COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT

Membre de l'institut,
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

QUATRIÈME ÉDITION

TOME III

INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE. ÉQUATIONS INTÉGRALES. CALCUL DES VARIATIONS

GAUTHIER-VILLARS
PARIS

Э. ГУРСА

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ ТРЕТИЙ

ЧАСТЬ I

БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ПЕРЕВОД С ЧЕТВЕРТОГО ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ
С. И. КАМЕНЕЦКОЙ и С. А. КАМЕНЕЦКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. В. В. СТЕПАНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

T/21—5—2

Редакционную работу по этой книге провел *В. И Контовт.* Издание оформила *О. Н. Персиянинова.* Корректуру держал *С. Ф. Морошкин.* Наблюдал за выпуском *В. П. Морев.*

Рукопись сдана в производство 1/XII 1932 г. Листы подписаны к печати 11 октября 1933 г. Книга вышла в свет в ноябре 1933 г. в кол. 10.000 экз. на бумаге формата 62 × 94/16. Печатных знаков в листе 67 000. Листов в книге 17¼ Заказ 4729. ГТТИ № 689. Уполномоченный Главлита Б-33283.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава XXIII.

БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Глава XXIV.

УРАВНЕНИЕ МОНЖА-АМПЕРА.

Глава XXV.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С n ПЕРЕМЕННЫМИ.

Глава XXVIII.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Глава XXIX.

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

ГЛАВА XXIII.

БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Изучение функций, определенных диференциальным уравнением, во всей области их существования является задачей, полное разрешение которой невозможно при современном состоянии анализа. Однако, ограничившись изучением интегралов, бесконечно близких к уже известному интегралу, удалось получить чрезвычайно интересные результаты. Именно таким путем А. Пуанкаре в своих замечательных работах, посвященных „Задаче о трех телах" *, доказал существование бесконечного множества периодических решений и решений асимптотических к периодическим. Разыскание решений, бесконечно-близких к известному решению, привело его к системе линейных диференциальных уравнений, которые он называет *уравнениями в вариациях*; аналогичная система для уравнений с частными производными была ранее рассмотрена Г. Дарбу ** под названием *вспомогательной системы*. Результаты А. Пуанкаре были с тех пор использованы Пенлеве *** и другими математиками при решении задачи чистого анализа, а именно при образовании диференциальных уравнений с неподвижными критическими точками.

В этой главе после изучения интегралов системы диференциальных уравнений, рассматриваемых как функции начальных значений, мы доказываем основную теорему А. Пуанкаре. Это исследование было уже проделано (II, § 387) в случае, когда правые части являются аналитическими функциями. Мы возвращаемся к нему в общем случае, пользуясь методом последовательных приближений Пикара, который требует наименьшего числа предположений и очень просто приводит к цели.

1. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ.

457. Дополнения к теории линейных уравнений. Изложим сначала несколько замечаний о приложении метода Пикара к линейным уравнениям. Рассмотрим для определенности систему двух линейных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = ay + bz + c, \qquad \frac{dz}{dx} = a_1 y + b_1 z + c_1, \tag{1}$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — непрерывные функции действительного пере

---

* *Acta mathematica*, t. XIII, 1890; Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. I et III.

** *Comptes rendus*, t. XCVI, 19 mars 1883, p. 766; Note XI du Tome IV des „Leçons sur la théorie générale des surfaces", p. 505—516. В мемуаре XXIII тома *Annales de l'Ecole Normale* (3-я серия, 1903) я распространил основную теорему А. Пуанкаре на некоторые системы уравнений с частными производными.

*** *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII. p 201; *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 1—85.

менного x в интервале от x_0 до $x_1 > x_0$. Для приложения метода Пикара к определению интегралов, принимающих значения y_0 и z_0 при $x = x_0$, можно взять за первые приближенные значения этих интегралов вместо самих начальных значений две произвольные функции $u(x)$ и $v(x)$, непрерывные в интервале (x_0, x_1). Итак, мы полагаем

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [au(t) + bv(t) + c]\, dt,$$

$$z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [a_1 u(t) + b_1 v(t) + c_1]\, dt,$$

причем в a, b, c, a_1, b_1, c_1 x заменено через t; далее, для $n > 1$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [ay_{n-1}(t) + bz_{n-1}(t) + c]\, dt,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [a_1 y_{n-1}(t) + b_1 z_{n-1}(t) + c_1]\, dt.$$

Все эти функции y_n, z_n, очевидно, непрерывны в интервале (x_0, x_1). Пусть M будет верхней границей абсолютных величин коэфициентов a, b, a_1, b_1 в интервале (x_0, x_1), а H — верхней границей абсолютных величин $y_1 - u$ и $z_1 - v$ в том же интервале. Отсюда непосредственно следует, что в любой точке интервала (x_0, x_1) мы имеем

$$|y_2(x) - y_1(x)| < 2MH(x - x_0),$$

$$|z_2(x) - z_1(x)| < 2MH(x - x_0);$$

далее, можно последовательно удостовериться, что, каково бы ни было n,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < H\frac{[2M(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| < H\frac{[2M(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Рассуждение заканчивается, как в общем случае (II, § 389); y_n и z_n равномерно стремятся к пределам $y(x)$ и $z(x)$, которые являются интегралами системы (1), принимающими значения y_0 и z_0 при $x = x_0$.

Для краткости назовем функцию $F(x)$ действительного переменного x *преобладающей* (*доминантой*) относительно другой функции $f(x)$ в интервале (α, β), если $F(x)$ положительна и превосходит абсолютную величину $f(x)$ для любого значения x в этом интервале. Заменим в системе (1) коэфициенты a, b, c, a_1, b_1, c_1 непрерывными функциями A, B, C, A_1, B_1, C_1, которые были бы соответственно преобладающими (доминантами) для предыдущих в интервале (x_0, x_1), и займемся разысканием интегралов новой системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= AY + BZ + C, \\ \frac{dZ}{dx} &= A_1 Y + B_1 Z + C_1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

которые при $x = x_0$ принимают положительные значения Y_0 и Z_0, соответственно большие, чем $|y_0|$ и $|z_0|$. Если взять за первые приближенные значения функции $U(x)$ и $V(x)$, которые были бы соответственно преобладающими для $u(x)$ и $v(x)$, то легко шаг за шагом проверить, что все последовательные приближенные значения $Y_n(x)$, $Z_n(x)$ интегралов новой системы положительны в интервале (x_0, x_1) и являются преобладающими для приближенных значений того же порядка $y_n(x)$ и $z_n(x)$ интегралов первоначальной системы. Интегралы $Y(x)$ и $Z(x)$ системы (2), принимающие при $x = x_0$ значения Y_0 и Z_0, являются вследствие этого во всем интервале (x_0, x_1) преобладающими для первоначальных интегралов $y(x)$ и $z(x)$ системы (1). Выбирая A, B, C, A_1, B_1, C_1 положительными постоянными, получаем вспомогательную систему с постоянными коэфициентами, из которой легко вывести границы для абсолютных значений интегралов системы (1) в интервале (x_0, x_1). Заметим также, что это рассуждение без труда распространяется на комплексную область, когда a, b, c, a_1, b_1, c_1 — голоморфные функции от x в этой области.

Добавим еще последнее замечание, которое можно распространить на систему любого числа линейных уравнений. Пусть будет $y' = ay + b$ линейное уравнение, причем коэфициенты a и b — непрерывные функции в интервале (x_0, x_1), $x_1 > x_0$, и первая *положительна*, и пусть $Y(x)$ есть интеграл этого уравнения, равный y_0 при $x = x_0$. Если за первое приближенное значение взять функцию $u(x) \leqslant Y(x)$ во всякой точке интервала, то *все остальные приближенные значения y_n будут также меньше или в крайнем случае равны $Y(x)$*. Это свойство немедленно следует из рекуррентного соотношения

$$Y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,[Y(t) - y_{n-1}(t)]\,dt$$

и из предположения относительно первого приближенного значения.

458. Приложение к полулинейной системе. Рассмотрим систему следующего частного вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y)\,z + \psi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — три функции переменных x и y, непрерывные при изменении x и y в интервалах $(x_0, x_0 + a)$, $(y_0 - b, y_0 + b)$; a и b — два положительных числа; кроме того, предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет относительно y условию Липшица в этой области. Чтобы получить интегралы системы (3), принимающие соответственно значения y_0 и z_0 при $x=x_0$, естественно поступить следующим образом. Будем искать сначала, например методом Пикара, интеграл первого уравнения, равный y_0 при $x=x_0$. Пусть этот интеграл, непрерывный в интервале (x_0, x_0+h), есть $Y(x)$; здесь h положительное число меньше или равно a. Заменяя затем y через $Y(x)$ в $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, получим при помощи квадратур интеграл $Z(x)$ второго уравнения, принимающий значение z_0 при $x=x_0$.

Но можно также приложить метод последовательных приближений ко всей системе (3), принимая y_0 за первое приближенное значение y, и произвольную постоянную K — за первое приближенное значение z; т. е. мы полагаем:

$$y_1=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt, \quad z_1=z_0+\int_{x_0}^{x}[\varphi(t, y_0)K+\psi(t, y_0]\,dt$$

и вообще

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$z_n(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}\{\varphi[t, y_{n-1}(t)]\,z_{n-1}(t)+\psi[t, y_{n-1}(t)]\}\,dt.$$

Когда n безгранично возрастает, y в интервале (x_0, x_0+h) равномерно стремится к $Y(x)$; мы хотим показать, что z_n тоже стремится равномерно к $Z(x)$. Это, несомненно, справедливо вследствие общей теоремы (§ 389), если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условию Липшица относительно y, но это последнее предположение не нужно, и достаточно предположить, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны. В самом деле, мы имеем

$$Z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}\varphi[t, Y(t)]\,Z(t)\,dt+\int_{x_0}^{x}\psi[t, Y(t)]\,dt;$$

сравнивая эту формулу с формулой для $z_n(x)$, получаем:

$$Z(x)-z_n(x)=\int_{x_0}^{x}\{\varphi[t, Y(t)]\,Z(t)-\varphi[t, y_{n-1}(t)]z_{n-1}(t)\}\,dt+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\{\psi[t, Y(t)]-\psi[t, y_{n-1}(t)]\}\,dt;$$

полагая $Z(x)-z_n(x)=\delta_n(x)$, можем переписать предыдущее соотношение в таком виде:

$$\delta_n(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi[t, y_{n-1}(t)]\,\delta_{n-1}(t)\,dt+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\{\varphi[t, Y(t)]-\varphi[t, y_{n-1}(t)]\}\,Z(t)\,dt+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\{\psi[t, Y(t)]-\psi[t, y_{n-1}(t)]\}\,dt.$$

Коэфициент при $\delta_{n-1}(t)$ под знаком $\int$ по абсолютной величине меньше некоторого положительного числа M, так как $y_{n-1}(t)$ остается между y_0-b и y_0+b; с другой стороны, сумма остальных членов под знаком $\int$ равномерно стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, потому что y_n равномерно стремится к Y. Выберем теперь целое число p так, чтобы абсолютная величина выражения

$$\{\varphi[t,\ Y(t)]-\varphi[t,\ y_{n-1}(t)]\}\,Z(t)+\psi[t,\ Y(t)]-\psi[t,\ y_{n-1}(t)]$$

была меньше данного положительного числа λ, каково бы ни было t, если только $n\geqslant p$. Выбрав число p таким образом, рассмотрим последовательность функций $\Delta_{p-1}(x)$, $\Delta_p(x), \ldots, \Delta_n(x), \ldots$, определенных рекуррентным соотношением

$$\Delta_n(x)=\int_{x_0}^{x}[M\Delta_{n-1}(t)+\lambda]\,dt \quad (n=p,\ p+1, \ldots),$$

и предположим, что мы взяли $\Delta_{p-1}(x)\geqslant|\delta_{p-1}(x)|$. Можно шаг за шагом проверить, что все функции $\Delta_p(x)$, $\Delta_{p+1}(x), \ldots$ являются соответственно преобладающими для $\delta_p(x)$, $\delta_{p+1}(x), \ldots$ Но когда n неограниченно возрастает, $\Delta_n(x)$ равномерно стремится к тому интегралу линейного уравнения $y'=My+\lambda$, который обращается в нуль при $x=x_0$, т. е. к $\frac{\lambda}{M}\{e^{M(x-x_0)}-1\}$. Можно, следовательно, найти целое число m, достаточно большое, чтобы при $n\geqslant p+m$ выполнялось неравенство

$$|\Delta_n(x)|\leqslant\frac{\lambda}{M}\{e^{M(x-x_0)}-1\}+\varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Это неравенство будет и подавно справедливо, если заменить $\Delta_n(x)$ через $\delta_n(x)$. К тому же можно предположить, что p выбрано таким образом, что $\frac{\lambda}{M}\{e^{M(x_1-x_0)}-1\}$ меньше ε, так как λ можно выбрать как угодно малым. Абсолютная величина $\delta_n(x)=Z(x)-z_n(x)$ таким образом меньше 2ε, если только $n\geqslant p+m$; следовательно, $z_n(x)$ равномерно стремится к $Z(x)$, когда n неограниченно возрастает. Ясно, что вместо интервала $(x_0,\ x_0+h)$ этот метод можно также приложить к интервалу $(x_0-h,\ x_0+h)$; если приближения равномерно сходятся для y_n, то то же самое будет и для z_n. Теорема распространяется, очевидно, на систему $k+p$ уравнений такого вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1, y_2, \ldots, y_n),\ (i=1,\ 2, \ldots, n),\ (k=1, 2, \ldots, p)\\
&\frac{dz_k}{dx}=\varphi_{k1}(x, y_1, \ldots, y_n)\,z_1+\ldots\\
&\qquad\ldots+\varphi_{kp}(x, y_1, \ldots, y_n)\,z_p+\psi_k(x, y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

где функции f, φ, ψ непрерывны в некоторой области D, и где функции f удовлетворяют в этой области условию Липшица относительно y_i. Если применить к этой системе метод последовательных приближений, то они сходятся в том же интервале, как и приближения для одних y_i, причем сходимость равномерна *.

