2$, действительно зависят от двух различных параметров a и b, однако, эти кривые всегда удовлетворяют уравнению $y=xy'$. Причина этого лежит в том, что эти кривые распадаются на две прямых, проходящих через начало координат, каждая из которых есть интеграл уравнения $y=xy'$.

Примеры. Прямые, проходящие через данную точку (a, b), представляются уравнением

$$y-b=C(x-a) \tag{4}$$

и зависят от произвольного параметра C. Исключая этот параметр из предыдущего соотношения и соотношения $y'=C$, мы непосредственно придем к диференциальному уравнению этой системы прямых:

$$y-b=y'(x-a). \tag{5}$$

Обратно, уравнение (5) можно представить в виде:

$$\frac{y'}{y-b}=\frac{1}{x-a};$$

следовательно, всякий интеграл этого уравнения удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{Log}(y-b)=\operatorname{Log}(x-a)+\operatorname{Log}C,$$

равносильному уравнению (4).

Совокупность прямых $y=C_1x+C_2$, лежащих на плоскости, образует семейство, зависящее от двух параметров; его диференциальное уравнение есть $y''=0$. Обратное предложение получается непосредственно.

Окружности, лежащие в одной плоскости,

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \tag{6}$$

образуют семейство, зависящее от трех параметров; следовательно, соответствующее диференциальное уравнение должно быть третьего порядка. Диференцируя трижды предыдущее соотношение, получим:

$$\left.\begin{aligned} x+yy'+A+By'=0, \quad 1+y'^2+yy''+By''=0, \\ 3y'y''+yy'''+By'''=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Исключая B из двух последних формул, придем к искомому уравнению:

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0. \tag{8}$$

Единственные плоские линии, удовлетворяющие этому уравнению, суть *окружности* и *прямые*. Мы видим прежде всего, что прямые суть интегралы, так как уравнение удовлетворяется, если $y''=0$, и следовательно, $y'''=0$. Предположим, что $y''\neq 0$; мы можем представить уравнение (8) в виде:

$$\frac{y'''}{y''}=\frac{3y'y''}{1+y'^2};$$

отсюда, обозначая через C_1 постоянное, не равное нулю, получим:

$$\operatorname{Log} y''=\frac{3}{2}\operatorname{Log}(1+y'^2)+\operatorname{Log} C_1,$$

или

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=C_1.$$

Интегрируя снова, будем иметь:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1x+C_2,$$

или

$$y'=\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}}.$$

Интегрируя еще раз, получим окончательно:

$$C_1y+C_3=-\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2};$$

это — уравнение окружности.

Пользуясь следующим методом, указанным Альфаном (Halphen), нетрудно получить диференциальное уравнение конических сечений. Если кривая второго порядка не имеет асимптоты, параллельной оси Oy, то, решая ее уравнение относительно y, получим уравнение вида:

$$y=mx+n+\sqrt{Ax^2+2Bx+C};$$

после двух диференцирований будем иметь:

$$y''=\frac{AC-B^2}{(Ax^2+2Bx+C)^{\frac{3}{2}}},$$

или

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=(AC-B^2)^{-\frac{2}{3}}(Ax^2+2Bx+C),$$

так что

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}$$

есть трехчлен второй степени относительно x. Следовательно, чтобы исключить коэфициенты A, B, C, достаточно его продиференцировать трижды; искомое диференциальное уравнение можно представить сокращенно в виде:

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

Выполняя вычисления, мы придем к уравнению

$$40y'''^3-45y''y'''y^{IV}+9y''^2y^{V}=0. \qquad (9)$$

Таким способом мы можем получить и диференциальное уравнение парабол. В самом деле, для параболы мы имеем: $A=0$, а $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ есть двучлен первой степени.

Следовательно, диференциальное уравнение параболы в сокращенном виде есть

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0,$$

или, выполняя вычисления:

$$5y'''^2-3y''y^{IV}=0. \qquad (10)$$

II. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

Всякое диференциальное уравнение n-го порядка, которое получается от исключения постоянных, имеет бесконечное множество интегралов, зависящих от n произвольных параметров. Но совсем не очевидно, что всякое заданное диференциальное уравнение имеет интегралы. Это — основной вопрос, которым мы займемся в следующей главе. Здесь мы сначала рассмотрим несколько простых типов диференциальных уравнений первого порядка, интегрирование которых приводится к квадратурам. Существование их интегралов будет доказано самим способом их получения. Если с точки зрения чистой логики этот путь и можно критиковать, то, во всяком случае, он соответствует историческому порядку.

363. Разделение переменных. Простейшим типом диференциального уравнения является уже изученное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \qquad (11)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, если независимое переменное x действительно, и — аналитическая функция, если x рассматривается как комплексное переменное. Мы видели, что это уравнение имеет бесконечное множество интегралов, которые можно представить формулою

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C,$$

где нижний предел x_0 можно рассматривать как данное постоянное, а C обозначает произвольное постоянное. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y) \qquad (12)$$

можно привести к предыдущему, рассматривая y как независимое переменное и x как известную функцию; в самом деле, из него получаем:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\varphi(y)},$$

и следовательно,

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}+C.$$

Вообще, если диференциальное уравнение первого порядка решено относительно производной от неизвестной функции, то часто бывает удобно представлять его в диференциальном обозначении:

$$P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0; \tag{13}$$

в таком виде не предрешается вопрос о выборе независимого переменного, которым может быть как x, так и y. Если мы хотим ввести вместо x и y новые переменные u и v, то достаточно заменить в уравнении (13) x, y, dx, dy их выражениями через u, v, du, dv. Заметим также, что можно, не меняя интегралов уравнения (13), умножать или делить обе части уравнения на один и тот же множитель $\mu(x,\ y)$; надо только принять во внимание решения уравнения $\mu(x,\ y) = 0$, которые при этом могут или появиться, или исчезнуть. Оба частных случая, которыми мы только что занимались, связаны с более общим приемом *разделения переменных*. Если диференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$X\,dx + Y\,dy = 0, \tag{14}$$

где X и Y зависят только, соответственно, от x и y, то говорят, что *переменные разделены*. Уравнение интегрируется в квадратурах, так как, полагая

$$U = \int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y\,dy,$$

мы можем представить это уравнение в виде $dU = 0$; его общий интеграл есть $U = C$.

Уравнение

$$XY_1\,dx + X_1 Y\,dy = 0, \tag{15}$$

где X и X_1 зависят только от x, а Y и Y_1 зависят только от y, можно привести к предыдущему виду, разделив обе части на $X_1 Y_1$. Заметим на этом примере, что мы отбрасываем, таким образом, решения двух уравнений: $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$. В самом деле, ясно, что если $y = b$ есть решение уравнения $Y_1 = 0$, то $y = b$ есть интеграл данного уравнения, тогда как он, вообще, не содержится в общем интеграле нового уравнения.

364. Однородное уравнение. Всякое уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{16}$$

где правая часть есть однородная функция *нулевой степени*, называется *однородным уравнением*. Его можно привести к интегрируемому виду, полагая $y = ux$, так что новые переменные будут x и u; в самом деле, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

и уравнение (16) обращается в

$$x\frac{du}{dx}+u=f(u).$$

Переменные можно разделить, представив это уравнение в виде:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{f(u)-u},$$

и общий интеграл получается квадратурою:

$$x=Ce^{\int\frac{du}{f(u)-u}}; \tag{17}$$

достаточно заменить в нем u через $\frac{y}{x}$, чтобы иметь уравнение интегральных кривых данного уравнения (16)*.

Общее уравнение этого семейства кривых имеет вид:

$$x=C\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где C — произвольное постоянное. Они все подобны между собою, причем начало координат есть центр подобия, а меняется только отношение подобия в самом деле, предыдущее уравнение можно получить из уравнения

$$x=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

изменяя в нем x и y, соответственно, в $\frac{x}{C}$ и $\frac{y}{C}$. Обратно, пусть будет дано какое-нибудь семейство кривых, подобных относительно начала координат, соответствующее диференциальное уравнение будет однородным уравнением первого порядка. В этом можно было бы убедиться вычислением, но результат очевиден и непосредственно; в самом деле, касательные к различным кривым этого семейства в точках пересечения этих кривых с прямою, выходящею из начала координат, должны быть параллельны между собою, и следовательно, угловой коэфициент y' касательной должен зависеть только от отношения $\frac{y}{x}$

К однородному виду можно привести уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right), \tag{18}$$

где a, b, c, a', b', c' — произвольные коэфициенты, а b и b не равны

---

* Уравнение (16) допускает в качестве интеграла также и прямые $y=mx$, где m — корень уравнения: $m=f(m)$. Эти прямые могут заключаться в общем интеграле (как в случае уравнения $x+yy'=0$), а могут представлять и особые интегралы ($xy'^2=y$).

одновременно нулю. В самом деле, чтобы это уравнение было однородным, нужно, чтобы было $c = c' = 0$. Полагая

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta,$$

где X и Y — новые переменные, а α и β — постоянные, мы приведем рассматриваемое уравнение к виду:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + a\alpha + b\beta + c}{a'X + b'Y + a'\alpha + b'\beta + c'}\right);$$

чтобы это уравнение было однородным, должно быть:

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Если $ab' - ba'$ не равно нулю, то эти два условия определяют постоянные α и β. В том частном случае, когда $ab' - ba' = 0$, предположим, например, что $b \neq 0$; мы будем иметь:

$$a'x + b'y = k(ax + by),$$

где k — постоянный множитель, имеющий конечное значение. Полагая $ax + by = u$, мы приведем рассматриваемое уравнение к виду:

$$\frac{1}{b}\frac{du}{dx} = \frac{a}{b} + f\left(\frac{u + c}{ku + c'}\right),$$

где переменные разделены.

365. Линейные уравнения. *Линейным диференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0, \tag{19}$$

где X и X_1 — функции от x. Если $X_1 = 0$, то это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{dy}{y} + X\,dx = 0, \tag{20}$$

и его общий интеграл получается одною квадратурою:

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} X\,dx}. \tag{21}$$

Чтобы проинтегрировать полное уравнение (19), когда X_1 отлично от нуля, мы посмотрим, нельзя ли удовлетворить этому уравнению, взяв для y выражение вида (21), но в котором C рассматривается уже не как постоянное, а как неизвестная функция от x. Это предположение равносильно замене переменного $y = Yz$, где z — новая искомая функция, и Y — какой-нибудь из интегралов уравнения (20). Выполнив эту подстановку и приняв во внимание соотношение (20), которому удовлетворяет функция Y, мы представим уравнение (19) в виде:

$$Y\frac{dz}{dx} + X_1 = 0.$$

Это уравнение интегрируется одною квадратурою, и мы получим:

$$z = -\int \frac{X_1}{Y}\,dx + C,$$

где C — произвольное постоянное. Таким образом общий интеграл уравнения (19) получается *двумя последовательными квадратурами*. Заменяя Y его выражением, мы можем представить этот интеграл в следующем виде:

$$y = e^{-\int X\,dx}\left(C - \int X_1 e^{\int X\,dx}\,dx\right), \tag{22}$$

где нижние пределы обоих интегралов могут быть взяты произвольно.

Мы видим, что общий интеграл линейного уравнения *есть целая линейная функция произвольного постоянного интегрирования* вида:

$$y = Cf(x) + \varphi(x),$$

где

$$f(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x)$$

— определенные функции от x. Это свойство характеризует линейные уравнения, так как, исключая постоянное C из предыдущего уравнения и из уравнения

$$y' = Cf'(x) + \varphi'(x),$$

мы, очевидно, придем к соотношению, линейному относительно y и y'.

Этот результат можно представить в другом виде. Пусть будут y_1, y_2, y_3 три частных интеграла линейного уравнения, соответствующие значениям C_1, C_2, C_3 постоянного C. Исключая функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ из соотношений

$$y_1 = C_1 f(x) + \varphi(x), \quad y_2 = C_2 f(x) + \varphi(x), \quad y_3 = C_3 f(x) + \varphi(x),$$

мы придем к равенству:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C_3 - C_1}{C_2 - C_1};$$

откуда видно, что для трех любых частных интегралов y_1, y_2, y_3 линейного уравнения отношение

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

постоянно. Следовательно, если известны два частных интеграла y_1, y_2 линейного уравнения, то мы непосредственно получаем общий интеграл в виде:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \text{const.}$$

К этому можно прибавить, что, если известен только один частный интеграл y_1, то мы получим общий интеграл одною квадратурою; в самом деле, полагая $y = y_1 + u$, мы придем к уравнению

$$\frac{du}{dx} + Xu = 0,$$

тождественному с уравнением (20).

366. Уравнение Бернулли. *Уравнением Бернулли* называется уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0, \tag{23}$$

где показатель n отличен от нуля и от единицы. Это уравнение приводится к линейному виду подстановкою $y^{1-n} = z$. В самом деле, разделив обе части уравнения на y^n и положив $y^{1-n} = z$, мы получим:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + Xz + X_1 = 0.$$

К этому же типу можно привести уравнение вида:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy + kx^m (x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{24}$$

где k и m — произвольные числа. В самом деле, полагая $y = ux$, мы можем представить рассматриваемое уравнение в виде:

$$[\varphi(u) + u\psi(u)]\frac{dx}{du} + x\psi(u) + kx^{m+2} = 0,$$

подстановка $x^{-(m+1)} = z$ приводит затем это уравнение к линейному.

367. Уравнение Якоби. *Уравнением Якоби* называется уравнение:

$$(a + a'x + a''y)(x\,dy - y\,dx) - (b + b'x + b''y)\,dy + (c + c'x + c''y)\,dx = 0, \tag{25}$$

где a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' — постоянные коэфициенты. Если $a = b = c = 0$, то, разделив уравнение (25) на $a'x + a''y$, мы приведем его к виду (24). Чтобы свести общий случай к этому частному, положим:

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta,$$

где X, Y — новые переменные, и α, β — некоторые постоянные. После этой подстановки уравнение (25) примет вид:

$$\begin{gathered}(a'X + a''Y)(X\,dY - Y\,dX) - \\ - [B + b'X + b''Y - (A + a'X + a''Y)\alpha - AX]\,dY + \\ + [C + c'X + c''Y - (A + a'X + a''Y)\beta - AY]\,dX = 0,\end{gathered} \tag{25'}$$

где

$$A = a + a'\alpha + a''\beta, \quad B = b + b'\alpha + b''\beta, \quad C = c + c'\alpha + c''\beta.$$

Это уравнение (25′) приведется к виду (24), если $A\alpha - B = 0$, $A\beta - C = 0$. Таким образом задача сводится к определению постоянных α, β из этих двух условий; последние можно представить в более симметричном виде, вводя вспомогательное неизвестное λ:

$$A - \lambda = 0, \quad B - \lambda\alpha = 0, \quad C - \lambda\beta = 0.$$

Исключая неизвестные α, β, мы придем к уравнению третьей степени относительно λ:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a' & a'' \\ b & b'-\lambda & b'' \\ c' & c & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом интегрирование уравнения Якоби зависит прежде всего от решения этого уравнения третьей степени, в чем ниже мы убедимся другим методом.

368. Уравнение Риккати. *Уравнением Риккати* (Riccati) называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{26}$$

где X, X_1, X_2 — функции от x. В общем случае это уравнение не может быть проинтегрировано в квадратурах; при произвольных коэфициентах X, X_1, X_2 его интегралы представляют новые трансцендентные функции, свойства которых мы изучим ниже. Но это уравнение имеет отношение к занимающему нас вопросу, так как оно обладает следующим свойством: *если известен один частный интеграл уравнения Риккати, то его общий интеграл получится двумя квадратурами.*

Пусть будет y_1 один из частных интегралов уравнения (26). Выполнив замену переменного $y = y_1 + z$, мы придем к уравнению того же вида, но которое не должно содержать члена, не зависящего от z, так как $z = 0$ есть интеграл нового уравнения; действительно, после этой замены мы получим:

$$\frac{dz}{dx} + (X_1 + 2Xy_1)z + Xz^2 = 0, \tag{27}$$

и достаточно положить здесь

$$\frac{1}{z} = u,$$

чтобы привести уравнение (27) к линейному, таким образом наше предложение доказано.

Из этого получается несколько важных следствий. Общий интеграл получающегося линейного уравнения относительно u имеет вид (§ 365):

$$u = Cf(x) + \varphi(x);$$

следовательно, общий интеграл уравнения Риккати будет иметь вид:

$$y = y_1 + \frac{1}{Cf(x) + \varphi(x)} = \frac{Cf_1(x) + \varphi_1(x)}{Cf(x) + \varphi(x)}. \tag{28}$$

Это показывает, что *этот интеграл есть линейная рациональная функция постоянного интегрирования.* Обратно, всякое диференциальное уравнение первого порядка, обладающее этим свойством, есть уравнение Риккати. В самом деле, пусть будут $f(x)$, $\varphi(x)$, $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ какие-нибудь четыре функции от x; все функции y, представляемые формулою (28), где C есть произвольное постоянное, удовлетворяют некоторому уравнению первого порядка, которое нетрудно получить, решая соотношение (28) относительно C и диференцируя обе части по x. Таким образом мы имеем:

$$C=\frac{\varphi_1-y\varphi}{yf-f_1},$$

и соответствующее диференциальное уравнение

$$(yf-f_1)(\varphi_1'-\varphi y'-y\varphi')-(\varphi_1-y\varphi)(y'f+yf'-f_1')=0$$

будет, действительно, вида (26). Пусть будут y_1, y_2, y_3, y_4 частные интегралы уравнения Риккати, соответствующие значениям C_1, C_2, C_3, C_4 постоянного C. Так как в выражение (28) интеграла уравнения Риккати постоянное C входит линейно, то на основании теории ангармонического отношения мы имеем соотношение, которое легко проверить и непосредственным вычислением:

$$\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\frac{C_4-C_1}{C_4-C_2}:\frac{C_3-C_1}{C_3-C_2};$$

отсюда видно, что *ангармоническое отношение любых четырех частных интегралов уравнения Риккати есть постоянное.*

Эта теорема позволяет найти без всякой квадратуры общий интеграл уравнения Риккати, если известны его три частных интеграла y_1, y_2, y_3. Всякий другой интеграл должен быть таким, чтобы ангармоническое отношение

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

было постоянно. Следовательно, мы получим общий интеграл, приравнивая это отношение произвольному постоянному: мы видим, что y будет линейною и рациональною функциею постоянного; отсюда следует, что предыдущее свойство ангармонического отношения четырех интегралов принадлежит только уравнениям Риккати.

Заметим, наконец, что, если известны только два частных интеграла y_1, y_2, то интегрирование уравнения (26) заканчивается одною квадратурою. В самом деле, сделав преобразование $y=y_1+z$, мы получим уравнение относительно z, имеющее интегралом y_2-y_1; поэтому линейное уравнение относительно $u=\frac{1}{z}$ также имеет один известный частный интеграл, именно $\frac{1}{y_2-y_1}$. Следовательно, мы найдем общий интеграл уравнения относительно $u=\frac{1}{z}$ одною квадратурою*.

* Все эти свойства уравнения Риккати можно также вывести из того соображения, что уравнение Риккати не меняет своего вида ни при каком гомографическом преобразовании вида $y=\frac{fz+\varphi}{f_1z+\varphi_1}$ где f, f_1, φ, φ_1 — функции от x. Если известны один, два или три интеграла уравнения (26), то всегда можно выбрать гомографическое преобразование таким образом, чтобы в преобразованном уравнении Риккати один, два или три коэфициента многочлена второй степени относительно z были равны нулю. Линейное уравнение можно рассматривать как уравнение Риккати, имеющее частный интеграл $y=\infty$, т. е. такое, что уравнение, получающееся из него после подстановки $y=\frac{1}{z}$, должно иметь решение $z=0$.

Приложение. Рассмотрим семейство кругов, лежащих в одной плоскости и зависящих от одного переменного параметра. Пусть будут a, b, R координаты центра переменного круга в прямоугольных координатах и его радиус; положим, что a, b, R суть известные функции переменного параметра α. Найдем кривые, пересекающие каждый из этих кругов под известным углом V, постоянным или представляющим данную функцию от α. Координаты каждой точки M круга C с центром (a, b) и радиусом R можно представить формулами:

$$x = a + R\cos\theta, \quad y = b + R\sin\theta,$$

где θ есть угол между радиусом, проведенным в точку M, и направлением Ox Задача приводится к определению этого угла θ в функции параметра α таким образом, чтобы линия, описываемая точкою M, пересекала круг C под углом V. Таким образом диференциальное уравнение задачи есть

$$\operatorname{ctg} V = \frac{\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta\,\frac{dy}{dx}};$$

заменяя dx и dy их значениями, будем иметь после приведения:

$$R\frac{d\theta}{d\alpha} + b'\cos\theta - a'\sin\theta - \operatorname{ctg} V(R' + a'\cos\theta + b'\sin\theta) = 0,$$

где a', b', R' суть производные от a, b, R по α. Взяв за новое переменное $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, получим уравнение Риккати:

$$2R\frac{dt}{d\alpha} + b'(1 - t^2) - 2a't - \operatorname{ctg} V[R'(1 + t^2) + a'(1 - t^2) + 2b't] = 0. \tag{29}$$

Следовательно, достаточно знать одну траекторию, чтобы получить все остальные двумя квадратурами.

Рассмотрим частный случай, когда траектории ортогональны; тогда угол V будет прямым, и его котангенс равен нулю. Если, сверх того, мы предположим, что центры рассматриваемых окружностей лежат на прямой линии, то мы без всяких вычислений знаем два частных интеграла уравнения (29), так как линия центров есть одна из искомых ортогональных траекторий, и она пересекает каждый круг в двух точках. Негрудно проверить, что в этом случае интегрирование приводится к одной квадратуре, так как, взяв линию центров за ось Ox, мы приведем уравнение (29) к виду:

$$R\frac{dt}{d\alpha} - a't = 0.$$

369. Уравнения, не разрешенные относительно y'. Во всех предыдущих случаях мы предполагали, что диференциальное уравнение решено относительно y'. Рассмотрим теперь диференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ общего вида. Пусть будет S поверхность, представляемая уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое мы получим, заменяя в предыдущем уравнении y' через z. Всякому интегралу $y = f(x)$ данного диференциального уравнения соответствует кривая Γ, представляемая уравнениями:

$$y = f(x), \quad z = f'(x); \tag{Γ}$$

она лежит на поверхности S, так как

$$F[x, f(x), f'(x)] = 0.$$

Но линия Γ не может быть произвольною линиею поверхности S; в самом деле, вдоль линии Γ количества y и z суть функции от x, удовлетворяющие соотношению $dy - z\,dx = 0$, причем это соотношение сохраняет свой вид, если мы возьмем вместо x какое-нибудь другое независимое переменное.

Обратно, пусть будет Γ линия, лежащая на поверхности S; координаты x, y, z точек этой линии суть функции переменного параметра α. Если функции $x = \varphi_1(\alpha)$, $y = \varphi_2(\alpha)$, $z = \varphi_3(\alpha)$ удовлетворяют соотношению $dy = z\,dx$, то из них можно получить интеграл рассматриваемого уравнения. В самом деле, два первых уравнения $x = \varphi_1(\alpha)$, $y = \varphi_2(\alpha)$ представляют некоторую плоскую кривую C; предположим, что $y = f(x)$ есть уравнение этой кривой, разрешенное относительно y. Вдоль линии Γ мы, по предположению, имеем $z = f'(x)$; так как Γ лежит на поверхности S, то $F[x, f(x), f'(x)] = 0$, и следовательно, кривая Γ есть интегральная кривая. Исключение представлял бы только тот случай, когда кривая C обращалась бы в точку, а линия Γ — в прямую, параллельную оси Oz. Таким образом интегрирование уравнения $F(x, y, y') = 0$ равносильно разысканию кривых на поверхности S, для которых имеет место соотношение:

$$dy - z\,dx = 0.$$

Предположим теперь, что координаты x, y, z точек поверхности S выражены явно в функции двух переменных параметров u, v:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v):$$

мы получим всякую кривую Γ поверхности S, установив некоторое соотношение между u и v, чтобы эта кривая определяла интеграл, необходимо и достаточно, чтобы было $dy = z\,dx$, или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv = \psi(u, v)\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right).$$

Таким образом мы получаем диференциальное уравнение вида:

$$\frac{dv}{du} = \pi(u, v),$$

разрешенное относительно $\dfrac{dv}{du}$.

Такое преобразование особенно просто в применении к уравнениям, решенным относительно одного из переменных x или y. Рассмотрим например, уравнение

$$y = f(x, y') \tag{30}$$

здесь можно взять за переменные параметры x и $y' = p$. Тогда поверхность S представится уравнениями:

$$x = x, \quad z = p, \quad y = f(x, p),$$

и соотношение $dy = z\,dx$ обращается в

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{31}$$

Этот результат можно было бы получить и непосредственно, диференцируя уравнение (30) и заменяя y' через p. Пусть будет $p = \varphi(x, C)$

общий интеграл уравнения (31); чтобы получить из него общий интеграл уравнения (30), достаточно заменить в формуле (30) y' через $\varphi(x, C)$.

370. Уравнение Лагранжа. Рассмотрим как частный случай уравнение линейное относительно переменных x и y:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'); \tag{32}$$

диференцируя обе части и обозначая y' через p, мы получим уравнение:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Рассматривая p как независимое переменное, а x — как функцию от p, мы можем представить это уравнение в виде:

$$[\varphi(p) - p]\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0;$$

это уравнение — линейное и интегрируется двумя квадратурами. Получив x в функции p и внеся это значение x в формулу

$$y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

мы получим координаты x и y в функции параметра p и произвольного постоянного *.

Нетрудно выяснить, как расположены в этом случае интегральные кривые. Заметим, что x, а следовательно, и y суть целые и линейные функции произвольного постоянного C:

$$x = CF(p) + \Phi(p), \quad y = CF_1(p) + \Phi_1(p); \tag{33}$$

но функции $F(p)$, $F_1(p)$, $\Phi(p)$, $\Phi_1(p)$ не могут быть произвольными, так как параметр p представляет угловой коэфициент $\frac{dy}{dx}$ касательной; для этого должно быть $F_1'(p) = pF'(p)$, $\Phi_1'(p) = p\Phi'(p)$. Пусть будут Γ_0, Γ_1 частные интегралы, соответствующие значениям $C = 0$, $C = 1$ постоянного:

$$\Gamma_0 \begin{cases} x_0 = \Phi(p), \\ y_0 = \Phi_1(p), \end{cases} \qquad \Gamma_1 \begin{cases} x_1 = F(p) + \Phi(p), \\ y_1 = F_1(p) + \Phi_1(p); \end{cases}$$

тогда уравнения (33), представляющие общий интеграл Γ, можно представить также в виде:

$$\Gamma \begin{cases} x = C(x_1 - x_0) + x_0, \\ y = C(y_1 - y_0) + y_0. \end{cases}$$

Кривые Γ_0, Γ_1, Γ имеют в точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M(x, y)$, соответствующих одному и тому же значению количества p, параллельные касательные. С другой стороны, из предыдущих формул получаем:

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = \frac{x - x_0}{x - x_1} = \frac{C}{C - 1};$$

мы видим, что три точки M, M_0, M_1 лежат на одной прямой, и отношение $\frac{MM_0}{MM_1}$ постоянно. Отсюда следует такое геометрическое построение: *пусть будут даны*

---

* Уравнение (32) можно также привести к линейному уравнению посредством преобразования Лежандра (т. I, § 58).

Однородные уравнения $y = x\varphi(y')$, не разрешенные относительно y', можно рассматривать как частные случаи уравнения Лагранжа и интегрировать таким же образом.

Уравнение (32) допускает в качестве интеграла также и прямые $y = mx + \psi(m)$, где m — корень уравнения $m = \varphi(m)$. Эти прямые могут в некоторых случаях составлять часть общего интеграла, а могут представлять собой и особые интегралы.

кривые Γ_0 и Γ_1; соединим прямою линиею те точки M_0 и M_1 этих кривых, в которых касательные параллельны между собою, и возьмем на этой прямой такую точку M, чтобы отношение $\frac{MM_0}{MM_1}$ было равно данному постоянному K. Когда точки M_0 и M_1 описывают кривые Γ_0, Γ_1, точка M опишет интегральную кривую Γ, и изменяя постоянное K, получим общий интеграл.

371. Уравнение Клеро. Замечательный частный случай уравнения Лагранжа был еще ранее исследован Клеро (Clairaut); *уравнением Клеро* называется всякое уравнение вида:

$$y = xy' + f(y'). \tag{34}$$

Следуя общему методу, продиференцируем обе части этого уравнения и положим $y' = p$; мы придем к уравнению

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0. \tag{35}$$

Это уравнение удовлетворяется, если положить $\frac{dp}{dx} = 0$, откуда $p = C$. Следовательно, общий интеграл уравнения Клеро будет:

$$y = Cx + f(C). \tag{36}$$

Это уравнение представляет семейство прямых линий; нетрудно убедиться, что эти прямые, действительно, представляют интегральные линии уравнения Клеро. Но мы также удовлетворим уравнению (35), полагая равным нулю первый множитель $x + f'(p) = 0$. Отсюда следует, что существует еще другой интеграл уравнения (34), представляемый соотношениями

$$x + f'(p) = 0, \quad y = px + f(p);$$

исключая p из этих двух соотношений, мы получили бы огибающую прямых, представляемых уравнением (36). Следовательно, уравнение Клеро имеет, кроме того, еще другой интеграл, представляющий *огибающую прямых, образующих общий интеграл*. Так как этот интеграл нельзя получить из формулы (36), какое бы частное значение мы ни давали постоянному C, то он называется *особым интегралом*.

Мы приходим к уравнению Клеро, когда ищем плоскую кривую по какимнибудь свойствам ее касательных, не зависящим от положения точки прикосновения. В самом деле, пусть будет $y = f(x)$ уравнение искомой кривой; так как уравнение касательной есть $Y = y'X + y - xy'$, то мы приходим к соотношению между y' и $y - xy'$, т. е. к уравнению Клеро. Ясно, что в этом случае настоящее решение задачи дает именно особый интеграл. *Найдем, например, такую кривую, чтобы произведение расстояния двух данных точек F и F' от каждой ее касательной было равно постоянному b^2.* Пусть будет $2c$ расстояние FF'. Взяв середину отрезка FF' за начало координат и прямую FF' за ось Ox, мы придем к диференциальному уравнению:

$$(y - xy')^2 - c^2y'^2 = b^2(1 - y'^2),$$

причем мы предположили, что обе точки F и F' лежат по одну сторону касательной. Отсюда имеем: $y = xy' \pm \sqrt{b^2 + a^2y'^2}$, где $a^2 = b^2 + c^2$. Общий интеграл представляется семейством прямых

$$y = Cx \pm \sqrt{b^2 + a^2C^2}.$$

Особый интеграл — огибающая этих прямых — есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

он представляет настоящее решение задачи.

372. Интегрирование уравнений $F(x, y')=0$, $F(y, y')=0$. Уравнения, содержащие только одно из переменных x или y, интегрируются в квадратурах, если их можно решить относительно y' (§ 363). Если данное соотношение — алгебраическое, то y есть или абелев интеграл, или функция, обратная абелеву интегралу. Всякий раз, когда данное соотношение *нулевого* или *первого* рода (§ 309), мы можем выразить x и y через функции некоторого переменного параметра или рационально, или через основные трансцендентные функции, например $\wp u$, σu, ζu. Рассмотрим сначала уравнения $F(y, y')=0$ нулевого рода; мы можем выразить y и y' как рациональные функции переменного параметра u, $y=f(u)$, $y'=f_1(u)$, и из соотношения $dy=y'\,dx$ получим $f'(u)\,du=f_1(u)\,dx$. Таким образом переменные x и y выразятся через параметр u формулами:

$$y=f(u),\quad x=\int\frac{f'(u)}{f_1(u)}\,du. \tag{37}$$

Такой же прием применим к уравнениям $F(y, y')=0$, когда это соотношение — первого рода, но здесь должно взять для $f(u)$, $f_1(u)$ эллиптические функции, и x и y выразятся через трансцендентные функции $\wp$, ζ, σ (§ 326).

Точно так же можно поступать и с уравнениями $F(x, y')=0$, когда соотношение — нулевого или первого рода; впрочем, их можно привести к предыдущему виду перестановкою x и y.

Примеры. 1. Уравнение $y^2(y'-1)=(2-y')^2$ — нулевого рода; полагая $2-y'=yu$, получим: $y'=1+u^2$, $y=\frac{1}{u}-u$. Соотношение $dy=y'\,dx$ принимает в этом случае вид: $dx=-\frac{du}{u^2}$; следовательно: $x=\frac{1}{u}+C$, и общий интеграл рассматриваемого уравнения есть $y=x-C-\frac{1}{x-C}$.

2. Возьмем уравнение $y'^3-3y'^2-9y^4-12y^2=0$; рассматривая в нем y и y' как координаты точки, легко видеть, что это уравнение представляет уникурсальную кривую четвертого порядка, имеющую три двойных точки:

$$(y=0,\ y'=0),\quad \left(y=\pm\sqrt{-\frac{2}{3}},\ y'=2\right).$$

В самом деле, мы можем представить данное уравнение в виде:

$$(y'-2)^2(y'+1)=(3y^2+2)^2.$$

Полагая сначала $y'=u^2-1$, получим $3y^2=(u+1)^2(u-2)$, полагая затем $u-2=3t^2$, будем иметь окончательно следующие выражения для y и y' через параметр t:

$$y=3(t+t^3),\quad y'=3(1+t^2)(1+3t^2).$$

Соотношение $dy=y'\,dx$ приводится здесь к $dx(1+t^2)=dt$; отсюда находим:

$$t=\operatorname{tg}(x+C);$$

следовательно, общий интеграл предложенного уравнения будет

$$y = 3\,\mathrm{tg}\,(x + C) + 3\,\mathrm{tg}^3\,(x + C).$$

3. Пусть будет $R(y)$ многочлен третьей или четвертой степени, первый со своею производною. Рассмотрим диференциальное уравнение

$$y'^2 = R(y). \tag{38}$$

Мы видели выше (§ 330), что этому соотношению первого рода можно удовлетворить, полагая $y = f(u)$, $y' = f'(u)$, где $f(u)$ есть эллиптическая функция второго порядка. Условие $dy = y'\,dx$ обращается в $du = dx$, и, следовательно, общий интеграл уравнения (38) есть эллиптическая функция $y = f(x + C)$.

Если степень многочлена $R(y)$ ниже третьей, или если этот многочлен, хотя и третьей или четвертой степени, не будет первым со своею производною, то соотношение (38) — нулевого рода. Применяя предыдущий метод, мы можем выразить y и y' через рациональные функции параметра u, и нетрудно убедиться, что общий интеграл есть или рациональная функция от x, или рациональная функция от e^{ax}.

373. Интегрирующий множитель. Метод интегрирования разделением переменных был обобщен Эйлером. В самом деле, рассуждение § 363 применимо ко всякому уравнению первого порядка:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{39}$$

коэфициенты которого P и Q зависят от обоих переменных x и y, если только будет $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы $P\,dx + Q\,dy$ было полным диференциалом от некоторой функции $U(x, y)$, причем, как мы выше видели (т. I, § 144), эта функция получается посредством квадратур. Следовательно, уравнение (39) тождественно с уравнением $dU = 0$, и мы получим его общее решение, установив между x и y соотношение вида $U(x, y) = C$. Таким образом уравнение (39) интегрируется в квадратурах всякий раз, когда коэфициенты P и Q удовлетворяют условию: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Очевидно, что для того, чтобы можно было приложить предыдущий метод, нет необходимости, чтобы было $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, достаточно знать *интегрирующий множитель*, т. е. такой множитель $\mu(x, y)$, чтобы произведение

$$\mu(x, y)\,[P\,dx + Q\,dy]$$

удовлетворяло условию интегрируемости $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$, или, раскрывая:

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{40}$$

Таким образом разыскание интегрирующих множителей приводится к интегрированию уравнения (40), т. е. к интегрированию линейного уравнения в частных производных первого порядка. Можно подумать, что, поступая таким образом, мы ставим интегрирование уравнения (39) в зависимость от задачи, повидимому, более трудной; но должно заметить, что для применения этого метода достаточно знать какое-нибудь *частное* *решение* уравнения (40), и во многих случаях можно найти частный интеграл уравнения (40) более или менее прямыми приемами. Найдем, например, в каком случае уравнение (39) имеет интегрирующий множитель, не зависящий от x. Если мы предположим $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, то уравнение (40) обращается в

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

и выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ не должно зависеть от y; в этом случае мы получим интегрирующий множитель μ одною квадратурою. Предположим сверх того, что $Q=1$; тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ должно быть некоторою функциею X переменного x, и уравнение (39) есть линейное уравнение

$$dy+(Xy+X_1)dx=0. \tag{39'}$$

В этом случае уравнение (40) имеет решение:

$$\mu=e^{\int_{x_0}^{x}X\,dx},$$

и нетрудно убедиться, что, умножив уравнение (39') на этот множитель, мы получим в левой части полный диференциал:

$$e^{\int_{x_0}^{x}X\,dx}(dy+Xy\,dx+X_1\,dx)=d\left(ye^{\int_{x_0}^{x}X\,dx}+\int_{x_0}^{x}X_1e^{\int_{x_0}^{x}X\,dx}dx\right)=0;$$

дальнейшее интегрирование требует таких же вычислений, какие мы имели в первом методе (§ 365).

Ниже мы увидим, что при весьма общих условиях, которые всегда выполняются в случаях, рассматриваемых здесь, уравнение (40) имеет бесконечное множество интегралов. Если мы знаем один интегрирующий множитель μ_1, то все остальные можно получить следующим образом. Положим $\mu=\mu_1 v$, тогда уравнение (40) обращается в

$$P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x}=0; \tag{40'}$$

но мы знаем одну функцию, удовлетворяющую этому соотношению: это функция $U(x, y)$, полный диференциал которой равен $\mu_1(P\,dx+Q\,dy)$; в самом деле, ее частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ равны соответственно $\mu_1 P$ и $\mu_1 Q$ и удовлетворяют уравнению (40'). Следовательно, мы имеем также $\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}=0$; отсюда видно, что должно быть $v=\varphi(U)$, и общее выражение интегрирующих множителей есть $\mu=\mu_1\varphi(U)$, где

φ — произвольная функция от U. Нетрудно проверить, что μ есть действительно интегрирующий множитель; в самом деле, умножая на $\varphi(U)$ тождество

$$\mu_1(P\,dx + Q\,dy) = dU,$$

получаем:

$$\mu_1\varphi(U)\,(P\,dx + Q\,dy) = \varphi(U)\,dU,$$

и правая часть есть точный диференциал функции

$$F(U) = \int \varphi(U)\,dU.$$

Отсюда вытекает важное следствие: если μ_1 и μ_2 — два интегрирующих множителя, то отношение $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ есть функция от U. Если это отношение не есть постоянное число, то общий интеграл диференциального уравнения будет $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \text{const}$.

Последняя теорема позволяет в некоторых случаях находить интегрирующий множитель. Рассмотрим диференциальное уравнение

$$P\,dx + Q\,dy + P_1\,dx + Q_1\,dy = 0, \tag{41}$$

где P, P_1, Q, Q_1 — функции от x, y, и предположим, что мы умеем найти интегрирующие множители для каждого из выражений $P\,dx + Q\,dy$, $P_1\,dx + Q_1\,dy$. Общее выражение интегрирующих множителей для $P\,dx + Q\,dy$ есть $\mu\varphi(U)$, где μ — уже известный множитель, U — функция от x и y, получаемая квадратурами, и φ — произвольная функция. Общее выражение интегрирующих множителей для $P_1\,dx + Q_1\,dy$ также есть $\mu_1\psi(U_1)$, где μ_1 и U_1 — определенные функции и ψ — произвольная функция. Если можно выбрать функции φ и ψ так, чтобы было

$$\mu\varphi(U) = \mu_1\psi(U_1),$$

то мы будем иметь интегрирующий множитель и для данного уравнения (41).

Рассмотрим, например, уравнение

$$ax\,dy + by\,dx + x^m y^n(\alpha x\,dy + \beta y\,dx) = 0,$$

где a, b, α, β — постоянные. Всякий интегрирующий множитель для $ax\,dy + by\,dx$ имеет вид $\frac{1}{xy}\varphi(x^b y^a)$; точно так же всякий интегрирующий множитель второй части имеет вид: $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\psi(x^\beta y^\alpha)$. Чтобы иметь общий интегрирующий множитель, достаточно найти два таких показателя p и q, чтобы было $x^m y^n (x^b y^a)^p = (x^\beta y^\alpha)^q$, что равносильно условиям:

$$pa - q\alpha + n = 0, \quad pb - q\beta + m = 0.$$

Эти условия совместимы, если $a\beta - b\alpha$ не равно нулю, и определяют интегрирующий множитель вида: $x^M y^N$. По умножении на этот интегрирующий множитель рассматриваемое уравнение принимает вид $v^{p-1}dv + v_1^{q-1}dv_1 = 0$, где $v = x^b y^a$, $v_1 = x^\beta y^\alpha$, и интегрируется непосредственно.

В том случае, когда $a\beta - \alpha b = 0$, мы имеем $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = k$ и можем представить данное уравнение в виде: $(ax\,dy + by\,dx)(1 + kx^m y^n) = 0$.

Примечание. Если известен общий интеграл диференциального уравнения первого порядка, то легко получить и интегрирующий множитель этого уравнения. В самом деле, пусть будет $f(x, y) = C$ общий интеграл уравнения (39). Диференциальное уравнение кривых, представляемых уравнением (39), можно иначе представить в виде: $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$; чтобы оно было тождественно с уравнением (39), должно быть $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{Q}$; общее значение обоих предыдущих отношений и есть, очевидно, интегрирующий множитель для $P\,dx + Q\,dy$. Всякий другой интегрирующий множитель равен первому множителю, умноженному на произвольную функцию от $f(x, y)$.

374. Приложение к конформному отображению. Теория интегрирующего множителя имеет важное приложение в задаче о конформном отображении. Пусть будет

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

квадратичная форма от du и dv, коэфициенты которой E, F, G суть *аналитические функции* от u, v и притом такие, что $EG - F^2$ не равно нулю. Выражение для ds^2 можно представить иначе в виде:

$$ds^2 = (a\,du + b\,dv)(a_1\,du + b_1\,dv),$$

где a, b, a_1, b_1 — также аналитические функции от u, v. На основании теоремы, которая будет доказана ниже со всею строгостью, каждое из выражений $a\,du + b\,dv$, $a_1\,du + b_1\,dv$ имеет бесконечное множество интегрирующих множителей, которые также будут аналитическими функциями от u и v. Если μ, μ_1 — два таких множителя, то мы имеем тождественно:

$$\mu(a\,du + b\,dv) = dU, \quad \mu_1(a_1\,du + b_1\,dv) = dU_1,$$

и, следовательно,

$$\mu\mu_1\,ds^2 = dU\,dU_1.$$

Положим:

$$U = X + iY, \quad U_1 = X - iY, \quad \mu\mu_1 = \frac{1}{\lambda};$$

тогда

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda(dX^2 + dY^2).$$

Следовательно, всякая аналитическая поверхность может быть изображена на плоскости с сохранением углов. Если поверхность действительная, то можно предположить, что действительные точки поверхности соответствуют действительным значениям переменных u и v; при этом коэфициенты E, F, G будут действительными, а a и a_1, а также b и b_1, — мнимыми сопряженными. Ясно, что мы можем взять для μ и μ_1 и, следовательно, для U и U_1, мнимые сопряженные значения, так что действительным значениям u и v будут соответствовать действительные значения X и Y. Следовательно, действительным точкам поверхности соответствуют действительные точки плоскости.

Так как всякая аналитическая поверхность может быть представлена на плоскости с сохранением углов, то отсюда следует, что любые две аналитические поверхности могут быть конформно отображены одна на другую.

375. Уравнение Эйлера. Для интегрирования различных видов диференциальных уравнений применялись весьма разнообразные искусственные приемы. Один из замечательных примеров этого рода принадлежит Эйлеру в применении к уравнению, получившему название *уравнения Эйлера*. Это — уравнение вида:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0, \tag{42}$$

где X и Y суть многочлены четвертой степени, зависящие соответственно от x и y и имеющие одинаковые коэфициенты:

$$X=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$
$$Y=a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4.$$

Так как переменные разделены, то мы получим общий интеграл уравнения (42) двумя квадратурами, которые введут две трансцендентные функции, зависящие соответственно от x и y. Эйлер открыл основное свойство интеграла этого уравнения, послужившее исходным пунктом для теории эллиптических функций, показав, что интегральное соотношение между x и y, на первый взгляд трансцендентное, на самом деле будет алгебраическим.

Рассмотрим предварительно тот случай, когда X есть многочлен второй степени и притом не точный квадрат; линейною подстановкою его можно привести к виду: $X=A(x^2-1)$; в этом частном случае уравнение (42) принимает вид:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0. \tag{43}$$

Освобождаясь от знаменателя, мы можем представить последнее уравнение в виде:

$$\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=d\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)+$$
$$+xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=0;$$

отсюда видно, что мы имеем тождественно:

$$d\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=$$
$$=\left[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy\right]\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

Следовательно, выражение $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy$ есть интегрирующий множитель для уравнения (43), и общий интеграл этого уравнения будет иметь вид:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C, \tag{44}$$

или
$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy=C', \tag{45}$$
так как уравнение (43) имеет два интегрирующих множителя
$$1 \text{ и } \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy.$$

Нетрудно убедиться, что обе формулы (44) и (45) равносильны, так как мы имеем тождественно:
$$(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2+[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy]^2=1.$$

Освобождаясь от корня, мы можем представить общий интеграл (45) уравнения (43) в виде:
$$x^2+y^2+2C'xy+C'^2-1=0, \tag{46}$$
где C' — произвольное постоянное; уравнение (46) представляет семейство кривых второго порядка, касающихся четырех прямых $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

Смелым наведением Эйлер пришел к формуле такого же вида, но более общего характера, относящейся к случаю, когда X есть любой многочлен третьей или четвертой степени («Institutiones calculi integralis», т. I, гл. V и VI).

Пусть будет $F(x, y)$ многочлен второй степени, зависящий от двух переменных x и y и симметричный относительно каждого из переменных:
$$\begin{aligned} F(x, y)=A_1x^2y^2+A_2xy(x+y)+\\ +A_3(x^2+y^2)+A_4xy+A_5(x+y)+A_6. \end{aligned} \tag{47}$$

Этот многочлен зависит от шести произвольных коэфициентов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, и соотношение $F(x, y)=0$ можно представить в двух равносильных формах:
$$\left.\begin{aligned} F(x, y)=My^2+Ny+P=0,\\ F(x, y)=M_1x^2+N_1x+P_1=0, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$
где M, N, P суть многочлены второй степени по x:
$$M=A_1x^2+A_2x+A_3, \quad N=A_2x^2+A_4x+A_5, \quad P=A_3x^2+A_5x+A_6,$$
а многочлены M_1, N_1, P_1 получаются из M, N, P заменою x через y. Из соотношения $F(x, y)=0$ выводим $F'_x dx+F'_y dy=0$, или, заменяя F'_x и F'_y их выражениями, имеем:
$$(2M_1x+N_1)\,dx+(2My+N)\,dy=0. \tag{49}$$

Из соотношений (48) получаем:
$$2My+N=\pm\sqrt{N^2-4MP}, \quad 2M_1x+N_1=\pm\sqrt{N_1^2-4M_1P_1},$$
и формулу (49) можно представить иначе в виде:
$$\frac{dx}{\sqrt{N^2-4MP}}\pm\frac{dy}{\sqrt{N_1^2-4M_1P_1}}=0. \tag{50}$$

Это соотношение будет тождественно с уравнением (42), если будет $N^2-4MP=X$, откуда по симметрии следует равенство: $N_1^2-4M_1P_1=Y$.

Так как многочлены M, N, P — второй степени, то многочлен $N^2 - 4MP$ — четвертой степени, и нужно выразить, что два многочлена четвертой степени тождественны между собою, для чего требуется только пять условий. Так как мы располагаем шестью коэфициентами A_i многочлена $F(x, y)$, то мы видим, что один из этих коэфициентов останется произвольным. Следовательно, существует бесконечное множество многочленов вида (47), зависящих от одного произвольного постоянного C, и таких, что из соотношения между переменными x и y

$$F(x, y) = 0 \tag{51}$$

можно вывести соотношение (42). Следовательно, соотношение (51) представляет общий интеграл рассматриваемого уравнения.

Вычисление, нужное для действительного определения многочлена $F(x, y)$, можно упростить, пользуясь следующим геометрическим представлением, данным Якоби. Чтобы иметь дело с общим случаем, рассмотрим многочлен четвертой степени $R(t)$, первый со своею производною; пусть будут t_1, t_2, t_3, t_4 корни уравнения $R(t) = 0$. С другой стороны, пусть будет Σ какая-нибудь кривая второго порядка, координаты x, y точек которой выражены в функции переменного параметра t рациональными дробями второй степени, так что каждой точке (x, y) кривой Σ соответствует одно значение параметра t; обозначим через m_1, m_2, m_3, m_4 точки кривой Σ, соответствующие значениям t_1, t_2, t_3, t_4 параметра. Наконец, пусть будет Σ' другая кривая второго порядка, проходящая через четыре точки m_1, m_2, m_3, m_4. Всякая прямая, касающаяся кривой Σ', пересекает кривую Σ в двух точках: M и M'; если t и t' суть значения параметра, соответствующие точкам M и M', то соотношение между t и t' и будет искомого вида. В самом деле, очевидно, что это соотношение симметрично относительно t и t' и, сверх того, второй степени относительно каждого из переменных, так как, например, через точку M' можно провести только две касательных к кривой Σ' и, следовательно, каждому значению t' соответствуют только два значения t.

Пусть это соотношение будет:

$$F(t, t') = 0. \tag{52}$$

Как мы видели выше, из него можно вывести соотношение между диференциалами dt, dt' вида:

$$\frac{dt}{\sqrt{P(t)}} \pm \frac{dt'}{\sqrt{P(t')}} = 0, \tag{53}$$

где $P(t)$ есть многочлен четвертой степени. *С точностью до постоянного множителя этот многочлен $P(t)$ тождествен с $R(t)$.* В самом деле, так как уравнение (50) показывает, что многочлен $P(t)$, составленный по вышеуказанному способу, есть дискриминант многочлена $F(t, t')$, рассматриваемого как функция от t', то корни уравнения $P(t) = 0$ суть те значения t, для которых два значения t', определенные из уравнения $F(t, t') = 0$, совпадают между собою. Но алгебраический смысл соотношения (52) показывает непосредственно, что это может иметь место только в том случае, когда обе касательные к кривой Σ', выходящие из точки M, сливаются между собою, т. е. если эта точка M есть одна из точек m_1, m_2, m_3, m_4, в которых кривые Σ и Σ' пересекаются между собою, так как только в этом случае две касательные, проведенные к кривой Σ' из точки M, взятой на кривой Σ, сливаются между собою. Следовательно, чтобы получить общий интеграл уравнения

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \pm \frac{dt'}{\sqrt{R(t')}} = 0, \tag{54}$$

где $R(t) = a_0t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$, которое отличается от данного уравнения (42) только обозначениями, мы приходим к следующему методу, требующему только рациональных операций. Сначала составим общее уравнение кривых второго порядка Σ', проходящих через четыре точки m_1, m_2, m_3, m_4 кривой Σ, затем выразим условие, что прямая, соединяющая точки M и M' кривой Σ, соответствующие значениям t и t' параметра, касается кривой Σ'. Полученное соотношение, содержащее произвольное постоянное C, есть общий интеграл уравнения Эйлера.

Чтобы выполнить вычисления, возьмем за Σ параболу $y^2 = x$ и положим $x = t^2$, $y = t$. Кривая второго порядка Σ', представляемая уравнением

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2B'x + 2By + A'' = 0, \tag{55}$$

пересекает кривую Σ в четырех точках, определяемых уравнением четвертой степени относительно t, которое получим, заменяя x через t^2 и y через t. Чтобы эти корни совпадали с корнями уравнения $R(t) = 0$, достаточно иметь:

$$A = a_0,\ A' + 2B' = a_2,\ 2B'' = a_1,\ 2B = a_3,\ A'' = a_4. \tag{56}$$

Так как коэфициент B' остается произвольным, то мы положим $B' = C$, что дает:

$$A' = a_2 - 2C.$$

Напомним теперь, что тангенциальное уравнение кривой Σ', т. е. условие того, чтобы прямая $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ касалась этой кривой, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \beta \\ B' & B & A'' & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{57}$$

Уравнение прямой, соединяющей точки (t^2, t) и (t'^2, t') кривой Σ, есть

$$x - y(t + t') + tt' = 0;$$

следовательно, мы можем положить:

$$\alpha = 1,\quad \beta = -(t + t'),\quad \gamma = tt'.$$

Подставляя полученные значения для A, B, A', B', A'', B'', α, β, γ в условие (57) и заменяя t и t' соответственно через x и y, мы приходим к общему интегралу уравнения Эйлера в следующей форме, данной Стильтьесом (Stieltjes):

$$\begin{vmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & C & 1 \\ \frac{a_1}{2} & a_2 - 2C & \frac{a_3}{2} & -(x+y) \\ C & \frac{a_3}{2} & a_4 & xy \\ 1 & -(x+y) & xy & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{58}$$

Это уравнение представляет семейство кривых четвертого порядка, имеющих две бесконечно удаленных двойных точки, лежащих соответственно на осях Ox и Oy. Так как уравнение (58) — второй степени относительно постоянного C, то через каждую точку плоскости проходят две кривых семейства, что нетрудно было предвидеть, так как предложенное диференциальное уравнение дает два противоположных значения $\frac{dy}{dx}$ для каждой точки (x, y). Эти оба значения $\frac{dy}{dx}$ делаются равными между собою только в том случае, если точка (x, y) принадлежит кривой $XY = 0$, которая распадается на четыре прямых D_1, D_2, D_3, D_4, параллельных оси Oy, и четыре прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, параллельных оси Ox. Представим уравнение Эйлера в виде $Y dx^2 - X dy^2 = 0$ и возьмем точку $M(x, y)$ на одной из прямых Δ, например на Δ_1. Для координат точки M мы имеем $Y = 0$, $X \neq 0$, и уравнение Эйлера дает для $\frac{dy}{dx}$ двойной корень $\frac{dy}{dx} = 0$. Через эту точку M проходит первая интегральная кривая, именно, сама прямая Δ_1. Но можно убедиться, что кривые, представляемые формулою (58), имеют своею огибающею совокупность восьми прямых, определяемых уравнением $XY=0$, так что через точку M прямой Δ_1 проходит еще другая интегральная кривая, касающаяся прямой Δ_1. Здесь мы имеем новый пример особых интегралов, так как восемь прямых D_i, Δ_i не содержатся среди кривых, представляемых общим интегралом (58).

Примечание. При выводе формулы (58) мы предполагали, что многочлен $R(x)$ — четвертой степени, первый со своею производною. Но ясно, что полученный нами результат допускает прямую проверку, в которую последнее предположение не входит. Например, применяя общий метод (§ 362), можно было бы составить диференциальное уравнение кривых, представляемых уравнением (58); полученное уравнение было бы необходимо тождественно с уравнением Эйлера при всяких значениях коэфициентов $a_0, a_1, \ldots, a_4$, так как оно тождественно с ним, когда эти коэфициенты не удовлетворяют никакому частному соотношению. Следовательно, формула (58) применима ко всем случаям.

376. Метод, основанный на теореме Абеля. Общий интеграл уравнения Эйлера также очень легко вывести из теоремы Абеля. Пусть теперь $R(x)$ обозначает многочлен третьей или четвертой степени, первый со своею производною, и рассмотрим кривую C, определяемую уравнением $y^2=R(x)$. Если переменная алгебраическая кривая C' встречает кривую C только в трех переменных точках M_1, M_2, M_3, то, как мы доказали выше (§ 360), координаты этих трех переменных точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) удовлетворяют соотношению

$$\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2}+\frac{dx_3}{y_3}=0. \tag{59}$$

Если секущая кривая C' зависит от двух переменных параметров, которые можно выбрать таким образом, чтобы две точки пересечения (x_1, y_1), (x_2, y_2) совпадали с двумя любыми заранее выбранными точками кривой C, то координаты третьей точки пересечения (x_3, y_3) будут функциями координат двух первых точек $(x_1, y_1;\ x_2, y_2)$, удовлетворяющими соотношению (59). Следовательно, уравнение $\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2}=0$ равносильно уравнению $\frac{dx_3}{y_3}=0$, общий интеграл которого есть $x_3=\mathrm{const}$. Так как точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на кривой C, то мы имеем: $y_1^2=R(x_1)$, $y_2^2=R(x_2)$, и уравнение $\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2}=0$, которое можно представить в виде:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}=0, \tag{60}$$

тождественно с уравнением Эйлера, только в других обозначениях. В формуле, определяющей общий интеграл

$$x_3=F(x_1, y_1;\ x_2, y_2)=\mathrm{const}, \tag{61}$$

должно заменить y_1 и y_2 соответственно через $\sqrt{R(x_1)}$ и $\sqrt{R(x_2)}$, причем в формулах (60) и (61) корни должны иметь одни и те же знаки. Таким образом мы здесь получаем для общего интеграла формулу, содержащую корни, тогда как формула (58) рациональна. Но иррациональный вид иногда более выгоден.

Выполним вычисления, предполагая, что многочлен $R(x)$ приведен к нормальной форме Лежандра $R(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$, где k^2 отлично от нуля и единицы. Парабола C':

$$y=ax^2+bx+1, \tag{62}$$

встречает кривую C, представляемую уравнением $y^2=R(x)$, в точке $(x=0, y=1)$ и в трех переменных точках, абсциссы x_1, x_2, x_3 которых суть корни уравнения

$$(a^2-k^2)x^3+2abx^2+(b^2+2a+k^2+1)x+2b=0, \tag{63}$$

которое получим, исключая y и отбрасывая множитель x.

Из этого уравнения выводим соотношения:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{2ab}{k^2-a^2}, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{b^2+2a+k^2+1}{a^2-k^2},$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{2b}{k^2 - a^2}$$

и, следовательно.

$$x_1 + x_2 + x_3 = ax_1x_2x_3. \tag{64}$$

Но мы можем определить a и b, выразив, что парабола C' проходит через две точки (x_1, y_1), (x_2, y_2). В частности, мы имеем:

$$ax_1x_2 = 1 + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_1 - x_2};$$

внося это значение a в предыдущую формулу, мы получим окончательно выражение для x_3 через x_1, y_1, x_2, y_2:

$$x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2y_1 - x_1y_2}.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения Эйлера

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 0 \tag{65}$$

представится формулою:

$$x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2\sqrt{R(x_1)} - x_1\sqrt{R(x_2)}} = C. \tag{66}$$

377. Теоремы Дарбу. Рассмотрим диференциальное уравнение вида:

$$-L\,dy + M\,dx + N(x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{67}$$

где L, M, N — целые многочлены относительно x, y степени не выше m, причем по крайней мере один из них будет степени m. Чтобы соотношение $u(x, y) = \text{const}$ представляло общий интеграл уравнения (67), необходимо и достаточно, чтобы уравнение (67) было тождественно с уравнением $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$, откуда вытекает равенство:

$$L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} - N\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{68}$$

Это условие принимает более симметричный вид, если мы заменим x через $\frac{x}{z}$ и y через $\frac{y}{z}$, где z есть фиктивное переменное, которое после выполнения указанных действий мы всегда будем предполагать равным единице. После такой замены $u(x, y)$ обращается в однородную функцию нулевой степени и, следовательно, мы имеем:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Поэтому условие (68) принимает вид:

$$L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial z} = A(u) = 0, \tag{69}$$

и, обратно, если мы получим однородную функцию нулевой степени $u(x, y, z)$, удовлетворяющую соотношению (69), то $u(x, y, z) = \text{const}$ представляет общий интеграл уравнения (67).

Дарбу показал*, что можно составить функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую этим условиям, когда известно некоторое число частных алгебраических интегралов уравнения (67). Предположим, что уравнение (67) имеет алгебраический инте-

* „Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré“ (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 1878).

грал, определяемый соотношением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — неразложимый многочлен степени h. Повторяя предыдущие вычисления, мы видим, что соотношение

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} - N\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \tag{70}$$

должно быть следствием уравнения $f(x, y) = 0$. Если мы и здесь заменим x через $\frac{x}{z}$, y через $\frac{y}{z}$ и затем умножим на z^h, то $f(x, y)$ обратится в однородную функцию от x, y, z степени h, удовлетворяющую соотношению

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = hf,$$

а условие (70) примет вид:

$$A(f) = L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = Nhf. \tag{71}$$

Это условие удовлетворяется не тождественно, но при условии $f(x, y, z) = 0$. Так как по предположению это соотношение неприводимо, то, должно быть:

$$A(f) = kf, \tag{72}$$

где k обозначает многочлен относительно x, y, z, который должен быть степени $m-1$, так как, если степень функции f есть h, то степень $A(f)$ равна $m+h-1$.

Предположим теперь, что мы нашли p алгебраических интегралов уравнения (67), определяемых p соотношениями

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \ldots, f_p(x, y) = 0,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — неразложимые многочлены степеней $h_1, h_2, \ldots, h_p$. Для этого необходимо, чтобы имели место p тождеств следующего вида:

$$A(f_1) = K_1 f_1, \quad A(f_2) = K_2 f_2, \ldots, \quad A(f_p) = K_p f_p, \tag{73}$$

причем степень всех многочленов $K_1, K_2, \ldots, K_p$ равна $m-1$.

Заметим, что символ операции $A(f)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам производной, и, в частности, к нему можно приложить правило диференцирования сложных функций: если $F(u, v, w)$ есть какая-нибудь функция от u, v, w, то мы имеем:

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial u}A(u) + \frac{\partial F}{\partial v}A(v) + \frac{\partial F}{\partial w}A(w).$$

Следовательно, если мы положим $u = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_p^{\alpha_p}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — некоторые постоянные, то мы будем иметь:

$$A(u) = \alpha_1 f_1^{\alpha_1 - 1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_p^{\alpha_p} A(f_1) + \alpha_2 f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2 - 1} \ldots f_p^{\alpha_p} A(f_2) + \ldots,$$

или, принимая во внимание формулы (73):

$$A(u) = (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p)u. \tag{73'}$$

Функция $u(x, y, z)$ — однородная степени $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_p h_p$. Если можно выбрать постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ таким образом, чтобы было

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_p h_p &= 0, \\ \alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_p K_p &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

то уравнение $u(x, y, z) = \text{const}$ представит, на основании доказанного выше, общий интеграл рассматриваемого уравнения.

Уравнения (74) составляют систему $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ однородных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, так как во втором уравнении многочлен степени $m-1$ относительно x и y содержит $\frac{m(m+1)}{2}$ членов. Мы, наверное, сможем удовлетворить этим уравнениям значениями α_i, которые *не равны все нулю*, и, следовательно, закончить интегрирование всякий раз, когда неизвестных будет больше, чем уравнений, т. е. когда будет

$$p \geqslant \frac{m(m+1)}{2} + 2. \tag{75}$$

Это — *первая теорема Дарбу*. Если уравнения (74) не независимы, то можно для них найти решения и тогда, когда p не достигает предыдущей границы $\frac{m(m+1)}{2} + 2$; в мемуаре Дарбу приведено много примеров этого рода.

Если известно только $p = \frac{m(m+1)}{2} + 1$ частных алгебраических интегралов, то можно выбрать p постоянных α_i таким образом, чтобы удовлетворялись условия

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p &= -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \\ \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_p h_p &= -m - 2, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

которые равносильны системе $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ линейных *неоднородных* уравнений Полученная таким образом функция u удовлетворяет уравнениям

$$L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + (m+2)u = 0;$$

отсюда, исключая $\frac{\partial u}{\partial z}$ и заменяя z через 1, получим:

$$L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} - N\left[(m+2)u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right] + u\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0.$$

Но мы придали функции N однородный вид, заменяя x через $\frac{x}{z}$, y через $\frac{y}{z}$ и умножая на z^m; поэтому, полагая $z = 1$, мы имеем также:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = mN - x\frac{\partial N}{\partial x} - y\frac{\partial N}{\partial y},$$

и предыдущее соотношение может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L - Nx) + \frac{\partial u}{\partial y}(M - Ny) + u\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} - x\frac{\partial N}{\partial x} - y\frac{\partial N}{\partial y} - 2N\right) = 0. \tag{77}$$

Нетрудно убедиться, что последнее условие показывает, что u есть интегрирующий множитель уравнения (67). Таким образом мы получаем *вторую теорему Дарбу.*

Если известны $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ *частных алгебраических интегралов уравнения* (67), *то можно составить его интегрирующий множитель.*

Доказательство этой последней теоремы неприменимо в том частном случае, когда определитель из коэфициентов при неизвестных α_i в $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ уравнениях, выведенных из соотношений (76), равен нулю. Но тогда мы можем удовлетворить $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ однородным уравнениям, которые получим, отбрасывая правые части, значениями α_i, которые не все равны нулю, а следовательно, по первой теореме, получить общий интеграл.

Пример. Рассмотрим, в частности, уравнение Якоби (§ 367); здесь число $m=1$. Найдем сначала линейные интегралы вида $ux+vy+wz=0$. На основании общего метода должно быть тождественно

$$u(bz+b'x+b''y)+v(cz+c'x+c''y)+w(az+a'x+a''y)=\lambda(ux+vy+wz),$$

где λ — постоянный множитель; отсюда получаем три условия:

$$ub+vc+w(a-\lambda)=0, \quad u(b'-\lambda)+vc'+wa'=0,$$
$$ub''+v(c''-\lambda)+wa''=0,$$

и, исключая u, v, w, приходим к уравнению относительно λ, уже выведённому первым методом (§ 367).

Мы ограничимся рассмотрением общего случая, когда это уравнение относительно λ имеет три различных корня λ_1, λ_2, λ_3; каждый из этих корней приводит к линейному интегралу и, следовательно, мы имеем три линейных функции X, Y, Z, дающих тождества

$$A(X)=\lambda_1 X, \quad A(Y)=\lambda_2 Y, \quad A(Z)=\lambda_3 Z.$$

На основании общей теории отсюда можно получить общий интеграл, так как в этом случае $m=1$. Для этого должно определить три числа α, β, γ, удовлетворяющих соотношениям

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\lambda_1+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3=0.$$

Мы можем взять

$$\alpha=\lambda_2-\lambda_3, \quad \beta=\lambda_3-\lambda_1, \quad \gamma=\lambda_1-\lambda_2,$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения Якоби будет:

$$X^{\lambda_2-\lambda_3}\,Y^{\lambda_3-\lambda_1}\,Z^{\lambda_1-\lambda_2}=\text{const}.$$

378. Приложения. Пусть требуется определить плоскую кривую по данному соотношению $F(x, y, m)=0$ между координатами (x, y) переменной точки этой кривой и угловым коэфициентом m касательной в этой точке; очевидно, что мы получим искомые кривые, интегрируя диференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y')=0$, которое выводится из данного соотношения $F(x, y, m)=0$ заменою m через y'. Если это уравнение будет степени q относительно y', то, как мы это докажем ниже, через любую точку плоскости проходит вообще q кривых этого рода. Рассмотрим, например, семейство кривых C, представляемых уравнением $\Phi(x, y, a)=0$, зависящим от одного произвольного параметра, и найдем их ортогональные траектории, т. е такие кривые C', которые в каждой своей точке пересекают ортогонально кривую C, проходящую через ту же точку. Пусть будут m, m' угловые коэфициенты касательных к ортогональным кривым C, C', проходящим через одну и ту же точку (x, y); m и m' должны удовлетворять соотношению $1+mm'=0$. С другой стороны, пусть будет $F(x, y, y')=0$ диференциальное уравнение данных кривых C; мы имеем $F(x, y, m)=0$, так как m есть угловой коэфициент касательной к кривой C, проходящей через точку (x, y), и, следовательно, мы будем иметь:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{m'}\right)=0.$$

Но m' — также угловой коэфициент касательной к кривой C', проходящей через точку (x, y); следовательно, эта кривая удовлетворяет, с своей стороны, уравнению

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)=0. \tag{78}$$

Итак, *мы получим диференциальное уравнение ортогональных траекторий к кривым C, заменяя y' через $-\frac{1}{y'}$ в диференциальном уравнении кривых C.*

Чтобы получить диференциальное уравнение кривых C, нужно исключить a из двух уравнений $\Phi=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0$; следовательно, *чтобы получить диференциальное уравнение ортогональных траекторий, нужно исключить a из двух соотношений:* $\Phi=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}y'-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0$.

Рассмотрим, например, семейство кривых второго порядка, представляемых уравнением:

$$y^2+3x^2-2ax=0,$$

где a — переменный параметр. Применяя предыдущее правило, мы приходим к однородному диференциальному уравнению

$$(y^2-3x^2)y'+2xy=0.$$

Полагая в нем $y=ux$ и разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x}+\frac{3\,du}{u}-\frac{du}{u+1}-\frac{du}{u-1}=0;$$

отсюда имеем:

$$xu^3=C(u^2-1), \quad \text{или} \quad y^3=C(y^2-x^2).$$

Следовательно, ортогональные траектории суть кривые третьего порядка с двойною точкою в начале координат.

Как более общий случай рассмотрим поверхность S, координаты x, y, z точек которой выражены в функции двух переменных параметров u, v:

$$x=f(u,v), \quad y=\varphi(u,v), \quad z=\psi(u,v).$$

Из этих формул выводим:

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv, \quad dy=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \quad dz=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv.$$

Всякому значению отношения $\frac{dv}{du}$ соответствует некоторая касательная к поверхности, проходящая через точку (u, v). Если мы будем искать такие кривые на этой поверхности, чтобы касательная к каждой из этих кривых в любой ее точке зависела только от положения этой точки на поверхности, то мы и здесь придем к интегрированию диференциального уравнения первого порядка

$$F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)=0; \tag{79}$$

и обратно, всякое уравнение такого вида устанавливает зависимость между точками кривой, расположенной на поверхности S, и касательными в этих точках.

Определим, например, кривые, пересекающие под постоянным углом V семейство данных кривых, расположенных на поверхности. Если две кривые C, C' проходят через одну точку (u, v) и пересекаются под постоянным углом V, то мы имеем общую формулу (т. I, § 252):

$$\cos V = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}, \tag{80}$$

где E, F, G имеют обычное значение, du, dv обозначают диференциалы, соответствующие перемещению по кривой C, а диференциалы δu, δv соответствуют перемещению по кривой C'. Если кривые C' даны, то $\frac{\delta v}{\delta u}$ есть известная функция от u и v, $\frac{\delta v}{\delta u} = \pi(u, v)$, и, заменяя в предыдущем соотношении (80) $\frac{\delta v}{\delta u}$ через $\pi(u, v)$, мы получим соотношение вида: $F\left(u, v, \frac{du}{dv}\right) = 0$, представляющее диференциальное уравнение искомых траекторий.

Рассмотрим, например, траектории, пересекающие под постоянным углом меридианы поверхности вращения

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = f(\rho).$$

Мы имеем здесь:

$$u = \rho, \ v = \omega, \ E = 1 + f'^2(\rho), \ F = 0, \ G = \rho^2, \ \delta v = 0;$$

уравнение (80) обращается в

$$\cos V = \frac{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\,d\rho}{\sqrt{[1 + f'^2(\rho)]\,d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2}}.$$

Решая последнее уравнение относительно $d\omega$, находим:

$$d\omega = \operatorname{tg} V \frac{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\,d\rho}{\rho},$$

откуда ω получается квадратурою.

III. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

379. Интегрирование уравнения $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$. Пусть нам дано диференциальное уравнение n-го порядка

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{81}$$

где $y^{(i)} = \frac{d^iy}{dx^i}$; пользуясь этим уравнением и теми, которые получаются из него последовательными диференцированиями, мы можем выразить все производные, начиная с $y^{(n)}$, через x, y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n-1)}$. Следовательно, если для частного значения x_0 независимого переменного мы зададим соответствующие значения y_0, y_0', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ искомой функции y и ее $n-1$ первых производных, то мы можем вычислить таким способом значения всех высших производных неизвестной функции при значении x_0 переменного x и составить целый ряд

$$y_0+(x-x_0)y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}y_0''+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\ldots n}y_0^{(n)}+\ldots, \tag{82}$$

сумма которого представляет искомый интеграл, если только этот интеграл разлагается по формуле Тейлора. До работ Коши сходимость этого ряда принимали без доказательства *. Несколько далее мы увидим, что это действительно будет так при некоторых условиях, которые мы точно установим. Здесь же мы укажем только несколько простых типов диференциальных уравнений n-го порядка, интегрирование которых может быть приведено к квадратурам или к интегрированию уравнения порядка ниже, чем n.

Диференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x) \tag{83}$$

представляет самый простой тип диференциального уравнения n-го порядка. Оно интегрируется n последовательными квадратурами; в самом деле, обозначая через x_0 произвольное постоянное число имеем последовательно:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C_0,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C_0(x-x_0)+C_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+$$

$$+\frac{C_0(x-x_0)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+\frac{C_1(x-x_0)^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+\ldots+C_{n-1},$$

где C_{n-1}, C_{n-2}, $\ldots$, C_0 суть n произвольных постоянных, равных соответственно значениям интеграла и его $n-1$ первых производных при $x=x_0$.

* См., например, „Traité" Лакруа.

Выражение

$$Y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

содержит n последовательных квадратур; но его можно заменить выражением, содержащим только одну квадратуру, выполняемую над функциею, в которую переменное x входит как параметр. Ниже это предложение будет выведено как следствие из общей теории (§ 401), но его нетрудно проверить и непосредственно. В самом деле, положим:

$$Y_1=\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)\,dz; \tag{84}$$

применяя известные правила диференцирования определенных интегралов, получим отсюда последовательно:

$$\frac{dY_1}{dx}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-2)}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-2}f(z)\,dz, \ \ldots, \ \frac{d^{n-1}Y_1}{dx^{n-1}}=\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz,$$

и, наконец, $\frac{d^nY_1}{dx^n}=f(x)$. Следовательно, функция Y_1 есть интеграл уравнения (83). Сверх того, функции Y и Y_1 вместе со своими $n-1$ первыми производными равны нулю при $x=x_0$. Следовательно, обе они делятся на $(x-x_0)^n$; но их разность, представляющая многочлен не выше $(n-1)$-й степени, может делиться на $(x-x_0)^n$ только в том случае, если она тождественно равна нулю; следовательно, $Y_1=Y$.

Если уравнение $F\left(x, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$ может быть разрешено относительно производной $\frac{d^ny}{dx^n}$, дело сводится к вышеописанному процессу вычисления. Но может случиться, что разрешение этого уравнения относительно $\frac{d^ny}{dx^n}$ практически невозможно, а между тем, x и $\frac{d^ny}{dx^n}$ можно выразить в функции вспомогательного параметра t следующим образом:

$$x=g(t), \qquad \frac{d^ny}{dx^n}=h(t).$$

В этом случае мы можем выразить все производные $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}, \ldots$ и самую функцию y через тот же параметр t в квадратурах. Действительно, мы имеем:

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=h(t)g'(t)\,dt,$$

и, следовательно,

$$y^{(n-1)}=\int h(t)g'(t)\,dt+C.$$

Вообще, зная $y^{(p)}$ в функции t, мы получим $y^{(p-1)}$ по формуле:

$$y^{(p-1)} = \int y^{(p)} g'(t) dt.$$

Возьмем, в частности, интеграл Y, обращающийся в нуль вместе со своими $n-1$ первыми производными при $x = x_0$. Этот интеграл имеет вид:

$$Y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z) dz,$$

причем мы подставили вместо $\frac{d^n y}{dx^n}$ его выражение $f(x)$ из заданного диференциального уравнения $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$.

Пусть t_0 — значение параметра t, соответствующее значению x_0 независимого переменного; если в предыдущей формуле мы сделаем замену переменного $z = g(u)$, мы получим:

$$Y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} [g(t) - g(u)]^{n-1} g'(u) h(u)\, du,$$

так как $f[g(u)]$, очевидно, равно $h(u)$.

Легко проверить непосредственным вычислением, аналогичным предыдущему что все производные от Y по x до $(n-1)$-го порядка включительно, обращаются в нуль при $t = t_0$, а производная порядка n равна $h(t)$.

Примеры. 1. Если уравнение между x и $\frac{d^n y}{dx^n}$ алгебраическое рода нуль, то за функции $g(t)$ и $h(t)$ можно взять рациональные функции, и мы получим общий интеграл, интегрируя рациональную функцию.

2. Когда заданное уравнение разрешено относительно x, можно положить $h(t) = t$, и вычисление определенного интеграла

$$\int_{t_0}^{t} [g(t) - g(\alpha)]^{n-1} g'(\alpha) \alpha\, d\alpha$$

сводится интеграцией по частям к вычислению интеграла:

$$\int_{t_0}^{t} [g(t) - g(\alpha)]^{n}\, dt.$$

380. Различные случаи понижения порядка. Вот наиболее часто встречающиеся случаи, когда можно понизить порядок уравнения:

1. *Уравнение не содержит неизвестной функции.* Уравнение вида:

$$F\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{85}$$

непосредственно приводится к уравнению $(n-k)$-го порядка подстановкою $\frac{d^ky}{dx^k}=u$. Если можно проинтегрировать получающееся вспомогательное уравнение для u, то затем мы получим y квадратурами, как это было указано в предыдущем параграфе.

Иногда бывает возможно выразить x и $u=\frac{d^ky}{dx^k}$ через вспомогательный параметр t формулами:

$$x=f(t),\ \frac{d^ky}{dx^k}=\varphi(t),$$

причем функции f и φ содержат также произвольные постоянные, введенные при интегрировании уравнения относительно u. Мы можем в этом случае выразить и y через t квадратурами. Мы имеем сначала:

$$dy^{(k-1)}=\varphi(t)\,dx=\varphi(t)f'(t)\,dt;$$

отсюда получим $y^{(k-1)}$; также вычислим последовательно $y^{(k-2)},\ldots y'$ до y.

2. *Уравнение не содержит независимого переменного.* Если мы имеем уравнение вида:

$$F\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0, \tag{86}$$

то его можно было бы привести к предыдущему виду, приняв y за независимое переменное, а x — за неизвестную функцию; новое уравнение не содержало бы x, и взяв $\frac{dx}{dy}$ за новое неизвестное, мы пришли бы к уравнению $(n-1)$-го порядка. Но можно выполнить эти оба преобразования сразу, приняв y за независимое переменное и $\frac{dy}{dx}=p$ за неизвестную функцию. В самом деле, мы имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)p=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

и т. д. Вообще, $\frac{d^ry}{dx^r}$ выразится через p и его $r-1$ производных по y. Следовательно, мы действительно получим диференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

Предположим, что мы проинтегрировали это вспомогательное уравнение $(n-1)$-го порядка; чтобы иметь дело с самым общим случаем, предположим также, что переменные y и p выражены формулами $y=f(t)$, $p=\varphi(t)$ через вспомогательное переменное t, которое может быть равно и одному из них, причем функции f и φ зависят, кроме того, от произвольных постоянных. Из соотношения $dy = p\,dx$ будем иметь $f'(t)\,dt = \varphi(t)\,dx$, так что x, в свою очередь, получится одной квадратурою:

$$x = \int \frac{f'(t)}{\varphi(t)}\,dt.$$

Этот метод особенно удобен в применении к уравнению второго порядка:

$$F(y, y', y'') = 0,$$

которое, таким образом, приводится к уравнению первого порядка:

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Пусть будет $p = \varphi(y, C)$ общий интеграл этого уравнения первого порядка. Из соотношения $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C)$ мы получим x квадратурою:

$$x = x_0 + \int \frac{dy}{\varphi(y, C)}.$$

Если общий интеграл уравнения относительно p разрешен относительно y и может быть представлен в виде $y = f(p, C)$, то мы имеем также

$$f'(p)\,dp = p\,dx$$

и, следовательно,

$$x = x_0 + \int \frac{f'(p)dp}{p}.$$

Таким образом координаты точек интегральной кривой будут выражены через вспомогательный параметр p, представляющий угловой коэфициент касательной к этой кривой.

3. *Уравнение, однородное относительно* $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Если m есть степень однородности уравнения, то последнее можно представить в виде:

$$y^m F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0; \tag{87}$$

мы видим, что, если y_1 есть его частный интеграл, то будет интегралом и λy_1, каково бы ни было постоянное λ. Полагая $y = e^{\int u\,dx}$, можно понизить порядок этого уравнения на единицу; в самом деле, мы имеем:

$$y' = ue^{\int u\,dx}, \quad y'' = e^{\int u\,dx}(u' + u^2), \ldots,$$

и, вообще, $y^{(r)}$ равно произведению $e^{\int u\,dx}$ на целую функцию от u, u', u'', ..., $u^{(r-1)}$. Таким образом после предыдущей подстановки рассматриваемое уравнение обращается в уравнение $(n-1)$-го порядка относительно u.

4. *Уравнение, однородное относительно* $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots d^ny$. Такое уравнение не меняется при изменении x в Cx и y в Cy,

где C — какое-нибудь постоянное. Предположим, что мы взяли $\frac{y}{x}=u$ за новую неизвестную функцию и $t=\operatorname{Log} x$ за новое независимое переменное. Полученное диференциальное уравнение не должно изменяться, когда мы заменим t через $t+\operatorname{Log} C$, не меняя u: следовательно, оно не должно явно содержать переменного t. В самом деле, наше уравнение не должно меняться от умножения $x, y, dx, dy, \ldots, d^n y$ на C, следовательно, от умножения $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ соответственно на $1, C^{-1}, C^{-2}, \ldots \ldots, C^{-n+1}$. Отсюда легко видеть, что рассматриваемое уравнение должно иметь вид:

$$F\left(\frac{y}{x}, y', xy'', x^2y''', \ldots, x^{n-1}y^{(n)}\right)=0.$$

Если мы положим $y=ux$, то вообще будем иметь:

$$y^{(p)}=xu^{(p)}+pu^{(p-1)},$$

и произведения $xy'', x^2y''', \ldots$ выразятся через $u, xu', x^2u'', \ldots, x^n u^{(n)}$, так что наше уравнение примет вид:

$$\Phi(u, xu', x^2u'', \ldots, x^n u^{(n)})=0.$$

Если мы затем положим $x=e^t$, то все произведения $xu', x^2u'', \ldots$ выразятся в функции от $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$, и мы, действительно, придем к уравнению, не содержащему переменного t *.

Примечание. Применяя различные, указанные выше способы приведения, мы иногда можем получить некоторые интегралы вспомогательного уравнения, хотя и не можем найти его общий интеграл. Предыдущие методы не теряют своего значения и в этом случае; они позволяют получить в квадратурах интегралы рассматриваемого уравнения; но в этом случае найденные интегралы будут содержать менее, чем n произвольных постоянных.

381. Приложения. 1. Уравнения вида $y''=f(y)$ входят в один из предыдущих типов, но их можно интегрировать и непосредственно; в самом деле, умножая обе части на $2y'$, мы получим после первого интегрирования:

$$y'^2=C+\int_{y_0}^{y} 2f(y)\,dy=F(y)+C,$$

и отсюда найдем x квадратурою:

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{F(y)+C}}+C'.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$y''=a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3,$$

---

* Можно также поступать иначе, взяв за переменные u и $v=xu'$. В самом деле, мы получим $\frac{dv}{dx}=u'+xu''$ и, следовательно, $x^2u''=\frac{dv}{pu}u'x-xu'$, или $x^2u''=v\frac{dv}{du}-v$.

Продолжая применять тот же прием, мы придем к диференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка между u и v.

где по крайней мере один из коэфициентов a_0, a_1 не равен нулю. Умножая обе части на $2y$ и интегрируя, получим сначала:

$$y'^2 = \frac{a_0}{2} y^4 + \frac{2}{3} a_1 y^3 + a_2 y^2 + 2a_3 y + C.$$

Общий интеграл этого нового уравнения есть эллиптическая функция (§ 372), которая, в частности, может приводиться к простой периодической функции или даже к рациональной функции, если постоянное C выбрано таким образом, чтобы многочлен, стоящий в правой части, не был первым со своею производною.

2. Иногда удается применить последовательно несколько методов приведения к одному и тому же уравнению. Рассмотрим, например, уравнение четвертого порядка $5(y''')^2 - 3y''y^{IV} = 0$. Если мы сначала положим $y'' = u$, то получим уравнение второго порядка $5u'^2 - 3uu'' = 0$, однородное относительно u, u', u''. Положим, далее, $u = e^{\int v\,dx}$; мы будем иметь $3v' = 2v^2$, или $\frac{v'}{v^2} = \frac{2}{3}$, отсюда

$$v = -\frac{3}{2}\frac{1}{x+a},$$

где a — произвольное постоянное. Затем последовательно получим:

$$u = y'' = b(x+a)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y' = -2b(x+a)^{-\frac{1}{2}} + c,$$

$$y = -4b(x+a)^{\frac{1}{2}} + cx + d,$$

где b, c, d — постоянные. Таким образом мы пришли к общему уравнению парабол (§ 352).

3. Определим плоские кривые, радиус кривизны которых пропорционален отрезку нормали, заключающемуся между ее основанием M и точкою пересечения N этой нормали с данною прямою. Примем данную прямую за ось Ox; тогда диференциальное уравнение задачи будет:

$$1 + y'^2 + \mu y y'' = 0, \tag{88}$$

причем μ равно отношению радиуса кривизны к длине MN, взятому со знаками плюс или минус, в зависимости от того, совпадает ли направление от M к центру кривизны с направлением MN или противоположно ему. Чтобы проинтегрировать уравнение (88), положим $y' = p$; уравнение примет вид:

$$1 + p^2 + \mu y p \frac{dp}{dy} = 0,$$

или

$$\frac{dy}{y} + \frac{\mu}{2}\frac{2p\,dp}{1+p^2} = 0;$$

после первого интегрирования получим:

$$y = C(1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}},$$

где C — произвольное постоянное. Затем из соотношения $dy = p\,dx$ будем иметь:

$$-\mu C p(1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}-1}\,dp = p\,dx,$$

или

$$x = x_0 - \mu C \int (1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}-1}\,dp.$$

Положим $p = \operatorname{tg} \alpha$; тогда все кривые, получающиеся при изменении постоянных C и x_0, получатся перемещением или преобразованием подобия из кривой Г, представляемой уравнениями:

$$x = \mu \int_0^\alpha \cos^\mu \alpha \, d\alpha, \qquad y = \cos^\mu \alpha. \tag{Г}$$

По этим уравнениям нетрудно составить представление о форме кривой при всяком значении количества μ. Если μ — целое, то квадратуру можно выполнить. Если μ — целое положительное, то кривая не имеет ветвей, простирающихся в бесконечность, но она может иметь два существенно различных вида в зависимости от четности или нечетности числа μ. Если μ — число нечетное, то x есть периодическая функция от α (т. I, § 117), а кривая Г есть выпуклая замкнутая алгебраическая кривая. Если μ — четное, то x возрастает на постоянное количество, отличное от нуля, когда α возрастает на 2π; y всегда положительно. Мы имеем периодическую кривую с бесконечным множеством точек возврата, лежащих на оси Ox. По виду кривая похожа на циклоиду; она обращается в последнюю при $\mu = 2$.

Примечание. В предыдущих примерах мы всегда старались свести интегрирование диференциального уравнения к интегрированию уравнения низшего порядка. Как это ни странно на первый взгляд, но и обратный прием может иногда привести к цели. Рассмотрим, например, диференциальное уравнение первого порядка $f(x, y, y') = 0$; диференцируя его и комбинируя полученное уравнение с данным, мы, очевидно, получим бесконечное множество диференциальных уравнений второго порядка, которые имеют интегралами все интегралы рассматриваемого уравнения. Предположим, что, поступая таким образом, мы можем найти уравнение второго порядка, которое можно проинтегрировать; пусть будет $y = \varphi(x, C, C')$ его общий интеграл. Все интегралы рассматриваемого уравнения первого порядка заключаются в этой формуле, но, так как они зависят только от одного произвольного постоянного, то между постоянными C и C' должно существовать некоторое соотношение. Чтобы его получить, достаточно выразить, что функция $\varphi(x, C, C')$ удовлетворяет предложенному уравнению первого порядка; таким образом мы придем к некоторому определенному соотношению между постоянными C, C'.

Самый интересный пример этого приема дан Монжем (Monge), который применил его к нахождению линий кривизны эллипсоида. Пусть будут $2a$, $2b$, $2c$ оси эллипсоида; проекции линий кривизны на плоскость, проходящую через большую и среднюю ось, определяются диференциальным уравнением:

$$\left.\begin{aligned} &A\,xyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0, \\ &A = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad B = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Диференцируя уравнение (89) и исключая затем количество $x^2 - Ay^2 - B$, мы получим диференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0;$$

отсюда последовательно находим:

$$yy' = Cx \text{ и } y^2 = Cx^2 + C'.$$

Мы получим общий интеграл уравнения (89), установив между C и C' соотношение $ACC' + C' + BC = 0$, в чем можно убедиться, заменяя в левой части уравнения y^2 через $Cx^2 + C'$ *.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Найти диференциальное уравнение кривых второго порядка, исходя из их общего уравнения в нерешенном виде и исключая коэфициенты из этого уравнения и из уравнений, полученных из него посредством пятикратного диференцирования.

2. Проинтегрировать диференциальные уравнения:

$$(y'^2 - y)^2 = y(y'^2 + y)^2, \quad y(1 + 2y'^2) + xy' = 0,$$
$$(1 + y'^2)\,y'y''' = (3y'^2 - 1)\,y''^2, \quad (x^2 + y^2)\,y'' - yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0,$$
$$x^2y'^2 + 2xy\,(y - 2a)\,y' - 2y^2(y - 2a) = 0, \quad xyy'' + xy'^2 - yy' = 0,$$
$$y'^3 + 3y'^2 + y^6 - 4 = 0.$$

---

* Уравнение (89) также легко интегрируется обычными приемами. В самом деле, достаточно положить $x^2 = X$, $y^2 = Y$, умножив предварительно все члены уравнения на $xy\,dx^2$, чтобы притти к уравнению Клеро.

Лагранж и Дарбу употребляли аналогичные искусственные приемы для интегрирования уравнения Эйлера (см. Бертран (Bertrand), Traité de Calcul intégral, стр. 569—572). Сюда же примыкает теорема Аппеля (Appel), *Comptes rendus*, 12 ноября 1888).

3. Применить общие методы понижения порядка к интегрированию диференциального уравнения конических сечений и к уравнению $y''y''' = ky^{IV2}$.

4. Найти те интегралы уравнения $y'' = 2y^2(y-1)$, которые представляют рациональные функции или простые периодические функции переменного.

5. Подобные сети. Семейство окружностей задается тремя функциями $a = f(\alpha)$, $b = g(\alpha)$, $k = h(\alpha)$, представляющими координаты центра и радиус через параметр α; два семейства (a, b, k) и (a_1, b_1, k_1) называются подобными, если выполняются условия:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{k_1}{k}. \tag{α}$$

Диференциальные ур внения ортогональных траекторий таких двух семейств совпадают между собою (§ 368, приложение).

Пусть Γ, Γ_1 — кривые центров окружностей этих двух семейств; первое условие (α) выражает параллелизм касательных в соответственных точках кривых Γ и Γ_1. Для заданного семейства (a_1, b_1, k_1) можно найти все ему подобные семейства, задав произвольно кривую Γ_1 и установив точечное соответствие между Γ, Γ_1 посредством параллелизма касательных, второе же условие (α) определит тогда радиус k_1.

Среди семейств, подобных данному, всегда имеется бесконечное множество, образующее семейство окружностей, ортогональных к данной окружности. В самом деле, если к двум уравнениям (α) прибавить условие $a_1^2 + b_1^2 - k_1^2 = k^2$, выражающее ортогональность окружности (a_1, b_1, k_1) к окружности $(0, 0, k)$, мы получаем систему трех уравнений для определения (a_1, b_1, k_1).

[См. диссертацию Rouquet, Тулуза 1882].

6. Даны треугольник ABC и кривая Γ, лежащая в плоскости этого треугольника; пусть будут a, b, c точки пересечения сторон треугольника с касательною к кривой Γ в точке m. Найти кривые Γ, для которых ангармоническое отношение четырех точек m, a, b, c остается постоянным, когда точка m перемещается по одной из этих кривых.

Доказать, что при этом ангармоническое отношение касательной в точке m и прямых mA, mB, mC также постоянно.

7. Даны точка O и прямая D; найти такую кривую, чтобы отрезок касательной MN, заключающийся между точкою прикосновения M и точкою N, в которой касательная пересекает прямую D, был виден из точки O под постоянным углом.

8. Найти проекции на плоскость xOy кривых, лежащих на параболоиде $2az = mx^2 + y^2$, касательные к которым образуют с осью Oz данный постоянный угол γ.

9. Найти ортогональные траектории семейств кривых, представляемых одним из следующих уравнений:

$$y^2(2a - x) = x^3, \quad y^2 + mx^2 - 2ax = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2xy, \quad x^2 + y^2 = a^2 \log\left(\frac{y}{x}\right),$$

где a — переменный параметр.

10. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение $\theta(x, y) = C$ представляло семейство параллельных кривых, есть

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = \varphi(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ есть произвольная функция от θ.

[Выразить, что ортогональные траектории суть прямые линии].

11. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$ представляли семейство параллельных кривых, и показать, что в этом случае интегрирование уравнения можно выполнить квадратурою.

12*. Составить общее уравнение кривых второго порядка, пересекающих ортогонально данную кривую второго порядка C в четырех общих точках. Эти кривые второго порядка образуют, вообще, несколько различных семейств; найти ортогональные траектории каждого из этих семейств. Вывести отсюда все ортогональные системы, у которых оба семейства состоят из кривых второго порядка.

[Если $f=0$, $\varphi=0$ суть уравнения двух кривых второго порядка, пересекающихся ортогонально в четырех общих точках, то должно иметь место тождество вида:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\lambda f+\mu\varphi,$$

где λ и μ — постоянные коэфициенты].

13. Найти условие, при котором интегральные кривые диференциального уравнения $y'=f(x,y)$ составляют семейство изотермических линий, и показать, что в этом случае можно получить интегрирующий множитель.

[Софус Ли.]

14. Найти такую плоскую кривую C, чтобы треугольник, имеющий одну вершину в произвольной точке M этой кривой, другую в соответствующем центре кривизны и третью — в основании ординаты точки M, имел постоянную площадь. Показать, что одна из координат выражается в функции другой квадратурою, и что можно, не интегрируя уравнения, составить представление о форме кривой. [Взять прямоугольные оси координат.]

15. Пусть будет M некоторая точка данной плоской кривой C, P — центр кривизны кривой, соответствующий этой точке, MT — касательная. Через точку T, в которой касательная пересекает ось Ox, проведена прямая, параллельная оси Oy, пересекающая нормаль MP в некоторой точке N. Определить кривую C таким образом, чтобы отношение MP к MN было постоянным.

16. Найти такие поверхности вращения, чтобы в каждой их точке радиусы кривизны главных сечений были направлены в одну сторону и имели постоянную сумму a. Какой вид имеет меридиан поверхности?