459. Интегралы как функции начальных значений. Вернемся для определенности к диференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{5}$$

где по предположению $f(x, y)$ удовлетворяет обычным условиям в области D, определенной неравенствами

$$a-a\leqslant x\leqslant a+a, \quad \beta-b\leqslant y\leqslant \beta+b.$$

Возьмем систему начальных значений (x_0, y_0), принадлежащую этой области. Последовательные приближенные значения интеграла, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ остаются заключенными между $\beta-b$ и $\beta+b$, если только

$$|y_0-\beta|+M|x-x_0|<b.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить рассуждения § 389; точно так же доказывается, что $y_n(x; x_0, y_0)$ равномерно стремится к пределу $\psi(x; x_0, y_0)$ в области D', определенной условиями

$$a-a\leqslant x\leqslant a+a, \quad a-a\leqslant x_0\leqslant a+a, \quad \beta-b\leqslant y_0\leqslant \beta+b,$$
$$|y_0-\beta|+M|x-x_0|<b.$$

Эта область D' содержит в частности область D'', определенную неравенствами

$$|x-a|<h; \quad |x_0-a|\leqslant h; \quad |y_0-\beta|<\frac{b}{2},$$

где h — меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{4M}$. Последовательные приближенные значения $y_n(x; x_0, y_0)$ являются, очевидно, непрерывными функциями от x_0, y_0 в этой области, и, следовательно, *интеграл* $y=\psi(x; x_0, y_0)$, *обращающийся в* y_0 *при* $x=x_0$, *является непрерывной функцией от* x_0 *и* y_0.

Для доказательства, что эта функция допускает производные по x_0 и y_0, мы предположим, что $f(x, y)$ допускает непрерывную производную $f'_y(x, y)$. Пусть

$$z=\frac{\partial\psi}{\partial x_0}, \quad u=\frac{\partial\psi}{\partial y_0}$$

* Свойства, которые будут установлены в следующих параграфах, послужили темой для значительного количества работ, перечень которых можно найти в мемуаре E. Cotton по этому вопросу (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVII, 1909, p 204 et t. XXXVII, 1910, p. 4). Метод, которому я следовал, не отличается существенно от метода Коттона.

те производные, существование которых мы хотим установить; если эти производные существуют, они удовлетворяют диференциальным уравнениям

$$\frac{dz}{dx}=zf'_y(x, y); \quad \frac{du}{dx}=uf'_y(x, y), \tag{6}$$

которые немедленно выводятся из уравнения (5). Таким образом мы пришли к изучению системы трех диференциальных уравнений (5) и (6) Возьмем за начальные данные

$$y=y_0, \quad z=1, \quad u=-f(x_0, y_0)$$

для $x=x_0$. Но это как раз система того вида, который рассмотрен выше. В силу непрерывности функции $f'_y(x, y)$ мы можем приложить доказанную теорему; применение к этой системе метода Пикара приводит к приближениям, равномерно сходящимся в той же области D''. Для приложения этого метода возьмем за первые приближенные значения $y=y_0$, $z=1$, $u=0$ и положим:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt, \quad z_1=1+\int f'_y(t, y_0)\,dt, \quad u_1=-f(x_0, y_0);$$

затем вообще

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$z_n(x)=1+\int_{x_0}^{x} z_{n-1}(t)f'_y[t, y_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$u_n(x)=-f(x_0, y_0)+\int_{x_0}^{x} u_{n-1}(t)f'_y[t, y_{n-1}(t)]\,dt.$$

Сначала имеем:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0}=-f(x_0, y_0)=u_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^{x} f'_y(t, y_0)\,dt=z_1,$$

и дальше:

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_0}=-f(x_0, y_0)+\int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)]\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_0}\,dt,$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)]\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_0}\,dt.$$

Из этих соотношений выводим:

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_0}-u_n=\int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)]\left[\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_0}-u_{n-1}(t)\right]dt,$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial y_0}-z_n=\int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)]\left[\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_0}-z_{n-1}(t)\right]dt,$$

и таким образом мы убеждаемся шаг за шагом, что, каково бы ни было n, $\frac{\partial y_n}{\partial x_0} = u_n$, $\frac{\partial y_n}{\partial y_0} = z_n$.

Но предел y_n есть интеграл $y = \psi(x; x_0, y_0)$; так как z_n и u_n равномерно стремятся к своим пределам, эти пределы z и u представляют частные производные интеграла $\psi(x, x_0, y_0)$ по x_0 и y_0, и эти производные непрерывны в области, которая была определена выше.

Легко получить выражения этих производных. В самом деле, если в уравнениях (6) заменить y через $\psi(x; x_0, y_0)$, то интегралы этой системы, принимающие начальные значения 1 и $-f(x_0, y_0)$ при $x = x_0$, получаются непосредственно:

$$z = \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = e^{\int\limits_{x_0}^{x} f'_y[t, \psi(t; x_0, y_0)]\, dt}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} f'_y[t, \psi(t; x_0, y_0)]\, dt}$$

Эти формулы показывают, что $\psi(x; x_0, y_0)$, рассматриваемая как функция начальных значений x_0, y_0, удовлетворяет уравнению в частных производных *

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_0} + f(x_0, y_0) \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = 0. \tag{7}$$

---

* Пусть $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция, допускающая непрерывную производную φ'_y; функция

$$Z(x_0, y_0) = \int\limits_a^{x_0} \varphi[x, \psi(x; x_0, y_0)]\, dx,$$

где a — постоянное число, допускает частные производные

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \varphi(x_0, y_0) + \int\limits_a^{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\, dx, \quad \frac{\partial Z}{\partial y_0} = \int\limits_a^{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y_0}\, dx,$$

и, следовательно, функция $Z(x_0, y_0)$ является интегралом уравнения в частных производных

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} + f(x_0, y_0) \frac{\partial Z}{\partial y_0} = \varphi(x_0, y_0). \tag{7'}$$

Функция $\psi(x; x_0, y_0)$ обладает тем же свойством взаимности, как и в случае, когда функция $f(x, y)$ голоморфна (II, § 388). Из соотношения

$$y_1 = \psi(x_1; x_0, y_0),$$

где y_1 обозначает значение интеграла при $x = x_1$, выводим обратное соотношение:

$$y_0 = \psi(x_0; x_1, y_1),$$

так как существует, очевидно, взаимность между двумя парами переменных (x_0, y_0), (x_1, y_1). Отбрасывая вторые индексы, мы таким образом видим, что интеграл уравнения (5), равный y_0 при $x = x_0$, удовлетворяет соотношению $y_0 = \psi(x_0; x, y)$; предполагая x_0 постоянным, можно сказать, что предыдущее уравнение, где y_0 есть произвольное постоянное, представляет общий интеграл уравнения (5) в области, определенной выше.

Это рассуждение может быть распространено на систему любого числа уравнений. Возьмем, например, систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx}=\varphi(x, y, z), \tag{8}$$

правые части которых непрерывны и допускают непрерывные частные производные f'_y, f'_z, φ'_y, φ'_z в некоторой области D. Методом Пикара опять можно доказать, что интегралы

$$y=\psi(x; x_0, y_0, z_0), \quad z=\pi(x; x_0, y_0, z_0),$$

принимающие соответственно значения y_0 и z_0 при $x=x_0$, являются непрерывными функциями от x; x_0, y_0, z_0 в некоторой новой области δ, которая определяется так же, как и раньше.

Для доказательства того, что функции ψ и π допускают частные производные по переменным x_0, y_0, z_0, присоединим к уравнениям (8) систему шести линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}u+\frac{\partial f}{\partial z}\xi, \quad \frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}\eta, \quad \frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}w+\frac{\partial f}{\partial z}\zeta, \\ &\frac{d\xi}{dx}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}u+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\xi, \quad \frac{d\eta}{dx}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}v+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\eta, \quad \frac{d\zeta}{dx}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}w+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &u=-f(x_0, y_0, z_0), \quad v=1, \quad w=0, \\ &\xi=-\varphi(x_0, y_0, z_0), \quad \eta=0, \quad \zeta=1 \quad \text{при} \quad x=x_0. \end{aligned}$$

В силу предыдущего замечания метод Пикара, приложенный к системе восьми уравнений (8) и (9), приводит к равномерно сходящимся приближениям. Если мы возьмем за первые приближенные значения для $y, z, u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ значения:

$$y=y_0, \quad z=z_0, \quad u=0, \quad v=1, \quad w=0, \quad \xi=0, \quad \eta=0, \quad \zeta=1,$$

то немедленно удостоверяемся, что

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0}=u_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0}=v_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0}=w_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_0}=\xi_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_0}=\eta_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0}=\zeta_1,$$

а затем последовательно убеждаемся, что эти формулы остаются в силе, когда индекс 1 заменяется любым индексом n. Следовательно, интегралы вспомогательной системы (9), принимающие вышеприведенные начальные значения, представляют соответственно частные производные функций $\psi(x; x_0, y_0, z_0)$, $\pi(x; x_0, y_0, z_0)$ по переменным x_0, y_0, z_0:

$$\left.\begin{aligned} &u=\frac{\partial \psi}{\partial x_0}, \quad v=\frac{\partial \psi}{\partial y_0}, \quad w=\frac{\partial \psi}{\partial z_0}, \\ &\xi=\frac{\partial \pi}{\partial x_0}, \quad \eta=\frac{\partial \pi}{\partial y_0}, \quad \zeta=\frac{\partial \pi}{\partial z_0}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

высказанное предположение таким образом доказано.

Заметим, что (u, ξ), (v, η), (w, ζ) образуют три пары интегралов линейной системы:

$$\frac{dU}{dx}=f'_y(x, \psi, \pi)U+f'_z(x, \psi, \pi)V,$$
$$\frac{dV}{dx}=\varphi'_y(x, \psi, \pi)U+\varphi'_z(x, \psi, \pi)V,$$

отвечающих соответственно начальным данным $(-f_0, -\varphi_0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Итак, имеем:

$$u=-f_0v-\varphi_0w,$$
$$\xi=-f_0\eta-\varphi_0\zeta,$$

и, следовательно, функции $\psi(x; x_0, y_0, z_0)$, $\pi(x; x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяют уравнению в частных производных *

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}+f(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial F}{\partial y_0}+\varphi(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial F}{\partial z_0}=0. \tag{11}$$

460. Распространение на уравнения, зависящие от параметров. Предыдущие свойства могут быть распространены на системы уравнений, правые части которых содержат переменные параметры. Рассмотрим, например, уравнение первого порядка, зависящее от одного параметра:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, \lambda), \tag{12}$$

где правая часть есть непрерывная функция от x, y, λ, имеющая непрерывные частные производные f'_y и f'_λ в некоторой области D. Интеграл, принимающий значение y_0 при $x=x_0$, является также непрерывной функцией $y=\psi(x; x_0, y_0, \lambda)$ от x_0, y_0, λ в некоторой области δ, потому что его можно определить как сумму равномерно сходящегося ряда, все члены которого представляют собою непрерывные функции от $x; x_0, y_0, \lambda$ в этой области. Чтобы доказать, что функцию ψ можно диференцировать по λ, достаточно присоединить к уравнению (12) линейные уравнения

$$\frac{dz}{dx}=zf'_y(x, y, \lambda), \quad \frac{du}{dx}=uf'_y(x, y, \lambda), \quad \frac{dv}{dx}=vf'_y(x, y, \lambda)+f'_\lambda \tag{13}$$

---

* Можно проверить, как и выше (стр. 16, примечание), что функция

$$Z(x; x_0, y_0, z_0)=\int_{x_0}^{x}\theta(x, \psi, \pi)\,dx$$

удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0}+f(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial Z}{\partial y_0}+\varphi(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial Z}{\partial z_0}+\theta(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Точно так же видно, что два соотношения $y=\psi(x; x_0, y_0, z_0)$, $z=\pi(x; x_0, y_0, z_0)$ могут быть записаны также в виде

$$y_0=\psi(x_0; x, y, z), \quad z_0=\pi(x_0; x, y, z).$$

Таким образом получаем два первых интеграла системы (8) (ср. II, § 393).

с начальными данными: $z=1$, $u=-f(x_0, y_0)$, $v=0$. Возвращаясь к рассуждениям § 459, увидим, что интегралами этой новой системы соответственно будут:

$$y=\psi(x; x_0, y_0, \lambda), \quad z=\frac{\partial\psi}{\partial y_0}, \quad w=\frac{\partial\psi}{\partial x_0}, \quad v=\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}.$$

Метод, очевидно, является общим, и можно высказать следующее общее предложение:

Если дана система n диференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p), \quad \ldots \quad \frac{dy_n}{dx}=f_n, \tag{14}$$

правые части которых являются непрерывными функциями переменных x, y_i, λ_k и допускают непрерывные частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial y_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial\lambda_k}$ в некоторой области D, то интегралы этой системы, принимающие начальные значения $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ при $x=x_0$, сами являются непрерывными функциями и допускают частные производные по переменным x_0, y_i^0, λ_k, которые также непрерывны в достаточно малой области δ.

Примечание. Этот же метод позволяет доказать существование у интегралов частных производных до порядка N по переменным x_0, y_i^0, λ_k, если функции f_1, $f_2, \ldots, f_n$ тоже допускают непрерывные частные производные по переменным y_i, λ_k до того же порядка N.

461. Бесконечно близкие интегралы. Можно притти к более точным заключениям, если известна частная система интегралов рассматриваемых диференциальных уравнений. Ради простоты мы проведем рассуждение для одного уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, \lambda), \tag{15}$$

относительно которого мы сделаем следующие предположения: 1) при $\lambda=0$ это уравнение допускает частный интеграл $y_1(x)$, непрерывный в интервале (x_0, x_1); 2) функция $f(x, y, \lambda)$ непрерывна и допускает непрерывные частные производные $f'_y(x, y, \lambda)$, $f'_\lambda(x, y, \lambda)$ в области D, определенной условиями

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad y_1(x)-a \leqslant y \leqslant y_1(x)+a, \quad |\lambda| \leqslant b,$$

где a и b — два положительных числа.