17*. Показать, что общий интеграл уравнения Эйлера может быть представлен в виде:

$$\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2-a_0(x+y)^2-a_1(x+y)-a_2=C,$$

где $X=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.

[Лагранж.]

[Достаточно решить уравнение (58) (§ 375) относительно постоянного; после нескольких преобразований мы придем к требуемому виду.]

18. Асимптотические линии поверхности, представляемой уравнениями:

$$x=A(u-a)^m(v-a)^n,$$
$$y=B(u-b)^m(v-b)^n,$$
$$z=C(u-c)^m(v-c)^n,$$

получаются интегрированием уравнения Эйлера, если $m=n$ или $m+n=1$. Вывести отсюда асимптотические линии *тетраэдральной* поверхности

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1.$$

19. Найти условия, при которых диференциальное уравнение

$$dy-f(x,y)\,dx=0$$

имеет интегрирующий множитель вида XY, где X зависит только от x, и Y — только от y, и показать, как найти этот множитель, если он существует.

20*. Дана плоская кривая C. Рассмотрим середину m хорды MM', соединяющей две произвольные точки M, M' этой кривой. Если точка M остается неподвижною, а точка M' описывает кривую C, то точка m описывает кривую c, подобную C. Показать, что кривые c удовлетворяют диференциальному уравнению первого порядка, которое интегрируется, как и уравнение Клеро, заменою в нем y' произвольным постоянным. (*Bulletin de la Société mathématique*, т. XXIII, стр. 68).

21. Проинтегрировать диференциальное уравнение

$$F\left(y'', y' - xy'', y - xy' + \frac{x^2}{2} y''\right) = 0.$$

Заметим, что y''' входит множителем в производную от левой части. Существуют аналогичные уравнения любого порядка [см. Диксон (Dixon), *Philosophical Transactions*, т. CLXXXVI, часть I; Раффи (Raffy), *Bulletin de la Société mathématique*, т. XXV, стр. 71; Буницкий, *Bulletin des Sciences mathématiques*, т. XXXI, 2-я серия, стр. 250].

22*. Всякое уравнение вида: $y''^2 + y'^2 = f(y' + y)$, допускает, вообще говоря, бесконечное множество особых интегралов, определяемых некоторым диференциальным уравнением первого порядка.

[*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4-я серия, т. XX, октябрь 1920].

ГЛАВА XIX.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

Первые строгие методы доказательств существования интегралов системы диференциальных уравнений и уравнений с частными производными принадлежат Коши. Знаменитый математик дал для аналитических уравнений тип приема доказательства, основанного на методе сравнения, названном им *исчислением пределов*. Ему принадлежит также и другой метод, в котором не предполагается, что данные уравнения — аналитические; о нем мы будем говорить далее.

I. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ.

382. Общие положения. Основная идея *исчисления пределов* состоит в применении усиливающих функций, рассуждения здесь очень похожи на те, которыми мы пользовались при доказательстве существования неявных функций (т. I, § 184). Так как всякая аналитическая функция имеет бесконечное множество усиливающих функций, то понятно, что этот метод можно видоизменять весьма различным образом. Простота доказательства зависит в значительной мере от выбора усиливающих функций. После работ Коши его доказательства были усовершенствованы и распространены на более общие случаи Брио и Буке, Вейерштрассом, Дарбу, Мерей, Рикье (Riquier), Ковалевскою и многими другими. И теперь еще постоянно пользуются этим методом при исследовании аналогичных вопросов, касающихся уравнений в частных производных, при разнообразных начальных условиях.

383. Существование интегралов системы диференциальных уравнений Рассмотрим сначала одно уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

правая часть которого голоморфна вблизи системы значений x_0, y_0. Докажем, что *это уравнение имеет интеграл $y(x)$, голоморфный в области точки x_0 и обращающийся в y_0 при $x=x_0$*.

Предположим для сокращения формул, что $x_0=y_0=0$; это равносильно условию обозначать $x-x_0$ и $y-y_0$ через x и y. Если данное уравнение имеет интеграл, голоморфный вблизи точки $x=0$ и обращающийся в нуль вместе с x, то, чтобы составить разложение в целый ряд этого интеграла, нужно только знать значения всех высших производных этого интеграла при $x=0$.

4*

Прежде всего из уравнения (1) мы имеем $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(0, 0)$ с другой стороны, из уравнений, которые мы получим, повторно диференцируя уравнение (1), мы можем вычислить значение производной любого порядка в функции от x, y и производных низшего порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Полагая в этих соотношениях $x = y = 0$, мы выразим последовательно начальные значения высших производных

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0, \ldots$$

искомого интеграла через коэфициенты разложения функции $f(x, y)$ по степеням x и y. До работ Коши принимали без доказательства, что полученный таким образом целый ряд

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots \tag{3}$$

будет сходящимся при всех значениях x, близких к нулю.

Чтобы доказать это существенное предложение со всею строгостью, заметим, что действия, помощью которых вычисляются коэфициенты ряда (3), состоят исключительно только из сложений и умножений, так что значение, получающееся для $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0$, можно представить в виде:

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 = P_n(a_{00}, a_{01}, a_{10}, \ldots, a_{0n}, \ldots, a_{n0}), \tag{4}$$

где P_n есть многочлен с целыми положительными коэфициентами, а a_{ik} обозначает коэфициент при $x^i y^k$ в разложении $f(x, y)$. Следовательно, если мы заменим функцию $f(x, y)$ усиливающею функциею $\varphi(x, Y)$ и будем искать голоморфный интеграл вспомогательного уравнения

$$\frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y), \tag{5}$$

обращающийся в нуль вместе с x, то коэфициенты ряда, представляющего разложение функции Y, будут положительными числами, соответственно бо́льшими модулей коэфициентов того же порядка ряда (3). Если ряд, представляющий Y, — сходящийся в некоторой области, то, тем более, будет сходящимся и ряд (3). Но ряд для Y будет, наверное, сходящимся, если вспомогательное уравнение имеет голоморфный интеграл, обращающийся в нуль при $x = 0$.

Предположим, что функция $f(x, y)$ голоморфна, когда значения x и y остаются внутри кругов C, C', описанных в плоскостях обоих переменных из начала координат радиусами a и b, и непрерывна на самих окружностях C, C'; пусть будет M верхняя граница модуля $|f(x, y)|$ в этой области. За усиливающую функцию можно взять выражение

$$\varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{Y}{b}\right)},$$

и вспомогательное уравнение (5), по умножении обеих частей на $\left(1 - \frac{Y}{b}\right)$, можно представить в виде:

$$\left(1 - \frac{Y}{b}\right)\frac{dY}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{a}}. \tag{6}$$

Мы можем непосредственно убедиться, что это уравнение имеет голоморфный интеграл, обращающийся в нуль при $x = 0$; в самом деле, так как переменные разделены, то мы получаем из этого уравнения:

$$Y - \frac{Y^2}{2b} = -aM \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right). \tag{7}$$

Постоянное, которое нужно прибавить к правой части, чтобы иметь общий интеграл уравнения (6), здесь равно нулю, если мы примем для логарифма значение, равное нулю при $x = 0$. Решая уравнение (7) относительно Y, получим:

$$Y = b - b\sqrt{1 + 2a\frac{M}{b}\operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}; \tag{8}$$

если мы примем для корня значение, обращающееся в единицу при $x = 0$, то формула (8), действительно, представит интеграл уравнения (6), равный нулю при $x = 0$. Эта функция Y голоморфна в области точки $x = 0$; в самом деле, функция, стоящая под корнем, голоморфна внутри круга C с радиусом a, и обращается в нуль при

$$x = \rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right). \tag{9}$$

Если переменное x остается внутри круга C_ρ, описанного из начала координат радиусом, равным ρ, то модуль количества $\frac{2aM}{b}\operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ остается меньшим единицы*, и потому корень есть функция от x, голоморфная в этом круге C_ρ. Следовательно, ряд, представляющий разложение функции Y, — сходящийся в круге с радиусом ρ, и это тем более верно по отношению к первому полученному ряду (3).

Из формулы (3) легко видеть, что все коэфициенты разложения Y действительны и положительны, что мы, впрочем, знали уже заранее. Следовательно, если мы дадим x какое-нибудь значение, модуль которого

---

* В самом деле, все коэфициенты разложения этой функции по степеням x действительны и отрицательны. Следовательно, ее модуль при $|x| < \rho$ меньше модуля того значения, которое она принимает при $x = \rho$, т. е. меньше единицы.

меньше ρ, то модуль значения Y будет меньше суммы ряда, получающегося при замене x через ρ. Таким образом во всякой точке, взятой в круге C_ρ, мы имеем $|Y|<b$, а следовательно, и $|y|<b$. Следовательно, если мы заменим в $f(x, y)$ количество y суммою ряда (3), то результат подстановки будет некоторою функциею $\Phi(x)$, голоморфною в круге с радиусом ρ. Из способа получения коэфициентов ряда (3) следует, что две функции $\Phi(x)$ и $\frac{dy}{dx}$ вместе со всеми своими производными равны между собою при $x=0$. Следовательно, они тождественны между собою, и голоморфная функция y удовлетворяет всем требуемым условиям.

Чтобы получить коэфициенты ряда (3), можно непосредственно подставить в уравнение (1) вместо y целый ряд $y=C_1x+C_2x^2+\ldots$ и выразить, что обе части уравнения между собою тождественны. Коэфициент при x^{n-1} в $\frac{dy}{dx}$ есть nC_n, а коэфициент при x^{n-1} в правой части зависит, очевидно, только от $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и от коэфициентов a_{ik}. Таким образом нетрудно проверить, что коэфициенты C_n вычисляются только при помощи сложения и умножения.

Этот метод легко распространить на систему из любого числа уравнений первого порядка. Пусть будет

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

система диференциальных уравнений, в которых функции f_i голоморфны вблизи значений $x_0, (y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$. *Эти уравнения имеют систему интегралов, голоморфных в области точки x_0 и обращающихся при $x=x_0$ соответственно в $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$.*

Повторяя рассуждения, вполне аналогичные предыдущим, мы приведем доказательство этой теоремы к доказательству предложения, что система вспомогательных уравнений

$$\frac{dY_1}{dx}=\frac{dY_2}{dx}=\ldots=\frac{dY_n}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y_1}{b}\right)\ldots\left(1-\frac{Y_n}{b}\right)} \tag{11}$$

имеет систему интегралов, голоморфных вблизи точки $x=0$ и обращающихся в нуль при $x=0$; при этом мы предполагаем, что функции f_i остаются голоморфными, и $|f_i|<M$, пока $|x-x_0|\leqslant a$, $|y_i-(y_i)_0|\leqslant b$. Так как эти интегралы имеют одинаковые производные и все обращаются в нуль при $x=0$, то они должны быть тождественны; поэтому достаточно рассмотреть только одно уравнение

$$\frac{dY}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y}{b}\right)^n},$$

где опять можно разделить переменные. Это уравнение имеет интеграл

$$Y=b-b\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Ma}{b}\operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right)},$$

голоморфный в круге с радиусом $\rho = a\left(1 - e^{\frac{-b}{(n+1)Ma}}\right)$ и равный нулю при $x=0$. Следовательно, интегралы системы (10) голоморфны в том же круге.

Одно уравнение n-го порядка

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, \ y, \ \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{12}$$

можно заменить равносильною системою n уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, \ y, \ y_1, \ldots, y_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

вводя в качестве вспомогательных неизвестных производные от y до $(n-1)$-го порядка. Отсюда мы получаем общую теорему:

Уравнение (12) *имеет интеграл, голоморфный в области точки* x_0 *и притом такой, что этот интеграл и его* $(n-1)$ *первых производных принимают при* $x = x_0$ *произвольно заданные значения* $y_0, \ y_0', \ldots$ $\ldots, y_0^{(n-1)}$, *если только функция* $F(x, \ y, \ y', \ldots, y^{(n-1)})$ *голоморфна вблизи системы значений* $x_0, \ y_0, \ y_0', \ \ldots, \ y_0^{(n-1)}$.

Из предыдущего доказательства следует, что уравнение (1) не может иметь более одного голоморфного интеграла, принимающего значение y_0 при $x = x_0$. Но отсюда пока еще нельзя заключить, что не существует неголоморфного интеграла, удовлетворяющего тому же условию*. Последнее предложение будет доказано ниже со всею строгостью (§ 387).

384. Системы линейных уравнений. Впоследствии мы получим другим методом большее значение для нижней границы радиуса сходимости рядов, представляющих интегралы (§ 390). Но при некоторых частных видах функции f_i иногда можно, пользуясь тем же исчислением пределов, применить более выгодные усиливающие функции.

В частности, это имеет место в том очень важном случае, когда данные уравнения — линейные.

Пусть будет:

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n + b_i \quad (i = 1, \ 2, \ldots, \ n) \tag{14}$$

---

* Вот те рассуждения, которыми пользовались Брио и Буке при рассмотрении этого вопроса. Пусть будет y_1 голоморфный интеграл уравнения (1), принимающий значение y_0 при $x = x_0$. Полагая $y = y_1 + z$, мы представим уравнение (1) в виде:

$$\frac{dz}{dx} = z\,\psi(x, \ z), \tag{1bis}$$

где функция $\psi(x, z)$ голоморфна при $x = x_0$, $z = 0$. Предположим, что это уравнение имеет интеграл, отличный от $z = 0$, но стремящийся к нулю, когда переменное x описывает кривую C, приводящую в точку x_0. Пусть будут x_1, x_2 точки этой кривой, которым соответствуют значения z_1 и z_2 количества z. Из уравнения (1bis) получаем:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, \ z)\,dx.$$

Когда x_1 стремится к x_0, z_1 стремится к нулю, и модуль левой части этого равенства неограниченно возрастает, тогда как модуль правой части сохраняет конечное значение; следовательно, не может существовать интеграла, стремящегося к нулю, отличного от $z = 0$. Но это доказательство предполагает, что точка x стремится к точке x_0, описывая кривую *C конечной длины.*

система линейных уравнений, где a_{ik} и b_i суть функции только одного переменного x, голоморфные в круге C, описанном из точки x_0 радиусом, равным R. Докажем, что эти уравнения имеют систему интегралов, голоморфных в круге C и обращающихся при $x = x_0$ соответственно в $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$.

При доказательстве мы можем предположить, что

$$(y_1)_0 = (y_2)_0 = \ldots = (y_n)_0 = 0,$$

так как, если мы заменим y_i через $(y_i)_0 + y_i$, то система (14) не изменит вида, и новые коэфициенты останутся голоморфными в круге C. Пусть будет M наибольшее значение модуля всех функций a_{ik}, b_i в круге C' с центром x_0 и радиусом $r < R$. Функция

$$\frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{r}}(1 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

будет усиливающею для всех функций $a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n + b_i$, и мы приходим к рассмотрению вспомогательной системы:

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{dY_2}{dx} = \ldots = \frac{dY_n}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{r}}(1 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n). \tag{15}$$

Так как функции Y_i должны быть равны нулю при $x = x_0$, и их производные также равны между собою, то они тождественны, и систему (15) можно заменить одним уравнением

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{r}}(1 + nY); \tag{16}$$

это уравнение интегрируется разделением переменных. Интеграл, равный нулю при $x = x_0$, выражается в виде:

$$Y = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)^{-nMr} - 1\right];$$

он голоморфный в круге C'. Следовательно, будут голоморфными в круге C' и интегралы системы (14); а так как число r может быть взято сколь угодно близким к числу R, то отсюда следует, что эти интегралы голоморфны в круге C.

385. Уравнения в полных диференциалах. Пусть будет $x_1, x_2, \ldots, x_n$ система n независимых переменных, z — неизвестная функция этих переменных и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — данные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$;

Уравнением в полных диференциалах называется соотношение вида:

$$dz = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \ldots + f_n\,dx_n. \tag{17}$$

на самом деле оно равносильно n отдельным уравнениям

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2, \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = f_n. \tag{18}$$

Допустим, что существует функция z от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющая этим n соотношениям. Мы можем вычислить двумя различными способами вторую производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ $(i \neq k)$. Выразив, что получающиеся обоими способами результаты тождественны между собою, мы получим $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ соотношений:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z} f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z} f_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

и функция z может быть взята только из числа тех функций, которые удовлетворяют этим соотношениям. Здесь мы рассмотрим только тот очень важный случай, когда эти соотношения удовлетворяются *тождественно*. В этом случае уравнение (17), или равносильная система (18), называются *вполне интегрируемыми*.

Если дано уравнение в полных диференциалах, вполне интегрируемое, в котором функции f_i голоморфны вблизи системы значений $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, \ldots, (x_n)_0, z_0$, то это уравнение имеет интеграл, голоморфный вблизи системы значений $(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0$ и обращающийся в z_0 при $x_1 = (x_1)_0, \ldots, x_n = (x_n)_0$.

Из уравнений (18) и из тех уравнеиий, которые мы получим их повторным диференцированием, мы можем выразить все частные производные от неизвестной функции z через $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, следовательно, через коэфициенты разложения голоморфного интеграла, если он существует. Но, между тем, как очевидно, что мы можем только одним способом вычислить производные вида $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}$, напротив, необходимо несколько остановиться на доказательстве того, что мы всегда получим одни и те же выражения для каждой из остальных производных любого порядка, например для производных вида $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x_i^p \partial x_k^q}$, хотя их можно вычислять различными способами. Последнее будет верно для производных второго порядка, если условия (19) удовлетворяются тождественно. Чтобы доказать, что это свойство общее, достаточно показать, что если оно верно до частных производных порядка p, то оно будет также верным и для частных производных порядка $p+1$. Мы будем опираться при этом на следующее замечание: пусть будет $U(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ какая-нибудь функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; положим:

$$\frac{dU}{dx_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial z} f_i, \quad \frac{d^2 U}{dx_i\, dx_k} = \frac{d}{dx_k}\left(\frac{dU}{dx_i}\right) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

непосредственным вычислением легко убедиться, что из условий (19) при всяком виде функции U мы имеем:

$$\frac{d^2 U}{dx_i\, dx_k} = \frac{d^2 U}{dx_k\, dx_i}.$$

Пусть будут u и v две частных производных порядка p, из которых вторая отличается от первой тем, что одно из диференцирований по x_i заменено в ней диференцированием по x_k. Предложение будет доказано, если мы покажем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial z} f_k = \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial z} f_i,$$

т. е. что $\frac{du}{dx_k} = \frac{dv}{dx_i}$. Но u и v получаются от диференцирования некоторой частной производной w порядка $p-1$ соответственно по переменным x_i и x_k. Таким образом мы имеем $u = \frac{dw}{dx_i}$, $v = \frac{dw}{dx_k}$, и то равенство, которое нужно доказать, приводится к соотношению $\frac{d^2 w}{dx_i\, dx_k} = \frac{d^2 w}{dx_k\, dx_i}$, которое было только что доказано.

Следовательно, чтобы доказать сходимость получающегося разложения интеграла z, можно заменить функции f_i усиливающими функциями φ_i при этом условии, чтобы эти функции φ_i были выбраны таким образом, чтобы вспомогательное уравнение с полными диференциалами было также вполне интегрируемым. Предположим для простоты, что $(x_1)_0=(x_2)_0=\ldots=(x_n)_0=z_0=0$; за усиливающую функцию для всех функций f_i можно взять выражение вида:

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1+\ldots+x_n}{r}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)},$$

и вспомогательное уравнение

$$dZ=\frac{M(dx_1+dx_2+\ldots+dx_n)}{\left(1-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{r}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)} \tag{20}$$

будет вполне интегрируемым вследствие симметричности правой части относительно n переменных x_i. Чтобы получить голоморфный интеграл, обращающийся в нуль вместе с переменными x_i, достаточно найти интеграл, который был бы функцией только одного переменного $X=x_1+x_2+\ldots+x_n$; таким образом мы приходим к обыкновенному диференциальному уравнению вида (6):

$$\left(1-\frac{Z}{\rho}\right)dz=\frac{M\,dX}{1-\frac{X}{r}}.$$

Так как интеграл этого уравнения разлагается в сходящийся ряд, в котором коэфициент при любом члене $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ действителен и положителен, то полученное разложение для z будет и подавно сходящимся в той же области. Эта теорема может быть легко распространена на системы уравнений с полными диференциалами между n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и m функциями $z_1, z_2, \ldots, z_m$ этих переменных:

$$dz_h=f_{1h}\,dx_1+\ldots+f_{ih}\,dx_i+\ldots+f_{nh}\,dx_n \quad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots,m, \\ i=1,2,\ldots,n \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Вычисляя двумя различными способами производные вида $\frac{\partial^2 z_h}{\partial x_i\,\partial x_k}$, мы придем к условиям:

$$\frac{\partial f_{ih}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_{ih}}{\partial z_1}f_{k1}+\ldots+\frac{\partial f_{ih}}{\partial z_m}f_{km}=\frac{\partial f_{kh}}{\partial x_i}+\frac{\partial f_{kh}}{\partial z_1}f_{i1}+\ldots+\frac{\partial f_{kh}}{\partial z_m}f_{im}; \tag{22}$$

система (21) называется вполне интегрируемою, если условия (22) удовлетворяются тождественно, и мы имеем следующую теорему, которая доказывается так же, как предыдущая:

Всякая вполне интегрируемая система, в которой функции f_i голоморфны вблизи системы значений $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0, (z_1)_0, \ldots, (z_m)_0$, имеет систему интегралов, голоморфных в области точки $(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0$ и принимающих соответственно значения $(z_1)_0, (z_2)_0, \ldots, (z_m)_0$ при $x_1=(x_1)_0, \ldots, x_n=(x_n)_0$.

386. Применение исчисления пределов к уравнениям в частных производных. Пользуясь методом исчисления пределов, мы можем также доказать существование интегралов системы уравнений в частных производных. Рассмотрим сначала одно уравнение первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial z}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right), \tag{23}$$

где правая часть не содержит производной $\frac{\partial z}{\partial x_1}$. Из этого уравнения и из тех, которые мы получим, диференцируя его последовательно, мы можем выразить все частные производные от z через $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ и через частные производные от z, взятые только по $x_2, x_3, \ldots, x_n$. В самом деле, это предложение верно для производных вида $\frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n+1} z}{\partial x_1 \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, как в этом можно убедиться, диференцируя обе части уравнения (23) α_2 раз по $x_2, \ldots, \alpha_n$ раз по x_n. Если же мы продиференцируем обе части уравнения (23) один раз по x_1 и любое число раз по другим переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$ и затем заменим в правой части частные производные, в которые входит одна деривация по x_1, их уже найденными выражениями, то мы получим для производных $\frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n+2} z}{\partial x_1^2 \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ выражения, обладающие высказанным выше свойством; очевидно, что это предложение имеет вполне общий характер, так как этот прием можно продолжить неограниченно.

Предположим теперь, что функция f голоморфна вблизи системы значений $(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0, z_0, (p_2)_0, \ldots, (p_n)_0$; пусть будет $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ функция $(n-1)$ переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, голоморфная в области точки* $(x_2)_0, (x_3)_0, \ldots, (x_n)_0$ и притом такая, что для этих частных значений мы имеем:

$$(\varphi)_0 = z_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)_0 = (p_2)_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)_0 = (p_3)_0, \ldots, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)_0 = (p_n)_0.$$

Если эти условия удовлетворяются, то *уравнение* (23) *имеет интеграл, правильный в области точки* $(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0$ *и обращающийся в* $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *при* $x_1 = (x_1)_0$.

По предположению, функция $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ разлагается в ряд по положительным степеням переменных $x_i - (x_i)_0$, и его коэфициенты суть до постоянных множителей значения частных производных от этой функции в точке $(x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$. Так как функция z, существование которой мы хотим доказать, должна обращаться при $x_1 = (x_1)_0$ в $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, то отсюда мы знаем значения в точке $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$ всех тех частных производных от этой функции z, в которые не входят диференцирования по переменному x_1. Но мы только что видели, как можно выразить все другие частные производные, в которые входят диференцирования по x_1. Следовательно, мы можем вычислить последовательно все коэфициенты разложения функции z по степеням переменных $x_i - (x_i)_0$ при помощи коэфициентов разложений функций f и φ, и притом в это вычисление войдут только действия сложения и умножения. Следовательно, чтобы доказать, что получающееся разложение — сходящееся, мы опять можем воспользоваться усиливающими функциями; если, заменяя в предыдущем вычислении функцию f усиливающею функциею F и функцию φ другою усиливающею

* Для краткости мы будем называть точкою всякую систему значений, действительных или мнимых, даваемых переменным, рассматриваемым в данном вопросе.

функцнею Φ, мы получим сходящийся ряд, то тем самым будет доказана и сходимость ряда, представляющего функцию z*.

Прежде всего несложными преобразованиями можно заменить начальные условия другими, более простыми. Можно предположить, что $(x_1)_0 = (x_2)_0 = \ldots = (x_n)_0 = 0$, так как это равносильно замене обозначения $x_i - (x_i)_0$ через x_i; если, сверх того, мы положим:

$$z = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) + u,$$

то новая неизвестная функция u должна обращаться в нуль при $x_1 = 0$. Кроме того, можно предположить, что после этих преобразований правая часть уравнения (23) не будет содержать постоянного члена; в самом деле, если бы разложение начиналось с постоянного члена a, отличного от нуля, то, чтобы его не было, достаточно положить $u = ax_1 + \delta$.

Если после всех этих преобразований мы заменим правую часть уравнения (23) соответствующею усиливающею функциею, то доказательство нашей теоремы приведется к доказательству того, что уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + Z}{r}\right)\left(1 - \frac{\frac{\partial Z}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}}{\rho}\right)} - M, \tag{24}$$

где M, r, ρ — некоторые определенные положительные числа, имеет интеграл, голоморфный в области точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, обращающийся в нуль при $x_1 = 0$, причем, благодаря введению члена $-M$,

---

* В случае уравнения вида: $\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1 + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial z}{\partial x_n}$, где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ суть функции одних только $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сходимость может быть доказана весьма просто.

Прежде всего рядом преобразований, аналогичных приведенным в тексте, можно привести к доказательству того, что вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = \frac{M\left(\frac{\partial Z}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} + 1\right)}{\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)\left(1 - \frac{x_2 + \ldots + x_n}{b}\right)} \tag{E}$$

допускает интеграл, правильный в области точки $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ и обращающийся в нуль при $x_1 = 0$.

Будем для этого искать частный интеграл вида:

$$Z = F(x_1, u), \text{ где } u = x_2 + \ldots + x_n.$$

Уравнение (E) может быть, таким образом, представлено в форме:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{M\left[1 + (n-1)\frac{\partial F}{\partial u}\right]}{\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)\left(1 - \frac{u}{b}\right)}; \tag{E_1}$$

полагая $F = -\frac{u}{n-1} + \Phi$, имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{M(n-1)\frac{\partial \Phi}{\partial u}}{\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)\left(1 - \frac{u}{b}\right)}. \tag{E_2}$$

Уравнение (E$_2$) будет удовлетворено, если принять:

$$\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{M(n-1)}{1 - \frac{u}{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 1,$$

свободный член правой части уравнения (24) равен нулю, как и свободный член уравнения (23). Заменяя в правой части x_1 через $\frac{x_1}{a}$, где a — положительное число, меньшее единицы, мы только увеличим коэфициенты разложения правой части, и теорема будет и подавно верна, если мы докажем наше предложение для нового уравнения:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}=\frac{M}{\left(1-\dfrac{\dfrac{x_1}{a}+x_2+\ldots+x_n+Z}{r}\right)\left(1-\dfrac{\dfrac{\partial Z}{\partial x_2}+\ldots+\dfrac{\partial Z}{\partial x_n}}{\rho}\right)}-M. \quad (5)$$

Вместо того чтобы доказывать, что это уравнение имеет правильный интеграл, обращающийся в нуль при $x_1=0$, достаточно показать только, что оно имеет правильный интеграл, представляемый целым рядом, все коэфициенты которого действительны и положительны. В самом деле, коэфициенты этого третьего разложения будут не меньше коэфициентов ряда, который получим, предполагая, что Z равно нулю при $x_1=0$.

Это следует из того, что все коэфициенты третьего разложения выводятся действиями сложения и умножения из коэфициентов членов, не зависящих от x_1; поэтому, если во втором разложении коэфициенты при членах, свободных от x_1, равны нулю, а в третьем разложении они положительны, то и коэфициенты при всех остальных членах третьего разложения необходимо больше, чем коэфициенты при соответствующих членах второго разложения; следовательно, если третье разложение будет сходящимся, то будет сходящимся и второе. Чтобы доказать, что третье разложение — сходящееся, попробуем удовлетворить уравнению (25), принимая Z за функцию только одного переменного $X=\frac{x_1}{a}+x_2+\ldots+x_n$.

откуда мы находим частный интеграл:

$$\Phi_1=-a\,\mathrm{Log}\left(1-\frac{x_1}{a}\right)+\frac{1}{M(n-1)}\left(u-\frac{u^2}{2b}\right),$$

и уравнение (E_2) может быть записано в виде:

$$\frac{D(\Phi,\ \Phi_1)}{D(x_1,\ u)}=0.$$

Общий интеграл (E_2), а следовательно, и (E_1), есть

$$F=-\frac{u}{n-1}+\varphi\left\{-a\log\left(1-\frac{x_1}{a}\right)+\frac{1}{M(n-1)}\left(u-\frac{u^2}{2b}\right)\right\},$$

где φ - произвольная функция.

Для того чтобы этот интеграл обращался в нуль при $x_1=0$, функция φ должна удовлетворять соотношению

$$\varphi\left[\frac{1}{M(n-1)}\left(u-\frac{u^2}{2b}\right)\right]=\frac{u}{n-1},$$

или, полагая

$$\frac{1}{M(n-1)}\left(u-\frac{u^2}{2b}\right)=v,$$

$$\varphi(v)=\frac{1}{n-1}\left[b-\sqrt{b^2-2Mb(n-1)v}\right].$$

Интеграл уравнения (E), полученный таким образом, голоморфен в области точки

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Таким образом мы приходим к диференциальному уравнению первого порядка:

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{n-1}{\rho}M\right)\frac{dZ}{dX}=\frac{n-1}{\alpha\rho}\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\frac{M}{1-\frac{X+Z}{r}}-M. \qquad (26)$$

Предположим, что α взято настолько малым, чтобы коэфициент в левой части при $\frac{dZ}{dX}$ был положителен. При $X=Z=0$ уравнение (26) имеет для $\frac{dZ}{dX}$ два различных корня, из которых один равен нулю. Следовательно, это уравнение имеет интеграл, голоморфный в области точки $X=0$ и равный нулю вместе со своею первою производною при $X=0$. Легко непосредственно убедиться, что все коэфициенты разложения этого интеграла — положительные числа. В самом деле, уравнение (26) можно представить в виде:

$$\frac{dZ}{dx}=A\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\Phi(X, Z),$$

где A — положительно, а $\Phi(X, Z)$ обозначает ряд, все коэфициенты которого положительны. После первого диференцирования получим:

$$\frac{d^2Z}{dX^2}=2A\frac{dZ}{dX}\frac{d^2Z}{dX^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial X}+\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{dZ}{dX}.$$

При $X=0$ функции Z и $\frac{dZ}{dX}$ равны нулю; следовательно, $\frac{d^2Z}{dX^2}$ положительно; такое же доказательство остается и для следующих производных.

Таким образом мы доказали существование интеграла уравнения (25), правильного в области точки $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ и разлагающегося в ряд с положительными коэфициентами. Отсюда, по предыдущему, следует, что уравнение (25) имеет интеграл, правильный в области той же точки и обращающийся в нуль при $x_1=0$. Последнее, очевидно, верно и для уравнения (24). Отсюда, далее, следует, что ряд, получающийся как разложение искомого интеграла z уравнения (23), — сходящийся, пока модули разностей $x_i-(x_i)_0$ остаются меньшими некоторого положительного числа r. Сумма этого ряда есть функция, голоморфная в области точки $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$ и обращающаяся при $x_1=(x_1)_0$ в $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Легко видеть, что эта функция, действительно, удовлетворяет данному уравнению (23); в самом деле, если мы заменим в функции f переменные $z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ найденною функцией и ее частными производными, то в результате получим некоторую функцию $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, правильную в области точки $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$; далее, из самого способа получения коэфициентов ряда z следует, что функции ψ и $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ вместе со всеми своими частными производными равны между собою в точке $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$; следовательно, эти две функции тождественны.

Предыдущее доказательство применимо и к системам совместных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}=f_1,\quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1}=f_2,\ \ldots,\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1}=f_p, \tag{27}$$

у которых правые части содержат только переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функции $z_1, z_2, \ldots, z_p$ и частные производные первого порядка по независимым переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, за исключением производных по x_1. Предполагая, что правые части голоморфны вблизи системы частных значений всех стоящих в них переменных $(x_i)_0$, $(z_k)_0$, $(p_i^k)_0$, где $p_i^k=\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$, мы приходим к следующей теореме:

Уравнения (27) *имеют систему интегралов, голоморфных в области точки* $(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0$ *и обращающихся при* $x_1=(x_1)_0$ *в* p *данных функций* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *от* $(n-1)$ *переменных* $x_2, x_3, \ldots, x_n$, *голоморфных в области точки* $(x_2)_0, (x_3)_0, \ldots, (x_n)_0$ *и таких, что значения функций* φ_k *и* $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$ *в этой точке равны* $(z_k)_0$ *и* $(p_i^k)_0$ $(k=1, 2, \ldots, p;\ i=2, 3, \ldots, n)$.

387. Общий интеграл системы диференциальных уравнений. Предыдущая теорема позволяет пополнить теорию диференциальных уравнений во многих существенных отношениях. Так, например, из нее непосредственно вытекает существование бесконечного множества интегрирующих множителей для выражений вида $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$, когда P и Q суть аналитические функции переменных x и y (§ 373).

Вернемся к уравнению первого порядка $y'=f(x, y)$; пусть будет (x_0, y_0) одна из пар значений, при которых функция $f(x, y)$ — правильная. Мы можем рассматривать голоморфный интеграл, существование которого мы доказали и который принимает значение y_0 при $x=x_0$, как функцию трех независимых переменных x, x_0, y_0; с этой точки зрения мы и будем теперь его изучать. Для определенности предположим, что функция $f(x, y)$ — правильная в области точки $(x=a,\ y=\beta)$. Очевидно, что мы можем рассматривать данное уравнение как уравнение в частных производных

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f(x, y), \tag{28}$$

определяющее функцию y трех переменных x, x_0, y_0. Найдем интеграл этого уравнения, голоморфный в области точки $x=a$, $x_0=a$, $y_0=\beta$ и обращающийся в y_0 при $x=x_0$. Это последнее условие имеет другой вид, чем условие предыдущего параграфа; но чтобы обойти это затруднение, нужно только ввести вместо x и x_0 два новых независимых переменных $u=x+x_0$ и $v=x-x_0$. Тогда уравнение (28) обращается в уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}=f\left(\frac{u+v}{2}, y\right), \tag{29}$$

и нам нужно найти интеграл этого нового уравнения, голоморфный вблизи значений $u=2a$, $v=0$, $y_0=\beta$ и обращающийся в y_0 при $v=0$. Из общей теоремы (§ 386) следует, что существует один и только один голоморфный интеграл, удовлетворяющий этим условиям; обозначим его через $\varphi(x, x_0, y_0)$, предполагая, что u и v заменены их выражениями через x, x_0. Пусть будет D область, определяемая условиями $|x-a|\leqslant r$, $|x_0-a|\leqslant r$, $|y_0-\beta|\leqslant\rho$, в которой эта функция правильная. Функция φ обладает в этой области следующими свойствами.

Прежде всего из самого способа ее получения следует, что, если x_0 и y_0 — постоянные, то она представляет интеграл диференциального уравнения $y'=f(x, y)$, принимающий значение y_0 при $x=x_0$. Этот интеграл, наверное, голоморфный, если $|x-a|<r$, какие бы значения ни имели x_0 и y_0 в области D.

Разложение функции $\varphi(x, x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y=y_0+(x-x_0)P(x, x_0, y_0),$$

где P также обозначает правильную функцию. Из общей теории неявных функций следует, что из этого уравнения можно, обратно, вывести соотношение $y_0=\psi(x, x_0, y)$, где правая часть есть также целый ряд. *Эта функция* $\psi(x, x_0, y)$ *тождественна с функцией* $\varphi(x_0, x, y)$. В самом деле, пусть будут x_0 и x_1 две точки области D; интеграл, равный y_0 при $x=x_0$, принимает в точке x_1, некоторое значение y_1, и мы имеем: $y_1=\varphi(x_1, x_0, y_0)$. Но, очевидно, что обе пары значений (x_0, y_0), (x_1, y_1) равносильны; следовательно, их можно взаимно переставить, и мы имеем также: $y_0=\varphi(x_0, x_1, y_1)$.

Пусть будет x_0' какое-нибудь значение переменного x, удовлетворяющее условию $|x_0'-a|<r$. Мы покажем, что всякий голоморфный интеграл уравнения (28), проходящий через какую-нибудь точку (x_0, y_0) области D, удовлетворяет соотношению вида:

$$\varphi(x_0', x, y)=C. \tag{30}$$

В самом деле, рассмотрим голоморфный интеграл уравнения (28), обращающийся при $x=x_0$ в y_0; этот интеграл принимает при x_0' некоторое значение y_0', и, следовательно, по самому определению функции φ мы имеем $\varphi(x_0', x_0, y_0)=y_0'$. Пусть будет x другое значение переменного в той же области и y — соответствующее ему значение того же интеграла уравнения (28); мы имеем также $\varphi(x_0', x, y)=y_0'$, и, следовательно, рассматриваемый голоморфный интеграл действительно удовлетворяет соотношению вида (30). Диференцируя его по x и заменяя производную y' ее значением $f(x, y)$, мы заключаем, что функция $\varphi(x_0', x, y)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}f(x, y)=0; \tag{31}$$

это соотношение необходимо должно быть тождеством, так как оно должно удовлетворяться при $x=x_0$, $y=y_0$, причем точка (x_0, y_0) есть произвольная точка области D.

Это замечание позволяет дать ответ на вопрос, пока оставленный нами открытым (§ 383). Рассмотрим в плоскости переменного x какую-нибудь кривую Γ, неограниченно приближающуюся к точке x_0; мы будем говорить, что функция y переменного x, за аналитическим продолжением которой вдоль кривой Γ мы можем проследить, стремится к y_0, когда x, оставаясь на Γ, стремится к x_0, если для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число η, чтобы $|y-y_0|$ оставалось меньшим ε при всех значениях x, лежащих на Γ внутри круга с радиусом, равным η, и с центром в точке x_0. Из рассуждения Брио и Буке (см. стр. 55) еще не следует, что не существует никакого другого интеграла, кроме голоморфного, который стремился бы к y_0 при приближении x к x_0 в том смысле, как это только что было указано. Теперь мы можем доказать, что в области D это свойство, действительно, имеет место. В самом деле, рассмотрим какую-нибудь определенную точку (x_0, y_0) и возьмем в уравнении (28) за новое неизвестное определенную выше функцию $Y=\varphi(x_0, x, y)$. Мы имеем:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx};$$

на основании соотношения (31) данное диференциальное уравнение обращается в $\frac{dY}{dx}=0$. Но если при приближении x к x_0 y стремится к y_0, то то же самое имеет место и для Y, так как по условию $\varphi(x, x_0, y_0)$ обращается при $x=x_0$ в y_0, и, очевидно, что единственным интегралом нового уравнения $\frac{dY}{dx}=0$, удовлетворяющим этому условию, будет $Y=y_0$. Следовательно, искомый интеграл должен удовлетворять соотношению

$$\varphi(x_0, x, y)=y_0,$$

или

$$y_0=y+(x-x_0)P(x, y, x_0). \tag{32}$$

Но из теории неявных функций следует (т. I, § 184), что уравнение (32) имеет только один корень, стремящийся к y_0 при приближении x к x_0, и что этот корень есть, действительно, голоморфная функция *.

Отсюда мы заключаем, что всякий интеграл уравнения (28), проходящий через любую точку области D, удовлетворяет соотношению вида (30). На этом основании говорят, что уравнение (30) представляет в области D ***общий интеграл*** диференциального уравнения; число C есть постоянное интеграции, которое остается произвольным, по крайней мере, в некоторых пределах. Мы видели, что уравнение (30) также можно представить в равносильном виде: $y=\varphi(x, x_0', y_0')$, где y_0' — постоянное интегрирования.

Все эти свойства можно распространить и на систему диференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \frac{dy_2}{dx}=f_2, \ldots, \frac{dy_n}{dx}=f_n. \tag{33}$$

---

* Пикар, Traité d'Analyse, т. II, 2-е издание, стр. 355—358; Пенлеве, Leçons de Stockholm, стр. 18—20 и стр. 394—396.

Предположим, что правые части этих уравнений голоморфны вблизи системы значений $x=a$, $y_1=\beta_1, \ldots, y_n=\beta_n$. Мы можем и здесь рассматривать данные уравнения как систему уравнений в частных производных между n функциями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и $(n+2)$ независимыми переменными x, x_0, $(y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$ и искать интегралы этих уравнений, которые были бы правильными вблизи значений

$$x=a, \quad x_0=a, \quad (y_1)_0=\beta_1, \ldots, (y_n)_0=\beta_n$$

и обращались бы при $x=x_0$ соответственно в $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$. Пусть будут

$$y_1=\varphi_1[x, x_0, (y_1)_0, \ldots, (y_n)_0],$$
$$y=\varphi_2, \ldots, y_n=\varphi_n[x, x_0, (y_1)_0, \ldots, (y_n)_0] \tag{34}$$

n функций, определенных таким образом; мы предположим, что они голоморфны в области D, определяемой условиями:

$$|x-a| \leqslant r, \quad |x_0-a| \leqslant r, \quad |y_i-(y_i)_0| \leqslant \rho.$$

Из формул (34), обратно, получаем:

$$(y_1)_0=\varphi_1(x_0, x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, (y_n)_0=\varphi_n(x_0, x, y_1, \ldots, y_n); \tag{35}$$

здесь каждая из функций φ_i при всяком значении x_0 удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}f_1+\ldots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n}f_n=0. \tag{36}$$

Мы можем доказать это предложение так же, как выше, заметив, что голоморфные интегралы, принимающие значения $(y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$ при $x=x_0$, удовлетворяют соотношениям (35), а следовательно, и соотношениям (36), которые мы получим из предыдущих, диференцируя их по независимому переменному x и заменяя $\frac{dy_i}{dx}$ через f_i. Соотношения (36) должны быть тождествами; в самом деле, как и выше, можно показать, что, предполагая x_0 постоянным, можно выбрать значения $(y_1)_0, \ldots (y_n)_0$ таким образом, чтобы *интегральная кривая** проходила через любую точку области D. Следовательно, левая часть формулы (36) должна быть равна нулю для координат всякой точки этой области.

Если в данных уравнениях (33) мы примем за новые неизвестные функции n функций $Y_i=\varphi_i(x_0, x, y_1, \ldots, y_n)$, где x_0 — постоянно, то при условиях (36) эти уравнения обратятся в

$$\frac{dY_1}{dx}=0, \quad \frac{dY_2}{dx}=0, \ldots, \frac{dY_n}{dx}=0. \tag{37}$$

Отсюда следует, что все интегралы системы (33) удовлетворяют соотношениям вида (35), где $(y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$ — постоянные; это верно по меньшей мере для тех из этих интегралов, которые проходят через одну из точек области D, в которой функции φ — правильные. Здесь мы

---

* Обобщая мы будем говорить, что всякая система интегралов уравнений (33) определяет *интегральную кривую*.

опять будем говорить, что формулы (35) представляют в этой области общий интеграл системы (33).

Как и выше, из предыдущих уравнений можно вывести, что нет никакой другой системы интегралов, кроме голоморфных, которые стремились бы к $(y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$, когда x стремится к x_0. В самом деле, мы имеем:

$$\varphi_i = y_i + (x - x_0) P_i(x_0, x, y_1, \ldots, y_n),$$

и определитель Якоби $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ при $x = x_0$ равен единице. Из общей теории неявных функций следует, что уравнения (35) имеют только одну систему корней $y_1, y_2, \ldots, y_n$, стремящихся к $(y_1)_0$, $(y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$ при приближении x к x_0, и эти корни голоморфны.

Таким образом, в конечном выводе, через всякую точку области D проходит одна и только одна интегральная кривая; эта кривая представляется n уравнениями $y_i = \psi_i(x)$, где функции ψ_i голоморфны, если только $|x - a| \leqslant r$.

II. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. МЕТОД КОШИ-ЛИПШИЦА.

388 Последовательные приближения. Метод последовательных приближений был применен с успехом Пикаром к обыкновенным диференциальным уравнениям и ко многим уравнениям в частных производных. Мы изложим применение этого метода к обыкновенным диференциальным уравнениям с существенным дополнением, принадлежащим Э. Линделёфу (Lindelöf).

Пусть будет $y(x)$ интеграл диференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, принимающий значение y_0 при $x = x_0$. Эта функция $y(x)$, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt, \tag{38}$$

и обратно. Уравнение (38) есть *интегральное уравнение*; очевидно, что оно одно может заменить собою два условия $y'(x) = f[x, y(x)]$, $y(x_0) = y_0$; вместе с тем к нему легко применить метод последовательных приближений. Мы изложим этот метод в применении к системе двух уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z), \tag{39}$$

предполагая сначала, что переменные действительны. Предположим: 1) что обе функции f и φ непрерывны, когда x изменяется от x_0 до $x_0 + a$, а y и z изменяются соответственно между границами $(y_0 - b, y_0 + b)$, $(z_0 - c, z_0 + c)$; 2) что абсолютное значение каждой из этих функции остается меньшим некоторого положительного числа M, когда переменные x, y, z остаются в предыдущих границах; 3) наконец, что существуют два таких положительных числа A и B, что

$$\left.\begin{aligned} |f(x, y, z) - f(x, y', z')| &< A|y - y'| + B|z - z'| \\ |\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y', z')| &< A|y - y'| + B|z - z'| \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

для любых точек (x, y, z) и (x, y', z'), содержащихся в вышеуказанной области.

Для удобства рассуждения положим $a > 0$; пусть будет h меньшее из трех положительных чисел a, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{M}$. Докажем, что *уравнения* (39) *имеют систему интегралов, непрерывных в промежутке* $(x_0, x_0 + h)$ *и принимающих значения*

y_0 *и* z_0 *при* $x=x_0$. Для этого представим уравнения (39) в форме интегральных уравнений:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y(t),\ z(t)]\,dt,\quad z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} \varphi[t,\ y(t),\ z(t)]\,dt; \tag{41}$$

мы решим эти уравнения последовательными приближениями тем же способом, как систему совместных уравнений (т. I, § 33), причем возьмем за первые приближенные значения самые начальные значения y_0 и z_0. Таким образом мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_0,\ z_0)\,dt,\\ z_1(x)&=z_0+\int_{x_0}^{x} \varphi(t,\ y_0,\ z_0)\,dt,\\ y_2(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y_1(t),\ z_1(t)]\,dt,\\ z_2(x)&=z_0+\int_{x_0}^{x} \varphi[t,\ y_1(t),\ z_1(t)]\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

и вообще

$$\left.\begin{aligned} y_n(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y_{n-1}(t),\ z_{n-1}(t)]\,dt,\\ z_n(x)&=z_0+\int_{x_0}^{x} \varphi[t,\ y_{n-1}(t),\ z_{n-1}(t)]\,dt \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Докажем сначала, что если x заключается в границах $(x_0,\ x_0+h)$, то этот прием вычисления можно продолжать неограниченно. Прежде всего, если x заключается в предыдущем промежутке, то мы имеем:

$$|y_1-y_0|<Mh<b,$$

и точно так же $|z_1-z_0|<c$. Следовательно, если мы заменим в f и φ количества y и z через y_1 и z_1, то получающиеся при этом функции от x будут непрерывны между x_0 и x_0+h_1, и их абсолютные значения останутся меньше числа M. По той же причине y_2 и z_2 будут функциями от x, непрерывными в промежутке $(x_0,\ x_0+h)$, и мы будем иметь в этом промежутке $|y_2-y_0|<b$, $|z_2-z_0|<c$. Это рассуждение можно продолжить неограниченно; все функции y_n и z_n будут непрерывными между x_0 и x_0+h, и мы всегда будем иметь в этом промежутке: $|y_n-y_0|<b$, $|z_n-z_0|<c$.

Чтобы доказать, что при неограниченном возрастании числа n, y_n и z_n стремятся к определенным пределам, заметим, что из уравнений (42) мы имеем:

$$|y_1(x)-y_0|<M(x-x_0),\quad |z_1(x)-z_0|<M(x-x_0), \tag{44}$$

где x заключается в промежутке $(x_0,\ x_0+h)$. Далее, получаем:

$$y_2(x)-y_1(x)=\int_{x_0}^{x}\left\{f[t,\ y_1(t),\ z_1(t)]-f(t,\ y_0,\ z_0)\right\}dt,$$

или, принимая во внимание неравенства (40):

$$|y_2(x)-y_1(x)|<\int_{x_0}^{x} A\,|y_1(t)-y_0|\,dt+\int_{x_0}^{x} B\,|z_1(t)-z_0|\,dt,$$

и, следовательно, на основании неравенств (44):

$$|y_2(x)-y_1(x)|<M(A+B)\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}.$$

Такие же формулы имеют место для $|z_2(x)-z_1(x)|$, и, продолжая таким образом далее, мы вообще будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} |y_n(x)-y_{n-1}(x)|&<M(A+B)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\ldots n},\\ |z_n(x)-z_{n-1}(x)|&<M(A+B)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\ldots n}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Следовательно, ряды

$$\left.\begin{aligned} &y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots,\\ &z_0+(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\ldots+(z_n-z_{n-1})+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

все члены которых суть функции от x, непрерывные в промежутке $(x_0,\ x_0+h)$, будут равномерно сходящимися в этом промежутке. Поэтому суммы $Y(x)$ и $Z(x)$ обоих рядов при значениях x, заключающихся между x_0 и x_0+h, будут непрерывными функциями от x. При неограниченном возрастании числа n соотношения (43) обращаются в пределе в

$$Y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[t,\ Y(t),\ Z(t)]\,dt,\quad Z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}\varphi[t,\ Y(t),\ Z(t)]\,dt.$$

В самом деле, мы только что видели, что в промежутке (x_0,x_0+h) разности $Y(x)-y_{n-1}(x)$, $Z(x)-z_{n-1}(x)$ стремятся неограниченно к нулю, и, следовательно, в силу соотношений (40), интегралы

$$\int_{x_0}^{x}\{f[t,\ Y(t),\ Z(t)]-f[t,\ y_{n-1}(t),\ z_{n-1}(t)]\}\,dt,$$

$$\int_{x_0}^{x}\{\varphi[t,\ Y(t),\ Z(t)]-\varphi[t,\ y_{n-1}(t),\ z_{n-1}(t)]\}\,dt$$

при неограниченном возрастании числа n, также стремятся к нулю. Таким образом функции $Y(x)$ и $Z(x)$ удовлетворяют всем требуемым условиям.

Очевидно, что предыдущий метод применим при всяком числе уравнений системы. Неравенства (40), играющие существенную роль в предыдущем доказательстве, будут, наверное, удовлетворены при подходящих значениях A и B всякий раз, когда функции f и φ имеют частные производные по y и z, непрерывные, пока переменные заключаются между указанными границами; это непосредственно следует из формулы конечных приращений (т. I, § 17). Заметим также, что если функции f и φ остаются непрерывными при изменении x между границами x_0-a и x_0+a и при изменении y и z между прежними границами, то из предыдущего рассуждения следует, что существует система интегралов $Y(x)$ и $Z(x)$, принимающих значения y_0 и z_0 при $x=x_0$ и непрерывных в промежутке $(x_0-h,\ x_0+h)$, где h имеет прежнее значение.

Не существует других интегралов, кроме $Y(x)$ и $Z(x)$, принимающих значения y_0 и z_0 при $x=x_0$. Так как доказательство одно и то же при всяком числе уравнений, то мы рассмотрим для простоты только одно уравнение $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$; положим, как выше,

$$y_1=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\ y_0)\,dt,\ \ldots,\ y_n=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\ y_{n-1})\,dt.$$

Пусть будет $Y_1(x)$ интеграл этого уравнения, принимающий значение y_0 при $x=x_0$ и непрерывный в промежутке $(x_0,\ x_0+a')$ где a'), где a' есть число, меньшее наименьшего из чисел a и $\frac{b}{M}$ и притом такое, что $|Y_1(x)-y_0|<b$ в промежутке $(x_0; x_0+a')$. Так как Y_1 удовлетворяет данному уравнению, то мы имеем:

$$Y_1(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f[t,\ Y_1(t)]\,dt,$$

и, следовательно,

$$Y_1(x)-y_n(x)=\int_{x_0}^{x}\{f[t,\ Y_1(t)]-f[t,\ y_{n-1}(t)]\}\,dt.$$

Положим последовательно в этом соотношении $n=1, 2, 3, \ldots$; при $n=1$ будем иметь:

$$|Y_1(x)-y_1(x)|<Ab(x-x_0),$$

затем при $n=2$

$$|Y_1(x)-y_2(x)|<A\int_{x_0}^{x} Ab(t-x_0)\,dt=A^2b\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2},$$

и вообще

$$|Y_1(x)-y_n(x)|<A^nb\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\ldots n}.$$

При неограниченном возрастании числа n правая часть этого равенства стремится к нулю; следовательно, интеграл Y_1 тождествен с пределом выражения y_n, т. е. с Y^*.

389. Случай линейных уравнений. Из общего рассуждения следует, что интегралы уравнений (39) будут, наверное, непрерывны в определенном выше промежутке (x_0, x_0+h). Но во многих случаях можно утверждать, что существует более широкий промежуток, в котором эти интегралы остаются непрерывными. В самом деле, если мы возвратимся к предыдущему доказательству, то увидим, что условия $h<\frac{b}{M}$, $h<\frac{c}{M}$ введены только для того, чтобы быть уверенным, что промежуточные функции $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots$ не выходят из границ (y_0-b, y_0+b), (z_0-c, z_0+c), и потому функции $f(x, y_i, z_i)$, $\varphi(x, y_i, z_i)$ остаются непрерывными функциями от x между x_0 и x_0+h. Если же функции $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ остаются непрерывными, когда x изменяется от x_0 до x_0+a, а y и z от $-\infty$ до $+\infty$, то нет надобности вводить эти условия: все функции y_i, z_i будут непрерывны в промежутке (x_0, x_0+a) В этом случае, чтобы доказать сходимость обоих рядов (46), нужно только, как и выше, чтобы существовали два таких положительных числа A и B, чтобы неравенства (40) удовлетворялись при всех значениях y, y', z, z', когда x остается в промежутке (x_0, x_0+a). В самом деле, повторяя предыдущие рассуждения и обозначая через M верхнюю границу количеств $|f(x, y_0, z_0)|$ и $|\varphi(x, y_0, z_0)|$ в промежутке (x_0, x_0+a), мы увидим, что неравенства (45) остаются в силе, а этого достаточно для доказательства существования непрерывных интегралов уравнений (39).

Из формулы конечных приращений следует, что предыдущие условия удовлетворяются, если функции $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ имеют частные производные по y и z, которые остаются конечными при всех значениях y и z и при изменении переменного x от x_0 до x_0+a. Это, например, имеет место для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=x+\sin y.$$

Его правая часть $f(x, y)=x+\sin y$ есть непрерывная функция от x, y при всяких значениях x и y, и абсолютное значение частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ не больше

---

* За всем, что касается приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, я отсылаю читателя к работам Коттона (Cotton) (*Acta mathematica*, т. XXXI; *Bulletin de la Société mathématique de France*, т. XXXVI, XXXVII, XXXVIII; *Annalis de l'Université de Grenoble* т. XXI),

единицы; следовательно, все интегралы этого уравнения непрерывны, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ *.

В частности, предыдущие заключения применимы к системе линейных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{47}$$

коэфициенты которых a_{ik}, b_i суть функции от x. Если все эти функции непрерывны в промежутке (x_0, x_1), то все интегралы этой системы также непрерывны в этом промежутке. Поэтому, если все коэфициенты — многочлены, то все интегралы непрерывны при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$.

Ограничиваясь действительными переменными, мы видим, что интегралы линейных уравнений не могут иметь других особых точек, кроме особых точек коэфициентов этих уравнений. Это весьма важное свойство не распространяется на другие уравнения, повидимому, столь же простые, например на уравнение $y' = y^2$.

Примечание. Часто приходится иметь дело с системами линейных уравнений, коэфициенты которых суть аналитические функции некоторых параметров. Предположим для определенности, что коэфициенты a_{ik} и b_i уравнений (47) суть функции от x, непрерывные в промежутке (a, b) и, кроме того, зависят аналитически от некоторого параметра λ, причем в некоторой области D они будут его голоморфными функциями.

Интегралы этой системы, принимающие данные начальные значения при значении x_0 переменного x, заключающемся между a и b, представятся во всем промежутке (a, b) равномерно сходящимися рядами, и из самого способа их получения ясно, что все члены этих рядов суть функции параметра λ, голоморфные в области D. Следовательно, *эти интегралы суть сами функции от* λ, *голоморфные в области* D (§ 290).

Чаще всего случается, что коэфициенты a_{ik} и b_i суть целые функции параметра λ; следовательно, в таком случае и самые интегралы будут также целыми функциями от λ. Мы можем непосредственно получить разложения по степеням λ интегралов, принимающих данные начальные значения, вставляя в обе части уравнений (47) разложения вида:

$$y_i = u_{i0} + u_{i1}\lambda + \ldots + u_{ip}\lambda^p + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где u_{ik} суть функции от x, и выражая, что обе части тождественны между собою; при этом функции u_{i0} должны принимать при $x = x_0$ данные начальные значения, тогда как функции u_{ik}, где $k \geqslant 1$, при $x = x_0$ должны быть равны нулю. Определяя, таким образом, последовательно коэфициенты u_{ik}, мы получим для них системы линейных уравнений. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу (см. т. III, § 462—463).

390. Распространение на аналитические функции. Предыдущий метод можно распространить и на комплексные переменные. Для этого достаточно заметить, что для аналитической функции одного или нескольких переменных мы имеем неравенства, аналогичные неравенствам (40). В самом деле, рассмотрим сначала функцию $f(x)$ одного комплексного переменного x, голоморфную в области Ω, ограниченной выпуклою линиею C, и на самой этой линии; пусть будет A наибольшее значение модуля $|f'(x)|$ в этой области. Разность $f(x_2) - f(x_1)$, где x_2 и x_1 — любые точки этой области, равна определенному интегралу $\int f'(x)\,dx$, взятому вдоль прямой, соединяющей эти обе точки. Следовательно, мы имеем:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < A\,|x_2 - x_1|.$$

Точно так же, пусть будет $f(x, y)$ функция двух переменных x и y, голо-

* Аналогичную теорему можно получить из исчисления пределов. Пусть будет $f(x, y)$ аналитическая функция, *действительная* при всякой системе действительных значений x и y и голоморфная в области этой системы значений. Предположим, кроме того, что $|f(x, y)|$ остается меньшим некоторого постоянного числа M, если соответственно $\left|\Re\left(\frac{x}{i}\right)\right| \leqslant a$ и $\left|\Re\left(\frac{y}{i}\right)\right| \leqslant b$. Если x_0, y_0 есть система каких-нибудь *действительных* значений x и y, то мы заключаем, что функция $f(x, y)$ голоморфна в области, определяемой неравенствами $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, и ее модуль меньше числа M. Тогда из исчисления пределов следует, что интеграл уравнения $y' = f(x, y)$, равный y_0 при $x = x_0$, будет, наверное, голоморфным в некотором круге C, радиус r которого, равный $a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$, *не зависит* от x_0, y_0. Пользуясь кругами с радиусом, равным r, мы можем получить аналитическое продолжение этого интеграла вдоль действительной оси, откуда видно, что интеграл будет голоморфным внутри полосы, ограниченной двумя прямыми, параллельными действительной оси и отстоящими от нее на расстояние r.

морфная, когда эти переменные остаются соответственно в двух областях Ω и Ω', ограниченных двумя выпуклыми линиями C и C'; пусть будут A и B наибольшие значения модулей $|f_x'|$ и $|f_y'|$ в этой области. Если x_1 и x_2 — две какие-нибудь точки площади Ω, а y_1 и y_2 — две какие-нибудь точки площади Ω', то мы имеем:

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = [f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)] + [f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)],$$

и, следовательно, по доказанному выше,

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < A\,|x_2 - x_1| + B\,|y_2 - y_1|.$$

Это доказательство приложимо при всяком числе независимых переменных.

Мы здесь ограничимся для простоты случаем одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{48}$$

Предположим, что правая часть голоморфна в области, определяемой неравенствами $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$; пусть будет M значение максимум модуля $|f(x, y)|$ в этой области, и h — меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$. Опишем в плоскости переменного x из точки x_0 круг C_h радиусом, равным h, и положим, как выше:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt, \quad y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\,dt, \ldots \quad y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt$$

Предполагая, что точка x лежит внутри круга C_h, мы сначала докажем последовательно, что

$$|y_1 - y_0| < b, \ |y_2 - y_0| < b, \ldots, \ |y_n - y_0| < b, \ldots$$

Следовательно, все эти функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ переменного x голоморфны в круге C_h, и действия можно продолжать неограниченно. Далее, мы имеем:

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \{f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)]\}\,dt, \tag{49}$$

где интеграл взят вдоль прямой, соединяющей точки x_0, x. Пусть будет A наибольшее значение модуля $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, когда $|x - x_0| \leqslant h$, $|y - y_0| \leqslant h$; на основании предыдущего, мы имеем попрежнему:

$$|f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)]| < A\,|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|.$$

Чтобы доказать, что и здесь имеет место неравенство, аналогичное неравенствам (45), предположим, что

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| < MA^{n-2}\frac{|t - x_0|^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}.$$

Это соотношение, очевидно, верно при $n = 2$. Положим $x = x_0 + re^{\theta i}$; заменяя переменное $t - x_0$ через $\rho e^{\theta i}$, мы приведем интеграл (49) к интегралу по ρ, взятому вдоль действительной оси от 0 до r, и получим:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \int_0^r MA^{n-1}\frac{\rho^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}\,d\rho = MA^{n-1}\frac{r^n}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

или

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < MA^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Доказательство заканчивается, как и выше. Именно, ряд с общим членом $(y_n - y_{n-1})$, — равномерно сходящийся в круге C_h, и, так как все его члены суть голоморфные функции, то его сумма есть функция, голоморфная в том же круге (§ 290), удовлетворяющая уравнению (48) и принимающая значение y_0 при $x = x_0$. Разложение в целый ряд этого интеграла, конечно, тождественно с тем, которое дает исчисление пределов, но граница для радиуса сходимости здесь выше, чем в первом методе.

Замечание, сделанное в § 389 по поводу линейных уравнений для случая действительных переменных, распространяется также и на аналитические функции комплексного переменного. Предположим, что коэфициенты a_{ik} и b_i уравнений (47) суть аналитические функции комплексного переменного x. Отметим в плоскости x особые точки этих функций и предположим, что из каждой из этих точек проведена неограниченная полупрямая как продолжение отрезка, соединяющего точку x_0 с этою особою точкою. Совокупность точек плоскости, не лежащих ни на одной из предыдущих линий, называется *звездою*, соответствующею системе особых точек. Прямая, соединяющая точку x_0 с любою точкою x звезды, не проходит ни через одну из особых точек, и из рассуждений § 389 следует, что вдоль этой прямой все интегралы системы (47) будут голоморфны. Так как точка x есть любая точка звезды, то отсюда мы заключаем, что все интегралы линейной системы голоморфны во всей звезде; этот результат будет доказан ниже другим способом (§ 399)

Пользуясь методом последовательных приближений, мы можем получить для интегралов линейных уравнений разложения в ряды, сходящиеся во всей звезде. Пусть будет A какая-нибудь область плоскости, ограниченная замкнутым контуром C, лежащим всеми своими точками в звезде; ряды, получаемые методом последовательных приближений, будут *равномерно сходящимися* в области A. Предоставляем читателю найти доказательство этого предложения; оно ведется тем же путем, какой был применен нами выше.

391. Метод Коши-Липшица. Первое из доказательств существования интегралов системы диференциальных уравнений, данных Коши, сохранилось в его лекциях, записанных аббатом Муаньо (Moigno) и напечатанных им в 1844 г. Впоследствии Липшиц значительно упростил это доказательство и выставил на вид предположения, необходимые для того, чтобы это доказательство имело силу.

Чтобы был ясно виден ход рассуждений, возвратимся к простейшему уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Мы доказали (т. I, § 75), что интеграл этого уравнения, принимающий значение y_0 при $x = x_0$, есть предел суммы

$$y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \tag{50}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ суть $(n-1)$ точек промежутка (x_0, x), когда число n неограниченно возрастает так, что все промежутки $(x_i - x_{i-1})$ стремятся к нулю. Этот прием, соответственным образом обобщенный, и приводит к первому доказательству Коши. Для простоты изложения рассмотрим случай одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{51}$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ действительных переменных x, y непрерывна, когда x изменяется от x_0 до $x_0 + a$ и y изменяется от $y_0 - b$ до $y_0 + b$, и что существует такое положительное число k, что если y и y' суть два какихнибудь числа, содержащихся в промежутке $(y_0 - b, y_0 + b)$, и x заключается между x_0 и $x_0 + a$, то

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k\,|y - y'|. \tag{52}$$

Это условие, на важное значение которого указал Липшиц, мы будем называть для краткости *условием Липшица*.

Пусть будет M верхняя граница модуля $|f(x, y)|$ в предыдущей области, и h — меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$ (мы предполагаем, что $a>0$, $b>0$). Чтобы доказать, что уравнение (51) имеет интеграл, принимающий значение y_0 при $x=x_0$ и непрерывный в промежутке (x_0, x_0+h), мы будем подражать, насколько это возможно, ходу рассуждений, которым мы пользовались при доказательстве существования начальной функции от функции $f(x)$. Пусть будет x какое-нибудь значение переменного, заключающееся в промежутке (x_0, x_0+h); возьмем между x_0 и x некоторое число промежуточных значений $x^1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}$, идущих в возрастающем порядке от x_0 до x. Положим последовательно:

$$y_1=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0), \quad y_2=y_1+f(x_1, y_1)(x_2-x_1), \ldots, \tag{53}$$

и вообще

$$y_i=y_{i-1}+f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i-x_{i-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{54}$$

Сумма

$$y_n=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)+f(x_1, y_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n-x_{n-1}) \tag{55}$$

имеет очевидное сходство с суммою (50), в которую она обращается, если функция $f(x, y)$ не зависит от y. Таким образом мы должны исследовать, стремится ли эта сумма (55) к пределу при неограниченном возрастании числа n. Мы расширим эту задачу, введя предварительно две суммы, аналогичные количествам S и s (т. I, § 69).

Рассмотрим треугольник ABC, образуемый прямыми, представляемыми уравнениями:

$$X=x_0+h, \quad Y=y_0+M(X-x_0), \quad Y=y_0-M(X-x_0).$$

Из определения числа h следует, что функция $f(x, y)$ непрерывна, если точка (x, y) остается внутри или на стороне этого треугольника, и ее абсолютное значение не превосходит числа M.

Прямые $X=x_1$, $X=x_2, \ldots, X=x$, параллельные оси Oy, разбивают треугольник ABC на несколько равнобедренных трапеций $C_{i-1}b_{i-1}b_iC_i$, из которых первая приводится к треугольнику Ab_1c_1. Пусть будут M_1 и m_1 наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ в этом треугольнике Ab_1c_1; мы имеем — $M\leqslant m_1<M_1\leqslant M$. Проведем через точку A прямые с угловыми коэфициентами M_1 и m_1; эти прямые встретят прямую $X=x_1$ в двух точках P_1 и p_1, ординаты которых соответственно равны $Y_1=y_0+M_1(x_1-x_0)$ и $y_1=y_0+m_1(x_1-x)$ [здесь буква y_1 обозначает уже не то количество, как в формулах (53)—(55)]. Очевидно, что эти точки P_1 и p_1 лежат внутри или на сторонах треугольника ABC, и $Y_1>y_1$. Проведем через точку P_1 прямую с угловым коэфициентом M до пересечения ее в Q_2 с прямою C_2b_2; точно так же через точку p_1 проведем прямую с угловым коэфициентом — M до пересечения ее в q_2 с тою же прямою a_2b_2. Пусть будут M_2 и m_2 наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ в трапеции $P_1Q_2q_2p_1$; прямая с угловым коэфициентом M_2, проходящая через точку P_1, пересекает прямую a_2b_2 в точке P_2, ордината которой равна

$$Y_2=Y_1+M_2(x_2-x_1),$$

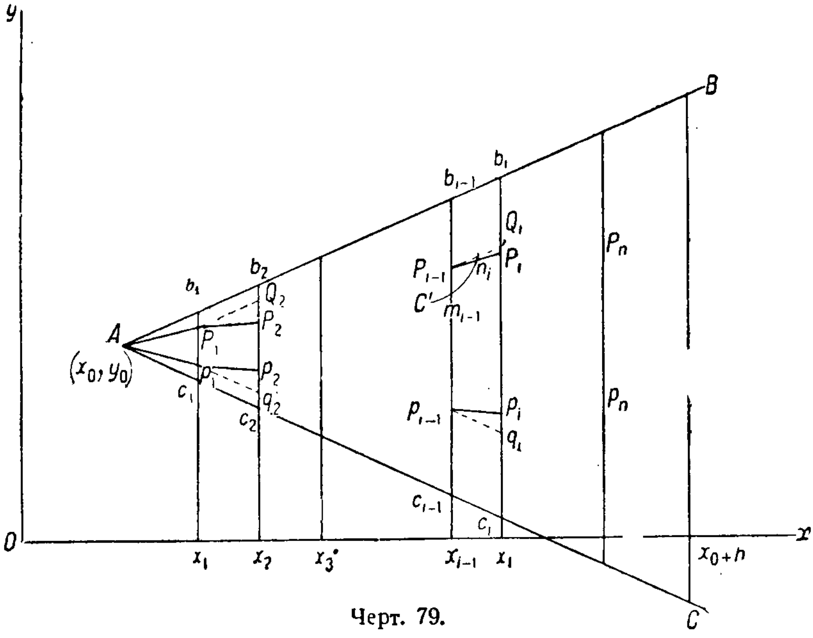
а прямая с угловым коэфициентом m_2, проходящая через p_1, пересекает a_2b_2 в точке p_2 с ординатою $y_2=y_1+m_2(x_2-x_1)$. Очевидно, что мы имеем $Y_2>y_2$ и $Y_2-y_2\geqslant Y_1-y_1$, причем здесь равенство может иметь место только в том случае, если функция $f(x, y)$ остается постоянною в трапеции $P_1Q_2q_2p_1$, так как

$$Y_2-y_2=Y_1-y_1+(M_2-m_2)(x_2-x_1).$$

Этот процесс можно продолжать. Получив на прямой $C_{i-1}b_{i-1}$ две точки P_{i-1} и p_{i-1}, проводим через P_{i-1} прямую, параллельную AB, и через p_{i-1} прямую, параллельную AC; мы получим при этом равнобедренную трапецию $P_{i-1}Q_iq_ip_{i-1}$. Пусть будет M_i наибольшее значение функции $f(x, y)$ в этой трапеции, и m_i — ее наименьшее значение; прямая с угловым коэфициентом M_i, проходящая через P_{i-1}, пересекает прямую C_ib_i в некоторой точке P_i, а прямая с угловым коэфициентом m_i, проходящая через p_{i-1}, пересекает C_ib_i в некоторой точке p_i. Таким образом мы составим две ломаных линии, выходящих из точки A_0:

линию $AP_1P_2 \ldots P_{i-1}P_i \ldots P_n$, которую обозначим через L, и линию $Ap_1p_2 \ldots$ $\ldots p_{i-1}p_i \ldots p_n$, которую обозначим через l; обе эти линии встречают прямую $X = x$ соответственно в точках P_n и p_n. Из самого построения этих линий очевидно, что они обе лежат внутри треугольника ABC, что линия L на всем своем протяжении расположена над линией l, и что расстояние между этими двумя линиями, измеряемое по прямой, параллельной оси Oy, не может убывать при возрастании абсциссы от x_0 до x. Ординаты Y_n и y_n крайних точек линий L и l вполне аналогичны суммам S и s (т. I, § 69); мы положим $S = Y_n$, $s = y_n$.

Каждому способу разбиения промежутка (x_0, x) соответствует своя сумма S и своя сумма s. Если мы разобьем произвольным образом каждый из частичных промежутков (x_{i-1}, x_i) на более мелкие промежутки, то из предыдущего геоме-



Черт. 79.

трического построения непосредственно следует, что линия L', соответствующая этому новому разбиению, будет расположена на всем своем протяжении под линией L, а линия l' — над линией l. Следовательно, мы имеем $S' \leqslant S$, $s' \geqslant s$, где буквы S' и s' обозначают суммы, соответствующие второму разбиению. Отсюда заключаем, как в § 69 (т. I), что если S, s, S_1, s_1 представляют суммы, соответствующие двум *каким-нибудь* способам разбиения промежутка (x_0, x), то мы имеем $s < S_1$, $s_1 > S$. Следовательно, обозначая через I нижнюю границу сумм S и через I' — верхнюю границу сумм s, мы будем иметь $I' \leqslant I$.

Для того чтобы суммы S и s имели общий предел, когда наибольшая амплитуда всех частичных промежутков $x_i - x_{i-1}$ стремится к нулю, необходимо и достаточно, чтобы $S - s$ стремилось к нулю. В самом деле, мы можем представить эту разность в виде:

$$S - s = S - I + I - I' + I' - s;$$

разность $S - s$ может быть меньше произвольного числа ε только в том случае, если каждое из чисел $S - I$, $I - I'$, $I' - s$ (ни одно из них не может быть отрицательным) меньше ε. Но так как положительное число ε произвольно мало, то последнее может иметь место только в том случае, если $I' = I$; кроме того, S и s должны иметь общий предел I. Но, для того чтобы доказать, что $S - s$

имеет пределом нуль, еще не достаточно предположить, что функция $f(x, y)$ непрерывна; здесь именно и необходимо ввести условие Липшица.

Пусть будут Y_i и y_i ординаты точек P_i и p_i, и δ_i — разность $Y_i - y_i$. Так как в треугольнике ABC функция $f(x, y)$ непрерывна, то для всякого положительного числа λ можно найти такое положительное число σ, чтобы было

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \lambda$$

всякий раз, когда расстояние между точками (x, y) и (x', y') треугольника ABC меньше σ; мы будем предполагать, что все разности $x_i - x_{i-1}$ меньше σ. Из построения, посредством которого мы переходили от точек P_{i-1}, p_{i-1} к точкам P_i, p_i, следует, что

$$\delta_i = \delta_{i-1} + (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1});$$

с другой стороны, мы имеем:

$$M_i - m_i = f(x_i', y_i') - f(x_i'', y_i'') =$$
$$= [f(x_i', y_i') - f(x_i'', y_i')] + [f(x_i'', y_i') - f(x_i'', y_i'')],$$

где (x_i', y_i') и (x_i'', y_i'') суть координаты некоторых двух точек трапеции

$$P_{i-1}Q_iq_ip_{i-1}.$$

Следовательно, принимая во внимание условие (52), мы имеем:

$$M_i - m_i < \lambda + K|y_i'' - y_i'|;$$

но разность $|y_i'' - y_i'|$ не может быть больше, чем количество $\delta_{i-1} + 2M(x_i - x_{i-1})$, и поэтому

$$M_i - m_i < \lambda + 2MK(x_i - x_{i-1}) + K\delta_{i-1}.$$

Предположим, что все промежутки настолько малы, что все произведения $2MK(x_i - x_{i-1})$ меньше числа λ; тогда разность $M_i - m_i$ будет меньше числа $2\lambda + K\delta_{i-1}$ и, следовательно, мы будем иметь неравенство:

$$\delta_i < \delta_{i-1}[1 + K(x_i - x_{i-1})] + 2\lambda(x_i - x_{i-1}). \tag{56}$$

Прибавив с обеих сторон по $\frac{2\lambda}{K}$, его можно представить иначе, в виде:

$$\delta_i + \frac{2\lambda}{K} < \left(\delta_{i-1} + \frac{2\lambda}{K}\right)[1 + K(x_i - x_{i-1})].$$

Следовательно, и подавно имеем:

$$\delta_i + \frac{2\lambda}{K} < e^{K(x_i - x_{i-1})}\left(\delta_{i-1} + \frac{2\lambda}{K}\right).$$

Полагая в последней формуле последовательно $i = 1, 2, \ldots, n$ и умножая полученные неравенства почленно, будем иметь:

$$\delta_n + \frac{2\lambda}{K} < \frac{2\lambda}{K} e^{K(x - x_0)},$$

или

$$\delta_n = S - s < \frac{\lambda}{K}[e^{K(x_0 - x)} - 1].$$

Так как положительное число λ можно взять сколь угодно малым, если только все частичные промежутки будут сами меньше некоторого соответственным образом выбранного положительного числа, то мы видим, что суммы S и s имеют общий предел. Этот предел есть функция от x, $F(x)$, определенная в промежутке $(x_0, x_0 + h)$. Покажем теперь, что эта функция $F(x)$ есть интеграл данного уравнения (51), обращающийся в y_0 при $x = x_0$. Для этого мы опять обратимся к геометрическому представлению.

Если все частичные промежутки стремятся к нулю, то не только концы обеих многоугольных линий L и l стремятся к одной *предельной точке*, но и сами эти линии стремятся к некоторой предельной кривой. В самом деле, всякая прямая, параллельная стороне BC, пересекает линию L в некоторой точке P и линию l в некоторой точке p, и расстояние Pp меньше количества $S-s$; кроме того, по свойству этих многоугольных линий ординаты всех точек P больше ординат точек p. Так как при этом расстояние Pp стремится к нулю, то отсюда следует, что точки P и p стремятся к некоторой одной предельной точке π, лежащей на рассматриваемой прямой. Очевидно, что место этих точек π есть некоторая кривая C, расположенная между ломаными линиями L и l и проходящая через точку A. Ордината точки с абсциссою x этой кривой равна определенной выше функции $F(x)$, так как положение точки π на прямой $X=x$ определяется только теми частями обеих многоугольных линий, которые лежат налево от прямой $X=x$. Предположим, что обе ломаные линии L и l продолжены до стороны BC, и все частичные промежутки меньше наименьшего из двух чисел α и $\frac{\lambda}{2MK}$; пусть будут $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывные функции, представляющие в промежутке (x_0, x_0+h) ординаты точек линии L и линии l. Разность $P(x)-Q(x)$ меньше количества $\frac{2\lambda}{K}(e^{Kh}-1)$, а потому каждая из функций $P(x)$, $Q(x)$ отличается от $F(x)$ на еще меньшее количество. Так как число λ можно сделать сколь угодно малым, то мы видим, что можно составить равномерно сходящийся ряд непрерывных функций, имеющий в промежутке (x_0, x_0+h) сумму $F(x)$; следовательно, эта функция $F(x)$ — также непрерывная.

Очевидно, что всякая ломаная линия, лежащая между L и l, имеет своим пределом ту же самую кривую C. Такова, например, многоугольная линия Λ, координаты (x_i, z_i) последовательных вершин которой определяются рекуррентною формулою:

$$z_i = z_{i-1} + f(x_{i-1}, z_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

причем первая вершина лежит в точке (x_0, y_0); таким образом мы приходим к выражениям (55), из которых мы исходили. Заметим также, что, применяя то же построение, начиная от точки $M'(x', y')$ кривой C, мы получим две ломаных линии L' и l', расположенных между L и l и, следовательно, все более и более приближающихся к части кривой C, содержащейся между точкою M' и прямою BC. Заметив это, возьмем на кривой C две точки $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$, близкие между собою $(x''>x')$. Из предыдущих построений очевидно, что угловой коэфициент прямой $M'M''$ заключается между наибольшим и наименьшим из значений, приобретаемых функцией $f(x, y)$, когда точка x, y описывает треугольник, образуемый прямыми:

$$X=x'', \quad Y-y'=M(X-x'), \quad Y-y'=-M(X-x').$$

Если разность $x''-x'$ будет меньше некоторого соответственным образом выбранного положительного числа, то оба эти крайних значения функции $f(x,y)$ будут отличаться от $f(x', y')$ и $f(x'', y'')$ также сколь угодно мало. Следовательно, если одна из двух точек, например M'', неограниченно приближается к первой, то угловой коэфициент прямой $M'M''$ имеет пределом $f(x', y')$. Таким образом функция $F(x)$ удовлетворяет данному диференциальному уравнению (51). Кроме того, очевидно, что кривая C проходит через точку A, т. е. мы имеем $F(x_0)=y_0$.

Кривая C — единственная, удовлетворяющая условиям. Если бы существовала другая кривая C', то эта кривая C' не могла бы быть всеми своими точками ниже всех линий L и выше всех линий l, так как эти линии стремятся к кривой C, и, следовательно, в этом случае кривая C' совпала бы с C. С другой стороны, кривая C' проходит через точку A между линиями L и l. Отсюда следует, что должна быть, по крайней мере, одна линия L или l, с которою кривая C' пересекается. Пусть это будет, например, одна из линий L. Предположим, что C' переходит через линию L снизу вверх, пересекая ее в некоторой точке n_i, лежащей на стороне $P_{i-1}P_i$. Пусть будет m_{i-1} точка кривой C', абсцисса которой равна x_{i-1}; по теореме конечных приращений угловой коэфициент хорды $m_{i-1}n_i$ равен значению функции $f(x, y)$ в некоторой точке дуги $m_{i-1}n_i$; следовательно, этот угловой коэфициент не может быть больше углового коэфициента стороны $P_{i-1}P_i$, так как дуга $m_{i-1}n_i$ лежит внутри трапеции $P_{i-1}Q_iq_ip_{i-1}$; между тем из чертежа видно, что он должен быть больше углового коэфициента прямой $P_{i-1}P_i$.

Мы видим, что изложенный здесь первый метод Коши и метод последовательных приближений дают одну и ту же границу для промежутка, в котором интеграл, наверное, существует. Но, с теоретической точки зрения, метод Коши обладает неоспоримым преимуществом; именно, мы покажем, что, пользуясь этим методом, можно найти интеграл во всяком конечном промежутке, в котором этот интеграл непрерывен. Говоря точнее, предположим, что уравнение (51) имеет интеграл $y=F(x)$, непрерывный в промежутке (x_0, x_0+l), а функция $f(x, y)$ также непрерывна и удовлетворяет условию (52) в области (E) плоскости xOy, ограниченной прямыми $x=x_0$, $x=x_0+l$ и двумя кривыми $Y=F(x)\pm\eta$, где η — произвольное положительное число. Разобьем промежуток (x_0, x_0+l) на более мелкие частичные промежутки и, исходя из точки (x_0, y_0), построим указанную выше ломаную линию Λ, соответствующую принятому способу разбиения. *Если все частичные промежутки будут меньше некоторого соответственно выбранного положительного числа, то эта многоугольная линия на всем своем протяжении будет лежать в области (E), и разность ординат каждых двух точек с общею абсциссою, взятых соответственно на кривой C и на линии Λ, будет меньше любого заранее данного положительного числа ε.*

Пусть будут $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_0+l$ абсциссы точек разбиения, $y_0, y_1, \ldots, Y$ — соответствующие им ординаты кривой C, и $y_0, z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_n$ — ординаты вершин линии Λ. Предположим сначала, что все вершины, расположенные влево от вершины (x_i, z_i), лежат в области (E), и найдем верхнюю границу разности $d_i=|z_i-y_i|$.

С одной стороны, по самому определению линии Λ имеем:

$$z_i=z_{i-1}+f(x_{i-1}, z_{i-1})(x_i-x_{i-1});$$

с другой стороны, из формулы конечных приращений имеем также:

$$y_i=y_{i-1}+f(x_i', y_i')(x_i-x_{i-1}),$$

где (x_i', y_i') — координаты некоторой точки кривой C, а x_i' заключается между x_{i-1} и x_i. Отсюда получаем:

$$z_i-y_i=z_{i-1}-y_{i-1}+(x_i-x_{i-1})[f(x_{i-1}, z_{i-1})-f(x_i', y_i')]. \qquad (57)$$

Коэфициент при (x_i-x_{i-1}) можно представить иначе в виде:

$$[f(x_{i-1}, z_{i-1})-f(x_{i-1}, y_{i-1})]+[f(x_{i-1}, y_{i-1})-f(x_i', y_i')].$$

По условию (52) абсолютное значение первой разности меньше Kd_{i-1}. С другой стороны, так как функция $f(x, y)$ непрерывна в области (E), то она будет непрерывною функциею от x вдоль кривой C, и можно взять настолько малое положительное число σ, чтобы для двух каких-нибудь точек (x, y), (x', y') кривой C количество $|f(x, y)-f(x', y')|$ было меньше некоторого данного положительного числа λ, если $|x-x'|<\sigma$. Следовательно, выбрав число σ под этим условием, мы имеем:

$$d_i<d_{i-1}+(x_i-x_{i-1})(2\lambda+Kd_{i-1}); \qquad (58)$$

это соотношение одинаково с соотношением (56), и мы, как и выше, получим из него:

$$d_i<\frac{2\lambda}{K}[e^{K(x_i-x_0)}-1].$$

Предположим, что число λ настолько мало, что $2\lambda(e^{Kl}-1)<K\eta$; мы последовательно докажем, что все $d_1, d_2, \ldots, d_n$ меньше η. Следовательно, все вершины многоугольной линии Λ лежат в области E).

Пусть будет $P(x)$ ордината какой-нибудь точки линии Λ; точно так же пусть будет $Q(x)$ ордината точки вспомогательной многоугольной линии Λ', которую получим, соединяя между собою прямыми точки кривой C с абсциссами $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0+l$. Мы имеем:

$$P(x)-F(x)=P(x)-Q(x)+Q(x)-F(x).$$

Если колебание функции $F(x)$ в каждом из частичных промежутков меньше числа $\frac{\varepsilon}{2}$, то мы всюду имеем $|Q(x)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Если, кроме того, число η меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, то мы будем иметь $|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, $|P(x)-F(x)|<\varepsilon$. Таким образом непрерывная функция $P(x)$ представляет во всем промежутке (x_0, x_0+l) функцию $F(x)$ с приближением, меньшим числа ε.

Метод Коши-Липшица можно распространить на системы диференциальных уравнений без всяких затруднений, кроме некоторых усложнений в формулах. Он распространяется также и на комплексные переменные. Исследования Пикара („Traité d'Analyse", т. II, стр. 332—340, 2-е изд.) и Пенлеве показали, что этот метод приводит к разложениям в сходящиеся ряды интегралов во всей области их существования, если правые части данных диференциальных уравнений остаются голоморфными в этой области.

392. Разложение $\frac{1}{1-x}$ в ряд многочленов *. Мы применим метод Коши-Липшица к интеграции в комплексной области уравнения $\frac{dy}{dx}=y^2$ с начальным условием $y=1$ при $x=0$. Очевидно, что интеграл, удовлетворяющий этому условию, есть $\frac{1}{1-x}$. Предположим, что x не принимает действительных значений, бо́льших единицы, и разобьем интервал $(0, x)$ точками деления $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \ldots$ $\ldots, \frac{n-1}{n}x$.

Применение общего метода приводит к рассмотрению следующей последовательности, которую мы запишем, изменяя обозначения, в виде:

$$U_0^{(n)}=1, \quad U_1^{(n)}=1+\frac{x}{n}, \quad U_2^{(n)}=1+\frac{2x}{n}+\frac{2x^2}{n^2}+\frac{x^3}{n^3},$$

и вообще

$$U_{p+1}^{(n)}=U_p^{(n)}+\frac{x}{n}\left\{U_p^{(n)}\right\}^2, \quad p\leqslant n-1. \tag{α}$$

Ясно, что $U_n^{(n)}$ есть многочлен степени 2^n-1. Для нахождения верхнего предела модуля разности $U_n^{(n)}(x)-\frac{1}{1-x}$, когда x не равен действительному числу, бо́льшему единицы, рассмотрим, кроме того, последовательность:

$$u_0^{(n)}=1, \quad u_1^{(n)}=\frac{1}{1-\frac{x}{n}}, \quad \ldots, \quad u_p^{(n)}=\frac{1}{1-\frac{px}{n}}, \quad \ldots, \quad u_n^{(n)}=\frac{1}{1-x}.$$

Пусть M верхний предел модуля $\frac{1}{1-z}$, когда z пробегает отрезок прямой от точки $z=0$ до точки $z=x$; каковы бы ни были числа n и p, всегда имеем $|u_p^{(n)}|\leqslant M$. С другой стороны, простое вычисление дает нам:

$$u_{p+1}^{(n)}-u_p^{(n)}=\frac{x}{n}u_p^{(n)}u_{p+1}^{(n)}=\frac{x}{n}(u_p^{(n)})^2+\frac{x^2}{n^2}(u_p^{(n)})^2u_{p+1}^{(n)}. \tag{α'}$$

Положим:

$$U_p^{(n)}-u_p^{(n)}=\Delta_p^{(n)};$$

вычитая почленно соотношения (α) и (α'), получим:

$$\Delta_{p+1}^{(n)}-\Delta_p^{(n)}=\frac{x}{n}\Delta_p^{(n)}\left[U_p^{(n)}+u_p^{(n)}\right]-\frac{x^2}{n^2}\left\{u_p^{(n)}\right\}^2u_{p+1}^{(n)}.$$

---

* E. Goursat, Sur quelques développements de $\frac{1}{1-x}$ en séries de polynomes (*Bulletin des Science mathématiques,* 2-e série, t. XXVII, 1903, p. 226).

Модуль величины $U_p^{(n)} + u_p^{(n)}$ меньше, чем $2M + |\Delta_p^{(n)}|$, и, следовательно, обозначая модуль x через ρ, мы имеем неравенство:

$$|\Delta_{p+1}^{(n)}| < |\Delta_p^{(n)}| + \frac{\rho}{n} |\Delta_p^{(n)}| \{ 2M + |\Delta_p^{(n)}| \} + \frac{\rho^2 M^3}{n^2}. \tag{β}$$

Чтобы доказать, что многочлен $U_p^{(n)}(x)$ стремится к пределу $\frac{1}{1-x}$ при неограниченном возрастании n, достаточно доказать, что $|\Delta_n^{(n)}|$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Для этого рассмотрим одновременно с последовательностью положительных чисел $|\Delta_1^{(n)}|, \ldots, |\Delta_p^{(n)}|$ положительные числа $v_1, v_2, \ldots, v_n$, связанные с $v_0 = 0$ рекуррентной формулой:

$$v_{p+1} = v_p + \frac{\rho}{n} \{ 2Mv_p + v_p^2 \} + \frac{\rho}{n} H, \tag{γ}$$

где

$$H = \frac{\rho M^3}{n}.$$

Мы имеем:

$$|\Delta_1^{(n)}| < \frac{\rho^2 M^3}{n^2} \quad \text{и} \quad v_1 = \frac{\rho^2 M^3}{n^2}$$

и, следовательно,

$$|\Delta_1^{(n)}| < v_1.$$

Сравнивая соотношения (β) и (γ), мы выводим последовательно неравенства:

$$|\Delta_2^{(n)}| < v_2, \ldots, |\Delta_p^{(n)}| < v_p,$$

и, наконец, $|\Delta_n^{(n)}| < v_n$. Но числа $v_1, v_2, \ldots, v_n$ как раз те самые, которые приходится последовательно вычислять при применении метода Коши-Липшица к отысканию интеграла вспомогательного уравнения:

$$\frac{dv}{dx} = 2Mv + v^2 + H, \tag{δ}$$

обращающегося в нуль при $x = 0$. Пусть n настолько велико, что H оказывается меньше M^2. Тогда уравнение $r^2 + 2Mr + H = 0$ имеет два отрицательных корня α, β:

$$\alpha = -M - \sqrt{M^2 - H}, \quad \beta = -M + \sqrt{M^2 - H},$$

и искомый интеграл имеет вид:

$$v = \alpha\beta \frac{1 - e^{(\alpha-\beta)x}}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)x}}. \tag{ζ}$$

Этот интеграл имеет полюс в точке с положительной абсциссой:

$$\eta_1 = \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha - \beta} = \frac{\operatorname{Log}\left\{\frac{M + \sqrt{M^2 - H}}{M - \sqrt{M^2 - H}}\right\}}{2\sqrt{M^2 - H}};$$

η_1 неограниченно возрастает при стремлении H к нулю. Пусть n столь велико, что ρ меньше η_1; тогда функция v непрерывна и возрастает от нуля до ρ, и изображающая ее кривая обращена выпуклостью вниз. Точки с координатами $\left(\frac{p\rho}{n}, v_p\right)$ суть вершины ломаной линии, которая имеет своим пределом при неограниченном возрастании n интегральную кривую, и очевидно, что в силу свойств этой кривой наша ломаная линия лежит под кривой. Следовательно, мы получим, в частности:

$$v_n < \alpha\beta \frac{1-e^{(\alpha-\beta)\rho}}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)\rho}} = \frac{\rho M^3}{n} \frac{1-e^{(\alpha-\beta)\rho}}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)\rho}}.$$

Когда n неограниченно возрастает, α и β стремятся соответственно к $-2M$ и к нулю, а второй множитель имеет пределом $\frac{1-e^{-2M\rho}}{2Me^{-2M\rho}}$. Следовательно, начиная с некоторого n, мы будем иметь:

$$\left|\Delta_n^{(n)}\right| < v_n < \frac{\rho M^3}{n} \frac{1-e^{-2M\rho}}{2Me^{-2M\rho}} = \frac{\rho M^2 (1-e^{-2M\rho})}{2ne^{-2M\rho}}.$$

Многочлен $U_n^{(n)}(x)$ действительно имеет пределом $\frac{1}{1-x}$ при n, стремящемся к бесконечности, *если только x не принимает действительных значений, бо́льших единицы*. Во всякой конечной области плоскости, ограниченной контуром C, не имеющим общих точек с отрезком действительной оси $+1 \ldots +\infty$, многочлен $U_n^{(n)}(x)$ стремится равномерно к $\frac{1}{1-x}$.

Пусть, в самом деле, R есть радиус круга с центром в начале, заключающего в себе область D, и пусть $\mathfrak{M}$ есть максимум $\left|\frac{1}{1-z}\right|$, когда z лежит в области D', описанной радиусом-вектором, соединяющим начало с переменной точкой контура C. Если заменить ρ через R, а M через $\mathfrak{M}$, то предыдущие неравенства будут применимы для всякой точки x области D, и, следовательно, $\Delta_n^{(n)}(x)$ равномерно стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$ в области D.

С помощью многочленов $U_n^{(n)}(x)$ можно образовать ряд многочленов, имеющий своей суммой $\frac{1}{1-x}$ и равномерно сходящийся в области D (т. I, § 197).

III. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. МНОЖИТЕЛЬ

393. Первые интегралы. Пусть будет дана система $n-1$ *аналитических* диференциальных уравнений первого порядка; представим эти уравнения в симметричном виде:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{59}$$

где знаменатели $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такая форма диференциальных уравнений не предрешает выбора независимого переменного, которое может быть одним из переменных x_i или даже может быть взято совершенно произвольно. Выше мы видели, что при некоторых условиях, которые были точно указаны, все интегралы этой системы, проходящие через какую-нибудь точку некоторой определенной области D, представляются системою уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = C_2, \ \ldots, \ f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где $(n-1)$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ — голоморфны в области D, а $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ суть постоянные, которые можно выбирать произвольно, по крайней мере, в некоторых границах (§ 387). Формулы (60) представляют *общий интеграл* системы (59) в области D, которая не охватывает непременно всю совокупность возможных значений переменных. Может случиться, что мы будем иметь несколько систем различных формул, представляющих общий интеграл в различных областях. Ясно также, что даже и в одной и той же области D система формул (60) — не единственная; мы можем заменить $n-1$ функций f_i другими $n-1$ функциями F_i, зависящими только от функций f_i, при условии, чтобы эти $n-1$ функций F_i были независимыми функциями переменных f_i.

Каким бы образом ни были взяты функции f_i, но если формулы (60) представляют общий интеграл системы (59), то функции f_i удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных первого порядка. В самом деле, предположим, что координаты точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интегральной кривой выражены в функции переменного параметра. Если мы заменим в f_i координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их выражениями в функции этого параметра, то результат подстановки должен дать постоянное, следовательно, мы имеем $df_i = 0$ и, заменяя в df_i диференциалы $dx_1, dx_2, \ldots$ пропорциональными им количествами $X_1, X_2, \ldots$, мы найдем, что f_i удовлетворяет уравнению

$$X(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{61}$$

Это соотношение должно удовлетворяться тождественно, если мы заменим в нем f через f_i, так как постоянные C_i можно выбрать таким образом, чтобы интегральная кривая проходила через любую точку области D. Следовательно, $n-1$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ суть $n-1$ интегралов уравнения $X(f) = 0$. Очевидно, что всякая функция $\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ при любом виде функции Π есть также интеграл уравнения (61) в силу соотношения

$$X(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} X(f_1) + \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} X(f_2) + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_{n-1}} X(f_{n-1}),$$

которое нетрудно проверить.

Обратно, мы получаем, таким образом, все интегралы уравнения $X(f) = 0$. В самом деле, исключая коэфициенты X_i из n уравнений

$$X(f) = 0, \quad X(f_1) = 0, \ldots, \quad X(f_{n-1}) = 0,$$

мы получим соотношение:

$$\frac{D(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0;$$

отсюда следует, что f есть некоторая функция $\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ от $n-1$ частных интегралов $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ (т. I, § 52). К тому же результату можно притти также заменою переменных. В самом деле, возьмем новую систему независимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ таким образом, чтобы $n-1$ переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ были равны самим функциям $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, а переменное y_n вместе с функциями $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ образовало систему n независимых функций от первоначальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда уравнение $X(f)=0$ обратится в уравнение такого же вида:

$$Y(f)=Y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+Y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+\ldots+Y_n\frac{\partial f}{\partial y_n}=0, \tag{62}$$

которое должно иметь $n-1$ частных интегралов

$$f=y_1, \ldots, \quad f=y_{n-1}.$$

Отсюда имеем:

$$Y_1=Y_2=\ldots=Y_{n-1}=0,$$

и уравнение (62) обращается в $\frac{\partial f}{\partial y_n}=0$. Следовательно, общий интеграл есть произвольная функция от $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ *.

Отсюда следует, что интегрирование уравнения в частных производных $X(f)=0$ приводится к интегрированию системы диференциальных уравнений (59). Обратно, предположим, что каким-нибудь образом мы получили интеграл f уравнения $X(f)=0$. Если мы заменим в этой функции f переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координатами точек интегральной кривой уравнений (59), выраженными в функции переменного параметра, который может быть и одною из этих координат, то *мы получим постоянное количество*. В самом деле, если мы предположим, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть функции переменного параметра, удовлетворяющие соотношениям (59), то полный диференциал df предыдущей функции приводится к $KX(f)$, где K обозначает общее значение отношений $\frac{dx_i}{X_i}$. Следовательно, уравнение $f=C$ есть следствие системы рассматриваемых диференциальных уравнений; поэтому функция f называется *первым интегралом* этой системы **.

Если известны $n-1$ независимых первых интегралов, то, как было показано, мы непосредственно получим общий интеграл системы (59); если же известны только p независимых первых интегралов ($p<n-1$), то можно привести интегрирование данной системы к интегрированию системы $n-p-1$ диференциальных уравнений. В самом деле, пусть будут $f_1, f_2, \ldots, f_p$ эти p первых интегралов; из p соотношений

$$f_1=C_1, \quad f_2=C_2, \ldots, f_p=C_p$$

можно выразить p из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, например $x_1, x_2, \ldots x_p$ в функции $n-p$ остальных $x_{p+1}, \ldots, x_n$ и p произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Следовательно, остается только определить $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ в функции одного независимого переменного. Если мы обозначим через $\overline{X}_{p+1}, \overline{X}_{p+2}, \ldots, \overline{X}_n$ функции, в которые обратятся функции $X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_n$ после замены переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$

* При обоих этих рассуждениях не требуется, чтобы функция f была аналитическою. Единственными ограничениями, налагаемыми на функцию f, будут те, которые обусловливают возможность применения формул замены переменных, т. е. искомая функция f должна иметь частные производные, и эти производные должны быть непрерывны.

** Это рассуждение неприменимо, если множитель K обращается в бесконечность во всех точках интегральной кривой, что имеет место, если координаты всех точек этой кривой обращают в нуль все n функций X_i. Должно также сделать исключение для тех интегралов, для которых в области каждой точки интегральной кривой по крайней мере одна из функций $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будет неголоморфною. Этот случай имеет место для особых интегралов.

их выражениями, то задача приводится к интегрированию новой системы

$$\frac{dx_{p+1}}{X_{p+1}}=\frac{dx_{p+2}}{X_{p+2}}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}, \tag{63}$$

где знамена е и зависят от p произвольных по тоянных.

Мы можем также рассуждать другим образом Если мы возьмем новую систему независимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, где p пе еменных $y_1, y_2, \ldots, y_p$ тождественны с p известными первыми интегралами $f_1, f_2, \ldots, f_p$, то уравнение $X(f)=0$ об атится в уравнение того же вида $Y(f)=0$, кото ое должно иметь интегралы $f=y_1, \ldots, f=y_p$; следовательно, это уравнение будет иметь вид:

$$Y_{p+1}\frac{\partial f}{\partial y_{p+1}}+\ldots+Y_n\frac{\partial f}{\partial y_n}=0,$$

и его интегрирование приводится к интегрированию системы $n-p-1$ диференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_{p+1}}{Y_{p+1}}=\ldots=\frac{dy_n}{Y_n}.$$

Из этого видно, насколько важно разыскание первых интегралов. В каждом частном случае нахождение нового первого интеграла составляет новый шаг к полному решению. Но для разыскания их нельзя дать никакого определенного правила; заметим только, что задача приводится к составлению *интегрируемого сочетания* уравнений (59), т. е. к нахождению n таких множителей $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, чтобы было:

$$\mu_1X_1+\mu_2X_2+\ldots+\mu_nX_n=0,$$

и чтобы

$$\mu_1\,dx_1+\mu_2\,dx_2+\ldots+\mu_n\,dx_n$$

было точным диференциалом $d\varphi$. В самом деле, очевидно, что из уравнений (59) можно вывести новое отношение, равное первоначальным:

$$\frac{dx_i}{X_i}=\frac{\mu_1\,dx_1+\ldots+\mu_n\,dx_n}{\mu_1X_1+\ldots+\mu_nX_n};$$

следовательно, соотношение

$$d\varphi=\mu_1\,dx_1+\ldots+\mu_n\,dx_n=0$$

будет следствием уравнений (59), если будет:

$$\mu_1X_1+\ldots+\mu_nX_n=0.$$

Зная множители μ_i, мы получим первый интеграл φ квадратурами. В частности, это будет иметь место всякий раз, когда мы можем найти n множителей $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ таким образом чтобы было

$$\sum\mu_iX_i=0,$$

и каждый множитель μ_i зависел бы только от x_i.

Заметим также, что после того, как мы получили p первых интегралов системы (59), может случиться, что новая система вполне интегрируется при частных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, хотя при произвольных значениях этих постоянных выполнить интегрирование на самом деле и невозможно.

Примеры. 1. Требуется проинтегрировать систему

$$\frac{du}{dx}=vw,\quad \frac{dv}{dx}=wu,\quad \frac{dw}{dx}=uv; \tag{64}$$

здесь легко заметить две интегрируемые комбинации $u\,du=v\,dv=w\,dw$. Следовательно, мы имеем два первых интеграла $u^2-v^2=C_1$, $u^2-w^2=C_2$ и, внося значения v и w, выведенные из этих соотношений, в первое уравнение (64), мы придем для определения u к диференциальному уравнению

$$\frac{du}{dx}=\sqrt{(u^2-C_1)(u^2-C_2)}; \tag{65}$$

его общий интеграл есть эллиптическая функция, которая в частных случаях может обращаться в однократно периодическую функцию или даже в рациональную. Так как рассматриваемая система симметрична относительно u, v, w, то мы заключаем, что v и w суть также эллиптические функции от x.

2. Рассмотрим систему

$$\frac{du}{dx}=rv-qw,\quad \frac{dv}{x}=pw-ru,\quad \frac{dw}{dx}=qu-pv, \tag{66}$$

где p, q, r — данные функции от x. Мы имеем здесь интегрируемую комбинацию $u\,du+v\,dv+w\,dw=0$, откуда получаем один первый интеграл $u^2+v^2+w^2=C$. Оставляя в стороне случай, когда $C=0$, мы можем предположить, что $C=1$, так как система (66) не изменяется при умножении u, v, w на один и тот же постоянный множитель. Вместо того, чтобы из соотношения $u^2+v^2+w^2=1$ определять одно из неизвестных, мы можем применить более симметричный прием, рассматривая u, v, w как координаты точек шара с радиусом, равным единице, и выразить их в функции двух переменных параметров, например в функции параметров, определяющих прямолинейные образующие шара. Для этого положим:

$$\frac{u+iv}{1-w}=\frac{1+w}{u-iv}=\lambda,\quad \frac{u+iv}{1+w}=\frac{1-w}{u-iv}=-\mu;$$

отсюда имеем:

$$u=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu},\quad v=i\,\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu},\quad w=\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}.$$

Вставляя эти значения u, v, w в систему (66), мы после несложных вычислений найдем, что λ и μ должны удовлетворять одному и тому же уравнению Риккати:

$$\frac{d\sigma}{dx}=-ir\sigma+\frac{q-ip}{2}+\frac{q+ip}{2}\sigma^2; \tag{67}$$

таким образом интегрирование данной системы приведено к интегрированию уравнения Риккати *.

3. Рассмотрим еще уравнение, проинтегрированное Лиувиллем:

$$y''+\varphi(x)\,y'+f(y)\,y'^2=0,$$

полагая $y'=z$, мы заменим его системою:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{-dz}{\varphi(x)\,z+f(y)\,z^2};$$

отсюда получаем интегрируемую комбинацию $\dfrac{dz}{z}+\varphi(x)\,dx+f(y)\,dy=0$

---

* См. Дарбу, Théorie des surfaces, т. I, гл. II; предыдущий метод сводит определение пространственной кривой по ее натуральным уравнениям: $R=f(s)$, $T=\varphi(s)$, к интегрированию уравнения Риккати.

Следовательно, рассматриваемое уравнение второго порядка имеет первый интеграл

$$y' e^{\int\limits^{x}_{x_0} \varphi(x)\,dx} \, e^{\int\limits^{y}_{y_0} f(y)\,dy} = C;$$

этот интеграл можно получить и непосредственно, разделив на y' все члены данного уравнения второго порядка. Полученное уравнение первого порядка имеет вид: $y' = CXY$, и так как в нем переменные разделены, то интегрирование заканчивается двумя квадратурами.

Примечание I. Иногда заменяют систему (59) системою:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{68}$$

где t есть вспомогательное перемениое, которое в большинстве случаев вводится только для большей симметричности в рассуждениях. Если мы проинтегрируем первоначальную систему (59), то получим t квадратурою; в самом деле, заменяя, например, в X_1 переменные $x_2, x_3, \ldots, x_n$ их выражениями в функции от x_1 и произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, мы придем к соотношению

$$dt = P(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx_1,$$

откуда и получим t квадратурою. Отсюда следует, что общий интеграл новой системы (68) представится n уравнениями:

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \ldots, f_{n-1} = C_{n-1}, \quad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t - t_0, \tag{69}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ суть $n-1$ различных интегралов уравнения $X(f)=0$, и t_0 — новое произвольное постоянное.

Обратно, чтобы получить интегральную кривую системы (59), проходящую через данную точку $(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$, можно обратиться к системе (68) и, рассматривая в ней t как независимое переменное, найти такие ее интегралы, которые при $t=0$ принимали бы соответственно значения $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n$. Пусть будут

$$x_1 = \varphi_1(t; \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n), \quad x_2 = \varphi_2(t; \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n), \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t; \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n) \tag{70}$$

эти интегралы; ясно, что формулы (70) и представляют искомую кривую. Исключение было бы только в том случае, если бы все функции X_i были равны нулю при начальных значениях $\overset{0}{x}_i$ и голоморфны в их области. В этом случае формулы (70) обратились бы в $x_i = \overset{0}{x}_i$. Но, так как при этом отношения $\frac{dx_2}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1}$ принимают неопределенный вид, то еще нельзя утверждать, что не существует никакой интегральной кривой, проходящей через данную точку. Мы исследуем этот случай ниже (§ 417).

Примечание II. Из связи, существующей между системою диференциальных уравнений (59) и линейным уравнением (61), следует, что $X(f)$ есть *ковариант* системы (59). Это значит следующее. Предположим, что мы взяли новую систему независимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанных с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соотношениями:

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n); \tag{71}$$

из формул замены переменных следует, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ есть однородная и линейная функция производных $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, и $X(f)$ переходит в выражение того же вида:

$$Y(f) = Y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0, \tag{72}$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — функции от $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Докажем, что, сделав в уравнениях (59) ту же замену переменных, мы придем к системе диференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}, \tag{73}$$

в которой знаменателями служат те же самые функции $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, которые входят в уравнение (72).

Эту теорему можно было бы доказать непосредственным вычислением, но ее можно вывести также из последних предложений. В самом деле, пусть будет

$$\frac{dy_1}{Z_1} = \frac{dy_2}{Z_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Z_n} \tag{74}$$

система уравнений, которую мы получим, сделав в первоначальной системе уравнений замену переменных (71); достаточно показать, что $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ пропорциональны $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Пусть будет $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ первый интеграл системы (59) и $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — функция, получающаяся из $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ после предыдущей замены переменных; так как мы имеем $X'(f)=0$, то будем также иметь $Y(F)=0$. С другой стороны, очевидно, что $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ есть первый интеграл новой системы (74), т. е. интеграл линейного уравнения

$$Z(F)=Z_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+\ldots+Z_n\frac{\partial F}{\partial y_n}=0.$$

Мы видим, что линейные уравнения $Y(F)=0$, $Z(F)=0$ имеют одни и те же интегралы, следовательно, их коэфициенты пропорциональны, и теорема доказана. Последнее заключение вытекает из того соображения, что линейное уравнение $X(f)=0$ вполне определено до некоторого множителя, если известны его $n-1$ независимых интегралов $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. В самом деле, из $n-1$ уравнений $X(f_i)=0$ линейных и однородных относительно $X_1, X_2, \ldots, X_n$, всегда можно определить отношение этих неизвестных коэфициентов, так как все определители $(n-1)$-го порядка, составляемые из частных производных функций f_i, не могут быть одновременно равны нулю (т. I, § 52). Заметим еще, что самое общее линейное уравнение, имеющее $n-1$ данных интегралов f_i, может быть представлено в виде:

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{D(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=0,$$

где $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция.

394. Множитель. Теория интегрирующего множителя была распространена Якоби на совместные диференциальные уравнения. Пусть будут $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ независимые первые интегралы системы (59); как мы заметили выше, уравнение $X(f)=0$ тождественно с уравнением:

$$\Delta=\frac{D(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=0.$$

Выразив, что коэфициенты при производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в обоих уравнениях пропорциональны, мы придем к n соотношениям вида:

$$\Delta_i=MX_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{75}$$

где Δ_i обозначает коэфициент при $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в определителе Δ. Функция M называется *множителем.*

Каковы бы ни были первые интегралы $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, эта функция M удовлетворяет линейному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}=0. \tag{76}$$

В самом деле, подставив в это уравнение вместо каждого из произведений $MX_i=\Delta_i$ его выражение через определитель $(n-1)$-го порядка и выполнив указанные диференцирования, мы найдем, что каждый член левой части есть произведение производной второго порядка вида $\frac{\partial^2 f_h}{\partial x_i \partial x_k}$ $(i \neq k)$ на $n-2$ частных производных первого порядка. Чтобы доказать, что результат равен нулю, достаточно показать, что он не содержит ни одной производной второго порядка. Возьмем, например, производную $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}$; эта производная находится в двух членах. В первом члене множителем при $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ будет коэфициент при $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ в Δ_1, т. е. $\frac{D(f_2, f_3, \ldots, f_{n-1})}{D(x_3, x_4, \ldots, x_n)}$, а во втором — коэфициент при $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ в Δ_2. Очевидно, что эти коэфициенты получаются один из другого при перестановке в Δ первой и второй строки; следовательно, сумма этих обоих членов равна нулю; то же имеет место для других членов.

Если M_1 есть частный интеграл уравнения (76), то, сделав подстановку $M=M_1\mu$, мы приведем это уравнение к виду $X(\mu)=0$. Отсюда следует, что если мы знаем какой-нибудь множитель M системы (59), то общий интеграл уравнения (76) есть $M\cdot\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где Π — произвольная функция. Всякая функция этого вида есть также множитель; другими словами, существует $n-1$ таких первых интегралов $F_1, \ldots, F_{n-1}$, что $M \cdot \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ можно вывести из $F_1, \ldots, F_{n-1}$ таким же образом, как M выводится из $f_1, \ldots, f_{n-1}$. Для этого должно быть, если $X_1 \neq 0$:

$$\frac{1}{X_1}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \frac{1}{X_1}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = M\Pi,$$

или, по свойству множителя M:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})} = \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}).$$

Этому условию можно удовлетворить бесчисленным множеством способов, и даже взять заранее $n-2$ первых интегралов F_i.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{77}$$

с вспомогательным переменным t. Мы можем привести уравнение (77) к простому виду:

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_{n-1} = 0, \quad dy_n = dt, \tag{78}$$

взяв за новые переменные $n-1$ первых интегралов $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ и функцию f_n, входящую в формулы (69). Нетрудно получить общее выражение множителей уравнений (77) через переменные y_i. В самом деле, всякий множитель имеет вид:

$$M = \frac{1}{X_1}\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1});$$

с другой стороны, мы имеем:

$$X_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial y_n}.$$

Диференцируя по y_n формулы $y_1 = f_1, \ldots, y_n = f_n$, определяющие замену переменных, и решая относительно $\frac{\partial x_1}{\partial y_n}$, получим:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_n} = (-1)^{n-1}\frac{\dfrac{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}}{\dfrac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}};$$

следовательно, общее выражение множителя будет:

$$\frac{1}{M} = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), \tag{79}$$

где Φ — произвольная функция от $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Предположим теперь, что, сделав какую-нибудь замену переменных x_i и не меняя при этом переменного t, мы привели систему уравнений (77) к виду:

$$\frac{dx_1'}{X_1'} = \frac{dx_2'}{X_2'} = \ldots = \frac{dx_n'}{X_n'} = dt, \tag{80}$$

где X_i' — функции новых переменных x_i', не зависящие от t. Если M' есть множитель этой новой системы, то мы имеем также:

$$\frac{1}{M'} = \frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}); \tag{81}$$

взяв в обеих формулах (79) и (81) одну и ту же функцию Φ и разделив их почленно, получим:

$$M' = M\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}. \tag{82}$$

Отсюда следует, что *если известен множитель M для системы* (77), *то из него можно получить множитель M' для преобразованной системы (свойство инвариантности)*.

Этим свойством объясняется практическая важность множителя. Предположим, что мы знаем $n-2$ первых интегралов системы (59) и, кроме того, ее множитель. Тогда заменою переменных можно привести эту систему уравнений к виду:

$$\frac{dx_1'}{0} = \ldots = \frac{dx_{n-2}'}{0} = \frac{dx_{n-1}'}{X_{n-1}'} = \frac{dx_n'}{X_n'} = dt,$$

и мы знаем множитель M' этой новой системы, т. е. решение уравнения

$$\frac{\partial (M'X_{n-1}')}{\partial x_{n-1}'} + \frac{\partial (M'X_n')}{\partial x_n'} = 0;$$

следовательно, M' есть интегрирующий множитель для $X_n'\,dx_{n-1}' - X_{n-1}'\,dx_n'$, и интегрирование заканчивается квадратурами. В этом заключается начало, или принцип последнего множителя Якоби.

Отметим один случай, часто встречающийся в механике, именно, когда $\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$. Уравнение (76) обращается здесь в $X(M) = 0$, и мы непосредственно знаем один множитель $M = 1$.

Это замечание приложимо также к уравнению второго порядка $y'' = f(x, y)$, интегрирование которого приводится к интегрированию системы

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{f(x, y)};$$

если известен ее какой-нибудь первый интеграл $\psi(x, y, y') = C$, то на основании предыдущего можно окончить интегрирование квадратурою. Нетрудно это проверить следующим образом. Решим уравнение $\psi(x, y, y') = C$ относительно y':

$$y' = \varphi(x, y, C).$$

Так как, каково бы ни было постоянное C, все интегралы этого уравнения первого порядка должны удовлетворять уравнению $y'' = f(x, y)$, то должно быть $\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi = f$, и, следовательно, так как f не содержит C:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial C} = 0;$$

отсюда следует, что $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ есть интегрирующий множитель для $dy - \varphi\,dx$.

395. Интегральные инварианты. Свойство инвариантности множителя относительно всякой замены переменных можно связать с общей теорией *интегральных инвариантов*, принадлежащей Пуанкаре *, о которой мы скажем здесь несколько слов. Рассмотрим сначала систему трех диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt, \tag{83}$$

где X, Y, Z — функции от x, y, z. Для простоты изложения мы предположим,

* Пуанкаре, Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. III. гл. XXII и след. См также мемуар Гурса. Sur les invariants intégraux, *Journal de Mathématiques*, 6-я серия, т. IV.

что эти уравнения определяют движение частицы в пространстве, причем t представляет время. Частица, которая в момент $t=0$ находилась в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в момент t пришла в точку M_t с координатами (x, y, z). Когда точка M_0 описывает некоторую область D_0 пространства, точка M_t опишет соответствующую область D_t. Пусть будет $M(x, y, z)$ какая-нибудь функция переменных x, y, z; тройной интеграл $I=\iiint M\,dx\,dy\,dz$ называется *интегральным инвариантом* системы (83), если значение этого тройного интеграла

$$\iiint\limits_{D_t} M(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

распространенного на область D_t, не зависит от t и равно значению того же интеграла, распространенного на область D_0. Например, если уравнения (83) определяют движение *несжимаемой* жидкости, то объем области D_t постоянен, и интеграл $\iiint dx\,dy\,dz$ есть интегральный инвариант.

Точно так же определяются интегральные инварианты линий и поверхностей. Если точка M_0 описывает линию L_0 или поверхность $\sum_0$, то точка M_t опишет линию L_t или поверхность $\sum_t$. Криволинейный интеграл

$$\int \alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz$$

называется интегральным инвариантом, если значение этого интеграла вдоль линии L_t не зависит от t и равно значению того же криволинейного интеграла, взятого вдоль L_0. Точно так же интеграл по поверхности

$$\iint P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

называется интегральным инвариантом, если значение этого интеграла, распространенного на поверхность $\sum_t$, не зависит от t.

Эти определения нетрудно распространить на общий случай системы диференциальных уравнений вида (68). Для такой системы существуют n классов интегральных инвариантов: 1-го порядка, 2-го порядка, ... , n-го порядка, в зависимости от числа измерений множества, на которое распространен интеграл. Условия, при которых кратный интеграл порядка p был бы интегральным инвариантом, можно легко получить при помощи формул замены переменных в кратных интегралах. Мы сделаем вычисление для кратного интеграла n-го порядка. Пусть будет

$$I(t)=\iint\ldots\int\limits_{D_t} M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

кратный интеграл n-го порядка, распространенный на область D_t, соответствующую, как было указано, определенной области D_0; этот интеграл будет интегральным инвариантом, если он не зависит от t, т. е. если $I'(t)=0$. Чтобы вычислить эту производную, дадим t приращение h и найдем коэфициент при h в разложении $I(t+h)$. Обозначим через x_i' измененное значение x_i, соответствующее изменению t в $t+h$; мы имеем:

$$I(t+h)=\iint\ldots\int\limits_{D_t'} M(x_1', \ldots, x_n')\,dx_1'\ldots dx_n',$$

причем новый интеграл распространен на область D_t', точечно соответствующую области D_t. Выражение $I(t+h)$ можно представить иначе в виде:

$$I(t+h)=\iint\ldots\int\limits_{D_t} M(x_1', \ldots, x_n')\,\frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

С другой стороны, опуская члены, содержащие h в степени выше первой, имеем:

$$x_i' = x_i + hX_i + \ldots,$$

$$M(x_1', x_2', \ldots, x_n') = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h\left(X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n}\right) + \ldots,$$

$$\frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 + h\frac{\partial X_1}{\partial x_1} & h\frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \ldots h\frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ h\frac{\partial X_2}{\partial x_1} & 1 + h\frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \ldots h\frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) + \ldots,$$

$$M(x_1', x_2', \ldots, x_n') \frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ h\left[M\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) + X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n}\right] + \ldots$$

Следовательно, производная $\frac{dI}{dt}$ имеет выражение:

$$\frac{dI}{dt} = \int\int \ldots \int_{D_t} \left[\frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n}\right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Чтобы I было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{dI}{dt}$ было тождественно равно нулю, какова бы ни была область D; следовательно, должно быть:

$$\frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0. \tag{84}$$

Условие (84) тождественно с уравнением (76), и мы получаем теорему Пуанкаре; *Чтобы кратный интеграл*

$$\int\int \ldots \int M\, dx_1 \ldots dx_n$$

был интегральным инвариантом, необходимо и достаточно чтобы M было множителем.

Если мы сделаем в уравнениях (77) какую-нибудь замену переменных

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то мы получим новую систему:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt; \tag{77'}$$

если M есть множитель системы (77), то n-кратный интеграл

$$\int\int \ldots \int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

есть интегральный инвариант этой системы, и очевидно, что n-кратный интеграл, который получается из предыдущего тою же заменою переменных,

$$\int\int \ldots \int M(x_1, \ldots, x_n) \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

есть интегральный инвариант преобразованной системы (77'). Следовательно,

$$M' = M\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

есть множитель новых уравнений (77'), как уже это было доказано непосредственно (§ 394).

Пример. Чтобы объем был интегральным инвариантом уравнений (83), $M = 1$ должно быть множителем; отсюда следует, что должно быть:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{85}$$

Это — *условие несжимаемости* жидкости, установившееся движение которой определяется уравнениями (83).

IV. БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

396. Группы с одним параметром*. Всякая совокупность бесконечного множества преобразований какого-нибудь характера, выполняемых над переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, составляет *группу*, если преобразование, являющееся результатом двух каких-нибудь последовательно выполненных преобразований этой совокупности, входит в ту же совокупность. Для определенности рассмотрим два переменных x, y, пусть будет T преобразование, определяемое формулами:

$$x' = f(x, y; a), \quad y' = \varphi(x, y; a), \tag{86}$$

где a есть произвольный параметр. Если мы посмотрим на x и y как на координаты некоторой точки M плоскости, а на x' и y' — как на координаты другой точки M', то предыдущие формулы определяют точечное преобразование. Таким образом каждому значению параметра a соответствует определенное преобразование; изменяя этот параметр, мы получим бесконечное множество различных преобразований. Предположим, что мы выполнили последовательно два различных преобразования этой совокупности, соответствующие двум каким-нибудь значениям a и b параметра. Первое преобразование приведет от пары значений (x, y) к паре значений (x', y'), определяемых формулами (86); второе преобразование приведет затем от пары (x', y') к третьей паре (x'', y''), где

$$x'' = f(x', y'; b), \quad y'' = \varphi(x', y'; b). \tag{87}$$

Заменим в этих последних формулах x' и y' их значениями (86); получающиеся формулы

$$x'' = F(x, y; a, b), \quad y'' = \Phi(x, y; a, b) \tag{88}$$

определяют также точечное преобразование, но зависящее от двух параметров a и b. Мы будем говорить, что совокупность преобразований (86) образует *непрерывную группу с одним параметром*, если новое преобразование (88) принадлежит к той же совокупности (86). Для этого необходимо и достаточно, чтобы формулы (88) имели вид:

$$x'' = f(x, y; c), \quad y'' = \varphi(x, y; c), \tag{89}$$

где c есть значение параметра, зависящее от a и b, $c = \psi(a, b)$. Очевидно, что предыдущее определение применимо при всяком числе переменных и, в частности, при одном переменном. Например, формула с одним переменным $x' = x + a$, или формулы с двумя переменными

$$\begin{aligned} x' &= x + a, & y' &= y + 2a, \\ x' &= x\cos a - y\sin a, & y' &= x\sin a + y\cos a, \\ x' &= ax, & y' &= a^2 y \end{aligned}$$

определяют группы с одним параметром. Напротив, преобразования

$$x' = x + a, \quad y' = y + a^2$$

---

* Теория непрерывных групп преобразований разработана Софусом Ли во многих мемуарах и в сочинении „Theorie der Transformationsgruppen".

не образуют группы, так как преобразование $x'' = x + a + b$, $y'' = y + a^2 + b^2$, являющееся результатом двух последовательных преобразований, не входит в состав той же совокупности.

Если в формулах (86), определяющих группу преобразований мы положим $a = \Pi(\alpha)$, где α — новый параметр, то очевидно, что получающиеся при этом формулы определяют также группу. То же самое будет, если мы сделаем замену переменных, как в этом нетрудно убедиться непосредственно В самом деле, если совокупность точечных преобразований в плоскости такова, что преобразование, являющееся результатом двух последовательных преобразований, входит в состав той же совокупности, то ясно, что это свойство не зависит от выбора координат, помощью которых определяется положение точки в плоскости. Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно следующим образом.

Положим

$$x = \Pi(u, v), \quad y = \Pi_1(u, v);$$

пусть будет, обратно:

$$u = \Pi^{-1}(x, y), \quad v = \Pi_1^{-1}(x, y),$$

так что тождественно имеем:

$$x = \Pi[\Pi^{-1}(x, y), \quad \Pi_1^{-1}(x, y)], \quad y = \Pi_1[\Pi^{-1}(x, y), \quad \Pi_1^{-1}(x, y)].$$

По предположению рассматриваемые преобразования составляют группу, и формулы (89), где ($c = \psi(a, b)$), суть следствия формул (86) и (87). Пусть будут (u, v), $(u'\ v')$, u'', v'') пары значений новых переменных, соответствующие по порядку парам (x, y), (x', y'), (x'', y''). Мы имеем:

$$\begin{aligned} u' = \Pi^{-1}(x', y') &= \Pi^{-1}\{f[\Pi(u, v), \Pi_1(u, v); a], \varphi[\Pi(u, v), \Pi_1(u, v); a]\} = \\ &= F(u, v; a), \\ v' = \Pi_1^{-1}(x', y') &= \Pi_1^{-1}\{f[\Pi(u, v), \Pi_1(u, v); a], \varphi[\Pi(u, v), \Pi_1(u, v); a]\} = \\ &= \Phi(u, v; a). \end{aligned} \tag{90}$$

мы докажем наше предложение, если покажем, что формулы (90) также определяют группу преобразований. Действительно, мы имеем, например:

$$u'' = F(u', v'; b),$$

или

$$u'' = \Pi^{-1}\{f[\Pi(u', v'), \quad \Pi_1(u', v'); b], \quad \varphi[\Pi(u', v'), \quad \Pi_1(u', v'); b]\};$$

так как формулы (86) определяют группу, то правую часть равенства можно представить иначе в виде:

$$\Pi^{-1}[f(x', y'; b), \quad \varphi(x', y'; b)] = \Pi^{-1}[f(x, y; c), \quad \varphi(x, y; c)];$$

поэтому

$$u'' = \Pi^{-1}\{f[\Pi(u, v), \quad \Pi_1(u, v); c], \quad \varphi[\Pi(u, v), \quad \Pi_1(u, v); c]\} = F(u, v, c);$$

точно так же докажем, что $v'' = \Phi(u, v; c)$.

Две группы преобразований, которые можно привести, таким образом, одну к другой заменою переменных, называются *подобными*. Например, группы $x' = ax$, $u' = u + b$ подобны, так как мы переходим от одной к другой, полагая $u = \log x$, $b = \log a$.

Займемся определением всех групп с одним параметром для двух переменных, предполагая, что функции f и φ — аналитические и, кроме того, что группа содержит тождественное преобразование, т. е. что для частного значения a_0 параметра мы имеем при всяких x и y тождества $f(x, y; a_0) = x$, $\varphi(x, y; a_0) = y$.

В уравнениях, выражающих свойства группы,

$$f(x', y'; b) = f(x, y; c), \quad \varphi(x', y'; b) = \varphi(x, y; c) \tag{91}$$

можно рассматривать x, y, a, c как независимые переменные, и b — как функцию от a и c, определяемую соотношением $c = \psi(a, b)$; переменные x', y' суть функции от x, y, a, определяемые формулами (86). Диференцируя соотношения (91) по a, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0. \tag{92}$$

Производная $\frac{\partial b}{\partial a}$ определяется формулою

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}+\frac{\partial \psi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0$$

и, следовательно, зависит только от a и b, поэтому, решая уравнение (92) относительно

$$\frac{\partial x'}{\partial a} \text{ и } \frac{\partial y'}{\partial a},$$

мы будем иметь формулы вида:

$$\frac{\partial x'}{\partial a}=\lambda(a, b)\,\xi(x', y', b), \quad \frac{\partial y'}{\partial a}=\lambda(a, b)\,\eta(x', y', b).$$

Но x' и y' не зависят от b следовательно, также не зависят от b и количества λ, ξ, η, и x' и y' суть интегралы системы диференциальных уравнений

$$\frac{dx'}{\xi(x', y')}=\frac{dy'}{\eta(x', y')}=\lambda(a)\,da, \tag{93}$$

принимающие при $a=a_0$, соответственно, значения x и y. Обратно, каковы бы ни были функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, формулы $x'=f(x, y, a)$, $y'=\varphi(x, y, a)$, представляющие интегралы предыдущей системы, обращающиеся соответственно в x и y при частном значении a_0 параметра, определяют непрерывную группу преобразований. В самом деле, введем для простоты новый параметр t, полагая

$$t=\int_{a_0}^{a}\lambda(a)\,da;$$

тогда формулы (93) представятся в приведенном виде:

$$\frac{dx'}{\xi(x', y')}=\frac{dy'}{\eta(x', y')}=dt. \tag{94}$$

Как мы видели выше (§ 393), общий интеграл этой системы имеет вид:

$$\Omega_1(x', y')=C_1, \quad \Omega_2(x', y')=t+C_2,$$

где Ω_1 и Ω_2 — определенные функции от x', y', и C_1, C_2 — произвольные постоянные. Интегралы, принимающие при $t=0$ значения x и y, определяются системою уравнений:

$$\Omega_1(x', y')=\Omega_1(x, y), \quad \Omega_2(x', y')=\Omega_2(x, y)+t \tag{95}$$

Предыдущие формулы, действительно, определяют непрерывную группу, так как, если мы выполним последовательно два преобразования, соответствующие значениям t_1 и t_2 параметра, то результирующее преобразование будет соответствовать значению t_1+t_2 параметра. Преобразования, соответствующие значениям t и $-t$, обратны одно другому; если мы имеем:

$$x'=f(x, y; t), \quad y'=\varphi(x, y; t),$$

то, обратно будем иметь:

$$x=f(x', y'; -t), \quad y=\varphi(x', y'; -t).$$

Примем за новые переменные

$$u=\Omega_1(x, y), \quad v=\Omega_2(x, y);$$

тогда формулы (95) обращаются в

$$u' = u, \quad v' = v + t, \tag{96}$$

и мы будем говорить, что группа имеет *приведенный вид*. Так как группа $u' = u$, $v' = v + t$ представляет геометрически поступательное перемещение плоскости параллельно прямой $u = 0$, то уравнения (96) показывают, что *всякая непрерывная группа с одним параметром подобна группе переносов.*

Возьмем, например, группу

$$x' = ax, \quad y' = a^2y.$$

Применяя общий метод, имеем:

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = x = \frac{x'}{a}, \quad \frac{\partial y'}{\partial a} = 2\,ay = 2\frac{y'}{a}.$$

В этом случае диференциальные уравнения (93) будут:

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{2y'} = \frac{da}{a} = dt,$$

где $t = \log a$. Конечные уравнения группы представятся формулами

$$\frac{y'}{x'^2} = \frac{y}{x^2}, \quad \log x' = \log x + t,$$

и мы дадим им приведенную форму, взяв за новые переменные $\log x$ и

397. Приложение к диференциальным уравнениям. Мы будем гов что данное диференциальное уравнение

$$F\left(x\ y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{97}$$

имеет *известную* группу преобразований с одним параметром, если, сделав в нем замену переменных x и y по формулам (86), мы получим уравнение, которое будет тождественно с первоначальным, каково бы ни было числовое значение параметра a.

Этим свойством можно воспользоваться, чтобы упростить интегрирование уравнения. В самом деле, приведем сначала уравнения, определяющие рассматриваемую группу, заменою переменных к простому виду:

$$u' = u, \quad v' = v + a.$$

Сделав ту же замену переменных в рассматриваемом диференциальном уравнении, мы придем к новому диференциальному уравнению n-го порядка:

$$\Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \ldots, \frac{d^nv}{du^n}\right) = 0. \tag{98}$$

Каково бы ни было значение параметра a, уравнение (98) не должно изменяться при изменении v в $v + a$; это может быть только в том случае, если левая часть уравнения не содержит переменного v. Если рассматриваемое уравнение — первого порядка, то мы получим общий интеграл квадратурою, если же $n > 1$, то, приняв $\frac{dv}{du}$ за новую неизвестную функцию, мы понизим порядок уравнения на единицу.

Рассмотрим, например, однородное уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это уравнение не изменяется при изменении x и y соответственно в ax и ay, каково бы ни было постоянное a. Но формулы $x' = ax$, $y' = ay$ определяют группу преобразований; их можно представить иначе в виде:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}, \quad \log y' = \log y + t;$$

следовательно, полагая

$$\frac{y}{x}=u, \quad \log y=v,$$

мы придем к уравнению, интегрируемому квадратурою (§ 364).

Рассмотрим еще линейное уравнение первого порядка. Предположим сначала, что это уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx}+Py=0.$$

Так как это уравнение не изменяется при замене y через ay, каково бы ни было постоянное a, то оно допускает группу преобразований $x'=x$, $y'=ay$. Следовательно, взяв $\log y$ за новую неизвестную функцию, мы приведем его интегрирование к квадратуре. Пусть будет теперь

$$\frac{dy}{dx}+Py+Q=0 \tag{99}$$

общее линейное уравнение, и пусть будет y_1 частный интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx}+Py=0,$$

не равный нулю. Легко убедиться, что уравнение (99) не изменяется при изменении y в $y+ay_1$, следовательно, оно имеет группу преобразований, определяемую формулами:

$$x'=x, \quad \frac{y'}{y_1}=\frac{y}{y_1}+a.$$

Поэтому, взяв за новое переменное $\frac{y}{y_1}$, мы получим уравнение, интегрируемое квадратурою. Таким образом мы пришли к вычислениям, изложенным в § 365; вместе с тем нетрудно убедиться, что различные случаи понижения, указанные (§ 380) для уравнений высшего порядка, представляют в сущности лишь частные случаи предыдущего метода.

Таким образом все эти различные приемы, которые на первый взгляд кажутся искусственными и лишенными внутренней связи, могут быть выведены из одного общего начала при помощи теории групп преобразований. С каждою непрерывною группою преобразований переменных x и y с одним параметром можно таким способом связать бесконечно множество уравнений первого порядка, которые интегрируются квадратурою, а также уравнений высших порядков, порядок которых может быть понижен на единицу. Это замечание может быть практически полезно при составлении диференциальных уравнений в некоторых задачах геометрии и механики. В самом деле, предположим, что требуется найти плоские кривые, обладающие некоторым свойством, причем заранее известна такая группа (G) преобразований с одним параметром, что, применив какое-нибудь преобразование группы (G) к кривой, обладающей требуемым свойством, мы получим новую кривую, обладающую тем же свойством. Ясно, что диференциальное уравнение этих кривых будет допускать данную группу преобразований (G). Следовательно, если мы выберем систему координат (u, v) таким образом, чтобы уравнения группы (G) имели вид:

$$u'=u, \quad v'=v+a,$$

то диференциальное уравнение искомых кривых в этой системе координат будет содержать только u, $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}$, ... Предположим, например, что требуется найти проекции на плоскость xOy асимптотических линий или линий кривизны поверхности геликоида, причем ось Oz есть ось винтового движения, которое перемещает поверхность по ней самой. Очевидно, что если кривая C, лежащая на плоскости xOy, представляет решение задачи, то будут служить решениями и все кривые, которые получим, поворачивая кривую C вокруг начала координат на произвольный угол; уравнения этой группы в полярных координатах будут:

$$\rho'=\rho, \quad \omega'=\omega+a.$$

Следовательно, в переменных ρ и ω диференциальное уравнение кривых будет содержать только ρ и $\frac{d\omega}{d\rho}$ (т. I, § 2-7).

До сих пор мы предполагали, что группа G известна. Теперь мы, естественно, приходим к следующей задаче:

Дано диференциальное уравнение; узнать, имеет ли оно одну или несколько непрерывных групп преобразований с одним параметром, и найти эти группы.

Это — очень важный вопрос, на котором я не могу здесь подробно останавливаться; я ограничусь только некоторыми указаниями.

398. Бесконечномалые преобразования. Рассмотрим систему преобразований n переменных, определяемых формулами:

$$x_i' = f_i(x_i, x_2, \ldots, x_n; a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{100}$$

где функции f_i зависят от произвольного параметра a. Мы будем говорить, что эти преобразования образуют *группу*, если преобразование, являющееся результатом двух каких-нибудь последовательно выполненных преобразований этой системы, принадлежит к той же системе. Как и выше, можно доказать, что всякая группа, содержащая тождественное преобразование, т. е. такое, чтобы при некотором значении a_0 параметра и при всяких $x_1, x_2, \ldots, x_n$ было:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_0) = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

получается интегрированием системы диференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1'}{\xi_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')} = \frac{dx_2'}{\xi_2(x_1', x_2', \ldots, x_n')} = \ldots = \frac{dx_n'}{\xi_n(x_1', x_2', \ldots, x_n')} = dt. \tag{101}$$

Пусть будут

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{102}$$

интегралы этой системы, обращающиеся, соответственно, в $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $t = 0$. Формулы (102) определяют непрерывную группу с одним параметром, причем переменное t представляет параметр. В самом деле, мы видели (§ 393), что общий интеграл уравнений (101) можно представить в виде:

$$\Omega_1(x_1', x_2', \ldots, x_n') = C_1, \ldots$$

$$\ldots, \Omega_{n-1}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = C_{n-1}, \quad \Omega_n(x_1', x_2', \ldots, x_n') = t + C_n,$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ суть определенные функции переменных x_i'. Следовательно, интегралы, принимающие при $t = 0$ значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представятся формулами

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_i(x_1', \ldots, x_n') = \Omega_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ &\Omega_n(x_1', \ldots, x_n') = \Omega_n(x_1, \ldots, x_n) + t, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

которые равносильны формулам (102). Из такой преобразованной формы уравнений (102) непосредственно видно, что эти преобразования образуют группу

Пусть будет $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция n переменных x_1; если мы заменим в ней переменные x_i функциями x_i', определяемыми формулами (102), то результат $F(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ будет функциею от $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, которая при $t = 0$ обращается в $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Разложим эту функцию F' по возрастающим степеням переменного t.

Обозначим, вообще, через F' функцию, в которую обращается функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ после замены в ней x_i через x_i'; далее, обозначая через f произвольную функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, введем символ:

$$X(f) = \xi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n};$$

если же переменные x_i заменены через x_i', то точно так же положим

$$X'(f') = \xi_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')\frac{\partial f'}{\partial x_1'} + \ldots + \xi_n(x_1', x_2', \ldots, x_n')\frac{\partial f'}{\partial x_n'}.$$

Принимая во внимание диференциальные уравнения (101), имеем:

$$\frac{dF'}{dt}=\xi_1(x_1', \ldots, x_n')\frac{\partial F'}{\partial x_1'}+\ldots+\xi_n(x_1', \ldots, x_n')\frac{\partial F'}{\partial x_n'}=X'(F');$$

далее, получаем:

$$\frac{d^2F'}{dt^2}=\frac{d}{dt}[X'(F')]=X'[X'(F')],$$

и вообще

$$\frac{d^pF'}{dt^p}=X'^{(p)}(F'),$$

где $X'^{(p)}(F')$ обозначает результат операции X', выполненной последовательно p раз. При $t=0$ переменные $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ обращаются в $x_1, x_2, \ldots, x_n$ производная

$$\left(\frac{d^pF'}{dt^p}\right)_{t=0}=X^{(p)}(F),$$

и мы получаем для разложения F' формулу:

$$\left.\begin{aligned}F'(x_1', x_2', \ldots, x_n')=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)+tX(F)+\\+\frac{t^2}{1\cdot 2}X^{(2)}(F)+\ldots+\frac{t^p}{p!}X^{(p)}(F)+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Если мы предположим, что функция F — правильная в области значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ряд, стоящий в правой части, будет сходящимся, если $|t|$ достаточно мало. В частности, мы имеем:

$$x_i'=x_i+\frac{t}{1}\xi_i+\frac{t^2}{1\cdot 2}X(\xi_i)+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}X^{(2)}(\xi_i)+\ldots \tag{105}$$

Дадим t бесконечно малое значение δt; полагая $\delta x_i=x_i'-x_i$ и пренебрегая бесконечно малыми порядка выше первого относительно δt, мы можем представить предыдущие формулы в виде:

$$\delta x_1=\xi_1\delta t,\quad \delta x_2=\xi_2\delta t,\ \ldots,\ \delta x_n=\xi_n\delta t. \tag{106}$$

Мы будем говорить, что эти формулы определяют *бесконечно-малое преобразование*;

$$X(f)=\sum \xi_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

есть символ этого бесконечно малого преобразования. Всякой группе с одним параметром соответствует некоторое бесконечно малое преобразование, и обратно, мы можем произвольно выбрать n функций $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и $X(f)$ будет символом бесконечно малого преобразования, определяющего непрерывную группу, уравнения которой мы получим, интегрируя систему диференциальных уравнений (101). Введение бесконечно малых преобразований позволяет применить к теории групп методы исчисления бесконечно-малых. Сверх того, во многих вопросах, касающихся групп, входят только бесконечно малые преобразования, как мы это увидим на нескольких примерах.

Будем рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты точки в пространстве n измерений, и t как переменное, измеряющее время. При изменении t точка с координатами $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ описывает в пространстве n измерений кривую или *траекторию*, выходящую из точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом пространство n измерений или, по крайней мере, некоторая область, взятая в этом пространстве, разобьется на множество многообразий одного измерения, причем каждая точка этой области будет принадлежать только одному такому многообразию. Если, каково бы ни было t, мы имеем:

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n')=F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *инвариантом* рассматриваемой группы.

Нетрудно получить все инварианты группы. В самом деле, полагая в уравнении (104) $F' = F$ и разделив обе части на t, получим:

$$X(F) + \frac{t}{2} X^{(2)}(F) + \ldots + \frac{t^{p-1}}{1 \cdot 2 \ldots p} X^{(p)}(F) + \ldots = 0;$$

так как это равенство должно иметь место при всяком t, то, в частности, должно быть $X(F) = 0$. В этом случае мы будем говорить, что функция F допускает бесконечно малое преобразование группы. Предыдущее условие — также и достаточное, так как, если $X(F) = 0$, то будет и $X[X(F)] = 0$ и, следовательно, $X^{(p)}(F) = 0$ при всяком p. Таким образом *единственные инварианты группы с одним параметром суть интегралы уравнения* $X(f) = 0$.

Заметим, что если две группы имеют, соответственно, бесконечномалые преобразования $X(f)$ и $\Pi X(f)$, где $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть произвольная функция, то эти две группы имеют те же инварианты, хотя они и не тождественны между собою. Если мы применим к одной и той же точке преобразования той и другой группы, то эта точка опишет в обоих случаях одну и ту же траекторию, но с различными скоростями. Обратно, если две группы имеют те же инварианты, то оба бесконечномалых преобразования $X(f)$ и $Y(f)$ могут различаться только множителем $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящим только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так как оба уравнения $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$ должны иметь одни и те же интегралы.

Введем еще следующее важное понятие. Пусть будет

$$x_1 = f(x, y; a), \quad y_1 = \varphi(x, y; a) \tag{107}$$

непрерывная группа с двумя переменными. Если мы применим преобразование этой группы ко всем точкам плоской кривой C, то мы получим другую плоскую кривую C_1. Пусть будут $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ производные от y по x, и

$$y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n)}$$

производные от y_1 по x_1; мы видели (т. I, § 57), как можно выразить эти последние производные через $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, и мы там получили формулы вида:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \psi_1(x, y, y'; a), \\ y_1'' &= \psi_2(x, y, y', y''; a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} &= \psi_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}; a), \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Формулы (107) и (108) определяют также группу преобразований $n+2$ переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, которая называется *группою, продолженною* из первой. Мы примем это предложение без доказательства, хотя это доказательство и не представляет никаких затруднений, кроме довольно больших выкладок. Мы здесь покажем только, как можно вычислить бесконечно малое преобразование продолженной группы. Пусть будет

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

бесконечномалое преобразование данной группы. Возьмем уравнения этой группы:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{t}{1}\xi(x, y) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\left(\xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \ldots, \\ y_1 &= y + \frac{t}{1}\eta(x, y) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\left(\xi\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \ldots; \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

отсюда получаем:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy + \frac{t}{1}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}dy\right) + \ldots}{dx + \frac{t}{1}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy\right) + \ldots}.$$

Нам нужен только коэфициент при t правой части; мы его получим делением Он равен

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Следовательно, символ бесконечиомалого преобразования продолженной группы при $n=1$ будет:

$$\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}+\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2\right]\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Этот прием имеет вполне общий характер. Если коэфициент при t в разложении $y_1^{(n-1)}$ равен $\pi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, то мы имеем для $y_1^{(n)}$:

$$y_1^{(n)}=\frac{dy_1^{(n-1)}}{dx_1}=\frac{dy^{(n-1)}+\frac{t}{1}d\pi+\ldots}{dx+\frac{t}{1}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy\right)+\ldots},$$

и коэфициент при t правой части равен

$$\frac{d\pi}{dx}-y^{(n)}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}y'\right).$$

Таким образом мы можем вычислить последовательно бесконечномалые преобразования продолженных групп, получающихся из рассматриваемой группы, до любого значения n.

Мы будем говорить, что система диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{110}$$

допускает группу преобразований G с одним параметром, определяемую формулами (100), если после замены переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменными

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'$$

она превращается в систему

$$\frac{dx_1'}{X_1'}=\frac{dx_2'}{X_2'}=\ldots=\frac{dx_n'}{X_n'}, \tag{111}$$

тождественную с прежней, каково бы ни было значение параметра a, т. е. если в системе (111) $X_1', X_2', \ldots, X_n'$ суть такие же функции от $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, какими были в (110) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из связи, существующей между системою (110) и уравнением в частных производных

$$X(f)=X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \tag{112}$$

следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы всякое преобразование группы G превращало уравнение

$$X'(f')=\sum_{i=1}^{n}X_i'(x_1', x_2', \ldots, x_n')\frac{\partial f'}{\partial x_i'}=0$$

в линейное уравнение, равносильное уравнению $X(f)=0$, каково бы ни было значение параметра a. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть интеграл уравнения $X(f)=0$, то $f(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ есть также интеграл уравнения $X'(f)=0$ и, следовательно, после замены $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ их выражениями (100) $f(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ должно быть также интегралом уравнения $X(f)=0$. Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы система диференциальных уравнений (110) имела группу преобразований G, будет условие, чтобы всякое преобразование этой группы изменяло интеграл уравнения $X(f)=0$ в интеграл того же уравнения.

Пусть будет

$$T(f)=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\tag{113}$$

бесконечномалое преобразование группы G. Заменяя параметр a определенным выше параметром t, мы имеем:

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n')=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\frac{t}{1}T(f)+\frac{t^2}{1\cdot 2}T[T(f)]+\ldots$$

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть какой-нибудь интеграл уравнения (112), то должно быть интегралом и $f(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, а следовательно, и

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n')-f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

или

$$T(f)+\frac{t}{2}T[T(f)]+\ldots,$$

каково бы ни было t. В частности, $T(f)$ должно быть интегралом уравнения (112). Это условие и достаточно. В самом деле, пусть будет $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ система $n-1$ независимых интегралов; если $T(f_1), T(f_2), \ldots, T(f_{n-1})$ — интегралы, то будет интегралом и $T(f)$, где f — какой-нибудь другой интеграл; в самом деле, мы имеем $f=\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ и, следовательно:

$$T(f)=\frac{\partial\Pi}{\partial f_1}T(f_1)+\ldots+\frac{\partial\Pi}{\partial f_{n-1}}T(f_{n-1}).$$

Но если $T(f)$ есть интеграл, то на основании предыдущего будет интегралом и $T[T(f)]$ и т. д., а следовательно, и $f(x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

Таким образом *для того чтобы система* (110) *допускала группу преобразований G, необходимо и достаточно, чтобы, если f есть интеграл уравнения $X(f)=0$, то было бы интегралом и $T(f)$*. Для краткости мы будем говорить, что уравнение $X(f)=0$ допускает бесконечномалое преобразование $T(f)$.

После этих разъяснений рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}.\tag{114}$$

Чтобы уравнение

$$X(f)=A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

допускало бесконечномалое преобразование

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

должно быть:

$$A\frac{\partial\omega}{\partial x}+B\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,\qquad \xi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}=\Pi(\omega),$$

где $\omega(x, y)$ есть интеграл уравнения $X(f)=0$, отличный от постоянного, и $\Pi(\omega)$ — произвольная функция от ω. Отсюда получаем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{B\Pi(\omega)}{A\eta-B\xi},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{A\Pi(\omega)}{A\eta-B\xi};$$

и, следовательно,

$$\frac{d\omega}{\Pi(\omega)}=\frac{B\,dx-A\,dy}{B\xi-A\eta};$$

следовательно, $\frac{1}{B\xi - A\eta}$ есть интегрирующий множитель для $B\,dx - A\,dy$. Обратно, пусть будет $\varphi(x, y)$ такая функция, что ее полный диференциал равен:

$$d\varphi = \frac{B\,dx - A\,dy}{B\xi - A\eta};$$

мы имеем:

$$X(\varphi) = A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad T(\varphi) = \xi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1;$$

следовательно, $T(\varphi)$ есть интеграл уравнения $X(\varphi) = 0$, и мы можем выразить результат следующим образом:

Чтобы диференциальное уравнение (114) *допускало группу преобразований, получающихся из бесконечномалого преобразования*

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{B\xi - A\eta}$$

было интегрирующим множителем для $B\,dx - A\,dy$.

В этом новом методе требуется только знание бесконечномалых преобразований группы. Так как каждое уравнение первого порядка имеет бесконечное множество интегрирующих множителей, то отсюда следует, что всякое уравнение первого порядка допускает бесконечное множество бесконечномалых преобразований.

Вернемся к общему случаю системы (110). Пусть будут $X(f) = 0$ соответствующее ей линейное уравнение и $T(f)$ — символ бесконечномалого преобразования. Рассмотрим уравнение

$$Z(f) = X[T(f)] - T[X(f)] = 0, \tag{115}$$

где $X[T(f)]$ обозначает результат операции $X(f)$, примененной к $T(f)$, и $T[X(f)]$ имеет аналогичное значение. Выражение $Z(f)$ есть однородная линейная функция производных первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и не содержит ни одной производной второго порядка; для доказательства достаточно убедиться, что коэфициенты при каждой производной второго порядка одинаковы в $X[T(f)]$ и в $T[X(f)]$. В самом деле, в $T[X(f)]$ коэфициент при $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ равен $X_i\xi_i$, а при $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}$ равен $X_i\xi_k + X_k\xi_i$; легко видеть, что такие же коэфициенты будут и в $X[T(f)]$. Следовательно, уравнение $Z(f) = 0$ имеет такой же вид, как уравнение $X(f) = 0$, и, раскрывая его коэфициенты, мы можем представить его в виде:

$$Z(f) = [X(\xi_1) - T(X_1)]\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + [X(\xi_i) - T(X_i)]\frac{\partial f}{\partial x_i} + \ldots = 0. \tag{116}$$

Если $T(f)$ есть интеграл уравнения $X(f) = 0$ всякий раз, когда f есть интеграл этого уравнения, то очевидно, что всякий интеграл уравнения $X(f) = 0$ удовлетворяет линейному уравнению $Z(f) = 0$, следовательно, должно быть (§ 393):

$$X[T(f)] - T[X(f)] = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,X(f), \tag{117}$$

где $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть произвольная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обратно, если мы имеем тождество такого вида, то всякий интеграл уравнения $X(f) = 0$ удовлетворяет также уравнению $X[T(f)] = 0$, и следовательно, $T(f)$ есть также интеграл уравнения $X(f) = 0$. Таким образом *необходимое и достаточное условие того, чтобы линейное уравнение $X(f) = 0$ допускало бесконечномалое преобразование $T(f)$ выражается соотношением* (117), *где ρ есть произвольная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Соотношение (117) равносильно $n-1$ независимым соотношениям;

$$\frac{X(\xi_1)-T(X_1)}{X_1}=\frac{X(\xi_2)-T(X_2)}{X_2}=\ldots=\frac{X(\xi_n)-T(X_n)}{X_n}.$$

Рассмотрим диференциальное уравнение n-го порядка:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\varphi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \ldots,\, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right); \tag{118}$$

чтобы узнать, допускает ли оно группу преобразований G получающихся из бесконечномалого преобразования

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

достаточно заменить уравнение (118) системою n диференциальных уравнений первого порядка, взяв за вспомогательные неизвестные $n-1$ производных $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, и исследовать, допускает ли эта система бесконечномалое преобразование группы, продолженной из G.

Возьмем, например, уравнение второго порядка $y''=\varphi(x, y, y')$. Его можно заменить системою

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y'}=\frac{dy'}{\varphi(x, y, y')},$$

или линейным уравнением

$$X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\varphi(x, y, y')=0;$$

достаточно рассмотреть, допускает ли это уравнение бесконечномалое преобразование

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}+\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2\right]\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Выполняя вычисления, мы получим условие, содержащее x, y и y', которое должно удовлетворяться при всех значениях этих переменных. Если уравнение второго порядка дано, и нужно найти, какие оно имеет бесконечномалые преобразования, то неизвестные функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ не должны содержать y'. Выразив, что предыдущее соотношение не зависит от y', мы можем получить в зависимости от данной функции $\varphi(x, y, y')$ конечное или бесконечное число уравнений, которым должны удовлетворять функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Вообще, эти уравнения — не совместимы; это показывает, что произвольно взятое уравнение второго порядка не имеет бесконечномалых преобразований; то же относится и к уравнениям высшего порядка. Отсюда понятно, каким образом Софус Ли мог классифицировать диференциальные уравнения по числу различных бесконечномалых преобразований, которые они допускают.

УПРАЖНЕНИЯ.

1*. Пусть будет M_0 наибольшее абсолютное значение функции $f(x, y_0)$, когда x изменяется от x_0 до x_0+a, и буквы a, b, K, x_0, y_0 имеют те же значения, как в § 391. Доказать, что интеграл уравнения $y'=f(x, y)$, принимающий значение y_0 при $x=x_0$, есть функция, непрерывная в промежутке $(x, x_0+\rho)$, где ρ есть меньшее из двух чисел a и $\frac{1}{K}\lg\left(1+\frac{Kb}{M_0}\right)$.

[Линделёф (Lindelöf), *Journal de Mathématiques*, 1894] [Как в § 398, последовательно доказываем существование неравенств:

$$|y_n-y_{n-1}|<M_0K^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot2\ldots n};$$

отсюда y_n будет заключаться между y_0-b и y_0+b, если

$$e^{K(x-x_0)}<1+\frac{bK}{M_0}\Big].$$

2. Найти два первых интеграла систем совместных уравнений:

$$\frac{dy}{dx}+\varphi'(x)\,y-\psi'(x)\,z=0,\quad \frac{dz}{dx}+\psi'(x)\,y+\varphi'(x)\,z=0; \qquad (\alpha)$$

$$(z-y)^2\frac{dy}{dx}=z,\quad (z-y)^2\frac{dz}{dx}=y; \qquad (\beta)$$

$$\frac{dy}{y(x+y)}=\frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}=\frac{-dx}{x(x+y)}. \qquad (\gamma)$$

3. Доказать, что выражение

$$\frac{1}{y-xf\left(\frac{x}{y}\right)}$$

есть интегрирующий множитель для

$$dy-f\left(\frac{y}{x}\right)dx.$$

4. Доказать, что общий вид диференциальных уравнений первого порядка, допускающих бесконечномалое преобразование

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y},$$

есть

$$\frac{xy'-y}{x+yy'}=\varphi(x^2+y^2).$$

Вывести отсюда их интегрирующий множитель.

5. Найти общий вид диференциальных уравнений первого порядка, допускающих одно из бесконечномалых преобразований

$$\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}\quad\text{или}\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+ay\frac{\partial f}{\partial y}.$$

6. Найти группу преобразований для диференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x+ay),$$

где a — постоянное, и вывести отсюда интегрирующий множитель.

7*. Диференциальные уравнения пространственной упругой кривой

$$y'z''-z'y''=\delta x'+\frac{1}{2}\beta y,$$

$$z'x''-x'z''=\delta y'-\frac{1}{2}\beta x,$$

$$x'y''-y'x''=\delta z'+\alpha,$$

где α, β, δ — постоянные, имеют два первых интеграла $x'^2+y'^2+z'^2=1$, $\beta(x^2+y^2)-4z'=C$. Мы получим затем x и y, интегрируя диференциальное уравнение второго порядка.

[Эрмит, Sur quelques applications des fonctions elliptiques (стр. 93); Oeuvres, t. III, стр. 361.]

ГЛАВА XX.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

Из диференциальных уравнений до настоящего времени лучше всего исследованы линейные уравнения. Они обладают целым рядом характеристических свойств, которые резко выделяют их из других уравнений и облегчают их изучение. Сверх того, они встречаются в очень многих важных приложениях анализа, и весьма полезно изучить их прежде, чем мы приступим к рассмотрению диференциальных уравнений общего вида. Мы будем рассматривать здесь, за немногими исключениями, только такие линейные уравнения, коэфициенты которых суть аналитические функции независимого переменного.

399. Особые точки линейного диференциального уравнения. Линейное диференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y+a_{n+1}=0, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ суть функции одного переменного x. Его интегрирование равносильно интегрированию системы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_{n-1}}{dx}+a_1 y_{n-1}+\ldots+a_{n-1}y_1+a_n y+a_{n+1}=0,\\ &\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $n-1$ производных от y входят как вспомогательные переменные. Предположим, что все коэфициенты a_i голоморфны в круге C_0 с радиусом R и с центром в точке x_0; пусть будут $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ n произвольных постоянных. Прилагая к уравнениям (2) общие выводы, полученные выше (§ 384), мы заключаем, что *уравнение* (1) *имеет интеграл, голоморфный в круге C и принимающий значение y_0 при $x=x_0$, тогда как его $n-1$ последовательных производных принимают при $x=x_0$ значения*

$$y_0',\ y_0'',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}.$$

Из общей теории мы уже знаем, что это — единственный интеграл уравнения (1), удовлетворяющий этим начальным условиям; для краткости мы будем говорить, что этот интеграл определяется начальными условиями $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$. Предположим сначала для определенности, что коэфициенты a_i суть однозначные функции переменного x, имеющие на всей плоскости только изолированные особые точки. Пусть будет L какой-нибудь путь, соединяющий две не особые точки x_0 и X и не проходящий ни через одну из особых точек коэфициентов a_i; интеграл, определяемый начальными условиями $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, представится целым рядом $P(x-x_0)$, сходящимся в круге C_0, описанном из точки x_0 и проходящем через особую точку, ближайшую к точке x_0. Пользуясь этим рядом, можно проследить за непрерывным изменением интеграла вдоль пути L, пока этот путь не выходит из круга C_0. Если линия L выходит из круга C_0 в какой-нибудь точке a, то мы можем взять на этом пути точку x_1, лежащую внутри круга C_0 и настолько близкую к a, чтобы круг C_1 с центром в точке x_1, проходящий через особую точку ближайшую к точке x_1, не лежал весь внутри круга C_0. Пользуясь рядом $P(x-x_0)$, а также рядами, получающимися от его диференцирования, мы можем вычислить значения интеграла и его $(n-1)$ последовательных производных в точке x_1. Пусть будут $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ эти значения; интеграл уравнения (1), определяемый начальными условиями $(x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})$, представится целым рядом $P_1(x-x_1)$, сходящимся в круге C_1. Суммы двух рядов $P(x-x_0)$ и $P_1(x-x_1)$ равны между собою в части, общей обоим кругам, так как они обе представляют интеграл уравнения (1), удовлетворяющий одним и тем же начальным условиям. Отсюда следует, что ряд $P_1(x-x_1)$ представляет аналитическое продолжение в круге C_1 той аналитической функции, которая определяется в круге C_0 рядом $P(x-x_0)$. Если часть пути L, заключающаяся между x_1 и X, не лежит вся внутри круга C_1, то мы возьмем на этом пути новую точку x_2, лежащую внутри C_1, и т. д.

Мы, наверное, придем к кругу, содержащему точку X, после *конечного* числа таких операций. В самом деле, пусть будет S длина пути L, и δ — нижняя граница расстояний между точками пути L и особыми точками. Радиусы последовательно введенных нами кругов будут не меньше δ, и мы можем выбрать центры этих кругов таким образом, чтобы расстояние между двумя последовательными центрами было больше $\frac{\delta}{2}$. Соединяя последовательно эти центры прямыми, мы получим после p операций ломаную линию, длина которой будет не меньше $p\frac{\delta}{2}$. Если $p\frac{\delta}{2} > S$, то длина этой ломаной линии будет больше длины пути L; следовательно, после не более чем $p-1$ операций мы придем к кругу, содержащему всю часть пути L, заключающуюся между центром этого круга и точкою X.

Из всего предыдущего видно, что можно проследить за аналитическим продолжением интеграла вдоль всего пути, описываемого переменным x, пока этот путь не проходит ни через одну из особых точек коэфициентов a_i. Следовательно, мы заранее знаем, каковы те точки, которые только одни могут быть особыми точками интегралов линейного уравнения. При этом может случиться, что какая-нибудь точка a будет особою точкою некоторых из коэфициентов a_i и вместе с тем не будет особою точкою *всех* интегралов. В частном случае, когда все коэфициенты a_i суть многочлены или целые функции, все интегралы суть функции, голоморфные во всей плоскости, т. е. целые функции, которые могут приводиться и к многочленам.

Предыдущие рассуждения распространяются также и на тот случай, когда коэфициенты a_i имеют какие-нибудь особенности, причем эти коэфициенты могут быть многозначными функциями. Если мы выходим из точки x_0, в которой эти коэфициенты голоморфны, и перемещаем переменное x по пути L, вдоль которого можно иметь аналитическое продолжение коэфициентов a_i, то вдоль этого пути мы можем иметь также и аналитическое продолжение интегралов. Целые ряды, представляющие интегралы, будут сходящимися в тех же кругах, как и ряды, представляющи- коэфициенты.

Все эти результаты вполне согласны с выводами, полученными нами по методу последовательных приближений (§ 389).

400. Фундаментальные системы. Рассмотрим линейное уравнение однородное, т. е. не содержащее члена, не зависящего от y:

$$F(y)=\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0; \qquad (3)$$

мы обозначаем здесь через $F(y)$ уже не функцию переменного y, а результат диференциальной операции, выполненной над функциею y переменного x. Из самого определения этого символа следует, что, если $y_1, y_2, \ldots, y_p$ суть p каких-нибудь функций от x, а $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — какие-нибудь постоянные, то мы имеем тождественно:

$$F(C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_py_p)=C_1F(y_1)+C_2F(y_2)+\ldots+C_pF(y_p).$$

Отсюда видно, что если $y_1, y_2, \ldots, y_p$ — интегралы уравнения (3), то будет интегралом и количество $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_py_p$, каковы бы ни были числовые значения постоянных C_i. Следовательно, если мы знаем n частных интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ этого уравнения, то мы можем получить из них интеграл:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (4)$$

в выражение которого входят n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Отсюда еще нельзя заключить, что формула (4) представляет общий интеграл уравнения (3); для этого нужно предварительно убедиться, что можно выбрать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ таким образом, чтобы при частном значении x_0 переменного x, отличном от особых точек, функция y и ее $n-1$ последовательных производных имели любые заданные значения. Обозначим для краткости через $(y_i^p)_0$ значение p-й производной частного интеграла y_i в точке x_0. Приравнивая произвольным количествам значения интеграла y и его $n-1$ первых последовательных производных в точке x_0, мы получим для определения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ систему n линейных уравнений. Определитель, образованный коэфициентами при этих неизвестных, должен быть отличен от нуля. Элементами этого определителя служат функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их производные до $(n-1)$-го порядка; мы обозначим этот определитель через $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Этот определитель носит название *определителя Вронского*. Если определитель $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, который есть голоморфная функция от x во всей области, где коэфициенты a_i голоморфны, не равен тождественно нулю, то мы возьмем для x_0 такую точку, в которой этот определитель не обращается в нуль; тогда мы можем определить постоянные C_i таким образом, чтобы y и его $n-1$ последовательных производных приняли при x_0 любые начальные значения. Следовательно, всякий интеграл уравнения (3) заключается в формуле (4); поэтому говорят, что эта формула представляет *общий интеграл* уравнения (3), а те интегралы $y_1, y_2, \ldots, y_n$, при которых определитель $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не равен тождественно нулю образуют *фундаментальную систему интегралов.*

Если определитель $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ равен тождественно нулю, то некоторые из интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ могут быть получены из остальных. Вообще, мы будем говорить, что n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, переменного x *линейно зависимы*, если между этими n функциями существует соотношение вида:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0, \tag{6}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные, не равные все нулю. *Чтобы n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы определитель $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ был тождественно равен нулю.*

Прежде всего это условие — необходимое. В самом деле, из соотношения (6) находим $n-1$ соотношений того же вида:

$$C_1 y_1^{(p)} + C_2 y_2^{(p)} + \ldots + C_n y_n^{(p)} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{7}$$

между производными первого, второго и т. д. порядков от функций y_i. Так как, по предположению, коэфициенты C_i не равны все нулю, то уравнения (6) и (7) могут быть совместными только в том случае, если определитель $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ тождественно равен нулю.

Обратно, пусть будет $\Delta = 0$, и предположим сначала, что все миноры первого порядка определителя Δ относительно элементов последней строки не равны тождественно нулю; пусть, например, коэфициент при $y_n^{(n-1)}$

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{n-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Пусть будет A часть плоскости переменного x, в которой функции y_i голоморфны, и в которой этот определитель δ не равен нулю. Положим

$$\left.\begin{aligned} y_n &= K_1 y_1 + K_2 y_2 + \ldots + K_{n-1} y_{n-1}, \\ y_n' &= K_1 y_1' + K_2 y_2' + \ldots + K_{n-1} y_{n-1}', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n^{(n-2)} &= K_1 y_1^{(n-2)} + K_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + K_{n-1} y_{n-1}^{(n-2)}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

из этих $n-1$ уравнений мы получим для $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ функции от x, голоморфные в области A, так как K_i есть частное от деления голоморфной функции на минор δ, не равный нулю в области A. Эти функции $K, \ldots, K_{n-1}$ удовлетворяют также соотношению:

$$y_n^{(n-1)} = K_1 y_1^{(n-1)} + K_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + K_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}, \tag{9}$$

так как определитель $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ равен нулю во всех точках области A. Диференцируя один раз каждое из уравнений (8) и принимая во внимание как эти уравнения, так и соотношение (9), получим:

$$K_1' y_1 + \ldots + K_{n-1}' y_{n-1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + K_{n-1}' y_{n-1}^{(n-2)} = 0$$

и, следовательно, $K_1' = K_2' = \ldots = K_{n-1}' = 0$. Следовательно, функции $K_1, \ldots, K_{n-1}$ равны постоянным, и мы, действительно, имеем между n функциями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соотношение вида (6), где все коэфициенты постоянны, причем коэфициент C_n отличен от нуля. Очевидно, что это соотношение, выведенное для области A, имеет место во всей области существования функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Заметим, что минор δ равен определителю

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1});$$

если этот минор δ тождественно равен нулю, причем $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ отлично от нуля, то, как и выше, мы выведем отсюда, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ удовлетворяют соотношению вида (6), где $C_n = 0$ и $C_{n-1} \neq 0$. Следовательно, продолжая те же рассуждения, мы будем приходить всегда к соотношению вида (6), где некоторые из коэфициентов могут быть нулями. Таким образом, если мы знаем n интегралов уравнения (3) таких, что $\Delta(y, y_2, \ldots, y_n) = 0$, то по крайней мере один из этих интегралов есть линейная комбинация с постоянными коэфициентами других интегралов. Может случиться, что эти n интегралов приводятся на самом деле к p различным интегралам $(p < n-1)$; для этого необходимо и достаточно, чтобы все определители, аналогичные Δ, которые можно образовать из $p+1$ этих интегралов, были равны нулю, но по крайней мере один из определителей, составленный из p интегралов, был отличен от нуля.

С помощью этой леммы можно также доказать, что общий интеграл уравнения (3) представляется формулою вида (4). В самом деле, пусть будет $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ фундаментальная система интегралов, и y — какой-нибудь другой интеграл; из $n+1$ уравнений

$$F(y) = 0, \quad F(y_1) = 0, \ \ldots, \quad F(y_n) = 0$$

мы получим, исключая коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, соотношение:

$$\Delta(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \tag{10}$$

Следовательно, между этими $n+1$ интегралами существует зависимость:

$$Cy + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n = 0,$$

где $C, C_1, \ldots, C_n$ — постоянные, не равные все нулю; при этом коэфициент C при y наверное отличен от нуля, так как интегралы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно различны.

Всякое линейное уравнение n-го порядка имеет бесконечное множество фундаментальных систем интегралов. Чтобы получить одну из таких систем, достаточно взять n таких интегралов, чтобы определитель, составленный из начальных значений этих n интегралов и их $(n-1)$ последовательных производных, не был равен нулю в точке x_i, отличной от особых точек. Пусть будет $y_1, y_2, \ldots, y_n$) первая фундаментальная система, тогда n интегралов $Y_1, Y_2 \; Y_n$, определяемых формулами:

$$Y_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \ldots + c_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

с постоянными коэфициентами c_{ik}, также образуют фундаментальную систему, если определитель D, составленный из n^2 коэфициентов c_{ik}, отличен от нуля. В самом деле, по правилу умножения определителей имеем:

$$\Delta(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = D \cdot \Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Из этой формулы следует, что отношение $\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{d\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{dx}$ одинаково для всех фундаментальных систем; мы проверим это, составив это отношение.

Припомним сначала формулу, выражающую производную от определителя:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \ldots & l_n \end{vmatrix}.$$

В раскрытом виде этот определитель равен $\sum \pm a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots l_\lambda$, причем сумма распространяется на все перестановки $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ первых n чисел, а знак $\pm$ зависит от класса перестановки. Таким образом мы получим:

$$D' = \sum \pm a_\alpha' b_\beta c_\gamma \ldots l_\lambda + (\sum \pm a_\alpha b_\beta' c_\gamma \ldots l_\lambda) + \ldots + (\sum \pm a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots l_\lambda');$$

но $\sum \pm a_\alpha' b_\beta c_\gamma \ldots l_\lambda$ представляет собою в развернутом виде тот определитель, который получается из D заменой элементов первого столбца их производными; аналогично и для следующих групп членов в выражении D'. Таким образом производная от определителя D порядка n равна сумме n определителей, каждый из которых получается из D заменой всех элементов одного столбца или одной строки соответствующими производными.

Применим это правило к определителю $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; первые $n-1$ из получаемых определителей равны нулю, как имеющие по две одинаковых строки, и мы будем иметь:

$$\frac{d\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Эта формула верна, каковы бы ни были функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$; если же эти функции суть интегралы уравнения (3), то мы можем заменить в последней строке $y_1^{(n)}$ через $-a_1 y_1^{(n-1)} - \ldots - a_n y_1$ и сделать такую же замену для остальных элементов. Раскрывая полученный определитель по элементам последней строки и замечая, что некоторые определители будут иметь по две одинаковых строки, получим окончательно:

$$\frac{d\Delta}{dx} = -a_1\Delta. \tag{11}$$

Следовательно, искомое отношение равно $-a_1$. Вместе с тем из этой формулы мы можем получить значение определителя:

$$\Delta = \Delta_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1 dx},$$

где Δ_0 обозначает значение определителя Δ при $x = x_0$. Из полученного выражения для определителя Δ видно, что, если Δ не равно тождественно нулю то Δ будет отлично от нуля во всякой обыкновенной (не особой) точке; этот результат можно было бы вывести также и непосредственно из найденных ранее свойств определителя Δ.

Следует заметить, что всякое линейное уравнение с фундаментальною системою интегралов $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно представить в виде (10):

$$\Delta(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

причем коэфициенты при $y^{(p)}$ содержат только интегралы y_i и их производные. Отсюда следует, что n каких-нибудь линейно независимых функций всегда можно рассматривать как фундаментальную систему интегралов некоторого линейного уравнения.

401. Неоднородное линейное уравнение. Выделяя член, не зависящий от y, мы можем представить неоднородное линейное уравнение в виде:

$$F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x); \tag{12}$$

для краткости мы будем называть это уравнение *уравнением с правою частью*, а уравнение $F(y) = 0$ — *уравнением без правой части.* Если мы знаем какой-нибудь частный интеграл Y уравнения (12), то, произведя подстановку $y = Y + z$, мы приведем интегрирование этого уравнения, в силу тождества $F(Y + z) = F(Y) + F(z)$, к интегрированию уравнения без правой части $F(z) = 0$. Следовательно, общий интеграл уравнения с правою частью представится формулою:

$$y = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{13}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть n частных интегралов уравнения без правой части, образующих фундаментальную систему, и $C_1, C_2, \ldots, C_n$ суть n произвольных постоянных. В приложениях часто бывает нетрудно найти частный интеграл линейного уравнения с правой частью; в этом случае остается проинтегрировать уравнение без правой части. При нахождении частного интеграла уравнения с правой частью часто бывает полезно следующее почти очевидное замечание: если $f(x)$ есть сумма p функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_p(x),$$

таких, что мы можем найти частный интеграл каждого из уравнений

$$F(y) = f_1(x),\ F(y) = f_2(x), \ldots,\ F(y) = f_p(x),$$

то сумма $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$ этих p частных интегралов есть интеграл уравнения $F(y) = f(x)$.

Относительно линейного уравнения с правой частью существует следующее общее предложение: *если известен общий интеграл уравнения без правой части, то всегда можно получить квадратурами общий интеграл уравнения с правой частью.*

Прием, данный для этой цели Лагранжем, называется *методом изменения постоянных*. Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ фундаментальная система интегралов уравнения $F(y)=0$; следуя насколько возможно близко тому приему, которым мы пользовались в случае линейного уравнения первого порядка (§ 365), попытаемся удовлетворить уравнению (12), взяв для y выражение вида

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{14}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ обозначают n функций от x. Очевидно, что между этими функциями можно установить $n-1$ произвольных соотношений, лишь бы эти соотношения не были несовместимы с уравнением (12). Положим:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 C_1' + y_2 C_2' + \ldots + y_n C_n' = 0,\\
&y_1' C_1' + y_2' C_2' + \ldots + y_n' C_n' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&y_1^{(n-2)} C_1' + y_2^{(n-2)} C_2' + \ldots + y_n^{(n-2)} C_n' = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

легко видеть, что тогда производные от y до $(n-1)$-го порядка представятся выражениями:

$$\left.\begin{aligned}
y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n',\\
y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Первое из соотношений (15) выбрано таким образом, чтобы производная первого порядка y' имела то же выражение, как если бы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ были постоянными; то же относится и к следующим соотношениям. Производная n-го порядка имеет менее простой вид:

$$\begin{aligned}
y^{(n)} = {} & C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + \\
& + y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} C_n'.
\end{aligned}$$

Вставляя предыдущие выражения для $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в левую часть уравнения (12), мы найдем, что коэфициенты при $C_1, C_2, \ldots, C_n$ равны, соответственно, $F(y_1), \ldots, F(y_n)$, и, таким образом, мы придем к новому соотношению:

$$y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} C_n' = f(x). \tag{15'}$$

Из соотношений (15) и (15') можно определить $C_1', \ldots, C_n'$; следовательно, мы получим $C_1, C_2, \ldots, C_n$ квадратурами.

К рассматриваемой задаче можно также применить следующий метод, принадлежащий Коши.

Пусть будет $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ фундаментальная система интегралов уравнения $F(y)=0$. Определим постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ таким образом, чтобы интеграл

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

вместе со своими $n-2$ последовательными производными был равен нулю при $x=\alpha$, и чтобы его производная $(n-1)$-го порядка обращалась в единицу.

Полученный, таким образом, интеграл $\varphi(x, \alpha)$, очевидно, зависит от переменного x а также от начального значения α, и удовлетворяет n условиям:

$$\varphi(\alpha, \alpha)=0,\ \varphi'(\alpha, \alpha)=0,\ \varphi''(\alpha, \alpha)=0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(\alpha, \alpha)=1, \tag{17}$$

где $\varphi^{(p)}(\alpha, \alpha)$ обозначает производную порядка p от $\varphi(x, \alpha)$ относительно x, в которой после диференцирования x заменено через α. Заменяя в предыдущих соотношениях α через x, что равносильно простому изменению обозначений, мы представим их в виде:

$$\varphi(x, x)=0,\ \varphi'(x, x)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(n-2)}(x, x)=0,\ \varphi^{(n-1)}(x, x)=1, \tag{17 bis}$$

причем $\varphi^{(p)}(x, x)$ обозначает теперь производную порядка p от $\varphi(x, \alpha)$ относительно x, где после диференцирования α заменено через x. Рассмотрим функцию, представляемую определенным интегралом:

$$Y=\int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha, \tag{18}$$

взятым от произвольного постоянного предела x_0. Применяя общую формулу диференцирования интегралов и обращая внимание на условия (17 bis), мы имеем последовательно:

$$\frac{dY}{dx}=\int_{x_0}^{x} \varphi'(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha, \ldots, \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}=\int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\frac{d^nY}{dx^n}=\int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + f(x);$$

вставляя эти значения $Y, Y', \ldots, Y^{(n)}$ в $F(Y)$, получим:

$$F(Y)=f(x)+\int_{x_0}^{x} [\varphi^{(n)}(x, \alpha)+a_1\varphi^{(n-1)}(x, \alpha)+\ldots+a_n\varphi(x, \alpha)] f(\alpha)\, d\alpha.$$

Функция, стоящая в правой части под знаком интеграла, тождественно равна нулю, так как $\varphi(x, \alpha)$ есть интеграл уравнения без правой части, каково бы ни было значение параметра α. Отсюда следует, что функция Y представляемая определенным интегралом (18), есть частный интеграл линейного уравнения с правой частью. Можно заметить, что этот интеграл вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно равен нулю при нижнем пределе x_0, который предполагается обыкновенною точкою коэфициентов данного уравнения *.

---

* Нетрудно проверить, что метод изменения постоянных и метод Коши приводят к тем же вычислениям. В самом деле, функция $\varphi(x, \alpha)$ Коши имеет вид:

$$\varphi(x, \alpha)=\varphi_1(\alpha) y_1(x)+\varphi_2(\alpha) y_2(x)+\ldots+\varphi_n(\alpha) y_n(x),$$

причем функции $\varphi_i(\alpha)$ определяются условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(\alpha) y_1(\alpha)+\ldots+\varphi_n(\alpha) y_n(\alpha)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_1(\alpha) y_1^{(n-2)}(\alpha)+\ldots+\varphi_n(\alpha) y_n^{(n-2)}(\alpha)=0,\\ &\varphi_1(\alpha) y_1^{(n-1)}(\alpha)+\ldots+\varphi_n(\alpha) y_n^{(n-1)}(\alpha)=1, \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

и частный интеграл (18) имеет выражение:

$$Y=y_1(x)\int_{x_0}^{x} \varphi_1(\alpha) f(\alpha)\, dx+\ldots+y_n(x)\int_{x_0}^{x} \varphi_n(\alpha) f(\alpha)\, dx.$$

Но из сравнений условия (A) с соотношениями (15) и (15'), определяющими функции C_i' в методе изменения постоянных, непосредственно видно, что $C_i'(x)=\varphi_i(x) f(x)$, и следовательно, метод изменения произвольных постоянных дает частный интеграл посредством тех же квадратур, что и метод Коши.

Применение этого метода к уравнению $\frac{d^n y}{dx^n}=f(x)$ приводит к результату, совпадающему с уже полученным выше (§ 379).

402. Понижение порядка линейного уравнения. Если известно несколько частных интегралов линейного уравнения, то ими можно воспользоваться для понижения порядка уравнения. Рассмотрим сначала однородное уравнение n-го порядка; пусть будут $y_1, y_2, \ldots, y_p \, (p<n)$ линейно независимые интегралы этого уравнения. Сделав подстановку $y=y_1 z$, где z обозначает новую неизвестную функцию, мы приведем данное уравнение $F(y)=0$ к уравнению того же вида относительно z, так как выражение каждой производной $\frac{d^p y}{dx^p}$ линейно относительно z и производных от z. Если y_1 есть интеграл уравнения $F(y)=0$, то новое уравнение относительно z должно иметь решение $z=1$; отсюда следует, что коэфициент при z равен нулю; последнее можно проверить непосредственным вычислением, так как коэфициент при z есть именно $F(y_1)$. Следовательно, уравнение относительно z будет иметь вид:

$$y_1 \frac{d^n z}{dx^n}+b_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}+\ldots+b_{n-1} \frac{dz}{dx}=0; \tag{19}$$

где, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ — функции от x. Полагая $u=\frac{dz}{dx}$, мы приведем уравнение (19) к линейному уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$y_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}+b_1 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}}+\ldots+b_{n-1} \, u=0. \tag{20}$$

Если $y_1, y_2, \ldots, y_p$ суть p интегралов данного уравнения, то уравнение (19) имеет $p-1$ интегралов $\frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_p}{y_1}$, и следовательно, уравнение (20) имеет $p-1$ интегралов:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right), \ldots, \frac{d}{dx}\left(\frac{y_p}{y_1}\right).$$

Эти $p-1$ интегралов линейно независимы; в противном случае существовало бы соотношение вида:

$$C_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+\ldots+C_p \frac{d}{dx}\left(\frac{y_p}{y_1}\right)=0,$$

где $C_2, \ldots, C_p$ — постоянные, не равные все нулю, и, интегрируя, мы получили бы соотношение того же вида $C_2 y_2+\ldots+C_p y_p+C_1 y_1=0$, где C_1 — новое постоянное. Если $p>1$, то применяя тот же прием к уравнению (20), мы придем к новому линейному уравнению $(n-2)$-го порядка, и т. д. Следовательно, *интегрирование однородного линейного уравнения, у которого известны p независимых частных интегралов, приводится к интегрированию однородного линейного уравнения порядка $n-p$ и к квадратурам.*

Если $p=n-1$, то последнее уравнение само интегрируется в квадратурах.

Точно так же, если известны p таких интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_p$ уравнения с правой частью, что $p-1$ функций

$$y_2-y_1, \ldots, y_p-y_1$$

линейно независимы, то, сделав подстановку $y=y_1+z$, мы придем к уравнению без правой части, имеющему $p-1$ интегралов $y_2-y_1, \ldots, y_p-y_1$. Следовательно, это уравнение можно привести к линейному уравнению $(n-p+1)$-го порядка без правой части.

Рассмотрим, например, линейное уравнение второго порядка

$$F(y)=\frac{d^2 y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0; \tag{21}$$

пусть будет y_1 частный интеграл этого уравнения. Полагая $y=y_1 z$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=y_1\frac{dz}{dx}+z\frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=y_1\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx}+z\frac{d^2y_1}{dx^2}.$$

Вставляя предыдущие выражения в уравнение (21) и замечая, что коэфициент при z равен нулю, будем иметь:

$$y_1\frac{d^2z}{dx^2}+\left(2\frac{dy_1}{dx}+py_1\right)\frac{dz}{dx}=0. \tag{22}$$

Полагая $\frac{dz}{dx}=u$, мы представим это уравнение в виде

$$\frac{du}{u}+\left(2\frac{dy_1}{dx}+py_1\right)\frac{dx}{y_1}=0;$$

интегрируя, имеем:

$$\operatorname{Log} u+\int_{x_0}^{x} p\,dx+\operatorname{Log} y_1^2=\operatorname{Log} C,$$

или

$$u=\frac{C}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x} p\,dx}.$$

Выполнив еще квадратуру, найдем z, а следовательно и y; мы видим, что уравнение (21) имеет интеграл y_2, определяемый формулою

$$y_2=y_1\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x} p\,dx} \tag{23}$$

отличный от интеграла y_1. Следовательно, *если известен частный* *интеграл однородного линейного уравнения второго порядка, то мы получим общий интеграл двумя квадратурами* *.

Это свойство сближает линейное уравнение второго порядка с уравнением Риккати (§ 368). И действительно, между этими двумя видами диференциальных уравнений существует тесная связь. Применяя к однородному уравнению (21) прием понижения порядка (§ 380, 3°), именно, полагая $y = e^{\int z dx}$, мы придем к уравнению Рикатти:

$$z' + z^2 + pz + q = 0. \tag{24}$$

Обратно, если дано какое нибудь уравнение Риккати

$$u' + au^2 + bu + c = 0, \tag{25}$$

где a, b, c — функции от $x\,(a \neq 0)$, то, полагая $u = \frac{z}{a}$, мы приведем его к виду (24), именно:

$$z' + z^2 + \left(b - \frac{a'}{a}\right) z + ac = 0.$$

Отсюда следует, что общий интеграл уравнения (25) есть

$$u = \frac{1}{a} \frac{C_1 y_1' + C_2 y_2'}{C_1 y_1 + C_2 y_2}, \tag{26}$$

где y_1 и y_2 — два независимых интеграла линейного уравнения:

$$y'' + \left(b - \frac{a'}{a}\right) y' + acy = 0;$$

формула (26) содержит в действительности только одно произвольное постоянное, именно $\frac{C_2}{C_1}$, и притом это постоянное входит в нее в первой степени **.

---

* Из этих формул можно вывести простое доказательство одной важной теоремы Штурма. Предположим, что коэфициенты p и q в промежутке (a, b) суть действительные непрерывные функции действительного переменного x; пусть будут x_0 и x_1 два последовательных нуля частного интеграла $y_1(x)$, заключающиеся в промежутке (a, b). Если $y_2(x)$ есть другой частный интеграл, отличный от $y_1(x)$, то из формулы для u имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p dx};$$

отсюда видно, что отношение $\frac{y_2}{y_1}$ изменяется постоянно в одном направлении, когда x возрастает от x_0 до x_1. Но это отношение обращается в бесконечность при $x = x_0$ и $x = x_1$; следовательно, оно или постоянно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ или постоянно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно *уравнение $y_2(x) = 0$ имеет в промежутке (x_0, x_1) корень, и притом только один.*

** На первый взгляд кажется, что нужно выполнить квадратуру, чтобы из общего интеграла уравнения Риккати (24) вывести общий интеграл линейного уравнения (21). На самом деле это не так или, точнее, эта квадратура приводится к вычислению интеграла $\int p dx$. Вообще, пусть будет $z = \varphi(x, C)$ общий интеграл диференциального уравнения первого порядка $\frac{dz}{dx} = f(x, z)$; из соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, \varphi),$$

диференцируя его по постоянному C, имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C \partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial C},$$

Пример. Полином X_n Лежандра (т. I, § 86) удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0; \tag{27}$$

чтобы это доказать, достаточно заметить, что, полагая $u=(x^2-1)^n$, имеем соотношение $(x^2-1)u'=2nxu$, и, взяв от обеих частей производные $(n+1)$-го порядка, получим уравнение, которое после замены в нем $\frac{d^nu}{dx^n}$ через y будет тождественно с уравнением (27). Чтобы иметь второй частный интеграл уравнения (27), применим общую формулу (23); здесь p равно

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1},$$

и мы получим:

$$y_2=X_n\int\frac{dx}{(x^2-1)X_n^2}.$$

На первый взгляд кажется, что для вычисления этого интеграла необходимо знать n корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ полинома X_n; но на самом деле это не так. В самом деле, выделяя простые дроби, происходящие от корней $+1$ и -1 знаменателя, имеем:

$$\frac{1}{(x^2-1)X_n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{P_n}{X_n^2},$$

где P_n есть многочлен степени $2n-2$, представляющий частное от деления $1-X_n^2$ на x^2-1. Следовательно, мы получим:

$$y_2=\frac{1}{2}X_n\operatorname{Log}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+X_n\int\frac{P_n}{X_n^2}dx.$$

Последний интеграл есть рациональная функция, так как если бы он содержал логарифмический член вида $\operatorname{Log}(x-\alpha_i)$, то точка α_i была бы особою точкою

или

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{Log}\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right),$$

следовательно,

$$\int\frac{\partial f}{\partial\varphi}dx=\operatorname{Log}\frac{\partial\varphi}{\partial C},$$

где, разумеется, в обоих частях должно взять одно и то же значение для постоянного C. Применяя эту формулу к уравнению Риккати (24), заключаем, что если $\alpha=\varphi(x, C)$ есть общий интеграл этого уравнения, то

$$2\int z\,dx+\int p\,dx+\operatorname{Log}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right)=0.$$

Отсюда находим для интеграла уравнения (21):

$$y=e^{\int z\,dx}=e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Если z_1, z_2, z_3 суть три интеграла уравнений (24), то, определяя z из уравнения

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=c$$

§ 368) и выполнив вычисления, находим, что общий интеграл линейного уравнения (21) имеет вид

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}\cdot\frac{C_1(z_3-z_1)+C_2(z_3-z_2)}{\sqrt{(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)}}.$$

для интеграла y_2; но интегралы уравнения (27) не могут иметь других особых точек, кроме $x = \pm 1$ (§ 399). Поэтому этот интеграл можно вычислить при помощи элементарных действий (т. I, § 97); так как он должен иметь вид $\frac{Q_{n-1}}{X_n}$, где Q_{n-1} есть многочлен не выше $(n-1)$-й степени, то, например, можно определить коэфициенты этого многочлена из условия

$$Q'_{n-1} X_n - Q_{n-1} X'_n = P_n.$$

Найдя многочлен Q_{n-1}, мы получим общий интеграл уравнения (27) в виде:

$$y = C_1 X_n + C_2 \left[Q_{n-1} + \frac{1}{2} X_n \operatorname{Log}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right].$$

403. Аналогии с алгебраическими уравнениями. Все предыдущие свойства устанавливают очевидную аналогию между теорией линейных диференциальных уравнений и теорией алгебраических уравнений. Эта аналогия видна в очень многих вопросах. Покажем, например, как можно распространить на линейные уравнения теорию общего наибольшего делителя. Пусть будет, вообще,

$$F(y) = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y$$

символический многочлен, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ суть данные функции от x; если a_0 не равно нулю, то для краткости мы будем говорить, что $F(y)$ есть многочлен n-го порядка. Если $G(y)$ есть символический многочлен порядка p такого же характера, то ясно, что $G[F(y)]$ есть также символический многочлен порядка $n+p$ такого же характера. Пусть будет

$$F_1(y) = b_0 \frac{d^m y}{dx^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dy}{dx} + b_m y$$

другой многочлен порядка $m \, (m \leqq n)$. Тогда можно найти такой третий многочлен $G(y)$ порядка $n-m$, чтобы многочлен $F(y) - G[F_1(y)]$ был не выше порядка $m-1$ (многочлен нулевого порядка имеет вид ay, где a есть функция от x). В самом деле, положим

$$G(y) = \lambda_0 \frac{d^{n-m} y}{dx^{n-m}} + \lambda_1 \frac{d^{n-m-1} y}{dx^{n-m-1}} + \ldots + \lambda_{n-m} y.$$

Коэфициент при $\frac{d^n y}{dx^n}$ в $G[F_1(y)]$ равен $\lambda_0 b_0$, и если мы положим $\lambda_0 = \frac{a_0}{b_0}$, то разность $F(y) - \lambda_0 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [F_1(y)]$ будет не выше $(n-1)$-го порядка; пусть будет a_1' коэфициент при $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ в этой разности. Если мы положим $\lambda_1 = \frac{a_1'}{b_0}$, то разность

$$F(y) - \lambda_0 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [F_1(y)] - \lambda_1 \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} [F_1(y)]$$

будет не выше $(n-2)$-го порядка. Продолжая те же действия, мы видим, что можно последовательно определить коэфициенты $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}$ таким образом, чтобы имело место тождество вида

$$F(y) - G[F_1(y)] = F_2(y), \tag{28}$$

где $F_2(y)$ не выше $(m-1)$-го порядка, причем эта операция вполне аналогична делению двух алгебраических многочленов.