Пусть R — полоса плоскости xy, ограниченная двумя прямыми $x=x_0$, $x=x_1$ и двумя кривыми

$$y=y_1(x)-a, \quad y=y_1(x)+a,$$

между которыми расположена известная интегральная кривая $y=y_1(x)$; функция $f(x, y, \lambda)$ непрерывна в этой полосе, так же как и ее частные производные f'_y, f'_λ, если только λ по абсолютной величине меньше b.

В этих предположениях мы покажем, что при достаточно малой абсолютной величине λ метод Пикара, примененный к интегралу, который принимает то же начальное значение y_0, что и $y_1(x)$ при $x=x_0$, приводит к последовательным приближениям, сходящимся во всем интервале (x_0, x_1). Пусть H и K — верхние границы $|f'_y|$ и $|f'_\lambda|$ в области D; если y' и y заключены между $y_1(x)-a$ и $y_1(x)+a$, а λ и λ' между $-b$ и $+b$, мы имеем во всей этой области неравенство Липшица:

$$|f(x, y', \lambda') - f(x, y, \lambda)| < H|y'-y| + K|\lambda'-\lambda|. \tag{16}$$

Возьмем $Y_1 = y_1(x)$ за первое приближенное значение искомого интеграла, затем положим

$$Y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y_1(t), \lambda]\, dt, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

$$Y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y_2(t), \lambda]\, dt$$

и вообще

$$Y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y_{n-1}(t), \lambda]\, dt.$$

Мы сначала покажем, что все эти приближенные значения остаются заключенными между $y_1(x)-a$ и $y_1(x)+a$ во всем интервале (x_0, x_1), если только абсолютная величина λ достаточно мала.

В самом деле, мы имеем:

$$Y_n(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \{f[t, Y_{n-1}(t), \lambda] - f[t, y_1(t), 0]\}\, dt;$$

если $Y_{n-1}(x)$ заключено между $y_1(x)-a$ и $y_1(x)+a$, мы имеем в силу соотношения (16).

$$|Y_n(x) - y_1(x)| < \int_{x_0}^{x} \{H|Y_{n-1}(t) - y_1(t)| + K|\lambda|\}\, dt.$$

Рассмотрим последовательность функций $\Delta_n(x)$, определенных рекуррентным соотношением

$$\Delta_n(x) = \int_{x_0}^{x} \{H\Delta_{n-1}(t) + K|\lambda|\}\, dt,$$

причем $\Delta_1(x)=0$. Ясно, что все функции $\Delta_2(x), \ldots, \Delta_n(x), \ldots$ положительны между x_0 и x_1 и что $|Y_n(x) - y_1(x)| < \Delta_n(x)$. Но функции $\Delta_n(x)$ представляют собою последовательные приближенные значения интеграла линейного уравнения:

$$u' = Hu + K|\lambda|,$$

обращающегося в нуль при $x=x_0$; этот интеграл, очевидно, равен

$$\frac{K|\lambda|}{H}\left\{e^{H(x-x_0)}-1\right\};$$

так как первое приближенное значение равно нулю, все последующие меньше самого интеграла (§ 457), и, следовательно, каково бы ни было n, мы имеем:

$$\Delta_n(x)<\frac{K|\lambda|}{H}\left\{e^{H(x-x_0)}-1\right\}.$$

Если $|\lambda|$ таково, что правая часть этого неравенства меньше a, мы убеждаемся шаг за шагом, что все последовательные приближенные значения $Y_2(x), \ldots, Y_n(x), \ldots$ остаются заключенными между $y_1(x)-a$ и $y_1(x)+a$ во всем интервале (x_0, x_1). Рассуждение заканчивается, как в общем случае (§ 388); когда n неограниченно возрастает, $Y_n(x)$ имеет пределом интеграл $Y(x, \lambda)$, принимающий значение y_0 при $x=x_0$, непрерывный в интервале (x_0, x_1) и заключенный между y_1-a и y_1+a в этом интервале. Таким образом при изменении x от x_0 до x_1 интегральная кривая остается заключенной в полосе R. Методы § 459—460 показывают, кроме того, что $Y(x, \lambda)$, рассматриваемый как функция двух переменных x и λ, непрерывен вместе с частными производными Y'_x и Y'_λ, когда x остается в интервале (x_0, x_1), а $|\lambda|$ остается меньше соответствующим образом выбранного числа η.

Рассуждение является, очевидно, общим, и предложение распространяется на систему любого числа диференциальных уравнений, правые части которых зависят от любого числа параметров.

Если уравнения (14) *при* $\lambda_1=0, \ldots, \lambda_p=0$ *допускают частную систему интегралов* $y_i=y_i^0(x)$, *непрерывных в интервале* (x_0, x_1), *если правые части* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *непрерывны и допускают непрерывные частные производные по переменным* y_i, λ_k *в области* D, *определенной условиями*

$$x_0\leqslant x\leqslant x_1,\quad y_i^0(x)-a\leqslant y_i\leqslant y_i^0(x)+a,\quad |\lambda_k|<b,$$

где a *и* b — *два положительных числа, то интегралы этой системы, принимающие при* $x=x_0$ *те же значения, что и*

$$y_1^0(x), \ldots, y_n^0(x),$$

являются, так же как и их частные производные по x *и по параметрам* λ_k, *непрерывными функциями в области* D', *определенной условиями*

$$x_0\leqslant x\leqslant x_1,\quad |\lambda_k|<\mu,\quad k=1, 2, \ldots, p,$$

где μ — *соответственно выбранное положительное число.*

В частном случае, когда правые части f_i являются аналитическими функциями неизвестных y_i и параметров λ_k, интегралы системы представляются по методу Пикара как суммы равномерно сходящихся рядов, все члены которых являются аналитическими функциями * параметров λ_k. Эти интегралы являются также аналитическими функциями этих параметров, и мы приходим, таким образом, к теореме А. Пуанкаре, которая будет непосредственно доказана немного дальше.

Можно еще обобщить предыдущую теорему, предполагая, что начальные значения функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при $x=x_0$ являются n независимыми переменными. Если мы обозначим начальное значение $y_i(x)$ через $y_i^0(x_0)=\beta_i$, то, полагая

$$y_i(x)=\beta_i+Y_i(x),$$

приходим к системе той же формы, что и система (14), но заключающей сверх того n параметров $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Интегралы этой новой системы, принимающие при $x=x_0$ начальные значения $y_i^0(x_0)$, являются непрерывными функциями и допускают непрерывные частные производные по новым параметрам $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, если только абсолютные величины этих параметров остаются достаточно малыми.

Наконец, предполагая непрерывность f'_x, можно принять, что начальное значение x также изменяется.

Например, если в уравнении (15) положить

$$x=X+a, \quad y=Y+\beta,$$

то уравнение преобразуется в следующее:

$$\frac{dY}{dX}=f(X+a, \ Y+\beta, \ \lambda);$$

интеграл этого уравнения, принимающий значение y_0 при $X=x_0$, является непрерывной функцией от a, β, λ, когда x изменяется от x_0 до x_1 при достаточно малых $|a|$, $|\beta|$, $|\lambda|$, если предположить, что все время выполняются вышеуказанные условия. Отсюда заключаем, что интеграл уравнения (15), принимающий значение $y_0+\beta$ при $x=x_0+a$, является в той же области непрерывной функцией, допускающей непрерывные частные производные по переменным a, β, λ.

Примеры. Пусть $y_1(x)$ есть частный интеграл уравнения первого порядка $y'=f(x, y)$, непрерывный от x_0 до x_1 и принимающий значение y_0 при $x=x_0$. Интеграл этого же уравнения, принимающий при $x=x_0$ значение $y_0+\lambda$, является функцией $F(x, \lambda)$ двух переменных x и λ, непрерывною и допускающею непрерывные частные производные, когда x изменяется от x_0 до x_1, а λ от $-h$ до $+h$, где положительное число h выбрано достаточно малым. Пусть AB — отрезок прямой $x=x_0$, заключенный между двумя точками A и B с ординатами y_0-h и y_0+h. Из каждой точки отрезка AB выходит отрезок интегральной кривой, идущий от этой точки с абсциссой x_0 к точке с абсциссой x_1, и совокупность этих отрезков заполняет полосу, заключенную между двумя прямыми $x=x_0$, $x=x_1$ и двумя отрезками, выходящими из точек A и B.

Пусть, в самом деле, λ' и λ'' — два значения λ, заключенные между $-h$ и $+h$; две интегральных кривых $C_{\lambda'}$ и $C_{\lambda''}$, соответствующих этим значениям λ, не могут иметь общей точки между двумя прямыми $x=x_0$ и $x=x_1$, ибо тогда

* В самом деле, достаточно несколько изменить рассуждения, чтобы убедиться, что заключения остаются в силе и тогда, когда параметры принимают комплексные значения, лишь бы модули были достаточно малы

через эту общую точку проходили бы две интегральные кривые. Если пересечь эти кривые прямою $x=\alpha$, параллельной Oy $(x_0<\alpha<x_1)$, то функция $F(\alpha, \lambda)$ может только возрастать вместе с λ; если бы мы имели одновременно

$$\lambda'>\lambda'', \quad F(\alpha, \lambda')<F(\alpha, \lambda''),$$

то, очевидно, две кривые $C_{\lambda'}$ и $C_{\lambda''}$ пересеклись бы между собою в промежутке между двумя прямыми $x=x_0$, $x=\alpha$. Таким образом при возрастании λ от $-h$ до $+h$ функция $F(\alpha, \lambda)$ принимает, и притом только один раз, всякое значение, заключенное между $F(\alpha, -h)$ и $F(\alpha, +h)$.

Рассмотрим еще систему двух уравнений первого порядка, правые части которых не содержат переменного параметра, и пусть $y_1(x)$, $z_1(x)$ будет система частных интегралов, непрерывных в интервале (x_0, x_1) и принимающих значения y_0 и z_0 при $x=x_0$. Интегралы, принимающие при $x=x_0$ начальные значения $y_0+\lambda$, $z_0+\mu$, являются, так же как и их производные, непрерывными функциями во всем интервале (x_0, x_1), если только $|\lambda|$ и $|\mu|$ меньше соответственного положительного числа. Рассмотрим в плоскости $x=x_0$ маленькую замкнутую кривую γ, окружающую точку M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0). Из каждой точки области σ, ограниченной кривой γ, выходит отрезок интегральной кривой, кончающийся в некоторой точке плоскости $x=x_1$. Совокупность этих отрезков заполняет часть пространства, ограниченную поверхностью, образованной отрезками, выходящими из различных точек γ.

462. Уравнения в вариациях. Рассмотрим для определенности систему двух уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, z; \lambda), \quad \frac{dz}{dx}=\varphi(x, y, z; \lambda), \tag{17}$$

и пусть $y=y_1(x)$, $z=z_1(x)$ есть система решений, соответствующих значению параметра $\lambda=0$. Мы предположим, что эти решения непрерывны в интервале (x_0, x_1), и сохраним остальные предположения относительно правых частей f и φ. В силу предыдущего уравнения (17) допускают бесконечное множество систем решений, зави ящих от параметра λ, непрерывных в том же интервале и обращающихся при $\lambda=0$ соответственно в $y_1(x)$ и $z_1(x)$. Достаточно взять за начальные значения функции $y_0(\lambda)$, $z_0(\lambda)$, непрерывные вместе со своими производными и приводящиеся при $\lambda=0$ соответственно к $y_1(x_0)$ и $z_1(x_0)$. Мы можем даже предположить, что параметр λ не входит явно в функции f и φ, так что эти интегралы зависят от λ лишь через посредство начальных данных. Пусть

$$y=F(x, \lambda), \quad z=\Phi(x, \lambda)$$

одна из этих систем интегралов; при $\lambda=0$ имеем тождественно:

$$F(x, 0)=y_1(x), \quad \Phi(x, 0)=z_1(x), \tag{18}$$

между тем как при $x=x_0$ имеем:

$$F(x_0, \lambda)=y_0(\lambda), \quad \Phi(x_0, \lambda)=z_0(\lambda). \tag{19}$$

Диференцируя обе части уравнений (17) по параметру λ, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\lambda}&=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\lambda}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}+\frac{\partial f}{\partial\lambda},\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial\lambda}&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\lambda}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda};
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

обозначим через $\xi(x)$ и $\eta(x)$ производные $F'_\lambda(x, \lambda)$ и $\Phi'_\lambda(x, \lambda)$, в которых положено $\lambda = 0$, и подставим в предыдущие соотношения значение $\lambda = 0$. Мы видим, что функции $\xi(x)$, $\eta(x)$ удовлетворяют линейным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= f'_y(x, y_1, z_1; 0)\,\xi + f'_z(x, y_1, z_1; 0)\,\eta + f'_\lambda(x, y_1, z_1; 0), \\ \frac{d\eta}{dx} &= \varphi'_y(x, y_1, z_1; 0)\,\xi + \varphi'_z(x, y_1, z_1; 0)\,\eta + \varphi'_\lambda(x, y_1, z_1; 0), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

которые были названы Пуанкаре *уравнениями в вариациях*. Эти уравнения определяют функции $\xi(x)$, $\eta(x)$ во всем интервале (x_0, x_1), если известны их значения при $x = x_0$. Название *уравнений в вариациях* объясняется тем, что если рассматривать вариацию параметра $\delta\lambda$ как бесконечно-малое, то эти уравнения дают главную часть приращения интегралов $y(x)$ и $z(x)$, когда x изменяется от x_0 до x_1.

В общем случае интегрирование системы (21) представляет те же трудности, что и интегрирование любой линейной системы. Но если известен общий интеграл системы (17), с двумя произвольными постоянными a и b,

$$y = G(x, \lambda, a, b), \quad z = H(x, \lambda, a, b), \qquad (22)$$

то из него можно легко вывести общий интеграл системы (21). В самом деле, предположим для определенности, что интегралы $y_1(x)$ и $z_1(x)$ соответствуют значениям a_0, b_0 постоянных интеграции. Диференцируя последовательно уравнения (17) по параметрам a, b, λ и полагая затем в полученных соотношениях $\lambda = 0$, $a = a_0$, $b = b_0$, мы непосредственно усматриваем, что функции $G'_\lambda(x, 0; a_0, b_0)$ и $H'_\lambda(x, 0; a_0, b_0)$ образуют частную систему интегралов уравнений (21), а функции (G'_a, H'_a) и (G'_b, H'_b) образуют две частных системы интегралов тех же уравнений, в которых отброшены члены, не зависящие от ξ и η.