Положим теперь, что требуется определить общие интегралы двух линейных уравнений.

$$F(y) = 0, \quad F_1(y) = 0; \tag{29}$$

из тождества (28) следует, что эти интегралы тождественны с общими интегралами уравнений $F_1(y)=0$, $F_2(y)=0$. Если $F_2(y)$ не равно тождественно нулю, то можно выполнить ту же операцию с $F_1(y)$ и $F_2(y)$ и т. д. до тех пор, пока мы не придем к двум таким последовательным многочленам $F_{k-1}(y)$ и $F_k(y)$, что $F_{k-1}(y)=G_{k-1}[F_k(y)]$. Этот последний многочлен $F_k(y)$ аналогичен алгебраическому общему наибольшему делителю: *все общие интегралы обоих уравнений (29) удовлетворяют линейному уравнению $F_k(y)$, и обратно.* Если символический многочлен $F_k(y)$ — нулевого порядка, то оба уравнения не имеют никакого другого общего интеграла, кроме очевидного решения $y=0$.

Если в соотношении (28) $F_2(y)$ тождественно равно нулю, то в систему интегралов уравнения $F(y)=0$ входят все интегралы уравнения $F_1(y)=0$; обратно, чтобы все интегралы уравнения $F_1(y)=0$ были интегралами уравнения $F(y)=0$, необходимо, чтобы $F_2(y)$ было тождественно равно нулю, так как линейное уравнение не выше $(m-1)$-го порядка не может иметь своими интегралами все интегралы линейного уравнения m-го порядка. Следовательно, в этом случае мы имеем тождественно:

$$F(y)=G[F_1(y)].$$

Полагая $F_1(y)=z$, мы приведем интегрирование уравнения $F(y)=0$ к последовательному интегрированию двух линейных уравнений порядков $(n-m)$ и m:

$$G(z)=0, \quad F_1(y)=z,$$

из которых только второе имеет правую часть.

Из этого замечания можно вывести другое решение одной разобранной выше задачи. Предположим, что нам известны p независимых интегралов y_1, $y_2, \ldots$, y_p $(p<n)$ уравнения $F(y)=0$. Мы можем составить линейное уравнение порядка p, имеющее своими интегралами эти p интегралов (§ 400); пусть будет $F_1(y)=0$ это уравнение p-го порядка. Мы имеем тождественно $F(y)=G[F_1(y)]$, и, проинтегрировав уравнение $G(z)=0$ порядка $n-p$, мы найдем интегралы уравнения $F_1(y)=z$ посредством одних квадратур, так как общий интеграл уравнения $F_1(y)=0$ нам уже известен. Мы получаем таким образом такое же понижение порядка задачи, как и в первом методе (§ 402), но предложенный здесь прием более симметричен.

Аппелль, Лагерр (Laguerre), Альфан, Пикар и за ними многие другие распространили на линейные уравнения теорию симметрических функций корней, теорию инвариантов и глубокие теории Галуа (Galois) о группе данного алгебраического уравнения. Теория инвариантов основывается на том почти очевидном замечании, что однородное линейное уравнение переходит в уравнение того же вида при всяком преобразовании

$$x=f(t), \quad y=z\varphi(t),$$

где функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ — произвольны, t — новое независимое переменное, и z — новая неизвестная функция. Этим преобразованием иногда можно воспользоваться, чтобы упростить данное уравнение. Если, например, требуется обратить в нуль коэфициент при производной $(n-1)$-го порядка, то оказывается, что для этого достаточно положить $y=ze^{-\frac{1}{n}\int a_1 dx}$, сохраняя при этом прежнее переменное x. Так как мы располагаем двумя произвольными функциями f и φ, то можно было бы думать, что этим можно воспользоваться, чтобы обратить в нуль два коэфициента; но это приведение, возможное в теории, большею частью не упрощает решения. Например, всегда можно выбрать функции f и φ таким образом, чтобы привести любое линейное уравнение второго порядка к виду $z''=0$, но действительное определение этих функций представляет такие же трудности, как и самая задача интегрирования данного уравнения.

404. Сопряженное уравнение. Лагранж распространил следующим образом на линейные уравнения теорию интегрирующего множителя. Пусть будет $F(y)$ линейная функция от y и его производных

$$F(y)=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny.$$

где $a_0, a_1, \ldots a_n$ — какие-нибудь функции от x, и $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ обозначают последовательные производные от y. Определим функцию z от x таким образом, чтобы произведение $zF(y)$ было производною по x от некоторой другой функции, линейной относительно y и его производных до $(n-1)$-го порядка. Применяя к каждому члену произведения $zF(y)$ общую формулу интегрирования по частям (т. I, § 84), получим:

$$\left.\begin{aligned} zF(y) = \frac{d}{dx}\left[a_0 z y^{(n-1)} - \frac{d}{dx}(a_0 z)\, y^{(n-2)} + \ldots \pm y \frac{d^{n-1}(a_0 z)}{dx^{n-1}}\right] + \\ + \frac{d}{dx}\left[a_1 z y^{(n-2)} - \frac{d}{dx}(a_1 z)\, y^{(n-3)} + \ldots \mp y \frac{d^{n-2}(a_1 z)}{dx^{n-2}}\right] + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \frac{d}{dx}[a_{n-1} z y] + yG(z), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где

$$G(z) = (-1)^n \frac{d^n (a_0 z)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(a_1 z)}{dx^{n-1}} + \ldots - \frac{d\,(a_{n-1} z)}{dx} + a_n z. \tag{31}$$

Обозначим через $\Psi(y, z)$ билинейное выражение относительно y и z и их производных, стоящее в правой части выражения (30); тогда мы можем представить соотношение (30) в сокращенном виде:

$$zF(y) - yG(z) = \frac{d}{dx}[\Psi(y, z)]. \tag{32}$$

Таким образом при всех возможных видах функций y и z бином $zF(y) - yG(z)$ есть производная от $\Psi(y, z)$. Если мы примем за z интеграл уравнения $G(z) = 0$, то произведение $zF(y)$ представится как производная от выражения такого же вида, линейного относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, и, следовательно, уравнение $F(y) = 0$ будет равносильно линейному уравнению $(n-1)$-го порядка

$$\Psi(y, z) = C, \tag{33}$$

которое получим, заменив в Ψ неопределенную функцию z выбранным нами интегралом уравнения $G(z) = 0$. Уравнение $G(z) = 0$ есть также линейное уравнение n-го порядка; оно называется *сопряженным уравнением* к уравнению $F(y) = 0$, а символический многочлен $G(z)$ — *сопряженным многочленом* к многочлену $F(y)$.

Таким образом мы видим, что если известен один интеграл сопряженного уравнения, то интегрирование данного уравнения приводится к интегрированию линейного уравнения $(n-1)$-го порядка с произвольным постоянным в правой части. Если известны p независимых интегралов $z_1, z_2, \ldots, z_p$ сопряженного уравнения, то всякий интеграл данного уравнения удовлетворяет p соотношениям вида

$$\Psi(y, z_1) = C_1, \quad \Psi(y, z_2) = C_2, \ldots, \Psi(y, z_p) = C_p, \tag{34}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — постоянные. Из этих p уравнений можно исключить производные $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(n-p+1)}$; мы придем к линейному уравнению $(n-p)$-го порядка с правой частью, зависящей от p произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_p$. В частности, если $p = n$, т. е. если известен общий интеграл сопряженного уравнения, то можно решить n уравнений (34) относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, и мы будем иметь общий интеграл данного уравнения совсем без квадратур.

Между интегралами обоих уравнений $F(y) = 0$, $G(z) = 0$ существуют замечательные соотношения, которых мы не будем здесь выводить*. Покажем только, что между этими обоими уравнениями существует *взаимность*, т. е. если $G(z)$ есть сопряженный многочлен к $F(y)$, обратно, то $F(y)$ есть сопряженный многочлен к $G(z)$. В самом деле, пусть будет $F_1(y)$ — сопряженный многочлен

---

* См. Дарбу, Théorie des surfaces, т. II, кн. IV, гл. V. См. также упражнение 17 в конце этой главы.

к $G(z)$; мы имеем между $F_1(y)$ и $G(z)$ соотношение того же вида, как соотношение (32):

$$yG(z) - zF_1(y) = \frac{d}{dx}[\Psi_1(y, z)]; \tag{32bis}$$

складывая соотношения (32) и (32bis), получим

$$z[F(y) - F_1(y)] = \frac{d}{dx}[\Psi(y, z) + \Psi_1(y, z)].$$

Если бы $F(y) - F_1(y)$ не было равно нулю, то произведение $z[F(y) - F_1(y)]$ было бы производною от функции, содержащей неопределенную функцию z и некоторые из его производных; но производная от функции, содержащей z, $z', \ldots, z^{(p)}$, всегда содержит по крайней мере одну производную от z, именно $z^{(p+1)}$. Следовательно, предыдущее соотношение возможно только в том случае, если $F_1(y)$ тождественно с $F(y)$.

II. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

405. Уравнения с постоянными коэфициентами. Линейные уравнения с постоянными коэфициентамм были проинтегрированы Эйлером. Рассмотрим сначала уравнение без правой части:

$$F(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{35}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — какие-нибудь постоянные. Из общей теории (§ 399) следует, что все интегралы этого уравнения совсем не имеют особых точек на конечном расстоянии: это — *целые функции* от x. Пусть будет

$$y = c_0 + c_1\frac{x}{1} + c_2\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + c_m\frac{x^m}{1\cdot 2\ldots m} + \ldots \tag{36}$$

разложение в ряд одного из этих интегралов; ряды, представляющие последовательные производные от y, имеют аналогичный вид. Заменяя в левой части уравнения (35) переменное y и его производные их разложениями в ряды и приравнивая нулю коэфициент при какой-нибудь степени переменного x, например при x^p, мы получим следующее соотношение между $n+1$ последовательными коэфициентами:

$$c_{n+p} + a_1 c_{n+p-1} + a_2 c_{n+p-2} + \ldots + a_{n-1}c_{p+1} + a_n c_p = 0; \tag{37}$$

полагая в этой формуле последовательно $p = 0, 1, 2, \ldots$, мы последовательно выразим коэфициенты $c_n, c_{n-1}, \ldots$ через n первых коэфициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, которые можно взять произвольно. Полученный таким образом ряд (36) — сходящийся во всей плоскости и представляет интеграл, равный c_0 при $x = 0$, причем его $n-1$ первых последовательных производных принимают при $x = 0$ соответственно значения $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Покажем, что этот интеграл выражается через показательные функции и многочлены *.

Соотношение (37) есть рекуррентная формула с постоянными коэфициентами, связывающая $n+1$ последовательных коэфициентов c_i. Нетрудно найти частные решения этого соотношения. В самом деле, рассмотрим алгебраическое уравнение

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0; \tag{38}$$

* См. статью Орика (Auric) в Nouvelles Annales de Mathématiques (1894, стр. 44).

для краткости мы будем называть это уравнение *характеристическим уравнением*, а $f(r)$ — *характеристическим многочленом*. Если r есть корень этого уравнения, то ясно, что полагая $c_m = r^m$, мы удовлетворим соотношению (37), каково бы ни было значение целого числа p. Подставляя значения для c_m в формулу (36), мы получим e^{rx}; таким образом мы видим, что e^{rx} *есть частный интеграл уравнения* (35), *если* r *есть корень характеристического уравнения* $f(r) = 0$. Этот результат нетрудно проверить непосредственно, так как, заменяя в левой части уравнения (35) y через e^{rx}, мы найдем, что в результате подстановки получится $e^{rx}f(r)$.

Если уравнение (38) имеет n различных корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то мы имеем n частных интегралов $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx}$, и следовательно, получим интеграл:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}, \tag{39}$$

выражение которого содержит n произвольных постоянных

$$C_1, C_2, \ldots, C_n.$$

Формула (39) представляет общий интеграл уравнения (35), так как определитель $\Delta(e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx})$ можно представить в виде:

$$\Delta = e^{(r_1 + r_2 \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \ldots & r_1^{n-1} \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \ldots & r_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & r_n & r_n^2 & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

а известно, что определитель, стоящий в правой части последнего равенства есть, с точностью до знака, произведение разностей $r_i - r_k$, следовательно, здесь Δ не равно нулю.

Прежде чем перейти к тому случаю, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, докажем сначала одну лемму. Сделаем в уравнении (35) подстановку $y = e^{ax}z$, где a — некоторое постоянное, а z — новое неизвестное. По формуле Лейбница имеем:

$$\left.\begin{aligned} & y' = e^{ax}(az + z'), \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & y^{(p)} = e^{ax}\left(a^px + \frac{p}{1}a^{p-1}z' + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}z'' + \ldots + z^{(p)}\right), \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Подставляя эти значения для $y, y', y'', \ldots$ в левую часть уравнения (35) и вынося e^{ax} множителем, получим:

$$F(e^{ax}z) = e^{ax}G(z);$$

где $G(z)$ есть линейное выражение относительно $z, z', \ldots, z^{(n)}$ с постоянными коэфициентами. Чтобы вычислить коэфициенты выражения $G(z)$, заметим, что если мы заменим в $F(y)$ указатели производных показателями, причем y заменим через $y^0 = 1$, то полученный результат будет тождественен с $f(y)$. Сделав те же преобразования с функцией z, мы можем представить формулы (40) символически в виде

$$y^p = e^{\alpha x}(\alpha + z)^p;$$

следовательно, в том же символическом обозначении $G(z)$ представится в виде $f(\alpha + z)$. Заменяя теперь, обратно, показатели при z через указатели производной, мы найдем, что новое уравнение относительно z будет иметь вид:

$$F(e^{\alpha x} z) = e^{\alpha x}\left[f(\alpha) z + f'(\alpha) z' + \frac{f''(\alpha)}{1\cdot 2} z'' + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{1\cdot 2\ldots n} z^{(n)}\right]. \quad (41)$$

Пусть будет r корень кратности p характеристического уравнения. Заменяя в уравнении (41) количество α этим корнем r, мы найдем, что коэфициенты при $z, z', \ldots, z^{(p-1)}$ в этом уравнении равны нулю, и мы получим интеграл, взяв для z функцию, у которой производная p-го порядка равна нулю, т. е. произвольный многочлен $(p-1)$-й степени. Следовательно, *если r есть корень кратности p характеристического уравнения, то этому корню соответствуют p различных частных интегралов линейного уравнения* (35), *именно e^{rx}, $xe^{rx}, \ldots, x^{p-1}e^{rx}$.*

Рассмотрим k различных корней $r_1, r_2, \ldots, r_k$ уравнения $f(r) = 0$; пусть будут $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ соответственные порядки их кратности ($\Sigma\mu_i = n$). Пользуясь этими корнями, можно составить n частных интегралов линейного уравнения. Эти n интегралов независимы, так как всякое линейное соотношение с постоянными коэфициентами между этими n интегралами было бы вида

$$e^{r_1 x}\varphi_1(x) + e^{r_2 x}\varphi_2(x) + \ldots + e^{r_k x}\varphi_k(x) = 0,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ обозначают многочлены; но такое соотношение невозможно, если числа $r_1, r_2, \ldots, r_k$ различны. Мы не предполагаем, что в это соотношение входят непременно все k функций $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_k x}$; если бы некоторые из многочленов $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ были равны нулю, это значило бы, что соответствующие функции в соотношение не входят. Положим, что $\varphi_1(x)$ не равно нулю; разделив предыдущее соотношение на $e^{r_1 x}$, получим:

$$\varphi_1(x) + e^{(r_2 - r_1)x}\varphi_2(x) + \ldots + e^{(r_k - r_1)x}\varphi_k(x) = 0.$$

После первого диференцирования будем иметь:

$$\varphi_1'(x) + e^{(r_2 - r_1)x}[\varphi_2'(x) + (r_2 - r_1)\varphi_2(x)] + \ldots = 0.$$

В этом новом соотношении многочлен $\varphi_1(x)$ степени n_1 заменился многочленом $\varphi_1'(x)$ степени $n_1 - 1$; степень многочлена, имеющего множителем $e^{(r_2 - r_1)x}$, попрежнему равна n_2; то же самое имеет место по отношению к остальным многочленам. Следовательно, после $(n_1 + 1)$-кратного диференцирования мы получим соотношение того же вида, как и то, из которого мы исходили, но имеющее одним членом менее

$$e^{s_2 x}\psi_2(x) + e^{s_3 x}\psi_3(x) + \ldots + e^{s_k x}\psi_k(x) = 0,$$

где $k-1$ чисел $s_2=r_2-r_1$, $s_3=r_3-r_1$, ..., $s_k=r_k-r_1$ различны, и ψ_2, ψ_3, ..., ψ_k — многочлены степеней соответственно n_2, n_3, ..., n_k.

Продолжая те же действия мы, наконец, пришли бы к соотношению вида $e^{lx}\pi(x)=0$, где $\pi(x)$ есть многочлен, не равный тождественно нулю; но, очевидно, что такое равенство невозможно, т. е. n предыдущих интегралов независимы между собою. Следовательно, общий интеграл линейного уравнения (35) представится формулою:

$$y=e^{r_1x}P_{\mu_1-1}+e^{r_2x}P_{\mu_2-1}+\ldots+e^{r_kx}P_{\mu_k-1}, \tag{42}$$

где P_{μ_1-1}, ..., P_{μ_k-1} — многочлены с произвольными коэфициентами, степени которых равны их указателям.

Если характеристическое уравнение имеет мнимые корни, то общий интеграл (42) содержит мнимые символы, но эти мнимые символы можно устранить, если в диференциальном уравнении коэфициенты a_1, a_2, ..., a_n действительны. В самом деле, в этом случае если уравнение $f(r)=0$ имеет корень $\alpha+\beta i$ кратности p, то оно имеет также корень $\alpha-\beta i$ той же кратности. Сумма двух членов формулы (42), соответствующих этим двум корням, может быть представлена в виде:

$$e^{\alpha x}[(\cos\beta x+i\sin\beta x)\Phi(x)+(\cos\beta x-i\sin\beta x)\Psi(x)],$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ суть многочлены степени $p-1$ с произвольными коэфициентами, или в равносильном виде:

$$e^{\alpha x}[\cos\beta x\,\Phi_1(x)+\sin\beta x\,\Psi_1(x)],$$

где $\Phi_1(x)$ и $\Psi_1(x)$ — также произвольные многочлены $(p-1)$-й степени.

Примечание. Чтобы выразить общий интеграл уравнения (35) через показательные функции, нужно сначала, как мы видели, решить уравнение $f(r)=0$. Если это уравнение неразрешимо, то при помощи рекуррентного соотношения (37) всегда можно вычислить последовательно любое число коэфициентов целого ряда, представляющего интеграл, соответствующий данным начальным условиям.

Можно заранее узнать, сколько коэфициентов следует вычислить, чтобы иметь значение интеграла с определенною точностью. Пусть будут A наибольшее из чисел 1, $|a_1|$, ..., $|a_n|$ и B наибольшее из чисел $|c_0|$, $|c_1|$, ..., $|c_{n-1}|$. Подставляя в уравнение (35) вместо y его разложение (36), нетрудно последовательно убедиться для $p=0$, 1, 2, ... что $|C_{n+p}|<B(An)^{p+1}$. Следовательно, модуль суммы отброшенных членов ряда (35), представляющего интеграл, начиная с члена с x^{n+p}, меньше суммы ряда

$$B\left[\frac{(An)^{p+1}\rho^{n+p}}{1\cdot2\ldots(n+p)}+\frac{(An)^{p+2}\rho^{n+p+1}}{1\cdot2\ldots(n+p+1)}+\ldots\right],$$

где $\rho=|x|$, и следовательно, меньше, чем

$$\frac{B(An)^{p+1}\rho^{n+p}}{1\cdot2\ldots(n+p)}e^{An\rho}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению линейного уравнения с постоянными коэфициентами и с правою частью $\varphi(x)$. Если $\varphi(x)$ есть многочлен m-й степени $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots$, то можно не прибегать к общим методам и найти частный интеграл непосредственно. В самом деле, если коэфициент a_n при y в уравнении

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots$$

не равен нулю, то можно найти такой другой многочлен m-й степени

$$y=\varphi(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots,$$

чтобы, вставив его вместо y в левую часть предыдущего уравнения, мы получили результат, тождественный с $\varphi(x)$. Все его $m+1$ коэфициентов $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ определятся последовательно из соотношений:

$$a_n c_0 = b_0,\quad a_n c_1 + m a_{n-1} c_0 = b_1,$$
$$a_n c_2 + (m-1) a_{n-1} c_1 + m(m-1) a_{n-2} c_0 = b_2, \ldots,$$

где a_n, по предположению, отлично от нуля. Этот способ вычисления неприменим, если $a_n = 0$. Для большей общности предположим, что низший порядок производных, стоящих в левой части, равен p. Приняв за вспомогательное неизвестное $z = \frac{d^p y}{dx^p}$, мы преобразуем данное уравнение в линейное уравнение $(n-p)$-го порядка, в котором коэфициент при z не равен нулю. По предыдущему, это уравнение относительно z имеет частным интегралом многочлен m-й степени: следовательно, уравнение относительно y имеет частным интегралом многочлен степени $m+p$. Мы определим и в этом случае коэфициенты этого многочлена прямою подстановкою, но заметим, что коэфициенты при x^{p-1}, $x^{p-2}, \ldots, x$ и постоянный член — произвольны.

Если правая часть $\varphi(x)$ имеет вид $e^{ax}P(x)$, где a — постоянное, а $P(x)$ обозначает многочлен, то мы приведем этот случай к предыдущему, положив $y = e^{xa}z$; мы получим по формуле (41):

$$\frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\ldots n}\frac{d^n z}{dx^n} + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1\cdot 2\ldots (n-1)}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + f'(a)\frac{dz}{dx} + f(a)z = P(x). \tag{43}$$

Как мы видели выше, это уравнение имеет частным интегралом многочлен, степень которого можно определить непосредственно; следовательно, уравнение относительно y имеет частный интеграл вида $e^{ax}Q(x)$, где $Q(x)$ — также многочлен. Предположим, в частности, что $P(x)$ приводится к постоянному C. Если a не есть корень характеристического уравнения, то уравнение (43) имеет частный интеграл $z = \frac{C}{f(a)}$, и уравнение относительно y имеет частный интеграл $\frac{Ce^{ax}}{f(a)}$. Если a есть корень кратности p характеристического уравнения, то мы удовлетворим уравнению (43), положив

$$f^{(p)}(a)\frac{d^p z}{dx^p} = 1\cdot 2\ldots p\cdot C,$$

или

$$z = \frac{Cx^p}{f^{(p)}(a)};$$

следовательно, уравнение относительно y имеет частный интеграл $\frac{Cx^p e^{ax}}{f^{(p)}(a)}$. Отсюда на основании общего замечания (§ 401), можно непосредственно найти частный интеграл всякий раз, когда правая часть есть сумма произведений показательных функций на многочлены. В частности, это имеет место, если правая часть будет вида $\cos ax\, P(x)$ или $\sin ax P(x)$, так как достаточно выразить $\cos ax$ и $\sin ax$ через e^{axi} и e^{-axi}, чтобы притти к разобранному случаю. Если вид частного интеграла найден из предыдущих соображений, то нет необходимости для вычисления входящих в него коэфициентов проходить через все указанные преобразования; часто бывает выгоднее подставить непосредственно в левую часть данного уравнения полученное выражение и приравнять между собою соответствующие члены.

Пример. Найдем общий интеграл уравнения:

$$F(y)=\frac{d^4y}{dx^4}-y=ae^x+be^{2x}+c\sin x+g\cos 2x, \tag{44}$$

где a, b, c, g — постоянные. Характеристическое уравнение $r^4-1=0$ имеет простые корни: $+1, -1, +i, -i$, следовательно, общий интеграл уравнения без правой части равен:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x. \tag{45}$$

Найдем теперь частный интеграл каждого из четырех уравнений, которые получим, взяв последовательно для правого члена выражения ae^x, be^{2x}, $c\sin x$, $g\cos 2x$. Так как единица есть простой корень уравнения $f(r)=r^4-1=0$, то первое из этих уравнений имеет частный интеграл $\frac{axe^x}{f'(1)}=\frac{axe^x}{4}$; так как 2 не входит в состав корней уравнения $f(r)=0$, то второе уравнение имеет частный интеграл

$$\frac{be^{2x}}{f(2)}=\frac{be^{2x}}{15}.$$

В третьем уравнении $F(y)=c\sin x$ мы можем заменить $\sin x$ через $\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$ и искать частный интеграл каждого из уравнений

$$F(y)=\frac{c}{2i}e^{xi},\quad F(y)=-\frac{c}{2i}e^{-xi};$$

но так как $+i$ и $-i$ суть простые корни уравнения $f(r)=0$, то мы заранее знаем, что эти уравнения имеют соответственно частные интегралы Mxe^{xi}, Nxe^{-xi}. Сумма этих обоих интегралов имеет вид: $x(m\cos x+n\sin x)$, и мы можем определить коэфициенты m, n, вставив предыдущее выражение в $F(y)$ и выразив, что результат тождествен с $c\sin x$; мы видим, что в этом методе мы можем не пользоваться символом i. Таким образом мы найдем, что должно взять $m=\frac{c}{4}$, $n=0$. Точно так же найдем частный интеграл $\frac{g}{15}\cos 2x$ последнего уравнения $F(y)=g\cos 2x$. Прибавляя все эти частные интегралы к правой части формулы (45), мы получим общий интеграл уравнения (44).

406. Метод Даламбера. Для интегрирования линейных уравнений с постоянными коэфициентами и, в частности, для тех случаев, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, было предложено очень много методов. Один из наиболее интересных, применимый ко многим другим вопросам того же рода, состоит в том, что мы рассматриваем линейное уравнение, у которого $f(r)=0$ имеет кратные корни, как предел линейного уравнения, у которого все корни уравнения $f(r)=0$ различны. Вообще, пусть будет

$$F(y)=\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{46}$$

линейное уравнение, где коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть функции от x, зависящие сверх того от некоторых переменных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Предположим, что существует функция $f(x, r)$, обладающая следующим свойством: при q значениях количества r, зависящих от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ и, вообще, различных между собою, функция $f(x, r)$ от x есть интеграл уравнения (46). Пусть будет $r_1, r_2, \ldots, r_q$ эти q значений количества r, так что функции

$$f(x, r_1),\ f(x, r_2),\ \ldots,\ f(x, r_q)$$

представляют собою q различных частных интегралов уравнения (46), когда параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ имеют произвольные значения. Если при некоторых частных значениях этих параметров q значений $r_1, r_2, \ldots, r_q$ не будут все различны, то число известных интегралов уменьшится. Предположим, например, что r_2 сделается равно r_1; если r_2 отлично от r_1, то уравнение имеет два интеграла, $f(x, r_1)$, $f(x, r_2)$, и следовательно, выражение

$$\frac{f(x, r_2) - f(x, r_1)}{r_2 - r_1}$$

есть также интеграл. Но если r_2 стремится к r_1, то предыдущее выражение имеет пределом производную $[f_r'(x, r)]_{r_1}$. Если r_3 также сделается равным r_1, то, предполагая сначала r_3 близким к r_1, мы возьмем интеграл

$$\frac{f(x, r_3) - f(x, r_1) - (r_3 - r_1)\,[f_r'(x, r)]_{r_2}}{(r_3 - r_1)^2};$$

при приближении r_3 к r_1 этот интеграл имеет пределом $\frac{1}{2}\,[f_{rr}''(x, r)]_{r_1}$.

Это рассуждение имеет вполне общий характер; если, при некоторых значениях параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, k из корней $r_1, r_2, \ldots, r_q$ делаются равными r_1, то уравнение (46) имеет k частных интегралов *:

---

* Легко привести более строгое рассуждение. Пусть, заменяя в левой части $F(y)$ линейного уравнения y через $f(x, r)$, мы получим:

$$F[f(x, r)] = a_0 \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \ldots + a_n f = \Phi(x, r),$$

(коэфициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ не зависят от параметра r).

Вместе с тем, подставляя в $F(y)$ вместо y выражение $\frac{\partial^p f}{\partial r^p}$, мы получим:

$$F\left(\frac{\partial^p f}{\partial r^p}\right) = \frac{\partial^p \Phi}{\partial r^p}.$$

Предположим, что для произвольных значений параметров α_i, от которых зависят коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место:

$$\Phi(x, r) = (r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_q)\, \Psi(x, r)$$

($r_1, r_2, \ldots, r_q$ различны). Если для частных значений параметров α_i, p из числа этих корней станут равными r_1, тогда $\Phi(x, r)$ делится на $(r - r_1)^p$, и мы имеем:

$$\Phi(x, r_1) = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial r_1^{p-1}} = 0,$$

и следовательно, линейное уравнение допускает в этом случае следующие p интегралов:

$$f(x, r_1),\ \frac{\partial f}{\partial r_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^{p-1} f}{\partial r_1^{p-1}}.$$

$$f(x,\ r_1),\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r_1},\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{r_1}, \ldots, \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial r^{k-1}}\right)_{r_1}.$$

В случае линейного уравнения с постоянными коэфициентами за параметры $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$ можно взять самые коэфициенты, и функция $f(x,\ r)$ есть e^{rx}. Таким образом мы приходим к тем самым результатам, которые были нами получены выше непосредственно.

407. Линейные уравнения Эйлера. Линейные уравнения

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = 0, \tag{47}$$

где $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ — постоянные, приводятся к предыдущим заменою переменного $x = e^t$ *. В самом деле, замечая, что $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ (ср. § 380), имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

и нетрудно постепенно убедиться, что произведение $x^p \frac{d^p y}{dx^p}$ есть линейное выражение с постоянными коэфициентами относительно

$$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2 y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^p y}{dt^p}.$$

Следовательно, предыдущею заменою переменного данное уравнение обращается в уравнение с постоянными коэфициентами.

Чтобы получить общий интеграл уравнения (47), нет необходимости выполнять вычисления, связанные с этою заменою переменного. В самом деле, мы знаем, что преобразованное уравнение имеет интеграл вида e^{rt}; следовательно, первоначальное уравнение имеет несколько интегралов вида $(e^t)^r = x^r$. Заменяя в левой части уравнения (47) y через x^r, мы получим в результате подстановки $x^r f(r)$, где

$$f(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + \\ + A_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + A_{n-1} r + A_n.$$

Если уравнение $f(r) = 0$, которое играет здесь ту же роль, как характеристическое уравнение § 405, имеет n различных корней $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$, то общий интеграл есть

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \ldots + C_n x^{r_n};$$

если же r есть μ-кратный корень уравнения $f(r) = 0$, то из метода

---

* Из общей теории (§ 399) следует, что интегралы уравнения (47) не могут иметь другой особой точки, кроме $x=0$. Но e^t не может быть равно нулю ни при каком конечном значении t; следовательно, интегралы уравнения, которое получим после замены переменного $x=e^t$, должны быть целыми функциями.

Даламбера следует, что этому корню соответствует μ частных интегралов:

$$x^r, \frac{\partial}{\partial r}(x^r) = x^r \operatorname{Log} x, \ldots, \frac{\partial^{\mu-1} x^r}{\partial r^{\mu-1}} = x^r (\operatorname{Log} x)^{\mu-1}.$$

Следовательно, во всех случаях общий интеграл уравнения (47) есть

$$y = x^{r_1} P_{\mu_1 - 1}(\operatorname{Log} x) + \ldots + x^{r_k} P_{\mu_k - 1}(\operatorname{Log} x), \tag{48}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_k$ суть k различных корней уравнения $f(r) = 0$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ — порядки их кратности, и $P_{\mu_l - 1}(\operatorname{Log} x)$ — многочлен $\mu_l - 1$ степени относительно $\operatorname{Log} x$ с произвольными постоянными коэфициентами.

Если мы прибавим к уравнению (47) правую часть вида: $x^m \, Q\,(\operatorname{Log} x)$, где Q обозначает многочлен, то, как и для уравнений с постоянными коэфициентами, можно доказать, что полученное уравнение имеет частным интегралом выражение того же вида, как правая часть, коэфициенты которого можно вычислить посредством подстановки.

408. Уравнение Лапласа. В некоторых случаях можно представить интегралы линейного уравнения в виде определенных интегралов, где независимое переменное входит под знаком интеграла как параметр. Одно из наиболее важных приложений этого метода принадлежит Лапласу. Рассмотрим уравнение

$$F(y) = (a_0 + b_0 x)\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 + b_1 x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_n + b_n x)\, y = 0, \tag{49}$$

все коэфициенты которого не выше первой степени относительно x. Попытаемся удовлетворить этому уравнению, взяв для y выражение вида

$$y = \int\limits_{(L)} Z e^{zx}\, dz, \tag{50}$$

где Z есть функция переменного z, и L — определенный путь интегрирования, не зависящий от x. Мы имеем общую формулу:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \int\limits_{(L)} Z z^p e^{zx}\, dz;$$

заменяя в левой части уравнения (49) переменное y и его производные этими выражениями, получим:

$$F(y) = \int\limits_{(L)} Z e^{zx}(P + Qx)\, dz, \tag{51}$$

где

$$P = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$
$$Q = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n.$$

Функция, стоящая под знаком интеграла в формуле (51), будет производною по z от $Z e^{zx} Q$, если будет

$$\frac{d(ZQ)}{dz} = ZP, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dz}[\operatorname{Log}(ZQ)] = \frac{P}{Q}.$$

Из этого условия получаем:

$$Z = \frac{1}{Q} e^{\int\limits_{z_0}^{z} \frac{P}{Q} dz}, \tag{52}$$

причем нижний предел z_0 не должен обращать в нуль многочлен $Q(z)$. При таком определении функции Z определенный интеграл (51) равен изменению вспомогательной функции

$$V = e^{zx} ZQ = e^{zx + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{P dz}{Q}}$$

вдоль пути L. Следовательно, чтобы получить интеграл данного линейного уравнения (49), достаточно выбрать путь интегрирования L таким образом, чтобы эта функция V возвращалась к начальному значению после того как z опишет всю линию L, и чтобы при этом интеграл (50) имел значение конечное и отличное от нуля.

Пусть будут $a, b, c, \ldots, l$ корни уравнения $Q(z) = 0$. Так как интеграл $\int \frac{P}{Q} dz$ имеет вид: $R(z) + \alpha \operatorname{Log}(z - a) + \ldots + \lambda \operatorname{Log}(z - l)$, то вспомогательная функция V имеет вид:

$$V = e^{zx + R(z)} (z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} \ldots (z - l)^{\lambda}, \tag{53}$$

где $R(z)$ есть рациональная функция, знаменатель которой имеет своими корнями только корни $a, b, c, \ldots, l$ уравнения $Q(z) = 0$, каждый с кратностью на единицу меньшею. Обозначим через $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ петли, описываемые переменным z вокруг точек $a, b, c, \ldots$ в прямом направлении, начиная от некоторого произвольного начала, и через $\mathfrak{A}_{-1}, \mathfrak{B}_{-1}, \mathfrak{C}_{-1}, \ldots$ те же петли, описываемые в обратном направлении. Когда переменное z описывает петлю $\mathfrak{A}$, функция V получает множитель $e^{2\pi i \alpha}$; когда переменное z описывает петлю $\mathfrak{A}_{-1}$, функция V получает множитель $e^{-2\pi i \alpha}$; то же самое будет и для остальных петель. Отсюда следует, что если переменное z опишет последовательно петли $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}_{-1}, \mathfrak{B}_{-1}$, то функция V вернется к своему начальному значению. При этом определенный интеграл (50), взятый вдоль этого пути $ABA_{-1}B_{-1}$, вообще, не равен нулю; он дает частный интеграл уравнения (49). Соединяя попарно всеми возможными способами p точек $a, b, c, \ldots, l$, мы получим $\frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}$ интегралов уравнения (49), которые на самом деле приводятся к $p - 1$ различным интегралам.

Так как $p - 1$ меньше n, то мы не получим этим приемом все n частных интегралов. Чтобы получить другие интегралы, найдем линии L, имеющие своими начальными и конечными точками некоторые из особых точек $a, b, c, \ldots, l$ и обладающие тем свойством, что функция V стремится к нулю при приближении z вдоль этих линий L к их начальным и конечным точкам. Если a есть простой корень уравнения $Q(z) = 0$, то, как видно из (52) и (53), функция Z содержит множитель $(z - a)^{\alpha - 1}$, и интеграл (50) может иметь конечное значение, когда один из концов линии L находится в точке a, только в том случае, если действительная часть количества α положительна; в этом случае V, действительно, стремится к нулю вместе с $|z - a|$. Если же a есть m-кратный корень уравнения $Q(z) = 0$, то рациональная функция $R(z)$ содержит член вида: $\frac{A_{m-1}}{(z - a)^{m-1}}$, и чтобы судить о модуле функции V в области точки $z = a$, достаточно исследовать модуль главной части

$$(z - a)^{\alpha} e^{\frac{A_{m-1}}{(z - a)^{m-1}}}$$

Пусть будет

$$z - a = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad A_{m-1} = \Lambda(\cos\psi + i \sin\psi), \quad \alpha = \alpha' + \alpha'' i;$$

модуль главной части равен

$$e^{-\alpha''\varphi} \rho^{\alpha} e^{\Lambda\rho^{1-m} \cos[\psi - (m-1)\varphi]}.$$

Чтобы V стремилось к нулю вместе с $|z - a|$, достаточно перемещать z

по такой линии, чтобы угол φ касательной с действительною осью удовлетворял условию $\cos \psi - (m-1)\varphi] < 0$; например, можно взять

$$\varphi = \frac{\psi + (2k+1)\pi}{m-1}.$$

Если угол φ взят таким образом, то произведение Ze^{zx} также стремится к нулю вместе с $|z-a|$. Применяя тот же прием по отношению к остальным точкам $b, c, \ldots, l$, мы видим, что можно определить еще другие линии L, замкнутые или разомкнутые, дающие другие частные интегралы рассматриваемого уравнения.

Наконец, можно также взять за пути интегрирования кривые, удаляющиеся в бесконечность. И в этом случае нужно искать кривую L с такою бесконечною ветвью, чтобы функция V стремилась к нулю, когда точка z неограниченно удаляется по этой ветви. Если, например, рациональная функция $R(z)$ равна нулю, и если аргумент переменного x заключается между нулем и $\frac{\pi}{2}$, то достаточно перемещать z по бесконечной ветви, асимптотической к направлению, образующему с действительною осью угол $\frac{3\pi}{4}$.

Оставляя в стороне эти общие рассуждения * рассмотрим, в частности, уравнение Бесселя (Bessel)

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2n+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0, \tag{54}$$

где n — данное постоянное. Мы имеем здесь:

$$P = (2n+1)z, \quad Q = 1 + z^2,$$

и следовательно,

$$Z = (1+z^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad V = e^{zx}(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, определенный интеграл

$$y = \int\limits_{(L)} e^{zx}(1+z^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dz \tag{55}$$

есть частный интеграл уравнения (54), если функция $e^{zx}(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}$ принимает одинаковые значения в конечной и начальной точках пути L. Здесь за путь L можно принять, во-первых, две петли, описываемые последовательно, одна в прямом направлении вокруг точки $+i$, другая в обратном направлении вокруг точки $-i$. Во-вторых, за путь интегрирования можно взять линию, окружающую одну из особых точек $\pm i$ и имеющую две таких асимптотических ветви, чтобы вдоль них действительная часть произведения zx стремилась к $-\infty$.

Мы всегда можем предположить, что действительная часть постоянного n положительна или равна нулю, так как, сделав подстановку $y = x^{-2n}z$, мы получим уравнение относительно z, которое будет отличаться от уравнения (54) только знаком при n. При таких значениях n можно также взять за путь интегрирования прямую, соединяющую между собою точки $+i$ и $-i$; впрочем, полученный таким образом интеграл тождествен до постоянного множителя с первым интегралом. Чтобы привести этот последний интеграл к обычному виду, положим $z = it$; мы получим:

$$y = \int_{-1}^{+1} e^{ixt}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt,$$

или, иначе,

$$y = \int_{-1}^{+1} \cos xt\,(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt \tag{56}$$

* См. обширный мемуар Пуанкаре в „American Journal of Mathematica", т. VII.

Здесь необходимо отметить тот замечательный частный случай, когда n есть половина нечетного числа. Если n положительно, то интеграл (56) всегда существует; его даже можно представить в раскрытом виде, так как $n-\frac{1}{2}$ есть целое положительное число. Но если линия L — замкнутая, то определенный интеграл (55) всегда равен нулю, и может показаться, что в этом случае применение общего метода дает только один частный интеграл. Однако, напротив, в этом, повидимому, неблагоприятном случае можно выразить общий интеграл через элементарные функции. В самом деле, сделав преобразование, обратное вышеуказанному, мы получим уравнение, в котором n есть половина отрицательного нечетного числа. Тогда $n-\frac{1}{2}$ есть отрицательное целое число, и определенный интеграл (55), взятый вдоль какой-нибудь замкнутой линии, есть частный интеграл линейного уравнения (54). Взяв за линию L круг с центром в одной из точек $\pm i$, мы видим, что вычет функции $e^{zx}(1+z^2)^{n-\frac{1}{2}}$ относительно каждого из этих двух полюсов есть интеграл линейного уравнения. Но ясно, что вычет относительно полюса $z=+i$ есть произведение e^{ix} на некоторый многочлен. Это легко видеть, если мы представим предыдущую функцию в виде

$$e^{ix}\,e^{x(z-i)}\,(1+z)^{n-\frac{1}{2}}$$

и разложим $e^{x(z-i)}$ в ряд. Точно так же вычет относительно полюса $z=-i$ есть произведение e^{-ix} на многочлен Эти оба частных интеграла различны, так как их отношение равно произведению e^{2ix} на рациональную функцию. Очевидно, что как их сумма, так и произведение их разности на i будут действительными интегралами (см. упражнение 8).

Примечание. Линейное уравнение с постоянными коэфициентами есть частный случай уравнения Лапласа, который получим, предполагая, что все коэфициенты b_i равны нулю. Если сверх того $a_0=1$, то $Q(z)=0$, а $P(z)$ обращается в характеристический многочлен $f(z)$. В этом случае общий метод, повидимому, неприменим, так как выражение для Z теряет смысл. Но нетрудно усмотреть, как здесь должно видоизменить предыдущий метод. В самом деле, из предыдущего рассуждения следует, что определенный интеграл $\int\limits_{(L)} Ze^{zx}dz$ есть частный интеграл линейного уравнения, если только определенный интеграл $\int\limits_{(L)} Zf(z)\,e^{zx}dz$, взятый вдоль того же пути L, равен нулю. Если мы возьмем за путь L какую-нибудь замкнутую линию, то достаточно, чтобы произведение $Zf(z)$ было внутри этой линии голоморфною функциею от z. Следовательно, если $\Pi(z)$ обозначает какую-нибудь функцию от z, голоморфную в области R плоскости, то определенный интеграл

$$y=\int\limits_{(L)}\frac{\Pi(z)}{f(z)}e^{zx}dz,$$

взятый вдоль какой-нибудь замкнутой линии L, лежащей в этой области, есть частный интеграл линейного уравнения с постоянными коэфициентами. Мы видим, как этот результат, принадлежащий Коши, связан с методом Лапласа.

Нетрудно получить этим методом, в виде проверки, уже известные частные интегралы. Пусть будет a корень кратности p характеристического уравнения $f(z)=0$. Возьмем за путь интегрирования круг с центром в точке a, не содержащий других корней уравнения $f(z)=0$; пусть будет $\Pi(z)$ функция, голоморфная в этом круге. Легко видеть, что вычет функции

$$\frac{\Pi(z)e^{zx}}{f(z)}=\frac{\Pi(z)e^{zx}}{(z-a)^pf_1(z)}$$

равен коэфициенту при h^{p-1} в разложении по степеням количества h произведения

$$\Pi(a+h)e^{ax}\frac{e^{xh}}{f_1(a+h)}.$$

Пусть будет

$$\frac{\Pi(a+h)}{f_1(a+h)}=A_0+A_1h+\ldots+A_{p-1}h^{p-1}+\ldots;$$

коэфициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}, \ldots$ произвольны, так как функция $\Pi(z)$ есть произвольная функция, голоморфная в области точки a. Следовательно, искомый вычет равен:

$$e^{ax}\left[A_0\frac{x^{p-1}}{1\cdot2\ldots(p-1)}+A_1\frac{x^{p-1}}{1\cdot2\ldots(p-2)}+\ldots+A_{p-1}\right],$$

т. е. мы получили произведение показательной функции e^{ax} на произвольный многочлен $(p-1)$-й степени, в согласии с уже известным результатом.

III. ПРАВИЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ.

Вообще, за исключением изложенных выше весьма элементарных случаев, нельзя узнать по одному виду линейного уравнения, будет ли его общий интеграл выражаться через алгебраические или элементарные трансцендентные функции. Поэтому необходимо обратиться к изучению свойств этих интегралов непосредственно из самого уравнения, вместо того, чтобы пытаться их выразить (более или менее наудачу) комбинациями конечного числа известных функций. Мы уже знаем (гл. XV), что характер особых точек аналитической функции есть существенный элемент, позволяющий в некоторых случаях вполне характеризовать эти функции. Но для интегралов линейного уравнения особые точки известны нам заранее (§ 399); покажем, как можно в одном обширном и весьма важном частном случае вполне изучить интегралы в области особой точки.

409. Подстановка интегралов вокруг критической точки. Пусть будет a изолированная особая точка некоторых из коэфициентов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ линейного уравнения

$$F(y)=\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0; \tag{57}$$

мы предположим, что эти коэфициенты однозначны в области этой особой точки. Пусть будет C круг с центром в точке a, внутри которого коэфициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не имеют других особых точек, кроме точки a, и x_0 — точка, лежащая внутри круга C вблизи точки a. Все интегралы уравнения (57) голоморфны в области точки x_0; рассмотрим n частных интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, образующих фундаментальную систему. Если переменное x описывает в прямом направлении круг с центром в точке a, проходящий через точку x_0, то мы можем проследить за аналитическим продолжением интегралов вдоль этого пути и вернемся в точку x_0 с n функциями $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, которые будут также интегралами уравнения (57), причем Y_i обозначает функцию, в которую обратится функция y_i после обхода переменного x в прямом направлении по кругу вокруг точки a. Так как $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ суть интегралы уравнения (57), то должно быть

$$\left.\begin{aligned} Y_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n,\\ Y_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ Y_n&=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где коэфициенты a_{ik} — постоянные, зависящие от выбранной фундаментальной системы. Нетрудно получить значение определителя D, составленного из этих n^2 коэфициентов. В самом деле, мы имеем (§ 400)

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p_1dx};$$

если x описывает в прямом направлении окружность γ с центром в точке a, то y_i изменяется в Y_i, и следовательно, должно быть:

$$\Delta(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)=\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)e^{-\int_{\gamma}p_1dx}$$

Но частное двух определителей Вронского равно D (§ 400); таким образом мы получим $D=e^{-2\pi iR}$, где R обозначает вычет функции p_1 относительно точки a. Следовательно, определитель D никогда не равен нулю.

Так как коэфициенты формул (58) зависят от выбранной фундаментальной системы, то естественно искать такую частную систему интегралов, чтобы формулы (58) принимали для этой системы наиболее простой вид. Найдем сначала такой частный интеграл $u=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\ldots+\lambda_ny_n$, чтобы после обхода вокруг точки a этот интеграл возвращался к своему начальному значению с некоторым постоянным множителем. Для этого должно быть $U=su$, где U есть значение функции u после обхода, и s — постоянный множитель, или

$$\lambda_1(a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n)+\ldots$$
$$+\lambda_n(a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n)-s(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\ldots+\lambda_ny_n)=0.$$

Такое соотношение между n интегралами, образующими фундаментальную систему, может существовать только в том случае, если оно обращается в тождество, т. е. если коэфициенты при $y_1, y_2, \ldots, y_n$ отдельно равны нулю. Следовательно, $n+1$ неопределенных коэфициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, s должны удовлетворять n условиям:

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda_1(a_{11}-s)+\lambda_2 a_{21} & & +\ldots+\lambda_n a_{n1}=0, \\ \lambda_1 a_{12} & +\lambda_2(a_{22}-s) & +\ldots+\lambda_n a_{n2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{1n} & +\lambda_2 a_{2n} & +\ldots+\lambda(a_{nn}-s)=0. \end{array}\right\} \tag{59}$$

Но все коэфициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не могут быть равны нулю, так как в противном случае мы имели бы тождественно $u=0$; отсюда видно, что s должно быть корнем уравнения n-й степени

$$F(s)=\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-s & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix}=0; \tag{60}$$

для краткости мы назовем это уравнение *характеристическим уравнением*; по сделанному выше замечанию это уравнение не может иметь корня $s=0$, так как в этом случае определитель D из n^2 коэфициентов a_{ik} был бы равен нулю.

Обратно, пусть будет s корень уравнения (0); из соотношений (59) мы найдем для коэфициентов λ_i значения, не равные все нулю, и после обхода переменного вокруг точки a интеграл $u=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\ldots+\lambda_n y_n$ получит множитель s. Предположим сначала, что характеристическое уравнение имеет n различных корней $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогда мы получим n таких частных интегралов $u_1, u_2, \ldots u_n$ которые после обхода в прямом направлении вокруг точки a обращаются в

$$U_1=s_1 u_1, \quad U_2=s_2 u_2, \ldots, \quad U_n=s_n u_n, \tag{61}$$

где U_i обозначает значение интеграла u_i после обхода. *Эти n интегралов образуют фундаментальную систему.* В самом деле, предположим, что существует соотношение вида:

$$C_1 u_1+C_2 u_2+\ldots+C_n u_n=0, \tag{62}$$

где постоянные коэфициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не равны одновременно нулю. После одного, двух, ..., $(n-1)$ обходов мы получили бы соотношения того же вида:

$$\left.\begin{array}{lll} C_1 s_1 u_1 & +C_2 s_2 u_2 & +\ldots+C_n s_n u_n=0, \\ C_1 s_1^2 u_1 & +C_2 s_2^2 u_2 & +\ldots+C_n s_n^2 u_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ C_1 s_1^{n-1} u_1 & +C_2 s_2^{n-1} u_2 & +\ldots+C_n s_n^{n-1} u_n=0. \end{array}\right\} \tag{63}$$

Но линейные соотношения (62) и (63) могут иметь место только в том случае если $C_1 u_1=0, \ldots, C_n u_n=0$, так как соответствующий определитель

$$D(1, s_2, s_3^2, \ldots, s_n^{n-1})$$

отличен от нуля.

Нетрудно составит аналитическую функцию, которая после обхода вокруг точки a приобретала бы постоянный множитель s, *отличный от нуля.* В самом деле, функция $(x-a)^r$ или $e^{r\,\mathrm{Log}(x-a)}$ после такого обхода получает множитель $e^{2\pi i r}$, и если мы определим r из условия $r=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}\, s$, то эта функция $(x-a)^r$, действительно, получит множитель s после обхода вокруг точки a. Всякая другая функция u, обладающая тем же свойством, будет иметь вид $(x-a)^r\varphi(x-a)$, где функция $\varphi(x-a)$ однозначна в области точки a, так как произведение $u(x-a)^{-r}$ возвращается к своему начальному значению после обхода вокруг точки a. Следовательно, интеграл u_k имеет вид:

$$u_k=(x-a)^{r_k}\varphi_k(x-a),$$

где $r_k=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}\,(s_k)$, и функция φ_k однозначна в области точки a. Так как в круге C, описанном из a радиусом R, коэфициенты $p_1, \ldots, p_n$ голоморфны всюду, кроме точки a, то в этом круге интеграл u_k не может иметь никакой другой особой точки, кроме точки a. Следовательно, то же должно иметь место и для функции $\varphi_k(x-a)$, и точка a есть для этой функции или обыкновенная точка, или изолированная особая точка. Можно не рассматривать того случая, когда точка a есть полюс функции φ_k. В самом деле, если бы точка a была полюсом m-го порядка, то так как показатель r_k определен до целого числа, мы могли бы представить u_k в виде:

$$u_k = (x-a)^{r_k - m}\,[(x-a)^m\,\varphi_k(x-a)],$$

и произведение $(x-a)^m \varphi_k(x-a)$ было бы голоморфно при $x=a$. Если точка a не есть существенно особая точка для $\varphi_k(x-a)$, то интеграл u_k называется *правильным* при $x=a$. В этом случае можно предположить, что при $x=a$ функция $\varphi_k(x-a)$ имеет конечное значение, отличное от нуля.

410. Исследование общего случая. Остается исследовать тот случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Мы покажем, что всегда есть n интегралов, образующих фундаментальную систему и распадающихся на несколько таких групп, имеющих то свойство, что если $y_1, y_2, \ldots, y_p$ обозначают p интегралов одной и той же группы, то после обхода в прямом направлении вокруг точки a мы будем иметь:

$$Y_1 = sy_1,\ Y_2 = s(y_1 + y_2),\ \ldots,\ Y_p = s(y_{p-1} + y_p). \tag{64}$$

При этом различные значения количества s суть корни характеристического уравнения, и одному и тому же корню могут соответствовать несколько различных групп. В случае, разобранном выше, мы видели, что, когда эти n корней различны, каждая группа состоит только из одного интеграла.

В сущности, задача сводится к доказательству того, что заменяя $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственным образом выбранными их линейными комбинациями, мы можем привести линейную подстановку, определяемую формулами (58), к указанному выше каноническому виду (64). Предположим, что теорема доказана для случая $(n-1)$ переменных, и покажем, что она верна и для n переменных.

Из теорем, доказанных в предыдущем параграфе, мы знаем, что всегда можно найти такой частный интеграл u, чтобы было $U = \mu u$. Заменяя один из интегралов, например y_1, этим интегралом u, мы приведем формулы (58) к виду:

$$\left.\begin{aligned} &U = \mu u, \\ &Y_2 = b_2 u + b_{22} y_2 + \ldots + b_{2n} y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Y_n = b_n u + b_{n2} y_2 + \ldots + b_{nn} y_n. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Если в $n-1$ последних формулах мы отбросим члены $b_2 u, \ldots, b_n u$, то эти формулы определяют линейную подстановку для $n-1$ переменных $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Определитель D' этой подстановки с $n-1$ элементами не равен нулю, так как определитель D линейной подстановки с n переменными, равный $\mu D'$, должен быть отличен от нуля. Допустив, что теорема верна для $n-1$ переменных, предположим, что эта вспомогательная подстановка приведена к каноническому виду, т. е. мы нашли такие $n-1$ различных линейных комбинаций $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ переменных $y_2, y_3, \ldots, y_n$, что формулы, определяющие линейную подстановку

$$Y_i = b_{i2} y_2 + \ldots + b_{in} y_n \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

обратились в несколько групп формул вида

$$Z_1 = sz_1,\ Z_2 = s(z_1 + z_2),\ \ldots,\ Z_p = s(z_{p-1} + z_p).$$

Очевидно, что достаточно прибавить к правым частям предыдущих формул члены, содержащие u, чтобы получить результат такого же преобразования, примененного к формулам (65). Другими словами, мы можем найти $n-1$ интегралов, образующих вместе с интегралом u фундаментальную систему и распадающихся на несколько таких групп, что для интегралов $z_1, z_2, \ldots, z_p$ одной и той же группы будет

$$Z_1 = sz_1 + K_1 u,\ Z_2 = s(z_1 + z_2) + K_2 u,\ \ldots,\ Z_p = s(z_{p-1} + z_p) + K_p u, \tag{66}$$

где $K_1, K_2, \ldots, K_p$ — постоянные. Прежде всего постараемся уменьшить, насколько возможно, число коэфициентов, входящих в эти формулы. Для этого положим

$$u_1 = z_1 + \lambda_1 u \quad u_2 = z_2 + \lambda u, \ \ldots, \ u_p = z_p + \lambda_p u, \tag{66'}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ суть p постоянных коэфициентов. Нетрудно убедиться, что для этих новых интегралов мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &U_1 = su_1 + [K_1 + (\mu - s)\lambda_1]\, u, \\ &U_i = s(u_{i-1} + u_i) + [K_i + (\mu - s)\lambda_i - s\lambda_{i-1}]\, u \quad (i > 1). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Если $\mu - s$ не равно нулю, то можно выбрать $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ таким образом, чтобы коэфициенты при u в правых частях предыдущих формул были равны нулю, и мы будем иметь для новых интегралов u_i:

$$U_1 = su_1, \ U_2 = s(u_1 + u_2), \ \ldots, \ U_p = s(u_{p-1} + u_p).$$

Таким образом подстановка, которая после обхода вокруг точки a переводит группу интегралов u_i в группу интегралов U_i имеет канонический вид. Если же $\mu = s$, то, так как s не может быть равно нулю, мы можем выбрать $\lambda_1; \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ таким образом, чтобы коэфициенты при u в выражениях для $U_2, U_3, \ldots, U_p$ обратились в нуль, и мы придем к тем же выражениям для $U_1, \ldots, U_p$. Но может случиться, что будет не одна, а несколько различных групп переменных z_i, которым соответствует преобразование канонического вида с одним и тем же значением $s = \mu$. Предположим для определенности, что есть две таких группы, содержащих соответственно p и q переменных. Выполнив в обеих группах преобразования вида (66'), мы найдем, что подстановки, соответствующие этим обеим группам, будут иметь вид:

$$U_1 = su_1 + K_1 u, \quad U_2 = s(u_2 + u_1), \ \ldots, \quad U_p = s(u_p + u_{p-1}), \tag{I}$$

$$U_1' = su_1' + K_1' u, \quad U_2' = s(u_2' + u_1'), \ \ldots, \quad U_q' = s(u_q' + u_{q-1}'). \tag{II}$$

Если $K_1' = K_1 = 0$, то мы имеем три группы интегралов:

$$(u), \ (u_1, u_2, \ldots, u_p), \ (u_1', u_2', \ldots, u_q'),$$

каждой из которых соответствует подстановка канонического вида. Предположим, что $p \geqslant q$. Если K_1 не равно нулю, то, полагая $v_i = u_i' - \frac{K_1'}{K_1} u_i$, мы заменим вторую группу интегралов группою q интегралов v_i, которым соответствует подстановка канонического вида; полагая затем $u_0 = \frac{K_1 u}{s}$, мы получим $(p+1)$ интегралов $u_0, u_1, \ldots, u_p$, образующих также одну группу, которым соответствует подстановка канонического вида. Если же $K_1 = 0$ и K_1' отлично от нуля, то, полагая $u_0' = \frac{K_1' u}{s}$, мы будем иметь две группы интегралов $(u_1, u_2 \ldots, u_p)$, $(u_0', u_1', \ldots, u_q')$, которым соответствует подстановка канонического вида. Таким образом теорема имеет вполне общий характер *.

411. Аналитический вид интегралов. Нам остается найти такие аналитические выражения для интегралов одной и той же группы, при которых был бы виден закон их перестановки при обходе переменного вокруг точки a. Пусть будет $y_1, y_2, \ldots, y_p$ группа интегралов, которым соответствует перестановка (64). Положим $y_k = (x - a)^r z_k$, где r равно $\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} s$; тогда p функциям $z_1, z_2, \ldots, z_p$ должна соответствовать подстановка канонического вида:

$$Z_1 = z_1, \ Z_2 = z_1 + z_2, \ \ldots, \ Z_p = z_{p-1} + z_p.$$

Следовательно, функция z_1 есть некоторая функция $\varphi_1(x - a)$, однозначная

* За всем, что касается приложения теории *элементарных делителей* Вейерштрасса к линейным диференциальным уравнениям, можно обратиться к мемуару Соважа (Sauvage), *Annales de l'École Normale supérieure*, 1891, стр. 285).

в области точки a. Что касается функции z_2, то из предыдущих равенств мы получим.

$$\frac{Z_2}{z_1}=\frac{z_2}{z_1}+1;$$

следовательно, разность

$$\frac{z_2}{z_1}-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(x-a)$$

есть некоторая однозначная функция $\psi_1(x-a)$, и мы имеем:

$$z_2=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(x-a)\,\varphi_1(x-a)+\varphi_2(x-a),$$

где $\varphi_2(x-a)$ есть также однозначная функция. Вообще, положим

$$t=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(x-a);$$

если переменное x описывает в прямом направлении петлю вокруг точки a, то значение количества t возрастает на единицу, и $z_1, z_2, \ldots, z_p$, рассматриваемые как функции от t, должны удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} z_1(t+1)=z_1(t),\, z_2(t+1)=z_2(t)+z_1(t), \ldots,\\ z_p(t+1)=z_p(t)+z_{p-1}(t). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Чтобы найти самое общее решение уравнений (68), заметим, что этим соотношениям можно удовлетворить, полагая $z_1=1$, $z_2=t$ и выбирая для $z_i(t)$ соответствующий многочлен степени $i-1$ относительно t, все коэфициенты которого мы можем определить последовательно один за другим. Мы упростим вычисление, заметив, что соотношение

$$z_i(t+1)-z_i(t)=z_{i-1}(t)\quad (i\geqslant 3)$$

удовлетворяется при $t=0, 1, 2, \ldots, i-3$, если мы возьмем за $z_i(t)$ многочлен вида: $K_i t(t-1)\ldots(t-i+2)$. Так как при этом обе части последнего равенства будут многочленами $(i-2)$-й степени относительно t, то, чтобы это равенство удовлетворялось тождественно, достаточно, чтобы оно удовлетворялось еще при каком-нибудь одном значении t, например при $t=i-2$. Отсюда получаем условие $(i-1)K_i=K_{i-1}$ или $K_i=\frac{1}{(i-1)!}$. Таким образом мы получим частное решение уравнений (68), положив

$$\theta_1=1,\ \theta_i(t)=\frac{t(t-1)\ldots(t-i+2)}{1\cdot 2\ldots(i-1)}\quad (i=2, 3, \ldots, p).$$

Чтобы иметь общее решение, обозначим через $\varphi_k(t)$ какие-нибудь функции, удовлетворяющие условию $\varphi_k(t+1)=\varphi_k(t)$. Из первого соотношения (68) следует, что $z_1(t)$ есть функция именно такого вида; обозначим ее через $\varphi_1(t)$. Второе из соотношений (68) показывает, что разность $z_2(t)-\theta_2(t)z_1(t)$ не изменяется при переходе от t к $t+1$; следовательно, $z_2(t)$ должно иметь вид:

$$z_2(t)=\varphi_2(t)+\theta_2\varphi_1(t).$$

Продолжая последовательно то же рассуждение, положим, что мы доказали что $z_{k-1}(t)$ имеет вид:

$$z_{k-1}(t)=\varphi_{k-1}(t)+\theta_2\varphi_{k-2}(t)+\ldots+\theta_{k-1}\varphi_1(t),\quad (K=3, 4, \ldots, i).$$

Из общего соотношения $z_i(t+1)-z_i(t)=z_{i-1}(t)$ следует, что разность

$$z_k(t)-\theta_2\varphi_{k-1}(t)-\theta_3\varphi_{k-2}(t)-\ldots-\theta_k\varphi_1(t)$$

не изменяется при изменении t на $t+1$; следовательно, функция $z_k(t)$ должна иметь вид:

$$z_k(t)=\varphi_k(t)+\theta_2\varphi_{k-1}(t)+\ldots+\theta_k\varphi_1(t).$$

Таким образом общее решение уравнений (68) представляется формулами:

$$\left.\begin{aligned} z_1(t) &= \varphi_1(t), \\ z_2(t) &= \theta_2\varphi_1(t) + \varphi_2(t), \\ z_3(t) &= \theta_3\varphi\ (t) + \theta_2\varphi_2(t) + \varphi_3(t), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p(t) &= \theta_p\varphi_1(t) + \theta_{p-1}\varphi_2(t) + \ldots + \theta_2\varphi_{p-1}(t) + \varphi_p(t), \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ не изменяются при изменении t на $t+1$.

Возвратимся теперь к переменному x и обозначим через $\Theta_i[Log\, x - a]$ многочлен относительно $\operatorname{Log}(x-a)$, который получим, заменяя в $\theta_i(t)$ переменное t через $\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(x-a)$. Мы видим, что p интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_p$ рассматриваемой группы, которые изменяются по формулам (64) после обхода переменного в прямом направлении вокруг точки a, представятся аналитическими выражениями следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (x-a)^r \Phi_1(x-a), \\ y_2 &= (x-a)^r\{\Theta_2[\operatorname{Log}(x-a)]\Phi_1(x-a) + \Phi_2(x-a)\}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_p &= (x-a)^r\{\Theta_p[Log\,(x-a)]\Phi_1(x-a) + \Theta_{p-1}[\operatorname{Log}(x-a)]\Phi_2(x-a) + \ldots\}, \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

где $\Phi_1(x-a), \Phi_2(x-a), \ldots, \Phi_p(x-a)$ суть функции, однозначные в области точки a.

Заметим, что все интегралы этой группы можно вывести из последнего y_p, который, будучи расположен по степеням $\operatorname{Log}(x-a)$, принимает вид.

$$y_p = (x-a)^r[\psi_0(x-a) + \\ + \psi_1(x-a)\operatorname{Log}(x-a) + \ldots + \psi_{p-1}(x-a)\{\operatorname{Log}(x-a)\}^{p-1}],$$

где $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{p-1}$ суть функции, однозначные в области точки a, из которых последняя ψ_{p-1} *отлична от нуля*. Из соотношений (64) имеем:

$$y_{p-1} = \frac{Y_p}{s} - y_p$$

Следовательно, y_{p-1} есть произведение $(x-a)^r$ на многочлен $(p-2)$-й степени относительно $\operatorname{Log}(x-a)$, коэфициенты которого суть функции от x, однозначные в области точки a; точно также из y_{p-1} мы выведем y_{p-2} и т. д.

Если точка a не есть существенно особая точка ни для одной из функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$, то все интегралы рассматриваемой группы (70) называются *правильными* при $x=a$. На основании сделанного выше замечания (§ 409) мы можем тогда предположить, что все эти функции $\Phi_i(x-a)$ голоморфны при $x=a$; для этого нужно будет только, может быть, заменить показатель r некоторым другим меньшим первоначального на целое число.

412. Теорема Фукса. Определение чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ или, что то же, соответствующих показателей $r_1, r_2, \ldots, r_n$, вообще — задача очень трудная. Но если все интегралы рассматриваемого уравнения — правильные в области точки a то можно получить эти показатели r_i алгебраическими вычислениями. Это следует из следующей важной теоремы, данной Фуксом (Fuchs): *Чтобы уравнение (57) имело n независимых интегралов, правильных в области точки a, необходимо и достаточно, чтобы в этом уравнении коэфициент p_i при $\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}$ имел вид $(x-a)^{-i}P_i(x-a)$, где функция $P_i(x-a)$ голоморфна в области точки a.*

Если $P_i(0)$ не равно нулю, то точка a есть полюс порядка i коэфициента p_i. Но, если $P_i(0)=0$, то точка a есть полюс порядка низшего, чем i; может даже случиться, что для некоторых из коэфициентов p_i точка a есть обыкновенная точка. Предыдущие условия можно еще выразить следующим образом: *Линейное уравнение должно иметь вид*

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^n\frac{d^ny}{dx^n}+(x-a)^{n-1}P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots\\ \dots+(x-a)P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+P_n(x)y=0,\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

где $P_1, P_2, \dots, P_n$ суть функции голоморфные в области точки a

Мы дадим доказательство только для случая уравнения второго порядка и предположим для простоты обозначений, что $a=0$. В этом частном случае первая часть теоремы Фукса может быть изложена следующим образом: *Всякое уравнение второго порядка, которое имеет два различных правильных интеграла в области начала координат, имеет вид*

$$x^2y''+xP(x)y'+Q(x)y=0, \qquad (72)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ голоморфны в этой области.

Если соответствующее уравнение относительно s (60) имеет два различных корня s_1, s_2, то уравнение (72) имеет два правильных интеграла вида:

$$y_1=x^{r_1}\varphi_1(x), \quad y_2=x^{r_2}\varphi_2(x), \qquad (I)$$

где показатели r_1 и r_2 различны, а функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ голоморфны и *неравны нулю при* $x=0$. Далее, если уравнение относительно s имеет двойной корень и в выражении общего интеграла не входит логарифмический член, то оба частных интеграла попрежнему имеют предыдущий вид (I), где разность r_2-r_1 равна целому числу. При этом мы всегда можем предположить, что эта разность не равна нулю, так как если бы мы имели $r_2=r_1$, то мы могли бы заменить y_2 выражением $\varphi_1(0)y_2-\varphi_2(0)y_1$, которое делится на x^{r_1+1}. Наконец, если выражение интеграла в области начала координат содержит логарифмический член, то мы можем взять фундаментальную систему вида:

$$y_1=x^{r_1}\varphi_1(x), \quad y_2=x^{r_1}[\varphi_1(x)\operatorname{Log}(x)+\psi_1(x)], \qquad (II)$$

где $\varphi_1(x)$ — голоморфная функция, неравная нулю при $x=0$, а $\psi_1(x)$ — функция однозначная в области начала координат, которая может иметь полюсом точку $x=0$. Задача приводится к доказательству того, что всякое уравнение, имеющее в области начала координат два различных интеграла вида (I) или вида (II), принадлежит к типу уравнений Фукса. Непосредственная поверка не представляет никаких трудностей, но мы можем еще упростить вычисление следующим образом. Если мы положим $y=x^{r_1}\varphi_1(x)u$, то линейное уравнение относительно u, представляющее результат этого преобразования, имеет общий интеграл одного из видов:

$$u=C_1+C_2x^{?}\pi(x), \quad u=C_1+C_2[\operatorname{Log}(x)+\pi(x)],$$

где функция $\pi(x)$ голоморфна при $x=0$ или имеет эту точку полюсом. Производная u' имеет вид:

$$u'=C_2x^{\mu}\chi(x),$$

где $\chi(x)$ есть голоморфная функция, неравная нулю при $x=0$. Следовательно, линейное уравнение для u будет вида:

$$\frac{u''}{u'}=\frac{\mu}{x}+\frac{\chi'(x)}{\chi(x)},$$

и оно, действительно, содержится в типе уравнений Фукса. Но нетрудно убедиться, что тип уравнения сохраняется после преобразования вида $y=x^{r_1}\varphi_1(x)u$; следовательно, первая часть предложения доказана.

Чтобы доказать обратное предложение, подставим в левую часть уравнения (72) вместо y разложение вида:

$$y=c_0x^r+c_1x^{r+1}+\dots+c_nx^{r+n}+\dots(c_0\neq 0); \qquad (73)$$

пусть будут

$$P(x)=a_0+a_1x+\dots, \quad Q(x)=b_0+b_1x+\dots$$

разложения функций P и Q. После подстановки коэфициент при x^r равен:

$$[r(r-1)+a_0 r+b_0]\,c_0.$$

Так как, по предположению, первый коэфициент c_0 не равен нулю, то за r должно взять корень уравнения второй степени:

$$D(r)=r(r-1)+a_0 r+b_0=0. \tag{74}$$

Взяв для r корень уравнения (74), мы можем выбрать c_0 произвольно; положим, например, $c_0=1$. Точно так же, после подстановки найдем, что коэфициент при x^{r+p} равен

$$c_p[(r+p)(r+p-1)+a_0(r+p)+b_0]+F=c_p D(r+p)+F,$$

где F есть многочлен с целыми коэфициентами относительно $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$, $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_p$. Полагая $p=1, 2, 3, \ldots$, мы можем вычислить последовательно коэфициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$, если только $D(r+p)$ не равно нулю при каком нибудь значении целого положительного числа p, т. е. если в уравнении (74) второй корень r' не разнится от первого корня r на целое положительное число Устраняя пока из рассмотрения этот случай, мы получим частный интеграл, представляемый рядом вида (73), сходимость которого будет доказана ниже. Если уравнение (74) $(r=0)$ имеет два различных корня r, r', разность которых не равна целому числу, то, пользуясь предыдущим методом, мы получим два различных интеграла, и общий интеграл представится в области начала координат формулою:

$$y=C_1 x^r\varphi(x)+C_2 x^{r'}\psi(x), \tag{75}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — голоморфные функции, не обращающиеся в нуль при $x=0$.

Предыдущие рассуждения не применимы в том случае, когда или оба корня уравнения (74) равны между собою, или их разность равна целому числу. Пусть будут r и $r-p$ эти два корня, причем p есть целое положительное число или нуль. Мы попрежнему можем найти один интеграл вида $y_1=x^r\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — голоморфная функция, не обращающаяся в нуль при $x=0$. Второй интеграл определится общею формулою (23), которая здесь обращается в

$$y_2=x^r\varphi(x)\int\frac{dx}{x^{2r}[\varphi(x)]^2}e^{-\int\left(\frac{a_0}{x}+a_1+a_2x+\ldots\right)dx}.$$

Сумма $2r-p$ двух корней уравнения (74) равна $1-a_0$; следовательно, мы имеем $a_0=p+1-2r$, и потому

$$e^{-\int\left(\frac{a_0}{x}+a_1+a_2x+\ldots\right)dx}=x^{2r-(p+1)}S(x),$$

где $S(x)$ есть функция, правильная в области начала координат и не равная нулю при $x=0$. Таким образом второй интеграл y_2 имеет вид:

$$y_2=x^r\varphi(x)\int\frac{T(x)\,dx}{x^{p+1}},$$

где $T(x)$ — голоморфная функция, отличная от нуля при $x=0$

Пусть будет A коэфициент при x^p в $T(x)$; легко видеть, что интеграл y_2 имеет вид

$$y_2=x^r\varphi(x)\left[A\operatorname{Log}x+\frac{\varphi_1(x)}{x^p}\right]=x^{r-p}\psi(x)+Ax^r\varphi(x)\operatorname{Log}x,$$

где $\psi(x)$ обозначает новую функцию, голоморфную в области начала координат. Этот результат вполне согласен с общею теориею. В частном случае A может быть равно нулю; тогда общий интеграл не содержит логарифма в области начала координат. Следует, однако, заметить, что последнее обстоятельство никогда не имеет места, если $p=0$, [так как $T(0)$ не равно нулю], т. е. если уравнение (74) имеет двойной корень *.

Чтобы закончить доказательство, остается показать, что ряд (73), где r корень уравнения (74), — сходящийся, если другой корень r' не больше корня r на целое число. Для простоты изложения можно предположить, что $r=0$, и второй корень r' уравнения (74) не равен целому положительному числу; в самом деле, полагая $y=x^{\mu}z$, где μ — произвольное число, мы найдем, что уравнение, аналогичное $D(r)=0$, составленное для линейного уравнения относительно z, имеет своими корнями корни уравнения (74), уменьшенные на μ. Мы предположим, что мы предварительно выполнили предыдущее преобразование, так что уравнение (74) имеет один корень $r=0$, а второй его корень не равен целому положительному числу. В этом случае b_0 должно быть равно нулю; изменив несколько обозначения и разделив все члены уравнения (72) на x, мы представим его в следующем виде:

$$xy''+a_0y'=xy'(a_1+a_2x+\ldots)+y(b_1+b_2x+\ldots); \tag{76}$$

здесь коэфициенты $a_1, b_1, a_2, \ldots$ уже имеют не те значения, какие они имели выше. Остается показать, что, если $1-a_0$ не есть целое положительное число, то уравнение (76) имеет интеграл, голоморфный в области начала координат и не обращающийся в нуль при $x=0$. Пробуя удовлетворить формально этому уравнению рядом вида:

$$y=1+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots, \tag{77}$$

мы получим для определения коэфициентов рекуррентную формулу вида

$$\left.\begin{aligned} nc_n(n-1+a_0)=P_n(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}), \\ (n=1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

где P_n есть многочлен, все коэфициенты которого суть действительные положительные числа. По предположению, коэфициент $n-1+a_0$ не обращается в нуль ни при каком целом и положительном значении числа n; следовательно, принимая во внимание, что при неограниченном возрастании числа n отношение $\frac{n-1+a_0}{n+1}$ стремится к единице, мы можем найти такое положительное число μ, чтобы при всех целых и положительных значениях числа n было $|n-1+a_0|>\mu(n+1)$. С другой стороны, заменим в правой части уравнения (76) коэфициенты при xy' и y усиливающими функциями и рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$\mu(xY''+2Y')=xY'(A_1+A_2x\ldots)+Y(B_1+B_2x+\ldots). \tag{79}$$

Пробуя удовлетворить этому новому уравнению рядом вида:

$$Y=1+C_1x+\ldots+C_nx^n+\ldots, \tag{80}$$

мы придем к соотношениям, аналогичным соотношениям (78):

$$n\mu C_n(n+1)=P_n(A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, \ldots, C_{n-1}). \tag{81}$$

Сравнивая формулы, определяющие значения коэфициентов c_n и C_n,

$$c_n=\frac{P_n(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, \ldots, c_{n-1})}{n(n-1+a_0)}, \quad C_n=\frac{P_n(A_1, A_2, \ldots C_{n-1})}{n\mu(n+1)},$$

---

* Предположим, что в уравнении (72) функции $P(x)$ и $Q(x)$ суть *четные* функции от x, и разность корней уравнения $D(r)=0$ есть *целое нечетное число* $2n+1$; в этом случае логарифмический член в интеграле y_2 всегда исчезает. В самом деле, если мы возьмем за независимое переменное $t=x^2$, то уравнение (72) превратится в уравнение того же вида:

$$4t^2\frac{d^2y}{dt^2}+2t\left[1+P(\sqrt{t})\right]\frac{dy}{dt}+Q(\sqrt{t})y=0, \tag{72'}$$

и, как легко убедиться, корни уравнения, аналогичного уравнению $D(r)=0$, будут здесь равны половинам корней прежнего уравнения $D(r)=0$. Так как их разность не есть целое число, то отсюда следует, что общий интеграл уравнения (72') не содержит логарифмического члена в области начала координат. Следовательно, то же имеет место и для уравнения (72).

мы видим, что из условий $A_i \geqslant |a_i|$, $B_i \geqslant |b_i|$, $|n-1+a_0| > \mu(n+1)$ последовательно вытекает:

$$|c_1| < C_1,\ |c_2| < C_2, \ldots, |c_n| < C_n;$$

следовательно, достаточно доказать, что вспомогательный ряд (80) — сходящийся, или, что то же, — показать, что уравнение (79) имеет интеграл, голоморфный в области начала координат и не обращающийся в нуль при $x=0$. Если мы возьмем для обеих усиливающих функций выражение вида:

$$\frac{M}{1-\frac{x}{r}},$$

то вспомогательное уравнение (79) обратится в

$$\frac{xY''+2Y'}{xY'+Y}=\frac{M}{\mu}\frac{1}{1-\frac{x}{r}};$$

отсюда после первого интегрирования получим:

$$xY'+Y=C\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{Mr}{\mu}},$$

и затем

$$xY=C\int_0^x\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{Mr}{\mu}}dx+C'.$$

Остается только положить здесь $C'=0$, $C=1$, чтобы иметь интеграл, голоморфный в области начала координат и не обращающийся в нуль при $x=0$.

Общий случай. Доказательство теоремы Фукса в общем случае можно провести, исходя из тех же оснований и показав, что, если теорема верна для уравнения $(n-1)$-го порядка, то она верна также и для уравнения n-го порядка.

Если уравнение (71) имеет n частных интегралов, распадающихся на несколько групп вида (70), то оно имеет по крайней мере один интеграл вида $(x-a)^r\varphi(x-a)$, где $\varphi(x-a)$ есть функция, голоморфная в области точки a и не равная нулю при $x=a$. Выполнив подстановку $y=(x-a)^r\varphi(x-a)u$, мы придем к линейному уравнению относительно u, имеющему частный интеграл $u=1$; следовательно, производная u' удовлетворяет однородному линейному уравнению $(n-1)$-го порядка. Допустив, что теорема Фукса верна для линейного уравнения $(n-1)$-го порядка, мы должны заключить, что это уравнение относительно u' входит в тип уравнений Фукса (71); очевидно, то же имеет место и для уравнения относительно u, а следовательно, и для уравнения относительно y.

Обратно, рассмотрим уравнение вида (71), где $a=0$. Мы формально удовлетворим этому уравнению рядом вида:

$$y=c_0x^r+c_1x^{r+1}+\ldots \quad (c_0\neq 0),$$

где r есть такой корень *основного определяющего уравнения*

$$\left.\begin{aligned} D(r)=r(r-1)\ldots(r-n+1)+\\ +P_1(0)r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots+P_n(0)=0,\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

что ни одна из разностей между остальными корнями уравнения (82) и этим корнем не равна целому положительному числу. Как и в случае $n=2$, можно убедиться, что для доказательства сходимости ряда $c_0x^r+c_1x^{r+1}+\ldots$ достаточно показать, что линейное уравнение вида

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}Y_1)=\frac{M}{1-\frac{x}{r}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n-1}Y)$$

имеет интеграл, голоморфный в области начала координат и не обращающийся в нуль при $x=0$. Последнее уравнение дает:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n-1}Y)=C\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-Mr}.$$

Отсюда, пользуясь приемом § 379 и § 401, находим частный интеграл:

$$Y=\frac{1}{(n-2)!x^{n-1}}\int_0^x (x-t)^{n-2}\left(1-\frac{t}{r}\right)dt,$$

удовлетворяющий требуемому условию. Если уравнение (82) имеет n различных корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что ни одна из разностей r_i-r_k не равна целому числу, то общий интеграл линейного уравнения (71) имеет вид:

$$y=C_1x^{r_1}\varphi_1(x)+C_2x^{r_2}\varphi_2(x)+\ldots+C_nx^{r_n}\varphi_n(x),$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ голоморфны в области точки $x=0$. Если же между корнями уравнения (82) есть равные, или, вообще, такие, что некоторые из разностей r_i-r_k равны целым числам, то эти корни распадаются на несколько групп, причем разность двух каких-нибудь корней одной и той же группы есть целое число, тогда как разность двух корней различных групп не равна целому числу. Пусть будет r наибольший из корней одной из этих групп; мы только что видели, что уравнение (71) имеет частный интеграл вида $x^r\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ есть функция, голоморфная в области начала координат и отличная от нуля при $x=0$. Полагая $y=x^r\varphi(x)u$, затем $\frac{du}{dx}=v$, мы придем к линейному дифеpенциальному уравнению $(n-1)$-го порядка относительно v, которое также входит в тип уравнений Фукса. Допуская, что теорема верна для уравнения $(n-1)$-го порядка, мы видим, что это уравнение относительно v имеет $n-1$ различных частных интегралов вида

$$v=x^\alpha[\psi_0(x)+\psi_1(x)\operatorname{Log}x+\ldots+\psi_q(x)(\operatorname{Log}x)^q],$$

где $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_q$ — функции, голоморфные при $x=0$. Если α не есть целое число, то нетрудно доказать рядом интегрирований по частям, что $\int v dx$ есть выражение того же вида, что и v. Если же α есть целое число, то $\int v dx$ содержит еще логарифмический член

$$C(\operatorname{Log}x)^{q+1},$$

где C — постоянный коэфициент. Следовательно, теорема Фукса верна также для уравнения n-го порядка *.

413. Уравнение Гаусса. Применим этот общий метод к *уравнению Гаусса:*

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0, \tag{83}$$

где α, β, γ — постоянные. Особые точки на конечном расстоянии суть $x=0$ и $x=1$. Определяющее уравнение для точки $x=0$ есть $r(r+\gamma-1)=0$; оно имеет два корня $r=0$, $r=1-\gamma$. Если γ не равно ни нулю, ни целому отрицательному числу, то из предыдущей теории следует, что уравнение имеет интеграл, голоморфный в области начала координат. Чтобы определить этот интеграл, подставим в уравнение ряд:

$$y=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

и приравняем нулю коэфициент при x^{n-1}. Мы получим рекуррентное соотношение между двумя последовательными коэфициентами:

$$n(\gamma+n-1)c_n=(\alpha+n-1)c_{n-1};$$

---

* Относительно дальнейших подробностей см. мемуары Фукса в *Crelle's Journal* или диссертацию Ж. Таннери (J. Tannery). *Annales de l'École Normale*, 2-я серия, т. IV, 1 75.

отсюда имеем для голоморфного интеграла ряд:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 \ldots;$$

этот ряд называется *гипергеометрическим*, легко видеть, что он — сходящийся в круге Γ_0, описанном из начала координат радиусом, равным единице. Чтобы иметь второй интеграл, сделаем преобразование $y = x^{1-\gamma} z$; мы придем к уравнению того же вида:

$$\left. \begin{aligned} x(1-x) z'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) x] z' - \\ - (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma) z = 0, \end{aligned} \right\} \tag{84}$$

которое отличается от предыдущего только тем, что α, β, γ заменены соответственно через $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, $2 - \gamma$. Следовательно, если $2 - \gamma$ не есть ни нуль, ни целое отрицательное число, то уравнение (83) имеет второй интеграл

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

и если γ не есть целое число, то общий интеграл представится в круге Γ_0 формулою:

$$y = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x). \tag{85}$$

Если же γ есть целое число, то разность двух корней определяющего уравнения равна или нулю, или целому числу, и интеграл содержит, вообще, логарифмический член в области начала координат. Мы рассмотрим только тот случай, когда $\gamma = 1$; тогда оба интеграла

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

приводятся только к одному $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Чтобы найти второй интеграл, предположим, сначала, что γ немного отлично от единицы: $\gamma = 1 - h$, где h очень мало; уравнение (83) имеет два интеграла

$$F(\alpha, \beta, 1 - h, x), \quad x^h F(\alpha + h, \beta + h, 1 + h, x),$$

и следовательно, дробь

$$\frac{x^h F(\alpha + h, \beta + h, 1 + h, x) - F(\alpha, \beta, 1 - h, x)}{h}$$

есть также интеграл. Когда h стремится к нулю, это отношение имеет пределом производную по h от числителя при $h = 0$. Производная от множителя x^h дает логарифмический член, который при $h = 0$ обращается в $F(\alpha, \beta, 1, x) \operatorname{Log} x$. Чтобы найти производную по h от какого-нибудь коэфициента того или другого ряда, например от коэфициента

$$\frac{(\alpha + h)(\alpha + h + 1) \ldots (\alpha + h + n - 1)(\beta + h)(\beta + h + 1) \ldots (\beta + h + n - 1)}{1 \cdot 2 \ldots n (1 + h)(2 + h) \ldots (n + h)},$$

удобно вычислить сначала логарифмическую производную. Таким образом новый интеграл выразится формулою:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x) \operatorname{Log} x + \\ + \sum A_n \frac{\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha + n - 1) \beta(\beta+1) \ldots (\beta + n - 1)}{(1 \cdot 2 \ldots n)^2} x^n, \end{aligned} \right\} \tag{86}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} + \ldots + \frac{1}{\alpha + n - 1} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\beta + n - 1} - \\ - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Таким же образом можно было бы исследовать интегралы уравнения Гаусса в области точки $x = 1$, но для этого довольно заметить, что при изменении x в $1 - x$ вид уравнения не меняется, только γ изменится в $\alpha + \beta + 1 - \gamma$. Следовательно, в круге Γ_1, описанном из точки $x=1$ радиусом, равным единице, общий интеграл представится формулою:

$$y=C_1F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)+$$
$$+C_2(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x),$$

если $\gamma-\alpha-\beta$ не есть целое число.

Наконец, чтобы исследовать интегралы при значениях x с очень большим модулем, положим $x=\frac{1}{t}$. Тогда мы придем к исследованию интегралов нового линейного уравнения в области начала координат. Интегралы этого уравнения — также правильные в области начала координат, и корни определяющего уравнения суть α и β. Полагая одновременно $x=\frac{1}{t}$, $y=t^{\alpha}z$, мы снова получим уравнение вида (83), но в котором β заменено через $\alpha+1-\gamma$, и γ — через $\alpha+1-\beta$. Следовательно, уравнение Гаусса имеет интеграл при $|x|>1$:

$$x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right);$$

вследствие симметрии оно имеет также интеграл, получающийся из предыдущего перестановкою α и β, и общий интеграл представится вне круга Γ_0 формулою:

$$y=C_1x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)+C_2x^{-\beta}F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right),$$

если только $\alpha-\beta$ не есть целое число.

Примечание. Всякое линейное уравнение вида

$$(x-a)(x-b)y''+(lx+m)y'+ny=0, \tag{87}$$

где a, b, l, m, n — произвольные постоянные ($a\neq b$), приводится к уравнению Гаусса заменою переменного $x=a+(b-a)t$. В самом деле, чтобы привести получающееся уравнение

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{la+m}{b-a}+lt\right)\frac{dy}{dt}-ny=0 \tag{88}$$

к уравнению (83), достаточно положить $\gamma=-\frac{la+m}{b-a}$ и определить α и β из условий $\alpha+\beta+1=l$, $\alpha\beta=n$.

414. Уравнение Бесселя. Рассмотрим, в частности, уравнение

$$x(1-kx)y''+(c-bx)y'-ay=0, \tag{89}$$

имеющее две особые точки $x=0$, $x=\frac{1}{k}$. Его можно привести к уравнению Гаусса заменою переменного $kx=t$. Если мы будем приближать параметр k к нулю, а количества a, b, c будут стремиться к конечным пределам A, B, C, то особая точка $x=\frac{1}{k}$ будет неограниченно удаляться, и мы получим в пределе линейное уравнение:

$$xy''+(C-Bx)y'-Ay=0, \tag{90}$$

имеющее на конечном расстоянии только одну особую точку $x=0$. Если B не равно нулю, то, заменяя Bx через x, мы придем к уравнению того же вида, где $B=1$. Если же $B=0$ и A отлично от нуля, то можно таким же образом предположить, что $A=1$. Следовательно, уравнение (90) можно всегда представить в одном из двух следующих видов:

$$xy''+(\gamma-x)y'-ay=0, \tag{91}$$
$$xy''+\gamma y'-y=0. \tag{92}$$

Изучая интегралы этих двух уравнений в области начала координат, как мы это делали для уравнения Гаусса, мы придем к двум рядам:

$$G(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

$$J(\gamma, x) = 1 + \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

которые можно рассматривать как предельные случаи гипергеометрического ряда. В самом деле, если мы заменим в $P(\alpha, \beta, \gamma, x)$ переменное x через kx и β через $\frac{1}{k}$, то коэфициент при x^n в $F\left(\alpha, \frac{1}{k}, \gamma, kx\right)$ имеет пределом коэфициент при x^n в $G(\alpha, \gamma, x)$, когда k стремится к нулю. Точно так же коэфициент при x^n в

$$F\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \gamma, k^2x\right)$$

имеет пределом коэфициент при x^n в $J(\gamma, x)$, когда k стремится к нулю.

Если γ не есть целое число, то общий интеграл уравнения (91) выражается формулою:

$$y = C_1G(\alpha, \gamma) + C_2x^{1-\gamma}G(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, x), \tag{93}$$

и точно так же общий интеграл уравнения (92) есть

$$y = C_1J(\gamma, x) + C_2x^{1-\gamma}J(2-\gamma, x); \tag{94}$$

эти формулы пригодны во всей плоскости. Если γ есть целое число, то общий интеграл уравнения (92) всегда содержит логарифмический член. Например, если $\gamma = 1$, мы получим интеграл, отличный от $J(1, x)$, находя предел при $h = 0$ отношения

$$\frac{x^hJ(1+h, x) - J(1-h, x)}{h};$$

отсюда имеем выражение общего интеграла:

$$y = C_1J(1, x) + C_2\left[J(1, x)\operatorname{Log} x - 2\sum_1^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{(1\cdot 2\ldots n)^2}\right].$$

К уравнению (92) можно привести одно линейное уравнение, встречающееся во многих задачах математической физики. Положим в уравнении (92) $x = -\frac{t^2}{4}$; заменяя γ через $n+1$, мы получим уравнение, тождественное с изученным выше (§ 408):

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (2n+1)\frac{dy}{dt} + ty = 0; \tag{95}$$

если в последнем уравнении мы положим еще $y = t^{-n}z$, то получим *уравнение Бесселя* в его обычном виде:

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (t^2 - n^2)z = 0. \tag{96}$$

Таким образом три уравнения: (92), (95), (96), где $\gamma = n+1$, вполне равносильны между собою. Если n не есть целое число, то, на основании предыдущего, общий интеграл уравнения Бесселя (96) будет:

$$z = C_1t^nJ\left(n+1, -\frac{t^2}{4}\right) + C_2t^{-n}J\left(1-n, -\frac{t^2}{4}\right).$$

Выше было доказано (§ 408), что, если n есть половина *нечетного* числа, то общий интеграл уравнения (95) выражается через элементарные трансцендентные функции*.

---

* Подробное изложение теории бесселевых функций можно найти в сочинении Нильсена (Nielsen), Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, 1904.

Примечание. Уравнение, исследованное Риккати:

$$\frac{du}{dx} + Au^2 - Bx^m = 0, \tag{97}$$

где A, B, m—данные постоянные, можно также привести к одному из трех равносильных уравнений (92), (95), (96). В самом деле, мы видели выше (§ 402), что общий интеграл уравнения (97) есть $\frac{1}{A}\frac{z'}{z}$, где z есть общий интеграл линейного уравнения:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - ABx^m z = 0. \tag{98}$$

Сделаем в последнем уравнении замену переменного $x = \lambda t^\mu$, где λ и μ — два постоянных количества, остающиеся пока произвольными. Тогда оно примет вид:

$$t\frac{d^2z}{dt^2} - (\mu - 1)\frac{dz}{dt} - AB\lambda^{m+2}\mu^2 t^{(m+2)\mu-1} z = 0; \tag{99}$$

чтобы это уравнение было тождественно с уравнением (95), достаточно взять $\mu = \frac{2}{m+2}$ и определить λ из условия $AB\lambda^{m+2}\mu^2 = -1$. Соответствующее значение для n есть $-\frac{\mu}{2}$ или $-\frac{1}{m+2}$. Следовательно, общий интеграл уравнения Риккати (97) выражается в конечном виде всякий раз, когда $\frac{1}{m+2}$ есть половина положительного или отрицательного нечетного числа $2i+1$, т. е. всякий раз, когда $m = \frac{-4i}{1+2i}$, где i есть положительное или отрицательное целое число.

415. Уравнения Пикара. Если дано линейное диференциальное уравнение с мероморфными коэфициентами, то, пользуясь методом Фукса, можно узнать, будет ли его общий интеграл мероморфною функциею. Для этого необходимо и достаточно: 1) чтобы интегралы были правильными в области каждой из особых точек; 2) чтобы все корни решающего уравнения для каждой из этих особых точек были целыми числами; 3) наконец, чтобы в выражении общего интеграла вблизи особой точки отсутствовали логарифмические члены.

Предположим, что все эти условия выполнены. Тогда общий интеграл есть функция мероморфная, однозначная во всей плоскости. Если коэфициенты уравнения суть рациональные функции, то особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будет конечное число. В таком случае, чтобы общий интеграл был рациональною функцией, достаточно, чтобы все интегралы нового уравнения, которое получим, полагая $x = \frac{1}{t}$, были правильными в области точки $t = 0$, так как общий интеграл вследствие своей однозначности не может содержать ни логарифмического члена, ни дробных степеней переменного t. Если это последнее условие выполнено, то общий интеграл можно получить подстановкою и сравнением коэфициентов. В самом деле, пусть будет m_i наименьший корень характеристического уравнения (60) для точки $x = a_i$, и N — наименьший корень характеристического уравнения для преобразованного уравнения для точки $t = 0$. Ясно, что произведение каждого интеграла y на

$$(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_n)^{m_n}$$

есть рациональная функция, не имеющая полюсов на конечном расстоянии, т. е. многочлен $P(x)$, степень которого не выше числа

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n - N.$$

Так как, таким образом, верхняя граница степени этого многочлена известна, то для определения его коэфициентов достаточно заменить в левой части данного уравнения переменное y выражением вида $P(x)\Pi(x - a_i)^{-m_i}$, где $P(x)$ есть самый общий многочлен найденной степени, и выразить, что результат подстановки тождественно равен нулю.

Пикар указал на другой очень важный случай, когда общий интеграл выражается через основные трансцендентные функции. *Если общий интеграл однородного линейного диференциального уравнения, коэфициенты которого суть эллиптические функции независимого переменного с одними и теми же периодами, есть мероморфная функция, то этот интеграл выражается через трансцендентные функции теории эллиптических функций**.

* Пикар, *Crelle's Journal*, т. XC. См. также мемуар Флоке (Floquet), *Annales de l'École Normale*, 3-я серия, т. I. 1884.

Чтобы упростить изложение, мы приведем доказательство только для уравнения второго порядка. Пусть будут $f_1(x)$, $f_2(x)$ два различных интеграла однородного линейного уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, где $p(x)$ и $q(x)$ суть эллиптические функции с периодами 2ω и $2\omega'$. По предположению $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суть мероморфные однозначные функции. Так как рассматриваемое уравнение не изменяется при изменении x в $x+2\omega$, то $f_1(x+2\omega)$ и $f_2(x+2\omega)$ суть также интегралы, и мы имеем соотношения:

$$f_1(x+2\omega)=af_1(x)+bf_2(x),\quad f_2(x+2\omega)=cf_1(x)+df_2(x),\tag{100}$$

где a, b, c, d — постоянные коэфициенты, определитель которых $ad-bc$ не равен нулю, так как, если бы было $ad-bc=0$, то между $f_1(x+2\omega)$ и $f_2(x+2\omega)$ существовало бы соотношение вида: $C_1f_1(x+2\omega)+C_2f_2(x+2\omega)=0$, где C_1 и C_2 — постоянные, из которых, по крайней мере, одно отлично от нуля; но это невозможно, так как интегралы f_1 и f_2 независимы. Точно так же мы будем иметь другую систему соотношений:

$$f_1(x+2\omega')=a'f_1(x)+b'f_2(x),\quad f_2(x+2\omega')=c'f_1(x)+d'f_2(x),\tag{101}$$

где a', b', c', d' — постоянные коэфициенты, $a'd'-b'c'$ не равно нулю. Будем искать, как в § 109, такой интеграл $\varphi(x)=\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$, чтобы $\varphi(x+2\omega)=s\varphi(x)$. Для определения λ, μ, s мы имеем два уравнения:

$$\lambda(a-s)+\mu c=0,\quad \lambda b+\mu(d-s)=0,$$

откуда для s получаем уравнение второй степени:

$$F(s)=s^2-(a+d)\,s+ad-bc=0.$$

Если это уравнение имеет два различных корня s_1 и s_2, то существуют два таких независимых интеграла $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, что

$$\varphi_1(x+2\omega)=s_1\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x+2\omega)=s_2\varphi_2(x),\tag{102}$$

и соотношения (101) заменятся двумя соотношениями того же вида:

$$\varphi_1(x+2\omega')=k\varphi_1(x)+l\varphi_2(x),\quad \varphi_2(x+2\omega')=m\varphi_1(x)+n\varphi_2(x).\tag{103}$$

Пользуясь соотношениями (102) и (103), мы можем получить два различных выражения для $\varphi_1(x+2\omega+2\omega')$ и $\varphi_2(x+2\omega+2\omega')$.

С одной стороны, мы имеем:

$$\varphi_1(x+2\omega+2\omega')=s_1\varphi_1(x+2\omega')=s_1k\varphi_1(x)+s_1l\varphi_2(x);$$

с другой стороны, меняя порядок вычисления, имеем также:

$$\varphi_1(x+2\omega+2\omega')=k\varphi_1(x+2\omega)+l\varphi_2(x+2\omega)=ks_1\varphi_1(x)+ls_2\varphi_2(x).$$

Так как эти два выражения должны быть тождественны между собою, и s_1-s_2 не равно нулю, то должно быть $l=0$; точно так же, рассматривая два выражения для $\varphi_2(x+2\omega+2\omega')$, можно было бы доказать, что $m=0$. Следовательно, интегралы $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ суть мероморфные функции, которые получают постоянный множитель, когда x возрастает на период; такие функции называются *двоякопериодическими функциями второго вида*. Всякая мероморфная функция $\varphi(x)$, обладающая этим свойством, выражается через трансцендентные функции p, ζ, σ, так как ее логарифмическая производная $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ есть эллиптическая функция, а мы видели, что интегрирование эллиптических функций не приводит ни к каким другим трансцендентным функциям (§ 326). Впрочем, это можно показать и без всякого интегрирования. Пусть будет $\varphi(x)$ такая мероморфная функция, что

$$\varphi(x+2\omega)=\mu\varphi(x),\quad \varphi(x+2\omega')=\mu'\varphi(x).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(x)=e^{\rho x}\dfrac{\sigma(x-a)}{\sigma(x)}$, где a и ρ — некоторые постоянные. На основании свойств функции σ имеем (§ 323):

$$\psi(x+2\omega)=e^{2\omega\rho-2\eta a}\psi(x),\quad 2\psi(x+2\omega')=e^{2\omega'\rho-2\eta'a}\psi(x)$$

Чтобы частное $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ было эллиптическою функциею, нужно только, чтобы было

$$2\omega\rho - 2a\eta = \operatorname{Log}\mu, \quad 2\omega'\rho - 2a\eta' = \operatorname{Log}\mu';$$

отсюда определим ρ и a, так как $2\omega'\eta - 2\omega\eta'$ не равно нулю (§ 322). Заметим, что можно взять $a=0$, если $\operatorname{Log}\mu$ и $\operatorname{Log}\mu'$ пропорциональны соответствующим периодам 2ω и $2\omega'$ *.

Обратимся к случаю, когда уравнение $F(s)$ имеет двойной корень s. Можно найти два таких различных интеграла $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ (§ 410), чтобы было

$$\varphi_1(x+2\omega) = s\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x+2\omega) = s\varphi_2(x) + C\varphi_1(x). \tag{104}$$

Если $C=0$, то все интегралы уравнения и, в частности, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получают множитель s, когда x возрастает на 2ω; будем искать такую комбинацию интегралов $\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)$, чтобы при возрастании x на $2\omega'$ она получала множитель s'. Таким образом, исходя из формул (103), мы получим два независимых интеграла $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, для которых имеет место или

$$\varphi_1(x+2\omega') = s_1'\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x+2\omega') = s_2'\varphi_2(x),$$

или

$$\varphi_1(x+2\omega') = s'\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x+2\omega') = s'\varphi_2(x) + C'\varphi_1(x).$$

В первом случае интегралы $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ суть попрежнему двоякопериодические функции второго рода, так как для них имеют место равенства $\varphi_1(x+2\omega) = s\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x+2\omega) = s\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x+2\omega') = s'\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x+2\omega') = s'\varphi_2(x)$. Во втором случае только один интеграл $\varphi_1(x)$ есть двоякопериодическая функция второго рода, что же касается интеграла $\varphi_2(x)$, то отношение $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ возрастает на постоянное C', когда x возрастает на $2\omega'$, и не меняется, если x возрастает на 2ω. Но функция $A\zeta(x) + Bx$, где A и B суть постоянные, обладает тем же свойством, если

$$2A\eta + 2B\omega = 0, \quad 2A\eta' + 2B\omega' = C'.$$

Следовательно, разность $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} - A\zeta(x) - Bx$ есть эллиптическая функция.

Если в формулах (104) коэфициент C не равен нулю, то между интегралами $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x+2\omega')$, $\varphi_2(x+2\omega')$ существуют соотношения вида (103), и из них мы можем вывести по два различных выражения для $\varphi_1(x+2\omega+2\omega')$ и для $\varphi_2(x+2\omega+2\omega')$. Сравнивая их между собою, мы получим условия $l=0$, $k=n$. Интеграл $\varphi_1(x)$ есть, попрежнему, двоякопериодическая функция второго рода. Что касается интеграла $\varphi_2(x)$, то мы имеем два соотношения:

$$\frac{\varphi_2(x+2\omega)}{\varphi_1(x+2\omega)} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{C}{s}, \quad \frac{\varphi_2(x+2\omega')}{\varphi_1(x+2\omega')} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{m}{k}.$$

Определим подобно предыдущему коэфициенты A и B из условий $2A\eta + 2B\omega = \frac{C}{s}$, $2A\eta' + 2B\omega' = \frac{m}{k}$; тогда разность

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} - A\zeta(x) - Bx$$

есть эллиптическая функция. Таким образом мы видим, что во всех случаях общий интеграл выражается только через трансцендентные функции e^x, ρx, ζx, σx.

Рассмотрим, например, *уравнение Ламе*:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - [n(n+1)\,\rho x + h]\,y = 0, \tag{105}$$

где n — целое число, и h — произвольное постоянное. Интегрирование этого

* Основания теории таких функций можно найти в книге Аппелля и Лакура, Principes de la théorie des fonctions elliptiques.

уравнения было выполнено Эрмитом и послужило точкой отправления для предыдущей теории. Общий интеграл уравнения Ламе есть мероморфная функция. В самом деле, единственными критическими точками являются начало координат и точки $2m\omega + 2m'\omega'$. В области начала координат интегралы уравнения — правильные, и корни характеристического уравнения (74) суть $r' = -n$, $r'' = n + 1$. Их разность есть нечетное целое число, а коэфициент при y есть четная функция; следовательно, выражение общего интеграла не содержит логарифмического члена (см. выноску в § 412).

416. Уравнения с периодическими коэфициентами. Во многих важных вопросах механики встречаются линейные уравнения с периодическими коэфициентами; мы укажем здесь кратко их основные свойства.

Пусть будет

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0 \tag{106}$$

линейное уравнение, все коэфициенты $p_1, \ldots, p_n$ которого суть непрерывные функции действительного переменного t, имеющие период ω, который мы всегда можем предположить *положительным*. Если интегралы $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ образуют фундаментальную систему, то ясно, что $y_1(t+\omega)$, $y_2(t+\omega)$, $\ldots$, $y_n(t+\omega)$ суть также интегралы уравнения (106), так как это уравнение не изменяется при изменении t в $t+\omega$; следовательно, мы имеем n соотношений вида:

$$y_i(t+\omega) = a_{i1} y_1(t) + a_{i2} y_2(t) + \ldots + a_{in} y_n(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{107}$$

Определитель H коэфициентов a_{ik} отличен от нуля; в самом деле, повторяя рассуждения, приведенные в § 409, мы найдем, что этот определитель равен:

$$H = e^{-\int_0^{\omega} p_1 dt}. \tag{108}$$

Формулы (107) определяют линейную подстановку с постоянными коэфициентами, определитель которой не равен нулю. Следовательно, мы приходим к такому же исследованию, какое было подробно выполнено в § 409—411; но здесь, вместо обхода комплексного переменного x в прямом направлении вокруг особой точки a, переменное t описывает отрезок действительной оси, имеющий длину ω. Из этого исследования вытекает, что всегда можно выбрать фундаментальную систему интегралов таким образом, чтобы формулы (107) приняли простой канонический вид. Составление такой фундаментальной системы прежде всего зависит от решения *характеристического уравнения*

$$F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0, \tag{109}$$

все корни которого отличны от нуля, так как их произведение равно определителю H, значение которого мы только что нашли. Если n корней этого уравнения различны, то существует такая фундаментальная система интегралов, что формулы (107) принимают вид:

$$y_1(t+\omega) = s_1 y_1(t), \ldots, y_n(t+\omega) = s_n y_n(t). \tag{110}$$

Если уравнение (109) имеет кратные корни, то всегда можно найти фундаментальную систему интегралов, распадающуюся на несколько групп, причем p интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_p$ одной и той же группы удовлетворяют соотношениям вида:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t+\omega) &= s y_1(t), \\ y_2(t+\omega) &= s[y_2(t) + y_1(t)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p(t+\omega) &= s[y_p(t) + y_{p-1}(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Чтобы найти выражения этих интегралов, определим сначала общий вид такой непрерывной однозначной функции $f(t)$, чтобы было $f(t+\omega) = sf(t)$, где множитель s не равен нулю. Пусть будет a одно из значений количества $\frac{1}{\omega} \operatorname{Log} s$;

ясно, что произведение $f(t)e^{-\alpha t}$ имеет период ω, и следовательно, $f(t)$ имеет вид $f(t)=e^{\alpha t}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ есть непрерывная функция с периодом ω. Если s_i есть корень характеристического уравнения, то мы положим $\alpha_i=\frac{1}{\omega}\operatorname{Log} s_i$; постоянные α_i, которые определены с точностью до кратных числу $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}$, называются *характеристическими показателями*. Следовательно, если уравнение (109) имеет n различных корней $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то уравнение (106) имеет n различных частных интегралов вида

$$y_1=e^{\alpha_1 t}\varphi_1(t),\quad y_2=e^{\alpha_2 t}\varphi_2(t),\ \ldots,\ y_n=e^{\alpha_n t}\varphi_n(t), \tag{112}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — характеристические показатели, и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — непрерывные функции с периодом ω.

В общем случае, очевидно, достаточно составить выражения интегралов группы, удовлетворяющих соотношениям (111). Полагая в этих соотношениях $y_i=e^{\alpha t}z_i$, где $\alpha=\frac{1}{\omega}\operatorname{Log} s$, получим:

$$\left.\begin{aligned} z_1(t+\omega)&=z_1(t),\\ z_2(t+\omega)&=z_2(t)+z_1(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_p(t+\omega)&=z_p(t)+z_{p-1}(t). \end{aligned}\right\} \tag{111'}$$

Если t возрастает на ω, то переменное $\tau=\frac{t}{\omega}$ возрастает на единицу, и, взяв τ за новое переменное, мы придем к задаче, решенной выше (§ 411). Положим

$$P_i(t)=\frac{t(t-\omega)\ldots(t-i\omega+\omega)}{\omega^i i!}\quad (i=1, 2, \ldots, p);$$

общие выражения функций $y_1, y_2, \ldots, y_p$ имеют следующий вид:

$$\left.\begin{gathered} y_1=e^{\alpha t}\varphi_1(t),\quad y_2=e^{\alpha t}[P_1(t)\varphi_1(t)+\varphi_2(t)],\ \ldots\\ \ldots,\ y_i(t)=e^{\alpha t}[P_{i-1}(t)\varphi_1(t)+P_{i-2}(t)\varphi_2(t)+\ldots+P_1(t)\varphi_{i-1}(t)+\varphi_i(t)]\\ (i=1, 2, \ldots, p), \end{gathered}\right\} \tag{113}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ суть непрерывные функции с периодом ω, из которых первая $\varphi_1(t)$ отлична от нуля. Здесь можно заметить, как и в § 411, что все эти интегралы можно вывести из последнего интеграла группы. В самом деле, $z_{p-1}(t)$ равно разности $z_p(t+\omega)-z_p(t)$; точно так же имеем: $z_{p-2}(t)=z_{p-1}(t+\omega)-z_{p-1}(t)$ и т. д. Следовательно, формулы (113) можно представить также в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_p(t)&=e^{\alpha t}z_p(t),\\ y_{p-1}(t)&=e^{\alpha t}\Delta_1(z_p),\\ y_{p-2}(t)&=e^{\alpha t}\Delta_2(z_p),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ y_1(t)&=e^{\alpha t}\Delta_{p-1}(z_p), \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

где $\Delta_1(z_p), \Delta_2(z_p), \ldots$ обозначают последовательные разности от $z_p(t)$ при переходе t в $t+\omega$. Заметим, что $z_p(t)$ есть многочлен $(p-1)$-й степени относительно t, коэфициенты которого суть периодические функции от t; последовательные разности $\Delta_1(z_p), \Delta_2(z_p), \ldots$ суть многочлены такого же вида и убывающих степеней, причем разность p-го порядка равна нулю. Обозначим через $D(z_p)$, $D^2(z_p), \ldots, D^i(z_p)$ последовательные производные от z_p, взятые по t, причем коэфициенты этого многочлена рассматриваются как постоянные. Из теории конечных разностей известно, что последовательные разности $\Delta_1(z_p), \Delta_2(z_p), \ldots$ суть линейные комбинации с *числовыми коэфициентами* производных $D(z_p)$,

$D^2(z_p)$, ... и обратно *. Следовательно систему интегралов (114) можно заменить равносильною системою интегралов:

$$\left.\begin{aligned} Y_p(t) &= e^{\alpha t} z_p(t), \\ Y_{p-1}(t) &= e^{\alpha t} D(z_p), \\ Y_{p-2}(t) &= e^{\alpha t} D^2(z_p), \\ &\dots\dots\dots \\ Y_1(t) &= e^{\alpha t} D^{p-1}(z_p) \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

Примечание I. Интегралы группы (113), соответствующие характеристическому показателю α, все стремятся к нулю при неограниченном возрастании положительного количества t, если действительная часть показателя α *отрицательна*, и только в этом случае. Чтобы все интегралы уравнения (106) стремились к нулю при неограниченном возрастании t, необходимо и достаточно, чтобы *действительные части всех характеристических чисел были отрицательны*, или, что то же, чтобы модули всех корней уравнения (109) были *меньше единицы*.

Примечание II. Пусть будет s действительный положительный корень уравнения (109); естественно принять за α арифметическое значение количества $\frac{1}{\omega}\log s$. Если коэфициенты уравнения (106) действительны, то, очевидно, будут действительны и интегралы $y_1, y_2, \dots, y_p$ группы (113), а следовательно, и периодические функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$. Пусть, далее, будет $s = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ корень кратности p уравнения (109), причем $\mu \neq 0$, и $\alpha = \alpha' + \alpha''\sqrt{-1}$ — соответствующее значение показателя α. К группе интегралов (113) можно присоединить сопряженную группу, которую получим, заменяя α через $\alpha' - \alpha''\sqrt{-1}$ и функции $\varphi_i(t)$ — через сопряженные функции. Ясно, что, комбинируя линейно попарно эти $2p$ интегралов, мы получим систему $2p$ действительных интегралов.

Наконец, предположим, что s есть *отрицательный* действительный корень; тогда значение α можно представить в виде: $\alpha = \alpha' + \pi\sqrt{-1}$, и этому корню соответствует частный интеграл вида:

$$y = e^{\alpha' t}(\cos \pi t + \sqrt{-1}\sin \pi t)[\psi_1(t) + \sqrt{-1}\,\psi_2(t)],$$

где функции ψ_1 и ψ_2 — периодические и действительные. Если коэфициенты уравнения (106) — действительные, то ясно, что действительная часть и коэфициент при $\sqrt{-1}$ интеграла y должны отдельно удовлетворять линейному уравнению. Если $p > 1$, то те же рассуждения можно применить и к другим интегралам группы (113).

Впрочем, случай, когда s действительно и отрицательно, приводится к случаю, когда s действительно и положительно, если взять вместо периода ω период 2ω. В самом деле, очевидно, что если интеграл получает множитель s, когда t изменяется в $t + \omega$, то он получит множитель s^2 при изменении t в $t + 2\omega$.

Примечание III. Если коэфициенты p_i суть аналитические функции комплексного переменного $t \neq t' + t''\sqrt{-1}$, голоморфные в полосе R, заключающейся между двумя прямыми $t'' = \pm h$, параллельными действительной оси, то интегралы уравнения (106) голоморфны в той же полосе.

Предыдущие рассуждения, в которых предполагалось, что переменное t перемещается по действительной оси, применимы без изменения и к тому случаю, когда это переменное перемещается в полосе R. Следовательно, функции $\varphi_i(t)$ в формулах (113) суть периодические функции, голоморфные в полосе R; поэтому их можно разложить в ряды, расположенные по синусам и косинусам дуг, кратных $\frac{2\pi t}{\omega}$ (§ 316).

417. Характеристические показатели. Разыскание характеристических показателей, вообще, очень трудно **. Очевидно, что решение этой задачи приводится к определению коэфициентов a_{ik} в формулах (107). Эта задача, в свою очередь, равносильна следующей: зная начальные значения, при $t = t_0$, n инте-

---

* Не обращаясь к этой теории, можно заметить, что из формулы Тейлора последовательно имеем:

$$\Delta_1(z_p) = \omega D(z_p) + \frac{\omega^2}{1\cdot 2} D^2(z_p) + \dots,$$

$$\Delta_2(z_p) = \omega^2 D^2(z_p) + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

так как $D^{(p)}(z_p) = 0$, то из этих равенств можно определить производные $D^{(l)}(z_p)$ как линейные функции разностей $\Delta_1, \Delta_2, \dots$

** Если коэфициенты p_i суть целые аналитические функции комплексного переменного t, то, сделав замену переменного $x = e^{\frac{2\pi t i}{\omega}}$, мы превратим данное уравнение в линейное уравнение, коэфициенты которого однозначны в области начала координат, и придем к изучению закона перестановки интегралов, когда переменное x описывает петлю вокруг начала координат. Но полученное, таким образом, уравнение, вообще, не принадлежит к уравнениям Фукса.

гралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их $n-1$ производных, найти значения этих интегралов и их производных при $t=t_0+\omega$. Тогда коэфициенты a_{ik} определяются, как решения n систем линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &y_i(t_0+\omega)=a_{i1}y_1(t_0)+a_{i2}y_2(t_0)+\ldots+a_{in}y_n(t_0),\\ &y_i^{(p)}(t_0+\omega)=a_{i1}y_1^{(p)}(t_0)+a_{i2}y_2^{(p)}(t_0)+\ldots+a_{in}y_n^{(p)}(t_0),\\ &[p=1,\,2,\ldots,(n-1)]\ (i=1,\,2,\ldots,n). \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Эту последнюю задачу, вообще, можно решить, только применяя общие методы, например, последовательными приближениями. Заменим в уравнении (106) коэфициенты p_i через λp_i, где λ — переменный параметр, и разложим по степеням параметра λ интеграл y этого уравнения, принимающий вместе со своими $n-1$ последовательными производными при $t=t_0$ некоторые заданные значения, не зависящие от λ:

$$y=f_0(t)+\lambda f_1(t)+\ldots+\lambda^n f_n(t)+\ldots \tag{117}$$

Так как при $\lambda=0$ уравнение (106) обращается в $\frac{d^ny}{dt^n}=0$, то ясно, что $f_0(t)$ есть многочлен относительно t не выше $(n-1)$-й степени, выражение которого получается непосредственно из начальных условий; что касается следующих коэфициентов $f_1(t), f_2(t), \ldots$, то, подставляя значения y в уравнение (106), мы определим их один за другим из соотношений вида:

$$\frac{d^nf_i}{dt^n}=\Phi[t, f_1(t), f_1'(t), \ldots],$$

где правые части зависят только от коэфициентов $f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}$ и их производных, причем эти коэфициенты f_i вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно должны обращаться при $t=t_0$ в нуль. Следовательно, эти коэфициенты получаются квадратурами, а выше было указано (§ 389), что полученный, таким образом, ряд (117) — сходящийся при всех значениях λ. Если мы положим в соотношении (117) и его производных $\lambda=1$, то мы получим разложение рассматриваемого интеграла и его производных в ряды, сходящиеся при всех действительных значениях количества t. Следовательно, таким образом, можно получить количества $y_i(t_0+\omega)$; $y_i^{(p)}(t_0+\omega)$, входящие в формулы (116), и определить отсюда коэфициенты a_{ik} *.

Пример. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}=p(t)\,y, \tag{118}$$

где $p(t)$ есть непрерывная функция от t с периодом ω. На основании формулы (108) произведение корней характеристического уравнения равно здесь единице. Следовательно, это уравнение имеет вид:

$$s^2-As+1=0. \tag{119}$$

Чтобы определить коэфициент A, обозначим через $f(t)$ и $\varphi(t)$ интегралы уравнения (118), удовлетворяющие начальным условиям $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. Из соотношений

$$\begin{aligned} f(t+\omega)&=a_{11}f(t)+a_{12}\varphi(t),\\ \varphi(t+\omega)&=a_{21}f(t)+a_{22}\varphi(t),\\ \varphi'(t+\omega)&=a_{21}f'(t)+a_{22}\varphi'(t), \end{aligned}$$

полагая $t=0$, получим $a_{11}=f(\omega)$, $a_{22}=\varphi'(\omega)$. Но в этом частном случае характеристическое уравнение есть

$$(a_{11}-s)(a_{22}-s)-a_{12}a_{21}=0,$$

* Если мы оставим значение параметра λ неопределенным, то из способа вычисления следует, что коэфициенты a_{ik}, а следовательно, и коэфициенты характеристического уравнения, будут *целыми функциями* этого параметра.

и следовательно, мы имеем:

$$A = a_{11} + a_{22} = f(\omega) + \varphi'(\omega).$$

Заменим $p(t)$ через $\lambda p(t)$; разложения интегралов $f(t)$, $\varphi(t)$ будут иметь вид:

$$f(t) = 1 + \lambda f_1(t) + \ldots + \lambda^n f_n(t) + \ldots,$$
$$\varphi(t) = t + \lambda\varphi_1(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(t) + \ldots,$$

причем функции f_n и φ_n и их производные f_n' и φ_n' при $t = 0$ равны нулю. Подставляя эти разложения в обе части уравнения (118), где p заменено через λp, мы получим соотношения:

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} = p(t) f_{n-1}(t),$$
$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = p(t)\varphi_{n-1}(t);$$

отсюда имеем рекуррентные формулы:

$$f_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t) f_{n-1}(t)\,dt, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t)\varphi_{n-1}(t)dt,$$

из которых можно последовательно определить все функции f_n и φ_n, исходя из условий $f_0(t) = 1$, $\varphi_0(t) = t$. Отсюда находим:

$$A = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)]. \tag{120}$$

Если функция $p(t)$ никогда не бывает отрицательною, то непосредственно видно, что при $t > 0$ все функции $f_n(t)$, $\varphi_n(t)$, $\varphi_n'(t)$ положительны. Следовательно, $A > 2$, и в уравнении (119) оба корня действительны и положительны, причем один из них больше, а другой меньше единицы. В других случаях заключение значительно менее очевидно. Если $p(t)$ никогда не принимает положительных значений, то, как это следует из глубоких исследований А. М. Ляпунова *, абсолютное значение количества A меньше, чем 2, если абсолютное значение количества $\omega\int_0^\omega p\,dt$ меньше или равно 4. В этом случае оба корня уравнения (119)— мнимые сопряженные, и их модули равны единице.

IV. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

418. Общие свойства. Большинство теорем, доказанных для линейного уравнения, легко может быть распространено на системы линейных уравнений со многими неизвестными функциями. Не уменьшая общности, мы всегда можем предположить, что эти уравнения — первого порядка (§ 383), что мы в последующем изложении и примем. Пусть будут $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неизвестные функции, и x — независимое переменное. Из общей теоремы следует (§ 399), что интегралы не имеют других особых точек, кроме особых точек коэфициентов. Задавая начальные значения интегралов $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_0^n$ для значения $x = x_0$, отличного от особых точек, мы можем иметь аналитическое продолжение этих интегралов вдоль любого пути,

* А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, издание Харьковского математического общества; французский перевод помещен в *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2-я серия, т. IX. Кроме этого мемуара общая теория линейных уравнений с периодическими коэфициентами изложена в мемуаре Флоке (Floquet) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1883) и в сочинении Пуанкаре, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste (т. I, гл. IV).

выходящего из точки x_0 и не проходящего ни через одну из этих известных заранее особых точек.

Предположим, только для большей краткости изложения, что мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями. Рассмотрим сначала систему трех однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+ay+bz+cu=0,\\ &\frac{dz}{dx}+a_1y+b_1z+c_1u=0,\\ &\frac{du}{dx}+a_2y+b_2z+c_2u=0, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

где a, b, c, ... — функции только переменного x. Если известна частная система интегралов (y_1, z_1, u_1) уравнений (121), то функции (Cy_1, Cz_1, Cu_1) также образуют систему интегралов при всяком значении постоянного C. Точно так же, если известны две системы интегралов (y_1, z_1, u_1) и (y_2, z_2, u_2), то из них можно составить новую систему интегралов, зависящую от двух произвольных постоянных:

$$(C_1y_1+C_2y_2,\ C_1z_1+C_2z_2,\ C_1u_1+C_2u_2).$$

Наконец, если известны три частных системы интегралов

$$(y_1, z_1, u_1),\ (y_2, z_2, u_2),\ (y_3, z_3, u_3),$$

то формулы

$$\left.\begin{aligned} y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3,\quad z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3,\\ u=C_1u_1+C_2u_2+C_3u_3 \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

также представляют систему интегралов, каковы бы ни были постоянные C_1, C_2, C_3. Чтобы можно было утверждать, что эти формулы (122) представляют общий интеграл системы (121), попрежнему необходимо убедиться, что можно выбрать постоянные C_1, C_2, C_3 таким образом, чтобы при данном значении x_0 переменного x, отличном от особой точки, переменные y, z, u принимали *произвольные* заданные значения y_0, z_0, u_0. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из девяти функций y_i, z_i, u_i $(i=1, 2, 3)$

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & u_1\\ y_2 & z_2 & u_2\\ y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix},$$

не был тождественно равен нулю. Мы попрежнему будем говорить, что совокупность трех частных систем интегралов образует в этом случае *фундаментальную систему*.

Если определитель Δ тождественно равен нулю, то три частных системы интегралов приводятся к двум или даже к одной. Предположим сначала, что все миноры первого порядка определителя Δ не равны одновременно нулю, пусть, например, минор $\delta=y_1z_2-y_2z_1$ не равен тождественно нулю. Пусть будет λ

область плоскости, где δ не обращается в нуль. Определим две вспомогательные функции K_1 и K_2, голоморфные в области A, таким образом, чтобы было:

$$y_3 = K_1 y_1 + K_2 y_2, \quad z_3 = K_1 z_1 + K_2 z_2; \tag{123}$$

так как Δ равно нулю, то функции K_1, K_2 удовлетворяют также соотношению

$$u_3 = K_1 u_1 + K_2 u_2. \tag{124}$$

Заменяя в двух первых уравнениях системы (121) y, z, u предыдущими выражениями y_3, z_3, u_3 и замечая, что (y_1, z_1, u_1) и (y_2, z_2, u_2) образуют две частных системы интегралов, мы, после подстановки, получим из (121):

$$y_1 K_1' + y_2 K_2' = 0, \quad z_1 K_1' + z_2 K_2' = 0,$$

откуда имеем: $K_1' = K_2' = 0$. Следовательно, функции K_1 и K_2 суть постоянные, и соотношения (123) и (124) имеют место во всей области существования функций y_i, z_i, u_i. Отсюда следует, что система интегралов (y_3, z_3, u_3) есть комбинация двух других систем.

Если все миноры первого порядка определителя Δ тождественно равны нулю, то три системы интегралов приводятся к одной. Так как все элементы определителя Δ не могут быть одновременно равны нулю, то мы предположим, что y_1 отлично от нуля, и положим $y_2 = K y_1$; из соотношений $y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$, $y_1 u_2 - y_2 u_1 = 0$ имеем также $z_2 = K z_1$, $u_2 = K u_1$. Заменяя в первом из уравнений (121) переменные y, z, u, соответственно, через $K y_1$, $K z_1$, $K u_1$, получим $y_1 K' = 0$; следовательно, K есть постоянное, и система (y_2, z_2, u_2) отличается от системы (y_1, z_1, u_1) только постоянным множителем. Точно так же можно было бы убедиться, что третья система интегралов тождественна с первою. Важно заметить, что в общем случае y_1, y_2, y_3 не должны быть непременно линейно независимы; например, одна или две из этих функций могут быть равны нулю, но быть все три нулями они не могут.

Значение определителя Δ можно вычислить следующим образом. Производная Δ' есть сумма трех определителей

$$\Delta' = \begin{vmatrix} y_1' & z_1 & u_1 \\ y_2' & z_2 & u_2 \\ y_3' & z_3 & u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1' & u_1 \\ y_2 & z_2' & u_2 \\ y_3 & z_3' & u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & u_1' \\ y_2 & z_2 & u_2' \\ y_3 & z_3 & u_3' \end{vmatrix};$$

заменяя производные y_i', z_i', u_i' их выражениями, выведенными из уравнений (121), мы найдем, что эти три определителя обращаются, соответственно, в $-a\Delta$, $-b_1\Delta$, $-c_2\Delta$. Следовательно, мы имеем соотношение: $\Delta' = -(a + b_1 + c_2)\Delta$, и

$$\Delta(x) = \Delta(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} (a + b_1 + c_2)\, dx}. \tag{125}$$

Если известен общий интеграл однородной системы (121), то из него можно вывести квадратурами общий интеграл системы с правыми частями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + ay + bz + cu = f_1(x), \\ &\frac{dz}{dx} + a_1 y + b_1 z + c_1 u = f_2(x), \\ &\frac{du}{dx} + a_2 y + b_2 z + c_2 u = f_3(x). \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

В самом деле, сделав замену переменных по формулам (122), где C_i,

C_2, C_3 рассматриваются как новые неизвестные функции, мы превратим систему (126) в следующую:

$$\left.\begin{aligned} y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+y_3\frac{dC_3}{dx}&=f_1(x),\\ z_1\frac{dC_1}{dx}+z_2\frac{dC_2}{dx}+z_3\frac{dC_3}{dx}&=f_2(x),\\ u_1\frac{dC_1}{dx}+u_2\frac{dC_2}{dx}+u_3\frac{dC_3}{dx}&=f_3(x);\end{aligned}\right\}\qquad(127)$$

уравнения (127) интегрируются в квадратурах, так как из них имеем:

$$\frac{dC_i}{dx}=X_i \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

где X_i — известные функции от x.

Заметим также, что этого преобразования можно избежать всякий раз, когда мы можем непосредственно определить частную систему интегралов (Y, Z, U) уравнений (126). Чтобы иметь общий интеграл этих уравнений, достаточно прибавить, соответственно, Y, Z, U к правым частям формул (122), представляющих общий интеграл системы (121) без правых частей *.

Если известны *одна* или *две* частных системы интегралов уравнений (121), то можно понизить порядок системы на одну или две единицы. Предположим сначала, что известна одна система интегралов (y_1, z_1, u_1), причем функция y_1 не равна нулю. Произведя замену переменных

$$y=y_1Y,\quad z=z_1Y+Z,\quad u=u_1Y+U,$$

мы придем к линейной системе того же вида, которая должна иметь частную систему интегралов $Y=1$, $Z=0$, $U=0$. Для этого необходимо, чтобы в этих новых уравнениях коэффициенты при Y были равны

---

* Можно также применить метод, аналогичный методу Коши (§ 401). Пусть будут $y=\varphi(x, \alpha)$, $z=\psi(x, \alpha)$, $u=\pi(x, \alpha)$ $(i=1, 2, 3)$ три системы интегралов уравнений без правых частей (121), удовлетворяющих, соответственно, начальным условиям:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(\alpha, \alpha)=1, &&\psi_1(\alpha, \alpha)=0, &&\pi_1(\alpha, \alpha)=0,\\ &\varphi_2(\alpha, \alpha)=0, &&\psi_2(\alpha, \alpha)=1, &&\pi_2(\alpha, \alpha)=0,\\ &\varphi_3(\alpha, \alpha)=0, &&\psi_3(\alpha, \alpha)=0, &&\pi_3(\alpha, \alpha)=1.\end{aligned}$$

Можно непосредственно проверить, что функции

$$Y=\int_{x_0}^{x}[f_1(\alpha)\varphi_1(x, \alpha)+f_2(\alpha)\varphi_2(x, \alpha)+f_3(\alpha)\varphi_3(x, \alpha)]d\alpha,$$

$$Z=\int_{x_0}^{x}[f_1(\alpha)\psi_1(x, \alpha)+f_2(\alpha)\psi_2(x, \alpha)+f_3(\alpha)\psi_3(x, \alpha)]d\alpha,$$

$$U=\int_{x_0}^{x}[f_1(\alpha)\pi_1(x, \alpha)+f_2(\alpha)\pi_2(x, \alpha)+f_3(\alpha)\pi_3(x, \alpha)]d\alpha$$

образуют систему интегралов уравнений со вторыми частями (126), нулю, и в самом деле, выполнив вычисления, найдем, что эта новая система есть

$$\left.\begin{aligned} &y_1\frac{dY}{dx}+bZ+cU=0,\\ &\frac{dZ}{dx}+z_1\frac{dY}{dx}+b_1Z+c_1U=0,\\ &\frac{dU}{dx}+u_1\frac{dY}{dx}+b_2Z+c_2U=0. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Заменяя в двух последних уравнениях $\frac{dY}{dx}$ его значением, выведенным из первого уравнения, мы получим систему двух однородных линейных уравнений с *двумя* неизвестными функциями Z и U. Проинтегрировав эту систему, мы найдем Y квадратурою.

Предположим затем, что известны две *независимых* системы интегралов (y_1, z_1, u_1), (y_2, z_2, u_2). Так как по доказанному выше три определителя $y_1z_2-y_2z_1$, $y_1u_2-y_2u_1$, $z_1u_2-z_2u_1$ не могут быть равны нулю одновременно, то мы предположим, что $y_1z_2-y_2z_1$ отлично от нуля. Положив

$$y=y_1Y+y_2Z,\quad z=z_1Y+z_2Z,\quad u=u_1Y+u_2Z+U,$$

где Y, Z, U — новые неизвестные, мы придем к линейной системе того же вида, имеющей две частных системы интегралов:

$$(Y_1=1,\ Z_1=U_1=0),\ (Y_2=0,\ Z_2=1,\ U_2=0).$$

Следовательно, коэфициенты при Y и Z в уравнениях новой системы должны быть равны нулю, и эта новая система имеет вид:

$$\frac{dY}{dx}+AU=0,\quad \frac{dZ}{dx}+A_1U=0,\quad \frac{dU}{dx}+A_2U=0,$$

как нетрудно проверить. Так как последнее уравнение содержит только U, то ясно, что эта новая система интегрируется квадратурами.

Предыдущие рассуждения распространяются на системы n линейных уравнений с n неизвестными. Чтобы иметь общий интеграл такой системы без правых частей, достаточно знать n частных систем интегралов, образующих фундаментальную систему. Если известны p различных систем интегралов $(p<n)$, то интегрирование приводится к интегрированию системы того же вида с $n-p$ неизвестными и к квадратурам. Наконец, общий интеграл системы с правыми частями получается квадратурами, если известен общий интеграл той же системы без правых частей.

419. Сопряженные системы. Если дана линейная и однородная система с n неизвестными

$$\frac{dy_i}{dx_1}=a_{i1}y_1+\ldots+a_{ik}y_k+\ldots+a_{in}y_n\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n),\tag{129}$$

то линейная система

$$\frac{dY_i}{dx} = -a_{1i}Y_1 - \ldots - a_{ki}Y_k - \ldots - a_{ni}Y_n, \tag{130}$$

которую получим из первой, заменяя y_i через Y_i, изменяя в определителе, составленном из коэфициентов a_{ik}, строки столбцами и переменив при этом знаки, называется *сопряженной* с первой. Из самого способа получения сопряженной системы очевидно, что две системы (129) и (130) *взаимны*

Интегрирование одной из систем (129), (130) *дает интегралы и другой системы*. В самом деле, пусть будут $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ две частных системы каких-нибудь интегралов двух взаимно сопряженных систем. Из уравнений (129) и (130) имеем:

$$\frac{d}{dx}(Y_1y_1 + Y_2y_2 + \ldots + Y_ny_n) = \sum_i Y_i(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{ik}y_k + \ldots + a_{in}y_n) +$$
$$+ \sum_i y_i(-a_{1i}Y_1 - \ldots - a_{ki}Y_k - \ldots - a_{ni}Y_n).$$

Переставив указатели i и k во второй сумме, непосредственно видим, что коэфициент при Y_iy_k в правой части есть

$$a_{ik} - a_{ik} = 0.$$

Следовательно, правая часть предыдущего равенства тождественно равна нулю, и мы имеем между каждыми двумя частными системами интегралов соотношение

$$Y_1y_1 + Y_2y_2 + \ldots + Y_ny_n = C, \tag{131}$$

где C — постоянное. Таким образом, зная частную систему интегралов $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ уравнений (130), мы получаем первый интеграл (131) системы (129), *линейный* относительно неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Если известен общий интеграл сопряженной системы (130), то общий интеграл данной системы (129) представится n соотношениями вида (131), где за $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ должно взять последовательно n различных систем интегралов уравнений (130).

Особенно подробно изучены линейные системы, тождественные с сопряженными с ними. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель из коэфициентов a_{ik} был косым симметрическим, т. е. чтобы при всяких i и k было $a_{ik} + a_{ki} = 0$ и, следовательно, $a_{ii} = 0$. Если $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — две частные системы интегралов, то соотношение (131) обращается в

$$y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n = \text{const};$$

следовательно, если обе системы интегралов тождественны, то мы имеем также:

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \text{const}.$$

Интегрирование линейной системы третьего порядка, тождественной с своею сопряженной, приводится к интегрированию уравнения Риккати (§ 369). Интегрирование системы четвертого порядка того же вида приводится к интегрированию *двух* уравнений Риккати (см. упражнение 15 в конце этой главы).

420. Линейные системы с постоянными коэфициентами. Система линейных уравнений с постоянными коэфициентами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = 0, \\ &\frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

решается отысканием системы частных интегралов вида:

$$y_1 = a_1 e^{rx}, \quad y_2 = a_2 e^{rx}, \ldots, \quad y_n = a_n e^{rx}, \tag{133}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, r$ — неопределенные постоянные коэфициенты, которые следует определить. Мы приходим, таким образом, к уравнениям:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}+r)a_1 + a_{12}a_2 + \ldots + a_{1n}a_n = 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22}+r)a_2 + \ldots + a_{2n}a_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \ldots + (a_{nn}+r)a_n = 0, \end{array}\right\} \tag{134}$$

которые должны иметь решения, не все равные нулю. Постоянная r должна быть, таким образом, корнем характеристического уравнения:

$$F(r) = \begin{vmatrix} a_{11}+r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+r \end{vmatrix} = 0. \tag{135}$$

Обратно, всякому корню r этого уравнения соответствует по крайней мере одна система решений уравнений (134): $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где не все a_i равны нулю, и следовательно, система интегралов вида (133) уравнений (132). Если характеристическое уравнение имеет n различных корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$, мы получим таким способом n систем частных интегралов. Эти системы различны; действительно, в противном случае мы имели бы соотношение вида:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} = 0$$

с постоянными коэфициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, из которых по крайней мере один отличен от нуля, а мы видели (§ 405), что такое соотношение невозможно.

Если r_1 есть кратный корень порядка p характеристического уравнения, то уравнения (132) *допускают p различных систем интегралов вида:*

$$y_1 = e^{r_1 x} P_1(x), \quad y_2 = e^{r_1 x} P_2(x), \ldots, \quad y_n = e^{r_1 x} P_n(x),$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — многочлены степени не выше $n-1$, зависящие от p произвольных постоянных.

Теорема доказана для $p=1$, поэтому достаточно показать, что, если она верна для корня кратности $p-1$, то она будет верна и для корня кратности p. Для доказательства мы можем предположить, что $r_1 = 0$; действительно, если заменим y_i через $e^{r_1 x} z_i$, то коэфициенты a_{ik} $(i \neq k)$ не изменятся, а коэфициенты a_{ii} заменятся через $a_{ii} + r_1$.

Характеристическое уравнение новой системы будет $F(r+r_1)=0$; оно допускает $r=0$ в качестве кратного корня порядка p. Предположим что мы заранее сделали это преобразование. Уравнения (132) допускают частную систему интегралов:

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \ldots, \quad y_n = a_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные, не все равные нулю. Допустим для определенности, что a_1 отлично от нуля, тогда можно предположить, что $a_1 = 1$. Сделав замену переменных

$$y_1 = Y_1, \quad y_2 = a_2 Y_1 + Y_2, \ldots, \quad y_n = a_n Y_1 + Y_n,$$

мы приходим к новой системе линейных уравнений с постоянными коэфициентами, допускающей решение $Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$, ..., $Y_n = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dY_1}{dx} + A_{12}Y_2 + \ldots + A_{1n}Y_n = 0, \\ &\frac{dY_2}{dx} + A_{22}Y_2 + \ldots + A_{2n}Y_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dY_n}{dx} + A_{n2}Y_2 + \ldots + A_{nn}Y_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

где новые коэфициенты имеют следующие значения:

$$A_{12} = a_{12}, \ldots, \quad A_{1n} = a_{1n},$$
$$A_{i2} = a_{i2} - a_i a_{12}, \ldots, \quad A_{in} = a_{in} - a_i a_{1n} \qquad \text{для } i > 1.$$

Характеристическое уравнение этой новой системы

$$F_1(r) = \begin{vmatrix} r & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - a_2 a_{12} + r & a_{23} - a_2 a_{13} & \ldots & a_{2n} - a_2 a_{1n} \\ 0 & a_{32} - a_3 a_{12} & a_{32} - a_3 a_{13} + r & \ldots & a_{3n} - a_3 a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} - a_n a_{12} & a_{n3} - a_n a_{13} & \ldots & a_{nn} - a_n a_{1n} + r \end{vmatrix} = 0$$

тождественно с характеристическим уравнением $F(r) = 0$ первой системы.

Действительно, если к элементам i-й строки $(i > 1)$ прибавим элементы первой строки, умноженные на a_i, уравнение $F_1(r) = 0$ обратится в

$$F_1(r) = \begin{vmatrix} r & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_2 r & a_{22} + r & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_3 r & a_{32} & a_{33} + r & & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n r & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} + r \end{vmatrix} = 0.$$

Если мы теперь вычтем из элементов первого столбца элементы второго, умноженные на a_2, элементы третьего, умноженные на $a_3, \ldots,$ элементы n-го, умноженные на a_n, то получим первый столбец определителя $F(r)$, если примем во внимание соотношения

$$a_{i1} + a_{i2}a_2 + \ldots + a_{in}a_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, имеем тождество $F_1(r) = F(r)$* и, следовательно, уравнение $(n-1)$-й степени

$$F_2(r) = \begin{vmatrix} A_{22}+r & A_{23} \ldots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33+r} \ldots & A_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n2} & A_{n3} \ldots & A_{rn+r} \end{vmatrix} = 0, \qquad (137)$$

допускает корень $r=0$ кратности $p-1$. Но уравнение $F_2(r)=0$ есть характеристическое уравнение для системы, полученной отбрасыванием первого уравнения преобразованной системы (136). Так как теорема предполагалась верной для корня кратности $p-1$, то эта вспомогательная система имеет систему частных интегралов:

$$Y_2 = Q_2(x), \ldots, Y_n = Q_n(x),$$

где $Q_2, \ldots, Q_p$ — многочлены степени не выше $p-2$, линейно зависящие от $p-1$ произвольных постоянных. Заменяя $Y_2, \ldots, Y_n$ через $Q_2, \ldots, Q_n$ в первом уравнении системы (136), мы выводим, что

$$Y_1 = C_1 - A_{12}\int Q_2(x\,dx - \ldots - A_{1n}\int Q_n(x)dx. \qquad (138)$$

где C_1 — новая произвольная постоянная. Соответствующие интегралы системы (132) будут иметь вид:

$$y_1 = P_1(x), \quad y_2 = P_2(x), \ldots, y_n = P_n(x), \qquad (139)$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — многочлены степени не выше $p-1$, линейно зависящие от p произвольных постоянных. Итак, теорема доказана.

Для фактического вычисления этих интегралов предыдущие преобразования не нужны. Если r_1 — кратный корень порядка p уравнения $F(r)=0$, то полагаем:

$$Y_1 = e^{r_1x}P_1(x), \ldots, \quad Y_n = e^{r_1x}P_n(x),$$

где $P_1, \ldots, P_n$ — многочлены степени $p-1$ с неопределенными коэфициентами. Подставляя эти интегралы в заданные уравнения, предполагая, что они удовлетворяются, мы получим некоторое число соотношений

---

* Во бще, если мы произведем над переменными любое линейное преобразование с постоянными коэфициентами

$$y_i = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + \ldots + b_{in}Y_n \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

с детерминантом $|b_{ik}|$, отличным от нуля, то система (132) заменится нов й линейной системой с постоянными коэфициентами (421):

$$\frac{dY_i}{dx} + A_{i1}Y_1 + \ldots + A_{in}Y_n = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $\Phi(r)$ — характеристический определитель новой системы; *для любых коэфициентов* b_{ik} мы будем иметь $P(r)=F(r)$. Это свойство очевидно в силу значения корней уравнения $F(r)=0$, когда корни этого уравнения различны, т. е. когда коэфициенты a_{ik} системы (132) не удовлетворяют соотношению:

$$D(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) = 0. \qquad (\ )$$

показывающему, что $F(r)=0$ имеет кратные корни.

Отсюда мы выводим, что это свойство общее, при помощи метода, часто употребляемого в вопросах этого рода.

Пусть $f_p(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ — коэфициент при r^p в $F(r)$ и $\varphi_p(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ — коэфициент при r^p в $P(r)$. Всякий раз, когда коэфициенты $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ не удовлетворяют соотношению (α), мы имеем равенство $f_p(r)=\varphi_p(r)$. Но это может иметь место только в том случае, если $f_p=\varphi_p$ — тождество так как f_p и φ_p — целые многочлены по $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$.

между неопределенными коэфициентами, которые позволят выразить их все через p из них, которые останутся произвольными.

Каждый корень уравнения $F(r)=0$ дает нам столько систем интегралов, какова кратность этого корня, поэтому всего мы получим n систем интегралов и докажем так же, как и ранее, что они различны.

421. Приведение к каноническому виду. Всякая линейная система с постоянными коэфициентами может быть приведена к простому каноническому виду, и интегрирование выполняется непосредственно.

Представим эту систему в несколько ином виде:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

где $y_i' = \frac{dy_i}{dx}$. Пусть будут $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ линейные функции от $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с постоянными коэфициентами:

$$Y_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{141}$$

где b_{ik} — постоянные, определитель которых отличен от нуля. Система (140) обратится в систему того же вида:

$$\left.\begin{aligned} Y_1' &= A_{11}\,Y_1 + A_{12}\,Y_2 + \ldots + A_{1n}\,Y_n, \\ Y_2' &= A_{21}\,Y_1 + A_{22}\,Y_2 + \ldots + A_{2n}\,Y_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n' &= A_{n1}\,Y_1 + A_{n2}\,Y_2 + \ldots + A_{nn}\,Y_n, \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

которую получим, заменяя в выражении Y_i'

$$Y_i' = b_{i1}y_1' + b_{i2}y_2' + \ldots + b_{in}y_n' = b_{i1}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots$$
$$\ldots + b_{in}(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n)$$

функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ их значениями, выведенными из формул (141). Если бы мы рассматривали формулы (140) как определяющие линейную подстановку для переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, как n новых переменных, то предыдущие вычисления представили бы решение задачи об определении линейной подстановки для переменных $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, соответствующей линейной подстановке (140). Но выше мы видели (§ 410), что, выбирая соответственным образом переменные Y_i, мы можем привести всякую линейную подстановку к простому каноническому виду*; при этом переменные распадаются на несколько отдельных групп, и подстановка для p переменных $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ одной и той же группы имеет вид:

$$Y_1' = s\,Y_1,\ Y_2' = s\,(Y_1 + Y_2), \ldots, Y_p' = s\,(Y_{p-1} + Y_p). \tag{143}$$

Следовательно, всегда можно соответственною заменою переменных вида (141) привести интегрирование системы (140) к интегрированию нескольких систем вида (143), где $Y_i' = \frac{dY_i}{dx}$.

Интегрирование системы (143) выполняется непосредственно, но предпочтительнее привести ее к несколько иному каноническому виду. Положим для этого $Y_i = s \cdot z_i$ $(s \neq 0)$, тогда система (143) обращается в

$$\frac{dz_1}{dx} = sz_1,\ \frac{dz_2}{dx} = sz_2 + z_1, \ldots, \frac{dz_p}{dx} = sz_p + z_{p-1}. \tag{144}$$

---

* Выше мы предполагали, что определитель подстановки не равен нулю, тогда как определитель, составленный из коэфициентов a_{ik}, может быть равен нулю. Но, сделав подстановку $y_i = e^{\lambda x} z_i$, мы уменьшим коэфициенты $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ на λ, тогда как коэфициенты a_{ik}, где $i \neq k$, не изменятся. Следовательно, всегда можно выбрать λ таким образом, чтобы определитель, составленный из новых коэфициентов, был отличен от нуля.

Этот новый канонический вид не изменяется при умножении всех неизвестных функций на множитель $e^{\lambda x}$ и замене s через $s+\lambda$, и следовательно, применим также и к тому случаю, когда характеристическое уравнение имеет нулевой корень.

Общий интеграл системы (144) представится формулами:

$$z_i e^{-sx} = C_1 \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} + C_2 \frac{x^{i-2}}{(i-2)!} + \ldots + C_{i-1} x + C_i \quad (i=1, 2, \ldots, p),$$

или равносильными формулами, которые получим, решая предыдущие равенства относительно постоянных C_i:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 e^{-sx} = C_1, \quad (z_2 - xz_1) e^{-sx} = C_2, \quad \left(z_3 - xz_2 + \frac{x^2}{1\cdot 2} z_1\right) e^{-sx} = C_3, \\ \text{вообще,} \\ \left[z_i - xz_{i-1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} z_{i-2} - \ldots + (-1)^{i-1} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} z_1\right] e^{-sx} = C_i \quad (i=1, 2, \ldots, p). \end{array}\right\} \quad (145)$$

422. Уравнение Якоби. Возвратимся к системе трех линейных уравнений с постоянными коэфициентами; представим ее в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + cz, \\ \frac{dy}{dt} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{aligned}\right\} \quad (146)$$

где t — независимое переменное. Сложим эти три уравнения, умножив их, соответственно, на $y\,dz - z\,dy$, $z\,dx - x\,dz$, $x\,dy - y\,dx$, мы получим:

$$\left.\begin{array}{l} (ax + by + cz)(y\,dz - z\,dy) + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)(z\,dx - x\,dz) + \\ \quad + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)(x\,dy - y\,dx) = 0. \end{array}\right\} \quad (147)$$

Это уравнение однородно относительно x, y, z, и следовательно, его можно заменить соотношением между $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$. В самом деле, полагая в нем $x = Xz$, $y = Yz$ и деля на z^3, получим уравнение Якоби (§ 367 и 377):

$$\left.\begin{array}{l} -(aX + bY + c)\,dY + (a_1 X + b_1 Y + c_1)\,dX + \\ \quad + (a_2 X + b_2 Y + c_2)(X\,dY - Y\,dX) = 0. \end{array}\right\} \quad (148)$$

Пусть будут $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ интегралы уравнений (146). При изменении t точка с однородными координатами x, y, z $\left(\text{ее декартовы координаты суть } X = \frac{x}{z},\ Y = \frac{y}{z}\right)$ описывает некоторую плоскую кривую Г, представляющую, как это следует из предыдущих вычислений, интегральную кривую уравнения Якоби (148). Следовательно, интегрирование уравнения Якоби приводится к интегрированию системы (146), т. е. к решению уравнения третьей степени, как мы это обнаружили другим способом (§ 367).

Если характеристическое уравнение имеет три различных корня s_1, s_2, s_3, то на основании рассуждений предыдущего параграфа общий интеграл системы (146) имеет вид:

$$Pe^{-s_1t}=C_1,\quad Qe^{-s_2t}=C_2,\quad Re^{-s_3t}=C_3, \tag{I}$$

где P, Q, R — однородные линейные функции относительно x, y, z. Отсюда нетрудно получить однородное выражение нулевой степени, не содержащее переменного t:

$$P^{s_3-s_2}Q^{s_1-s_3}R^{s_2-s_1}=K, \tag{α}$$

и мы приходим к формуле, уже найденной выше другим методом.

Нетрудно также исследовать случаи, когда характеристическое уравнение имеет двойной или тройной корень: мы рассмотрим только тот случай, когда формулы, представляющие общий интеграл, образуют две или одну группу. В первом случае эти формулы имеют вид:

$$Pe^{-s_1t}=C_1,\quad (Q-tP)\,e^{-s_1t}=C_2,\quad Re^{-s_3t}=C_3, \tag{II}$$

а во втором:

$$Pe^{-s_1t}=C_1,\quad (Q-tP)\,e^{-s_1t}=C_2,\quad \left(R-tQ+\frac{t^2}{2}P\right)e^{-s_1t}=C_3, \tag{III}$$

где P, Q, R попрежнему обозначают однородные линейные функции переменных x, y, z. Исключая t из формул (II), получим однородное соотношение нулевой степени, не зависящее от t:

$$\frac{R}{P}\,e^{(s_1-s_3)\frac{Q}{P}}=K, \tag{β}$$

а из формул (III) — соотношение

$$\frac{2PR-Q^2}{P^2}=K. \tag{γ}$$

Соотношения (α), (β), (γ) представляют три возможных вида общего интеграла уравнения Якоби.

423. Системы с периодическими коэфициентами. Рассмотрим систему трех уравнений вида (146), но в которых коэфициенты a, b, c, ... суть непрерывные функции переменного t, имеющие период $\omega>0$.

Пусть будут (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) три независимые системы интегралов; функции

$$X_i(t)=x_i(t+\omega),\quad Y_i(t)=y_i(t+\omega),\quad Z_i(t)=z_i(t+\omega)$$

также образуют систему интегралов, и следовательно, мы имеем три группы соотношений вида (§ 416):

$$\left.\begin{aligned} X_i&=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3, \quad (i=1,\ 2,\ 3),\\ Y_i&=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3,\\ Z_i&=a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+a_{i3}z_3,\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

где a_{ik} — постоянные коэфициенты, определитель D которых не равен нулю в самом деле, мы имеем соотношение:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}=D\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

и, принимая во внимание формулу (125) и повторяя прежние рассуждения (§ 400 и 418), получаем:

$$D=e^{\int\limits_0^\omega (a+b_1+c_2)\,dt} \tag{150}$$

Следовательно, когда переменное t возрастает на период ω, функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ переходят в функции X_1, X_2, X_3 посредством следующей линейной подстановки, определитель которой не равен нулю:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ X_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

Для двух других систем функций имеют место такие же преобразования Но мы знаем, что можно заменить три интеграла x_1, x_2, x_3 их тремя независимыми линейными комбинациями с постоянными коэфициентами таким образом, чтобы формулы (151), определяющие новую линейную подстановку, получили простой канонический вид. Взяв те же линейные комбинации функций (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3), мы получим три системы функций, которые преобразуются одною и тою же линейною подстановкою канонического вида, когда t изменяется в $t+\omega$.

Очевидно, что это рассуждение имеет общий характер и применимо ко всякой однородной линейной системе с n неизвестными и с периодическими коэфициентами. Пусть будут $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неизвестные функции; можно определить n таких независимых систем интегралов $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$ $(i=1; 2, \ldots, n)$, чтобы n функций $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{kn}$ превращались в другие функции некоторою линейною подстановкою канонического вида, когда t изменяется в $t+\omega$, причем эта линейная подстановка — одна и та же для всех указателей k. Отсюда получаются такие же следствия, как и выше (§ 416); все интегралы выражаются через произведения показательной функции вида $e^{\alpha t}$ на периодические функции от t или, общее, на многочлены от t, коэфициенты которых суть периодические непрерывные функции от t.

Пусть будет

$$y_{11} = e^{\alpha t}z_1, \quad y_{21} = e^{\alpha t}z_2, \ldots, y_{n_1} = e^{\alpha t}z_n$$

частная система интегралов, где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ суть многочлены относительно t с периодическими коэфициентами, из которых *по крайней мере* один имеет степень p, и нет ни одного по степени выше p. Из этой системы интегралов можно составить $p-1$ других систем вида:

$$\begin{gathered} y_{12} = e^{\alpha t}Dz_1, \quad y_{22} = e^{\alpha t}Dz_2, \ldots, y_{n_2} = e^{\alpha t}Dz_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1p} = e^{\alpha t}D^{(p-1)}z_1, \quad y_{2p} = e^{\alpha t}D^{(p-1)}z_2, \ldots, y_{np} = e^{\alpha t}D^{(p-1)}z_n, \end{gathered}$$

где производные $D^{(i)}z_k$ взяты при условии, что периодические коэфициенты при степенях переменного t рассматриваются как постоянные (§ 416). Таким образом все системы интегралов данных уравнений можно вывести из нескольких из них. Действительное определение этих интегралов, относительно которых мы знаем только их аналитический вид, прежде всего зависит от решения некоторого алгебраического уравнения n-й степени, которое и здесь называется *характеристическим уравнением* системы. Коэфициенты этого уравнения можно получить, вообще, только посредством приближений, как и в случае одного уравнения n-го порядка (§ 417).

424. Приводимые системы. Рассмотрим систему однородных линейных уравнений вида (140), коэфициенты которых суть ограниченные, непрерывные действительные функции действительного переменного t при всех значениях этого переменного, бо́льших некоторой границы t_0. Произведем над этою системою преобразование вида:

$$z_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{152}$$

где коэфициенты b_{ik} удовлетворяют следующим условиям: 1) при $t > t_0$ они суть ограниченные непрерывные действительные функции переменного t; 2) они имеют производные, удовлетворяющие тем же условиям; 3) обратное значение определителя, составленного из b_{ik} ограничено Если мы примем функции z_i за новые неизвестные, то ясно, что система (140) превратится в линейную систему того же вида, как и первая. В самом деле, мы имеем:

$$\frac{dz_i}{dt} = b_{i1}'y_1 + b_{i1}y_1' + \ldots;$$

отсюда, заменяя $y_1, y_2', \ldots, y_n'$ их выражениями из уравнений (140), получаем:

$$\frac{dz_i}{dt} = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n,$$

причем коэфициенты c_{ik} обладают теми же свойствами, как и коэфициенты a_{ik}. Теперь остается только заменить в этих новых формулах $y_1, y_2, \ldots, y_n$ их выражениями в функции новых неизвестных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ из формул (152).

Если возможно выбрать коэфициенты b_{ik} преобразования таким образом, чтобы новая система была системою *с постоянными коэфициентами*, то Ляпунов называет такую систему *приводимою* *.

Всякая система, коэфициенты которой суть функции непрерывные, действительные и периодические с общим периодом ω, — приводимая.

В самом деле, рассмотрим сопряженную систему, которая есть также система с периодическими коэфициентами. Пусть будет s корень характеристического уравнения и α соответствующий характеристический показатель. Чтобы взять самый общий случай, предположим, что этому показателю α соответствует группа из p частных систем интегралов рассмотренного выше вида (§ 423). Следовательно (§ 419), из этой группы интегралов сопряженной системы мы получим p линейных первых интегралов данной системы вида:

$$e^{\alpha t}(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n) = C_1,$$
$$e^{\alpha t}[y_1 D(z_1) + y_2 D(z_2) + \ldots + y_n D(z_n)] = C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{\alpha t}[y_1 D^{(p-1)}(z_1) + y_2 D^{(p-1)}(z_2) + \ldots + y_n D^{(p-1)}(z_n)] = C_p,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — многочлены относительно t не выше $(p-1)$-й степени с периодическими коэфициентами, и производные $D^{(i)}(z_k)$ взяты при условии, что эти коэфициенты рассматриваются как постоянные. Располагая эти первые интегралы по степеням t, мы можем представить их иначе в виде:

$$\left.\begin{aligned} e^{\alpha t}\left[\frac{t^{p-1}}{(p-1)!} Y_1 - \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} Y_2 + \ldots \pm Y_p\right] &= C_1, \\ e^{\alpha t}\left[\frac{t^{p-2}}{(p-2)!} Y_1 - \frac{t^{p-3}}{(p-3)!} Y_2 + \ldots \mp Y_{p-1}\right] &= C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{\alpha t} Y_1 &= C_p, \end{aligned}\right\} \tag{153}$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ суть *независимые* линейные комбинации с периодическими коэфициентами переменных $y_1, y_2, \ldots, y_p$; в самом деле, если бы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ не были независимы, то мы получили бы из формул (153) соотношение между *произвольными* постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_p$ и переменным t. Если мы примем выражения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ за новые неизвестные, то формулы (153) представят как раз общий интеграл системы линейных уравнений (§ 421)

$$\frac{dY_1}{dx} = -\alpha Y_1, \quad \frac{dY_2}{dx} = -\alpha Y_2 + Y_1, \ldots, \quad \frac{dY_p}{dx} = -\alpha Y_p + Y_{p-1}. \tag{154}$$

Применяя те же рассуждения ко всем группам первых интегралов, определяемых группами интегралов сопряженной системы, мы видим, что данная система переходит в линейную систему с постоянными коэфициентами посредством преобразования вида

$$Y_i = \varphi_{i1} y_1 + \varphi_{i2} y_2 + \ldots + \varphi_{in} y_n, \tag{155}$$

где коэфициенты φ_{ik} суть периодические функции с периодом ω.

Обратное значение определителя D коэфициентов φ_{ik} *ограничено* при $t > t_0$; чтобы это видеть, достаточно показать, что этот определитель D не может обращаться в нуль при $t > t_0$. Рассмотрим для этого n независимых систем интегралов $(y_{i1}, \ldots, y_{in})$ первой системы и n соответствующих систем $(Y_{i1}, \ldots, Y_{in})$ преобразованной системы. Определитель D равен частному от деления опреде-

* А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, издание Харьковского математического общества.

лителя из Y_{ik} на определитель из y_{ik}, а мы знаем (§ 418), что при всяком конечном значении t два последних определителя имеют конечные значения, отличные от нуля; следовательно, между t_0 и $t_0+\omega$ абсолютное значение определителя D остается бо̀льшим некоторого положительного минимума.

Чтобы закончить доказательство, мы можем предположить, что характеристическое уравнение сопряженной системы не имеет действительных отрицательных корней, так как достаточно рассматривать период 2ω вместо периода ω, чтобы заменить этот корень его квадратом [§ 416, уравнение (110)]. Если характеристическое уравнение имеет только действительные положительные корни, то очевидно, что можно предположить, что все функции φ_{ik} в формулах (155) действительны, и это преобразование удовлетворяет всем требуемым условиям. Кроме того, все характеристические показатели будут действительны, и преобразованная система будет иметь действительные коэфициенты. Но, если характеристическое уравнение сопряженной системы имеет сопряженные мнимые корни, то к каждой группе из p таких линейных комбинаций, как $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, куда входят мнимые количества, можно присоединить группу, составленную из мнимых сопряженных количеств, и ясно, что, комбинируя эти новые переменные попарно и произведя над ними преобразования вида (152) с действительными коэфициентами, мы и здесь придем к системе с действительными постоянными коэфициентами.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Проинтегрировать линейные уравнения:

$$y^{(IV)}-2y''+y=Ae^x+Be^{-x}+C\sin x+D\cos x,\quad y^{(V)}+y''=x,$$
$$y'''-y''+y'-y=2e^x-4\cos x,$$
$$y'''-3y'+2y=(ax+b)e^x+ce^{-2x},$$
$$x^2y'''-9xy''+9y'=1+2x+3x^2\,\mathrm{Log}\,x,$$
$$x^2y''-2xy'+2y=x^2+px+q,$$
$$x^3y'''-3x^2y''+7xy'-8y=x^3-2x,$$
$$x^2y''-3xy'+4y=x^2+\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$
$$x^3y'''-9x^2y''-37xy'-64y=x^4\,[a+b\,\mathrm{Log}\,x+c\,(\mathrm{Log}\,x)^2],$$
$$x^2y''+2xy'-2y=x\cos x-\sin x,$$
$$x^2y''+3xy'+y=f(x).$$

Доказать, что, если функция $f(x)$ голоморфна в области начала координат, то последнее уравнение имеет частный интеграл, голоморфный в той же области.

2. Проинтегрировать системы линейных уравнений:

$$\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}+x=0,\quad \frac{dz}{dt}-\frac{dx}{dt}+y=0,\quad \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+z=0; \tag{α}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5x+y=\cos 2t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}-x+3y=0; \tag{β}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+13y+20z=e^x,\\ &\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}+2y+3z=e^{-x};\end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

$$\frac{dx}{dt}+y-z=0,\quad \frac{dy}{dt}-z=0,\quad \frac{dz}{dx}+x-z=0; \tag{δ}$$

$$\frac{dx}{dt}+x-y=0,\quad \frac{dy}{dt}+y-4z=0,\quad \frac{dz}{dt}+4z-x=0; \tag{ε}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}-3y+8z-4u=0,\quad \frac{dz}{dx}+y-5z+2u=0,\\ &\frac{du}{dx}+3y-14z+6u=0;\end{aligned}\right\} \tag{θ}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (\lambda + 1)\,y - 2z + 2\,(1-\lambda)\,u &= 0, \\ z' + \lambda y + z + 2\,(\lambda - 1)\,u &= 0, \\ u' + \lambda y + (2\lambda - 1)\,u &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

3. Найти общий интеграл уравнения:

$$(2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = (6x^2 + x - 3)\,e^x,$$

если известно, что уравнение без правой части имеет частный интеграл вида e^{mx}, где m — постоянное.

4 Доказать, что диференциальное уравнение

$$(x^2 - 1)\,y'' = n\,(n+1)\,y,$$

где n — целое положительное число, имеет интегралом некоторый многочлен $y_1 = P(x)$. Вывести отсюда второй интеграл того же уравнения

$$y_2 = P \operatorname{Log}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + Q,$$

где $Q(x)$ — также многочлен.

5. Доказать, что линейное диференциальное уравнение

$$xy'' - (x + \mu + \nu)\,y' + \mu y = 0,$$

где μ и ν — целые положительные числа, имеет интегралом некоторый многочлен $y_1 = P(x)$. Вывести отсюда второй интеграл того же уравнения $y_2 = e^x Q(x)$, где $Q(x)$ — также многочлен.

6. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы линейное уравнение $y'' + py' + qy = 0$ имело два независимых интеграла y_1 и y_2, связанных соотношением $y_1 y_2 = 1$. Предполагая, что $p = -\dfrac{1}{x}$, найти коэфициент q и общий интеграл.

7. Вывести формулу (23) стр. 115 из выражения (11) (§ 400) для определителя $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

8. Показать, что уравнение Бесселя

$$xy'' + 2\,(m+1)\,y' + xy = 0$$

имеет частным интегралом функцию, представляемую определенным интегралом

$$y_1 = \int_0^1 (1 - z^2)^m \cos xz\,dz,$$

если действительная часть числа m больше, чем -1. Если m есть целое положительное число, то этот интеграл имеет вид (т. I, § 1, упражнение 21):

$$2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2m\,(U \sin x + V \cos x),$$

где U и V — многочлены относительно $\dfrac{1}{x}$ с целыми коэфициентами, и общий интеграл есть

$$y = C\,(U \sin x + V \cos x) + C'\,(V \sin x - U \cos x).$$

[Эрмит.]

9. Показать, что, полагая $y = tz$, можно привести интегрирование системы линейных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} + ay + bz = 0, \qquad \frac{dz}{dx} + a_1 y + b_1 z = 0,$$

где a, b, a_1, b_1 — функции от x, к интегрированию уравнения Риккати

$$\frac{dt}{dx} + b + (a - b_1)\,t - a_1 t^2 = 0$$

и к вычислению интеграла

$$\int (a+b_1)\,dx.$$

(См. вторую выноску § 402.)

10. Доказать, что отношение z двух независимых интегралов линейного уравнения

$$y''+py'+qy=0$$

удовлетворяет диференциальному уравнению третьего порядка:

$$\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=2q-\frac{1}{2}p^2-p'.$$

11. Дано диференциальное уравнение

$$x(y''-y')-ay=0, \tag{E}$$

где a — постоянное; найти такой путь интегрирования L, чтобы функция $y(x)$, представляемая определенным интегралом

$$y(x)=\int\limits_{(L)} e^{zx}z^{a-1}(z-1)^{-a-1}\,dz,$$

была частным интегралом уравнения (E). Доказать, что, если число a — целое, то уравнение (E) имеет частный интеграл, не содержащий знака квадратуры; вывести отсюда общий интеграл и выразить его через возможно меньшее число трансцендентных функций.

12. Определить функции $P(t)$ и $Q(t)$ так, чтобы функция y, представляемая формулою:

$$y=(x-a)\int\limits_b^x f(t)P(t)\,dt+(x-b)\int\limits_a^x f(t)Q(t)\,dt,$$

была интегралом диференциального уравнения $y''=f(x)$ при всяком виде функции $f(x)$.

13. Доказать, что общий интеграл линейного уравнения

$$xy''+[n+xP(x)]y'+x^{n+1}Q(x)y=0,$$

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ голоморфны в области начала координат, однозначен в этой области (число n — целое, большее единицы).

14*. Доказать, что уравнение вида

$$x^{n-p}\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n-p-1}Q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+xQ_{n-p-1}(x)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}+Q_{n-p}(x)\frac{d^py}{dx^p}+\ldots$$
$$\ldots+Q_n(x)y=0,$$

где функции $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ голоморфны в области начала координат, имеет интеграл, голоморфный в этой области, причем можно задать произвольно значение этого интеграла и его $p-1$ последовательных производных при $x=0$, если ни одно целое число, большее, чем $(p-1)$, не будет корнем уравнения

$$(r-p)\ldots(r-n+1)+Q_1(0)(r-p)\ldots(r-n+2)+\ldots+Q_{n-p}(0)=0.$$

[Гурса, *Annales de l'École Normale*, 1883, стр. 265.]

Применяя прием, аналогичный приему § 412, мы сведем дело к доказательству того же предложения для уравнения вида

$$\frac{d^pu}{dx^p}=\frac{M}{1-\frac{x}{r}}\left(\frac{d^{p-1}u}{dx^{p-1}}+\ldots+\frac{du}{dx}+u\right),$$

где

$$u=y+xy'+\ldots+x^{n-p}y^{(n-p)}.$$

15*. Пусть будет (E) система четырех линейных уравнений, тождественная со своею сопряженной системою (§ 419):

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 + a_{i4} y_4, \quad a_{ih} + a_{hi} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{E}$$

Эта система имеет первый интеграл $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = C$. Если $C = 0$, то мы удовлетворим предыдущему соотношению, полагая

$$y_1 = \rho(\eta - \xi), \quad y_2 = \rho(1 + \xi\eta), \quad y_3 = \rho i(1 - \xi\eta), \quad y_4 = \rho i(\eta + \xi);$$

внося эти выражения для y_1, y_2, y_3, y_4 в уравнения (E), получим систему трех уравнений:

$$2\frac{\rho'}{\rho} = (a_{21} + ia_{13})(\eta - \xi) + 2ia_{23} + (a_{34} + ia_{24})(\eta + \xi),$$

$$2\eta' = (a_{12} + a_{43})(1 + \eta^2) + i(a_{13} + a_{24})(1 - \eta^2) + 2i(a_{32} + a_{14})\eta,$$

$$2\xi' = (a_{21} + a_{43})(1 + \xi^2) + i(a_{31} + a_{24})(1 - \xi^2) + 2i(a_{32} + a_{41})\xi,$$

из которых два последних суть уравнения Риккати. Пусть будут $\eta = f(x, C_1)$, $\xi = \varphi(x, C_2)$ общие интегралы этих двух уравнений; тогда общий интеграл уравнения относительно ρ определится формулою:

$$\rho^2 \frac{\partial f}{\partial C_1} \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} = C_3.$$

[Гурса, *Comptes rendus*, т. CVI, стр. 187 и т. CXLVIII, стр. 612.]

16. Доказать равенство, в котором левая часть содержит n знаков интеграла:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\,dx \int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\,dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - \varphi(y)]^{n-1} f(y)\,dy,$$

показав, что обе части суть частные интегралы одного и того же линейного дифференциального уравнения n-го порядка, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям.

17*. Доказать, что интеграл $\varphi(x, \alpha)$ линейного уравнения $F(y) = 0$ (стр. 113), рассматриваемый как функция переменного α есть интеграл сопряженного уравнения $G(z) = 0$, где x заменено через α.

[Чтобы доказать это предложение, заметим, что интеграл уравнения $F(y) = 0$, принимающий вместе со своими $n - 1$ последовательными производными при $x = x_0$ те же значения, как функция $\pi(x)$ и ее $n - 1$ последовательных производных, имеет выражение

$$y = \pi(x) - \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, \alpha)\,d\alpha,$$

где $z = \pi(\alpha)$. Интеграл, стоящий в правой части, должен зависеть только от $\pi(x)$, $\pi(x_0)$, $\pi'(x_0), \ldots, \pi^{(n-1)}(x_0)$. Но его можно представить также в виде [§ 4.4, формула (32)]:

$$\int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, \alpha)\,d\alpha = \Big\{\Psi[z, \varphi(x, \alpha)]\Big\}_{\alpha = x_0}^{\alpha = x} - \int_{x_0}^{x} zG[\varphi(x, \alpha)]\,d\alpha,$$

и ясно, что предыдущее условие удовлетворится только в том случае, если $G[\varphi(x, \alpha)] = 0$. Отсюда нетрудно вывести, что функции $\varphi_i(x)$, определяемые уравнениями (A) (выноска на стр. 113), образуют фундаментальную систему интегралов сопряженного уравнения.]

ГЛАВА XXI.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

I. ОСОБЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.

При доказательстве существования интегральных функций, принимающих данные начальные значения, существенно предположение, что правые части данной системы уравнений голоморфны вблизи этих начальных значений (§ 383). Здесь мы исследуем, ограничиваясь только одним уравнением, несколько простых случаев, когда это условие не удовлетворяется.

425. Случай, когда первая производная обращается в бесконечность. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y),\tag{1}$$

правая часть которого $f(x,\ y)$ обращается при значениях $x=x_0,\ y=y_0$ в бесконечность и притом так, что обратное значение

$$f_1(x,\ y)=\frac{1}{f(x,\ y)}$$

голоморфно вблизи $x=x_0$, $y=y_0$. Рассматривая y как независимое переменное, а x как неизвестную функцию, мы можем представить предыдущее уравнение в виде:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,\ y)}=f_1(x,\ y).\tag{2}$$

Но, по предположению, правая часть $f_1(x,y)$ голоморфна при $x=x_0$, $y=y_0$; поэтому к уравнению (2) применима теорема Коши: существует интеграл, и притом *только один*, стремящийся к x_0, когда y стремится к y_0, и этот интеграл голоморфен в области точки y_0. Так как $\frac{dx}{dy}=f_1(x,\ y)$ равно нулю при $x=x_0$, $y=y_0$ (в противном случае функция $f(x,\ y)$ была бы также голоморфною), то разложение функции $x-x_0$ в целый ряд по степеням $y-y_0$ необходимо начинается с члена не ниже второй степени. Пусть будет

$$x-x_0=A_m(y-y_0)^m+A_{m+1}(y-y_0)^{m+1}+\ldots\quad(m\geqslant 2,\ A_m\neq 0)\tag{3}$$

это разложение; из формулы (3) получаем обратное разложение $y-y_0$ по степеням $(x-x_0)^{\frac{1}{m}}$ (§ 356):

$$y-y_0=a_1(x-x_0)^{\frac{1}{m}}+a_2(x-x_0)^{\frac{2}{m}}+\ldots \quad (a_1\neq 0). \tag{4}$$

Следовательно, *уравнение* (1) *имеет интеграл, и притом только один, стремящийся к* y_0, *когда* x *стремится к* x_0, *и точка* x_0 *есть для этого интеграла алгебраическая критическая точка* *.

426. Случай, когда значение первой производной неопределенно. Полное исследование всех случаев, когда значение первой производной неопределенно, значительно сложнее. Мы начнем с уравнения, изученного Брио и Буке **:

$$xy'-by=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\ldots=\varphi(x,\ y), \tag{5}$$

где правая часть голоморфна в области точки $x=y=0$. Посмотрим, имеет ли это уравнение голоморфный интеграл, обращающийся в нуль вместе с x. Для этого подставим вместо y в обе части уравнения (5) целый ряд:

$$y=c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots; \tag{6}$$

после подстановки найдем, что коэфициент при x^n в левой части равен $(n-b)c_n$, а коэфициент при x^n в правой части есть некоторый многочлен

$$P_n(a_{10},\ a_{20},\ \ldots,\ a_{0n};\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}),$$

все коэфициенты которого суть целые положительные числа, и который содержит только коэфициенты $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1}$ и коэфициенты a_{ih}. Таким образом для последовательного определения коэфициентов ряда (6) мы получаем рекуррентное соотношение

$$(n-b)c_n=P_n(a_{10},\ a_{20},\ \ldots,\ a_{0n};\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1}) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

из которого можно последовательно определить все эти коэфициенты, *если только* b *не равно целому положительному числу*. Устраним пока из рассмотрения этот случай; тогда из соотношения (7) будем иметь:

$$c_1=\frac{a_{10}}{1-b},\quad c_2=\frac{a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2}{2-b},\ \ldots,$$

и т. д. Сумма ряда (6) представляет интеграл уравнения (5), обращающийся в нуль вместе с x, если только этот целый ряд имеет радиус сходимости, отличный от нуля. В самом деле, тогда мы имеем право произвести все вычисления, при помощи которых мы определили коэфициенты этого ряда (т. I, § 183).

Чтобы доказать, что ряд (6) — сходящийся, заметим сначала, что, когда n принимает все целые значения 1, 2, 3, ... до бесконечности,

---

* Геометрически это значит, что через точку $(x_0,\ y_0)$ проходит *интегральная кривая*, и притом только одна; точка $(x_0,\ y_0)$ есть обыкновенная точка этой кривой, и касательная в этой точке есть прямая $x=x_0$. В теореме предполагается, что функция $f_1(x,\ y)$ не обращается в нуль при $x=x_0$ тождественно, т. е. для всякого значения y; в самом деле, в этом случае интеграл уравнения (2), принимающий значение x_0 при $y=y_0$, обращается в $x=x_0$, и уравнение (1) не имеет интеграла, стремящегося к y_0, когда x стремится к x_0.

** *Journal de l'École Polytechnique*, т. XXI, 1856.

дробь $\frac{1}{n-b}$, которая по предположению не обращается в бесконечность, стремится к нулю. Следовательно, модуль этой дроби имеет некоторый максимум $\frac{1}{B}$, и мы имеем при всяком значении целого числа n неравенство. $\left|\frac{1}{n-b}\right| \leqslant \frac{1}{B}$. С другой стороны, пусть будет

$$\Phi(x, Y) = A_{10}x + A_{20}x^2 + A_{11}xY + A_{02}Y^2 + \ldots + A_{ik}x^iY^k + \ldots$$

усиливающая функция для $\varphi(x, y)$, не содержащая ни постоянного члена ни члена с Y; например, можно взять функцию вида

$$\Phi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho},$$

но для дальнейшего рассуждения нет необходимости точно устанавливать вид этой функции. По общей теореме о неявных функциях (т. I, § 184), вспомогательное уравнение

$$BY = \Phi(x, Y) \tag{8}$$

имеет голоморфный корень, обращающийся в нуль вместе с x. Пусть будет

$$Y = C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots \tag{9}$$

разложение в целый ряд этого корня. Чтобы вычислить коэфициенты C_i, можно подставить в обе части соотношения (8) вместо Y разложение (9); мы получим рекуррентную формулу

$$BC_n = P_n(A_{10}, A_{20}, \ldots, A_{0n}; C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \tag{10}$$

где P_n есть такой же многочлен, как и в формуле (7), но в котором a_{ik} заменены через A_{ik} и c_i — через C_i.

Из самого выбора постоянного B и функции $\Phi(x, Y)$ следует, что

$$|a_{ik}| \leqslant A_{ik}, \quad \frac{1}{|n-b|} \leqslant \frac{1}{B}.$$

Поэтому, если будет

$$|c_1| < C_1, \ |c_2| < C_2, \ldots, |c_{n-1}| < C_{n-1},$$

то будет также и $|c_n| < C_n$, так как все коэфициенты многочлена P_n суть положительные целые числа. Но мы имеем $|a_{10}| \leqslant A_{10}$, и следовательно, $|c_1| < C_1$; отсюда мы заключаем, что ряд (9) есть усиливающий для ряда (6); следовательно, ряд (6) — сходящийся в области начала координат. Таким образом, *если коэфициент b при y в уравнении* (5) *не равен целому положительному числу, то это уравнение имеет один и только один голоморфный интеграл, обращающийся в нуль вместе с x.*

Чтобы закончить изучение голоморфных интегралов, обращающихся в нуль вместе с x, остается еще рассмотреть тот случай, когда b равно целому положительному числу. Предположим сначала, что $b = 1$; тогда первое из соотношений

(7) приводится к $a_{10}=0$. Следовательно, если a_{10} не равно нулю, то голоморфного интеграла, удовлетворяющего данным начальным условиям, не существует. Если же $a_{10}=0$, то, полагая $y=\lambda x$, мы придем к уравнению:

$$\lambda'=\psi(x,\lambda)=a_{20}+a_{11}\lambda+a_{02}\lambda^2+\ldots, \tag{11}$$

причем функция $\psi(x,\lambda)$ голоморфна, если $|x|<r$, $|\lambda|<\Lambda$, где r и Λ — положительные числа, выбранные соответственным образом. Но уравнение (11) имеет бесконечное множество интегралов, голоморфных в области начала координат, так как при $x=0$ можно взять для λ произвольное значение λ_0, соблюдая только условие $|\lambda_0|<\Lambda$. Следовательно, в этом случае уравнение (5) имеет бесконечное множество голоморфных интегралов, обращающихся в нуль вместе с x.

Если b равно целому положительному числу, большему единицы, то коэфициент при x в разложении голоморфного интеграла, обращающегося в нуль при $x=0$, должен быть равен $\frac{a_{10}}{1-b}$; сделав преобразование $y=\frac{a_{10}}{1-b}x+\lambda x$, мы придем к уравнению того же вида, у которого коэфициент при λ равен $b-1$;

$$\lambda x'-(b-1)\lambda=a_{10}'x+a_{20}'x^2+a_{11}'\lambda x+\ldots;$$

следовательно, посредством ряда преобразований этого рода мы придем к только что рассмотренному выше случаю. Таким образом, если b равно целому положительному числу, то уравнение (5) или не имеет ни одного голоморфного интеграла, обращающегося в нуль вместе с x, или имеет их бесконечное множество.

Брио и Буке исследовали также, существуют ли интегралы не голоморфные, стремящиеся к нулю вместе с x, и доказали, что уравнение (5) имеет бесконечное множество таких интегралов, если действительная часть количества b положительна *. Эту теорему нетрудно доказать, пользуясь методом последовательных приближений. Заметим сначала, что, если действительная часть количества b положительна, то, не уменьшая общности, всегда можно предположить, что эта действительная часть больше единицы, $\mathfrak{R}(b)>1$. В самом деле, сделав в уравнении (5) замену переменного $x=x'^n$, где n — целое положительное число, мы придем к уравнению того же вида, но в котором b заменено через nb. Таким образом мы предположим, что $\mathfrak{R}(b)>1$, и b не есть целое число. Как мы только что доказали, уравнение (5) имеет голоморфный интеграл y_1, обращающийся в нуль вместе с x; полагая $y=y_1+u$, мы приведем уравнение (5) к виду:

$$xu'-bu=\varphi(x,y_1+u)-\varphi(x,y_1)=u\psi(x,u).$$

Так как функция $\varphi(x,y)$ не содержит члена с y, то функция $\psi(x,u)$ не содержит постоянного члена, и предыдущее уравнение можно представить иначе в виде:

$$xu'-bu=u[\alpha x+\beta u+\ldots].$$

Положим, далее, $u=\lambda x^b$, где λ — новая неизвестная функция; тогда уравнение примет вид:

$$\lambda'=\lambda(\alpha+\beta\lambda x^{b-1}+\ldots)=F(\lambda,x,x^{b-1}), \tag{12}$$

где F обозначает целый ряд, расположенный по степеням λ, x, x^{b-1}. Проведем в плоскости переменного x из начала координат две полупрямые с аргументами ω_0 и ω_1 ($\omega_0<\omega_1<\omega_0+2\pi$) и рассмотрим круговой сектор A, ограниченный этими прямыми и дугою круга, описанного из начала координат радиусом, равным r. Если x остается внутри сектора A, и если, с другой стороны, модуль $|\lambda|$ остается меньшим некоторого положительного числа l, то, при достаточно малых r и l, функция $F(\lambda,x,x^{b-1})$ будет голоморфною **. Соединим прямолинейным

---

* Легко убедиться в справедливости этой теоремы в том случае, если b представляет собою величину, обратную целому числу n. В самом деле, полагая в этом случае $x=x'^n$ $(n>1)$, мы приходим к уравнению $x'\frac{dy}{dx}-y=f(x',y)$, в правой части которого нет членов со степенью меньше n, и следовательно, как мы видели, оно допускает бесконечное множество голоморфных относительно x' интегралов, обращающихся в нуль при $x'=0$.

** Если x приближается к началу координат, оставаясь внутри сектора A, то производная от функции F по x может обращаться в бесконечность, если действительная часть количества $b-2$ отрицательна, но в методе последовательных приближений эта производная не участвует.

отрезком начало координат с какою-нибудь точкою x сектора A и возьмем за начальное значение переменного λ произвольное значение λ_0, модуль которого $|\lambda_0| < l$. Мы можем применить к уравнению (12) метод последовательных приближений (§ 390); именно, рассмотрим последовательно интегралы:

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \int_0^x F(\lambda_0, x, x^{b-1})\, dx, \quad \lambda_2 = \lambda_0 + \int_0^x F(\lambda_1, x, x^{b-1})\, dx,$$

и, вообще,

$$\lambda_n = \lambda_0 + \int_0^x F(\lambda_{n-1}, x, x^{b-1})\, dx,$$

где все интегралы взяты вдоль проведенной нами прямой. Все основные предположения, необходимые для доказательства, здесь имеют место: все функции $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x), \ldots$ голоморфны в секторе A, и функция $\lambda_n(x)$ стремится к некоторому пределу $\Lambda(x)$, если r достаточно мало. Поэтому уравнение (12) имеет интеграл, голоморфный в секторе A и стремящийся к λ_0, когда x стремится к нулю, и следовательно, уравнение (5) имеет бесконечное множество интегралов, не голоморфных в области начала координат, стремящихся к нулю при приближении точки x к началу координат и зависящих от произвольного параметра λ_0. Таким образом теорема Брио и Буке доказана.

Условие, чтобы действительная часть количества $b-1$ была положительна, существенно. В самом деле, когда переменное x приближается к началу координат, оставаясь внутри сектора A, то его аргумент заключается между ω_0 и ω_1, и его модуль стремится к нулю. Пусть будет $x = \rho e^{i\omega}$, $b-1 = \mu + \nu i$; мы имеем:

$$x^{b-1} = e^{(\mu + \nu i)(\log \rho + i\omega)} = e^{\mu \log \rho - \nu\omega}\, e^{i(\nu \log \rho + \mu\omega)}; \tag{13}$$

если ρ стремится к нулю, причем ω остается внутри границ ω_0 и ω_1, то $\mu \log \rho - \nu\omega$, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по абсолютному значению, и модуль $|x^{b-1}|$ стремится к нулю. Напротив, если действительная часть количества $b-1$ отрицательна, то, когда x, оставаясь в секторе A, стремится к нулю, модуль $|x^{b-1}|$ неограниченно возрастает; поэтому в этом случае функция $F(\lambda, x, x^{b-1})$ уже не будет непрерывною в начале координат, и предыдущее доказательство здесь неприменимо.

Брио и Буке доказали, что, если действительная часть количества b отрицательна, то уравнение (5) не имеет другого интеграла, стремящегося к нулю вместе с x, кроме голоморфного. Но их доказательство, очень похожее на доказательство, приведенное в выноске на стр. 55, содержит предположение, что переменное x стремится к началу координат вдоль пути конечной длины и с определенною касательною в начале координат, и заключение Брио и Буке верно только при этом условии. Чтобы дать понятие о трудности этого вопроса, рассмотрим функцию x^b и предположим, что действительная часть μ количества b *отрицательна*, а коэфициент ν при i *отличен от нуля*; тогда модуль $|x^b|$ равен $e^{\mu \log \rho - \nu\omega}$. Если переменное x описывает кривую, неограниченно приближающуюся к началу координат, то $\mu \log \rho$ действительно стремится к $+\infty$; но, если в то же время абсолютное значение аргумента ω возрастает так, что разность $\mu \log \rho - \nu\omega$ остается отрицательною и неограниченно возрастает по абсолютному значению, то модуль $|x^b|$ будет стремиться к нулю вместе с $|x|$. Если $\nu > 0$, то достаточно, чтобы переменное x описывало, например, логарифмическую спираль, представляемую уравнением $\rho = e^{\frac{\nu\omega}{2\mu}}$, так как в этом случае мы имеем $|x^b| = e^{-\frac{\nu\omega}{2}}$, и, если аргумент ω стремится к $+\infty$, то модуль $|x| = \rho$ и модуль $|x^b|$ одновременно стремятся к нулю.