В приложениях часто случается, что функции f и φ не зависят от λ, и уравнения в вариациях образуют однородную систему. В силу предыдущих замечаний, если известен общий интеграл системы (17), то общий интеграл этой линейной системы получается непосредственно.

463. Теорема Пуанкаре. Мы уже видели, что когда правые части диференциальных уравнений являются аналитическими функциями переменных y_i и параметров, то интегралы тоже представляют собою аналитические функции параметров (§ 461). Эта теорема, принадлежащая А. Пуанкаре, может также быть доказана непосредственно обычными способами „исчисления пределов“ *.

Рассмотрим для определенности систему двух диференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z; \lambda) = \sum a_{\alpha\beta\gamma} y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma, \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z; \lambda) = \sum b_{\alpha\beta\gamma} y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

* Пикар дал несколько иное доказательство (Cours d'Analyse, t. III, Chap. VIII).

где правые части суть целые ряды относительно y, z, λ, коэфициенты которых $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$ являются непрерывными функциями переменного x в некотором интервале (x_0, x_1). Эти ряды предполагаются сходящимися для любого x в этом интервале, если только модули y, z, λ не превосходят некоторого положительного числа ρ; кроме того, эти ряды не содержат членов, не зависящих от y, z, λ, так что при $\lambda=0$ уравнения (23) допускают систему частных интегралов $y=z=0$.

Поставим себе сначала целью найти два целые ряда по степеням λ,

$$\left.\begin{aligned} y &= \lambda y_1(x)+\lambda^2 y_2(x)+\ldots+\lambda^n y_n(x)+\ldots, \\ z &= \lambda z_1(x)+\lambda^2 z_2(x)+\ldots+\lambda^n z_n(x)+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

удовлетворяющие *формально* уравнениям (23), так, чтобы все коэфициенты $y_n(x)$, $z_n(x)$ обращались в нуль при $x=x_0$. Заменяя y и z этими разложениями в уравнениях (23) и приравнивая тождественно правые и левые части, получаем сперва соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{100}y_1(x)+a_{010}z_1(x)+a_{001}, \\ \frac{dz_1}{dx} &= b_{100}y_1(x)+b_{010}z_1(x)+b_{001}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

которые вместе с условиями $y_1(x_0)=z_1(x_0)=0$ определяют функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$. Эти уравнения являются в точности уравнениями в вариациях, соответствующими частной системе интегралов $y=z=0$. Вообще, приравнивая коэфициенты при λ^n в обеих частях после подстановки, получаем для определения коэфициентов $y_n(x)$ и $z_n(x)$ два линейных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_n}{dx} &= a_{100}y_n(x)+a_{010}z_n(x)+u_n, \\ \frac{dz_n}{dx} &= b_{100}y_n(x)+b_{010}z_n(x)+v_n, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где u_n и v_n — два целых многочлена, с целыми и положительными коэфициентами, относительно коэфициентов $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$ и функций $y_i(x)$, $z_i(x)$, в которых $i<n$. Мы видим, таким образом, переходя последовательно от n к $n+1$, что все функции y_n и z_n непрерывны вместе со своими производными y_n' и z_n' в интервале (x_0, x_1). Можно отметить, что если уравнения (25) проинтегрированы, все эти функции определяются квадратурами.

Чтобы установить сходимость полученных таким образом разложений (24), прибегнем к вспомогательной системе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= F(x, Y, Z; \lambda)=\sum A_{\alpha\beta\gamma}Y^\alpha Z^\beta \lambda^\gamma, \\ \frac{dZ}{dx} &= \Phi(x, Y, Z; \lambda)=\sum B_{\alpha\beta\gamma}Y^\alpha Z^\beta \lambda^\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

в которой коэфициенты $A_{\alpha\beta\gamma}$ и $B_{\alpha\beta\gamma}$ являются соответственно преобладающими функциями для $a_{\alpha\beta\gamma}$ и $b_{\alpha\beta\gamma}$ в интервале (x_0, x_1).

Можно опять искать разложения вида:

$$\left.\begin{aligned} Y &= Y_1(x)\lambda + \ldots + Y_n(x)\lambda^n + \ldots, \\ Z &= Z_1(x)\lambda + \ldots + Z_n(x)\lambda^n + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

удовлетворяющие формально вспомогательной системе (27), в которых все коэфициенты $Y_n(x)$, $Z_n(x)$ обращаются в нуль при $x = x_0$. Предположим $x_1 > x_0$; эти коэфициенты $Y_n(x)$, $Z_n(x)$ определяются шаг за шагом системами линейных уравнений; так, например, Y_1 и Z_1 должны удовлетворять системе

$$\frac{dY_1}{dx} = A_{100}Y_1 + A_{010}Z_1 + A_{001}, \quad \frac{dZ_1}{dx} = B_{100}Y_1 + B_{010}Z_1 + B_{001}, \tag{29}$$

и обращаться в нуль при $x = x_0$. Сравнивая эту систему с подобной же системой (25), определяющей $y_1(x)$ и $z_1(x)$, непосредственно усматриваем, что $Y_1(x)$ и $Z_1(x)$ являются преобладающими функциями для $y_1(x)$ и $z_1(x)$ в интервале (x_0, x_1) (§ 457). Следовательно, $\frac{dY_1}{dx}$ и $\frac{dZ_1}{dx}$ сами являются преобладающими для $\frac{dy_1}{dx}$ и $\frac{dz_1}{dx}$. Рассуждение может быть продолжено шаг за шагом, и мы видим, что функции Y_n, Z_n, $\frac{dY_n}{dx}$, $\frac{dZ_n}{dx}$ являются соответственно преобладающими для функций y_n, z_n, $\frac{dy_n}{dx}$, $\frac{dz_n}{dx}$ в интервале (x_0, x_1). Достаточно поэтому показать, что при соответствующем выборе преобладающих функций $A_{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta\gamma}$ ряды (28) и ряды, получающиеся из них почленным диференцированием, равномерно сходятся при λ достаточно малом по абсолютной величине.

Пусть M — верхняя граница модуля двух функций f и φ, когда x изменяется от x_0 до x_1, а модули y, z, λ не превосходят положительного числа ρ. Коэфициент общего члена, содержащего $y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma$, меньше или в крайнем случае равен коэфициенту этого же члена в разложении

$$\frac{M(y+z+\lambda)}{1 - \frac{y+z+\lambda}{\rho}}$$

по степеням y, z, λ. Следовательно, за вспомогательную систему (28) мы тем более можем взять систему

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = \frac{M(Y+Z+\lambda)\left(1 + \frac{Y+Z+\lambda}{\rho}\right)}{1 - \frac{Y+Z+\lambda}{\rho}}, \tag{30}$$

и остается только доказать, что интегралы этой системы, обращающиеся в нуль при $x=x_0$, могут быть разложены по возрастающим степеням λ во всем интервале (x_0, x_1), если только $|\lambda|$ достаточно мало. Принимая во внимание начальные условия и полагая $Y+Z+\lambda=\rho t$, приводим систему (30) к единственному уравнению:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2Mt(1+t)}{1-t},$$

с условием $t=\frac{\lambda}{\rho}$ при $x=x_0$. Переменные разделяются, и искомый интеграл является тем корнем уравнения $t=a(t+1)^2$, где $a=\frac{\rho\lambda e^{2M(x-x_0)}}{(\rho+\lambda)^2}$, который обращается в $\frac{\lambda}{\rho}$ при $x=x_0$. При $\lambda=0$ мы имеем также $a=0$, и корень уравнения относительно t, обращающийся в нуль при $a=0$, является, как легко видеть, голоморфной функцией от a, пока $|a|<\frac{1}{4}$. Но для того чтобы это имело место, достаточно взять $|\lambda|$ настолько малым, чтобы $\frac{\rho\lambda e^{2M(x-x_0)}}{(\rho+\lambda)^2}$ было меньше $\frac{1}{4}$. Если λ удовлетворяет этому условию, интегралы Y и Z могут быть разложены в целые ряды относительно λ, сходящиеся во всем интервале (x_0, x_1). Формулы (30) показывают также, что производные $\frac{dY}{dx}$, $\frac{dZ}{dx}$ могут быть разложены в целые ряды относительно λ в том же интервале. Доказательство распространяется, очевидно, на любое число уравнений, зависящих от любого числа параметров. Можно также распространить его на случай, когда переменному x даются комплексные значения, если коэфициенты являются голоморфными функциями от x. Предположим, например, что уравнения (23) не содержат никакого переменного параметра и что мы ищем разложение интегралов по степеням начальных значений y_0, z_0, соответствующих $x=x_0$.

Положим

$$y=\sum a_{mn}y_0^m z_0^n, \quad z=\sum \beta_{mn}y_0^m z_0^n;$$

коэфициенты a_{mn}, β_{mn} определяются шаг за шагом из систем линейных уравнений, с начальными условиями $a_{mn}(x_0)=\beta_{mn}(x_0)=0$ при $m+n>1$. Что же касается коэфициентов (a_{10}, β_{10}) и (a_{01}, β_{01}), то они образуют две системы решений уравнений в вариациях, определенные соответственно начальными условиями $a_{10}(x_0)=1$, $\beta_{10}(x_0)=0$ и $a_{01}(x_0)=0$, $\beta_{01}(x_0)=1$. Полученные таким образом ряды будут, несомненно, сходиться во всем интервале (x_0, x_1), если только абсолютные величины y_0 и z_0 меньше достаточно малого положительного числа. Эта новая задача является в действительности лишь частным случаем первой, так как по существу метод сводится к тому, что мы полагаем $y=Y+y_0$, $z=Z+z_0$ и разлагаем по степеням параметров y_0 и z_0 интегралы новой системы, обращающиеся в нуль при $x=x_0$.

Примечание. Когда система (23) является линейной относительно y и z, с коэфициентами линейными относительно λ, то за вспомогательную систему можно взять систему вида:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{dZ}{dx}=(A+B\lambda)(Y+Z)+C\lambda,$$

где A, B, C — положительные постоянные. Интегралы этой вспомогательной системы, обращающиеся в нуль при $x=x_0$, являются *целыми функциями параметра* λ, и следовательно, то же имеет место и для интегралов данной линейной системы. Рассуждение остается, очевидно, в силе, если коэфициенты линейной системы являются целыми функциями от λ (ср II, § 389).

II. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ.

464. Периодические решения. С этого момента мы будем обозначать через t независимое переменное, которое для определенности можно считать представляющим время. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

суть уравнения, определяющие движение точки в пространстве n измерений; X_i предполагаются периодическими функциями от t с периодом ω. Рассмотрим систему решений, соответствующих начальным значениям $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ при $t=t_0$, или, употребляя язык геометрии, траекторию, выходящую из точки с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Если при $t=t_0+\omega$ эти интегралы снова принимают соответственно начальные значения x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$, то движущееся тело в момент $t_0+\omega$ опять попадает в свое первоначальное положение; так как, с другой стороны, уравнения (31) не меняются при замене t через $t+\omega$, то ясно, что система рассматриваемых решений периодична. Пусть $x_i=\varphi_i(t)$ $i=1, 2, \ldots, n$ есть эта система решений, и функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — периодические функции периода ω. Если правые части уравнений (31) зависят от некоторых переменных параметров, то может случиться, что при значениях этих параметров, близких к значениям, которые соответствуют известному периодическому решению, и при соответствующим образом выбранных начальных значениях система (31) допускает новые периодические решения, близкие к первому. Мы проведем рассуждения на системе трех уравнений. Пусть

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y, z;\ t, \mu), \quad \frac{dy}{dt}=Y(x, y, z; t, \mu), \quad \frac{dz}{dt}=Z(x, y, z;\ t, \mu) \tag{32}$$

система трех диференциальных уравнений, правые части которых являются периодическими функциями времени t периода ω. Предположим, что при $\mu=0$ эти уравнения допускают систему решений

$$x=\varphi_1(t), y=\varphi_2(t), z=\varphi_3(t), \tag{33}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 суть периодические функции от t периода ω. Возьмем для μ значение, близкое к нулю, и пусть

$$x=\Phi_1(t, a_1, a_2, a_3, \mu), y=\Phi_2(t, \ldots), z=\Phi_3(t, \ldots) \tag{34}$$

суть интегралы уравнений (32), принимающие при $t=0$ соответственно значения $\varphi_1(0)+a_1$, $\varphi_2(0)+a_2$, $\varphi_3(0)+a_3$. Значения этих интегралов при $t=\omega$ сами являются непрерывными функциями от a_1, a_2, a_3, μ, если только абсолютные величины этих количеств достаточно малы; если

$$\psi_i=\Phi_i(\omega, a_1, a_2, a_3, \mu)-\varphi_i(0)-a_i=0 \qquad (i=1, 2, 3), \tag{35}$$

то движущееся тело займет в момент времени $t=\omega$ то же положение, что и в момент $t=0$. Таким образом, мы будем находиться в точно таких же условиях, как и в начальный момент движения, и, следовательно, будем иметь периодическое решение уравнений (32), соответствующее значениям a_1, a_2, a_3, μ.

Уравнения (35) при $\mu=0$ удовлетворяются нулевыми значениями a_1, a_2, a_3, что дает периодическое решение, предполагающееся известным заранее. Можно утверждать, что эти уравнения (35) для значений μ, близких к нулю, тоже допускают решения относительно a_1, a_2, a_3, если якобиан левых частей по a_1, a_2, a_3 не равен нулю при $\mu=0$, $a_i=0$.

Положим

$$\xi_i=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a_i}\right)_0; \; \eta_i=\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial a_i}\right)_0; \; \zeta_i=\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial a_i}\right)_0,$$

где индекс нуль указывает, что после диференцирования a_1, a_2, a_3 и μ заменяются нулями; мы знаем, что (ξ_i, η_i, ζ_i) являются тремя системами частных интегралов уравнений в вариациях:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}&=\frac{\partial X}{\partial x}\xi+\frac{\partial X}{\partial y}\eta+\frac{\partial X}{\partial z}\zeta, \\ \frac{d\eta}{dt}&=\frac{\partial Y}{\partial x}\xi+\frac{\partial Y}{\partial y}\eta+\frac{\partial Y}{\partial z}\zeta, \\ \frac{d\zeta}{dt}&=\frac{\partial Z}{\partial x}\xi+\frac{\partial Z}{\partial y}\eta+\frac{\partial Z}{\partial z}\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где после диференцирования в правых частях x, y, z заменены через $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, а μ заменено нулем. Но нам известны начальные значения этих трех систем решений:

$$\xi_1=1,\ \eta_1=0,\ \zeta_1=0;\ \xi_2=0,\ \eta_2=1,\ \zeta_2=0;\ \xi_3=0,\ \eta_3=0,\ \zeta_3=1.$$

Значения этих трех функций при $t=\mu$ были бы известны, если бы мы умели интегрировать систему (36); в частности, это будет иметь место всегда, когда известен общий интеграл системы (32) при $\mu=0$. Но для поставленной нами цели это интегрирование не необходимо. В самом деле, якобиан, появляющийся в этом исследовании, имеет следующее выражение:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \xi_1(\omega)-1 & \eta_1(\omega) & \zeta_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) & \eta_2(\omega)-1 & \zeta_2(\omega) \\ \xi_3(\omega) & \eta_3(\omega) & \zeta_3(\omega)-1 \end{vmatrix}; \tag{37}$$

приравнивая этот определитель нулю, получаем необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнения (36) допускали систему решений

$$\xi = A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3,\ \eta = A\eta_1 + B\eta_2 + C\eta_3,\ \zeta = A\zeta_1 + B\zeta_2 + C\zeta_3,$$

принимающих одинаковые значения при $t=0$ и $t=\omega$, т. е. систему периодических решений.

Для того чтобы это было так, нужно, чтобы один из характеристических показателей (II, § 423) уравнений (36) обратился в нуль. Для краткости условимся говорить, что эти характеристические показатели являются характеристическими показателями известного периодического решения $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), x_3 = \varphi_3(t)$; мы можем тогда высказать следующую теорему:

Если ни один из характеристических показателей известного периодического решения не равен нулю, всякому значению μ, *близкому к нулю, соответствует периодическое решение уравнений* (32), *близкое к первоначальному.*

Если один из характеристических показателей известного периодического решения равен нулю, то предыдущее рассуждение неприложимо; но отсюда еще нельзя заключить, что для малых значений μ не существует периодических решений, близких к первоначальному. Предположим, например, что якобиан левых частей уравнений (35) по α_1, α_2, μ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \mu = 0$ не обращается в нуль; тогда близким к нулю значениям α_3 соответствует система значений α_1, α_2, μ, удовлетворяющая соотношениям (35). Таким образом мы видим, что, обратно, близким к нулю значениям μ тоже соответствуют значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, стремящиеся к нулю вместе с μ. Но обычно имеется несколько систем значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, соответствующих одному и тому же значению μ, и следовательно, несколько семейств периодических решений, близких к первоначальному. Это заключение было бы неверно только в том случае, если бы все якобианы левых частей уравнений (35) при $\alpha=0$ $\mu=0$ были равны нулю. Но даже в этом случае без дальнейшего исследования нельзя утверждать, что не существует периодических решений, близких к первоначальному. Может, например, случиться, что три уравнения (35) не все различны между собой. Ясно, что при подобных обстоятельствах все якобианы, о которых шла речь, обращаются в нуль, и однако, вообще говоря, будет существовать ∞^1 или ∞^3 периодических решений в зависимости от того, приводятся эти три уравнения к двум различным или к одному единственному уравнению. Для подробного исследования, так же как и для изучения случая, когда уравнения (31) не содержат явно времени t, я отсылаю читателя к работам А. Пуанкаре или *„Traité d'Analyse"* Пикара (т. III, гл. VIII). Предшествующие рассуждения в достаточной мере показывают, каким образом изыскание периодических решений в окрестности заранее известного решения сводится к изучению системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями, зависящими от одного параметра.

465. Устойчивые и неустойчивые решения. Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

есть система решений диференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t); \tag{38}$$

функции $\varphi_i(t)$ непрерывны для всех значений $t > t_0$; кроме того, мы предполагаем, что эти решения не проходят ни через одну особую точку диференциальных уравнений (38). Рассмотрим другую систему интегралов, принимающих при $t = t_0$ начальные значения

$$\varphi_i(0) + \alpha_i.$$

Мы уже знаем, что абсолютные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть выбраны достаточно малыми для того, чтобы новое решение в течение сколь угодно большого промежутка времени отличалось от первоначального сколь угодно мало. Но может случиться, что, как бы ни были малы абсолютные значения a_i, при неограниченном возрастании t новое решение в конце концов значительно удалится от первоначального. Это приводит нас к новому важному понятию — устойчивости интегралов диференциальных уравнений.

Предположим для точности определения, что известное решение приводится к $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, что, очевидно, не ограничивает общности рассуждений, так как за новые неизвестные можно всегда взять переменные $x'_i = x_i - \varphi_i(t)$. Мы, впрочем, ограничимся весьма общим случаем, когда уравнения имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum P^{(i)}_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \quad \begin{pmatrix} m_i \geqslant 0, \ \ldots, \ m_n \geqslant 0, \\ i = 1, 2, \ \ldots, \ n \end{pmatrix}; \tag{39}$$

здесь правые части представляют собою целые ряды относительно* $x_1, \ldots, x_n$, коэфициенты которых являются непрерывными функциями t, ограниченными для действительных значений $t \geqslant t_0$. Предположим, наконец, что эти ряды сходятся для всех значений $t \geqslant t_0$ и для всех действительных или комплексных значений переменных x_i, модули которых меньше соответственным образом выбранного положительного числа H. Если M есть положительное число, превосходящее в определенной таким образом области любую правую часть по абсолютной величине, то для всех значений $t \geqslant t_0$ (§ 352)

$$\left| P^{i}_{m_1 m_2 \cdots m_n} \right| < \frac{M}{H^{m_1 + m_2 + \ldots m_n}}.$$

Если коэфициенты P не зависят от t, мы имеем уравнения стационарного движения, т. е. уравнения, определяющие в пространстве n измерений траекторию движущейся точки, скорость которой в каждый момент не зависит от времени, а зависит только от положения движущейся точки в данный момент времени. Другим чрезвычайно важным и требующим рассмотрения случаем является тот, когда коэфициеты P представляют собою периодические функции времени; именно к этому случаю нас приводит изучение устойчивости известного периодического решения $x_i = \varphi_i(t)$ уравнений (38), когда правые части не зависят от t или являются периодическими функциями t. В самом деле, преобразование $x_i = \varphi_i(t) + x_i'$ приводит к уравнениям (39), правые части которых будут периодическими функциями t, даже когда X_i не зависят от t.

Рассмотрим те интегралы уравнений (39) $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, которые при $t = t_0$ принимают начальные значения $x_1^0, \ldots, x_n^0$, меньшие H по

* Этот вопрос при гораздо более общих предположениях был разобран недавно Е. Коттоном, который заменяет диференциальные уравнения (39) системой интегральных уравнений (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3-e série, t. XXVIII, 1911, p. 473). Я должен также указать важный мемуар P. Bohl (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVIII, 1910).

абсолютной величине. Пусть дано произвольное положительное число, $\varepsilon < H$; если можно подобрать к нему другое положительное число, $\eta \leq \varepsilon$, такое, что из условий $|x_i^0| < \eta$ вытекают, как следствие, неравенства

$$|x_1(t)| < \varepsilon, \ldots, |x_n(t)| < \varepsilon \tag{40}$$

для всех значений t, превосходящих t_0, то говорят, что решение $x_i = 0$ есть *устойчивое* решение. Если существует положительное число ε, такое, что к нему нельзя подобрать другое положительное число η с тем, чтобы удовлетворялись предыдущие условия, то решение *неустойчивое*. Ясно, что данное определение устойчивости можно заменить следующим: для всякого положительного числа $\varepsilon < H$ можно подобрать другое положительное число η, такое, что условие

$$(x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^0)^2 < \eta^2$$

влечет за собой неравенство $\{x_1(t)\}^2 + \ldots + \{x_n(t)\}^2 < \varepsilon^2$ для $t > t_0$. Подобным же образом может быть изменено определение неустойчивости.

Примеры легко найти среди линейных уравнений с постоянными коэфициентами. Решения системы $\frac{dx}{dt} = -y$, $\frac{dy}{dt} = x$, принимающие при $t = 0$ значения x_0, y_0, выражаются так:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t,$$

причем $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Достаточно, следовательно, взять $x_0^2 + y_0^2 < \varepsilon^2$, чтобы иметь при любом t также $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$. Таким образом решение $x = y = 0$ является *устойчивым*.

Интегралы системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y,$$

принимающие при $t = 0$ значения x_0, y_0, выражаются следующим образом:

$$x = \frac{x_0 + y_0}{3} e^{2t} + \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}, \quad y = \frac{2(x_0 + y_0)}{3} e^{2t} - \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}.$$

Решение $x = y = 0$ *неустойчиво*, так как если взять, например, $y_0 = 2x_0$, то как бы мало ни было x_0, если только оно не равно нулю, $|x|$ и $|y|$ неограниченно возрастают вместе с t. Этот пример дает повод к некоторым замечаниям. Если начальные значения x_0 и y_0 удовлетворяют условию $x_0 + y_0 = 0$, то $|x|$ и $|y|$ уменьшаются и стремятся к нулю, когда t возрастает от 0 до ∞; имеется *условная устойчивость*. Точно так же, если взять такие начальные условия, что разность $2x_0 - y_0$ равна нулю, то x и y стремятся к нулю, когда t убывает от 0 до $-\infty$. Если x_0 и y_0 не удовлетворяют ни одному из этих условий, то $|x|$ и $|y|$ неограниченно увеличиваются, когда t безгранично возрастает, проходя через положительные или через отрицательные значения.

Интегралы системы $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -2y - 2x$, принимающие при $t = 0$ значения x_0 и y_0, выражаются так:

$$x = e^{-t}[x_0 \cos t + (x_0 + y_0) \sin t], \quad y = e^{-t}[y_0 \cos t - (2x_0 + y_0) \sin t];$$

при неограниченном возрастании t эти функции стремятся к нулю, каковы бы ни были x_0 и y_0. Решение $x = y = 0$ является не только устойчивым, но, когда t стремится к $+\infty$, все интегралы неограниченно приближаются к нему. Для краткости мы говорим, что они являются асимптотическими к решению $x = y = 0$.

466. Общие теоремы относительно устойчивости *. Когда коэфициенты членов первой степени относительно $x_1, \ldots, x_n$ в правых частях уравнений (39) не зависят от t, то уравнения в вариациях, соответствующие известному решению $x_i = 0$, являются линейными уравнениями с постоянными коэфициентами, и изучение этой системы позволяет обычно решить вопрос об устойчивости или неустойчивости решения.

Пусть $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с постоянными коэфициентами; если заменить в ней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системой решений уравнений (39), то результат подстановки будет функцией от t, производная которой V в силу уравнений (39) напишется так:

$$V' = V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; t), \tag{41}$$

где V_1 — уже другая квадратичная форма с постоянными коэфициентами, а Φ — целый ряд относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, начинающийся с членов по меньшей мере третьей степени. Если коэфициенты формы $V(x_1, \ldots, x_n)$ можно выбрать так, чтобы $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была *определенной положительной формой*, то мы имеем следующие теоремы:

1. *Решение $x_i = 0$ устойчивое, если соответствующая форма $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является определенной отрицательной формой.*

2. *Решение $x_i = 0$ неустойчивое, если форма V является определенной положительной или неопределенной формой* **.

Для упрощения рассуждений прибегнем к языку геометрии и назовем *точкой* всякую систему значений для n переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2$, назовем *гиперсферой* S_ρ радиуса ρ; точно так же множество точек, для которых $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \rho^2$, представляет *внутренность* гиперсферы S_ρ.

Если форма $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — определенная положительная форма, то из предположений, сделанных выше относительно коэфициентов уравнений (39), вытекает, что можно найти такое положительное число R, что внутри гиперсферы радиуса R производная V' положительна и обращается в нуль только в начале координат. В самом деле, координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно представить в виде $\rho\alpha_1, \rho\alpha_2, \ldots, \rho\alpha_n$, где ρ — положительное число, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — числа, удовлетворяющие соотношению $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$. Подставляя эти значения в V', получаем:

$$V' = \rho^2 \,[V_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \rho W];$$

* За исключением некоторых изменений в подробностях, я следовал методу доказательства Ляпунова в уже упомянутом мемуаре (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2-ème série, t. IX, p. 403); см. также Ляпунов, Общая задача устойчивости движения. Харьков.

** Если $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определенная форма, то гессиан соответствующей формы V не может обращаться в нуль; потому что, если гессиан был бы нулем, можно было бы удовлетворить n уравнениям $\frac{dV}{dx_i} = 0$, а следовательно, и уравнению $V_1 = 0$, значениями неизвестных x_i, из которых не все были бы равны нулю. Таким образом форма V является суммой n квадратов различных между собою линейных функций с постоянными отличными от нуля коэфициентами.

здесь W — функция от $a_1, a_2, \ldots, a_n, \rho, t$, непрерывная, если $t > t_0$, а ρ остается меньше некоторой границы H. Когда точка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ описывает гиперсферу радиуса единица, форма $V_1(a_1, \ldots, a_n)$ остается положительной и большей некоторого минимума m. С другой стороны, пусть M есть максимум абсолютной величины W. Очевидно, что если взять за R положительное число, меньшее $\frac{m}{M}$, то V' внутри гиперсферы радиуса R будет положительна, за исключением начала координат, где $V' = 0$. При дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что число R выбрано именно таким образом.