Если действительная часть количества b отрицательна, и вместе с тем действительная часть количества $\frac{b}{i}$ отлична от нуля, то исследования Пикара и Пуанкаре показывают, что уравнение (5) имеет бесконечное множество неголоморфных интегралов, зависящих от произвольного постоянного и стремящихся к нулю, если переменное x описывает путь, подобный только что указанному, вдоль которого модуль $|x^b|$ стремится к нулю. Противоречие между этим результатом и теоремою Брио и Буке — только кажущееся, так как в обоих случаях мы находимся в совершенно различных условиях. Заметим, в частности, что если переменное x может принимать только действительные значения, то оно не может бесконечное множество раз обходить вокруг начала координат, и, следовательно, если действительная часть количества b отрицательна, то уравнение (5) не имеет никакого другого интеграла, стремящегося к нулю вместе с x, кроме голоморфного.

Все эти выводы легко проверить на простом уравнении $xy' = ax + by$, общий интеграл которого есть $y = \frac{ax}{1-b} + Cx^b$, если $b-1$ не равно нулю, и $y = ax \operatorname{Log} x + Cx$, если $b - 1 = 0$.

427. Мы дадим только некоторые указания относительно того случая, когда мы имеем общее уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + cx^2 + 2dxy + ey^2 + \dots}{a'x + b'y + c'x^2 + 2d'xy + e'y^2 + \dots} = \frac{Y}{X}, \tag{14}$$

где X и Y — целые ряды, сходящиеся, если

$$|x| < r, \quad |y| < r.$$

Мы здесь предположили, что не уменьшает общности, что $\frac{dy}{dx}$ делается неопределенным при системе значений $x = y = 0$. Положим в уравнении (14) $y = vx$; тогда оно примет вид:

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{a + bv - v(a' + b'v) + x\varphi(x, v)}{a' + b'v + x\psi(x, v)}, \tag{15}$$

где $\varphi(x, v)$ и $\psi(x, v)$ — целые ряды, сходящиеся, если одновременно $|x| < r$, $|vx| < r$. Если уравнение (14) имеет голоморфный интеграл, обращающийся в нуль вместе с x, то коэфициент при x в разложении этого интеграла должен быть корнем уравнения:

$$a + bv - v(a' + b'v) = 0, \tag{16}$$

так как левая часть уравнения равна нулю при $x = 0$. Пусть будет v_1 один из корней уравнения (16). Если мы положим $v = v_1 + u$, то функции

$$\varphi(x, v_1 + u), \quad \psi(x, v_1 + u)$$

будут попрежнему правильными вблизи значений $x = 0$, $u = 0$, и уравнение (15) обратится в уравнение уже изученного нами вида:

$$x\frac{du}{dx} = Au + Bx + \dots, \tag{17}$$

если только v_1 не обращает в нуль двучлена $a' + b'v$. Так как уравнение (16) вообще второй степени, то мы видим, что уравнение (14) можно привести к виду (5) вообще двумя различными способами, и, следовательно, существуют, вообще, два и только два голоморфных интеграла, обращающихся в нуль при $x = 0$. Но эти заключения относятся только к самому общему случаю, когда коэфициенты a, b, a', b' не удовлетворяют никакому особому соотношению.

Общее разыскание интегралов уравнения (14), голоморфных или неголоморфных, стремящихся к нулю вместе с x (причем X и Y — правильные функции, обращающиеся в нуль при $x=y=0$), было, начиная с мемуара Брио и Буке, предметом весьма многих работ. Хотя и удалось исследовать все более и более общие случаи, но задача до сих пор еще не решена окончательно. Мы укажем только на одно замечательное обстоятельство, с которым мы до сих пор не встречались. Возьмем уравнение:

$$x^2\frac{dy}{dx}-by=ax, \tag{18}$$

и будем искать, как выше, голоморфный интеграл этого уравнения, обращающийся в нуль при $x=0$. Определяя коэфициенты ряда (6) подстановкою в уравнение (18), мы из условий тождественности получим:

$$a+bc_1=0,\ c_1=bc_2,\ 2c_2=bc_3,\ \ldots,\ nc_n=bc_{n+1},\ \ldots;$$

отсюда имеем:

$$c_1=-\frac{a}{b},\quad c_2=-\frac{a}{b^2},\quad c_3=-\frac{2a}{b^3},\ \ldots,\quad c_{n+1}=-\frac{1\cdot 2\ldots n\cdot a}{b^{n+1}}.$$

Таким образом мы, действительно, получаем единственное значение для каждого коэфициента, но *ряд, к которому мы приходим, — всюду расходящийся, кроме точки* $x=0$. В этом примере начало координат есть трансцендентная особая точка для всех интегралов, как в этом можно убедиться непосредственным интегрированием. Точно так же, точка $x=0$ есть трансцендентная особая точка для всех интегралов уравнения $xy'+y^2=0$, и все эти интегралы стремятся к нулю вместе с $|x|$.

Если переменные x и y могут принимать только действительные значения, и если требуется *построить* интегральные кривые уравнения (14), то очень важно знать, какой вид имеют эти интегральные кривые вблизи общей точки обеих кривых $X=0$, $Y=0$. Мы рассмотрим с этой точки зрения простое уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{a'x+b'y}, \tag{19}$$

которое можно проинтегрировать элементарным приемом (§ 364), полагая $y=tx$. Для большей симметрии интегрирования заменим уравнение (19) системою

$$\frac{dx}{a'x+b'y}=\frac{dy}{ax+by}=dt, \tag{20}$$

где t есть вспомогательное переменное. Выше мы видели (§ 421), что эту систему можно привести к простому каноническому виду, заменяя x и y их линейными однородными комбинациями X и Y. Характеристическое уравнение здесь есть

$$s^2-(a'+b)s+ba'-ab'=0;$$

оно не может иметь корня $s=0$, так как, по предположению, $ba'-ab'$ не равно нулю *. В зависимости от характера этих корней здесь нужно различать несколько случаев.

1. Если характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня s_1, s_2, то систему (20) можно привести к виду:

$$\frac{dX}{s_1X}=\frac{dY}{s_2Y}=dt;$$

* Мы предполагаем, что уравнения $ax+by=0$, $a'x+b'y=0$ не имеют общих решений, кроме $x=0$, $y=0$.

следовательно, данное уравнение обращается в

$$\frac{s_2}{s_1} Y\,dX = X\,dY.$$

Общий интеграл определяется формулою:

$$Y = CX^{\frac{s_2}{s_1}}.$$

Если s_1 и s_2 имеют одинаковые знаки, то Y стремится к нулю вместе с X; все интегральные кривые пройдут через начало координат, которое называется *узлом*. Если же $\frac{s_2}{s_1}$ отрицательно, то существуют только две интегральные кривые, проходящие через начало координат, именно, прямые $X=0$, $Y=0$. В этом случае начало координат называется *седловиною* (col.).

2. Если характеристическое уравнение имеет мнимые сопряженные корни $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ $(\beta \neq 0)$, то систему (20) можно привести к виду:

$$\frac{d(X+iY)}{(\alpha+i\beta)(X+iY)} = \frac{d(X-iY)}{(\alpha-i\beta)(X-iY)} = dt,$$

где X и Y суть линейные однородные многочлены с *действительными коэфициентами* от переменных x и y. Эти уравнения можно представить иначе в виде:

$$\frac{dX}{\alpha X - \beta Y} = \frac{dY}{\beta X + \alpha Y} = dt;$$

отсюда получаем:

$$\frac{X\,dX + Y\,dY}{\alpha(X^2+Y^2)} = \frac{X\,dY - Y\,dX}{\beta(X^2+Y^2)}.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (19) представится в виде:

$$\sqrt{X^2+Y^2} = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}}.$$

Если α не равно нулю, то все эти кривые имеют вид спиралей, неограниченно приближающихся к началу координат как к асимптотической точке; в этом случае начало координат называется *фокусом*.

Если α равно нулю, то общий интеграл состоит из концентрических конических сечений. Начало координат называется *центром*, но этот случай должно рассматривать как исключение, так как для него требуется условие, выражаемое равенством, именно: $a'+b=0$.

3. Если характеристическое уравнение имеет двойной корень s, то этот корень действителен и отличен от нуля, и система (20) приводится к виду:

$$\frac{dX}{sX} = \frac{dY}{s(X+Y)} = dt.$$

Уравнение (19) обращается в $\frac{dY}{dX} = 1 + \frac{Y}{X}$, и общий интеграл есть $Y = CX + X \operatorname{Log} X$. Чтобы построить интегральные кривые, можно выразить X и Y через вспомогательное переменное, полагая $X = e^\theta$; тогда $Y = Ce^\theta + \theta e^\theta$. Если θ стремится к $-\infty$, то X и Y, а следовательно, также и x, y, стремятся к нулю; здесь также начало координат есть фокус.

Предполагая, что x и y очень малы, мы можем рассматривать $ax+by$, $a'x+b'y$ как первые члены разложений функций в целые ряды; тогда предыдущие результаты имеют место вообще для уравнений вида (14) в непосредственной близости от начала координат.

Предыдущая классификация принадлежит Пуанкаре, который распространил свои исследования на уравнения общего вида (14) с действительными коэфициентами.

II. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

428. Особые точки интегралов. Те разложения в ряды, посредством которых мы доказывали существование интегралов системы аналитических диференциальных уравнений, позволяют вычислять эти интегралы только внутри круга сходимости. Но мы заметили вообще (§ 337), что если эти разложения найдены, то этого достаточно, чтобы можно было считать эти функции определенными во всей области их существования. Рассмотрим для определенности алгебраическое диференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0, \tag{21}$$

где F есть целый многочлен относительно x, y, y'. Пусть будет (x_0, y_0) система значений, при которой уравнение $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ имеет простой корень y_0'; если x и y стремятся соответственно к x_0 и y_0, то уравнение (21) имеет один и только один корень y', стремящийся к y_0', и этот корень $y' = f(x, y)$ есть правильная функция переменных x и y вблизи значений x_0, y_0. Следовательно, уравнение (21) имеет голоморфный интеграл, принимающий при $x = x_0$ значение y_0, причем его производная принимает при $x = x_0$ значение y_0'. Этот интеграл определен разложением в целый ряд только внутри некоторого круга C_0 с центром в точке x_0 и вообще конечного радиуса, но мы можем продолжить аналитически эту функцию вне круга C_0, и эта функция будет удовлетворять уравнению (21) во всей области ее существования. Заметим, что можно воспользоваться самим уравнением (21), чтобы вычислить коэфициенты различных рядов, применяемых в методе аналитического продолжения; если в какой-нибудь точке x_1 круга C_0 рассматриваемый интеграл равен y_1, то его производная равна одному из корней y_1' уравнения $F(x_1, y_1, y') = 0$, и, диференцируя это уравнение последовательно любое число раз, мы можем отсюда найти значения всех других производных.

Таким образом всякое диференциальное уравнение первого порядка определяет бесконечное множество аналитических функций (зависящих от произвольного постоянного). Вообще, это будут трансцендентные функции, которые нельзя выразить через элементарные трансцендентные функции; тем более это верно для функций, определяемых алгебраическими диференциальными уравнениями второго или высших порядков. Изучение свойств этих новых трансцендентных функций и их классификация составляют предмет аналитической теории диференциальных уравнений.

При изучении диференциальных уравнений можно преследовать две различные цели. Мы можем или искать необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнения данного вида интегрировались в уже известных функциях; или, напротив, мы можем искать алгебраические диференциальные уравнения, которые определяли бы трансцендентные функции, неприводимые к известным элементарным трансцендентным функциям, и имели бы некоторые определенные характерные свойства, например были бы однозначными или мероморфными и т. п. Какова бы ни была наша главная цель, во всяком случае весьма важно определить, какие особенности могут иметь интегралы данного диференциального уравнения. Так, особые точки интегралов линейных уравнений неподвижны; напротив, особые точки интегралов нелинейных уравнений вообще, изменяются с изменением начальных значений. Например, интеграл уравнения $x+yy'=0$, принимающий значение y_0 при $x=0$, есть $y=\sqrt{y_0^2-x^2}$; эта функция имеет две критических точки $+y_0$, $-y_0$, которые зависят от начального значения. Точно так же интеграл уравнения $y'=y^2$, равный y_0 при $x=0$, есть $y=\frac{y_0}{1-xy_0}$; он имеет полюс $x=\frac{1}{y_0}$. Следовательно, приходится различать два класса особых точек диференциального уравнения: *неподвижные* особые точки, которые не зависят от взятых начальных значений (они могут и не быть непременно особыми точками для всех интегралов); *подвижные* особые точки, полюсы или критические точки, которые зависят от начальных значений. Диференциальное уравнение может иметь одновременно особые точки обоих видов.

429. Функции, определяемые диференциальным уравнением $y'=R(x,y)$. Рассмотрим, в частности, диференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{22}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — целые многочлены относительно x и y, не имеющие общим делителем никакого многочлена того же рода. Система уравнений $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$ имеет несколько систем решений $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$; отметим на плоскости переменного x точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Сделав в уравнении (22) преобразование $y=\frac{1}{z}$, мы придем к уравнению того же вида:

$$\frac{dz}{dx}=R_1(x,z)=\frac{P_1(x,z)}{Q_1(x,z)}; \tag{23}$$

система уравнений $P_1(x,z)=0$, $Q_1(x,z)=0$ также имеет несколько систем решений $(a_1', b_1'), \ldots, (a_m', b_m')$; отметим на плоскости переменного x точки $a_1', a_1', \ldots, a_m'$. Точки a_i, a_k' будут, вообще, особыми точками для некоторых из интегралов уравнения (22); но все эти особые точки непосредственно известны; это — *неподвижные* особые точки.

Пусть будет теперь (x_0, y_0) какая-нибудь система значений, для которой $Q(x_0, y_0)$ не равно нулю. Уравнение (22) имеет интеграл, голоморфный в области точки x_0 и обращающийся в y_0 при $x=x_0$. Пусть переменное x описывает какой-нибудь путь L, выходящий из точки x_0 и не проходящий ни через одну из точек a_i, a_k'. Мы можем аналитически продолжить этот интеграл вдоль всего пути L, если при этом не встретим никакой новой особой точки; но может случиться, что мы встретим по пути новую особую точку интеграла; тогда дальнейшее аналитическое продолжение вдоль пути L будет невозможно. Пусть будет α первая новая особая точка, которую мы встретим; рассматриваемый интеграл есть голоморфная функция вблизи всякой точки X, лежащей на пути L между точками x_0 и α, но тот круг сходимости целого ряда, представляющего этот интеграл, который имеет центр в точке X, не может содержать внутри себя точки a; как бы ни было мало $|X-a|$. Уравнение $Q(a, y)=0$ имеет несколько корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$; отметим точки β_i на плоскости переменного y; это уравнение имеет только конечное число корней, так как в противном случае многочлен $Q(x, y)$ должен был бы делиться на $x-a$, и тогда точка a была бы, очевидно, одною из точек a_i, a_k'. По той же причине уравнения $P(a, y)=0$, $Q(a, y)=0$ не могут иметь ни одного общего корня. В дальнейшем исследовании мы должны рассмотреть несколько различных возможных случаев. Пусть будет Y значение интеграла в точке X. Прежде всего, нельзя предположить, что при приближении X к a значение интеграла Y стремится к некоторому конечному значению β, отличному от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$; в самом деле, так как при $x=a$, $y=\beta$ функция $R(x, y)$ — правильная, то, по основной теореме Коши, существует только один интеграл, стремящийся к β, при приближении X к a; этот интеграл — голоморфный в точке a, и следовательно, вопреки предположению, не имеет точку a особою точкою. Предположим, во-вторых, что при приближении модуля $|X-a|$ к нулю Y стремится к значению β_i. При $x=a$, $y=\beta_i$ функция $R(x, y)$ обращается в бесконечность, но ее обратное значение $\dfrac{1}{R(x, y)}$ есть функция правильная, так как по предположению мы не можем иметь $P(a, \beta_i)=0$. Но мы видели выше (§ 425), что в этом случае уравнение (22) имеет интеграл, и притом только один, стремящийся к β_i, когда $|X-a|$ стремится к нулю, и точка a для этого интеграла есть алгебраическая критическая точка. Предположим, наконец, что при приближении $|X-a|$ к нулю, модуль $|Y|$ неограниченно возрастает; тогда уравнение (23) имеет интеграл, стремящийся к нулю вместе с $|X-a|$; мы не можем иметь одновременно $P_1(a, 0)=0$, $Q_1(a, 0)$, так как точка a отлична от точек a_k'. Поэтому, если $Q_1(a, 0)$ не равно нулю, то функция z голоморфна в области точки a, и рассматриваемый интеграл Y имеет в точке a полюс; если же $Q_1(a, 0)=0$, то точка a есть алгебраическая критическая точка для z, а следовательно, и для интеграла Y.

В сущности, мы рассмотрели еще не все предположения. В самом деле, не может ли случиться, что при приближении $|X-a|$ к нулю Y не стремится ни к какому пределу, но и не возрастает неограниченно? Пенлеве доказал, что это невозможно; до его работ это предложение допускали без строгого доказательства. Вот рассуждение Пенлеве. Опишем из точки a как из центра круг C очень малым радиусом r. Когда $|X-a|$ стремится к нулю, корни уравнения $Q(X, y)=0$, стремящиеся соответственно к $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$, остаются соответственно внутри некоторых кругов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, описанных из точек $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ как из центров радиусами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$; при этом радиус r можно взять настолько малым, чтобы все эти радиусы ρ_i были меньше всякого заданного числа ε. Рассмотрим вместе с тем круг Γ, описанный в плоскости переменного y из начала координат очень большим радиусом R; пусть будет (E) часть плоскости переменного y, расположенная вне кругов γ_i и внутри круга Γ. Покажем, что когда $|X-a|$ стремится к нулю, то соответствующая точка Y, представляющая один из интегралов уравнения (22), наконец, остается или постоянно внутри одного из кругов γ_i или постоянно вне круга Γ. В самом деле, если бы этого не было, то всегда можно было бы найти на пути L такие точки X, чтобы $|X-a|$ было меньше всякого заданного числа, и чтобы вместе с тем соответствующие значения Y заключались в области (E). Предположим, например, что $|X-a|<\frac{r}{2}$, а Y лежит в области (E).

Существует положительный минимум для радиуса круга сходимости интеграла уравнения (22), равного Y при $x=X$. В самом деле, очевидно, существует максимум для $|R(X, Y)|$, когда точки X и Y остаются в указанных областях, а для чисел a и b существует положительный минимум (§ 383). Пусть этот минимум радиуса круга сходимости есть η.

По предположению, на пути L существует такая точка X', расстояние которой от точки a меньше, чем η, и для которой соответствующая точка Y' лежит в области (E). Так как, по только что доказанному, радиус круга сходимости ряда, представляющего тот интеграл уравнения (22), который принимает значение Y' при $x=X'$, не меньше η, то отсюда следовало бы, что точка a лежит внутри этого круга; но очевидно, что последнее невозможно, так как a есть особая точка.

Таким образом при приближении модуля $|X-a|$ к нулю точка Y, наконец, остается или постоянно внутри одного из кругов γ_i или постоянно вне круга Γ. Так как радиус ρ_i можно взять сколь угодно малым, а радиус R — сколь угодно большим, то отсюда следует, что или Y стремится к одному из значений β_i, или $|Y|$ возрастает неограниченно. Но оба эти случая были нами изучены выше: мы нашли, что точка a будет или полюсом или алгебраическою критическою точкою. Поэтому, заменив часть пути L, близкую к точке a, дугою круга, описанного из точки a бесконечно малым радиусом, мы можем обойти эту особую точку и аналитически продолжить интеграл далее, пока не встретим новой особой точки. Докажем, что на пути L *конечной длины* может находиться только *конечное* число полюсов или алгебраических критических точек. Опишем в плоскости переменного x из каждой точки a_i, a_k' как из центра круг очень малым радиусом; опишем также из начала координат круг очень большим радиусом так, чтобы весь путь L заключался в области (E') плоскости переменного x, ограниченной этими кругами. Пусть будет x_1 какая-нибудь точка области (E'). Интеграл, модуль которого неограниченно возрастает при приближении модуля $|x-x_1|$ к нулю, равен целому многочлену относительно $(x-x_1)^{-1}$, сложенному с целым рядом относительно $(x-x_1)$, сходящимся в некотором круге с радиусом ρ_1. Точно так же различные интегралы, имеющие точку x_1 алгебраическою критическою точкою, представятся рядами, расположенными по дробным степеням разности $x-x_1$; пусть будет ρ_2 наименьший из радиусов сходимости этих рядов. Эти числа ρ_1 и ρ_2 всегда больше нуля и непрерывно изменяются с изменением положения точки x_1; следовательно, они имеют некоторый минимум $\lambda>0$, и расстояние между двумя смежными особыми точками, лежащими на пути L, необходимо больше числа λ *. Следовательно, на этом пути лежит только конечное

* Если не ограничиваться особыми точками, лежащими на пути *конечной* длины, то интеграл может иметь бесконечное множество критических точек и даже может иметь бесконечное

число полюсов, или алгебраических критических точек. Таким образом *единственные подвижные особые точки интегралов уравнения* (22) *суть полюсы, или алгебраические критические точки.* Эти интегралы не могут иметь подвижных существенно особых точек, а следовательно, не могут также иметь разрезов.

Нетрудно распространить предыдущие рассуждения и на такие уравнения вида (22), где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть целые многочлены относительно y, коэфициенты которых суть аналитические функции от x. Здесь нужно только присоединить к точкам a_l, a_k', имеющим тот же характер, как и выше, еще особые точки этих коэфициентов Если путь, описываемый переменным x, лежит весь внутри площади, не содержащей ни одной из точек a_l, a_k' и ни одной из особых точек коэфициентов при различных степенях y, то единственные особые точки, которые могут иметь интегралы, суть полюсы или алгебраические критические точки.

Найдем, например, уравнения вида (22), не имеющие *подвижных критических точек.* Для этого необходимо, чтобы знаменатель не содержал y. В самом деле, пусть будут α и β такие значения переменных x и y, что $Q(\alpha, \beta)=0$, но числитель $P(\alpha, \beta)$ нулю не равен. Интеграл уравнения (22), стремящийся к нулю, когда $|x-\alpha|$ стремится к нулю, имеет в точке α критическую точку, и ясно, что она не будет критическою точкою для всех интегралов. Таким образом искомое уравнение должно иметь вид:

$$\frac{dy}{dx}=P_m y^m+P_{m-1}y^{m-1}+\ldots,$$

где $P_m, P_{m-1}, \ldots$ — функции от x. Сверх того, полагая в этом уравнении $y=\frac{1}{z}$, мы должны иметь уравнение того же вида; отсюда следует, что m не может быть больше двух, и самым общим уравнением, обладающим требуемым свойством, будет уравнение Риккати. Обратно, нетрудно убедиться, что уравнение Риккати удовлетворяет выставленному требованию. В самом деле, если, например, мы возьмем общий интеграл этого уравнения в виде (26) (§ 401), то ясно, что, помимо особых точек функций y_1, y_2, этот интеграл не может иметь иных особых точек, кроме полюсов, происходящих от корней знаменателя y_1+Cy_2 и изменяющихся вместе с постоянным C

множество критических точек вблизи любой точки x. Рассмотрим, например, уравнение

$$2yy'=R(x),$$

где $R(x)$ — рациональная функция; общий интеграл этого уравнения есть

$$y^2=y_0^2+\int_{x_0}^{x}R(x)\,dx. \tag{A}$$

Предположим, что определенный интеграл $\int R(x)\,dx$ имеет четыре периода 1, α, i, βi, причем числа α и β — действительные, несоизмеримые между собою. Нетрудно доказать (см. § 304, примечание), что внутри круга c, описанного из какой-нибудь точки x_1 произвольным радиусом, можно найти бесконечное множество корней y уравнения (A), если соответственным образом выбирать пути интегрирования, и каждый из этих корней есть критическаа точка. Но на пути конечной длины, описываемом переменным, содержится только конечное число критических точек.

Точно так же можно искать уравнения вида (22), интегралы которых не имеют *подвижных полюсов*. Пусть будут m и n степени многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно y; полагая в уравнении (22) $y=\frac{1}{z}$, получим:

$$\frac{dz}{dx}=z^{n+2-m}\frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)}, \tag{24}$$

где P_1 и Q_1 — два другие многочлена относительно z. Пусть будет $x=a$ какое-нибудь значение переменного x, не совпадающее ни с одною из неподвижных особых точек. Уравнение (24) имеет интеграл, стремящийся к нулю при приближении модуля $|x-a|$ к нулю; но отсюда еще нельзя заключить, что уравнение (22) всегда имеет интеграл, модуль которого неограниченно возрастает при приближении $|x-a|$ к нулю; действительно, этого не будет, если соответствующий интеграл уравнения (24) обратится в $z=0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было $m<n+2$; это неравенство и представляет условие отсутствия подвижных полюсов. Сопоставляя этот результат с предыдущим, найдем, что единственное уравнение, которое не имеет никаких подвижных особых точек, есть линейное уравнение.

Приложение. Из предыдущего результата можно вывести условия того, чтобы общий интеграл диференциального уравнения первого порядка был *рациональною функцию постоянного интегрирования* при соответственном выборе этого постоянного. Пусть будет

$$y=R(x, C)=\frac{P(x, C)}{Q(x, C)} \tag{A}$$

рациональная функция параметра C, причем коэфициенты многочленов $P(x, C)$ и $Q(x, C)$ при степенях параметра C суть произвольные функции количества x. Ясно, что производная y' по x есть также рациональная функция от C:

$$y'=R_x'(x, C);$$

исключая из предыдущих уравнений параметр C, мы получим соотношение:

$$F(y, y'; x)=0, \tag{E}$$

где F есть целый многочлен относительно y и y', коэфициенты которого могут быть любыми функциями от x. Рассматривая в уравнении (E) количество x как параметр, мы заключаем из самого способа получения этого уравнения, что оно нулевого рода (уникурсально) относительно y и y'.

Обратно, пусть будет дано диференциальное уравнение первого порядка (E), причем левая часть этого уравнения есть целый многочлен относительно y и y', коэфициенты которого суть произвольные аналитические функции переменного x. Чтобы это уравнение имело общий интеграл вида (A), прежде всего необходимо, чтобы оно было нулевого рода относительно y и y'; в этом случае можно выразить y и y' через рациональные функции некоторого параметра u:

$$y=r(x, u), \quad y'=r_1(x, u),$$

таким образом, чтобы было, обратно, $u=s(x, y, y')$, причем функции r и r_1 рациональны относительно u, и s рационально относительно y и y'. При этом данное диференциальное уравнение (E) обратится в уравнение

$$\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dx}=r_1(x, u);$$

его можно привести к виду:

$$\frac{du}{dx}=F(x, u), \tag{E$_1$}$$

где F есть рациональная функция от u. Если общий интеграл уравнения (E) есть $y=R(x, C)$, то общий интеграл уравнения (E$_1$) есть

$$u=s[x, R(x, C), R_x'(x, C)],$$

т. е. рациональная функция от C. Но очевидно, что особыми точками такого выражения, изменяющимися вместе с C, могут быть только полюсы. Таким образом необходимо, чтобы все подвижные особые точки уравнения (E) были полюсами, следовательно, уравнение (E_1) должно быть уравнением Риккати *.

Рассмотрим, например, уравнение

$$y'^2 = (Py + Q)^2 (y - a)(y - b),$$

где P и Q суть функции от x, и a, b — постоянные. Это соотношение — нулевого рода относительно y и y', и чтобы выразить y и y' через рациональные функции параметра, достаточно положить $\frac{y-b}{y-a} = t^2$, мы получим:

$$y'(1 - t^2)^2 = (b - a)[P(bt - at^3) + Q(t - t^3)];$$

здесь уравнение (E_1) есть уравнение Риккати

$$2\frac{dt}{dx} = P(b - at^2) + Q(1 - t^2).$$

430 Однозначные интегралы уравнения $y'^m = R(y)$. Изучим еще интегралы диференциального уравнения

$$y'^m = R(y) = \frac{P(y)}{Q(y)}, \tag{25}$$

где m есть целое положительное число и $P(y)$ и $Q(y)$ — многочлены относительно y с постоянными коэфициентами, первые между собою. Найдем все уравнения вида (25), общий интеграл которых есть однозначная функция. Пусть будет x_0 какое-нибудь значение переменного x, и y_0 — произвольное значение переменного y, не обращающее в нуль ни одного из многочленов $P(y)$, $Q(y)$. При $y = y_0$ уравнение (25) относительно y' имеет m различных корней. Возьмем какой-нибудь из этих корней y_0'; уравнение (25) имеет интеграл, голоморфный в области точки x_0, принимающий в этой точке значение y_0, производная которого при $x = x_0$ равна y_0'. Мы можем аналитически продолжить этот интеграл вдоль любого пути L, выходящего из точки x_0, до встречи с какою-нибудь из особых точек. Пусть будет a первая особая точка, которую мы встретим, X — одна из точек на пути L, лежащих между x_0 и a, Y — соответствующее значение интеграла в точке X. Мы можем применить к уравнению (25) без существенного изменения рассуждения предыдущего параграфа. Из них следует, что если модуль $|X - a|$ стремится к нулю, то или Y стремится к корню одного из уравнений

$$P(y) = 0, \quad Q(y) = 0,$$

или модуль $|Y|$ неограниченно возрастает, но не может быть, чтобы Y не стремилось ни к какому пределу.

Рассмотрим различные возможные случаи. Пусть будет b корень кратности q уравнения $Q(y) = 0$. Из уравнения (25) находим:

$$dx = (y - b)^{\frac{q}{m}} [c_0 + c_1(y - b) + \ldots]\, dy \quad (c_0 \neq 0). \tag{26}$$

* Обратное предложение получается непосредственно. Если (E) есть уравнение Риккати, то общий интеграл u есть *линейная* функция произвольного постоянного C, и, следовательно, $y = r(x, u)$ есть *рациональная* функция параметра C.

Если переменное y описывает в своей плоскости путь, идущий от точки y_0 к точке b, то точка x, перемещаясь в своей плоскости, переходит из точки x_0 в некоторую точку a, лежащую на конечном расстоянии. Обратно, если x перемещается из x_0 в a вдоль этого пути, то y переходит из y_0 в b. Полагая $y-b=t^m$, мы получим из уравнения (26) разложение разности $x-a$ по степеням t, начинающееся с члена степени $(m+q)$. Обратно, для t мы будем иметь разложение по дробным степеням $x-a$, начинающееся с члена $(x-a)^{\frac{1}{m+q}}$; следовательно, разложение разности $y-b$ будет иметь вид:

$$y-b=(x-a)^{\frac{m}{m+q}}\left[a_0+a_1(x-a)^{\frac{1}{m+q}}+\ldots\right] \quad (a_0\neq 0);$$

так как q — положите ьно, то $m+q>m$, и точка $x=a$ есть для рассматриваемого интеграла алгебраическая критическая точка. Следовательно, чтобы общий интеграл уравнения (25) был однозначною функциею, необходимо, чтобы многочлен $Q(y)$ совсем не имел корней, т. е. чтобы он приводился к постоянному; следовательно, уравнение (25) должно иметь вид:

$$y'^m=P(y), \tag{27}$$

где $P(y)$ — многочлен. Сделав в уравнении (27) подстановку $y=\frac{1}{z}$, мы получим новое уравнение $z'^m=(-1)^m z^{2m}P\left(\frac{1}{z}\right)$, которое должно иметь тот же вид, как уравнение (27); следовательно, *степень многочлена* $P(y)$ *не может быть больше, чем* $2m$. В дальнейшем исследовании мы можем предположить, что степень многочлена $P(y)$ равна $2m$. В самом деле, если степень многочлена $P(y)$ равна $2m-q$, то, полагая $y=a+\frac{1}{z}$, где a не есть корень уравнения $P(y)=0$, мы придем к уравнению

$$z'^m=(-1)^m\left[z^{2m}P(a)+z^{2m-1}P'(a)+\ldots\right],$$

в котором правая часть есть многочлен $(2m)$-й степени. Обратно, если дано уравнение вида (27), где $P(y)$ есть многочлен $(2m)$-й степени, то, сделав подстановку $y=b+\frac{1}{z}$, где b есть корень этого многочлена, мы придем к уравнению относительно z того же вида, как уравнение (27), но в котором правая часть представляет многочлен степени меньшей, чем $2m$.

Мы предположим поэтому, что $P(y)$ есть многочлен $(2m)$-й степени; пусть будет a первая особая точка, которую мы встретим на пути L, начиная от точки x_0. Если модуль $|Y|$ неограниченно возрастает при приближении X к a, то, сделав подстановку $y=\frac{1}{z}$, мы получим уравнение относительно z, имеющее голоморфный интеграл, равный нулю при $X=a$; следовательно, точка a есть полюс интеграла y. Остается рассмотреть тот случай, когда при приближении X к a, Y стремится к корню b многочлена $P(y)$. Это может быть только тогда, когда порядок кратности этого корня меньше числа m. В самом деле, предположим, что $P(y)$ делится на $(y-b)^q$, где $q \geqslant m$. При рассматриваемых начальных условиях из уравнения (27) получим:

$$X - x_0 = \int_{y_0}^{Y} \frac{\varphi(y)\, dy}{(y-b)^{\frac{q}{m}}},$$

где функция $\varphi(y)$ — правильная в области точки b. Мы видим, что при $q > m$ при приближении Y к b модуль $|X|$ неограниченно возрастает; следовательно, должно быть $q < m$. Уравнение (27) можно представить иначе в виде:

$$dx = (y-b)^{-\frac{q}{m}} [c_0 + c_1(y-b) + \ldots]\, dy \quad (c_0 \neq 0); \tag{28}$$

отсюда получаем для разности $x-a$ разложение по степеням количества $(y-b)^{\frac{1}{m}}$, начинающееся с члена $(m-q)$-й степени. Обратно, из этого разложения для $x-a$ мы будем иметь разложение разности $y-b$ по дробным степеням разности $x-a$, начинающееся с члена $(x-a)^{\frac{m}{m-q}}$. Следовательно, точка a есть, вообще, алгебраическая критическая точка. Чтобы a было обыкновенною точкою, показатель $\frac{m}{m-q}$ должен быть равен целому числу i, откуда $q = m\left(1 - \frac{1}{i}\right)$, где i есть целое число, большее единицы. Это условие вместе с тем и достаточно, так как при нем мы получим из уравнения (28) разложение:

$$x - a = k_1 (y-b)^{\frac{1}{i}} + k_2 (y-b)^{\frac{1}{i}+1} + \ldots \quad (k_1 \neq 0);$$

отсюда, обратно, мы будем иметь для $(y-b)^{\frac{1}{i}}$ разложение по целым степеням разности $x-a$.

Таким образом, *чтобы интегралы уравнения* (27), *где* $P(y)$ *есть многочлен* ($2m$)*-й степени, не имели критических точек, необходимо и достаточно, чтобы степень кратности каждого корня уравнения* $P(y) = 0$ *была равна или больше числа* m, *или же была равна количеству* $m\left(1 - \frac{1}{i}\right)$, *где* i *есть целое число, большее единицы*. Если эти условия выполнены, то общий интеграл уравнения (27) есть однозначная функция, особыми точками которой, лежащими на конечном расстоянии, могут быть только полюсы.

В дальнейшем исследовании нужно различать несколько случаев.

Первый случай. Многочлен $P(y)$ имеет корень, степень кратности которого больше m. Очевидно, что такой корень может быть только один; если, кроме того, многочлен $P(y)$ имеет p других корней, то сумма степеней их кратностей меньше числа m

$$m\left(1 - \frac{1}{i_1}\right) + m\left(1 - \frac{1}{i_2}\right) + \ldots + m\left(1 - \frac{1}{i_p}\right) < m.$$

Отсюда имеем: $p-1<\frac{1}{i_1}+\ldots+\frac{1}{i_p}$, и так как каждое из чисел $i_1, i_2, \ldots, i_p$ не менее 2, то $p-1<\frac{p}{2}$, или $p<2$. Следовательно, должно быть $p=1$; таким образом порядок кратности другого корня уравнения есть $m\left(1-\frac{1}{i}\right)$. Поэтому порядок кратности первого корня должен быть $m\left(1+\frac{1}{i}\right)$, и, извлекая из обеих частей уравнения (27) корень m-й степени, мы получим:

$$y'=A(y-a)^{1+\frac{1}{i}}(y-b)^{1-\frac{1}{i}}. \tag{I}$$

В эту формулу входит случай $i=1$, соответствующий предположению, которое мы не рассматривали, что многочлен $P(y)$ имеет один и только один корень a кратности $2m$.

Второй случай. Уравнение $P(y)=0$ имеет корень, степень кратности которого равна m. Если оно имеет два таких корня, то извлекая из обеих частей уравнения (27) корень m-й степени, получим:

$$y'=A(y-a)(y-b). \tag{II}$$

Если же уравнение $P(y)=0$ имеет только один такой корень, то оно имеет p $(p\geqslant 2)$ других корней, степени кратностей которых меньше m, причем сумма степеней их кратностей удовлетворяет соотношению

$$m\left(1-\frac{1}{i_1}\right)+\ldots+m\left(1-\frac{1}{i_p}\right)=m,$$

или $p-1=\frac{1}{i_1}+\ldots+\frac{1}{i_p}\leqslant\frac{p}{2}$. Отсюда имеем $p\leqslant 2$. Так как число p больше единицы, то необходимо должно быть $p=2$, $i_1=i_2=2$; следовательно, число m — четное, и уравнение (27) приводится к виду:

$$y'^2=A(y-a)^2(y-b)(y-c), \tag{III}$$

где a, b, c — три различных числа.

Третий случай. Степени кратностей всех корней уравнения $P(y)=0$ меньше числа m. Очевидно, что число различных корней многочлена $P(x)$ не может быть менее трех. Пусть будет p число этих корней. Так как сумма степеней их кратностей равна $2m$, то мы имеем:

$$m\left(1-\frac{1}{i_1}\right)+m\left(1-\frac{1}{i_2}\right)+\ldots+m\left(1-\frac{1}{i_p}\right)=2m,$$

или $p-2=\frac{1}{i_1}+\ldots+\frac{1}{i_p}\leqslant\frac{p}{2}$. Отсюда следует, что $p\leqslant 4$, и, так как $p>2$, то может быть или $p=4$, или $p=3$. Если $p=4$, то сумма $\frac{1}{i_1}+\frac{1}{i_2}+\frac{1}{i_3}+\frac{1}{i_4}=2$;

так как каждый из знаменателей не меньше 2, то должно быть:

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 2.$$

Если $p = 3$, то задача приводится к разысканию трех таких целых чисел i_1, i_2, i_3, бо́льших единицы, чтобы сумма их обратных значений была равна единице. Если ни одно из этих чисел не равно 2, то каждое из них должно быть равно 3. Если $i_1 = 2$, то сумма обратных значений двух других чисел равна $\frac{1}{2}$. Если эти два числа между собою равны, то каждое из них равно 4; если же они между собою не равны, то меньшее должно быть меньше 4; следовательно, меньшее равно 3, а большее равно 6. Таким образом мы имеем всего четыре возможных комбинации, и уравнение (27) можно привести к одному из следующих видов:

$$y'^2 = A(y-a)(y-b)(y-c)(y-d), \tag{IV}$$
$$y'^3 = A(y-a)^2(y-b)^2(y-c)^2, \tag{V}$$
$$y'^4 = A(y-a)^3(y-b)^3(y-c)^2, \tag{VI}$$
$$y'^6 = A(y-a)^5(y-b)^4(y-c)^3, \tag{VII}$$

где a, b, c, d — числа, не равные между собою. Все уравнения (27), где $P(y)$ есть многочлен $(2m)$-й степени, интегралы которых суть однозначные функции, имеют один из только что найденных видов. Обратно, всякий интеграл любого из этих уравнений есть одно начная функция, так как, какой бы путь ни описывало переменное, мы можем встретить на этом пути только полюсы.

Чтобы иметь все уравнения вида (25), общий интеграл которых есть однозначная функция, следует прибавить к перечисленным здесь видам уравнений еще те виды, которые получим, сделав в этих уравнениях преобразование $y - a = \frac{1}{z}$, где a есть один из корней многочлена $P(y)$. Мы получим следующие новые виды:

$$y' = A(y-a)^{1-\frac{1}{i}}, \tag{I'}$$
$$y' = A(y-a)^{1+\frac{1}{i}}, \tag{I''}$$
$$y' = A(y-a), \tag{II'}$$
$$y'^2 = A(y-a)^2(y-b), \tag{III'}$$
$$y'^2 = A(y-b)(y-c), \tag{III''}$$
$$y'^2 = A(y-a)(y-b)(y-c), \tag{IV'}$$
$$y'^3 = A(y-a)^2(y-b)^2, \tag{V'}$$
$$y'^4 = A(y-a)^3(y-b)^3, \tag{VI'}$$
$$y'^4 = A(y-a)^3(y-b)^2, \tag{VI''}$$
$$y'^6 = A(y-a)^5(y-b)^4, \tag{VII'}$$
$$y'^6 = A(y-a)^5(y-b)^3, \tag{VII''}$$
$$y'^6 = A(y-a)^4(y-b)^3. \tag{VII'''}$$

Уравнения (I), (I′), (I″), которые приводятся одно к другому, имеют общим интегралом рациональную функцию, как это можно непосредственно проверить, например, для уравнения (I). Уравнения (II), (II′), (III), (III′), (III″) имеют общим интегралом периодическую функцию; в этом легко убедиться прямым вычислением. Наконец, общий интеграл уравнений (IV) и (IV′) есть эллиптическая функция. Следовательно, новыми типами уравнений, общий интеграл которых есть однозначная функция, будут только уравнения (V), (VI), (VII) и уравнения (V′) — (VII″), которые к ним приводятся. Эти уравнения распадаются на три группы, и достаточно проинтегрировать по одному уравнению из каждой группы, например уравнения (V′), (VI″), (VII‴).

Полагая в уравнении (VI″) $y=a+z^2$ и извлекая из обеих частей квадратный корень, получим уравнение вида (IV′):

$$4z'^2=A^{\frac{1}{2}}z(z^2+a-b);$$

его общий интеграл есть эллиптическая функция. Точно так же, полагая в уравнении (VII‴) $y=a+z^3$ и извлекая из обеих частей кубичный корень, будем иметь:

$$9z'^2=A^{\frac{1}{3}}(z^3+a-b);$$

мы пришли к уравнению вида (IV′).

Чтобы проинтегрировать уравнение (V′), заметим, что оно первого рода относительно y и y'. Следовательно, мы можем выразить y и y' рационально через координаты точек некоторой кривой третьего порядка, или через параметр t и квадратный корень из многочлена третьей степени. Действительно, полагая $y'=At^2$, имеем из уравнения (V′):

$$y=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2+4At^3};$$

из соотношения $dy=y'dx$ получим уравнение

$$3\frac{dt}{dx}=\sqrt{(a-b)^2+4At^3},$$

общий интеграл которого $t=f(x+C)$ есть эллиптическая функция. Отсюда для общего интеграла уравнения (VI′) имеем:

$$y=\frac{a+b}{2}+\frac{3}{2}f'(x+C).$$

Следовательно, общий интеграл всякого уравнения вида (25), если этот интеграл есть однозначная функция, есть рациональная функция от x или от e^{ax}, или же эллиптическая функция.

Во всех других случаях, кроме перечисленных выше, общий интеграл уравнения (25) никогда не будет однозначною функциею. Например, обратная функция от гиперэллиптического интеграла первого вида не может быть однозначною. В самом деле, рассмотрим многочлен $P(y)$, первый со своею производною, степень которого выше 4; диференциальное уравнение $y'^2=P(y)$ не может иметь однозначного интеграла. Пусть будут (x_0, y_0) начальные значения переменных x, y; когда $|y|$ неограниченно возрастает, то x стремится к конечному значению a, и, обратно, если x переходит от x_0 к a, то $|y|$ возрастает неограниченно. Так как степень многочлена $P(y)$ больше 4, то, полагая $y=\frac{1}{z}$, мы найдем, как было показано выше, что точка a есть алгебраическая критическая точка для интеграла уравнения $z'^2=z^4P\left(\frac{1}{z}\right)$, стремящегося к нулю, когда x стремится к a; следовательно, z, а также и y, не могут быть однозначными функциями от x*.

431. Вывод эллиптических функций из уравнения Эйлера. Из рассуждений предыдущего параграфа следует, в частности, что общий интеграл уравнения $y'^2=R(y)$, где $R(y)$ — многочлен третьей или четвертой степени, первый со своею производною, есть однозначная функция, мероморфная во всей плоскости. С другой стороны, обратная функция, которая есть эллиптический интеграл первого вида, имеет два периода, отношение которых мнимое (§ 307); следовательно, эта однозначная функция есть функция двоякопериодическая. Таким образом мы получаем доказательство существования эллиптических функций при помощи только интегрального исчисления. Это доказательство однозначности обратной функции от эллиптического интеграла первого вида отлично от доказательства, данного выше (§ 329), в котором мы пользовались свойствами функции $\wp u$. Мы покажем в нескольких словах, каким образом можно принять за исходную точку теории эллиптических функций интегрирование уравнения Эйлера; это даст нам понятие о том пути, по которому шли первые творцы этой теории.

Рассмотрим сначала диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0, \tag{29}$$

общий интеграл которого есть $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$ (§ 375). Ясно, что общий интеграл также может быть представлен формулою

$$\arcsin x+\arcsin y=C';$$

следовательно, должно иметь место соотношение вида:

$$\arcsin x+\arcsin y=F(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

Чтобы определить функцию F, положим $y=0$. Тогда мы получим $F(x)=\arcsin x$. Вследствие предыдущих соотношений будем иметь:

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}). \tag{30}$$

---

* В одном из своих мемуаров Брио и Буке искали все уравнения $F(y, y')=0$, общий интеграл которых есть однозначная функция, причем F есть многочлен *Journal de l'Ecole Polytechnique*, т. XXI). Из найденных ими условий Эрмит вывел, что, соотношение между y и y' должно быть нулевого или первого рода („Cours lithographié de l'École Polytechnique", 1873), так что для интегрирования такого уравнения можно применить метод § 372. Если соотношение $F(y, y')$ — нулевого рода, то можно выразить y и y' как рациональные функции параметра t; чтобы интеграл данного уравнения был однозначною функциею, переменное x, которое получается квадратурою, должно быть равно или линейной функции от t, $x=\frac{at+b}{ct+d}$, или логарифму от такой функции,

$$x=A\operatorname{Log}\left(\frac{at+b}{ct+d}\right).$$

Если соотношение между y и y' — первого рода, то мы можем выразить y и y' через эллиптические функции некоторого параметра u, и $\frac{dx}{du}=\frac{1}{y'}\frac{dy}{du}$ должно быть равно постоянному. Задача Брио и Буке была обобщена Фуксом, который получил необходимые и достаточные условия того, чтобы общий интеграл уравнения первого порядка $F(x, y, y')=0$, алгебраического относительно y и y', имел только постоянные критические точки. Впоследствии Пуанкаре показал, что если эти условия выполнены, то интегрирование таких уравнений приводится к квадратурам или к интегрированию уравнений Риккати (*Acta mathematica*, т. VII).

Это соотношение равносильно формуле сложения тригонометрических функций. В самом деле, определим две дуги u и v условиями

$$x = \sin u, \ \sqrt{1-x^2} = \cos u, \ y = \sin v, \ \sqrt{1-y^2} = \cos v,$$

причем корни имеют те же значения, как и в формуле (30). Тогда из соотношения (30) получим:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin(u+v),$$

или

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u.$$

В этом рассуждении нельзя видеть только остроумный способ вывода формулы сложения для $\sin x$; оно имеет более глубокое значение. Мы сейчас покажем, как из него можно очень просто вывести доказательство существования *целой* однозначной функции, удовлетворяющей диференциальному уравнению

$$y'^2 = 1 - y^2 \tag{31}$$

и обращающейся в нуль при $x=0$, тогда как при $x=0$ ее производная y' обращается в $+1$. В самом деле, из теоремы Коши следует, что существует аналитическая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая этим условиям и голоморфная в области начала координат, но из этой теоремы нельзя найти радиуса сходимости целого ряда, представляющего функцию $\varphi(x)$. Пусть будет R этот радиус сходимости; круг C, описанный из начала координат радиусом R, есть наибольший из кругов с центром в начале координат, внутри которых функция $\varphi(x)$ голоморфна. Производная $\varphi'(x)$ голоморфна в том же круге, и мы имеем: $\varphi'^2(x) = 1 - \varphi^2(x)$. Вернемся теперь к уравнению (29) и сделаем в нем замену переменных $x = \varphi'(u)$, $y = \varphi(v)$, где u и v — новые переменные, и φ — функция, которую мы только что определили. При соответственном выборе значений корней мы имеем также:

$$\sqrt{1-x^2} = \varphi(u), \ \sqrt{1-y^2} = \varphi'(v),$$

и уравнение (29) обращается в $du + dv = 0$. Следовательно, общий интеграл этого уравнения можно представить в двух различных видах:

$$u + v = C'$$

и

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C',$$

или

$$\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v) = C'.$$

Отсюда, как и выше, заключаем, что между $u+v$ и $\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v)$ должно существовать некоторое соотношение; полагая в нем $v=0$, мы получим вид этого соотношения:

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v). \tag{32}$$

Это соотношение имеет место, если $|u| < R$, $|v| < R$, $|u+v| < R$, что, наверное, будет иметь место, если $|u| < \frac{R}{2}$, $|v| < \frac{R}{2}$. Предположим, что $v = u$, и модуль $|u| < \frac{R}{2}$; тогда соотношение (32) обращается в

$$\varphi(2u) = 2\varphi(u)\varphi'(u). \tag{33}$$

Обозначим через $\varphi_1(u)$ функцию $2\varphi\left(\frac{u}{2}\right)\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)$; эта функция голоморфна в круге, описанном из начала координат радиусом $2R$, и, на основании соотношения (33), она *тождественна* с голоморфною функцией $\varphi(u)$ в круге C с радиусом R. Следовательно, обе эти функции $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию, голоморфную и вне круга C; поэтому радиус R этого круга не может иметь конечного значения, и функция $\varphi(u)$ есть *целая функция* от u.

Рассмотрим теперь диференциальное уравнение

$$y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2), \tag{34}$$

где мы берем правую часть в нормальном виде, принятом Лежандром. Рассмотрим интеграл $\lambda(x)$ этого уравнения, обращающийся в нуль при $x=0$, и производная которого равна $+1$ при $x=0$. Эта функция $\lambda(x)$ голоморфна в области начала координат. Пусть будет C самый большой круг, описанный из начала координат, внутри которого функция $\lambda(x)$ мероморфна, и R — радиус этого круга. Если ближайшая к началу координат особая точка функции $\lambda(x)$ не есть полюс, то мы проведем круг C через эту особую точку, так что в этом случае функция $\lambda(x)$ будет голоморфною внутри этого круга. Рассмотрим уравнение Эйлера

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1)^2(1-k^2x_1^2)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{(1-x_2)^2(1-k^2x_2^2)}}=0, \tag{35}$$

общий интеграл которого представится формулою (66) (стр. 34); уничтожая иррациональность в знаменателе и сокращая на $x_1^2-x_2^2$, мы можем представить этот интеграл в виде

$$\frac{x_2\sqrt{(1-x_1)^2(1-k^2x_1^2)}+x_1\sqrt{(1-x_2)^2(1-k^2x_2^2)}}{1-k^2x_1^2x_2^2}=C. \tag{36}$$

С другой стороны, выбрав соответствующим образом знаки при корнях и сделав замену переменных $x_1=\lambda(u)$ и $x_2=\lambda(v)$, мы приведем уравнение (35) к уравнению $du+dv=0$, общий интеграл которого есть $u+v=C'$. Следовательно, сделав ту же подстановку в формуле (36), мы придем к соотношению вида:

$$\frac{\lambda(u)\lambda'(v)+\lambda(v)\lambda'(u)}{1-k^2\lambda^2(u,\lambda^2(v)}=F(u+v).$$

Чтобы определить функцию F, положим $v=0$; мы будем иметь $F(u)=\lambda(u)$, и окончательно получим соотношение

$$\lambda(u+v)=\frac{\lambda(u)\lambda'(v)+\lambda(v)\lambda'(u)}{1-k^2\lambda^2(u)\lambda^2(v)}. \tag{37}$$

Если $v=u$, то

$$\lambda(2u)=\frac{2\lambda(u)\lambda'(u)}{1-k^2\lambda^4(u)}, \tag{38}$$

причем эта формула имеет место, если будет $|u|<\frac{R}{2}$. Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi(u)=\frac{2\lambda\left(\frac{u}{2}\right)\lambda'\left(\frac{u}{2}\right)}{1-k^2\lambda^4\left(\frac{u}{2}\right)};$$

эта функция мероморфна в круге, описанном из начала координат радиусом, равным $2R$, так как она есть частное двух функций, мероморфных в том же круге. Сверх того, в силу соотношения (38), внутри круга C она совпадает с функцией $\lambda(u)$. Следовательно, обе функции $\lambda(u)$ и $\Phi(u)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию, причем функция $\lambda(u)$ мероморфна в круге, большем круга C. Таким образом нельзя предположить, что радиус R круга C имеет конечное значение, и следовательно, функция $\lambda(u)$ мероморфна во всей плоскости.

Формула (37) есть формула сложения аргументов для функции $\lambda(u)$. Если k стремится к нулю, то в пределе мы получим формулу сложения для $\sin u$; и действительно, функция $\sin u$ может быть рассматриваема как предельное выражение функции $\lambda(u)$ при $k=0$.

432. Уравнения высших порядков. Изучение свойств функций, определяемых диференциальными уравнениями высших порядков, представляет гораздо бо́льшие трудности, чем те, с которыми мы до сих пор встречались в уравнениях первого порядка. Эти трудности в значительной степени обусловлены тем, что здесь у интегралов могут быть подвижные существенно особые точки. Эти точки могут быть как существенно особыми точками в обыкновенном смысле, так и трансцендентными критическими точками. В этом можно убедиться на следующем примере, данном Пенлеве. Функция

$$y = \wp\,[\operatorname{Log}(Ax + B);\; g_2,\; g_3], \tag{39}$$

где A и B — произвольные постоянные, есть общий интеграл уравнения второго порядка:

$$y'' = y'^2 \left(\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} - \frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} \right). \tag{40}$$

Вблизи любого значения переменного x, отличного от $-\frac{B}{A}$, эта функция (39) голоморфна или мероморфна. Когда x совершает обходы вокруг точки $-\frac{B}{A}$, то функция y получает бесконечное множество различных значений, если только $2i\pi$ не содержится целое число раз в каком-либо из периодов функции $\wp(u;\; g_2,\; g_3)$. С другой стороны, когда переменное x описывает такую кривую, что при этом $|Ax + B|$ стремится к нулю, то точка, представляющая количество $u = \operatorname{Log}(Ax + B)$, описывает некоторую кривую, простирающуюся в бесконечность; эта кривая пересекает бесконечное множество параллелограмов периодов функции $\wp u$, и функция y не стремится ни к какому пределу, конечному или бесконечному. Таким образом, хотя общий интеграл уравнения (40) не имеет ни постоянных трансцендентных критических точек, ни *подвижных алгебраических критических точек*, однако, отсюда еще нельзя заключить, что этот интеграл однозначен, и это потому, что он имеет подвижную трансцендентную критическую точку, именно, точку

$$x = -\frac{B}{A}.$$

Начиная с уравнений третьего порядка, подвижные трансцендентные особые точки могут образовать линии. Нетрудно понять, каким образом аналитическая функция, имеющая разрезы, может не иметь ни одной критической точки в своей области существования и в то же время не быть однозначною. Рассмотрим, например, аналитическую функцию $f(x)$, голоморфную в кольце, ограничиваемом двумя концентрическими окружностями C, C' с центрами в точке a, и имеющую окружности C и C' существенными разрезами (§ 344). Функция $F(x) = f(x) + \operatorname{Log}(x - a)$ также имеет линии C, C' разрезами; она голоморфна в области каждой точки, лежащей в кольце между C и C', и однако, она имеет бесконечное множество значений при всяком значении переменного x, заключающемся в этой области.

Все эти трудности долгое время останавливали математиков. Только в своих последних работах Пенлеве* получил алгебраические диференциальные уравнения второго порядка, интегрирующиеся в существенно новых однозначных трансцендентных функциях. Из уравнений, найденных Пенлеве, мы приведем только уравнение

$$y'' = \alpha y^2 + \beta x,$$

где α и β — постоянные ($\alpha\beta \neq 0$). Его общий интеграл есть трансцендентная мероморфная функция**

---

* [*Bulletin de la Société Mathématique*, т. XXVIII (1900), стр. 201—261 и *Acta mathematica*, т. XXV (1902), стр. 1—36. См. также P. Boutroux, *Acta mathematica*, т. XXVIII, (1904), стр. 97—224 и *Annales sc. de l'École Normale Supérieure*, 3-я серия. т, 30 (1913). стр. 255—375 и т. 31 (1914), стр. 99—159; B. Gambier, *Acta mathematica*, т. 33 (1910), стр. 1—55; I. Chazy, Ibid., т. 34 (1911), стр. 317—335, R. Garnier, *Annales sc. de l'École Normale Supérieure*, 3-я серия, т. 29 (1912), стр. 1—126 и т. 34 (1917), стр. 239—353.]

** Исходя из линейных уравнений, нетрудно составить системы диференциальных уравнений, которые обобщают уравнение Риккати и интегралы которых не имеют других подвижных особых точек кроме полюсов. Рассмотрим, например, систему трех линейных уравнений первого порядка:

$$y' + ay + bz + cu = 0, \quad z' + a_1 y + b_1 z + c_1 u = 0, \quad u' + a_2 y + b_2 z + c_2 u = 0; \tag{*}$$

III. ОСОБЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

433. Особый интеграл уравнения первого порядка. Мы уже видели несколько раз (§ 371 и 375), что диференциальное уравнение первого порядка может иметь такие интегралы, которых нельзя получить из общего интеграла, давая в последнем произвольному постоянному частное значение. Этот результат, повидимому, стоит в противоречии с доказанною выше (§ 387) теоремою Коши, из которой мы получили точное определение общего интеграла. Поэтому нам необходимо возвратиться к основной теореме Коши и рассмотреть подробнее, удовлетворяются ли непременно для всех интегралов все те предположения, которые входят в условия этой теоремы. Рассмотрим для определенности уравнение первого порядка

$$F(x, y, y')=0, \tag{41}$$

где F есть целый неразложимый многочлен относительно x, y, y', m-й степени относительно y'. Всякой системе значений (x_0, y_0) соответствуют на основании уравнения

$$F(x_0, y_0, y')=0, \tag{41 bis}$$

вообще, m различных конечных значений y_1', y_2', ..., y_m' для y'. Остановимся сначала на этом общем случае. Когда модули $|x-x_0|$ и $|y-y_0|$ стремятся к нулю, то m корней уравнения (41) стремятся, соответственно, к y_1', y_2', ..., y_m', и каждый из них есть голоморфная функция в области точки (x_0, y_0). Например, тот корень, который стремится к y_i', представится разложением в целый ряд:

$$y'=y_i'+\alpha_i(x-x_0)+\beta_i(y-y_0)+\ldots \tag{42}$$

К уравнению (42) можно применить теорему Коши, и мы заключаем, что это уравнение имеет интеграл, и притом только один, стремящийся к y_0, когда $|x-x_0|$ стремится к нулю; этот интеграл — голоморфный, и разложение для $y-y_0$ начинается с члена $y_i'(x-x_0)$. Таким образом каждому корню уравнения (41 bis) соответствует один интеграл. Следовательно, диференциальное уравнение (41) имеет m и только m интегралов, принимающих значение y_0 при $x=x_0$, и эти m интегралов голоморфны в области точки x_0. Геометрически этот результат можно выразить следующим образом: через точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости проходят m интегральных кривых с m различными касательными, и для каждой из этих кривых точка M_0 есть обыкновенная точка. Сверх того,

---

полагая $y=uY$, $z=uZ$, мы найдем, что $Y=\frac{y}{u}$, $Z=\frac{z}{u}$ суть интегралы системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Y'+aY+bZ+c-Y(a_2Y+b_2Z+c_2)=0,\\ Z'+a_1Y+b_1Z+c_1-Z(a_2Y+b_2Z+c_2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Очевидно, что единствеиные подвижные особые точки этнх интегралов суть полюсы, имен о, нули фуикции u.

Но важно заметить, чго уравнения (β) не представляют самого общего вида системы диференциальных уравнений:

$$Y'=R(x, Y, Z), \quad Z'=R_1(x, Y, Z), \tag{γ}$$

где R и R_1 — рациональные фуикции от Y и Z, обладающие этим свойством. В самом деле, пусть будут $Y=\varphi(Y_1, Z_1)$, $Z_1=\psi(Y_1, Z_1)$ — формулы, определяющие *преобразование Кремоны* (Cremona), т. е. такое преобразование, что из предыдущих формул, обратно, имеем: $Y_1=\varphi_1(Y, Z)$, $Z_1=\psi_1(Y, Z)$, причем функции φ, ψ, φ_1, ψ_1 — рациоиальные. Прнменяя это преобразованне к снстеме (β), мы придем к новой системе, обладающей рассматриваемым свойством, которая, наверное, будет вида (γ), но, вообще, не будет иметь вида (β).

все интегралы уравнения (42), принимающие при $x=x_0$ значение, близкое к y_0, удовлетворяют соотношению вида: $\Phi(x, y; x_0, y_0+C)=0$ (§ 387), и рассматриваемый интеграл соответствует значению $C=0$ произвольного постоянного C.

Если при $x=x_0$, $y=y_0$ один из корней уравнения (41 bis) обращается в бесконечность, то достаточно рассматривать, обратно, y как независимое переменное, а x — как неизвестную функцию. Тогда уравнение (41) обратится в уравнение того же вида $F_1(x, y, x_y')=0$, которое при $x=x_0$, $y=y_0$ имеет корень $x'=0$. Если этот корень простой, то мы получим для $x-x_0$ разложение по степеням разности $y-y_0$, начинающееся с члена второй степени. Отсюда, обратно, точка x_0 есть алгебраическая критическая точка для интеграла, стремящегося к y_0, когда $|x-x_0|$ стремится к нулю (§ 357). Через точку (x_0, y_0) проходит интегральная кривая, касательная к которой есть прямая $x=x_0$.

Координаты (x_0, y_0) точки, для которой уравнение (41) имеет кратный корень, удовлетворяют соотношению

$$R(x, y)=0, \tag{43}$$

которое получим, исключая y' из уравнений

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=0.$$

Уравнение (43) представляет некоторую кривую (γ), и каждой точке этой кривой соответствуют один или несколько кратных корней уравнения (41). Пусть будут (x_0, y_0) координаты обыкновенной, не кратной точки M_0, взятой на этой алгебраической кривой (γ); чтобы иметь дело с самым простым случаем, мы предположим, что уравнение

$$F(x_0, y_0, y')=0$$

имеет двойной корень y_0', имеющий конечное значение: если бы этот двойной корень был бесконечным, то достаточно было бы переменить роль x и y, чтобы притти к случаю, когда этот корень равен нулю. Если модули $|x-x_0|$ и $|y-y_0|$ очень малы, то уравнение (41) имеет два корня, очень мало разнящихся от y_0'. Вообще, эти оба корня не будут голоморфными функциями переменных x и y в области точки (x_0, y_0), но их сумма и произведение суть голоморфные функции*, так что эти два корня уравнения (41), стремящиеся к y_0', когда $|x-x_0|$ и $|y-y_0|$ стремятся к нулю, суть вместе с тем корни некоторого уравнения второй степени

$$y'^2-2P(x, y)y'+Q(x, y)=0, \tag{44}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, голоморфные в области точки (x_0, y_0). Из уравнения (44) имеем:

$$y'=P(x, y)\pm\sqrt{P^2(x, y)-Q(x, y)}. \tag{45}$$

Оба корня равны между собою для всех точек кривой (γ_1), опреде-

* Эти свойства доказываются так же, как соответствующие теоремы для неявных функций одного переменного (§ 355).

ляемой уравнением $P^2-Q=0$, эта кривая (γ_1) должна быть частью кривой (γ), и так как она проходит через точку (x_0, y_0), то вблизи этой точки она совпадает с (γ). Чтобы изучить соответствующую интегральную кривую, предположим, что начало координат перенесено в точку M_0, т. е. что $x_0=y_0=0$. Так как начало координат есть простая точка* кривой (γ), то, если мы возьмем оси координат таким образом, чтобы касательная в начале координат не была осью Oy, то уравнение $P^2-Q=0$ имеет голоморфный корень $y-y_1(x)$, стремящийся к нулю вместе с x.

Вообще, угло ой коэфициент касательной к кривой (γ) в начале координат отличен от двойного корня $y_0'=P(0, 0)$ уравнения (45) при $x=y=0$. Мы пока примем без доказательства это почти очевидное положение; ниже мы к нему еще вернемся.

Полагая в уравнении (45) $y=y_1+z$, получим:

$$z'=P(x, y_1+z)-y_1'\pm\sqrt{z\Phi(x, z)},$$

где $\Phi(x, z)$ есть целый ряд относительно x и z. В самом деле, так как y_1 есть корень уравнения $P^2-Q=0$, то ясно, что после подстановки $y=y_1+z$ переменное z должно быть общим множителем под корнем. Располагая $\Phi(x, z)$ по степеням z, мы будем иметь разложение вида

$$\psi_0(x)+z\psi_1(x)+z^2\psi_2(x)+\ldots,$$

где $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \ldots$, — функции от x, правильные в области начала координат. Функция $\psi_0(x)$ не равна нулю при $x=0$, так как в этом случае разложение количества $z\Phi(x, z)$ не содержало бы членов первой степени относительно x, z, и следовательно, разложение количества P^2-Q не содержало бы членов первой степени относительно x и y, что противно допущению, так как, по предположению, начало координат есть простая точка кривой γ. Точно так же, если мы заменим в разности

$$P(x, y_1+z)-y_1'$$

функцию y_1 ее разложением, то, располагая по степеням z, получим:

$$P(x, y_1+z)-y_1'=\varphi_0(x)+z\varphi_1(x)+\ldots,$$

причем первая функция $\varphi_0(x)$ не равна нулю при $x=0$, так как, по предположению, значение производной y_1' в начале координат отлично от $P(0, 0)$. Следовательно, уравнение (45) переходит в уравнение вида:

$$z'=\varphi_0(x)+z\varphi_1(x)+\ldots\pm\sqrt{z}\sqrt{\psi_0(x)+z\psi_1(x)+\ldots}, \tag{46}$$

причем функции $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ не равны нулю при $x=0$.

Положим в этом уравнении $z=u^2$; взяв сначала верхний знак при корне, получим:

$$2u\frac{du}{dx}=\varphi_0(x)+u^2\varphi_1(x)+\ldots+u\sqrt{\psi_0(x)+u^2\psi_1(x)+\ldots} \tag{47}$$

---

* Если кривая (γ) заключает в себе двойную кривую (γ_1), то выражение P^2-Q содержит множителем точный квадрат; приравняв его нулю, получаем уравнение двойной кривой. Через каждую точку кривой γ_1 проходят две интегральных кривых, которые в этой точке соприкасаются между собой и не имеют никаких особенностей.

Так как $\psi_0(0)$ не равно нулю, то правая часть уравнения (47) голоморфна в области точки $x=0$, $u=0$, и эта правая часть не равна нулю при $x=0$, $u=0$, так как $\varphi_0(0)$ не равно нулю. Из (47) следует, что при $x=u=0$ производная $\frac{du}{dx}$ обращается в бесконечность; следовательно, уравнение (47) имеет интеграл, и притом только один, стремящийся к нулю вместе с x (§ 425), и начало координат есть для этого интеграла алгебраическая критическая точка.

Таким образом данное уравнение (44) имеет интеграл $y=y_1+u^2$, стремящийся к нулю вместе с x; если бы мы взяли при корне в уравнении (47) другой знак, то достаточно было бы заменить в этом уравнении u через $-u$, и мы получили бы ту же функцию $y=y_1+u^2$. Для этого интеграла начало координат есть алгебраическая критическая точка. Пусть будет a_0 член в правой части уравнения (47), не зависящий от x и u, и b_0 — коэфициент при u в том же разложении. Тогда это уравнение примет вид:

$$2u\frac{du}{dx}=a_0+b_0u+\ldots,$$

или

$$\frac{dx}{du}=\frac{2u}{a_0+b_0u+\ldots},$$

или, наконец,

$$\frac{dx}{du}=\frac{2u}{a_0}-\frac{2b_0u^2}{a_0^2}+\ldots$$

Поэтому

$$x=\frac{u^2}{a_0}-\frac{2b_0}{3a_0^2}u^3+\ldots$$

Отсюда, обратно, будем иметь для u разложение по степеням $x^{\frac{1}{2}}$:

$$u=\sqrt{a_0}\,x^{\frac{1}{2}}+\frac{b_0}{3}x+\ldots,$$

и разложение для $y+u^2$ будет содержать член с $x^{\frac{3}{2}}$. Следовательно, для интегральной кривой, проходящей через начало координат, это начало есть точка возврата, и мы может сказать, что *кривая* (γ), *представляемая уравнением* (43), *есть, вообще, место точек возврата интегральных кривых*.

Таким образом через каждую точку кривой (γ) проходит, вообще, интегральная кривая, имеющая в этой точке обыкновенную точку возврата первого вида, и угловой коэфициент касательной к интегральной кривой в этой точке равен двойному корню y_0'. Если степень уравнения (41) выше второй, то через ту же точку проходят и другие интегральные кривые, соответствующие простым корням уравнения $F(x_0, y_0, y')=0$, и для этих кривых эта точка есть обыкновенная точка.

Рассуждения будут совсем другими, если для всякой точки (x_0, y_0) кривой (γ) соответствующий двойной корень y_0' уравнения (41) равен угловому коэфициенту касательной к кривой (γ) в этой точке. В этом случае прежде всего очевидно, что кривая (γ) есть интегральная кривая уравнения (41). Кроме того, это — интеграл, к которому совершенно не применима основная теорема Коши, какую бы точку на кривой (γ) мы ни взяли для определения начальных значений переменных x и y. В самом деле, если за начальные значения мы возьмем точку (x_0, y_0) кривой (γ), то уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

имеет два корня, стремящихся к y_0', когда $|x - x_0|$ и $|y - y_0|$ стремятся к нулю, но эти оба корня не будут, вообще, правильными функциями переменных x и y вблизи значений x_0, y_0, и мы не можем здесь применить теорему Коши. Получающийся таким образом интеграл называется *особым интегралом*. Теоретически разыскание особых интегралов не представляет никаких трудностей; в самом деле, для этого достаточно исследовать, удовлетворяет ли диференциальному уравнению (41) кривая, представляемая уравнением (43), а для этого надо только выполнить исключение неизвестных из двух уравнений. Может случиться, что уравнение (43) представляет совокупность двух различных кривых, из которых одна есть особый интеграл, а другая — место точек возврата интегральных кривых.

Если кривая (γ) есть особый интеграл, то через каждую точку этой кривой проходит, вообще, другая интегральная кривая, касательная к кривой (γ). Возьмем начало координат в какой-нибудь точке кривой (γ); мы уже знаем один интеграл y_1 уравнения (45); это особый интеграл, для которого одновременно

$$y_1' = P(x, y_1), \quad P^2(x, y_1) = Q(x, y_1). \tag{48}$$

Полагая, как выше, $y = y_1 + z$, мы попрежнему можем представить данное уравнение в виде (46); но в этом случае функция $\varphi_0(x)$ равна нулю, так как $z = 0$ должно быть интегралом этого нового уравнения. Так как все остальные предположения остаются в силе, то функция $\psi_0(x)$ не равна нулю при $x = 0$, и, полагая в уравнении (46) $z = u^2$, мы придем к уравнению, все члены которого имеют множитель u. Разделив на u, будем иметь диференциальное уравнение:

$$2u' = u[\varphi_1(x) + u^2\varphi_2(x) + \ldots] \pm \sqrt{\psi_0(x) + u^2\psi_1(x) + \ldots}, \tag{49}$$

к которому можно применить общую теорему Коши. Так как функция $\psi_0(x)$ не равна нулю при $x = 0$, то оба значения корня голоморфны при $x = 0$, $u = 0$. Следовательно, уравнение (49) имеет два интеграла, голоморфных в области начала координат и обращающихся в нуль при $x = 0$; нетрудно убедиться, что эти два интеграла получаются один из другого заменою u на $-u$. Следовательно, уравнение относительно y имеет, кроме особого интеграла, еще другую интегральную кривую:

$$y = y_1 + u^2,$$

проходящую через начало координат и касающуюся в нем кривой (γ). Но между этими обоими интегралами есть существенная разница. В самом деле, к уравнению (49) можно приложить общие теоремы § 387, и интеграл этого уравнения, обращающийся в нуль при $x = 0$, принадлежит к семейству интегралов, зависящих от произвольного постоянного. Следовательно, то же имеет место и для интеграла, касающегося в начале координат особого интеграла, тогда как сам особый интеграл есть, вообще, изолированное решение. Последнее понятно, потому что особый интеграл нельзя получить из общего интеграла, давая произвольному постоянному какое-нибудь частное значение, так как к особому интегралу неприменимы рассуждения, из которых мы выводили существование общего интеграла (§ 382).

Таким образом особый интеграл есть, вообще, огибающая остальных интегральных кривых. Уже Лагранж заметил, что огибающая кривых, представляемых общим интегралом диференциального уравнения первого порядка, есть также интеграл того же уравнения; это почти очевидно, так как в каждой точке огибающей кривой угловые коэфициенты касательных к огибающей и огибаемой кривой между собою равны. Отсюда можно также вывести правило для получения особого интеграла из самого диференциального уравнения. В самом деле, рассмотрим сначала какую-нибудь точку M, близкую к огибающей кривой; через эту точку M проходят две весьма близких между собою интегральных кривых, и угловые коэфициенты касательных к этим обеим кривым также весьма мало разнятся между собою. Когда точка M приближается к огибающей, то обе касательные в пределе сливаются друг с другом, и уравнение (41) имеет двойной корень y' (т. I, § 198).

Итак, мы видим, что для уравнения первого порядка могут представиться два существенно различных случая, смотря по тому, представляет ли кривая (γ) место точек возврата интегральных кривых, или она есть особый интеграл. Естественно спросить себя, какой же из этих двух случаев надо рассматривать как *нормальный*. Нетрудно убедиться, что нормальным является первый случай. В самом деле, кривая (γ) есть также огибающая кривых, представляемых уравнением $F(x, y, a)=0$, получающимся из (41) посредством замены производной y' параметром a. Если бы диференциальное уравнение (41) имело особый интеграл, каков бы ни был многочлен F, то отсюда мы пришли бы к явно неверному выводу, что в каждой точке огибающей семейства алгебраических кривых угловой коэфициент касательной равен значению параметра, соответствующему той огибаемой кривой, которая касается в этой точке огибающей. Если это условие удовлетворяется для какого-нибудь семейства кривых, то достаточно изменить параметр (полагая, например, $a=a'+\varepsilon$), чтобы это условие перестало удовлетворяться. Следовательно, если мы имеем уравнение первого порядка, в котором коэфициенты в F взяты произвольно, а не уравнение, полученное из другого как результат исключения произвольного постоянного, то случаи, когда особый интеграл существует, должны быть рассматриваемы как *исключения*. Если этот результат мог прежде казаться некоторым математикам парадоксальным, то это, без сомнения, происходило от того, что до работ Коши изучали, главным образом, такие уравнения, общий интеграл которых состоит из алгебраических кривых. Так как семейство алгебраических кривых имеет, вообще, огибающую кривую, то казалось вполне естественным распространить заключение на интегральные кривые любого диференциального уравнения первого порядка; но мы только что видели, что такое обобщение неверно*. Впрочем, даже и в том случае, когда семейство плоских кривых, зависящих от переменного параметра, имеет огибающую, разыскивая эту огибающую, мы, как известно, вместе с тем получаем место особых точек (т. I. § 198 и 199).

434. Примеры. Различные замечания. 1. Рассмотрим уравнение

$$y'^2+2xy'-y=0. \tag{50}$$

Оба значения для y' равны между собою во всех точках параболы $y+x^2=0$, и этот двойной корень равен $-x$, тогда как угловой коэфициент касательной к параболе есть $-2x$. Следовательно, парабола не есть особый интеграл; покажем, что она представляет место точек возврата интегральных кривых. Уравнение (50) есть уравнение Лагранжа; применяя к нему общий метод (§ 370), мы найдем, что координаты x и y точек интегральной кривой выражаются через переменный параметр p формулами:

$$x=\frac{C}{p^2}-\frac{2p}{3}, \quad y=\frac{2C}{p}-\frac{p^2}{3}. \tag{51}$$

Это — уникурсальные кривые четвертого порядка; при значениях параметра, которые представляют корни уравнения $p^3+3C=0$, мы имеем $\frac{dx}{dp}=\frac{dy}{dp}=0$. Следовательно, каждая из этих кривых имеет три точки возврата, и мы получим место этих точек, исключая p и C из уравнений (51) и соотношения $p^3=-3C$, что действительно приводит к параболе $y+x^2=0$.

2. Рассмотрим уравнение Эйлера $Xy'^2=Y$ (§ 375); оба значения y' равны между собою во всех точках каждой из восьми прямых, представляемых уравнением $XY=0$. Эти восемь прямых суть особые решения, и действительно, они образуют огибающую кривых, представляемых общим интегралом.

3. Чтобы решить вопрос, имеет ли данное уравнение особый интеграл, можно воспользоваться следующим методом. Если особый интеграл существует, то, как мы видели, он удовлетворяет уравнениям

$$F(x,\ y,\ y')=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=0,$$

а следовательно, и уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

---

* В теории огибающих кривых содержится предположение, что вблизи системы решений $x_0,\ y_0,\ a_0$ уравнений $f(x,y,a)=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ функция f и $\frac{\partial f}{\partial a}$ вместе со своими частными производными непрерывны, так что к функциям x и y от a, определяемым этими двумя уравнениями, можно применить рассуждения, прилагаемые к неявным функциям. Но, хотя мы знаем, что, если дано диференциальное уравнение первого порядка, то оно имеет бесконечное множество интегралов, зависящих от произвольного постоянного и представляемых в некоторой области уравнением $\varphi(x,\ y,\ C)=0$, но ниоткуда не следует, что эта функция $\varphi(x, y, C)$ удовлетворяет предыдущим условиям. Мы можем даже утверждать, что, вообще, этого не будет.

которое получим, диференцируя первое соотношение. Обратно, предположим, что во всех точках некоторой кривой (γ) уравнения

$$F(x, y, m) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} m = 0 \tag{52}$$

имеют общее решение для m. Вдоль кривой (γ) x, y и m суть функции одного параметра, удовлетворяющие соотношениям (52). Следовательно, между их диференциалами есть соотношение:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial m} dm = 0,$$

и и, принимая во внимание уравнения (52):

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(m - \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Следовательно, если $\frac{\partial F}{\partial y}$ не равно нулю во всех точках кривой (γ), то мы имеем $y' = m$, и эта кривая есть особый интеграл*. Если же $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, то должно быть также $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, и необходимо убедиться непосредственным вычислением, представляет ли кривая (γ) интеграл.

Это замечание применимо, между прочим, к уравнению Клеро:

$$F(x, y, y') = f(y', y - xy') = 0.$$

Положим для краткости $u = y - xy'$; три уравнения, которые должны быть совместимы, здесь будут:

$$f(y', y - xy') = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} - x\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(-y') + y'\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

и они приводятся только к двум первым. Следовательно, уравнение Клеро имеет особый интеграл, и мы его получим, исключая y' из этих двух соотношений.

4. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 - 2x(x + yy') + \frac{1}{m^2}(x + yy')^2 + K = 0,$$

общий интеграл которого состоит из кругов, дважды касающихся кривой второго порядка

$$x^2(1 - m^2) + y^2 + K = 0$$

и имеющих центры на оси Ox. Эта кривая второго порядка есть особое решение. Но, кроме того, в каждой точке оси Ox оба значения для y' обращаются в бесконечность. Однако эта прямая не есть место точек возврата; через каждую ее точку проходят две интегральных кривых, касающихся в ней между собою, причем их общая касательная параллельна оси Oy.

5. Чтобы интеграл Г был особым интегралом, недостаточно, чтобы во всех точках этой кривой уравнение (41) имело двойной корень; необходимо еще, чтобы этот двойной корень был равен угловому коэфициенту касательной к Г. Рассмо-

* См. статью Дарбу в *Bulletin des Sciences mathématiques*, т. IV, 1873, стр. 158—176.

трим, например, циссоиды, представляемые уравнением $(y-2a)^2(x-a)-x^3=0$. Прямая $x=0$ есть место точек возврата этих кривых, и в то же время это есть частный интеграл, соответствующий $a=0$. Можно убедиться, что во всякой точке этого интеграла соответствующее диференциальное уравнение имеет двойной корень $y'=0$ и, кроме того, еще бесконечно большой корень; следовательно, прямая $x=0$ не есть особый интеграл.

6. Пусть будет S поверхность, имеющая области, где она выпукла, и области, где она седлообразна. Эти области разделены кривой Γ, — местом параболических точек, во всех точках которой диференциальное уравнение асимптотических линий (т. I, § 237)

$$Odu^2+2D'dudv+D''dv^2=0$$

имеет для $\frac{dv}{du}$ двойной корень; этот двойной корень определяет направление единственной асимптотической касательной. Если касательная к кривой Γ не совпадает с этою асимптотическою касательною (это — общий случай), то кривая Γ есть место точек возврата асимптотических линий. Но, если асимптотическая касательная в каждой точке M кривой Γ совпадает с касательной к Γ, то кривая Γ есть огибающая асимптотических линий. В этом случае кривая Γ есть одновременно и асимптотическая линия и линия кривизны, так как касательная к ней есть также ось индикатрисы. Следовательно, нормали к поверхности S вдоль кривой Γ образуют развертывающуюся поверхность, и, так как нормаль к S есть и бинормаль к Γ, как к асимптотической линии, то отсюда следует, что бинормали кривой Γ, а следовательно, и ее главные нормали, образуют развертывающуюся поверхность; следовательно, Γ есть плоская кривая (т. I, § 225), и рассматриваемая поверхность S касается плоскости P кривой Γ вдоль этой кривой.

Рассмотрим, например, поверхность вращения. Чтобы один из главных радиусов кривизны в точке M этой поверхности был равен бесконечности, необходимо, чтобы или радиус кривизны меридиана был равен бесконечности, или касательная к этому меридиану была перпендикулярна к оси вращения. В первом случае кривая Γ есть параллель, каждая точка которой есть точка перегиба для меридиана; асимптотическая касательная перпендикулярна к касательной кривой Γ, и эта параллель есть место точек возврата асимптотических линий. Напротив, во втором случае, кривая Γ есть параллелль, во всех точках которой поверхность касается плоскости этой параллели, как в торе; кривая Γ есть огибающая асимптотических линий.

Все эти результаты нетрудно проверить непосредственно на диференциальном уравнении асимптотических линий поверхностей вращения в полярных координатах.

435. Геометрическое истолкование. Предыдущие исследования можно представить в несколько ином виде, на который мы здесь кратко укажем. При этом мы попрежнему будем пользоваться геометрическими представлениями, хотя рассуждения нетрудно распространить и на область комплексных переменных.

Мы уже указывали (§ 369), что интегрирование диференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y')=0$ равносильно определению кривых Γ, лежащих на поверхности S, представляемой уравнением

$$F(x, y, z)=0, \tag{53}$$

для которых имеет место соотношение $dy-zdx=0$. Проекция c на плоскость xOy кривой Γ, лежащей на поверхности S и удовлетворяющей предыдущему условию, есть интегральная кривая данного диференциального уравнения, и обратно. Мы будем предполагать в дальнейшем исследовании, что эта поверхность S не имеет иных особенностей, кроме двойных линий, вдоль которых пересекаются две полости поверхности, имеющие различные касательные плоскости. Вместо того чтобы рассматривать кривые c, лежащие на плоскости xOy, мы рассмотрим кривые Γ на самой поверхности S.

Рассмотрим сначала точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности S, не лежащую на двойной кривой, причем касательная плоскость в точке M_0 не параллельна оси Oz. Касательная к кривой Γ, проходящей через точку M_0, лежит в касательной плоскости в этой точке

$$(X-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+(Y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0+(Z-z_0)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0, \tag{54}$$

а также в плоскости

$$Y - y_0 - z_0 (X - x_0) = 0, \tag{55}$$

так как должно быть: $dy - zdx = 0$. Эти две плоскости различны, так как $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$ по предположению не равно нулю; следовательно, эти плоскости пересекаются вдоль прямой, *не параллельной* оси Oz. Таким образом через точку M_0 проходит одна и только одна кривая Γ, касательная к которой не параллельна оси Oz; проекция c этой кривой на плоскость xOy проходит через точку m_0 — проекцию точки M_0, и m_0 есть обыкновенная точка кривой c. Если точка M_0 лежит на двойной кривой поверхности S, то можно применить предыдущее рассуждение к каждой из обеих полостей, если только ни одна из касательных плоскостей в точке M_0 не параллельна оси Oz; следовательно, через точку M_0 проходят две кривых Γ, соответствующих двум полостям поверхности S. Остается исследовать случай, когда точка M_0 лежит на той кривой D поверхности S, для точек которой одновременно $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Мы предположим, что эта кривая D не есть двойная кривая; тогда это есть место точек поверхности S, в которых касательная плоскость параллельна оси Oz, причем в точке M_0 по крайней мере одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ отлична от нуля. В этом случае обе плоскости (54) и (55) параллельны оси Oz, и их линия пересечения также параллельна оси Oz' если только обе плоскости не сливаются между собою, т. е. если не будет

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + z_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0. \tag{56}$$

Устраним пока из рассмотрения этот последний случай. Касательная к кривой Γ, проходящей через точку M_0, параллельна оси Oz, но сама эта кривая Γ) не представляет в точке M_0 никакой особенности. Чтобы в этом убедиться, заменим систему двух уравнений

$$F(x, y, z) = 0, \quad dy = zdx \tag{57}$$

системою двух совместных диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dy}{z\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dz}{\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{58}$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Системы (57) и (58) равносильны; в самом деле, из уравнений (58) мы имеем интегрируемое сочетание $dF = 0$, и следовательно, $F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Так как по предположению $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$, а $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + z_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$ не равно нулю, то из уравнений (58) мы получим разложения разностей $x - x_0$ и $y - y_0$ по степеням $z - z_0$, начинающиеся с членов не ниже второй степени:

$$x - x_0 = \alpha_2 (z - z_0)^2 + \ldots, \quad y - y_0 = \beta_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

Следовательно, точка M_0 есть обыкновенная точка кривой Γ, проходящей через M_0, но точка m_0 — проекция точки M_0 на плоскость xOy — есть точка возврата (вообще первого вида) для кривой c, — проекции кривой Γ. Это замечание вытекает из того общего свойства, в котором нетрудно убедиться, что проекция кривой двойной кривизны на плоскость, параллельно касательной к этой кривой в точке M, имеет точку возврата в точке m — проекции точки M. Пусть будет d проекция на плоскость xOy кривой D; тогда мы приходим к полученному выше результату: кривая d есть место точек возврата интегральных кривых. Этот метод имеет то преимущество, что из него видно, как рассматриваемая особенность исчезает при переходе от плоскости xOy к поверхности S.

Но результат будет иным, если соотношение (56) удовлетворяется во всех точках кривой D. Тогда обе плоскости (54) и (55) сливаются, и мы имеем случай, когда существует особый интеграл. При этом через каждую точку кривой D

проходят, вообще, две кривых Г — сама кривая D и некоторая другая кривая, проекция которой на плоскость xOy касается особого интеграла D.

436. Особые интегралы системы диференциальных уравнений. Теория особых интегралов распространяется на системы диференциальных уравнений первого порядка, а следовательно, и на системы высших порядков. Мы рассмотрим только систему двух уравнений первого порядка (что включает случай одного уравнения второго порядка), причем пойдем путем, обратным предыдущему, т. е. рассмотрим сначала систему диференциальных уравнений, получающуюся от исключения постоянных *.

Пусть будут

$$F(x, y, z; a, b) = 0, \quad \Phi(x, y, z; a, b) = 0 \tag{59}$$

уравнения семейства плоских кривых или кривых двойной кривизны Г, зависящих от двух произвольных параметров a и b; такое семейство называется *конгруэнцией* кривых. Для определенности мы предположим, что функции F и Φ суть многочлены; тогда кривые конгруэнции будут алгебраическими. Обобщим сначала теоремы, доказанные для конгруэнции прямых (т. I, § 230). Если мы установим между a и b произвольное соотношение $b = \varphi(a)$, то получим бесконечное множество кривых Г, зависящих только от одного переменного параметра a. Вообще, эти кривые не имеют огибающей кривой; в самом деле, для того чтобы они имели огибающую, необходимо, чтобы четыре уравнения (59) и (60):

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0 \tag{60}$$

имели общие решения для x, y, z (т. I, § 205).

Исключая x, y, z из этих четырех уравнений, мы придем к одному соотношению между a, b и $\frac{db}{da}$:

$$\Pi\left(a\, b, \frac{db}{da}\right) = 0, \tag{61}$$

т. е. к диференциальному уравнению первого порядка. Если мы возьмем за соотношение $b = \varphi(a)$ интеграл этого уравнения, то кривые Г не только образуют некоторую поверхность Σ, но и будут вместе с тем касаться некоторой кривой C, расположенной на Σ; мы попрежнему будем называть эту кривую C *ребром возврата* поверхности Σ. Если уравнение (61) — m-й степени относительно $\frac{db}{da}$, то всякая кривая Г конгруэнции принадлежит, вообще, m поверхностям, аналогичным Σ, и на каждой из этих поверхностей она касается в определенной точке соответствующего ребра возврата. Таким образом на каждой кривой Г конгруэнции находится m замечательных точек, которые называются *фокальными точками* Эти фокальные точки можно получить, не интегрируя уравнения (61). В самом деле, для этого достаточно решить четыре уравнения (59) и (60) относительно x, y, z $\frac{db}{da}$. Прежде всего составляем соотношение (61), из которого находим $\frac{db}{da}$; далее, исключая $\frac{db}{da}$ из уравнений (60), мы получим новое соотношение:

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(a, b)} = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \Phi}{\partial b} - \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \tag{62}$$

и из этого соотношения и из двух уравнений (59) кривой Г мы можем по данным a и b определить координаты фокальных точек.

Место фокальных точек есть *фокальная поверхность* конгруэнции; мы получим уравнение этой поверхности, исключая a и b из трех соотношений (59) и (62). Фокальная поверхность есть вместе с тем и место ребер возврата C поверх-

---

* См. мемуар Гурса, Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées (*American Journal of Mathematics*, т. XI).

ностей Σ, так как каждая точка кривой C есть фокальная точка для кривой конгруэнции, касающейся C в этой точке. Отсюда следует, что всякая кривая Γ конгруэнции касается m полостей фокальной поверхности в m соответствующих фокальных точках, так как в каждой из этих точек она касается кривой C, лежащей на этой фокальной поверхности. Все эти свойства представляют очень большую аналогию с свойствами конгруэнции прямых. Вообще, если многочлены F и Φ произвольны, то m полостей фокальной поверхности представляются одним уравнением, но может также случиться, что это уравнение распадается на несколько различных уравнений. В некоторых частных случаях некоторые из полостей фокальной поверхности могут обращаться в кривые; тогда соответствующие ребра возврата C обращаются в точки.

Из этих свойств можно получить следующие результаты для диференциальных уравнений. Кривые Γ суть интегральные кривые системы диференциальных уравнений, которые получим, исключая постоянные a и b из уравнений (59) и уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial z}z'=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}y'+\frac{\partial \Phi}{\partial z}z'=0, \tag{63}$$

получающихся из последних диференцированием.

Пусть будет

$$\Psi(x, y, z, y', z')=0, \quad \Psi_1(x, y, z, y', z')=0 \tag{64}$$

эта система диференциальных уравнений. Формулы (59) представляют общий интеграл этой системы, так как по предположению можно взять постоянные a и b таким образом, чтобы кривая Γ проходила через любую точку пространства с координатами x_0, y_0, z_0. Если через эту точку проходят n кривых Γ, то уравнения (59) определят n систем значений для a и b. Далее, из уравнений (63) мы найдем y' и z', и мы видим, что для точки (x_0, y_0, z_0) уравнения (64) определяют n систем значений для y' и z'. Но ребра возврата C суть также интегральные кривые уравнений (64), так как в каждой точке кривой C значения переменных x, y, z, y', z' одинаковы как для C, так и для кривой Γ, касающейся C в этой точке. Следовательно, уравнения (64) имеют, кроме кривых Γ, также бесконечное множество других интегралов, не содержащихся в формулах (59), которые мы получим, интегрируя уравнение первого порядка (61). Это *особые интегралы* системы.

Нетрудно видеть, что для существования фокальных поверхностей нет необходимости, чтобы кривые Γ были алгебраическими. Достаточно, чтобы вблизи системы решений $(x_0, y_0, z_0, a_0, b_0)$ трех уравнений

$$F(x, y, z, a, b)=0, \ \Phi(x, y, z, a, b)=0, \ \frac{D(F, \Phi)}{D(a, b)}=0 \tag{65}$$

неявные функции x, y, z параметров a и b, определяемые этими тремя уравнениями и обращающиеся в x_0, y_0, z_0 при $a=a_0$, $b=b_0$, были непрерывны и имели в этой области непрерывные производные. В самом деле, пусть будут

$$x=f_1(a, b), \quad y=f_2(a, b), \quad z=f_3(a, b) \tag{66}$$

эти три функции; полость фокальной поверхности, проходящая через точку с координатами (x_0, y_0, z_0), представится вблизи этой точки формулами (66), причем параметры a и b имеют значения, близкие к a_0 и b_0. Отсюда нетрудно вывести уравнение касательной плоскости к фокальной поверхности. В самом деле, если точка x, y, z описывает какую-нибудь линию, лежащую на этой поверхности, то x, y, z, a, b будут функциями одного независимого переменного, удовлетворяющими уравнениям (65); следовательно, их диференциалы удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial a}\delta a+\frac{\partial F}{\partial b}\delta b=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z+\frac{\partial \Phi}{\partial a}\delta a+\frac{\partial \Phi}{\partial b}\delta b=0.$$

Принимая во внимание последнее из уравнений (65), мы можем исключить δa и δb, причем придем к новому соотношению:

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, b)} \delta x + \frac{D(F, \Phi)}{D(y, b)} \delta y + \frac{D(F, \Phi)}{D(z, b)} \delta z = 0. \tag{67}$$

Достаточно заменить здесь δx, δy, δz соответственно через $X - x_0$, $Y - y_0$, $Z - z_0$, чтобы иметь уравнение касательной плоскости к фокальной поверхности; нетрудно убедиться, что эта плоскость проходит через касательную прямую к кривой Г, так как для кривой Г мы из (65) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\delta y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta z = 0.$$

Умножая оба уравнения соответственно на $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$, мы приходим к уравнению (67). Таким образом при выводе свойств фокальной поверхности нужно только предположение, что к уравнениям (65) можно применить теорию неявных функций и, в частности, что функции F, Φ непрерывны вместе со своими частными производными вблизи системы решений $(x_0, y_0, z_0, a_0, b_0)$. Это, наверное, осуществляется, если F и Φ многочлены, но ясно, что это имеет место и для многих других функций. Заметим также, что, если кривые Г имеют особые точки, то место этих особых точек составляет часть фокальной поверхности. Это предложение доказывается так же, как аналогичное предложение для плоских кривых (т. I, § 198).