Исследуем сначала случай, когда $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является определенной отрицательной формой. Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее R; когда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ описывает гиперсферу радиуса ε, $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ остается отрицательной и, следовательно, меньше некоторого наибольшего значения — K. Кроме того, эта функция V обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; следовательно, можно подобрать такое число $\lambda < \varepsilon$, что внутри гиперсферы S_λ радиуса λ мы имеем $V > -K$. Пусть число λ выбрано таким образом. Если при $t = t_0$ начальные значения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ представляют координаты точки внутри гиперсферы радиуса λ, *то при возрастании* t *от* t_0 *до* $+\infty$ *точка* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *останется всегда внутри гиперсферы радиуса* ε. В самом деле, в начальный момент точка $(x_1, \ldots, x_n)$ находится внутри этой гиперсферы; пусть она не остается там неограниченно долго; предположим, что в первый раз она достигает гиперсферы S_ε в момент времени $T > t_0$. Пусть V_0 и V_T — значения $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в моменты t_0 и T; мы имеем, что $V_0 > -K$, $V_T \leqslant -K$ (в силу самого способа определения чисел K и λ) и, следовательно, $V_0 > V_T$. Но подобное соотношение невозможно, так как в промежутке времени от t_0 до T производная V' положительна. Итак, допустив, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$ достигает гиперсферы S_ε, мы пришли к противоречию; следовательно, *решение* $x_i = 0$ *является устойчивым.*

В рассматриваемом случае решение является не только устойчивым, но все достаточно близкие решения к нему асимптотичны. В самом деле, когда t возрастает от t_0 до $+\infty$, функция V, отправляясь от отрицательного значения и в дальнейшем возрастая, стремится к нулю или к отрицательному значению — l. Я утверждаю, что это последнее предположение следует отбросить. В самом деле, так как функция V обращается в нуль в начале координат, то существует такое число λ', что $V > -l$ внутри гиперсферы радиуса λ'. Следовательно, точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ останется вне этой гиперсферы $S_{\lambda'}$. Но когда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ остается заключенной между $S_{\lambda'}$ и S_ε, V' остается больше некоторого минимума $\mu > 0$. К моменту времени T, следовательно, было бы

$$V_T > V_0 + \mu(T - T_0);$$

но подобное соотношение невозможно, так как правая часть неограниченно возрастает вместе с T, между тем как V_T должна оставаться меньше — l. Таким образом имеем, что при неограниченном возрастании t $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к нулю и, следовательно, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сами стремятся к нулю.

Следует заметить, что вышеприведенное рассуждение показывает, что, *когда V является определенной отрицательной формой, имеется устойчивость при условии, что для значений x_i, близких к нулю, V' может принимать только положительные или равные нулю значения*. Но в этом случае уже нельзя больше утверждать, что решения, близкие к первоначальному, будут к нему асимптотичны. Так, например, в элементарном случае двух уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x,$$

если взять $V=-(x^2+y^2)$, то $V'=0$; имеет место устойчивость, но не асимптотичность.

Предположим теперь, что V_1 — определенная положительная форма, а V — определенная положительная или неопределенная форма. Пусть число R имеет тот же смысл, что и выше; ε — некоторое положительное число, меньшее R, а λ — другое положительное число $\leqslant \varepsilon$. Мы покажем, что, каково бы ни было λ, всегда возможно внутри гиперсферы радиуса λ взять точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ так, чтобы точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в конце концов достигла гиперсферы радиуса ε, причем $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ являются соответственно начальными значениями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В самом деле, пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — координаты некоторой точки внутри этой гиперсферы, так что в этой точке $V_0=V(x_1^0, \ldots, x_n^0)>0$. Так как форма V обращается в нуль в начале координат, то существует число $\lambda'<\lambda$, такое, что внутри гиперсферы радиуса λ' имеет место неравенство $V<V_0$. Рассмотрим систему интегралов уравнений (39), принимающих при $t=t_0$ значения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$; мы хотим показать, что в течение конечного промежутка времени точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выйдет за пределы гиперсферы S_ε. В самом деле, противоположное предположение приводит к нелепому следствию. Если бы точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ оставалась внутри этой гиперсферы, то так как V' все время положительна, V возрастала бы и не могла бы принимать значений, меньших V_0. Таким образом точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ оставалась бы заключенной между двумя гиперсферами S_ε и $S_{\lambda'}$; но в этой области V' имеет положительный минимум m. Поэтому для всякого значения $T>t_0$ мы бы имели $V_T>V_0+m(T-t_0)$; но подобное неравенство невозможно, так как правая часть неограниченно увеличивается вместе с T, когда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находится внутри гиперсферы S_ε, между тем как V остается меньше некоторой определенной границы.

467. Приложение общих теорем. Очевидно, что для приложения предыдущих теорем можно произвести над переменными x_i линейную подстановку с произвольными постоянными коэфициентами, определитель которой отличен от нуля. Мы выберем коэфициенты этой подстановки так, чтобы привести к простому каноническому виду уравнения в вариациях, соответствующие решению $x_i=0$. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

суть уравнения в вариациях для предложенной системы (39); они получаются, если в правых частях ограничиться членами первой степени. Мы уже видели (II, § 421), как систему (42) можно привести к каноническому виду; этот вид прежде всего зависит от природы корней характеристического уравнения

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \ldots & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdot & \cdot\ \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{43}$$

Если это уравнение имеет n различных и действительных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то уравнения (42) линейной подстановкой с действительными коэфициентами можно привести к виду:

$$\frac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1,\ \frac{dy_2}{dt}=\lambda_2 y_2, \ldots,\ \frac{dy_n}{dt}=\lambda_n y_n. \tag{44}$$

Эта же подстановка, приложенная к уравнениям (39), приведет к системе, которая получится, если к правым частям уравнений (44) прибавить целые ряды относительно $y_1, \ldots, y_n$, начинающиеся по меньшей мере с членов второй степени. *Если ни один из коэфициентов λ_i не равен нулю*, то непосредственно получается квадратичная форма $V(y_i)$, для которой сопряженная форма $V_1(y_i)$ будет определенной положительной формой. Достаточно взять

$$V=\frac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2),$$

что дает

$$V_1=\lambda_1^2 y_1^2+\ldots+\lambda_n^2 y_n^2.$$

Если все коэфициенты λ_i *отрицательны*, V является определенной отрицательной формой, и имеется *устойчивость*. Если хоть один из коэфициентов λ_i *положителен*, форма V является определенной положительной формой или неопределенной формой, могущей принимать положительные значения; имеет место *неустойчивость*. Если один из коэфициентов λ_i равен нулю, то ясно, что, какова бы ни была квадратичная форма V, для V_1 не удастся получить определенной положительной формы, так как V_1 обращается в нуль при значениях y_i, которые не все равны нулю.

Предположим теперь, что характеристическое уравнение имеет кратные корни, причем все эти корни действительны, *и ни один из них не равен нулю*. Тогда над переменными x_i можно (II, § 421) произвести линейную подстановку с действительными коэфициентами, такую, что новые уравнения в вариациях разобьются на известное число групп простого вида (причем некоторые группы могут состоять из одного только уравнения). Рассмотрим для определенности группу трех уравнений следующего вида:

$$\frac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1,\quad \frac{dy_2}{dt}=\lambda_1 y_2+\mu y_1,\quad \frac{dy_3}{dt}=\lambda_1 y_3+\nu_1 y_1+\nu_2 y_2. \tag{45}$$

Так как λ_1 не равно нулю, то, не изменяя этого коэфициента, можно μ, ν_1, ν_2 заменить числами, абсолютная величина которых будет меньше всякого заданного положительного числа; действительно, если заменить y_1 через $\rho\sigma y_1$, а y_2 через σy_2, где σ и ρ — два постоянных отличных от нуля множителя, то система (45) заменяется системой того же вида, где λ_1 не изменилось, а μ, ν_1, ν_2 заменены соответственно через $\mu\rho$, $\nu_1\sigma\rho$, $\nu_2\sigma$. Таким образом, если λ_1 не равно нулю, мы всегда можем предполагать μ, ν_1, ν_2 настолько малыми, что квадратичная форма

$$\mathfrak{B}_1 = \lambda_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \lambda_1\mu y_1 y_2 + \lambda_1\nu_1 y_1 y_3 + \lambda_1\nu_2 y_2 y_3$$

будет определенной положительной формой, так как при $\mu = \nu_1 = \nu_2 = 0$ она приводится к форме

$$\lambda_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

а сама квадратичная форма $\mathfrak{B}_1(y_1 y_2 y_3)$ получается из формы

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\lambda_1\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)$$

путем диференцирования по t и замены $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$ и $\frac{dy_3}{dt}$ их выражениями из соотношений (45). Поступая таким же образом со всеми группами, подобными группе (45), мы, очевидно, образуем форму

$$V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

которая будет определенной и положительной, если только ни одно из чисел λ_i не равно нулю. Соответствующая форма V, которая представится суммой таких слагаемых, как $\frac{1}{2}\lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, распространенных на все группы уравнений, подобные группе (45), будет определенной отрицательной формой тогда и только тогда, когда все числа λ_i будут отрицательны. Заключение то же, что и выше. *Решение устойчиво, если все корни характеристического уравнения отрицательны, и неустойчиво, если один из них положителен.*

Предположим, наконец, что характеристическое уравнение имеет мнимые корни. Эти корни тогда сопряжены попарно, и каждой группе уравнений, подобной группе (45), соответствует сопряженная группа:

$$\frac{dy_1'}{dt} = \lambda_1' y_1', \quad \frac{dy_2'}{dt} = \lambda_1' y_2' + \mu' y_1', \quad \frac{dy_3'}{dt} = \lambda_1' y_3' + \nu_1' y_1' + \nu_2' y_2', \tag{45'}$$

причем переменные y_1 и y_1', y_2 и y_2', y_3 и y_3', так же как и коэфициенты λ_1 и λ_1', μ и μ', ν_1 и ν_1', ν_2 и ν_2', являются сопряженными комплексными величинами. В силу тех же соображений, что и выше, можно предположить, что модули коэфициентов μ, ν_1, ν_2 меньше любого наперед заданного положительного числа. Полагая $y_1 = u_1 + iv_1$, $y_1' = u_1 - iv_1$ и т. д., можно заменить систему уравнений (45) и (45') системой шести линейных уравнений с действительными коэфициентами, но для нашей цели это преобразование не нужно. В самом деле, положим

$$\mathfrak{B} = y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3'.$$

Принимая во внимание уравнения (45) и (45'), имеем:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = (\lambda_1 + \lambda_1')(y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3') + \mu y_1 y_2' + \mu' y_1' y_2 + \nu_1 y_1 y_3' +$$
$$+ \nu_1' y_1' y_3 + \nu_2 y_2 y_3' + \nu_2' y_2' y_3.$$

Квадратичная форма в правой части является определенной формой, когда модули μ, ν_1, ν_2 достаточно малы, если только $\lambda_1 + \lambda_1'$ не равно нулю, т. е. если только действительная часть λ_1 не равна нулю. Пусть $\lambda_1 = a + \beta\sqrt{-1}$, и a не равно нулю; полагая

$$\mathfrak{B} = 2a(y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3') = 2a(u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + u_3^2 + v_3^2),$$

мы видим, что $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ будет определенной положительной формой, если модули коэфициентов μ, ν_1, ν_2 сделаны предварительно достаточно малыми, а сама форма $\mathfrak{B}$ будет определенной положительной или отрицательной формой в зависимости от знака a. Поступая так же со всеми группами уравнений, происходящими от действительных или попарно сопряженных комплексных корней, видим, что всегда можно образовать такую квадратичную форму $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что сопряженная квадратичная форма $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет определенной положительной формой, *если только ни один из корней λ_i характеристического уравнения не имеет действительной части, равной нулю*. Если все эти действительные части *отрицательны*, сама форма V является определенной отрицательной формой, и решение $x_i = 0$ *устойчиво*; если хоть одна из этих действительных частей *положительна*, форма V может принимать и положительные значения, и решение $x_i = 0$ является *неустойчивым*.

Исследование сомнительного случая. Если один из корней λ_i имеет действительную часть, равную нулю, имеем сомнительный случай. Это единственный случай, когда решение $x_i = 0$ может быть устойчивым, когда не все близкие к нему решения асимптотичны к нему. Сомнение может быть разрешено, кроме случая, когда действительные части всех остальных корней равны нулю или отрицательны. В самом деле, предположим, что некоторые из корней характеристического уравнения имеют действительные части, равные нулю, в то время как у некоторых действительные части положительны. Корни характеристического уравнения $D'(s) = 0$ вспомогательной системы

$$\frac{dx_i'}{dt} = a_{i1}x_1' + \ldots + \left(a_{ii} - \frac{\mu}{2}\right)x_i' + \ldots + a_{in}x_n' \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (46)$$

которая получается из системы (42) заменой в ней a_{ii} через $a_{ii} - \frac{\mu}{2}$, равны корням уравнения (43), уменьшенным на $\frac{\mu}{2}$. При наших предположениях можно выбрать действительное и положительное число μ так, чтобы ни один из корней уравнения $D'(s)=0$ не имел действительной части, равной нулю, и чтобы действительные части некоторых из них были положительны. В силу уже разобранного перед этим случая существует квадратичная форма

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которая может принимать положительные значения, в то время как форма

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[a_{i1}x_1 + \ldots + \left(a_{ii} - \frac{\mu}{2}\right)x_i + \ldots + a_{in}x_n\right]\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

является определенной положительной формой. Если в $V(x_1, \ldots, x_n)$ заменить $x_1, \ldots, x_n$ интегралами системы (39), то подстановка в результате дает функцию от t, производная которой, принимая во внимание определение $W(x_1, \ldots, x_n)$, имеет следующее выражение:

$$V' = \mu V + W + \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; t),$$

где Φ — целый ряд относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, все члены которого не ниже второй степени. Так как W есть определенная положительная форма, то, как мы видели выше (§ 466), можно определить такое положительное число R, что $W+\Phi>0$ при $t \geqslant t_0$ внутри гиперсферы радиуса R, и следовательно, $V'>\mu V$. Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее R, а η — другое положительное число $\leqslant \varepsilon$. Внутри гиперсферы радиуса η существуют точки, в которых форма V принимает положительные значения.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — одна из этих точек, и V_0 — соответствующее значение V; мы покажем, что траектория, выходящая из точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, достигает через конечный промежуток времени гиперсферы радиуса ε. В самом деле, предположим, что это не так. Тогда V есть функция времени t, удовлетворяющая уравнению вида $V'=\mu V+\varphi(t)$, причем $\varphi(t)$ — положительная функция времени t. Следовательно, функция V превосходит интеграл уравнения $V'=\mu V$, при $t=t_0$ принимающий то же значение V_0, т. е. превосходит $V_0 e^{\mu(t-t_0)}$. Но это выражение неограниченно возрастает вместе с t; а так как $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ остается ограниченной внутри гиперсферы радиуса ε, то точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не может оставаться постоянно внутри этой области.

В итоге, *если действительные части* всех *корней λ_i характеристического уравнения отрицательны, имеется устойчивость*; *если действительная часть хоть* одного *из этих корней положительна, имеет место неустойчивость.* Единственным сомнительным случаем является тот, когда у *p из этих корней ($p>0$) действительная часть равна нулю, а у всех остальных действительные части отрицательны.*

Для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости в этом случае нужно принять во внимание члены степени выше первой в правых частях уравнений (39). Мы уже видели пример, где имела место устойчивость (§ 465); для системы же

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=x$$

решение будет неустойчивым.

468. Устойчивость равновесия. Пусть $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — аналитическая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не зависящая от t, обращающаяся вместе со своими частными производными первого порядка в нуль при $x_1=0, \ldots, x_n=0$ и голоморфная в окрестности этой точки. Уравнения

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x_n} \tag{47}$$

допускают решение $x_i=0$. Это решение будет *устойчивым*, если функция $U(x_1, \ldots, x_n)$ имеет *максимум* при $x_i=0$. В самом деле, если в этой функции переменные x_i заменить интегралами системы (47), то в результате получается функция от t, производная которой имеет своим выражением $\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2$ и, следовательно, не может принимать отрицательных значений. Рассуждения § 466 показывают, что решение $x_i=0$ будет устойчивым, если $U(x_1, \ldots, x_n)$ имеет *собственный* максимум в начале координат, так как в окрестности начала эта функция не может принимать положительных значений.

Для разрешения обратной задачи обозначим через $V(x_1, \ldots, x_n)$ квадратичную форму, образованную совокупностью членов второй степени в разложении U, и ограничимся случаем, когда гессиан этой формы не равен нулю. Прилагая к этой форме $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ общую теорему § 466, получаем для сопряженной формы V_1 как раз выражение $\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2$, т. е. ***определенную положительную форму***.

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $V(x_1, \ldots, x_n)$ была определенной отрицательной формой, что является также необходимым и достаточным условием максимума функции $U(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $x_i=0$. Таким образом, если гессиан формы V не равен нулю, ***устойчивость может быть только в случае максимума для U в начале координат.***

В этом частном случае в характеристическом уравнении надо положить

$$a_{ih}=a_{hi}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_h},$$

и в силу известных свойств квадратичных форм, какова бы ни была форма V, корни этого уравнения всегда *действительны*; если гессиан отличен от нуля, то не может быть корня, равного нулю.

Теорема Лагранжа, относящаяся к задаче динамики при наличии силовой функции, не зависящей от времени, утверждает, что если эта силовая функция при некоторых значениях параметров имеет максимум, то соответствующее положение системы является положением устойчивого равновесия. Рассуждения § 466 являются в сущности не чем иным, как развитием классического доказательства Дирихле. Исследование обратного предложения представляет гораздо бо́льшие трудности. Мы исследуем лишь частный случай. Предположим, что параметры, от которых зависит положение системы, выбраны так, что диференциальные уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{d^2x_n}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_n}; \tag{48}$$

$U(x_1, \ldots, x_n)$ есть правильная в окрестности начала функция от $x_1, \ldots, x_n$, обращающаяся вместе со своими производными в нуль при $x_i=0$. Для разрешения вопроса об устойчивости решения $x_i = 0$ ограничимся опять случаем, когда гессиан формы $V(x_1, \ldots, x_n)$, который составляется из совокупности членов второй степени в функции U, отличен от нуля. Система (48) эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i} + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{49}$$

Можно прямо получить характеристическое уравнение линейной системы, которая получается, если в правых частях пренебречь членами высшего порядка. Достаточно разыскать интегралы этой системы такого вида:

$$x_i = \alpha_i e^{\mu t}, \quad y_i = \beta_i e^{\mu t},$$

что приводит для определения μ к уравнению

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu^2 & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \mu^2 & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \mu^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются величины $\pm\sqrt{\lambda_i}$, а λ_i — корни первого характеристического уравнения, относящегося к уравнениям (47). Все эти числа λ_i действительны, и по предположению ни одно из них не равно нулю. Если бы одно из λ_i было положительным, уравнение относительно μ имело бы один положительный корень, и по общей теореме решение уравнений (49) $x_i = y_i = 0$ не могло бы быть устойчивым. Итак, результат этого исследования может быть выражен следующим образом: *если изучение членов второй степени в функции $U(x_1, \ldots, x_n)$ позволяет узнать, имеет ли эта функция максимум для значений $x_i = 0$ или нет, то для устойчивости равновесия необходимо, чтобы функция U имела максимум**.

Примечание. Если все числа λ_i отрицательны, то действительные части всех корней уравнения $D(\mu) = 0$ равны нулю. В этом именно случае, если не принять во внимание особого вида уравнений (49), нельзя a priori утверждать, что полученное решение будет устойчиво**.

469. Приложение к более общим системам. Предыдущие результаты можно обобщить на такие системы (39), когда линейные уравнения (42) образуют *приводимую систему* (II, § 424). Напомним, что так называются линейные системы, которые линейной подстановкой над переменными x_i могут быть приведены к линейной системе с постоянными коэфициентами, причем для $t > t_0$ коэфициенты этой подстановки, так же как и их производные по t, являются непрерывными и ограниченными функциями переменного t, и величина, обратная определителю этих коэфициентов, тоже ограничена. Ясно, что если система (42) приводима, то, прилагая

---

* Теорема, обратная теореме Лагранжа, в более общих случаях была установлена Ляпуновым (*Journal de Liouville*, 1896), Пенлеве (*Comptes rendus*, t. 125, p. 1021), Адамаром (*Journal de Liouville*, 1897) и позднее Е. Коттоном (*Comptes rendus*, t 153, p. 1029).

** Данное выше определение устойчивости (§ 465) относится только *к будущему*, когда t изменяется от t_0 до $+\infty$. Но можно представить себе и другое определение, относящееся вместе *и к будущему и к прошлому*; t тогда изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При изменении t на $-t$ корни характеристического уравнения умножаются на (-1). Следовательно, устойчивость вместе и в будущем и в прошлом может быть только тогда, когда действительные части всех этих корней равны нулю. Но мы приходим к такому случаю, когда изучения уравнения в вариациях недостаточно, чтобы решить вопрос об устойчивости и неустойчивости.

ко всей системе (39) целиком только что определенную линейную подстановку, мы заменим ее системой того же рода, в которой коэфициенты членов первой степени в правой части не будут зависеть от t.

В частности, мы видели, что, когда коэфициенты системы (39) являются периодическими функциями от t, система (42) приводима. Из приведенного выше доказательства этой теоремы следует, что корни характеристического уравнения преобразованной системы в точности являются характеристическими показателями системы (42) с периодическими коэфициентами (II, § 423). Следовательно, устойчивость будет иметь место тогда, когда у всех характеристических показателей действительные части отрицательны, а неустойчивость — если хоть у одного из этих показателей действительная часть положительна.

470. Асимптотические ряды. Условная устойчивость. Результаты, полученные в предыдущих параграфах, могут быть подтверждены непосредственным изучением рядов, представляющих интегралы, в случае, когда действительные части чисел λ_i все отрицательны, причем эти ряды расположены по степеням начальных значений (см. дальше Упражнение I, стр. 44). Пуанкаре и Ляпунов ввели ряды другого рода, выявляющие асимптотический характер решений. Мы займемся лишь наиболее простым случаем, а именно системой, которую можно преобразовать к приведенному виду:

$$\frac{dx_1}{dt}=\lambda_1 x_1+\ldots,\quad \frac{dx_p}{dt}=\lambda_p x_p+\ldots,\quad \frac{dx_n}{dt}=\lambda_n x_n+\ldots; \tag{50}$$

ненаписанные члены образуют целые ряды относительно $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся с членов второй степени, и их коэфициенты не зависят от t. Положим

$$u_1=C_1 e^{\lambda_1 t},\quad u_2=C_2 e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\quad u_p=C_p e^{\lambda_p t}\quad (p\leqslant n),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — *отличные от нуля* постоянные, и поставим целью найти целые ряды с постоянными коэфициентами, расположенные по степеням $u_1, u_2, \ldots, u_p$ и формально удовлетворяющие уравнениям (50):

$$x_i=\sum L^i_{m_1 m_2\ldots m_p}\, u_1^{m_1} u_2^{m_2}\ldots u_p^{m_p}\quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{51}$$

Здесь коэфициенты $L^i_{m_1 m_2\ldots m_p}$ — постоянные, подлежащие определению. Для окончательного уточнения поставленной задачи предположим, что в выражениях для $x_1, \ldots, x_p$ членами первой степени являются соответственно $u_1, u_2, \ldots, u_p$, в то время как $x_{p+1}, \ldots, x_n$ не содержат членов первой степени относительно $u_1, \ldots, u_p$.

Вообще мы имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(u_1^{m_1} u_2^{m_2}\ldots u_p^{m_p}\right)=(m_1\lambda_1+\ldots+m_p\lambda_p)\, u_1^{m_1} u_2^{m_2}\ldots u_p^{m_p}.$$

Подставим разложения (51) в уравнения (50); написав, что в результате получается тождество, для определения коэфициента $L^i_{m_1 m_2\ldots m_p}$ имеем соотношение:

$$(m_1\lambda_1+\ldots+m_p\lambda_p-\lambda_i)L^i_{m_1 m_2\ldots m_p}=H^i_{m_1\ldots m_p}, \tag{52}$$

где правая часть составляется из коэфициентов рядов (50) и из уже определенных коэфициентов рядов (51), происходящих от членов более низкой степени относительно $u_1, u_2\ldots u_p$, посредством операций сложения и умножения. Следовательно, можно определить шаг за шагом все коэфициенты L^i, и мы нигде не встретим препятствия, если только между количествами λ не существует никакого соотношения вида

$$m_1\lambda_1+\ldots+m_p\lambda_p-\lambda_i=0. \tag{53}$$

Здесь $m_1, \ldots, m_p$ — целые положительные числа, сумма которых по меньшей мере равна 2, а индекс i может принимать любое из значений $1, 2, \ldots, n$. Сделаем это предположение и допустим, кроме того, что модуль выражения (53) имеет *положительную* нижнюю границу l. Чтобы доказать сходимость полученных таким образом рядов (51), рассмотрим систему вспомогательных уравнений, где η заключается между 0 и 1 и меньше l:

$$\left.\begin{aligned} \eta y_1 &= u_1 + \sum Q^1_{m_1 \ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta y_p &= u_p + \sum Q^p_{m_1 \ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n} \\ \eta y_{p+1} &= \sum Q^{p+1}_{m_1 \ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta y_n &= \sum Q^n_{m_1 \ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}; \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

здесь правые части являются усиливающими рядами для рядов в правых частях уравнеиий (50). Уравнения (54) удовлетворяются целыми сходящимися рядами относительно $u_1, u_2, \ldots, u_p$, и легко шаг за шагом проверить в силу самого определения числа η, что эти новые ряды будут усиливающими для рядов (51). Отсюда следует, что если только абсолютные значения коэфициентов $C_1, \ldots, C_p$ меньше соответственно подобранной границы, то сами ряды (51) тоже сходятся для значений t, заключенных между нулем и положительным числом T.

Предположим, что действительные части чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ отрицательны и что равенство (53) никогда не выполняется для целых и положительных значений чисел $m_1, m_2, \ldots, m_p$, сумма которых больше двух. Так как при неограниченном возрастании чисел $m_1, m_2, \ldots, m_p$ действительная часть выражения $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_p m_p$ неограниченно уменьшается, то в этом случае имеется положительный минимум для модуля левой части соотношения (53), и мы можем приложить предыдущий результат. Существуют ряды (51), формально удовлетворяющие уравнениям (50) и расположенные по степеням $C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_p e^{\lambda_p t}$; эти ряды сходятся при $t = 0$, если только модули $C_1, \ldots, C_p$ достаточно малы, а следовательно, они сходятся для всех положительных значений t. Очевидно, что соответствующие интегралы асимптотически стремятся к решению $x_i = 0$. Если $p = n$, этот результат вполне совпадает с общей теоремой относительно устойчивости; но, предполагая, что среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеется только p с отрицательной действительной частью, мы получаем новые результаты. Если за $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ взять эти p корней и если соотношение (53) никогда не выполняется для целых и положительных значений коэфициентов $m_1, \ldots, m_p$, мы получаем интегралы, асимптотические к решению $x_i = 0$ и зависящие от p произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_p$. Говорят, что имеется *условная устойчивость*. Множество этих траекторий в пространстве n измерений образует многообразие p измерений (E_p), являющееся также геометрическим местом таких точек, что траектории, выходящие из одной из этих точек, асимптотичны к решению $x_i = 0$.