Рассмотрим теперь этот же вопрос с противоположной точки зрения. Пусть будет дана система двух диференциальных уравнений первого порядка вида (64): найдем, имеет ли эта система особые интегралы, причем мы предположим, что Ψ и Ψ_1 — многочлены. Пусть будет M_0 какая-нибудь точка пространства с координатами (x_0, y_0, z_0); если мы заменим в уравнениях (64) x, y, z соответственно через x_0, y_0, z_0, то эти уравнения будут иметь, вообще, несколько систем решений. Пусть будет y_0', z_0' одна из этих систем; предположим сначала, что для этой системы определитель Якоби $\frac{D(\Psi, \Psi_1)}{D(y', z')}$ не равен тождественно нулю. Тогда мы получим из уравнений (64) для y' и z' функции, правильные в области точки (x_0, y_0, z_0)

$$y' = y_0' + \alpha(x - x_0) + \ldots, \quad z' = z_0' + \alpha_1(x - x_0) + \ldots$$

и обращающиеся соответственно в y_0' и z_0' при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Следовательно, уравнения (64) имеют интегральную кривую, проходящую через точку M_0 и касающуюся прямой, представляемой уравнением $Y - y_0 = y_0'(X - x_0)$, $Z - z_0 = z'_0(X - x_0)$, и эта кривая входит в состав семейства интегралов, зависящих от двух произвольных параметров (§ 387). Но результат будет иной, если $\frac{D(\Psi, \Psi_1)}{D(y_0', z_0')} = 0$; последнее равенство может иметь место только в том случае, если координаты (x_0, y_0, z_0) удовлетворяют соотношению:

$$R(x, y, z) = 0, \tag{68}$$

которое получим, исключая y', z' из трех уравнений:

$$\Psi = 0; \quad \Psi_1 = 0, \quad \frac{D(\Psi, \Psi_1)}{D(y', z')} = 0. \tag{69}$$

Уравнение (68) представляет некоторую поверхность S, и, как мы только что видели, ни одна интегральная кривая, не лежащая на поверхности S, не может быть особым интегралом.

Если точка M_0 лежит на поверхности S, то три уравнения (69) имеют для этой точки общие решения $y'=y_0'$, $z'=z_0'$. Если прямая D, представляемая уравнением

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{y_0'}=\frac{Z-z_0}{z_0'}, \tag{70}$$

не есть касательная к поверхности S (как это и будет в общем случае), то существует интегральная кривая, проходящая через точку M_0 и касающаяся прямой D, и, как это было доказано выше, точка M_0 есть, вообще, точка возврата этой кривой. Весьма важно заметить, что эта интегральная кривая не может лежать на поверхности S, так как касательная к этой кривой не лежит в касательной плоскости к поверхности S. Следовательно, чтобы существовали особые интегралы, необходимо, чтобы в каждой точке поверхности S соответствующая прямая D лежала в касательной плоскости к этой поверхности. Это условие — достаточное, так как в этом случае через каждую точку поверхности S проходит кривая, лежащая на этой поверхности и касающаяся прямой D. Эти кривые определяются диференциальным уравнением первого порядка и, действительно, представляют особые интегралы уравнения (64), так как в каждой их точке значения y' и z' образуют *кратную* систему решений уравнений (64).

Примеры. 1. Рассмотрим систему совместных уравнений:

$$y-xy'=0,\quad x^2z'^2=x^2+y^2-1. \tag{71}$$

Оба значения для z' равны между собою во всех точках цилиндра $x^2+y^2-1=0$, и этому двойному корню соответствует направление перпендикуляра, опущенного из точки (x, y) на ось Oz.

Так как это направление не лежит в касательной плоскости к цилиндру, то здесь нет особых интегралов. На этом примере нетрудно убедиться, что цилиндр есть место точек возврата интегральных кривых, так как общий интеграл системы (71) представится формулами:

$$y=C_1x,\quad z=\sqrt{x^2+y^2-1}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2-1}+C_2.$$

2. Возьмем систему диференциальных уравнений вида:

$$F(y-xy',\ z-xz',\ y',\ z')=0,\quad \Phi(y,\ z'-xz',\ y',\ z')=0, \tag{72}$$

которую можно рассматривать как обобщение уравнения Клеро. Полагая $u=y-xy'$, $v=z-xz'$, имеем из предыдущих соотношений:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}-x\frac{\partial F}{\partial u}\right)y''+\left(\frac{\partial F}{\partial z'}-x\frac{\partial F}{\partial v}\right)z''=0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}-x\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)y''+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z'}-x\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)z''=0.$$

Мы можем удовлетворить последним уравнениям, полагая $y''=0$, $z''=0$ или предполагая, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}-x\frac{\partial F}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z'}-x\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial z'}-x\frac{\partial F}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}-x\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)=0 \tag{73}$$

При первом предположении y' и z' равны постоянным a и b; таким образом кривые, составляющие общий интеграл, суть *лучи конгруэнции*, представляемой двумя уравнениями:

$$F(y-ax,\ z-bx,\ a,\ b)=0,\quad \Phi(y-ax,\ z-bx,\ a,\ b)=0.$$

Здесь есть и особые интегралы, так как лучи конгруэнции касаются обеих полостей фокальной поверхности; эти особые интегралы суть ребра возврата развертывающих поверхностей конгруэнции и получаются интегрированием диференциального уравнения первого порядка. Мы получим уравнение фокальной поверхности, исключая y' и z' из соотношений (72) и (73).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Найти, имеются ли особые интегралы у следующих диференциальных уравнений:

$$y'^2+\left(x+\frac{x^3}{2}\right)y'-(1+x^2)y-\frac{x^4}{16}=0.$$

[Серре.]

$$xy^2y'^2-y^3y'+a^2x=0.$$

[Шлёмильх.]

$$y'^2-2x\sqrt{y}\,y'+4y\sqrt{y}=0.$$

[Буль.]

$$(xy'-y)^2-2xy(1+y'^2)=0.$$

[Уэль.]

$$2x(1+y'^2)-(xy'+y)^2=0.$$

[Муаньо.]

2*. Доказать, что уравнение $H(x, y)=0$, получающееся от исключения y' из двух соотношений $F(x, y, y')=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0$, представляет место точек перегиба интегральных кривых.

Пользуясь преобразованием взаимными полярами, вывести отсюда теорему § 433 относительно места точек возврата интегральных кривых.

[Дарбу, *Bulletin des Sciences mathématiques*, т. IV, 1873.]

3. Найти особые интегралы системы диференциальных уравнений

$$y=xy'+y'^2+z',\quad z=z'x+y'z'.$$

[Серре.]

4. Исследовать, имеет ли диференциальное уравнение второго порядка

$$(1+x^2)y''^2-\left(2xy'+\frac{x^2}{2}\right)y''+y'^2+xy'-y=0$$

особые интегралы, и найти эти интегралы.

[Лагранж, Oeuvres, т. X., стр. 233.]

[Заменить это уравнение системою двух уравнений первого порядка.]

5*. Дано диференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'')=0;$$

исключая y'' из этого уравнения и из соотношения $\frac{\partial F}{\partial y''}=0$, мы получим диференциальное уравнение первого порядка $P(x, y, y')=0$, интегралы которого обладают, *вообще*, следующим свойством: через каждую точку M любой из этих интегральных кривых C проходит интегральная кривая уравнения $F=0$, имеющая в точке M точку возврата второго вида, причем касательною в точке возврата служит касательная к кривой C в точке M. [*American Journal of Mathematics*, т. XI, стр. 364.]

6. Вывести свойства функции e^x, исходя из общего интеграла диференциального уравнения $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, представленного в алгебраическом виде $xy=C$.

Та же задача для функции $\operatorname{tg} x$; сначала для этого найти алгебраический общий интеграл диференциального уравнения

$$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0.$$

7*. Дано диференциальное уравнение первого порядка $y'=R(x, y)$ где $R(x, y)$ — рациональная функция от y, коэфициенты которой суть аналитические функции от x; предположим, что уравнение имеет общий интеграл вида:

$$\frac{\varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\ldots+\varphi_n(x)}{\psi_0(x)y^n+\psi_1(x)y^{n-1}+\ldots+\psi_n(x)}=F(x, y)=C. \qquad (1)$$

Доказать, что, сделав подстановку вида $u = R_1(x, y)$, где R_1 есть рациональная функция от y, можно привести это уравнение к уравнению Риккати.

[Пенлеве (Painlevé).]

Ответ. Уравнение (I) можно представить в виде:

$$y^n + [A_1(x) + B_1(x)\,u]y^{n-1} + \ldots + [A_{n-1}(x) + B_{n-1}(x)\,u]y + u = 0,$$

где $u = \dfrac{\varphi_n - C\psi_n}{\varphi_0 - C\psi_0}$, причем функции A_i, B_i известны, и u удовлетворяет уравнению Риккати.

8. Доказать, что, разыскивая функцию $f(\alpha)$ под тем условием, чтобы огибающая прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha = f(\alpha)$ была данною кривою C, мы придем к дифеференциальному уравнению, общий интеграл которого состоит из прямых, проходящих через постоянную точку кривой C. Действительное решение задачи представляет особый интеграл.

ГЛАВА XXII.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

В этой главе, посвященной теории уравнений с частными производными первого порядка, мы имеем в виду, главным образом, приведение интегрирования такого уравнения к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений. Хотя в большинстве случаев такое приведение и не может иметь никакого практического значения, тем не менее оно представляет большой теоретический интерес, так как позволяет оценить степень трудности задачи. Хотя во всех последующих рассуждениях не содержится требования, чтобы рассматриваемые интегралы были аналитическими, но, за исключением случаев, которые будут указаны отдельно, мы ограничимся только такими интегралами.

I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

437. Общий способ. Мы уже видели, что интегрирование однородного уравнения

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и интегрирование системы диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{2}$$

— две равносильные задачи (§ 392). Если $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ суть $n-1$ первых независимых интегралов системы (2), то общий интеграл уравнения (1) есть произвольная функция

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$$

этих $n-1$ интегралов.

Интеграл, удовлетворяющий условиям Коши, мы можем получить следующим образом.

Предположим, что коэфициенты X_i голоморфны в области частной системы значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, причем первый коэфициент $(X_1)_0$ не равен нулю. Так как уравнение (1) может быть решено относительно $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то к нему можно применить общую теорему (§ 386). Следовательно, существует интеграл этого уравнения, голоморфный в рассматриваемой области и обращающийся при $x_1 = x_1^0$ в заданную голоморфную функцию $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ от $(n-1)$ переменных $x_2, \ldots, x_n$. Чтобы получить этот интеграл, представим систему (2) в виде:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2}{X_1}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n}{X_1}; \tag{3}$$

так как правые части уравнений (3) голоморфны в области системы значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, то существует система голоморфных интегралов, принимающих при $x_1 = x_1^0$ заданные значения $C_2, C_3, \ldots, C_n$, если только модули $|C_i - x_1^0|$ не превосходят некоторой границы; эти интегралы суть голоморфные функции переменного x_1 и параметров $C_2, C_3, \ldots, C_n$ (§ 387) и могут быть представлены разложениями вида:

$$x_i = C_i + (x_1 - x_1^0) P_i(x_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Решая эти $n-1$ уравнений относительно C_i, мы получим систему $n-1$ первых интегралов уравнений (2) в виде разложений:

$$C_i = x_i + (x_1 - x_1^0) Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{5}$$

причем функции Q_i голоморфны. Ясно, что функция $\varphi(C_2, C_3, \ldots, C_n)$ этих $n-1$ первых интегралов голоморфна в области точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и при $x_1 = x_1^0$ обращается в $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим теперь линейное уравнение:

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} - R = 0, \tag{6}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ могут зависеть как от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так и от неизвестной функции z. Это уравнение можно привести к виду (1) следующим приемом, которым часто пользуются в теории уравнений в частных производных. Вместо того, чтобы непосредственно искать неизвестную функцию z, определим ее как неявную функцию уравнением

$$V(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{7}$$

причем искомой функцией будет функция V от $n+1$ переменных $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Диференцируя соотношение (7), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0;$$

заменяя в уравнении (6) производные $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ их значениями, выведенными из предыдущих соотношений, будем иметь:

$$F(V) = P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Это новое уравнение имеет вид (1), и его интегрирование равносильно интегрированию системы

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}. \tag{9}$$

Таким образом мы получаем следующее предложение: *если* u_1, $u_2, \ldots, u_n$ *суть* n *первых независимых интегралов системы* (9), *то всякая функция* z *от* n *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *определяемая соотношением вида*:

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \tag{10}$$

где Φ *есть произвольная функция от* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *есть интеграл уравнения* (6).

Отсюда еще нельзя заключить, что таким образом мы получим все интегралы уравнения (6). В самом деле, чтобы неявная функция, определяемая соотношением (7), была интегралом, нет необходимости, чтобы было тождественно $F(V)=0$; достаточно, чтобы условие $F(V)=0$ было следствием уравнения $V=0$. Если, например, мы возьмем для V интеграл уравнения вида $F(V)=KV$, где K есть постоянный множитель, отличный от нуля, то очевидно, что соотношение $V=0$ определит интеграл уравнения (6). Следовательно, необходимо рассмотреть, может ли соотношение (10) дать все интегралы уравнения (6). Чтобы доказать, что кроме особых случаев, которые будут точно указаны ниже, соотношение (10) действительно определяет *все* интегралы данного уравнения, заменим в n функциях $u_1, u_2, \ldots, u_n$ переменное z интегралом уравнения (6); мы получим функции $U_1, U_2, \ldots; U_n$ от n переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Если мы докажем, что определитель Якоби этих n функций тождественно равен нулю, то тем самым мы докажем, что существует соотношение

$$\phi(U_1, U_2, \ldots, U_n)=0,$$

и следовательно, рассматриваемый интеграл удовлетворяет соотношению вида (10), где произвольная функция Φ заменена через ϕ. Вычислим этот определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial u_1}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial u_n}{\partial z} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial u_n}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial u_n}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

Представив этот определитель как сумму частных определителей и замечая, что некоторые из них будут иметь два одинаковых столбца, получим:

$$\Delta=\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}+\sum_{i=1}^{i=n} p_i\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)}. \tag{11}$$

Но $u_1, u_2, \ldots, u_n$ суть n первых интегралов системы (9); поэтому

$$P_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + R \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из этих n линейных и однородных уравнений относительно $n+1$ функций $P_1, \ldots, P_n, R$ имеем:

$$\frac{R}{\dfrac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}} = \frac{-P_i}{\dfrac{D(u_1, u, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)}} = M, \quad (12)$$

где M есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, которую всегда можно вычислить, если известны первые интегралы $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Внося в соотношение (11) значения определителей, выведенные из уравнений (12), получим:

$$M\Delta = R - P_1 p_1 - P_2 p_2 - \ldots - P_n p_n. \quad (12\text{bis})$$

Если z есть интеграл уравнения (6), то правая часть последнего равенства равна нулю, и следовательно, этот интеграл удовлетворяет одному из двух условий $\Delta = 0$ или $M = 0$. В первом случае, как мы только что доказали, этот интеграл определяется соотношением вида (10). Что касается соотношения $M = 0$, то оно определяет одну или несколько вполне определенных неявных функций. Таким образом мы видим, что за исключением некоторых особых интегралов, не зависящих ни от одного произвольного постоянного, все интегралы уравнения (6) удовлетворяют соотношению вида (10). В последующем мы будем говорить, что соотношение (10) представляет *общий интеграл* уравнения (6).

Чтобы узнать, может ли данный интеграл удовлетворять соотношению $M = 0$, рассмотрим какую-нибудь точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ этого интеграла и предположим, что все коэфициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ голоморфны вблизи этой системы значений и не обращаются одновременно в нуль при $x_i = x_i^0$, $z = z_0$. Предположим, например, что P_1 отлично от нуля при этих значениях. В этом случае уравнение (8) можно решить относительно $\dfrac{\partial V}{\partial x_1}$, и, применяя теоремы Коши (§ 386), мы видим, что для $u_1, u_2, \ldots, u_n$ можно взять функции, голоморфные в области значений $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Но одно из уравнений (12) будет:

$$-P_1 = M \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(z, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Так как определитель, стоящий в правой части, голоморфный, и P_1 не равно нулю при $x_i = x_i^0$, $z = z_0$, то отсюда следует, что при этой системе значений M не может быть равно нулю. Так как точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_0)$ есть произвольная точка рассматриваемого интеграла, то мы заключаем, что интеграл, удовлетворяющий соотношению $M = 0$, может существовать только в двух следующих случаях:

1. Существует такая функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$, что всякая система значений переменных x_i, z, обращающая в нуль функцию V, обращает в нуль также и коэфициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$. Тогда все эти коэфициенты имеют общий множитель, и ясно, что, приравнивая этот множитель нулю, мы получим интеграл. Это — случай, не представляющий никакого интереса.

2. Предыдущие рассуждения неприменимы еще в том случае, когда интеграл, определяемый соотношением $V=0$, таков, что вблизи всякой системы значений, удовлетворяющих этому соотношению, некоторые из коэфициентов P_i, R не будут голоморфными. Этот случай может действительно иметь место, как мы в этом убедимся ниже.

438. Геометрическое истолкование. В случае уравнения с тремя переменными изложенный здесь общий метод допускает простое геометрическое истолкование. Представим это уравнение в обычных обозначениях:

$$Pp+Qq=R,\quad p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\tag{13}$$

где P, Q, R суть функции трех переменных x, y, z. Пусть будет S какая-нибудь *интегральная поверхность*; так как уравнение касательной плоскости к этой поверхности есть

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

то соотношение (13) выражает, что эта касательная плоскость проходит через прямую D, представляемую уравнениями:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}.\tag{14}$$

Таким образом задача интегрирования уравнения (13) геометрически может быть выражена следующим образом:

Для каждой точки $M(x, y, z)$ пространства дана прямая D, проходящая через эту точку и представляемая уравнениями (14). Найти такую поверхность S, чтобы касательная плоскость к этой поверхности S в каждой ее точке проходила через прямую D, соответствующую этой точке.

Если известны все поверхности, обладающие этим свойством, то тем самым мы знаем общий интеграл линейного уравнения. Три функции P, Q, R определяют тот закон, по которому изменяет свое направление прямая D, когда мы перемещаем точку M. В большинстве случаев эти три функции P, Q, R будут аналитическими функциями от x, y, z, но для последующих рассуждений достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям, указанным в теории диференциальных уравнений (§ 388 и след.).

Эта геометрическая постановка задачи приводит нас к разысканию линий Γ, которые в каждой своей точке касались бы соответствующей прямой D; эти линии Γ называются *характеристическими линиями*. Покажем сначала, что *всякая интегральная поверхность образована характеристическими линиями (характеристиками)*. В самом деле, рассмотрим такую поверхность S. В каждой точке M этой поверхности соответствующая прямая D лежит в касательной плоскости. Следовательно, можно искать такие кривые, лежащие на этой поверхности, которые в каждой своей точке касались бы соответствующей прямой D. Мы получим эти кривые, интегрируя диференциальное уравнение первого порядка (§ 378). Следовательно, через каждую точку поверхности S проходит, вообще, одна и только одна кривая, лежащая на этой поверхности и обладающая требуемым свойством. Ясно, что эти кривые — характеристические; таким образом, предложение доказано. Обратное предложение почти очевидно. Если поверхность есть место характеристик, то касательная плоскость в любой точке этой поверхности содержит касательную прямую к характеристике, лежащей на поверхности и проходящей через эту точку, т. е. прямую D. Таким образом рассматриваемая задача приводится к определению характеристических линий.

Из самого определения характеристических линий следует, что их диференциальные уравнения суть

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}; \tag{15}$$

следовательно, через каждую точку пространства проходит, вообще, одна и только одна характеристика, касающаяся соответствующей прямой D. Предположим, что мы проинтегрировали уравнения (15); пусть будут u и v два независимых первых интеграла этой системы. Общий интеграл представится формулами:

$$u(x,\ y,\ z)=a,\quad v(x,\ y,\ z)=b, \tag{16}$$

где a и b — произвольные постоянные. Следовательно, характеристические кривые, завися от двух параметров, образуют *конгруэнцию*. Чтобы получить поверхность, образуемую кривыми этой конгруэнции, должно установить между параметрами a и b произвольное соотношение, например $\varphi(a,\ b)=0$; тогда соответствующая интегральная поверхность представится уравнением $\varphi(u,\ v)=0$. Это тот самый результат, который мы получаем из общего метода предыдущего параграфа, так как здесь u и v суть два независимых интеграла уравнения:

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение $px+qy=mz$. Диференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{mz}$$

имеют два первых интеграла $\frac{y}{x}=a$, $\frac{z}{x^m}=b$, и общее уравнение интегральных поверхностей есть:

$$z=x^m f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Если $m=1$, то характеристики суть прямые, проходящие через начало координат, и интегральные поверхности суть конусы с вершиною в начале координат. Если $m=0$, то характеристики суть прямые, параллельные плоскости xOy и пересекающие ось Oz; интегральные поверхности суть коноиды.

2. Рассмотрим уравнение $py-qx+a=0$. Диференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-a}$$

допускают две интегрируемых комбинации:

$$x\,dx+y\,dy=0,\quad dz-a\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0,$$

и характеристики представятся уравнениями:

$$x^2+y^2=C_1,\quad z-a\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=C_2.$$

Это — винтовые линии с ходом, равным $2\pi a$, расположенные на прямом круговом цилиндре с осью Oz. Общий интеграл состоит из геликоидов с произвольным профилем (мы предполагаем, что система координат — прямоугольная) В частном случае, когда $a=0$, характеристики суть круги с центрами на оси Oz, плоскости которых параллельны плоскости xOy; интегральные поверхности суть поверхности вращения с осью Oz.

3. Ортогональные траектории. Пусть будет

$$F(x,\ y,\ z)=C \tag{17}$$

уравнение такого семейства поверхностей Σ, зависящих от произвольного параметра C, что через каждую точку пространства (или, по крайней мере, части пространства) проходит одна и только одна из этих поверхностей. Найдем другую поверхность S, представляемую уравнением:

$$z=\varphi(x,\ y),$$

которая пересекала бы ортогонально в каждой своей точке поверхность Σ, проходящую через эту точку. Так как направляющие косинусы нормалей к обеим поверхностям пропорциональны соответственно $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ для Σ и p, q, -1 для S, то условие ортогональности приводит к линейному уравнению:

$$p\frac{\partial F}{\partial x}+q\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}=0. \tag{18}$$

Диференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{19}$$

определяют кривые, в каждой точке которых касательною прямою служит нормаль к поверхности Σ, проходящей через эту точку.

Предположим, например, что $F(x,\ y,\ z)=zf(x,\ y)$, причем функция $f(x,y)$ — однородная m-й степени. Диференциальные уравнения характеристик здесь будут:

$$\frac{dx}{f'_x}=\frac{dy}{f'_y}=\frac{zdz}{f}.$$

Принимая во внимание соотношение Эйлера, имеем интегрируемую комбинацию:

$$x\,dx+y\,dy-mz\,dz=0;$$

отсюда получаем первый интеграл $x^2+y^2-mz^2=a$. С другой стороны, $\frac{dy}{dx}$ равно однородной функции нулевой степени переменных x, y; следовательно, мы получим другой первый интеграл квадратурою (§ 364).

4. Иногда можно найти характеристические линии без вычислений, по их геометрическим свойствам. Пусть, например, требуется найти такие поверхности S, чтобы *касательная плоскость в любой точке M каждой из этих поверхностей пересекала данную прямую Δ в точке T, равноотстоящей от точки M, и от постоянной точки O прямой Δ*. Пусть будет M какая-нибудь точка пространства; на прямой Δ существует одна и только одна такая точка T, что $TO=TM$; эта точка T лежит на пересечении прямой Δ с плоскостью, перпендикулярною к отрезку OM в его середине. Пусть будет D прямая, проходящая через точки M и T. Касательная плоскость ко всякой поверхности, удовлетворяющей условиям задачи и проходящей через точку M, содержит эту прямую D; следовательно, по сказанному выше, эти поверхности суть интегралы *линейного* урав-

нения. Прямые D суть касательные к характеристическим линиям, так как эти прямые все пересекают прямую Δ, то все характеристические линии — плоские, расположенные в плоскостях, проходящих через прямую Δ. Характеристики, лежащие в одной из этих плоскостей, суть интегральные кривые некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Нетрудно видеть из определяющих их свойств, что это — круги, касающиеся прямой Δ в точке O так как $TO = TM$. Следовательно, искомые поверхности образованы кругами, касающимися прямой Δ в точке O.

Произвольную функцию $\varphi(u, v)$ можно выбрать таким образом, чтобы интегральная поверхность проходила через данную кривую Γ; мы получим эту поверхность как геометрическое место характеристических линий, проходящих через различные точки кривой Γ. Если кривая Γ представлена уравнениями:

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad \Phi_1(x, y, z) = 0, \tag{20}$$

то задача приводится к разысканию такого соотношения между параметрами a и b, чтобы характеристическая линия пересекала кривую Γ. Ясно, что мы получим это соотношение, исключая x, y, z из двух уравнений (20) и двух уравнений $u = a$, $v = b$ характеристической линии. Задача имеет только одно решение, если только кривая Γ не есть сама характеристическая. В этом исключительном случае, чтобы иметь интегральную поверхность, проходящую через кривую Γ, мы можем взять любую поверхность, образуемую любым семейством характеристических линий, зависящим от произвольного параметра, в состав которого входит кривая Γ.

439. Характеристические конгруэнции. Всякому линейному уравнению вида (13) соответствует *характеристическая конгруэнция*, состоящая из характеристических линий этого уравнения. Обратно, всякая конгруэнция линий, т. е всякое семейство линий, зависящих от двух произвольных параметров a и b, есть характеристическая конгруэнция некоторого уравнения вида (13)*. В самом деле, предположим сначала, что уравнения, определяющие эту конгруэнцию, решены относительно параметров a и b:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b.$$

Всякая поверхность S, образованная линиями этой конгруэнции, соединенными по произвольному закону, представится уравнением вида: $v = \pi(u)$; взяв частные производные по x и y, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p = \pi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q = \pi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q\right).$$

Исключая $\pi'(u)$, придем к линейному уравнению:

$$\frac{D(u, v)}{D(z, y)} p + \frac{D(u, v)}{D(x, z)} q + \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 0.$$

Очевидно, что данная конгруэнция есть его характеристическая конгруэнция.

* Мы предполагаем, сверх того, что через каждую точку пространства (или части пространства) проходит одна из этих линий, что не имело бы места, если бы все они были расположены на одной и той же поверхности.

Рассмотрим теперь общий случай конгруэнции, определяемой двумя уравнениями произвольного вида:

$$U(x, y, z, a, b) = 0, \quad V(x, y, z, a, b) = 0. \tag{21}$$

Если мы установим между параметрами a и b соотношение произвольного вида $\varphi(a, b) = 0$, то получим уравнение поверхности S, образуемой линиями Γ конгруэнции, если исключим a и b из уравнений (21) и соотношения $\varphi = 0$. Какова бы ни была функция φ, все эти поверхности и в этом случае удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных первого порядка. Чтобы получить это уравнение, можно поступать следующим образом. Три уравнения

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \varphi(a, b) = 0 \tag{22}$$

определяют три неявных функции z, a, b независимых переменных x и y, причем, так как третье содержит только a и b, то

$$\frac{D(a, b)}{D(x, y)} = 0. \tag{23}$$

С другой стороны, диференцируя два первых уравнения (22) по x и y, мы можем вывести из получаемых соотношений выражения производных $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial b}{\partial y}$ через x, y, z, p, q, a, b, причем p, q входят в эти выражения линейно; внося полученные выражения производных в определитель (23), мы придем к новому соотношению:

$$\Phi(x, y, z, p, q, a, b) = 0.$$

Остается только исключить a и b из этого соотношения и двух соотношений (21), чтобы притти к уравнению, содержащему только x, y, z, p, q:

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0; \tag{24}$$

это — диференциальное уравнение всех поверхностей, образуемых линиями конгруэнции. Было бы нетрудно убедиться из самого способа получения этого уравнения, что оно распадается на несколько уравнений первого порядка относительно p и q; но это вытекает из самого смысла этого уравнения. Предположим, например, что через точку M пространства проходят m линий конгруэнции; пусть будут D_1, D_2, ..., D_m касательные прямые к этим линиям в точке M. Всякая поверхность, образуемая линиями конгруэнции и проходящая через точку M, должна содержать одну из m линий этой конгруэнции, проходящих через точку m, и следовательно, касательная плоскость в точке M должна проходить через одну из прямых D_1, D_2, ..., D_m. Пусть будут P_i, Q_i, R_i направляющие параметры прямой D_i. Таким образом всякая поверхность, образуемая линиями конгруэнции, должна удовлетворять одному из m уравнений

$$E_i = P_i p + Q_i q - R_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{25}$$

и левая часть уравнения (24) совпадает, до множителя, не зависящего от p и q, с произведением m линейных множителей E_1, E_2, ..., E_m. Заметим при этом, что, вообще, невозможно разделить аналитически эти m множителей.

Некоторые геометрические задачи также можно привести к уравнениям в частных производных первого порядка, распадающимся на произведение линейных множителей. Возвратимся, например, к задаче об ортогональных траекториях и рассмотрим семейство поверхностей, уравнение которых $F(x, y, z, C) = 0$ содержит произвольный параметр C в m-й степени. Чтобы получить диференциальное уравнение поверхностей, пересекающих данные поверхности ортогонально, должно попрежнему исключить C из соотношения $F = 0$ и из условия

$$p\frac{\partial F}{\partial x} + q\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

По предположению через каждую точку M пространства проходят m поверхностей рассматриваемого семейства. Пусть будут $D_1, D_2, \ldots, D_m$ нормали к этим m поверхностям. Касательная плоскость к ортогональной поверхности в точке M должна содержать одну из этих прямых; следовательно, уравнение в частных производных распадается на систему m линейных уравнений относительно p и q.

Обратно, всякое уравнение этого вида устанавливает соответствие между каждою точкою пространства и m прямыми $D_1, D_2, \ldots, D_m$, через нее проходящими; оно выражает, что касательная плоскость к интегральной поверхности содержит одну из m прямых $D_1, D_2, \ldots, D_m$, соответствующих каждой точке пространства. Если мы назовем *характеристикою* всякую линию, которая в каждой своей точке касается одной из m соответствующих прямых, то из предыдущих рассуждений попрежнему следует, что интегральная поверхность есть геометрическое место характеристик. Чтобы получить диференциальные уравнения этих линий, нет необходимости разлагать левую часть уравнения на линейные множители. В самом деле, написав условия того, что эта левая часть делится на множитель $Pp + Qq - R$, мы придем к уравнениям, однородным относительно P, Q, R, которые определяют для каждой точки (x, y, z) m систем значений для отношений двух из коэфициентов P, Q, R к третьему. Заменяя в этих уравнениях P, Q, R пропорциональными им количествами dx, dy, dz, мы получим диференциальные уравнения характеристик, таким образом, интегрирование уравнения с частными производными и здесь привелось к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений.

Из предыдущей теории легко видеть, каким образом линейное уравнение (13) может иметь интегралы, не содержащиеся в общем интеграле. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{26}$$

левая часть которого есть произведение нескольких множителей, линейных относительно p, q и неразделимых аналитически; пусть будут

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \Psi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \tag{27}$$

диференциальные уравнения характеристик этой системы.

Линии, представляющие общий интеграл уравнений (27), образуют конгруэнцию, которая есть характеристическая конгруэнция уравнения (26), и общий интеграл состоит из поверхностей, образуемых линиями этой конгруэнции, соединенными по произвольному закону. Но может случиться, что уравнения (27) имеют особые интегралы; это будет в том случае, если характеристическая конгруэнция имеет фокальную поверхность (Σ). Тогда через каждую точку этой поверхности проходит линия характеристической конгруэнции, касающаяся этой поверхности. Следовательно, касательная плоскость к поверхности (Σ) содержит одну из прямых D_i, соответствующих точке прикосновения, и потому (Σ) есть интегральная поверхность уравнения (26). При этом она вообще, не входит в состав поверхностей, образующих общий интеграл; она есть *особый интеграл*.

Рассмотрим, например, уравнение

$$[p(x^2-z^2)+qxy]^2=q^2z^2(x^2+y^2-z^2),$$

равносильное двум линейным уравнениям:

$$p(x^2-z^2)+q(xy\pm z\sqrt{x^2+y^2-z^2})=0. \tag{28}$$

Дифференциальные уравнения характеристических линий будут:

$$\frac{dz}{dx}=0,\quad \left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=z^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

Первое уравнение дает $z=C$; второе уравнение есть уравнение Клеро (§ 371). Таким образом характеристическая конгруэнция состоит из прямых линий

$$z=C,\quad y=C_1x\pm z\sqrt{1+C_1^2},$$

параллельных плоскости xOy и касающихся конуса $x^2+y^2=z^2$. Общий интеграл состоит из коноидов, образуемых этими прямыми; здесь есть и особый интеграл — сам конус.

В области каждой точки (x_0, y_0, z_0) этого конуса коэфициент при q в уравнении (28) не будет голоморфным, что согласно с предыдущим замечанием (§ 437).

II. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛАХ.

440. Исследование уравнения $dz=A\,dx+B\,dy$. Существование интегралов *вполне интегрируемой* системы уравнений в полных диференциалах было доказано выше (§ 385). Интегрирование такой системы приводится к интегрированию нескольких систем обыкновенных диференциальных уравнений с одним независимым переменным. Метод, который мы изложим для наиболее простого случая, непосредственно распространяется и на общий случай.

Рассмотрим уравнение

$$dz=A(x,\ y,\ z)\,dx+B(x,\ y,\ z)\,dy, \tag{29}$$

где z есть искомая функция двух независимых переменных x и y. Это уравнение равносильно двум соотношениям:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A(x,\ y,\ z),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=B(x,\ y,\ z). \tag{30}$$

Следовательно, всякий интеграл, принадлежащий этим двум уравнениям, удовлетворяет также двум другим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A,$$

и следовательно, соотношению

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A. \tag{31}$$

Если это соотношение не есть тождество, то интегралы данного уравнения (29) можно искать только среди неявных функций, определяемых уравнением (31); следовательно, путем исключения всегда можно узнать, имеют ли уравнения (30) интеграл, общий для обоих уравнений.

Например, уравнение

$$dz = z\,dx + (z^2 + a^2)\,dy$$

допускает интеграл $z = 0$ при $a = 0$ и не имеет интегралов при a, отличном от нуля. Но для того, чтобы эти уравнения допускали бесчисленное множество интегралов, зависящих от одной произвольной постоянной, необходимо, чтобы соотношение (31) выполнялось тождественно. В этом случае уравнение (29) называется вполне интегрируемым.

Условие интегрируемости (31) инвариантно относительно всякой замены переменной z:

$$z = F(x,\ y,\ u),$$

где u — новое переменное. Какова бы ни была функция F, уравнение (29) заменится новым уравнением того же вида:

$$du = A_1(x,\ y,\ u)\,dx + B_1(x,\ y,\ u)\,dy,$$

для которого условие интегрируемости тоже удовлетворяется.

Действительно, новое уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du = A(x,\ y,\ z)\,dx + B(x,\ y,\ z)\,dy. \tag{32}$$

Следовательно, оно разлагается на два отдельных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} &= A(x,\ y,\ z), \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} &= B(x,\ y,\ z), \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

в которых в правых частях z заменено через $F(x,\ y,\ u)$.

Мы могли бы вывести отсюда выражения для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, но для того, чтобы доказать, что уравнение (32) вполне интегрируемо, достаточно проверить, что выражение для $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, полученное из первого из уравнений (33), тождественно с выражением для $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, взятым из второго. Диференцируя первое уравнение (33) по y, получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$$
$$= \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}B.$$

Диференцируя второе уравнение по x, мы получим уравнение, левая часть которого отличается от левой части последнего уравнения только тем, что производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ заменяется через $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, а правая часть будет равна $\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A$.

Так как условие (31) выполняется тождественно, мы получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$; это доказывает нам, что условие интегрируемости выполнено и для уравнения (32).

Пусть теперь $z=\varphi(x, y, C)$ будет общий интеграл первого из уравнений (30), причем y мы рассматриваем как параметр, а C есть постоянная интеграции. Функция φ удовлетворяет соотношению $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=A(x, y, \varphi)$, и после замены переменного $z=\varphi(x, y, u)$ в уравнении (29) мы получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du=\left[B(x, y, \varphi)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]dy; \tag{34}$$

последнее уравнение эквивалентно двум соотношениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{B(x, y, \varphi)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}=R(x, y, u).$$

В силу доказанного общего свойства интеграла эта система тоже должна удовлетворять условию интеграции, которое здесь сводится к $\frac{\partial R}{\partial x}=0$.

Для определения нового переменного u мы пришли, таким образом, к системе вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=R(y, u), \tag{35}$$

общим интегралом которой является общий интеграл второго уравнения $u=\psi(y, C)$, где C — постоянная, не зависящая ни от x, ни от y. Достаточно заменить теперь в $\varphi(x, y, u)$ u через $\psi(y, C)$, чтобы получить интеграл вполне интегрируемой системы (29), и мы видим, что *интегрирование этого уравнения сводится к интегрированию двух обыкновенных диференциальных уравнений* (34) *и* (35).

Пример. Рассмотрим уравнение в полных диференциалах:

$$dz=\frac{1+yz}{1+xy}\,dx+\frac{x(z-x)}{1+xy}\,dy, \tag{36}$$

равносильное системе:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+yz}{1+xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(z-x)}{1+xy}. \tag{36'}$$

Здесь условие интегрируемости удовлетворяется, и первое из уравнений (36'), линейное относительно z и $\frac{\partial z}{\partial x}$, имеет общий интеграл:

$$z = -\frac{1}{y} + u(y)(1 + xy),$$

где $u(y)$ есть произвольная функция от y. Внося это значение для z во второе уравнение (36'), получим: $\frac{du}{dy} + \frac{1}{y^2} = 0$, откуда имеем: $u(y) = \frac{1}{y} + C$. Следовательно, общий интеграл уравнения (36) есть:

$$z = x + C(1 + xy), \tag{37}$$

где C — произвольное постоянное.

Задачу интегрирования уравнений в полных диференциалах можно представить геометрически. Для удобства мы будем попрежнему называть *интегральною поверхностью* всякую поверхность, представляемую уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ есть интеграл уравнения (29). Уравнения (30), или

$$p = A(x, y, z), \quad q = B(x, y, z),$$

выражают, что касательная плоскость к интегральной поверхности S в точке (x, y, z) этой поверхности совпадает с плоскостью, представляемою уравнением

$$Z - z = A(X - x) + B(Y - y). \tag{38}$$

Таким образом задача интегрирования уравнения (29) равносильна следующей геометрической задаче:

Всякой точке (x, y, z) пространства поставлена в соответствие плоскость P, проходящая через эту точку и представляемая уравнением (38). *Найти поверхности S, в каждой точке которых касательною плоскостью служит плоскость P, соответствующая этой точке.*

Эта задача похожа на задачу § 438, но в настоящем случае она не всегда имеет решение. Если условие интегрируемости (31) удовлетворяется, то, вообще, существует интеграл, и притом только один, уравнения (29), принимающий данное значение z_0 при системе данных значений (x_0, y_0) переменных x, y. Следовательно, в этом случае через всякую точку пространства вообще проходит одна и притом только одна интегральная поверхность.

Рассмотрим, например, семейство кривых двойной кривизны Γ, зависящих от двух произвольных параметров a и b и представляемых системою двух уравнений:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b; \tag{39}$$

пусть эти кривые таковы, что через каждую точку пространства (или части пространства) проходит одна и только одна кривая этого семейства. Вообще, не существует семейства поверхностей S, имеющих эти кривые Γ ортогональными траекториями. В самом деле, касательная плоскость к поверхности S в каждой точке этой поверхности должна совпадать с нормальною плоскостью к кривой Γ, проходящей через ту же точку. Таким образом мы приходим к частному случаю предыдущей задачи, которая, как мы видели, не всегда имеет решение, откуда следует, что произвольно данная конгруэнция кривых вообще не состоит из ортогональных траекторий семейства по ерхностей.

Так как касательная плоскость к поверхности S в точке (x, y, z) должна быть перпендикулярна к касательной прямой к кривой Γ, проходящей через эту точку, то она будет перпендикулярна к касательным плоскостям к двум поверхностям (39) в той же самой точке (x, y, z). Следовательно, предполагая, что оси координат прямоугольные, мы должны иметь два соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} p + \frac{\partial u}{\partial y} q - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} p + \frac{\partial v}{\partial y} q - \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Отсюда находим значения для p и q:

$$p = A(x, y, z), \quad q = B(x, y, z),$$

и, чтобы задача была возможна, условие (31) должно тождественно удовлетворяться.

Рассмотрим, например, семейство линий

$$X = aZ, \quad Y = bZ,$$

где X, Y, Z обозначают соответственно функции переменного x, переменного y и переменного z. Пользуясь предыдущим методом, находим для p и q следующие значения:

$$p = -\frac{XZ'}{X'Z}, \quad q = -\frac{YZ'}{Y'Z},$$

и уравнение в полных диференциалах можно представить в виде:

$$\frac{Z\,dz}{Z'} + \frac{X\,dx}{X'} + \frac{Y\,dy}{Y'} = 0.$$

Очевидно, что это уравнение вполне интегрируемое, и общий интеграл получается квадратурами:

$$\int \frac{Z}{Z'} dz + \int \frac{X}{X'} dx + \int \frac{Y}{Y'} dy = C.$$

441. Метод Майера. Предыдущий метод требует двух последовательных интегрирований; эти два интегрирования можно заменить одним следующим образом. Предположим, для определенности, что коэфициенты $A(x, y, z)$ и $B(x, y, z)$ голоморфны в области точки (x_0, y_0, z_0); тогда, если условие (31) удовлетворяется, существует одна и только одна интегральная поверхность S_0, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0). Сущность метода Майера (Mayer) состоит в том, что для получения этой поверхности сначала определяют линии пересечения этой поверхности с плоскостями, параллельными оси Oz и проходящими через точку (x_0, y_0, z_0). Пусть будет Γ линия пересечения поверхности S_0 с плоскостью

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{40}$$

где m имеет данное значение. Вдоль этой кривой Γ мы имеем $dy = m\,dx$, и, заменяя в уравнении (29) y и dy их предыдущими значениями, мы получим соотношение

$$dz = \{A[x, y_0 + m(x - x_0), z] + mB[x, y_0 + m(x - x_0), z]\}\,dx, \tag{41}$$

которое также удовлетворяется вдоль всей линии Γ. Но это соотношение содержит только два переменных x и z; это диференциальное уравнение первого порядка, интегрируя которое мы получим кривую Г. Пусть будет

$$z = \varphi(x, x_0, y_0, z_0, m) \tag{42}$$

интеграл этого уравнения, обращающийся в z_0 при $x = x_0$. Кривая Г представляется системою двух уравнений (40) и (42). Так как искомая поверхность S_0 есть место кривых Г при изменении параметра m, то мы получим уравнение этой поверхности, исключая m из уравнений (40) и (42); для этого достаточно заменить в уравнении (42) m через $\frac{y-y_0}{x-x_0}$. Этот метод представляет очевидную аналогию с методом, указанным для интегрирования полных диференциалов (т. I, § 375). Его можно было бы также обобщить, заменяя плоскости, параллельные оси Oz, цилиндрами, проходящими через данную точку (x_0, y_0, z_0), с образующими, параллельными оси z.

Возвратимся, например, к уравнению (36) и положим $x_0 = y_0 = 0$. Полагая $y = mx$, $dy = m\,dx$, получим из этого уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2mxz}{1+mx^2} + \frac{1-mx^2}{1+mx^2};$$

это — линейное уравнение, интегрирование которого не представляет никаких затруднений; его интеграл, обращающийся в z_0 при $x = 0$, есть:

$$z = x + z_0(1 + mx^2).$$

Следовательно, поверхность S_0 представляется уравнением: $z = x + z_0(1 + xy)$, и мы приходим к результату, полученному ранее по первому методу*.

442. Исследование уравнения $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. Задачу интегрирования уравнения в полных диференциалах можно представить в более общем и симметричном виде.

Пусть будут $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функции трех переменных x, y, z. Проинтегрировать уравнение

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0 \tag{43}$$

значит найти одно соотношение $F(x, y, z) = 0$ между переменными x, y, z, следствием которого было бы данное соотношение (43) между этими тремя переменными и их диференциалами dx, dy, dz. Если функция F содержит переменное z, то мы можем рассматривать x и y как независимые переменные, и z как их функцию; мы видим, что эта функция должна удовлетворять уравнению:

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy,$$

имеющему вид (29). Заменив в условии интегрируемости (31) A через $-\frac{P}{R}$, B через $-\frac{Q}{R}$ и выполнив вычисления, получим:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{44}$$

Это условие не изменяется при круговой перестановке x, y, z и P, Q, R; следовательно, мы пришли бы к тому же самому условию (44), если бы вместо z приняли за неизвестную функцию какое-нибудь из переменных x или y. Таким образом задача интегрирования уравнения (43)

* Майер (Mayer), Über unbeschränkt integrabele Systeme, *Mathematische Annalen*, т. V.

не отличается по существу от рассмотренной выше задачи (§ 441); но, представляя уравнение в полных диференциалах в виде (43), мы избегаем необходимости указывать, какие переменные мы принимаем за независимые.

Условие (44) встречается в следующей задаче, тесно связанной с предыдущею Если дано выражение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

то мы видели (§ 373 и 387), что всегда существует бесконечное множество множителей $\mu(x, y)$, для которых произведение $\mu(P\,dx + Q\,dy)$ есть полный диференциал функции от двух переменных x, y. При переходе от двух переменных к трем такая теорема вообще не имеет места. В самом деле, рассмотрим три функции P, Q, R трех переменных x, y, z; чтобы произведение $\mu(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ было точным диференциалом, множитель μ должен удовлетворять трем условиям:

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Умножая эти уравнения соответственно на P, Q, R и складывая, мы придем по разделении на μ к условию интегрируемости (44). Следовательно, это условие *необходимо*, чтобы трехчлен $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ имел интегрирующий множитель. Оно также и *достаточно*. В самом деле, если оно удовлетворяется, то уравнение (43) — вполне интегрируемое. Пусть будет

$$F(x, y, z) = C \tag{45}$$

общий интеграл этого уравнения. Значения производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, выведенные из уравнения (45), должны быть тождественны со значениями $-\frac{P}{R}$ и $-\frac{Q}{R}$, полученными из уравнения (43), так как можно взять произвольное постоянное C таким, чтобы интегральная поверхность прошла через любую точку пространства. Для этого должно быть:

$$\frac{F'_x}{P} = \frac{F'_y}{Q} = \frac{F'_z}{R} = \mu,$$

или $dF = \mu(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$; следовательно, множитель μ, равный общему значению предыдущих отношений, есть интегрирующий множитель. Повторяя рассуждения § 373, можно было бы доказать, что существует бесконечное множество интегрирующих множителей, которые все имеют вид $\mu\pi(F)$, где π есть произвольная функция от F.

Условие интегрируемости (44) есть *инвариант* относительно всякой замены переменных. В самом деле, рассмотрим преобразование, определяемое формулами:

$$x = f(u, v, w), \quad y = \varphi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w), \tag{46}$$

причем определитель Якоби от функций f, φ, ψ, по u, v, w не равен тождественно нулю. После такого преобразования трехчлен $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ переходит в выражение того же вида: $P_1\,du + Q_1\,dv + R_1\,dw$, где P_1, Q_1, R_1 — функции от

u, v, w. Если соотношение (44) удовлетворяется, то аналогичное соотношение

$$P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u}-\frac{\partial P_1}{\partial w}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right)=0 \qquad (47)$$

также удовлетворяется тождественно. В этом можно было бы убедиться непосредственным вычислением (т. I, гл. III, упр. 19); но это предложение является также следствием самого значения условия (44). В самом деле, если соотношение (44) удовлетворяется, то существуют две таких функции μ $x, y, z)$ и $F(x, y, z)$, что

$$\mu(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=dF.$$

После замены переменных, определяемых формулами (46), функции μ и F обращаются в функции $\mu_1(u, v, w)$, $F_1(u, v, w)$ новых переменных, и мы имеем тождественно $dF=dF_1$. Следовательно, предыдущее тождество обращается в

$$\mu_1(P_1\,du+Q_1\,dv+R_1\,dw)=dF_1,$$

и, следовательно, трехчлен $P_1du+Q_1\,dv+R_1dw$ имеет интегрирующий множитель, т. е. функции P_1, Q_1, R_1 также удовлетворяют соотношению (47).

Пользуясь этим замечанием, можно представить предыдущий метод интегрирования (§ 440) в более общем виде. В самом деле, предположим, что посредством замены переменных мы представили трехчлен $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ в виде двучлена $P_1\,du+Q_1\,dv$, содержащего только два диференциала du и dv. Тогда в соотношении (47) должно положить $R_1=0$, и мы получим отсюда $P_1\dfrac{\partial Q_1}{\partial w}=Q_1\dfrac{\partial P_1}{\partial w}$ или $\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{P_1}{Q_1}\right)=0$; из этого равенства следует, что соотношение $\dfrac{P_1}{Q_1}$ не зависит от w. Следовательно, интегрирование данного уравнения в полных диференциалах приводится к интегрированию уравнения вида: $dv+\pi(u, v)\,du=0$, т. е. к обыкновенному диференциальному уравнению.

Всякий трехчлен вида: $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ можно привести к двучлену P_1du+Q_1dv бесконечным множеством способов. Например, можно поступать следующим образом. Определим сначала две таких функции $\mu(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$, чтобы при всяких dx и dy было

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=\mu\,[P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy];$$

эта задача приводится к интегрированию диференциального уравнения

$$P\,dx+Q\,dy=0,$$

где z рассматривается как параметр. Тогда данное уравнение можно представить в виде:

$$dF+\left(\mu R-\frac{\partial F}{\partial z}\right)dz=\mu\,(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=0$$

Взяв новую систему переменных, причем за два из этих переменных мы примем $F(x, y, z)$ и z, мы, действительно, заменим трехчлен $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ выражением, в которое входят только два диференциала dF и dz. Этот прием можно видоизменять различным образом. Ясно, например, что можно начать с интегрирования одного из двух уравнений:

$$Q\,dy+R\,dz=0,\quad P\,dx+R\,dz=0;$$

этот последний метод, в сущности, тождествен с методом, изложенным в § 440

С последним замечанием можно также связать изящный прием интегрирования, предложенный Бертраном. Предположим, что уравнение (43) вполне интегрируемое. Начнем с интегрирования линейного уравнения в частных производных

$$X(f)=\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0. \qquad (48)$$

Пусть будут u и v его два независимых интеграла; из двух соотношений

$$X(u)=0,\ X(v)=0$$

и условия интегрируемости (44) можно исключить три разности

$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

и мы придем к равенству

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, существуют две таких функции λ и μ, что одновременно будет.

$$P=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=\lambda\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=\lambda\frac{\partial u}{\partial z}+\mu\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{49}$$

и мы можем представить данное уравнение (43) в виде:

$$\lambda\,du+\mu\,dv=0.$$

Но мы видели выше, что если уравнение (43) содержит только два диференциала, то отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ должно зависеть только от переменных u и v; таким образом мы пришли к диференциальному уравнению между u и v*.

---

* Метод Бертрана имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть оси координат прямоугольные, и пусть V — вектор в точке x, y, z с компонентами P, Q, R. Всякая интегральная поверхность S, проходящая через точку M (x, y, z) пространства, нормальна вектору V в этой точке, и обратно, всякая поверхность, нормальная в каждой точке вектору V, есть интегральная поверхность уравнения (43). Рассмотрим, кроме того, вихревой вектор τ с началом в точке x, y, z, проекции которого на оси координат равны

$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x};$$

линией вихря мы называем линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вихревого вектора, а *поверхностью вихрей* Σ — поверхность, образованную линиями вихрей, или, иначе, поверхность, касательная плоскость к которой в каждой точке содержит вихревой вектор (§ 438). Тогда условие интегрируемости (44) означает, что *вектор* (P, Q, R) *и вихревой вектор* τ, *выходящие из одной и той же точки, взаимно перпендикулярны*. Если это условие выполнено, то, очевидно, искомые поверхности S будут поверхностями вихрей. Метод Бертрана и состоит в том, чтобы сначала найти наиболее общие поверхности вихрей, а затем выбрать произвольную функцию, от которой зависят поверхности Σ, таким образом, чтобы они были нормальны в каждой точке вектору (P, Q, R).

Эта интерпретация позволяет снова найти условие интегрируемости. Действительно, очевидно, что поверхности S могут быть определены следующим свойством: интеграл

$$I=\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

взятый по произвольному контуру (замкнутому или нет — безразлично), лежащему на поверхности S, равен нулю. С другой стороны, поверхности вихрей Σ обладают тем свойством, что тот же самый интеграл, взятый по *замкнутому* контуру на Σ, равен нулю. Действительно, в силу формулы Стокса, для этого достаточно (т. I, § 132), чтобы в каждой точке Σ мы имели:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial z}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\gamma=0,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы нормали. Но это условие обозначает, что направление вектора τ лежит в касательной плоскости к поверхности. Отсюда очевидно, что всякая поверхность S есть тоже поверхность вихрей. Итак, если через каждую точку пространства проходит некоторая поверхность S, условие (44) должно удовлетворяться тождественно, так как касательная плоскость к S перпендикулярна к вектору (P, Q, R).

Этот метод кажется более сложным, чем предыдущий, так как для интегрирования уравнения (48) придется проинтегрировать систему двух диференциальных уравнений первого порядка. Но он более симметричен и может быть выгодным, если данное уравнение само симметрично относительно x, y, z. Рассмотрим, например, уравнение

$$(y^2+yz+z^2)\,dx+(z^2+zx+x^2)\,dy+(x^2+xy+y^2)\,dz=0.$$

Условие (44) удовлетворяется, и линейное уравнение (48) здесь обращается в

$$(z-y)\frac{\partial f}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial f}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial f}{\partial x}=0;$$

из соответствующей системы диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$$

нетрудно получить две интегрируемых комбинации

$$d(x+y+z)=0, \quad x\,dx+y\,dy+z\,dz=0.$$

Следовательно, мы можем взять:

$$u=x+y+z, \quad v=x^2+y^2+z^2,$$

и значения множителей λ и μ, получающиеся из уравнений (49), будут:

$$\lambda=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\frac{u^2+v}{2}, \quad \mu=-\frac{x+y+z}{2}=-\frac{u}{2}.$$

Следовательно, преобразованное уравнение относительно u и v есть

$$(u^2+v)\,du-u\,dv=0,$$

или

$$du=\frac{u\,dv-v\,du}{u^2}=d\left(\frac{v}{u}\right).$$

Таким образом общий интеграл будет $u-\dfrac{v}{u}=C$, или, возвращаясь к переменным x, y, z:

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}=C.$$

443. Скобки (u, v) и $[u, v]$. Как мы видели, уравнение в полных диференциалах, в сущности, равносильно двум совместным уравнениям $p=A(x, y, z)$, $q=B(x, y, z)$. Рассмотрим теперь два уравнения произвольного вида:

$$F(x, y, z, p, q)=0, \quad \Phi(x, y, z, p, q)=0 \tag{50}$$

между двумя независимыми переменными x и y, неизвестною функцией z и двумя ее частными производными p и q.

Обратно, если это условие выполнено, уравнение (43) вполне интегрируемо. Пусть M_0 — некоторая точка пространства, C_0 — кривая, выходящая из этой точки, удовлетворяющая уравнению $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$; например, мы можем задать $y=f(x)$ и определить z из уравнения первого порядка. *Поверхность вихрей Σ, проходящая через C_0, есть также поверхность S.* Пусть, в самом деле, MM' — дуга кривой, лежащей на Σ, M_m и M_{m}' — кривые вихрей, выходящие из точек M и M', m, m' - их точки пересечения с C_0. Интеграл $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ взятый по замкнутому контуру $MM'mm'M$, равен нулю, так как Σ есть поверхность вихрей. Интеграл по mm' равен нулю в силу выбора C_0; то же самое верно относительно интегралов по контурам $Mm+M'm'$ в силу условия (44). Следовательно, интеграл по MM' тоже равен нулю, какова бы ни была дуга MM' на поверхности Σ, и, следовательно, эта поверхность есть поверхность S.

Если уравнения (50) можно решить относительно p и q, то мы придем к двум уравнениям: $p=f(x, y, z)$, $q=\varphi(x, y, z)$ уже рассмотренного вида, и мы можем узнать, совместимы ли эти два соотношения. Но можно узнать, и не решая уравнений (50) относительно p и q, удовлетворяется ли условие интегрируемости; для этого достаточно применить правила вычисления производных от неявных функций. В самом деле, рассмотрим соотношения (50) как определяющие две неявных функции $p=f(x, y, z)$, $q=\varphi(x, y, z)$ трех переменных x, y, z. Диференцируя уравнения (50) по x, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

и, последовательно исключая $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{D(F, \Phi)}{D(p, x)}=0.$$

Точно так же найдем:

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{D(F, \Phi)}{D(y, q)}=0, \qquad \frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{D(F, \Phi)}{D(z, q)}=0,$$

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{D(F, \Phi)}{D(p, z)}=0.$$

Внося значения производных $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$ в условие интегрируемости

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}q=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}p$$

и выполняя вычисления, будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+p\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+q\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)-$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)=0.$$

Положим вообще, если u и v суть функции от x, y, z, p, q:

$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z},$$

$$[u, v]=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{dv}{dx}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{du}{dx}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{dv}{dy}-\frac{\partial v}{\partial q}\frac{du}{dy}.$$

Тогда предыдущее условие можно представить в следующем сокращенном виде:

$$[F, \Phi]=0 \tag{51}$$

Чтобы два уравнения (50) представляли вполне интегрируемую систему, необходимо прежде всего, чтобы можно было решить эти оба уравнения относительно p и q, т. е. чтобы из них нельзя было вывести соотношения между x, y, z, не зависящего от p и q, и, кроме того, чтобы условие $[F, \Phi]=0$ было следствием двух соотношений (50). Если скобка $[F, \Phi]$ равна нулю тождественно, то уравнения $F=a$, $\Phi=b$ образуют вполне интегрируемую систему, каковы бы ни были постоянные a и b. Если же условие $[F, \Phi]=0$ есть следствие только одного уравнения $F=0$, независимо от второго соотношения $\Phi=0$, то два уравнения $F=0$, $\Phi=b$ образуют вполне интегрируемую систему, каково бы ни было постоянное b.

Если обе функции F и Φ не содержат z, то выражение скобки $[F, \Phi]$ упрощается. Если u и v произвольные функции от x, y, p, q, то выражение

$$(u, v)=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial y}$$

называется *скобкою Пуассона*. Чтобы два уравнения

$$F(x, y, p, q)=0, \quad \Phi(x, y, p, q)=0$$

были совместимы, условие

$$(F, \Phi)=0$$

должно удовлетворяться или тождественно, или как следствие обоих данных уравнений.

III. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

444. Полные интегралы. Перейдем теперь к интегрированию уравнений с частными производными первого порядка произвольного вида, но с двумя только независимыми переменными. В теории интегрирования таких уравнений Лагранж получил весьма важные результаты, которые мы изложим прежде всего. Пусть будет

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{52}$$

данное уравнение. Основной результат, полученный Лагранжем, заключается в следующем: *если известно семейство интегралов, зависящее от двух произвольных параметров, то из него можно вывести все другие интегралы диференцированиями и исключениями.* В самом деле, пусть будет

$$V(x, y, z, a, b)=0 \tag{53}$$

соотношение, содержащее два постоянных a и b и определяющее интеграл уравнения (52) при всяких значениях этих постоянных. Из этого соотношения мы получим значения частных производных p и q этого интеграла:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{54}$$

По предположению функция z удовлетворяет уравнению (52).

каковы бы ни были a и b; следовательно, исключая параметры a и b из трех соотношений (53) и (54), мы придем к уравнению (52) и *только к нему**. Отсюда следует, что уравнение (52) представляет необходимое и достаточное условие того, чтобы три уравнения (53) и (54) удовлетворялись системою трех функций z, a, b от двух переменных x и y, причем p и q обозначают частные производные от z. Следовательно, задача интегрирования одного уравнения (52) равносильна следующей задаче: *найти три функции z, a, b двух независимых переменных x и y, удовлетворяющие трем уравнениям* (53) и (54).

Если $z=f_1(x, y)$, $a=f_2(x, y)$, $b=f_3(x, y)$ представляют систему решений этих трех уравнений, то функция $f_1(x, y)$ удовлетворяет также и уравнению (52), представляющему следствие этих трех уравнений. Обратно, если $f_1(x, y)$ есть интеграл уравнения (52), то три соотношения (53) и (54) совместимы, если мы заменим в них z через $f_1(x, y)$, а p и q — через частные производные от $f_1(x, y)$. Следовательно, отсюда мы получим для a и b две функции $a=f_2(x, y)$, $b=f_3(x, y)$, образующие с функциею $f_1(x, y)$ систему решений соотношений (53) и (54)**.

Эта новая задача, хотя и представляется более сложною, чем первая, решается легко. В самом деле, диференцируя соотношение (53) по x и y и рассматривая теперь z, a, b как неизвестные функции от x и y, мы в силу уравнений (54) придем к двум следующим соотношениям:

$$\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0; \tag{55}$$

система уравнений (53) и (55) равносильна системе уравнений (53) и (54).

Очевидно, что мы удовлетворим этой системе, взяв за неизвестные функции a и b два произвольных постоянных. Таким образом мы получим для z уже известный интеграл, который Лагранж назвал *полным интегралом*. Чтобы решить задачу в самом общем виде, заметим, что уравнения (55) линейны и однородны относительно $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$. Следовательно, мы удовлетворим системе трех уравнений (53) и (55), полагая

$$V=0, \quad \frac{\partial V}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial b}=0. \tag{56}$$

Если эти три уравнения совместимы, то они определяют три функции z, a, b переменных x и y. Полученный таким образом интеграл $z=f_1(x, y)$ уравнения (52) совсем не зависит от произвольных параметров; он называется *особым интегралом*.

---

* В самом деле, если бы, исключая a и b, мы пришли еще к другому соотношению $\Phi(x, y, z, p, q)=0$, отличному от $F=0$, то два совместных уравнения $F=0$, $\Phi=0$ имели бы общий для них обоих интеграл $V=0$, зависящий от двух произвольных постоянных a и b, что невозможно (§ 440). Следовательно, рассматриваемый интеграл зависел бы в действительности только от *одного* параметра.

** Геометрическая интерпретация такова: если $z=f_1(x, y)$ — уравнение интегральной поверхности S, то через каждую точку M этой поверхности проходит полный интеграл, касательный к S, и соответствующие значения параметров a и b суть функции $a=f_2(x, y)$, $b=f_3(x, y)$ от координат точки M.

Если $\frac{\partial V}{\partial a}$ и $\frac{\partial V}{\partial b}$ не равны одновременно нулю, то из уравнений (55) имеем:

$$\frac{D(a,\ b)}{D(x,\ y)}=0;$$

отсюда следует, что между функциями a и b существует по крайней мере одно соотношение, не зависящее от x и y. Если существуют два таких соотношения, то a и b постоянны, и мы опять приходим к полному интегралу. Если между a и b существует только одно соотношение, то по крайней мере одна из функций a и b не приводится к постоянному. Предположим, что это будет функция a; тогда мы можем представить соотношение между a и b в виде:

$$b=\varphi(a), \tag{57}$$

и формулы (55) обращаются в

$$\frac{\partial a}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a)\right]=0,\quad \frac{\partial a}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a)\right]=0.$$

Так как, по предположению, a не равно постоянному, то эти два соотношения приводятся только к одному, и три уравнения

$$V(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0,\quad b=\varphi(a),\quad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a)=0 \tag{58}$$

определяют еще новую систему решений уравнений (53) и (54). В частности, получающаяся отсюда функция $z=f_1(x,\ y)$ есть интеграл данного уравнения (52). Очевидно, что этот интеграл зависит от произвольной функции $\varphi(a)$; он называется *общим интегралом*.

Чтобы получить соотношение $z=f_1(x,\ y)$ между x, y, z, нужно было бы исключить произвольный параметр a из двух уравнений:

$$V[x,\ y,\ z,\ a,\ \varphi(a)]=0,\quad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial \varphi(a)}\varphi'(a)=0; \tag{58bis}$$

это исключение можно сделать только после того, как функция $\varphi(a)$ выбрана. Но из уравнений (58bis) мы всегда можем выразить две координаты точек интегральной поверхности в функции третьей координаты и параметра a.

Предыдущий метод имеет простую связь с теорией огибающих поверхностей. В самом деле, рассмотрим семейство поверхностей S, зависящих от двух постоянных, представляющее полный интеграл (53). Если мы установим между двумя параметрами a и b произвольное соотношение $b=\varphi(a)$, то получим семейство поверхностей, зависящих только от одного произвольного параметра a, и мы будем иметь огибающую этого семейства, исключая a из двух уравнений (58bis). Следовательно, способ получения общего интеграла из полного интеграла состоит в том, что мы определяем огибающую однократно бесконечного множества полных интегралов, которое получим, устанавливая произвольную зависимость между двумя параметрами a и b. Точно так же мы получим особый интеграл, взяв огибающую всех полных интегралов, когда параметры a и b изменяются всеми возможными способами * (т. 1, § 202).

На основании всего сказанного можно было бы думать, что должно различать три рода интегралов: полный интеграл, общий интеграл и особый интеграл. Но из самой теории Лагранжа следует, что существует бесконечное множество полных интегралов. В самом деле, если мы установим между двумя параметрами a и b определенное соотношение $b=\pi(a, a', b')$, содержащее два новых постоянных a' и b', то соответствующий общий интеграл будет зависеть от этих двух постоянных a', b' и будет иметь характер полного интеграла. Прежний полный интеграл будет теперь содержаться в общем интеграле и будет соответствовать соотношению: $b=\pi(a, a', b')$, установленному между параметрами a' и b'. Следовательно, между общим и полным интегралом нет существенной разницы. Напротив, особый интеграл, по самому своему геометрическому значению, не зависит от выбора полного интеграла.

Примеры. 1. Рассмотрим обобщенное уравнение Клеро:

$$z=px+qy+f(p, q).$$

Очевидно, что оно имеет полный интеграл

$$z=ax+by+f(a, b).$$

Этот полный интеграл состоит из семейства плоскостей, зависящих от двух произвольных параметров a и b; эти плоскости огибают некоторую неразвертывающуюся поверхность Σ, представляющую особый интеграл данного уравнения. Чтобы иметь общий интеграл, мы должны установить между a и b произвольное соотношение $b=\varphi(a)$ и искать огибающую полученных таким образом плоскостей. Эта огибающая поверхность, представляемая системою двух уравнений:

$$z=ax+y\varphi(a)+f[a, \varphi(a)], \quad x+y\varphi'(a)+\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial \varphi(a)}\varphi'(a)=0,$$

есть развертывающаяся поверхность, касающаяся поверхности Σ вдоль некоторой кривой Γ; очевидно, мы можем выбрать произвольную функцию $\varphi(a)$ таким образом, чтобы кривая прикосновения Γ была любою заданною кривою поверхности Σ. Действительно, координаты точки прикосновения плоскости $z=ax+by+f(a, b)$ определяются из уравнений:

$$z=ax+by+f(a, b), \quad x+\frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad y+\frac{\partial f}{\partial b}=0.$$

---

* Мы видели (§ 433), какой осторожности требуют все те рассуждения, встречающиеся при изучении дифференциальных уравнений, которые основаны на теории огибающих. Все трудности, указанные в теории особых решений дифференциальных уравнений первого порядка, имеют место и для уравнений с частными производными первого порядка, и мы приходим к тому же самому заключению: уравнение с частными производными первого порядка, данное произвольно, обыкновенно не имеет особого интеграла. Это заключение не стоит в противоречии с рассуждениями этого параграфа, так как мы допускали, что к трем уравнениям (56) можно приложить теорию неявных функций, и предыдущие рассуждения верны только тогда, когда это условие удовлетворяется. (См. мемуар Дарбу, Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, *Mémoires des savants étrangers*, т. XXVII).

Исключая x, y, z из этих уравнений и одного из уравнений данной кривой, мы получим искомое соотношение между a и b.

2. Рассмотрим еще уравнение

$$q=f(p),$$

которое имеет полный интеграл

$$z=ax+f(a)y+b.$$

Это уравнение также представляет плоскость и общий интеграл, определяемый системою двух уравнений:

$$z=ax+yf(a)+\varphi(a),\quad 0=x+yf'(a)+\varphi'(a), \tag{59}$$

состоит из развертывающихся поверхностей, которые геометрически весьма просто определяются. В самом деле, если через определенную точку пространства, например через начало координат, мы проведем плоскости, параллельные плоскостям, образующим полный интеграл, то эти плоскости будут зависеть только от переменного параметра a, и, следовательно, они огибают конус T, имеющий вершину в начале координат. Следовательно, соприкасающаяся плоскость ребра возврата развертывающейся поверхности (59) остается постоянно параллельною соответствующей касательной плоскости к конусу T, и потому образующие этой поверхности параллельны образующим конуса (т. I, § 217).

Уравнения (56), определяющие особый интеграл, в этом случае несовместимы, так как последнее из них приводится к $1=0$. Следовательно, здесь нет особого интеграла.

3. Рассмотрим семейство шаров с данным радиусом R, центры которых лежат в данной плоскости. Эти шары зависят от двух произвольных параметров, и если мы примем данную плоскость за плоскость xOy прямоугольной системы осей координат, то шары представятся уравнением:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-R^2=0.$$

Мы получим соответствующее уравнение в частных производных, исключая a и b из этого уравнения и двух следующих

$$x-a+pz=0,\quad y-b+qz=0,$$

именно:

$$(1+p^2+q^2)z^2-R^2=0.$$

Геометрически это уравнение выражает, что отрезок нормали, заключающийся между любою точкою поверхности и плоскостью xOy, постоянен и равен R. Общий интеграл есть поверхность канала, огибающая семейство шаров с радиусом, равным R, центры которых описывают произвольную линию в плоскости xOy. Здесь есть особый интеграл, состоящий из двух плоскостей $z=\pm R$. Очевидно, что эти плоскости касаются всех остальных интегральных поверхностей.

445. Метод Лагранжа и Шарпи. Из предыдущего видно, что для того, чтобы найти все интегралы уравнения первого порядка

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{60}$$

достаточно знать его полный интеграл, т. е. интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных. Чтобы получить такой интеграл, предположим, что мы получили каким-нибудь образом такую другую функцию $\Phi(x, y, z, p, q)$, что два уравнения

$$F=0, \quad \Phi=a, \tag{61}$$

могут быть решены относительно p и q и образуют вполне интегрируемую систему, каково бы ни было значение постоянного a. Тогда, решая эти два уравнения относительно p и q и внося полученные значения p и q в уравнение $dz=p\,dx+q\,dy$, мы получим вполне интегрируемое уравнение в полных диференциалах:

$$dz=f(x, y, z, a)\,dx+\varphi(x, y, z, a)\,dy. \tag{62}$$

При интегрировании этого уравнения мы введем новое произвольное постоянное b и, таким образом, будем иметь интеграл данного уравнения, зависящий от двух произвольных постоянных a и b.

Метод интегрирования Лагранжа и Шарпи (Charpit) и состоит именно в том, что к данному уравнению $F=0$ присоединяется такое другое уравнение $\Phi=a$, чтобы система (61) этих двух уравнений была вполне интегрируемою. Необходимым и достаточным условием для этого будет $[F, \Phi]=0$ (§ 443); полагая для краткости

$$X=\frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial F}{\partial z}, \quad P=\frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q=\frac{\partial F}{\partial q},$$

мы можем представить это условие в виде:

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial \Phi}{dy}+(Pp+Qq)\frac{\partial \Phi}{\partial z}-(X+pZ)\frac{\partial \Phi}{\partial p}-(Y+qZ)\frac{\partial \Phi}{\partial q}=0. \tag{63}$$

Следовательно, вспомогательная функция $\Phi(x, y, z, p, q)$ должна удовлетворять *линейному* уравнению в частных производных с пятью независимыми переменными. Интегрирование этого линейного уравнения приводится в свою очередь к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=\frac{-dp}{X+pZ}=\frac{-dq}{Y+qZ} \tag{64}$$

Но для нашей цели нет необходимости знать общий интеграл системы (64); достаточно получить какой-нибудь первый интеграл этой системы с тем условием, чтобы уравнения $F=0$, $\Phi=a$ были разрешимы относительно p и q.

Следовательно, мы имеем такое общее правило:

Чтобы получить полный интеграл уравнения (60), *надо найти сначала такой первый интеграл* $\Phi=a$ *вспомогательной системы* (64), *чтобы определитель Якоби* $\dfrac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}$ *не был равен нулю, и затем решить два уравнения* $F=0$, $\Phi=a$ *относительно* p *и* q. *Внося найденные выражения для* p *и* q *в уравнение* $dz=p\,dx+q\,dy$, *мы придем к вполне интегрируемому уравнению в полных диференциалах. Общий интеграл этого уравнения содержит второе произвольное постоянное* b; *это — полный интеграл уравнения* (60).

Один интеграл уравнения (63) известен заранее, именно, сама функция F. Этот интеграл сам по себе не дает ничего нового, но отсюда видно, что интегрирование системы (64) приводится к интегрированию системы только *трех* диференциальных уравнений первого порядка. Таким образом выяснена степень трудности задачи.

Если функция F не зависит от неизвестной функции z, то можно предположить, что функция Φ также не зависит от z, и условие того, чтобы система (61) была вполне интегрируемою, обращается в

$$(F, \Phi)=0,$$

или

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}-X\frac{\partial\Phi}{\partial p}-Y\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0; \tag{63bis}$$

вместе с тем вспомогательная система (64) принимает вид:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{-dp}{X}=\frac{-dq}{Y}. \tag{64bis}$$

Если известен такой первый интеграл $\Phi=a$ этой системы, что $\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}$ не равно нулю, то, определив p и q из уравнений $F=0$, $\Phi=a$, мы приходим к уравнению в полных диференциалах вида:

$$dz=f(x, y, a)\,dx+\varphi(x, y, a)\,dy,$$

которое интегрируется в квадратурах. Таким образом в этом случае трудность второй части задачи уменьшилась Точно так же и первая часть задачи облегчается замечанием, что здесь попрежнему известен первый интеграл $F=C$ системы (64bis); следовательно, эту систему можно заменить системою *двух* диференциальных уравнений первого порядка.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение, содержащее только одно из трех переменных x, y, z, например переменное y, $F(y, p, q)=0$. Здесь $X=Z=0$ и, следовательно, уравнения (64) допускают интегрируемую комбинацию $dp=0$. Поэтому два уравнения $F(y, p, q)=0$, $p=a$ образуют вполне интегрируемую систему; это нетрудно проверить, так как, решив данное уравнение относительно q, мы придем к уравнению в полных диференциалах

$$dz=a\,dx+f(y, a)\,dy,$$

общий интеграл которого получается квадратурами:

$$z=ax+\int f(y, a)\,dy+b.$$

2. Уравнение $F(z, p, q)=0$ можно привести к предыдущему виду, взяв за независимые переменные y и z, но мы можем и не делать этой замены переменных. В самом деле, здесь $X=Y=0$, и уравнения (64) приводят к уравнению

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q};$$

отсюда имеем первый интеграл $q=ap$. Из двух уравнений

$$q=ap,\quad F(z, p, q)=0$$

получаем:

$$p=f(z, a),\quad q=af(z, a)$$

и уравнение в полных диференциалах

$$dz = f(z, a)(dx + a\,dy)$$

интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{dz}{f(z, a)} = x + ay + b.$$

Рассмотрим, например, уравнение $pq - z = 0$. Присоединяя к нему соотношение $q = ap$, получим из них:

$$p = \sqrt{\frac{z}{a}}, \quad q = a\sqrt{\frac{z}{a}},$$

$$dz = \sqrt{\frac{z}{a}}\,(dx + a\,dy);$$

полный интеграл

$$4az = (x + ay + b)^2$$

состоит из параболических цилиндров, касающихся плоскости xOy вдоль образующей. Плоскость xy есть особый интеграл.

Если $F = pq - z$, то уравнения (64) имеют первый интеграл $p - y = a$. Исходя из этого интеграла, мы придем к уравнению в полных диференциалах:

$$dz = (y + a)\,dx + \frac{z\,dy}{y + a};$$

это уравнение можно представить в виде:

$$dx = d\left(\frac{z}{y + a}\right),$$

и мы получаем другой полный интеграл $z = (y + a)(x + b)$, состоящий из параболоидов, касающихся плоскости xy.

3. Рассмотрим уравнение вида $f(x, q) - f_1(y, q) = 0$. Диференциальные уравнения (64bis)

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f_1}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dq}{\frac{\partial f_1}{\partial y}}$$

имеют первый интеграл $f(x, p) = a$. Присоединяя это уравнение к данному, мы найдем из двух соотношений

$$f(x, p) = a, \quad f_1(y, q) = a$$

значения $p = \varphi(x, a)$, $q = \varphi_1(y, a)$, и уравнение в полных диференциалах

$$dz = \varphi(x, a)\,dx + \varphi_1(y, a)\,dy$$

интегрируется двумя квадратурами:

$$z = \int \varphi(x, a)\,dx + \int \varphi_1(y, a)\,dy + b.$$

Когда уравнение первого порядка имеет предыдущий вид, то говорят, что в нем *переменные разделены*. Рассмотрим, например, уравнение

$$pq - xy = 0,$$

или, иначе, $\frac{p}{x} = \frac{y}{q}$. Приравнивая оба отношения постоянному a, получим уравнение в полных диференциалах

$$dz = ax\,dx + \frac{y}{a}\,dy,$$

и отсюда полный интеграл

$$z=\frac{ax^2}{2}+\frac{y^2}{2a}+b.$$

4. Найдем все такие функции $F(x, y, p, q)$, чтобы уравнения (64) имели первый интеграл $py-qx=a$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы соотношение $p\,dy+y\,dp-q\,dx-x\,dq=0$ было следствием соотношений (61bis); т. е. чтобы функция F сама была интегралом линейного уравнения

$$p\frac{\partial F}{\partial q}-y\frac{\partial F}{\partial x}+x\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial p}=0.$$

Соответствующая система диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dp}{-q}=\frac{dq}{p}$$

имеет три первых интеграла:

$$x^2+y^2=C,\quad p^2+q^2=C',\qquad py-qx=C'',$$

и следовательно, функция F должна иметь вид: $F(py-qx,\ x^2+y^2,\ p^2+q^2)$ Разыскание полного интеграла уравнения $F=0$ приводится к интегрированию двух совместных уравнений вида

$$p^2+q^2=f(x^2+y^2,\ py-qx),\qquad py-qx=a.$$

Пользуясь тожеством

$$(p^2+q^2)(x^2+y^2)=(py-qx)^2+(px+qy)^2,$$

из двух предыдущих уравнений получим:

$$px+qy=\sqrt{(x^2+y^2)f(x^2+y^2,\ a)-a^2}=\varphi(x^2+y^2,\ a);$$

отсюда находим для p и q следующие значения:

$$p=\frac{ay+x\varphi(x^2+y^2,\ a)}{x^2+y^2},\quad q=\frac{-ax+y\varphi(x^2+y^2,\ a)}{x^2+y^2},$$

и полный интеграл получается квадратурами:

$$z=-a\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)+\int\frac{\varphi(u,\ a)}{2u}\,du+b,$$

где $u=x^2+y^2$.

5. Иногда можно получить некоторые интегрируемые комбинации диференциальных уравнений (61) непосредственно из геометрических соображений. Предположим, например, что требуется определить поверхности S, касательные плоскости которых в каждой точке M пересекают под постоянным углом V плоскость, проходящую через M и Oz. Ясно, что если поверхность S удовлетворяет условию задачи, то все поверхности, которые мы получим, перемещая первую поверхность винтовым движением по оси Oz с произвольным ходом винта h, также удовлетворяют задаче, а следовательно, их огибающая поверхность есть интеграл того же уравнения; но очевидно, что эта огибающая поверхность есть геликоид с ходом h. Так как его можно перемещать параллельно оси Oz на произвольное расстояние, то отсюда следует, что уравнение в частных производных задачи и уравнение в частных производных геликоида $py-qx=a$ (§ 438) имеют, при всяком $a=\dfrac{h}{2\pi}$, бесконечное множество общих интегралов, зависящих еще от другого произвольного постоянного, соответствующего перемещению интегральной поверхности параллельно оси Oz. Следовательно, диференциальные уравнения (64) характеристических линий уравнения в частных производных поверхностей S имеют первый интеграл $py-qx=a$, и мы получим полный интеграл квадратурами.

Примечание. Следует заметить, что, для того чтобы система (61) была вполне интегрируемою, нет необходимости, чтобы соотношение (63) удовлетворялось тождественно; достаточно, чтобы оно удовлетворялось в силу самого соотношения $F=0$. Этим замечанием иногда можно воспользоваться при нахождении функции Φ. В самом деле, найти интегрируемую комбинацию уравнений (64) значит, в сущности, найти пять таких функций $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_p, \lambda_q$ переменных x, y, z, p, q, чтобы

$$\lambda_x\, dx + \lambda_y\, dy + \lambda_z\, dz + \lambda_p\, dp + \lambda_q\, dq$$

было точным диференциалом $d\Phi$, и чтобы, кроме того, было

$$P\lambda_x + Q\lambda_y + (Pp + Qq)\lambda_z - (X + pZ)\lambda_p - (Y + qZ)\lambda_q = 0.$$

Если последнее соотношение удовлетворяется не тождественно, а только в силу уравнения $F=0$, то функция Φ не будет собственно первым интегралом системы (64). Тем не менее, так как множители $\lambda_x, \lambda_y, \ldots$ равны частным производным от Φ, то два уравнения $F=0$, $\Phi=a$ образуют и в этом случае вполне интегрируемую систему, так как уравнение (63), по предположению, есть следствие уравнения $F=0$ *. То же замечание относится и к системе (64bis).

446. Задача Коши Пусть нам дано уравнение

$$p = f(x, y, z, q), \tag{65}$$

правая часть которого голоморфна вблизи системы значений (x_0, y_0, z_0, q_0), и, кроме того, пусть дана функция $\varphi(y)$, голоморфная в области точки y_0 и такая, что $\varphi(y_0) = z_0$, $\varphi'(y_0) = q_0$; выше (§ 386) было доказано, что это уравнение имеет интеграл, голоморфный в области точки (x_0, y_0) и обращающийся при $x = x_0$ в данную функцию $\varphi(y)$ Пусть будет C плоская кривая, данная уравнениями $x = x_0$, $z = \varphi(y)$; геометрически этот результат можно выразить следующим образом: *для уравнения (65) существует аналитическая интегральная поверхность, и притом только одна, проходящая через кривую C.*

Это предложение можно обобщить. Рассмотрим уравнение произвольного вида

$$F(x, y, z, p_0, q) = 0, \tag{66}$$

и определим сначала интегральную поверхность, проходящую через такую же плоскую кривую, как кривая C, но лежащую в плоскости $x = x_0$ параллельной плоскости yz. Пусть будет $z = \varphi(y)$ уравнение цилиндра, проектирующего кривую C параллельно оси Ox. Так как функция φ голоморфна в области точки y_0, то уравнение

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \tag{67}$$

где $z_0 = \varphi(y_0)$, $q_0 = \varphi'(y_0)$, и p рассматривается как неизвестное, имеет

---

* Если уравнение $F=0$ можно решить относительно одного из переменных x, y, z, p, q, то можно предположить, что функция Φ не содержит этого переменного, и что оно не входит также в коэфициенты X, Y, Z, P, Q. Рассмотрим, например, уравнение вида:

$$p + f(x, y, z, q) = 0,$$

чтобы найти его полный интеграл, достаточно присоединить к нему другое уравнение $\varphi(x, y, z, q) = a$, образующее с первым вполне интегрируемую систему. Условие $[p + f, \varphi] = 0$ обращается здесь в

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(q\frac{\partial f}{\partial q} - f\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

и p не входит в это уравнение.

Вообще предположим, что соотношение $F=0$ можно удовлетворить, полагая

$$p = f(x, y, z, \lambda), \quad q = \varphi(x, y, z, \lambda),$$

где λ — вспомогательный параметр. Здесь также можно принять λ за такую функцию от x, y, z, чтобы уравнение $dz = f\,dx + \varphi\,dy$ было вполне интегрируемым; определяя отсюда $\lambda(x, y, z)$, мы и в этом случае получаем для определения λ линейное уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\varphi + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\varphi\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}f + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}f\right).$$

[Антомари (Antomari), *Bulletin de la Société mathématique*, т. XIX, стр. 154].

несколько корней Пусть будет p_0 один из них. Если функция F голоморфна в области системы значений $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, и если, кроме того, частная производная $\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0$ не равна нулю при этой системе значений, то уравнение (66) имеет корень $p = f(x, y, z, q)$, голоморфный в области значений x_0, y_0, z_0, q_0 и обращающийся в p_0 при этих значениях (т. I, § 184). Таким образом мы приходим к уравнению вида (65), и следовательно, уравнение (66) действительно имеет интегральную поверхность, проходящую через кривую C Из предыдущего следует, что уравнение (66) имеет m интегральных поверхностей, удовлетворяющих условию задачи, если уравнение (67) есть m-й степени относительно p. Исключение возможно только в том случае, если один из корней уравнения (67) удовлетворяет в то же время соотношению $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ во всех точках кривой C, так как x_0, y_0, z_0 суть координаты любой точки этой кривой.

Рассмотрим, наконец, произвольную кривую Γ, представляемую системою двух уравнений:

$$x = \lambda(y), \quad z = \mu(y); \tag{68}$$

определим интегральную поверхность уравнения (66), проходящую через кривую Γ. Эту задачу можно привести к предыдущей заменою переменных В самом деле, положим

$$x = X + \lambda(Y), \quad y = Y;$$

т гда соотношение $dz = p\,dx + q\,dy$ обращается в

$$dz = p\,dX + p\lambda'(Y)\,dY + q\,dY;$$

отсюда имеем:

$$p = \frac{\partial z}{\partial X}, \quad p\lambda'(Y) + q = \frac{\partial z}{\partial Y},$$

и уравнение (66) обращается в следующее:

$$F\left[X + \lambda(Y),\ Y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial Y},\ \frac{\partial z}{\partial Y} - \lambda'(Y)\frac{\partial z}{\partial X}\right] = 0. \tag{66bis}$$

Таким образом мы приходим к разысканию для этого нового уравнения интеграла, приводящегося к $\mu(Y)$ при $X = 0$, и мы видим, что, вообще, *интегральная поверхность уравнения первого порядка определена, если дана какая-нибудь кривая, лежащая на этой поверхности.* Интегральных поверхностей, отвечающих вопросу, может быть несколько, если уравнение, соответствующее в этом случае уравнению (67), имеет несколько различных корней, подобно тому как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и m-й степени относительно y' имеет, вообще, m интегральных кривых, проходящих через данную точку. Ниже мы рассмотрим тот исключительный случай, когда предыдущие рассуждения неприменимы.

Задача определения интегральной поверхности уравнения в частных производных первого порядка, проходящей через заданную кривую, называется *задачею Коши.* Такое название имеет целью напомнить ту тесную связь между этою задачею и общею теоремою Коши, которую мы выяснили выше. Покажем теперь, как можно решить задачу Коши посредством только исключения переменных, если известен полный интеграл; это даст проверку предыдущих результатов.

Пусть мы знаем полный интеграл $V(x, y, z, a, b)=0$, и пусть Γ — кривая, координаты точек которой даны в функции параметра λ формулами:

$$x=f(\lambda), \quad y=g(\lambda), \quad z=h(\lambda). \tag{69}$$

Если эта кривая Γ расположена на интегральной поверхности уравнения (66), то через каждую точку M кривой Γ проходит полный интеграл, касательный к Σ и, следовательно, касательный к кривой Γ. Значения параметров a и b, соответствующие этому полному интегралу, суть функции λ, определенные условиями:

$$\begin{gathered} V(f, g, h, a, b)=0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} f'(\lambda)+\frac{\partial V}{\partial y} g'(\lambda)+\frac{\partial V}{\partial z} h'(\lambda)=0, \end{gathered} \tag{70}$$

смысл которых очевиден, и которые можно кратко записать в виде:

$$U(x)=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda}=0, \tag{71}$$

полагая

$$U(\lambda)=V[f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda), a, b].$$

Пусть $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ — полученные функции. Искомый интеграл Σ есть огибающая полного интеграла

$$V[x, y, z, a(\lambda), b(\lambda)]=0$$

при изменении параметра λ, и мы можем геометрически истолковать этот процесс следующим образом: *мы берем огибающую полных интегралов, касательных к кривой* Γ.

Очевидно, что это геометрическое построение должно привести к поверхности, проходящей через кривую Γ, что легко проверить и непосредственным вычислением. В самом деле, берем производную по λ от левой части первого из уравнений (70). Приняв во внимание второе уравнение, мы видим, что функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial a} a'(\lambda)+\frac{\partial V}{\partial b} b'(\lambda)=0. \tag{72}$$

Но, если мы в этом уравнении заменим f, g, h через x, y, z и присоединим к нему уравнение $V(x, y, z, a, b)=0$, то мы получим уравнения характеристики, вдоль которой полный интеграл S касается своей огибающей Σ. Уравнение (72) выражает, таким образом что эта характеристика проходит через точку кривой Γ с координатами $x=f(\lambda)$, $y=g(\lambda)$, $z=h(\lambda)$.

Примечание. Уравнения (70) могут иметь несколько систем решений с разными a и b. Тогда через кривую Γ проходит несколько интегралов. В частности, может случиться, что эти уравнения допускают систему решений, независимых от x, а именно $a=a_0$, $b=b_0$. Уравнение $V(f, g, h, a_0, b_0)=0$ удовлетворяется тогда для всех λ, и следовательно, кривая Γ лежит на полном интеграле $V(x, y, z, a_0, b_0)=0$. Обратное доказывается таким же образом.

Более подробное исследование задачи Коши потребовало бы полного решения системы (70) с двумя неизвестными a и b. Мы рассмотрим это далее, после изучения характеристик (§ 447).

Пример. Требуется найти интеграл уравнения $pq = xy$, обращающийся в $\varphi(y)$ при $x = x_0$, если задан интеграл

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b.$$

Уравнение

$$\varphi(y) = \frac{ax_0^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b$$

должно иметь двукратный корень, удовлетворяющий также соотношению

$$\varphi'(y) = \frac{y}{a}.$$

Заменяя y через u, получаем:

$$a = \frac{u}{\varphi'(u)}, \quad b = \varphi(u) - \frac{ux_0^2}{2\varphi'(u)} + \frac{a^2\varphi'(u)}{2u},$$

и мы приходим к отысканию огибающей интеграла:

$$z = \varphi(u) + \frac{u}{2\varphi'(u)}(x^2 - x_0^2) + \frac{\varphi'(u)}{2u}(y^2 - u^2),$$

при переменном u Диференцируя по u и сокращая на общий множитель $\varphi'(u) - u\varphi''(u)$, получим уравнение:

$$u^2(x^2 - x_0^2) = \varphi'^2(u)(y^2 - u^2).$$

В частном случае, когда $\varphi'(u) - u\varphi''(u) = 0$, $\varphi(u)$ имеет вид:

$$\varphi(u) = \alpha u^2 + \beta,$$

и заданная кривая лежит на полном интеграле:

$$z = \alpha y^2 + \frac{1}{4\alpha}(x^2 - x_0^2) + \beta. \tag{73}$$

На этом примере легко проверить общий закон, указанный выше. Каждый раз, когда заданная кривая Γ лежит на полном интеграле

$$V(x, y, z, a_0, b_0) = 0,$$

уравнения

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

удовлетворяются, если мы придадим a и b значения $a = a_0$, $b = b_0$ не зависящие от λ.

447. Характеристики. Метод Коши. Метод Коши не зависит от теории полного интеграла; мы изложим этот метод с геометрической точки зрения. Для этого найдем сначала геометрическое значение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{74}$$

Угловые коэфициенты касательной плоскости к интегральной поверхности S в данной точке (x, y, z) пространства связаны между собою соотношением (74); следовательно, эта касательная плоскость не может быть произвольною плоскостью, проходящею через точку (x, y, z). Так как в силу уравнения (74) положение этой касательной плоскости зависит только от одного произвольного параметра, то она, вообще, огибает некоторый конус T с вершиною в точке (x, y, z), и уравнение (74) выражает, что *касательная плоскость в какой-нибудь точке M к каждой интегральной поверхности S, проходящей через эту точку, касается вместе с тем и некоторого конуса T, имеющего вершину в этой точке M.*

Очевидно, что конус T зависит от функции F, а также от положения своей вершины. Из самого определения конуса T следует, что мы получим уравнение этого конуса, имеющего вершину в точке (x, y, z), разыскивая огибающую плоскости

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{75}$$

параметры p и q которой связаны соотношением (74). Для этого должно исключить p и q из двух уравнений (74), (75) и из соотношения (т. I, § 198, примечание)

$$(Y - y)\frac{\partial F}{\partial p} - (X - x)\frac{\partial F}{\partial q} = 0. \tag{76}$$

Уравнения (75) и (76) представляют характеристику касательной плоскости (75) т. е. образующую, вдоль которой касательная плоскость касается конуса T. Если мы предположим, что оси координат прямоугольны, то мы легко найдем уравнение конуса N, дополнительного к конусу T, т. е. конуса, образуемого нормалями к различным интегральным поверхностям, проходящим через точку M. В самом деле, уравнения нормали будут:

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

и, исключая p и q, получим уравнение конуса N:

$$F\left(x, y, z, -\frac{X - x}{Z - z}, -\frac{Y - y}{Z - z}\right) = 0. \tag{77}$$

Если данное уравнение (74) — линейное относительно p и q, то конус N обращается в плоскость, и конус T — в прямую Δ. Мы видели (§ 438), что в этом случае интегрирование приводится к разысканию кривых, касающихся в каждой своей точке соответствующей прямой Δ. Распространяя этот прием на нелинейные уравнения, мы придем к методу Коши.

Пусть будет S интегральная поверхность, представляемая уравнением

$$z = f(x, y).$$

Касательная плоскость в каждой точке M этой поверхности касается также конуса T вдоль одной из его образующих G. Всякая линия C поверхности S, касающаяся в каждой своей точке соответствующей образующей G, называется *характеристическою линиею (характеристи-*

кою). Через каждую точку поверхности S (за исключением особых точек, если они существуют) проходит одна и только одна линия этого рода Почему этим линиям дано название характеристик, будет выяснено ниже (§ 448). Здесь мы прежде всего покажем, и в этом состоит сущность метода Коши, что эти линии могут быть определены системою обыкновенных диференциальных уравнений, причем не требуется знать функции $f(x, y)$. Из определения характеристических линий прежде всего следует, что касательная к линии C совпадает с прямою G, определяемой уравнениями (75) и (76), которые в обозначениях § 445 можно представить в виде:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{Pp+Qq}.$$

Вдоль характеристики количества x, y, z, p, q суть функции одного независимого переменного; отсюда мы заключаем, что между dx, dy, dz существуют соотношения

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=du, \tag{78}$$

где u — вспомогательное переменное, введенное исключительно для большей симметричности в выводах. Вдоль линии C мы имеем также:

$$dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy,$$

где r, s, t — частные производные второго порядка от функции $f(x, y)$. С другой стороны, так как $z=f(x, y)$ есть интеграл данного уравнения (74), то частные производные r, s, t удовлетворяют также двум соотношениям

$$X+pZ+Pr+Qs=0, \quad Y+qZ+Ps+Qt=0,$$

которые получим, диференцируя уравнение (74) соответственно по x и по y Заменяя в выражениях диференциалов dp и dq диференциалы dx и dy через $P\,du$ и $Q\,du$, будем иметь:

$$dp=(Pr+Qs)\,du, \quad dq=(Ps+Qt)\,du,$$

или, в силу предыдущих соотношений:

$$dp=-(X+pZ)\,du, \quad dq=-(Y+qZ)\,du.$$

Присоединяя эти уравнения к уравнениям (78), мы приходим к системе обыкновенных диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=\frac{-dp}{X+pZ}=\frac{-dq}{Y+qZ}=du. \tag{79}$$

Эта система тождественна с системою (64), полученною методом Лагранжа.

Эта система диференциальных уравнений совершенно не зависит от рассматриваемого интеграла. Отсюда можно вывести следующие заключения. Пусть будут (x_0, y_0, z_0) координаты какой-нибудь точки M_0 поверхности S, p_0 и q_0 — угловые коэфициенты касательной плоскости в этой точке. Если функция F голоморфна вблизи этой системы значений, и если в отношениях (79) все знаменатели не равны одновременно нулю при значениях x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, то уравнения (79) имеют систему интегралов, и притом только одну, принимающих значения x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 при $u=0$. Отсюда следует, что, *если две интегральные поверхности касаются между собою в точке* (x_0, y_0, z_0), *то они касаются вдоль общей характеристической линии, проходящей через эту точку.*

Для удобства мы будем называть *элементом* всякую систему значений пяти переменных x, y, z, p, q; иначе, элемент состоит из совокупности точки с координатами (x, y, z) и из плоскости с угловыми коэфициентами p, q, проходящей через эту точку. Вдоль характеристической линии x, y, z, p, q суть функции одного независимого переменного u. Следовательно, каждой точке характеристической линии соответствует элемент, состоящий из этой точки и плоскости с угловыми коэфициентами p, q, проходящей через эту точку. Но в силу уравнений (79) мы имеем:

$$\frac{dz}{du}=p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du};$$

следовательно, эта плоскость содержит касательную прямую к характеристической линии в точке (x, y, z). Когда точка (x, y, z) описывает характеристическую линию, то соответствующая плоскость огибает некоторую развертывающуюся поверхность, проходящую через эту линию; эта поверхность называется *характеристическою развертывающейся поверхностью.* Таким образом каждой характеристической линии соответствует характеристическая развертывающаяся поверхность, проходящая через эту линию; в дальнейшем мы будем называть *характеристикою* совокупность линии и развертывающейся поверхности, а иногда и одну только линию, когда это не может привести к недоразумению.

Таким образом характеристика состоит из бесконечного множества элементов, зависящих от одного независимого переменного, причем бесконечно малые изменения количеств x, y, z, p, q связаны соотношениями (79). Следовательно, характеристика вполне определена, если дан один из ее элементов, и предыдущую теорему можно выразить в следующем виде, вполне ей равносильном:

Если две интегральные поверхности имеют общий элемент, то они имеют общими все элементы характеристики, выходящей из этого элемента.

Характеристики зависят от *трех* произвольных параметров. В самом деле, характеристика определена, если даны координаты $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ одного из ее элементов. Одной из этих координат, например x_0, можно дать произвольное числовое значение; с другой стороны, из самого определения характеристик следует, что между координатами любого элемента существует соотношение

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=0;$$

следовательно, остается только три произвольных параметра.

Чтобы найти эти характеристики, заметим прежде всего, что уравнения (79) имеют первый интеграл $F=\text{const}$, так что, если $F(x, y, z, p, q)$ равно нулю для координат $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ начального элемента, то F будет равно нулю вдоль всей характеристики, выходящей из этого элемента; это нетрудно было предвидеть из самого способа получения уравнений (79). Следовательно, чтобы найти характеристики данного уравнения, можно присоединить к системе (79) само соотношение $F=0$; таким образом, мы приведем эту систему к системе трех диференциальных уравнений первого порядка.

Предположим, что мы получили в конечном виде уравнение характеристик; пусть будут, например

$$\left.\begin{array}{ll} y=f_1(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), & z=f_2(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), \\ p=f_3(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), & q=f_4(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \end{array}\right\} \tag{80}$$

уравнения характеристики, выходящей из элемента $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)$. Два первых уравнения представляют самую характеристическую линию, и так как всякая интегральная поверхность есть место характеристических линий, то мы получим эту поверхность, предполагая, что $x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0$ суть функции вспомогательного параметра v. Следовательно, нам нужно исследовать, как определить эти пять функций от v, чтобы поверхность, образуемая характеристическими линиями, была интегральною поверхностью. Для большей симметрии введем, следуя Дарбу, вспомогательное переменное u.

Пусть будут

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi_1(u,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), \\ y=\varphi_2(u,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), \\ z=\varphi_3(u,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), \end{array}\right\} \tag{81}$$

$$\left.\begin{array}{l} p=\varphi_4(u,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0), \\ q=\varphi_5(u,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \end{array}\right\} \tag{82}$$

формулы, представляющие те интегралы системы (79), которые принимают при $u=0$, соответственно, значения $x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0$. Если мы заменим в этих формулах $x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0$ функциями второго вспомогательного переменного v, то уравнения (81), где u и v рассматриваются как независимые переменные, представят, вообще, некоторую поверхность S. Чтобы эта поверхность S была интегральною, а лежащие на ней линии $v=\text{const}$ — характеристическими, необходимо, чтобы формулы (82) определяли угловые коэфициенты касательной плоскости к поверхности и, кроме того, чтобы во всех точках поверхности S было $F=0$. Следовательно, пять функций $x,\ y,\ z,\ p,\ q$ двух переменных u и v должны удовлетворять трем условиям:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{83}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}-p\frac{\partial x}{\partial u}-q\frac{\partial y}{\partial u}=0, \tag{84}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}-p\frac{\partial x}{\partial v}-q\frac{\partial y}{\partial v}=0. \tag{85}$$

Так как пять функций φ_i суть интегралы системы (79), то, как уже было указано, $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)$, и следовательно, соотношение (83) удовлетворится, если будет:

$$F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)=0. \tag{86}$$

Соотношение (84) само по себе удовлетворяется, так как оно есть следствие диференциальных уравнений. Что касается условия (85), то Коши преобразует его следующим образом.

Обозначим левую часть этого соотношения через H; диференцируя H по u, имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}.$$

С другой стороны, диференцируя соотношение (84) по v, имеем также:

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Вычитая почленно, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u};$$

заменяя здесь производные по u их значениями из формул (79), будем иметь:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+P\frac{\partial p}{\partial v}+Q\frac{\partial q}{\partial v}+Z\left(p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

Наконец, принимая во внимание, что пять функций x, y, z, p, q от v удовлетворяют соотношению

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,$$

мы будем также иметь:

$$X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v}+P\frac{\partial p}{\partial v}+Q\frac{\partial q}{\partial v}=0;$$

следовательно, предыдущее значение производной $\frac{\partial H}{\partial u}$ можно представить в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Z\left(p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=-ZH. \tag{87}$$

Из этого соотношения получаем следующее выражение для H:

$$H=H_0 e^{-\int\limits_0^u Z\,du}, \tag{88}$$

где H_0 обозначает значение H при $u=0$, т. е. когда x, y, z, p, q обращаются, соответственно, в x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 Так как, по предположению, функция F, а следовательно, и ее частная производная Z, голоморфны вблизи значений x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, то, чтобы H было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы H_0 было равно нулю, т. е. чтобы было:

$$\frac{\partial z_0}{\partial v}=p_0\frac{\partial x_0}{\partial v}+q_0\frac{\partial y_0}{\partial v}.$$

Таким образом, чтобы получить интегральную поверхность, достаточно заменить в формулах* (80) *или* (81) *количества* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 *функциями вспомогательного переменного* v, *удовлетворяющими двум условиям:*

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \quad \frac{\partial z_0}{\partial v} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial v}. \tag{89}$$

Пользуясь этим методом, нетрудно получить и решение задачи Коши. В самом деле, если требуется определить интегральную поверхность, проходящую через данную кривую Г, то можно взять за x_0, y_0, z_0 координаты точек этой кривой, предполагая, что они выражены в функции переменного параметра v; тогда из уравнений (89) мы определим p_0 и q_0. Это решение можно также представить геометрически; в самом деле, первое из соотношений (89) выражает, что плоскость с угловыми коэфициентами p_0, q_0, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0), касается конуса T, имеющего вершину в этой точке, а второе, — что эта плоскость проходит через касательную прямую к кривой Г. Таким образом ход решения может быть представлен в следующем виде: *через касательную прямую к кривой* Г *в точке* M *этой кривой проводим плоскость, касательную к конусу* T, *имеющему вершину в точке* M; *пусть будет* C *характеристика, выходящая из элемента, определенного таким образом: поверхность, образованная этою характеристикою, когда точка* M *описывает кривую* Г, *есть интегральная поверхность, проходящая через эту кривую* Г.

Поверхностей, отвечающих на вопрос, будет столько, сколько можно провести через касательную прямую к кривой Г плоскостей, касающихся конуса T. Ясно, что в каждую отдельную совокупность надо соединять те плоскости, которые образуют непрерывную последовательность.

---

* Здесь, однако, предполагается, что знаменатели P, Q, $X + pZ$, $Y + qZ$ не равны все нулю при начальных значениях x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. В последнем случае формулы (81) и (82) обращаются в $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, но, если мы не введем вспомогательного переменного u, то уравнения (70) могут иметь интегралы, принимающие данные начальные значения (§ 393, примечание I). Следовательно, интегралы рассматриваемого уравнения, удовлетворяющие одновременно четырем уравнениям

$$R = 0, \quad Q = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

не охватываются общим методом. Такие интегралы, если они существуют, называются *особыми*. Их вообще не бывает у уравнения, данного непосредственно, а не получающегося через исключение постоянных.

Все эти рассуждения можно сделать еще более определенными, выяснив, какие предположения необходимо сделать, чтобы предыдущие заключения имели место. Прежде всего здесь существенно предположение, что $F(x, y, z, p, q)$ есть *аналитическая* функция от x, y, z, p, q. Но чтобы доказать, что всякий интеграл $z = f(x, y)$ есть место характеристик, нет необходимости предполагать, что и сам этот интеграл аналитический; достаточно допустить, что его производные второго порядка r, s, t непрерывны, так как только эти производные входят в предыдущие доказательства. С другой стороны, характеристики определяются системою диференциальных уравнений (79), коэфициенты которых зависят от производных от функции $F(x, y, z, p, q)$ и суть, следовательно, функции аналитические. Поэтому и самые характеристики суть аналитические кривые. Отсюда видно, что на всяком интеграле, аналитическом или неаналитическом, существует семейство аналитических линий — характеристик. Таким образом функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$, представляющие общий интеграл уравнений (79), суть аналитические функции от u и начальных значений x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 (§ 337). Чтобы все дальнейшие заключения были правильными, достаточно, чтобы эти начальные значения были непрерывными функциями параметра v, имеющими непрерывные производные, но нет необходимости, чтобы они были аналитическими функциями от v.

Это вполне согласно с методом изменения постоянных. В самом деле, если полный интеграл $V(x, y, z, a, b)$ есть аналитическая функция своих аргументов, то и $F(x, y, z, p, q)$ будет аналитическою функциею, но нигде в приведенных рассуждениях не содержится требования, чтобы произвольная функция $b = \varphi(a)$ была аналитическою функциею от a. Аналогичное замечание применимо и к общему интегралу линейного уравнения. Дальнейшие подробности по этому вопросу см. в диссертации Гедрика (Hedrick), „Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen", Геттинген 1901.

Рассмотрим сначала общий случай, когда касательная прямая к кривой Г не есть образующая конуса T. Если p_0 и q_0 суть угловые коэфициенты касательной плоскости к конусу T, то направляющие косинусы образующей прикосновения пропорциональны количествам P_0, Q_0, $P_0p_0+Q_0q_0$ [формулы (75) и (76)]. С другой стороны, направляющие косинусы касательной к кривой Г пропорциональны

$$\frac{\partial x_0}{\partial v}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial v}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial v}=p_0\frac{\partial x_0}{\partial v}+q_0\frac{\partial y_0}{\partial v}.$$

Так как, по предположению, эти две прямые имеют различные направления, то разность $P_0\frac{\partial y_0}{\partial v}-Q_0\frac{\partial x_0}{\partial v}$ не равна нулю, и мы получим из уравнений (89) p_0 и q_0 как функции от v, голоморфные в области рассматриваемой точки кривой Г. С другой стороны, можно решить два первых уравнения (81) относительно u и v, так как при $u=0$ функциональный определитель $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$ обращается в

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0\frac{\partial y_0}{\partial v}-\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0\frac{\partial x_0}{\partial v}, \quad \text{т. е. в } P_0\frac{\partial y_0}{\partial v}-Q_0\frac{\partial x_0}{\partial v}.$$

Внося значения количеств u и v в третью формулу (81), мы найдем, что z есть функция от x и y, голоморфная в области рассматриваемой точки (см. § 446).

Если, напротив, касательная прямая к кривой Г *в какой-нибудь отдельной точке* этой кривой совпадает с тою образующею конуса T, вдоль которой плоскость с угловыми коэфициентами p_0, q_0 касается этого конуса, то эта точка есть, вообще, особая точка соответствующего интеграла. Если же это имеет место во *всех точках кривой* Г, то мы должны различать два случая в зависимости от того, будет ли кривая Г характеристической или нет.

Если кривая Г — характеристическая, то она касается в каждой своей точке M по одной из образующих G конуса T, имеющего вершину в этой точке; тогда характеристическая развертывающаяся поверхность есть огибающая плоскости, касающейся конуса T вдоль образующей G, когда вершина M описывает кривую Г. Таким образом кривая Г определяет ряд элементов, состоящих из точек M этой кривой и из касательных плоскостей P с соответствующим конусом T, касающихся кривой Г в соответствующих точках M. Характеристическая кривая, выходящая из каждого элемента, определенного таким образом, совпадает с самою кривою Г, и формулы (81) не определяют поверхности. Но ясно, что в этом случае наша задача действительно неопределенная. В самом деле, пусть будут M точка кривой Г, P — плоскость, касающаяся конуса T, имеющего вершину в точке M, вдоль касательной прямой G к кривой Г, и Г' — какая-нибудь другая кривая, проходящая через точку M, у которой касательною прямою в точке M будет какая-нибудь прямая плоскости P, отличная от прямой G. На основании доказанного выше интегральная поверхность, проходящая через кривую Г', проходит и через кривую Г.

Если данное уравнение (74) — нелинейное относительно p и q, как мы это предполагаем, то есть другая возможность: кривая Г может касаться в каждой своей точке образующей G соответствующего конуса T и в то же время не быть характеристическою. В самом деле, самые общие кривые, обладающие этим свойством, зависят от *произвольной функции*. Пусть будет

$$\Phi\left(x, y, z; \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right)=0$$

уравнение конуса T, имеющего вершину в точке (x, y, z). Чтобы кривая Γ касалась в каждой своей точке образующей конуса T, координаты x, y, z точек этой кривой должны быть функциями переменного v, удовлетворяющими условию

$$\Phi\left(x, y, z; \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)=0. \tag{90}$$

Если мы возьмем, например, x за независимое переменное, то можно произвольно выбрать $y=f(x)$, и, заменяя в предыдущем соотношении y через $f(x)$, мы получим диференциальное уравнение первого порядка для определения z в функции от x. Всякая кривая, удовлетворяющая условию (90) и притом не характеристическая, называется *интегральною кривою*

Предположим, что кривая Γ, относительно которой мы хотим решить задачу Коши, — интегральная. Из каждой точки M кривой Γ выходит характеристическая кривая, касающаяся кривой Γ, и из предыдущих вычислений следует, что поверхность S, образуемая этими характеристическими кривыми, есть интегральная поверхность; в самом деле, чтобы получить эту поверхность, достаточно взять в формулах (81) и (82) за x_0, y_0, z_0 координаты точек кривой Γ и за p_0, q_0 — угловые коэфициенты плоскости, касающейся конуса T вдоль касательной прямой к кривой Γ. Но эта кривая Γ есть особая линия поверхности S. В самом деле, если бы это было не так, то производные r, s, t имели бы в точках кривой Γ конечные значения; так как, кроме того, мы уже имеем из уравнения конуса $TQ_0dx_0=P_0dy_0$ [уравнение (78)], то вычисления, сделанные на стр. 247 при выводе уравнений (79), были бы здесь применимы без изменения, и отсюда мы заключили бы, что кривая Γ — характеристическая, что противно предположению. В нашем случае кривая Γ — не характеристическая, а огибающая характеристических линий поверхности S, и аналогична ребру возврата развертывающейся поверхности.

Примечание. Пользуясь методом Коши, нетрудно также получить полный интеграл. В самом деле, мы удовлетворим условиям (89), полагая $x_0=a$, $y_0=b$, $z_0=c$, где a, b, c — произвольные постоянные, а p_0 и q_0 связаны соотношением $F(a, b, c, p_0, q_0)=0$. Полученная, таким образом, интегральная поверхность есть место характеристических линий, выходящих из точки (a, b, c), которая, очевидно, есть коническая точка для этой поверхности. Если мы дадим одной из координат a, b, c постоянное числовое значение, то получим полный интеграл.

Примеры. Возьмем уравнение $pq-xy=0$, рассмотренное Коши; принимая во внимание самое уравнение, мы можем представить диференциальные уравнения характеристики в виде:

$$p\,dx=q\,dy=\frac{dz}{2}=x\,dp=y\,dq.$$

Отсюда последовательно выводим интегрируемые комбинации:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q}=\frac{dy}{y}, \quad dz=\frac{p}{x}\,2x\,dx=\frac{q}{y}\,2y\,dy,$$

и характеристика, выходящая из элемента $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, представится формулами:

$$\frac{p}{p_0}=\frac{x}{x_0}, \quad \frac{q}{q_0}=\frac{y}{y_0}, \quad z-z_0=\frac{p_0}{x_0}(x^2-x_0^2)=\frac{q_0}{y_0}(y^2-y_0^2),$$

причем x_0, y_0, p_0, q_0 связаны соотношением: $p_0q_0=x_0y_0$. Чтобы иметь интеграл, обращающийся при $x=x_0$ в $\varphi(y)$, положим, следуя общему методу, $y_0=u$, $z_0=\varphi(u)$; тогда из уравнений (89) будем иметь:

$$q_0=\varphi'(u), \quad p_0=\frac{x_0u}{\varphi'(u)}.$$

Следовательно, искомый интеграл представляется системою двух совместных уравнений:

$$z-\varphi(u)=\frac{u}{\varphi'(u)}(x^2-x_0^2)=\frac{\varphi'(u)}{u}(y^2-u^2),$$

которые определяют u и z в функции от x и y. Эти два уравнения можно заменить следующими:

$$[z-\varphi(u)]^2=(x^2-x_0^2)(y^2-u^2), \quad [z-\varphi(u)]\varphi'(u)=u(x^2-x_0^2),$$

из которых второе получается из первого диференцированием по параметру u. Мы получим искомый интеграл, исключая u, и мы можем заметить, что этот результат согласен с теорией Лагранжа (ср. § 446).

2. Вернемся к уравнению на стр. 237:

$$(1+p^2+q^2)z^2-R^2=0,$$

выражающему, что длина отрезка нормали между точкою искомой поверхности и плоскостью xOy равна R. Отсюда следует, что для того, чтобы иметь конус нормалей N для точки M пространства, достаточно описать из точки M шар радиусом, равным R, и взять прямой круглый конус с вершиною в точке M, проходящий через линию пересечения плоскости xOy с этим шаром. Конус T есть в нашем случае круглый конус с вершиною в точке M, дополнительный к конусу N. Мы знаем здесь полный интеграл: это — шары с радиусом, равным R, центры которых лежат в плоскости xOy; следовательно, характеристические линии, т. е. линии пересечения двух бесконечно близких шаров (см. § 448), суть круги с радиусом, равным R, плоскости которых параллельны оси Oz и центры которых лежат в плоскости xOy. Мы видели, что всякая интегральная кривая может быть рассматриваема как огибающая характеристических линий, лежащих на интегральной поверхности. Следовательно, интегральные кривые представятся системою трех уравнений:

$$\begin{gathered}(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+z^2-R^2=0,\\ x-a+[y-\varphi(a)]\varphi'(a)=0,\\ 1+\varphi'^2(a)+\varphi(a)\varphi''(a)-y\varphi''(a)=0,\end{gathered}$$

где функция $\varphi(a)$ произвольна.

448 Вывод характеристик из полного интеграла. Понятие характеристики естественно вытекает из теории Лагранжа. В самом деле, мы видели, что, если $V=0$ есть полный интеграл уравнения первого порядка, то мы получим интегральную поверхность, исключая a из двух соотношений:

$$V[x, y, z, a, \varphi(a)]=0, \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial \varphi(a)}\varphi'(a)=0, \tag{91}$$

где $\varphi(a)$ — произвольная функция. Если мы дадим параметру a постоянное значение, то эти два уравнения представляют кривую, место которой есть интегральная поверхность. Уравнения этой кривой имеют вид:

$$V(x, y, z, a, b)=0, \quad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}c=0, \tag{92}$$

где a, b, c — произвольные параметры. Эти кривые образуют *комплекс;* таким образом, мы видим, что интегральные поверхности образованы кривыми этого комплекса, соединенными по тому или другому закону. Этим объясняется происхождение названия *характеристик*, данное этим кривым, так как они суть кривые прикосновения полного интеграла с его огибающею поверхностью. Характеристические развертывающиеся поверхности появляются здесь также естественно. Рассмотрим характеристическую кривую, соответствующую значениям a_0, b_0, c_0 параметров a, b, c; все различные интегральные поверхности, которые мы получим, выбирая такие функции φ, чтобы было $b_0=\varphi(a_0)$, $c_0=\varphi'(a_0)$, проходят через эту кривую и касаются между собою вдоль этой кривой, так как значения количеств p и q, определяемые для каждой точки интегральной поверхности формулами

$$\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}=0, \tag{93}$$

одинаковы для всех этих поверхностей. Из четырех уравнений (92) и (93) можно выразить любые четыре переменных x, y, z, p, q через пятое и через три произвольных постоянных a, b, c. Чтобы доказать тождественность получаемого, таким образом многообразия с характеристиками, выведенными нами ранее из метода Коши, предположим, что полный интеграл представлен уравнением вида: $z = \Phi(x, y, a, b)$. Тогда уравнения (92) и (93) обращаются в

$$z = \Phi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} c = 0, \tag{94}$$

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{95}$$

Из соотношений (94) и (95) можно выразить пять переменных (x, y, z, p, q) в функциях одного из них (например x) и трех произвольных постоянных a, b, c; задача приводится к доказательству, что эти функции удовлетворяют диференциальным уравнениям (64). Так как функция $\Phi(x, y, a, b)$ есть полный интеграл уравнения $F = 0$, то мы уже имеем между этими пятью функциями два соотношения:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad dz = p\,dx + q\,dy. \tag{96}$$

С другой стороны, из второго из уравнений (94) находим:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial x} + c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b\,\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial y} + c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b\,\partial y}\right) dy = 0. \tag{97}$$

Но, диференцируя по a и b тождество

$$F\left(x, y, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0,$$

получим:

$$Z\frac{\partial \Phi}{\partial a} + P\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial x} + Q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial y} = 0,$$

$$Z\frac{\partial \Phi}{\partial b} + P\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b\,\partial x} + Q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b\,\partial y} = 0,$$

и следовательно, исключая Z, будем иметь, на основании второго уравнения (94):

$$P\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial x} + c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b\,\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial y} + c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b\,\partial y}\right) = 0. \tag{98}$$

Сравнивая между собою соотношения (97) и (98), видим, что $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$. Остальные уравнения (64) мы получим, как в § 447, сравнивая соотношения

$$dp = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} dy, \quad dq = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy,$$

выведенные из уравнений (95), с соотношениями

$$X + Z\frac{\partial \Phi}{\partial x} + P\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$Y + Z\frac{\partial \Phi}{\partial y} + P\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} + Q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

которые получим, диференцируя по x и y тождество

$$F\left(x, y, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Примечание. Теория полного интеграла одинаково применима как к нелинейным уравнениям, так и к линейным. На первый взгляд кажется, напротив, что метод Коши имеет совершенно различный характер для линейных уравнений и для уравнений нелинейных; в самом деле, характеристические линии линейного уравнения, или уравнения, распадающегося на несколько линейных уравнений, образуют конгруэнцию, а не комплекс. Но если к каждой характеристической линии мы присоединим характеристическую развертывающуюся поверхность, то это различие исчезает. В самом деле, каждая характеристическая линия принадлежит бесконечному множеству характеристических развертывающихся поверхностей, зависящих от произвольного постоянного, так что эта совокупность линий и поверхностей действительно зависит от трех произвольных постоянных *. Рассмотрим, например, уравнение конических поверхностей $px+qy-z=0$. Уравнение $z=ax+by$ представляет полный интеграл, состоящий из плоскостей P, проходящих через начало координат. Здесь характеристические линии суть прямые, проходящие через начало координат, и характеристические развертывающиеся поверхности суть сами плоскости P. Следовательно, мы получим характеристику, присоединяя к прямой, проходящей через начало координат, плоскость, проходящую через эту прямую; полученная совокупность, действительно, зависит от трех произвольных постоянных.

449. Распространение метода Коши на случай многих переменных. Метод Коши нетрудно распространить на уравнение с любым числом независимых переменных:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z,\ p_1, p_2, \ldots, p_n)=0, \quad p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}. \tag{99}$$

Пусть будет $z=\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какой-нибудь интеграл уравнения (99); мы будем называть *элементом* этого интеграла совокупность системы частных значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ независимых переменных и соответствующих значений $z^0, p_1^0, \ldots, p_n^0$ функции Φ и ее частных производных. Будем изменять элементы интеграла, начиная от некоторых начальных значений x_i^0, z^0, p_i^0, таким образом, чтобы при этом все время удовлетворялись диференциальные уравнения:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}, \tag{100}$$

где (§ 445)

$$X_i=\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad P_k=\frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad Z=\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Ясно, что эти уравнения вполне определяют на каждом интеграле семейство линий, т. е. многообразие одного измерения. В самом деле, если z известно в функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то известны также частные производные p_i, а следовательно, и функции P_i. Следовательно, соотношения (100) представляют систему $n-1$ диференциальных уравнений первого порядка между n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из теории диференциальных уравнений следует, что через каждую точку интегральной поверхности проходит, вообще, одно и только одно из этих многообразий. Если к каждой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ одного из этих многообразий мы присоединим соответствующие значения производных $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то получим бесконечную последовательчость элементов, зависящую от одного переменного, которая, подобно предыдущему, называется *характеристикою*. Покажем, что, если даже выражение функции z не известно, то к соотношениям (100) можно присоединить другие диференциальные уравнения, из которых можно вполне определить изменения переменных x_i, z, p_k вдоль характеристики.

Будем исходить из элемента интеграла (x_i^0, z^0, p_k^0) и рассмотрим характеристику, выходящую из этого элемента. Вдоль этой характеристики

---

* В случае линейного уравнения в каждой точке характеристической линии нет определенной характеристической касательной плоскости (см. § 438). Диференциальные уравнения характеристик на стр. 217 не содержат p и q, и потому текущие координаты не зависят здесь от p_0, q_0, а только от x_0, y_0, z_0. *(Ред.)*

переменные x_i, z, p_k суть функции одного независимого переменного, удовлетворяющие соотношению $F=0$; их диференциалы удовлетворяют уравнениям (100) и, кроме того, следующим уравнениям, вытекающим из определения характеристик:

$$dz=p_1\,dx_1+\ldots+p_n\,dx_n,$$

$$dp_i=p_{i1}\,dx_1+\ldots+p_{in}\,dx_n,\quad p_{ik}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k}\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Диференцируя соотношение $F=0$ по переменному x_i, получим:

$$X_i+p_iZ+P_1p_{i1}+\ldots+P_np_{in}=0.$$

Обозначим через du общее значение отношений (100) и заменим в предыдущей формуле P_i через $\frac{dx_i}{du}$; мы будем иметь:

$$(X_i+p_iZ)\,du+p_{i1}\,dx_1+\ldots+p_{in}\,dx_n=0,$$

т. е.

$$(X_i+p_iZ)\,du+dp_i=0.$$

Отсюда заключаем, что вдоль характеристики элементы интеграла удовлетворяют системе диференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{P_i}=\frac{dz}{P_1p_1+\ldots+P_np_n}=\frac{-dp_k}{X_k+Zp_k}=du\quad (i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n).\tag{101}$$

Эти уравнения не зависят от функции Φ, и следовательно, мы можем определить все элементы характеристики, если известен один ее элемент $(x_i^0,\ z^0,\ p_k^0)$. Отсюда, как и выше (§ 447), заключаем, что, *если два интеграла имеют общий элемент, то они имеют общими все элементы характеристики, выходящей из этого элемента.*

Если, как мы и будем предполагать, делители в уравнениях (101) остаются конечными и не равны нулю при начальных значениях, то из этих уравнений получим:

$$x_i=f_i(u,\ x_i^0,\ z^0,\ p_k^0),\quad p_k=\varphi_k(u,\ x_i^0,\ z^0,\ p_k^0),\quad z=\psi(u,\ x_i^0,\ z^0,\ p_k^0),\tag{102}$$

где x_i^0, z^0, p_k^0 обозначают начальные значения, соответствующие начальному значению $u=0$ вспомогательного переменного u; функции f_i, φ_k, ψ суть непрерывные функции от u и от начальных значений, имеющие производные по всем переменным, по крайней мере, внутри некоторой области.

Так как всякий интеграл есть место характеристик, то ясно, что всякий интеграл представится формулами (102), где x_i^0, z^0, p_k^0 должны быть функциями от $n-1$ независимых переменных, так что эти формулы представляют многообразие n измерений. Но эти $2n+1$ функций x_i, z, p_k от n независимых переменных должны, сверх того, удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} F(x_i,\ z,\ p_k)=F(x_1,\ldots,\ x_n,\ z,\ p_1,\ldots,\ p_n)=0,\\ dz-p_1\,dx_1-p_2\,dx_2-\ldots-p_n\,dx_n=0.\end{aligned}\right\}\tag{103}$$

Так как диференциальные уравнения (101) допускают интегрируемую комбинацию $dF=0$, то, чтобы удовлетворилось первое из соотношений (103), достаточно, чтобы было $F(x_i^0, z^0, p_k^0)=0$. С другой стороны, из соотношений (101) имеем:

$$\frac{dz}{du}=p_1\frac{dx_1}{du}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{du}.$$

Так как начальные значения x_i^0, z^0, p_k^0 суть функции от $n-1$ независимых переменных $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, то должно быть также:

$$U=\delta z-p_1\delta x_1-\ldots-p_n\delta x_n=0,$$

причем буква δ обозначает диференциалы, соответствующие произвольным приращениям $\delta v_1, \ldots, \delta v_{n-1}$ переменных $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Поступая как в случае $n=2$, получим:

$$dU=d\delta z-p_1\,d\delta x_1-\ldots-p_n\,d\delta x_n-dp_1\,\delta x_1-\ldots-dp_n\,\delta x_n,$$
$$dz=p_1dx_1+\ldots+p_ndx_n,$$
$$\delta dz=p_1\delta dx_1+\ldots+p_n\delta dx_n+\delta p_1dx_1+\ldots+\delta p_ndx_n.$$

Так как операции d и δ переместимы, то

$$dU=\sum_{i=1}^{n}(\delta p_i\,dx_i-dp_i\,\delta x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left\{P_i\,\delta p_i+(X_i+p_i\,Z)\,\delta x_i\right\}du;$$

так как z, x_i, p_k удовлетворяют уравнению $F=0$, то

$$\sum_i(P_i\delta p_i+X_i\delta x_i)=-Z\delta z,$$

и следовательно,

$$dU=-ZU\,du.$$

Отсюда получаем следующее выражение для U:

$$U=U_0e^{-\int\limits_0^u Z\,du}$$

Чтобы U было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы U_0, было равно нулю, т. е. чтобы было:

$$\delta z^0-p_1^0\delta x_1^0-\ldots-p_n^0\delta x_n^0=0.$$

Таким образом, *чтобы формулы* (102) *представляли интеграл, необходимо и достаточно, чтобы начальные значения* (x_i^0, z^0, p_k^0) *были функциями от* $n-1$ *независимых переменных, удовлетворяющими тождественно условиям:*

$$F(x_i^0, z^0, p_k^0)=0, \tag{104}$$
$$\delta z^0-p_1^0\delta x_1^0-p_2^0\delta x_2^0-\ldots-p_n^0\delta x_n^0=0. \tag{105}$$

Всякая система $2n+1$ функций (x_i^0, z^0, p_k^0) от $n-1$ переменных, удовлетворяющая этим двум условиям, определяет многообразие элементов $n-1$ измерения, и предыдущее предложение можно выразить иначе: всякий интеграл уравнения $F=0$ образован характеристиками, выходящими из различных элементов такого многообразия.

В частности, если требуется найти интеграл Коши, обращающийся при $x_1 = x_1^0$ в данную функцию $\Phi(x_2, \ldots, x_n)$, то мы возьмем $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ за независимые переменные (мы предполагаем, что x_1^0 постоянно); тогда соотношения (105) определят значения количеств $z^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$:

$$z^0 = \Phi(x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad p_2^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2^0}, \ldots, \quad p_n^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n^0}.$$

Значение p_1^0 мы найдем из соотношения (104); если P_1^0 не равно нулю [что мы и должны здесь предположить, так как иначе мы не могли бы применять общую теорему существования неявных функций (т. I, § 184)], то p_1^0 определяется из (99) как функция от $x_2^0, \ldots, x_n^0$, голоморфная в некоторой области, и уравнения (102) определят z, x_i, p_k как голоморфные функции от $u, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Кроме того, определитель Якоби

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(u, x_2^0, \ldots, x_n^0)}$$

не равен нулю, так как при $u=0$ он на основании уравнения (101) обращается в P_1^0. Следовательно, мы можем решить n первых уравнений (102) относительно $u, x_2^0, \ldots, x_n^0$ и, внося полученные выражения в последнее уравнение (102), мы будем иметь z как голоморфную функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Примечание. Может случиться, что, применяя предыдущее общее правило, мы иногда не получим интеграла. Например, может случиться, что многообразие элементов, определяемое формулами (102), не зависит в действительности от n произвольных параметров. Это имело бы место, если бы многообразие элементов $\left(\overset{0}{x_i}, \overset{0}{z}, \overset{0}{p_k}\right)$ состояло из характеристик; действительно, в этом случае многообразие, определяемое формулами (102), совпало бы с многообразием элементов $\left(\overset{0}{x_i}, \overset{0}{z}, \overset{0}{p_k}\right)$.

Помимо этого случая может также случиться, что, исключая параметры $u, v_1, \ldots, v_{n-1}$ из уравнений (102), мы придем к *нескольким* различным соотношениям между переменными $x_1, \ldots, x_n, z$. Чтобы не отбрасывать такие решения, условились, следуя Софусу Ли, расширить понятие интеграла и называть интегралом уравнения $F=0$ *всякую* систему ∞^n элементов (x_i, z, p_k), удовлетворяющих соотношениям:

$$F(x_i, z, p_k) = 0, \quad dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n. \tag{106}$$

IV. СОВМЕСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ *.

450. Однородные линейные системы. Рассмотрим систему q однородных линейных уравнений с одною неизвестною функциею $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\left.\begin{aligned} X_1(f) &= a_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{21}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{n1}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ X_2(f) &= a_{12}\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{n2}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_q(f) &= a_{1q}\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{2q}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{nq}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

---

* Я ограничусь здесь очерком основных методов в их существенных чертах. Более подробное изложение читатель найдет в книге Гурса, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

в которых коэфициенты a_{ik} суть функции от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и не содержат неизвестной функции f. Эти q уравнений (107) называются *независимыми*, если не существует никакого тождества вида

$$\lambda_1 X_1(f) + \ldots + \lambda_q X_q(f) = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ — функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *не равные все одновременно нулю*. Ясно, что всякую систему q не независимых уравнений можно заменить системой q' независимых уравнений $(q' < q)$, равносильною первой, и что никакая система не может содержать более n независимых уравнений.

Следовательно, мы всегда можем предположить, что q уравнений (107) независимы, и $q \leqslant n$.

Если $q = n$, и уравнения (107) независимы, то определитель, составленный из коэфициентов a_{ik}, не равен нулю, и эти уравнения имеют своим общим решением только интеграл $f = C$; в дальнейшем мы не будем принимать во внимание этого очевидного решения. Если $q < n$, то всегда можно найти интегралы, общие для уравнений (107), последовательными интегрированиями. В самом деле, предположим, что мы проинтегрировали одно из этих уравнений, например первое; пусть будет $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ система его $n-1$ независимых интегралов. Далее, пусть будет y_n такая функция, что определитель Якоби

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

не равен нулю. Примем $y_1, y_2, \ldots, y_n$ за новые независимые переменные. После этой замены уравнение $X_1(f) = 0$, очевидно, обратится в $\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0$, так как оно удовлетворяется при

$$f = y_1, y_2, \ldots, y_{n-1},$$

тогда как уравнение $X_i(f) = 0$ $(i > 1)$ изменится в следующее уравнение того же вида, причем член с $\frac{\partial f}{\partial y_n}$ можно отбросить, так как $\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0$:

$$Y_i(f) = b_{1i}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + b_{n-1,i}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0;$$

здесь коэфициенты b_{kl} суть функции от $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Если мы предположим, что коэфициенты b_{kl} расположены по степеням переменного y_n, то последнее уравнение можно будет представить в виде:

$$Y_i(f) = \left(c_{1i}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + c_{n-1,i}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right) + \\ + y_n\left(c'_{1i}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + c'_{n-1,i}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right) + y_n^2(\ldots),$$

причем коэфициенты $c_{1i}, c'_{1i}, \ldots$ не зависят от y_n. Так как неизвестная функция f не должна зависеть от y_n, то эта функция должна удовлетворять всем линейным уравнениям, которые получим, приравнивая нулю коэфициенты при различных степенях переменного y_n.

Предположим, что мы выполнили ту же операцию со всеми уравнениями $X_i(f)=0$ $(i>1)$. Если система, состоящая из всех независимых уравнений, которые получим таким образом, содержит n уравнений, то мы не имеем иного решения, кроме $f=C$. В противном случае система будет состоять из r независимых линейных уравнений $(r<n-1)$.

Те же операции можно применить к каждому уравнению новой системы и т. д. Так как при каждой операции число независимых переменных уменьшается на единицу, то окончательно мы или найдем, что данная система не имеет иного решения, кроме $f=C$, или придем к системе, состоящей только из одного линейного уравнения.

Очевидно, что этот метод, удобный в некоторых приложениях, теоретически очень несовершенен, так как из него нельзя заранее узнать, имеют ли уравнения (107) интегралы, общие для них всех, кроме интеграла $f=0$. Покажем, как можно решить эту задачу без всякого интегрирования.

Пусть будет f интеграл, общий для всех уравнений (107); так как эта функция удовлетворяет двум соотношениям $X_i(f)=0$, $X_k(f)=0$, где i и k — два каких-нибудь из указателей $1, 2, \ldots, q$, то мы имеем также:

$$X_i[X_k(f)]=X_i(0)=0,$$

$$X_k[X_i(f)]=X_k(0)=0,$$

и следовательно,

$$X_i[X_k(f)]-X_k[X_i(f)]=0.$$

Выше было указано (§ 398), что это новое уравнение содержит только производные первого порядка и может быть представлено в виде [§ 398, уравнение (116)]:

$$X_i[X_k(f)]-X_k[X_i(f)]=\sum_{h=1}^{n}\left\{X_i(a_{hk})-X_k(a_{hi})\right\}\frac{\partial f}{\partial x_h}=0.$$

Составим все такие уравнения, комбинируя попарно все данные уравнения; полученные уравнения имеют интегралами все интегралы системы (107). Обозначим через

$$X_{q+1}(f)=0,\quad X_{q+2}(f)=0, \ldots, \quad X_{q+s}(f)=0$$

все те из этих новых уравнений, которые независимы между собою и образуют вместе с уравнениями (107) систему

$$X_1(f)=0, \ldots, X_q(f)=0,\ X_{q+1}(f)=0, \ldots, X_{q+s}(f)=0 \tag{108}$$

независимых уравнений. Если $q+s=n$, то система (108), а следовательно, и система (107), не имеют иного решения, кроме $f=C$. Если $q+s<n$, то мы повторим с системою (108) те же операции, которые мы производили над первою системою, и т. д. Поступая таким образом, мы придем или к системе n независимых уравнений, и тогда система (107) имеет только решение $f=C$, или к такой системе r независимых уравнений, где $r<n$, что все комбинации

$$X_i[X_k(f)]-X_k[X_i(f)]$$

суть линейные комбинации выражений $X_1(f), \ldots, X_r(f)$. Такая система названа Клебшем (Clebsch) *полною системою*.

Таким образом мы видим, что *изыскание интегралов системы вида* (107) *приводится к интегрированию некоторой полной системы*.

Можно заметить, что всякая система n независимых линейных уравнений есть также полная система; поэтому можно сказать, что всякая линейная система приводится к полной системе.

451. Полные системы. Теория полных систем основывается на следующих их свойствах.

1. *Всякая полная система заменою переменных переходит также в полную систему.*

Пусть будут $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — формулы замены переменных такие, что можно, обратно, выразить $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через прежние переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Всякий символ вида

$$X(f) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переходит в выражение того же вида

$$Y(f) = b_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + b_n \frac{\partial f}{\partial y_n},$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ суть функц и от $y_1, \ldots, y_n$; таким образом мы имеем тождественно $X(f) = Y(f)$, причем f в левой части обозначает какую-нибудь функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а в $Y(f)$ — ту же функцию, выраженную в переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Пусть будет

$$X_1(f) = 0, \ldots, X_r(f) = 0 \tag{109}$$

полная система. После замены переменных эта система обратится в следующую:

$$Y_1(f) = 0, \ldots, Y_r(f) = 0, \tag{110}$$

где, принимая во внимание формулы преобразования, имеем тождественно $X_i(f) = Y_i(f)$. Докажем, что *новая система* (110) — *также полная*. В самом деле, так как при всяком виде функции f мы имеем тождественно:

$$X_i(f) = Y_i(f), \quad X_k(f) = Y_k(f),$$

то

$$X_i[X_k(f)] = Y_i[X_k(f)] = Y_i[Y_k(f)];$$

и следовательно,

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = Y_i[Y_k(f)] - Y_k[Y_i(f)].$$

Так как, по предположению, система (109) — полная, то при всех значениях указ телей i и k имеем:

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \lambda_1 X_1(f) + \ldots + \lambda_r X_r(f);$$

после замены переменных мы будем иметь также:

$$Y_i[Y_k(f)] - Y_k[Y_i(f)] = \lambda'_1 Y_1(f) + \ldots + \lambda'_r Y_r(f),$$

где $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r$ обозначают результаты замены в функциях $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ге ременных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их выражениями через переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Таким образом новая система (110), действительно, — полная.

2. *Всякая система, равносильная полной системе, есть также полная система.*

Система r уравнений, линейных и однородных относительно $\frac{\partial f}{\partial x_i}$,

$$Z_1(f)=0, \ldots, Z_r(f)=0 \tag{109'}$$

называется *равносильною* системе (109), если существует r тождеств вида:

$$Z_k(f)=A_{1k}X_1(f)+A_{2k}X_2(f)+\ldots+A_{rk}X_r(f) \quad (k=1, 2, \ldots, r),$$

где коэфициенты A_{ik} суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определитель которых не равен нулю. В этом случае можно, обратно, выразить линейно $X_1(f), \ldots, X_r(f)$ через $Z_1(f), \ldots, Z_r(f)$; отсюда ясен смысл названия: *равносильная система*. Разность $Z_l[Z_k(f)]-Z_k[Z_l(f)]$ можно представить в виде:

$$\sum_{h=1}^{r} A_{hl}X_h\left[\sum_{l=1}^{r} A_{lk}X_l(f)\right]-\sum_{l=1}^{r} A_{lk}X_l\left[\sum_{h=1}^{r} A_{hl}X_h(f)\right];$$

следовательно, эта разность равна сумме членов вида:

$$A_{hl}A_{lk}\{X_h[X_l(f)]-X_l[X_h(f)]\}+A_{hl}X_h(A_{lk})X_l(f)-A_{lk}X_l(A_{hl})X_h(f).$$

Если система (109) — полная, то эта разность будет линейною функциею от $X_1(f), \ldots, X_r(f)$, так как все разности $X_h[X_l(f)]-X_l[X_h(f)]$, по предположению, суть линейные функции от $X_1(f), \ldots, X_r(f)$. Так как обе системы (109) и (109') равносильны, то отсюда следует, что все разности $Z_l[Z_k(f)]-Z_k[Z_l(f)]$ выражаются линейно через $Z_1(f)$, $Z_2(f), \ldots, Z_r(f)$.

Очевидно, что всякую полную систему можно заменить бесконечным множеством равносильных ей систем. Полная система (109') называется *якобиевою системою*, если все выражения $X_l[X_k(f)]-X_k[X_l(f)]$ тождественно равны нулю. Покажем, что *всякая полная система равносильна некоторой якобиевой.*

Так как, по предположению, r уравнений (109') независимы, то мы можем решить эти r уравнений относительно r производных от f, например относительно производных $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$. Тогда мы получим систему

$$\left.\begin{aligned}
Z_1(f)&=\frac{\partial f}{\partial x_1}+b_{11}\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}+\ldots+b_{1,n-r}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,\\
Z_2(f)&=\frac{\partial f}{\partial x_2}+b_{21}\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}+\ldots+b_{2,n-r}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_r(f)&=\frac{\partial f}{\partial x_r}+b_{r1}\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}+\ldots+b_{r,n-r}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

равносильную системе (109) и также полную. Но, если мы составим выражения $Z_l[Z_k(f)]-Z_k[Z_l(f)]$, то очевидно, что в них войдут только производные $\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, и следовательно, новые уравнения $Z_i[Z_k(f)] - Z_k[Z_i(f)] = 0$ не могут быть линейными комбинациями уравнений (111) иначе, как в том случае, если левые части новых уравнений тождественно равны нулю. Следовательно, система (111) — якобиева.

Отсюда следует, что всякая полная система частного вида (111) — якобиева; но ясно, что якобиева система не должна непременно иметь этот виде.

3. *Всякую полную систему r линейных уравнений с n независимыми переменными можно свести, интегрируя одно из уравнений этой системы, к полной системе $r-1$ уравнений с $n-1$ независимыми переменными.*

Предположим, что мы проинтегрировали одно из уравнений системы, например уравнение $X_1(f)=0$; возьмем, как в предыдущем параграфе, такую новую систему независимых переменных $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, чтобы $y_2, y_3, \ldots, y_n$ были $n-1$ интегралами уравнения $X_1(f)=0$. После замены переменных система (109) обратится в новую полную систему, первое уравнение которой будет $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$. Решая остальные $n-1$ уравнений относительно $r-1$ производных, например относительно производных $\frac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_r}$, мы должны получить полную систему:

$$\left.\begin{aligned}
Y_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,\\
Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_{21}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + \ldots + c_{2,n-r}\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_r(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_r} + c_{r1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + \ldots + c_{r,n-r}\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

которая имеет частный вид (111) и, следовательно, есть якобиева система. Но мы имеем:

$$Y_1[Y_i(f)] - Y_i[Y_1(f)] = \frac{\partial c_{i1}}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + \ldots + \frac{\partial c_{i,n-r}}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial y_n};$$

так как это выражение должно быть тождественно равно нулю, то отсюда следует, что коэфициенты c_{ik} новой системы не могут зависеть от переменного y_1. Кроме того, при $i>1$, $k>1$ мы попрежнему имеем тождественно:

$$Y_i[Y_k(f)] - Y_k[Y_i(f)] = 0,$$

и следовательно, $r-1$ уравнений

$$Y_2(f)=0, \quad Y_3(f)=0, \ldots, \quad Y_r(f)=0 \tag{113}$$

образуют якобиеву систему $r-1$ уравнений с $n-1$ независимыми переменными $y_2, y_3, \ldots, y_n$, что и требовалось доказать.

В свою очередь, систему (113) можно привести к полной системе $r-2$ уравнений с $n-2$ независимыми переменными и т. д. Поступая таким образом, мы приведем данную полную систему к одному линейному уравнению с $n-r+1$ независимыми переменными. Отсюда следует, что *всякая полная система r уравнений с n независимыми переменными имеет $n-r$ независимых интегралов, и ее общий интеграл есть произвольная функция от этих $n-r$ частных интегралов.*

Из предыдущих рассуждений видно также, какие интегрирования надо выполнить, чтобы получить эти интегралы. Ясно, кроме того, что изложенный метод можно применять различным образом. В самом деле, мы можем заменить данную полную систему всякою другою равносильною системою и начать с интегрирования какого-нибудь одного из уравнений этой новой системы. Например, если мы заменим полную систему якобиевою системою вида (111), то нам уже известны $(r-1)$ частных интегралов $x_2, \ldots, x_r$ уравнения $Z_1(f)=0$, и достаточно будет проинтегрировать систему $n-r$ диференциальных уравнений, чтобы иметь общий интеграл. За всем, что касается других методов интегрирования полных систем, мы отсылаем читателя к специальным курсам.

Пример. Пусть требуется проинтегрировать систему

$$\left.\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2+x_4-3x_1)\frac{\partial f}{\partial x_3}+(x_3+x_1x_2+x_1x_4)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \\ X_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}+(x_3x_4-x_2)\frac{\partial f}{\partial x_3}+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Составив комбинацию $X_1[X_2(f)]-X_2[X_1(f)]$, мы найдем, что нужно присоединить к двум данным уравнениям новое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_4}=0;$$

полученная система трех уравнений равносильна якобиевой системе:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_3+3x_1^2)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_4}=0. \tag{115}$$

Следовательно, система (114) имеет только один независимый интеграл. Общий интеграл последнего уравнения этой системы есть произвольная функция от x_1, x_2 и $x_4-x_1x_3$. Если мы возьмем за независимые переменные x_1, x_2, x_3 и $u=x_4-x_1x_3$, то каждая функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ обратится в некоторую функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3, u)$, и система (115) обратится в систему

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+3x_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=0. \tag{116}$$

Два первых уравнения (116) образуют новую якобиеву систему двух уравнений с тремя независимыми переменными x_1, x_2, u. Общий интеграл второго уравнения есть произвольная функция от x_1 и $u-\frac{x_2^2}{2}$. Возьмем снова за независимые переменные x_1, x_2 и $v=u-\frac{x_2^2}{2}$; при этом всякая функция $\varphi(x_1, x_2, u)$ обратится в функцию $\psi(x_1, x_2, v)$, и два первых уравнения примут вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+3x_1^2\frac{\partial\psi}{\partial v}=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0.$$

Общий интеграл первого уравнения есть произвольная функция от $v-x_1^3$; следовательно, возвращаясь к начальным переменным, мы видим, что общий интеграл системы (114) есть произвольная функция от

$$x_4-x_1x_3-\frac{x_2^2}{2}-x_1^3,$$

452. Обобщение теории полных интегралов. Рассмотрим уравнение

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad z; a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}) = 0, \qquad (117)$$

определяющее функцию z от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, зависящую, кроме того, от $n-r+1$ произвольных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}$. Если мы дадим этим параметрам определенные значения, то, исключая эти параметры из соотношения (117) и тех соотношений, которые получим, диференцируя соотношение (117):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (118)$$

мы придем, *вообще*, к r различным соотношениям между

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n,$$

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_r = 0. \qquad (119)$$

В частных случаях этих уравнений может быть более n. Ограничиваясь общим случаем, мы, как и выше (§ 444), будем говорить, что функция z, определяемая соотношением (117), есть ***полный интеграл*** системы уравнений в частных производных (119). Покажем, что и здесь, зная полный интеграл системы (119), можно найти все ее остальные интегралы. В самом деле, так как уравнения (119) получаются от исключения $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}$ из уравнений (117) и (118), то разыскание интеграла, общего этим r уравнениям (119), приводится к разысканию системы функций $z, a_1, \ldots, a_{n-r+1}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих уравнениям (117) и (118). Очевидно, что мы можем заменить систему уравнений (117) и (118) системою уравнений (117) и (120):

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_{n-r+1}} da_{n-r+1} = 0, \qquad (120)$$

причем мы получим это последнее уравнение, диференцируя уравнения (117) и принимая во внимание уравнения (118). Уравнениям (117) и (120) можно удовлетворить различным образом:

1. Можно предположить, что $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}$ — постоянные; тогда мы получим полный интеграл.

2. Можно положить

$$V = 0, \frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_{n-r+1}} = 0$$

Исключая из этих уравнений количества $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}$, если это возможно, мы получим интеграл, не содержащий ничего произвольного: этот интеграл, как ранее, называется ***особым интегралом***.

3. Если все коэфициенты $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ не равны одновременно нулю, то существует по крайней мере одно соотношение между искомыми функциями $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}$ переменных x_i (т. I, § 52).

Предположим, что между этими функциями существует ровно k независимых соотношений:

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}) = 0, \ldots, f_k(a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}) = 0. \quad (121)$$

Так как соотношение (120) должно быть следствием соотношений $df_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), то существуют k таких коэфициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что мы имеем тождественно:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_{n-r+1}} da_{n-r+1} = \lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_k df_k.$$

Это соотношение равносильно $n - r + 1$ независимым соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial V}{\partial a_{n-r+1}} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_{n-r+1}} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-r+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

Исключая из уравнений (117), (121) и (122) количества

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-r+1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,$$

мы придем, вообще, к одному соотношению между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z и, следовательно, к интегралу, общему для всех уравнений (119) и зависящему от вида выбранных произвольных функций $f_1, \ldots, f_k$. Совокупность таких интегралов, которую получим, изменяя число k от 1 до $n - r$ и беря произвольно функции $f_1, f_2, \ldots, f_k$, составляет *общий интеграл* системы (119). Заметим, что мы получим полный интеграл, полагая $k = n - r + 1$.

Если $r = 1$, то система (118) сводится только к одному уравнению.

Обратно, если дано какое-нибудь уравнение первого порядка $F(x_i, z; p_k) = 0$, то из общих теорем существования следует, что оно всегда имеет бесконечное множество интегралов, зависящих от любого числа произвольных параметров, и следовательно, бесконечное множество полных интегралов. Предыдущий метод, представляющий обобщение метода, изложенного в § 444, позволяет найти все интегралы уравнения $F = 0$, когда известен полный интеграл.

Если $r > 1$, то система (119), получающаяся изложенным выше образом из уравнения (117), не есть наиболее общая система r уравнений первого порядка с одною неизвестною функциею, так как такая система в общем случае может и не иметь интегралов. В следующих параграфах мы покажем, как можно узнать, совместима ли такая система, и как найти ее интегралы, если они существуют.

453. Системы в инволюции. Пусть будет

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_r = 0, \quad (123)$$

система r уравнений в частных производных первого порядка, не содержащих неизвестной функции z; приемом, которым мы пользовались в § 437, всегда можно привести общий случай к этому частному. Ра ыскание интеграла, общего r уравнениям (123), равносильно следующей задаче: *найти n функций $p_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих соотношениям* (123) *и условиям* $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$.

Если известна система n функций $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих этим условиям, то мы найдем из нее квадратурами интеграл уравнений (123), зависящий от произвольного постоянного.

Пусть будут F и H две каких-нибудь функции $2n$ переменных x_i, p_k; положим (§ 443)

$$(F, H) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right),$$

где выражение (F, H) есть скобка Пуассона. Докажем следующее предложение: *если два уравнения $F = 0$, $H = 0$ имеют общий для них обоих интеграл, то этот интеграл удовлетворяет также уравнению $(F, H) = 0$.*

В самом деле, предположим, что $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть функции n переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие двум уравнениям $F = 0$, $H = 0$ и условиям $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$. Диференцируя соотношение $F = 0$ по x_i, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0;$$

умножая это уравнение на $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ и складывая все аналогичные уравнения, будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Переставляя буквы F и H и замечая, что в двойной сумме можно еще переставить указатели i и k, получим:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0.$$

Вычитая почленно оба полученных равенства, будем иметь:

$$(F, H) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_i}{x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{124}$$

Если $p_1, \ldots, p_n$ суть частные производные от одной и той же функции, то, каковы бы ни были i и k, имеем $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$, и следовательно, должно быть: $(F, H) = 0$.

Это предложение содержит как частный случай доказанное выше предложение (§ 451) для уравнений линейных и однородных относительно $p_1, \ldots, p_n$, и из него можно вывести аналогичные следствия. В самом деле, мы видим, что всякий интеграл уравнений (123) есть также интеграл всех уравнений $(F_\alpha, F_\beta) = 0$, которые можно составить, комбинируя попарно уравнения (123). Следовательно, к данной системе, можно присоединить те из числа этих уравнений, которые образуют с данными уравнениями систему независимых уравнений. Повторяя эти операции достаточное число раз, мы придем или к системе независимых уравнений, число которых больше n и которые, следовательно, вообще, не имеют интегралов, или к такой системе m уравнений ($m \leqslant n$), что все уравнения $(F_\alpha, F_\beta) = 0$ удовлетворяются тождественно или будут алгебраическими следствиями предыдущих уравнений.

Такие системы аналогичны полным системам. При этом всегда можно или убедиться, что данные уравнения несовместимы, или притти к такой системе, в которой все скобки (F_α, F_β) тождественно равны нулю. В самом деле, предположим, что мы решили r уравнений (123) относительно r из переменных $p_1, \ldots, p_n$; это всегда возможно, так как в противном случае, исключая $p_1, \ldots, p_n$ из этих r уравнений, мы пришли бы к соотношению между переменными $x_1, \ldots, x_n$, и очевидно, что данная система была бы несовместима. Пусть будет

$$p_1 - f_1(p_{r+1}, \ldots, p_n;\ x_1, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ p_r - f_r(\ldots) = 0 \qquad (125)$$

полученная, таким образом, равносильная система. Скобки

$$(p_\alpha - f_\alpha,\ p_\beta - f_\beta)$$

не содержат ни одного из переменных $p_1, \ldots, p_r$; следовательно, уравнения, которые мы получим, приравнивая эти скобки нулю, не могут быть следствиями первых и представляют новые уравнения, если только эти скобки не равны нулю тождественно.

Решая эти новые уравнения относительно некоторых из количеств $p_{r+1}, \ldots, p_n$ и продолжая те же операции, мы, наконец, или убедимся в невозможности задачи, или придем к такой системе m уравнений первого порядка ($m \leqslant n$)

$$F_1 = 0, \ \ldots, \ F_m = 0, \qquad (126)$$

что все скобки (F_α, F_β) тождественно равны нулю. Такие системы, аналогичные якобиевым линейным системам, называются *системами в инволюции*. Следовательно, разыскание интегралов данной системы уравнений первого порядка приводится к интегрированию системы в инволюции.

Если $m = n$, то это интегрирование выполняется непосредственно, как это вытекает из следующей теоремы: *пусть будут $F_1, F_2, \ldots, F_n$ такие функции $2n$ переменных x_i, p_k, что все скобки (F_α, F_β) тождественно равны нулю, и определитель Якоби $\Delta = \dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(p_1, \ldots, p_n)}$ не равен нулю. Если мы разрешим n уравнений*

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ \ldots, \quad F_n = a_n, \qquad (127)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные, относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и вставим полученные выражения в $p_1dx_1 + \ldots + p_ndx_n$, то это выражение будет точным диференциалом.

В самом деле, мы будем иметь, по предположению:

$$(F_\alpha - a_\alpha,\ F_\beta - a_\beta) = (F_\alpha,\ F_\beta) = 0;$$

тогда, как мы видели выше, n функций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемые n уравнениями (127), должны удовлетворять всем уравнениям

$$\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Возьмем n соотношений этого рода, в которых указатель β имеет одно и то же значение, их можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Если мы примем за неизвестные n выражений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right),$$

то определитель, составленный из коэфициентов при этих неизвестных, есть не что иное, как определитель Δ, который, по предположению, не равен тождественно нулю. Следовательно, при всяких i и β должно быть:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Взяв n уравнений этого вида, в которых указатель i имеет определенное значение, мы точно так же докажем, что $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$; следовательно, теорема доказана.

Функция

$$Z = \Phi(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_{n+1}) = \int (p_1dx_1 + \ldots + p_ndx_n) + a_{n+1}, \tag{128}$$

где a_{n+1} — новое произвольное постоянное, представляет общий интеграл системы в инволюции (127). Если мы дадим r постоянным определенные значения, оставляя остальные постоянные $a_{r+1}, \ldots, a_{n+1}$ произвольными, то формула (128) представит полный интеграл системы в инволюции, состоящей из r первых уравнений (127). Это — настоящий полный интеграл, так как, по самому способу определения функции Φ, уравнения

$$p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

образуют систему, равносильную системе (127), и очевидно, что единственные независимые соотношения, не содержащие $a_{r+1}, \ldots, a_n$, которые можно отсюда получить, суть r первых уравнений этой системы.

451. Метод Якоби. Если дана система в инволюции, состоящая из r уравнений $(r < n)$:

$$F_1(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots p_n) = a_1, \ldots, F_r(x_1, \ldots, p_n) = a_r, \qquad (129$$

где постоянные $a_1, \ldots, a_r$ имеют определенные значения, то, чтобы получить полный интеграл этой системы, достаточно присоединить к ней $n-r$ таких новых функций $F_{r+1}, \ldots, F_n$, чтобы определитель Якоби $\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ не был равен нулю, и чтобы новая система

$$F_1 = a_1, \ldots, F_r = a_r, \; F_{r+1} = a_{r+1}, \ldots, F_n = a_n \qquad (130)$$

была сама в инволюции. В самом деле, мы только что видели, что общий интеграл этой системы (130) есть полный интеграл системы (129). Если $r = 1$, то этот метод представляет не что иное, как распространение метода Лагранжа и Шарпи на уравнение с n переменными.

Метод Якоби решения этой задачи основан на применении замечательного тождества, данного Пуассоном. Пусть будут f, φ, ψ три произвольные функции от $2n$ переменных x_i, p_k; *мы имеем тождественно*:

$$((f, \varphi), \psi) + ((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) = 0. \qquad (131)$$

В самом деле, каждый член левой части есть произведение частной производной второго порядка на две частных производных первого порядка. Следовательно, чтобы доказать, что левая часть равна нулю, достаточно показать, что она не содержит ни одной производной второго порядка, например от функции f, так как три функции f, φ, ψ входят симметрично. Члены, содержащие производные второго порядка от f, могут происходить только от

$$((f, \varphi), \psi) + ((\psi, f), \varphi) = (\psi, (\varphi, f)) - (\varphi, (\psi, f)).$$

Заметим, что (ψ, f) и (φ, f) суть линейные и однородные выражения относительно производных от f, поэтому, если мы положим

$$(\varphi, f) = X(f), \quad (\psi, f) = Y(f),$$

то предыдущее выражение можно представить в виде:

$$Y[X(f)] - X[Y(f)],$$

а мы видели (§ 450), что такое выражение не содержит ни одной производной второго порядка от f. Отсюда следует, что все члены левой части формулы (131) попарно уничтожаются.

Чтобы проинтегрировать систему в инволюции (129), найдем сначала функцию, отличную от $F_1, \ldots, F_r$ и удовлетворяющую r линейным и однородным уравнениям относительно производных от неизвестной функции Φ:

$$(F_1, \Phi)=0, \quad (F_2, \Phi)=0, \ldots, \quad (F_r, \Phi)=0 \tag{132}$$

Эти r уравнений образуют якобиеву систему. В самом деле, положим $X(\Phi)=(F_i, \Phi)$; так как $(F_\alpha, F_\beta)=0$, то тождество Пуассона

$$((F_\alpha, F_\beta), \Phi)+((F_\beta, \Phi), F_\alpha)+((\Phi, F_\alpha), F_\beta)=0$$

принимает здесь вид:

$$X_\alpha(X_\beta(\Phi))-X_\beta(X_\alpha(\Phi))=0.$$

Пусть будет F_{r+1} интеграл этой якобиевой системы, образующий с функциями $F_1, \ldots, F_r$ систему независимых функций переменных $p_1, \ldots, p_n$; ищем затем интеграл новой системы $(r+1)$ уравнений:

$$(F_1, \Phi)=0, \ldots, (F_{r+1}, \Phi)=0,$$

который, как функция от p_i, был бы независим от $F_1, \ldots, F_{r+1}$. Эта система будет также якобиевою, так как F_{r+1} есть интеграл системы (132). Поступая, таким образом, далее, мы, наконец, найдем интеграл последней якобиевой системы:

$$(F_1, \Phi)=0, \ldots, \quad (F_{n+1}, \Phi)=0.$$

После этого, как мы это видели выше, полный интеграл данной системы получится квадратурами.

V. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

455 Исключение произвольных функций. Изучение уравнений в частных производных первого порядка с одною неизвестною функциею привело нас к следующим заключениям: 1) интегрирование такого уравнения приводится к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений; 2) все интегралы уравнения представляются одною или несколькими системами формул, в которые входят явно одна или несколько произвольных функций и их производные.

Эти свойства, вообще, не распространяются на уравнения с частными производными порядков выше первого. В общем случае задачу интегрирования такого уравнения нельзя привести к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений. Хотя и нетрудно обобщить метод исключения произвольных функций, приводящий к уравнению в частных производных первого порядка (§ 439 и 444), но уравнения высших порядков, которые мы, таким образом, получаем, представляют лишь весьма частный вид таких уравнений. Так, мы видели, что мы будем иметь общий интеграл линейного уравнения с двумя независимыми переменными $Pp+Qq=R$, соединяя по произвольному закону линии некоторой конгруэнции. Возьмем теперь семейство линий Г, зависящих от $n+1$ произвольных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ $(n>1)$:

$$F(x, y, z, a_1, \ldots, a_{n+1})=0, \quad \Phi(x, y, z, a_1, \ldots, a_{n+1})=0; \tag{133}$$

если мы установим между этими $n+1$ параметрами n *произвольных соотношений*, то мы получим совокупность линий Г, зависящих уже только от одного параметра. Эти линии образуют некоторую поверхность S, и все эти поверхности S, каковы бы ни были n взятых соотношений между $n+1$ параметрами, удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных n-го порядка, которое называется *уравнением в частных производных семейства поверхностей* S. Чтобы доказать это предложение, заметим, что вместо того, чтобы устанавливать n соотношений между параметрами a_i, можно взять эти параметры как произвольные функции $a_i(\lambda)$ вспомогательного переменного λ, что то же самое. Тогда уравнения (133) определят две неявные функции $z=f(x, y)$, $\lambda=\varphi(x, y)$, и надо показать, что функция $z=f(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных n-го порядка, не зависящему от вида произвольных функций $a_i(\lambda)$. Диференцируя первое из уравнений (133) по x и y, мы получим два соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\left[\frac{\partial F}{\partial a_1}a'_1(\lambda)+\ldots+\frac{\partial F}{\partial a_{n+1}}a'_{n+1}(\lambda)\right]\lambda'_x=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\left[\frac{\partial F}{\partial a_1}a'_1(\lambda)+\ldots+\frac{\partial F}{\partial a_{n+1}}a'_{n+1}(\lambda)\right]\lambda'_y=0;$$

отсюда имеем:

$$\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}q}{\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}p}.$$

Из второго уравнения (133) мы получим подобное же выражение для отношения $\dfrac{\lambda'_y}{\lambda'_x}$, которое можно вывести из предыдущего, замещая в нем F через Φ. Приравнивая между собой эти два выражения, мы присоединим к двум уравнениям (133) еще одно уравнение, содержащее $x, y, z, p, q, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$:

$$\Psi_1(x, y, z, p, q, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})=0. \tag{134}$$

Поступая с этим новым уравнением так же, как с уравнением $F=0$, мы выведем из него выражение $\dfrac{\lambda'_y}{\lambda'_x}$, зависящее от x, y, z, p, q, r, s, t, $a_1, \ldots, a_{n+1}$; приравнивая найденное значение отношения $\dfrac{\lambda'_y}{\lambda'_x}$ одному из двух прежних значений, мы придем к новому соотношению, содержащему производные второго порядка от z:

$$\Psi_2(x, y, z, p, q, r, s, t, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})=0. \tag{135}$$

После n таких операций мы присоединим к системе (133) систему n уравнений, содержащих $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, x, y, z$ и производные от z до n-го порядка. Исключая из этих $n+2$ уравнений функции

$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, мы придем, вообще, к одному и только к одному уравнению между x, y, z и частными производными от z до n-го порядка. Это и есть уравнение в частных производных тех поверхностей, которые образованы линиями Г.

Примеры. 1. Если линии Г суть прямые, параллельные плоскости xy, то уравнения (133) будут:

$$z = a_1, \quad y = a_2 x + a_3.$$

Применяя общий метод, предположим, что a_1, a_2, a_3 суть функции параметра λ. Из двух предыдущих соотношений мы получим для отношения $\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x}$ значения $\frac{p}{q}$ и $-a_2$; отсюда имеем:

$$\frac{p}{q} + a_2 = 0.$$

Диференцируя это соотношение по x и y и разделив почленно, будем иметь:

$$\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} = \frac{pt - qs}{ps - qr}.$$

Приравнивая это значение отношения $\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x}$ найденному ранее значению $\frac{p}{q}$, мы придем к уравнению в частных производных линейчатых поверхностей, имеющих плоскость xOy направляющею плоскостью:

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

2. Предположим, что линии Г суть произвольные прямые. В этом случае уравнения (133) можно представить в виде:

$$x = a_1 z + a_2, \quad y = a_3 z + a_4.$$

Применяя общий метод, получим последовательно:

$$\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} = \frac{a_1 q}{a_1 p - 1} = \frac{a_3 q - 1}{a_3 p} = -\frac{a_1}{a_3},$$

а следовательно, $a_1 p + a_3 b - 1 = 0$. Из этого уравнения имеем:

$$\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} = \frac{a_1 s + a_3 t}{a_1 r + a_3 s} = -\frac{a_1}{a_3},$$

или

$$a_1^2 r + 2a_1 a_3 s + a_3^2 t = 0. \tag{A}$$

В свою очередь, последнее уравнение дает:

$$\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} = \frac{a_1^2 p_{21} + 2a_1 a_3 p_{12} + a_3^2 p_{03}}{a_1^2 p_{30} + 2a_1 a_3 p_{21} + a_3^2 p_{12}} = -\frac{a_1}{a_3}, \qquad p_{ih} = \frac{\partial^{i+h} z}{\partial x^i \partial y^h},$$

или, освобождаясь от знаменателей:

$$a_1^3 p_{30} + 3a_1^2 a_3 p_{21} + 3a_1 a_3^2 p_{12} + a_3^2 p_{30} = 0. \tag{B}$$

Исключая из соотношений (A) и (B) отношение $\frac{a_1}{a_3}$, мы получим общее уравнение в частных производных *линейчатых поверхностей*. Мы видим, что это уравнение содержит только производные второго и третьего порядков; из самого способа получения этого уравнения следует, что в каждой точке поверхности одна из асимптотических касательных имеет с поверхностью прикосновение третьего порядка (т. I, § 213).

3. Рассмотрим плоские кривые Г, представляемые уравнениями:

$$z = f(x, y, a_1, \ldots, a_n), \quad y = a_{n+1}.$$

Вместо того чтобы применять общий метод, предположим, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть функции последнего параметра a_{n+1}. Поверхность S, образованная этими кривыми Г, имеет уравнение:

$$z = f[x, y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)],$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ суть произвольные функции от y. Исключая эти n функций из предыдущего соотношения и соотношений, определяющих $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, мы придем к уравнению в частных производных n-го порядка:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right), \tag{136}$$

в которое входят производные только относительно x.

Обратно, всякое уравнение в частных производных такого вида можно интегрировать, как обыкновенное диференциальное уравнение, содержащее y как параметр. Если $z = f(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ есть общий интеграл этого диференциального уравнения, то нужно только заменить в нем $C_1, C_2, \ldots, C_n$ произвольными функциями от y, чтобы иметь общий интеграл того же уравнения, рассматриваемого как уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными x и y.

Как было показано выше, мы получаем общий интеграл всякого уравнения с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными, беря огибающую семейства поверхностей, зависящих от двух параметров, когда между этими параметрами установлено произвольное соотношение (§ 444). Чтобы обобщить этот результат, рассмотрим семейство поверхностей Σ, зависящих от $n+1$ параметров $(n > 1)$:

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0. \tag{137}$$

Если мы установим между этими $n+1$ параметрами n произвольных соотношений, или, что то же, заменим $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ произвольными функциями вспомогательного переменного λ, то мы получим семейство поверхностей Σ, зависящих только от одного параметра. Огибающая этого семейства поверхностей есть некоторая поверхность S, удовлетворяющая уравнению в частных производных n-го порядка, не зависящему от вида произвольных функций $a_i(\lambda)$. Мы могли бы получить уравнение этой поверхности, исключая λ из обоих уравнений (137) и (138):

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} a_1'(\lambda) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_{n+1}} a'_{n+1}(\lambda) = 0. \tag{138}$$

Но эти два уравнения можно также рассматривать как определяющие две функции $z = f(x, y)$, $\lambda = \varphi(x, y)$ двух независимых переменных x и y. Частные производные p и q определяются двумя уравнениями (т. I, § 39):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0. \tag{139}$$

Применяя к этой системе (139) тот же метод, как к системе (133), мы можем присоединить к ней последовательно $n-1$ новых соотношений между $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, x, y, z$ и частными производными от z порядков $2, 3, \ldots, n$. Исключая из этих $n-1$ уравнений и уравнений (137) и (139) функции $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, мы придем, вообще, только к одному соотношению, не зависящему от $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, в которое войдут x, y, z и частные производные от z до n-го порядка.

Пример. Если поверхность Σ есть плоскость, то мы получим уравнение развертывающихся поверхностей $s^2-rt=0$. Если поверхность Σ есть шар с постоянным радиусом R, то уравнения (137) и (139) будут:

$$\left.\begin{aligned} (x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-R^2=0, \\ x-a_1+(z-a_3)\,p=0, \quad y-a_2+(z-a_3)\,q=0. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Предположим, что a_1, a_2, a_3 суть функции параметра λ; приравнивая между собою значения отношения $\lambda_y':\lambda_x'$, выведенные из двух последних уравнений (140), мы придем к соотношению:

$$(rt-s^2)(z-a_3)^2+[(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pqs](z-a_3)+1+p^2+q^2=0. \tag{141}$$

Мы получим искомое уравнение, исключая a_1, a_2, a_3 из соотношений (140) и (141). Из первого имеем:

$$z-a_3=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

и, заменяя в (141) $z-a_3$ найденным значением, мы придем к уравнению в частных производных *поверхностей каналов*:

$$\begin{aligned}(rt-s^2)R^2+[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\,R\sqrt{1+p^2+q^2}\,+ \\ +(1+p^2+q^2)^2=0. \end{aligned} \tag{142}$$

Геометрический смысл этого уравнения ясен: именно, оно выражает, что один из главных радиусов кривизны поверхности равен R (т. I, § 236).

Примечание. Если дана функция нескольких переменных, зависящая от одной или нескольких произвольных функций, то не всегда возможно, как это было в двух рассмотренных здесь случаях, вывести соотношение, *и притом только одно*, между независимыми переменными, функциею z и ее частными производными до некоторого порядка так, чтобы это соотношение не зависело от вида произвольных функций. Рассмотрим, например, функцию $z=F(x, y, X, Y)$, где F есть определенная функция четырех аргументов x, y, X, Y, причем X и Y суть произвольные функции, соответственно, переменного x и переменного y. Пять производных p, q, r, s, t первого и второго порядка зависят от X, X', X'', Y, Y', Y'', и вообще, нельзя исключить эти шесть количеств из шести уравнений. Если же мы дойдем до производных третьего порядка, то будем иметь всего *десять* соотношений, содержащих *восемь* переменных $X, X', X'', X''', Y, Y', Y'', Y'''$, и исключение приведет к системе *двух* уравнений третьего порядка *.

456. Общая теорема существования. Доказательство, данное для системы уравнений в частных производных первого порядка (§ 386), легко распространить на более общие системы нормального вида, исследованные Софьей Ковалевскою **:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^{r_1}z_1}{\partial x_1^{r_1}} &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots), \\ \frac{\partial^{r_2}z_2}{\partial x_1^{r_2}} &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{r_p}z_p}{\partial x_1^{r_p}} &= F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

* См. Эрмит, Cours d'Analyse, стр. 215—229 (Œuvres, t. II, 1908, стр. 301—515).

** *Journal de Crelle*, т. LXXX. В своем доказательстве Ковалевская приводит общий случай к случаю *линейной* системы первого порядка, но достаточно привести общий случай к случаю произвольной системы первого порядка.

где правые части содержат независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, неизвестные функции $z_1, \ldots, z_p$, частные производные от z_1 не выше порядка r_1 включительно, частные производные от z_2 не выше порядка $r_2, \ldots$ и т. д.; сверх того, ни одна из производных

$$\frac{\partial^{r_1} z_1}{\partial x_1^{r_1}}, \frac{\partial^{r_2} z_2}{\partial x_1^{r_2}}, \ldots, \frac{\partial^{r_p} z_p}{\partial x_1^{r_p}}$$

не входит в функции F_i.

Общая теорема выражается следующим образом:

Рассматривая входящие в функции F_i количества $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $z_1, z_2, \ldots, z_p$, $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_1^{\alpha_2} \ldots \partial x_1^{\alpha_n}}$ как независимые переменные, возьмем какую-нибудь систему значений этих переменных

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_p, b^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n},$$

в области которой функции F_i были бы голоморфны.

С другой стороны, пусть будут

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \ldots, \varphi_1^{r_1-1}, \\ \varphi_2, \varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^{r_2-1}, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \varphi_p, \varphi_p^1, \varphi_p^2, \ldots, \varphi_p^{r_p-1}, \end{array}\right\} \qquad (144)$$

функции $n-1$ переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, правильные в области точки $a_2, \ldots, a_n$ и такие, чтобы было:

$$\varphi_i = b_i, \quad \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \varphi_i^{\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = b^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n},$$

при $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. Тогда уравнения (143) *имеют систему интегралов, и притом единственную, голоморфных в области точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и таких, что при $x_1 = a_1$ будет:*

$$z_i = \varphi_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_1} = \varphi_i^1, \ldots, \frac{\partial^{r_i-1} z_i}{\partial x_1^{r_i-1}} = \varphi_i^{r_i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Чтобы доказать эту теорему, заметим прежде всего, что из уравнений (143) и из трех уравнений, которые получим диференцируя уравнения (143), мы можем выразить все частные производные от неизвестных функций через независимые переменные, неизвестные функции и их частные производные $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, где α_1 меньше числа r_1 при $i = 1$, меньше числа r_2 при $i = 2, \ldots$, меньше числа r_p при $i = p$. В этом можно убедиться последовательно, также как в § 386. Но из начальных условий непосредственно известны числовые значения при $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ тех производных, через которые выражаются все остальные. Следовательно, мы можем посредством только сложений и умножений выразить коэфициенты разложений в целые ряды интегралов.

существование которых мы хотим показать, через коэфициенты разложений функции F_i и функций, данных в таблице (144).

Чтобы докончить доказательство, остается только показать, что получающиеся таким образом целые ряды — сходящиеся, если только модули разностей $x_i - a_i$ достаточно малы. Выше (§ 383) мы доказали сходимость таких рядов для случая, когда все числа $r_1, r_2, \ldots, r_p$ равны единице. Мы приведем общий случай к этому частному, принимая за неизвестные не только самые функции $z_1, \ldots, z_p$, но и частные производные от каждой функции z_i до порядка $r_i - 1$ включительно $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Положим:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = z^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}, \qquad z^i_{0,0,\ldots,0} = z_i.$$

Правые части уравнений (143) содержат переменные $x_1, \ldots, x_n$, функции $z_1, \ldots, z_p$, новые неизвестные $z_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ и некоторые производные первого порядка от этих новых неизвестных. Но, по предположению, правые части уравнений (143) не содержат производных от z_i по x_1 порядка выше $r_i - 1$, следовательно, производные порядка r_i от функции z_i, которые могут входить в эти правые части, отличны от производной $z^i_{r_i, 0, \ldots, 0}$; поэтому по крайней мере одно из чисел $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ отлично от нуля. Если, например, $\alpha_2 > 0$, то можно заменить

$$z^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \text{ через } \frac{\partial z^i_{\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_2}$$

при $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = r_i$. Следовательно, мы можем представить данные уравнения (143) в равносильном виде:

$$\frac{\partial z^i_{r_i - 1, 0, \ldots, 0}}{\partial x_1} = \Phi(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_p, \ldots, z^i_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}, \ldots) \tag{145}$$

$$\left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < r_i \end{matrix}\right),$$

причем правые части уравнений (145) содержат только независимые переменные, неизвестные и некоторые из частных производных первого порядка, взятых относительно одного из переменных $x_2, \ldots, x_n$. К уравнениям (145) должно присоединить еще уравнения, определяющие производные по x_1 от тех новых неизвестных функций $z^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$, от которых производные по x_1 еще не были даны. Если $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ $\ldots + \alpha_n \leqslant r_i - 2$, то непосредственно имеем:

$$\frac{\partial z^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_1} = z^i_{\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n}; \tag{146}$$

так как здесь $\alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant r_i - 1$, то правая часть сама представляет одну из введенных неизвестных функций. Если же

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = r_i - 1,$$

то мы должны предположить, что $\alpha_1 < r_i - 1$, так как для случая $\alpha_1 = r_i - 1$ мы уже имеем уравнение (145); следовательно, по крайней мере одно из чисел $a_2, \ldots, a_n$ будет отлично от нуля. Если, например, $a_2 > 0$, то мы имеем:

$$\frac{\partial z^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_1} = \frac{\partial z^i_{\alpha_1+1, \alpha_2-1, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_2}, \tag{147}$$

и правая часть есть производная по x_2 от одной из вспомогательных неизвестных функций. Уравнения (145), (146), (147) образуют нормальную систему уравнений первого порядка. Начальные условия, которым должны удовлетворять интегралы этой новой системы, непосредственно вытекают из начальных условий, наложенных на первоначальную систему (143) в связи с функциями (144), и ясно, что целые ряды, получающиеся для интегралов $z_1, z_2, \ldots, z_p$ новой системы, будут тождественны с целыми рядами, получающимися для интегралов данной системы. Следовательно, эти ряды — сходящиеся в области точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (см. § 386).

Например, уравнение второго порядка $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ можно заменить системою трех уравнений первого порядка нормального вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = f\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Если при $x = x_0$ должно быть $z = \varphi(y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \psi(y)$, то интегралы вспомогательной системы должны обращаться при $x = x_0$, соответственно, в функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $\varphi'(y)$.

Эта общая теорема не дает ответа на все вопросы, которые можно предложить относительно существования интегралов произвольной системы уравнений в частных производных, так как она применима только к системам рассмотренного нормального вида. Что касается самых общих систем, то им посвящено весьма много работ, из которых более новые, принадлежащие Трессу (Tresse), Рикье (Riqurer), Делассю (Dolassus), привели к общему решению следующего вопроса: дана система m уравнения в частных производных любого порядка с любым числом независимых переменных и неизвестных функций; найти, имеет ли эта система интгралы, и в случае утвердительного ответа выяснить, от каких произвольных и постоянных или функций эти интегралы зависят *.

Исследования этих ученых показывают, что всякое уравнение в частных производных любого порядка, левая часть которого есть аналитическая функция входящих в нее аргументов, имеет бесконечное множество аналитических интегралов, но мы не можем, вообще, утверждать, как для обыкновенных диференциальных уравнений (§ 387), что все его интегралы суть аналитические функции независимых переменных. Выше мы уже видели (§ 447, выноска) что это не верно даже для уравнения первого порядка. Впрочем, в последнем нетрудно убедиться и из элементарного примера, представляемого уравнением $p=0$, общий интеграл которого есть совершенно *произвольная* функция от y.

* Исследования Рикье собраны им в его сочинении „Sur les sistèmes d'équations au" dérivées partielles (1910).

Метод исчисления пределов неприменим к неаналитическим уравнениям. Рассмотрим, например, уравнение

$$p+qf(x, y)=0, \tag{148}$$

где $f(x, y)$ есть функция непрерывная, но не аналитическая, удовлетворяющая условию Липшица относительно переменного y. Выше было доказано (§ 388—391), что при этом диференциальное уравнение характеристик

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{149}$$

имеет бесконечное множество интегралов, зависящих от произвольного параметра C. Но, чтобы заключить отсюда, как это было сделано в § 392, что существует интеграл уравнения (148), следовало бы прежде доказать, что все интегралы уравнения (149) определяются соотношением $\varphi(x, y)=C$, где функция φ имеет непрерывные производные первого порядка. Мы возвратимся к этому вопросу в следующем томе.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Пусть задана система трех взаимно перпендикулярных осей OX, OY, OZ и прямая Δ в плоскости XY, параллельная OX. Из некоторой точки M пространства опускается перпендикуляр MP на Δ и перпендикуляр MQ на OZ. Составить общее уравнение тех поверхностей S, у которых касательные плоскости в любой точке M проходили бы через середину соответствующего отрезка PQ.

Найти также уравнения тех поверхностей S, касательные плоскости в любой точке M которых будут параллельны соответствующему отрезку PQ, и доказать, что существует бесчисленное множество (зависящее от двух произвольных параметров) развертывающихся поверхностей требуемого вида.

2. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих ортогонально шары, представляемые уравнением:

$$x^2+y^2+z^2+2az=0,$$

где a — переменный параметр.

Вывести из полученного результата несколько тройных ортогональных систем поверхностей.

3. Найти уравнение в частных производных поверхностей, описываемых подвижною прямою, пересекающею данную прямую под данным углом. Проинтегрировать полученное уравнение.

4. Дана плоскость P и точка O на этой плоскости; найти общее уравнение всех поверхностей, имеющих то свойство, что если через каждую точку m одной из них мы проведем нормаль mn, пересекающую плоскость P в точке n, и еще проведем перпендикуляр mp к этой плоскости, то площадь треугольника Onp будет равна данному постоянному.

5. Та же задача при условии, что угол nOp — постоянный.

6. Найти все поверхности, удовлетворяющие условию:

$$Op\cdot mn=\lambda Om^2,$$

где λ — данное постоянное, O — начало координат, m — какая-нибудь точка на одной из этих поверхностей, p — основание перпендикуляра, опущенного из O на касательную плоскость в точке m, и n — след нормали на плоскости xOy.

7. Найти общее уравнение таких поверхностей, что если через точку m одной из них провести нормаль mn до пересечения с плоскостью xOy, то длина mn будет равна расстоянию On.

8. Найти интегральные поверхности уравнения

$$xy^2p+x^2yq=z(x^2+y^2).$$

Определить произвольную функцию таким образом, чтобы характеристики образовали семейство асимптотических линий интегральных поверхностей, и найти ортогональные траектории полученных поверхностей.

9. Дано семейство кривых двойной кривизны (Г):

$$x^2+2y^2=az^2, \quad x^2+y^2+z^2=bz,$$

где a и b — переменные параметры.

1° Доказать, что эти кривые суть ортогональные траектории некоторого семейства поверхностей (S), зависящих от одного параметра.

2° Найти линии кривизны этих поверхностей (S).

3° Показать, что эти поверхности входят в состав тройной ортогональной системы, и найти два другие семейства этой системы.

10. Составить уравнение в частных производных, имеющее полный интеграл $y^2(x^2-a)=(z+b)^2$, и проинтегрировать это уравнение.

11. Найти такие поверхности, чтобы отрезок mn нормали, заключенный между поверхностью и точкою n пересечения нормали с данною плоскостью P, проектировался на эту плоскость отрезком постоянной длины.

12. Пусть будет n точка, в которой нормаль в точке m к поверхности пересекает плоскость xOy. Найти такие поверхности, чтобы прямая On была параллельна касательной плоскости в точке m.

13. Найти поверхности, пересекающие под данным углом V все плоскости, проходящие через данную прямую. Показать, что характеристики суть линии кривизны интегральных поверхностей.

14. Показать, что интегральные кривые уравнения в частных производных, имеющего полный интеграл

$$(1-a^2)x+k(1+a^2)z+2ay+b=0,$$

где a и b — произвольные постоянные, удовлетворяют соотношению:

$$dx^2+dy^2=k^2dz^2.$$

15*. Всякая интегральная кривая уравнений в частных производных

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$

касающаяся в точке M образующей G конуса (T) с вершиною в точке M, имеет прикосновение второго порядка со всякою интегральною поверхностью, касающеюся в M плоскости, касающейся конуса (T) по образующей D.

[Софус Ли.]

16. Из точки M поверхности S опущен перпендикуляр MP на неподвижную прямую OO'; затем из точки P опущен перпендикуляр PN на нормаль к поверхности S в точке M. Найти такие поверхности S, чтобы длина MN была равна данной постоянной длине a.

Рассмотреть, в частности, тот случай, когда поверхности S будут геликоидами с осью OO'.

17. Определить общий вид таких функций $F(x, y, z, p, q)$, чтобы диференциальные уравнения характеристик уравнения $F=0$ имели интегрируемую комбинацию $d\left(\frac{q}{p}\right)=0$.

Приложение. Найти такие поверхности S, чтобы расстояние от каждой точки M одной из них до плоскости xOy было равно расстоянию от точки O до касательной плоскости к этой поверхности в точке M.

18. Дано уравнение в частных производных

$$Pp+Qq=Rz^2+Sz+T, \tag{1}$$

где P, Q, R, S, T зависят только от переменных x и y; доказать, что ангармоническое отношение u каких-нибудь четырех частных интегралов уравнения (1) удовлетворяет уравнению:

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Зная четыре частных интеграла z_1, z_2, z_3, z_4 уравнения (1), можно ли вывести из них общий интеграл?

19. Параллельные поверхности. Пусть будет $\theta(x, y, z)$ интеграл уравнения

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2=1; \qquad \text{(E)}$$

доказать, что уравнение $\theta(x, y, z)=C$ представляет в прямоугольных координатах семейство параллельных поверхностей.

Отв. Уравнение (E) имеет полный интеграл:

$$\theta=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2};$$

мы получим общий интеграл, разыскивая огибающую шара с радиусом, равным θ, центр которого описывает поверхность или линию. Ясно, что, изменяя радиус θ, мы получим семейство параллельных поверхностей.

Обратно, чтобы уравнение $u(x, y, z)=C$ представляло семейство параллельных поверхностей, необходимо и достаточно (гл. XVIII, упражнение 10), чтобы $u(x, y, z)$ удовлетворяло уравнению вида:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\varphi(u),$$

которое можно привести к виду (E), полагая $\theta=\psi(u)$.

20. Чтобы $dz+A\,dx+B\,dy$ имело интегрирующий множитель, не зависящий от z, необходимо и достаточно, чтобы это выражение имело вид:

$$dz+z\,d\varphi+e^{-\varphi}\,d\psi,$$

где φ и ψ — функции от x и y

21. Применить метод Бертрана (§ 442) к уравнению $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$, где P, Q, R суть линейные функции от x, y, z, удовлетворяющие условию интегрируемости.

22. Дана *вполне интегрируемая* система вида:

$$\begin{aligned}
&dz=p\,dx+q\,dy,\\
&dp=(a_1p+a_2q+a_3z)\,dx+(c_1p+c_2q+c_3z)\,dy,\\
&dq=(c_1p+c_2q+c_3z)\,dx+(b_1p+b_2q+b_3z)\,dy,
\end{aligned}$$

где a_i, b_i, c_i — функции от x, и y; показать, что общий интеграл имеет вид:

$$z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3,$$

где z_1, z_2, z_3 — три линейно независимых интеграла, и C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные *.

23. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнения $r=f_1(x, y)$, $s=f_2(x, y)$, $t=f_3(x, y)$ были совместимы.

Приложение. Найти, какому условию должны удовлетворять функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, чтобы интегральные кривые диференциального уравнения $A\,dx^2+2B\,dx\,dy+C\,dy^2=0$ были проекциями на плоскость xOy семейства асимптотических линий некоторой поверхности.

24. Проинтегрировать систему:

$$\begin{aligned}
(x-a)(px+qy-2z)&=(z-c)(p-x),\\
(y-b)(px+qy-2z)&=(z-c)(q-y),
\end{aligned}$$

где a, b, c — постоянные.

---

* Аппелль, *Journal de Liouville*, 3-я серия, т. VIII, стр. 192.

25. Пусть S — поверхность, огибающая сферы Σ, представляемые в прямоугольных координатах уравнением $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=R^2$, где α и β — два переменных параметра, R — функция этих параметров.

1° В точке M, где сфера Σ, соответствующая значениям α, β параметров, касается огибающей поверхности S, проведена нормаль, встречающая координатные плоскости, $z=0$, $x=0$, $y=0$, соответственно, в точках A, B, C. Выразить отрезки $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ в функции от R, $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial R}{\partial \beta}$, приняв за положительное направление нормали то, которое идет от A к M.

2° Доказать, что можно всегда определить квадратурой все поверхности S, для которых между отрезками $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и R существует соотношение произвольной формы $F(AB, BC, R)=0$.

3° Каким условиям должны удовлетворять две функции $\varphi(R)$ и $\psi(R)$, чтобы существовала поверхность S, для которой $AB=\varphi(R)$, $AC=\psi(R)$?

4° В частности, определить поверхности S, для которых $AC=R+a$, $AB=m(R+a)$, a и m — постоянны, и указать геометрический способ их образования.

УКАЗАТЕЛЬ *

(Цифры обозиачают страницы настоящего полутома.)

* Подробный именной и предметный указатель ко всему „Курсу математического анализа“ Гурса будет дан в конце III тома.