Эти же ряды позволяют также доказать, что если у одного из чисел λ_i действительная часть положительна, то не может быть устойчивости в абсолютном смысле этого слова. В самом деле, пусть λ_1 — один из корней $D(\lambda) = 0$, действительная часть которого положительна и по меньшей мере равна действительной части какого-нибудь одного из остальных корней. Если $m_1 > 1$, ни одно из чисел $m_1 \lambda_1 - \lambda_i$ не может быть нулем; следовательно, существуют решения системы (50), в которых $x_1, \ldots, x_n$ представлены целыми рядами, расположенными по степеням $u_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, с радиусом сходимости ρ, отличным от нуля. Ряд, дающий x_1, начинается с члена u_1, а остальные ряды начинаются с членов второй степени. Начальное значение x_1 при $t = 0$, которое обозначим x_1^0, равняется сумме целого ряда относительно C_1, начинающегося с C_1, из которого, обратно, для C_1 можно получить целый ряд относительно x_1^0, начинающийся с x_1^0, так что $(x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^0)^2$ стремится к нулю одновременно с x_1^0. Предположим для определенности, что λ_1 действительно, и пусть h положительное число $< \rho$ такое, что значение $x_1(u_1)$ при $u_1 = h$ не равно нулю. Пусть, с другой стороны, η — произвольное положительное число. За x_1^0 можно всегда взять такое положительное число, меньшее η, чтобы соответствующее значение c для C_1 было положительно и меньше h, потому что отношение $\frac{C_1}{x_1^0}$ стремится к единице, когда x_1^0 стремится к нулю. Соответствующий интеграл $x_1(ce^{\lambda_1 t})$, принимающий при $t=0$ значение x_1^0, достигнет значения $x_1(h)$ к моменту времени T, который дается равенством $h = ce^{\lambda_1 T}$, т. е. для положительного значения $T = \frac{1}{\lambda_1} \lg\left(\frac{h}{c}\right)$. Таким образом решение $x_i = 0$ неустойчиво. Если λ_1 — комплексное число с положительной действительной частью, то применимо подобное же рассуждение. Тогда имеется еще корень λ_2, сопряженный первому, и рассматриваются ряды, расположенные по степеням $C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $C_2 e^{\lambda_2 t}$, причем за C_1 и C_2 взяты сопряженные комплексные количества.

Для изучения асимптотических рядов в более общих случаях следует обратиться кроме мемуара Ляпунова еще и к VII главе I тома Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste Пуанкаре и к VIII главе III тома Traité d'Analyse Пикара.

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. Доказать непосредственным изучением рядов, расположенных по степеням начальных значений и представляющих интегралы, что когда действительные части всех корней характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ отрицательны, то имеется устойчивость.

Примечание. Рассмотрим систему следующего вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i + \sum P^i_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{A}$$

причем действительные части всех λ_i положительны. Пусть μ положительное число, меньшее, чем действительные части всех λ_i.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dX_i}{dt} = -\mu X_i + \sum Q^i_{m_1 m_2 \ldots m_n} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \ldots X_n^{m_n}, \tag{A'}$$

где Q_i — преобладающие функции для функций P_i при $t \geqslant t_0$. Подстановкой $x_i = e^{-kt} y_i$, $X_i = e^{-kt} Y_i$ обе системы (A) и (A') заменяются двумя системами того же рода, причем при соответственно выбранном положительном числе k коэфициент при Y_i будет больше модуля коэфициента при y_i. Следовательно, достаточно доказать высказанное предложение для вспомогательной системы вида

$$\frac{dX_i}{dt} = -\mu X_i + M \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2}{1 - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\rho}};$$

M, μ и ρ — положительные числа. Это легко достигается разложением интегралов по степеням начальных значений.

2. Приложить общие теоремы относительно устойчивости к изучению интегралов уравнения $X\,dy - Y\,dx = 0$ в окрестности координат; X и Y — целые ряды относительно x и y, без постоянного члена.

Приводим задачу к изучению системы

$$\frac{dx}{dt} = X = a'x + b'y + \ldots, \quad \frac{dy}{dt} = Y = ax + by + \ldots$$

и замечаем, что интегральная кривая, выходящая из точки (x_0, y_0), пройдет через начало координат только в том случае, если x и y стремятся к нулю, когда абсолютная величина t неограниченно возрастает (ср. II, § 427).

ГЛАВА XXIV.

УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА*.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

471. Задача Коши для уравнения второго порядка. В случае уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными общая теорема существования Коши (т. II, § 456) читается так:

Пусть дано уравнение

$$r = F(x, y, z, p, q, s, t), \quad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

правая часть которого есть аналитическая функция, голоморфная в окрестности значений $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0, t_0$; *пусть* $\varphi_0(y)$ *и* $\varphi_1(y)$ — *две функции от* y, *голоморфные в окрестности* $y = y_0$ *и такие, что*

$$\varphi_0(y_0) = z_0, \quad \varphi_0'(y_0) = q_0, \quad \varphi_0''(y_0) = t_0, \quad \varphi_1(y_0) = p_0, \quad \varphi_1'(y_0) = s_0;$$

уравнение (1) *допускает интеграл* $z(x, y)$, *голоморфный в области точки* (x_0, y_0) *и такой, что при* $x = x_0$

$$z(x_0, y) = \varphi_0(y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_0} = \varphi_1(y).$$

Существует только один интеграл, удовлетворяющий этим условиям.

Условия, определяющие интегральную поверхность, имеют очевидный геометрический смысл. Два уравнения $x = x_0$, $z = \varphi_0(y)$ представляют плоскую кривую C, и мы видим, что кривая C принадлежит бесконечному множеству интегральных поверхностей, зависящих от произвольной функции $\varphi_1(y)$. Если задать также эту функцию $\varphi_1(y)$, то этим самым определяется касательная плоскость к интегральной поверхности вдоль всей кривой C. Рассмотрим в более общем случае произвольную плоскую или пространственную кривую Γ и развертывающуюся поверхность Δ, проходящую через эту кривую таким образом, что каждой точке M кривой Γ соответствует плоскость, проходящая через касательную к Γ в точке M. Интеграл уравнения второго порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{2}$$

---

* Я ограничиваюсь существенными пунктами теории; за бо́льшими подробностями можно обратиться к моей книге „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre" (Hermann. 1896—1898).

вообще говоря, вполне определяется требованиями, чтобы он проходил через кривую Г и касался развертывающейся поверхности Δ вдоль всей этой кривой. В самом деле, предположим, что в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) кривой Г уравнения этой кривой представлены в виде $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$; функции $f(x)$, $\varphi(x)$ голоморфны в области точки x_0. Введем три новые переменные u, v, w, связанные с переменными x, y, z соотношениями

$$x=u, \quad y=f(u)+v, \quad z=\varphi(u)+w,$$

и будем рассматривать u и v как новые независимые переменные, а w как новую неизвестную функцию. Из соотношения $dz=p\,dx+q\,dy$ получаем (I, § 64):

$$p=\frac{\partial w}{\partial u}+\varphi'(u)-\frac{\partial w}{\partial v}f'(u), \quad q=\frac{\partial w}{\partial v};$$

исходя от тождеств

$$dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy,$$

далее имеем:

$$r=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2f'(u)\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\{f'(u)\}^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-f''(u)\frac{\partial w}{\partial v}+\varphi''(u),$$

$$s=\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-f'(u)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad t=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Уравнение (2) преобразуется в новое уравнение второго порядка

$$\mathfrak{F}\left(u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=0, \tag{3}$$

в то время как геометрические условия, которым должен удовлетворять искомый интеграл, заменяются следующими: w должно равняться нулю при $v=0$, каково бы ни было u, потому что z должно привестись к $\varphi(x)$ при $y=f(x)$; с другой стороны, так как касательная плоскость к поверхности дана вдоль всей кривой Г, то q является известной функцией от x, и следовательно, $\frac{\partial w}{\partial v}$ при $v=0$ есть известная функция от u. Мы приходим, таким образом, к более простой задаче:

Определить интеграл уравнения (3), *обращающийся в нуль при* $v=0$, *тогда как производная* $\frac{\partial w}{\partial v}$ *делается равной некоторой известной функции от* u.

Эти условия позволяют вычислить значения w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}$ при $u=x_0$, $v=0$. Для того чтобы иметь право прилагать общую теорему существования, достаточно, чтобы уравнение (3) было разрешимо относительно $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ и могло быть приведено к нормальному виду (1).

Для этого достаточно, чтобы это уравнение (3) допускало относительно $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ корень, который был бы голоморфной функцией остальных переменных в окрестности предыдущих начальных значений. Чтобы удостовериться, что в общем случае, т. е. если кривая Г и развертывающаяся поверхность Δ не были выбраны особенным образом, это действительно имеет место, заметим, что вдоль Г угловые коэфициенты p и q касательной плоскости к развертывающейся поверхности Δ являются функциями от x, удовлетворяющими условию $\varphi'(x) = p + qf'(x)$, которое выражает, что эта плоскость содержит касательную к кривой Г.

Значения вторых производных r, s, t неизвестной функции $z(x, y)$ во всякой точке Г должны удовлетворять уравнению (2) и двум следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} p'(x) &= r + sf'(x); \\ q'(x) &= s + tf'(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пусть r_0, s_0, t_0 — система решений уравнений (2) и (4), где положено $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 = \varphi(x_0)$. Этой системе решений уравнения (2) соответствует система решений уравнения (3), и, пользуясь формулами замены переменных, дающими r, s и t, непосредственно убеждаемся, что

$$\left\{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)}\right\}_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 \{f'(x_0)\}^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 f'(x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \tag{5}$$

Если правая часть этого соотношения не равна нулю, то уравнение (3) разрешимо относительно $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$, и общая теорема существования приложима.

В итоге предложенная задача допускает столько же голоморфных решений, сколько уравнения (2) и (4) допускают относительно r, s и t систем решений, для которых выражение

$$\frac{\partial F}{\partial r}\{f'(x)\}^2 - \frac{\partial F}{\partial s} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

отлично от нуля.

Изучение исключительных случаев, когда это выражение равно нулю, будет подробно проведено для частного класса уравнений.

Предшествующие рассуждения оправдывают определение общего интеграла, предложенное Дарбу и принятое в настоящее время:

Интеграл является общим, если входящими в него произвольными величинами — функциями или постоянными в неограниченном числе — можно располагать так, чтобы найти решения, существование которых доказывается теоремами Коши, т. е. так, чтобы для всех точек некоторой кривой неизвестная функция и одна из ее первых производных принимали последовательность значений, определенную каким-нибудь заранее заданным непрерывным законом.

Действительное определение интеграла, удовлетворяющего этим условиям, составляет *задачу Коши* для уравнения второго порядка. Предыдущие рассуждения предполагают, что уравнение и данные являются аналитическими; в более широком смысле название задачи Коши сохраняется также и при не аналитических данных. Дальше мы увидим, что в большом числе случаев для решения не требуется условия аналитичности (гл. XXVI).

Примечание 1. Если существование интеграла, удовлетворяющего условиям Коши, уже доказано, то можно шаг за шагом вычислить значения последовательных производных неизвестной функции $z(x, y)$ в любой точке кривой Г. Так, например, производные третьего порядка получаются при разрешении системы пяти линейных совместных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}r+\frac{\partial F}{\partial q}s+\frac{\partial F}{\partial r}p_{30}+\frac{\partial F}{\partial s}p_{21}+\frac{\partial F}{\partial t}p_{12}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}s+\frac{\partial F}{\partial q}t+\frac{\partial F}{\partial r}p_{21}+\frac{\partial F}{\partial s}p_{12}+\frac{\partial F}{\partial t}p_{03}=0,\quad p_{ik}=\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i \partial y^k},$$

$$\frac{dr}{dx}=p_{30}+p_{21}f'(x),$$

$$\frac{ds}{dx}=p_{21}+p_{12}f'(x),$$

$$\frac{dt}{dx}=p_{12}+p_{03}f'(x),$$

где r, s и t уже вычислены; и так далее. Легко проверить, что производные n-го порядка даются системой линейных уравнений, в которых определитель из коэфициентов при неизвестных является степенью выражения

$$\frac{\partial F}{\partial r}\{f'(x)\}^2-\frac{\partial F}{\partial s}f'(x)+\frac{\partial F}{\partial s},$$

по предложению отличного от нуля.

Примечание 2. Пусть дана интегральная поверхность S уравнения (2). Диференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial r}dy^2-\frac{\partial F}{\partial s}dx\,dy+\frac{\partial F}{\partial t}dx^2=0,$$

в котором z, p, q, r, s, t предполагаются выраженными при помощи переменных x и y, определяет на этой поверхности два семейства кривых, которые называются *характеристиками*. Рассмотрим одну из этих кривых T и развертывающуюся поверхность Δ, описанную около S вдоль кривой T. К этому геометрическому образу неприложима общая теорема существования, потому что мы как раз находимся в том исключительном случае, который был оговорен в наших рассуждениях. В частности замечаем, что если существует бесконечное множество интегральных поверхностей, зависящих от одного или нескольких произвольных постоянных и касательных между собою вдоль некоторой кривой, то эта кривая необходимо является характеристикой на каждой из этих поверхностей.

Примечание 3. Часто говорится, что общий интеграл уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными зависит от *двух* произвольных функций одного переменного. Этот оборот речи приобретает точный смысл только в том случае, если обратиться к самой формулировке теоремы Коши, и вообще неосторожно судить о степени общности некоторого интеграла по числу произвольных функций, входящих в его выражение. Рассмотрим, например, уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}$ и интеграл этого уравнения, равный при $x=x_0$ данной функции $\varphi(y)$, в то время как $\frac{\partial z}{\partial x}$ обращается в другую данную функцию $\psi(y)$; обе эти функции голоморфны в области точки y_0:

$$\varphi(y)=a_0+a_1(y-y_0)+\ldots+a_n(y-y_0)^n+\ldots$$
$$\psi(y)=b_0+b_1(y-y_0)+\ldots+b_n(y-y_0)^n+\ldots$$

Этот интеграл легко получается, и если расположить разложение по степеням $x-x_0$, то можно написать его в виде:

$$z=\varphi(y)+(x-x_0)\psi(y)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\varphi'(y)+\frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\psi'(y)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-x_0)^{2n}}{2n!}\varphi^{(n)}(y)+\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}\psi^{(n)}(y)+\ldots$$

Здесь выявлена роль обеих произвольных функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$.

Но если расположить разложение по степеням $y-y_0$, то его можно написать еще и так:

$$z=F(x)+(y-y_0)F''(x)+\frac{(y-y_0)^2}{2!}F^{\mathrm{IV}}(x)+\ldots+\frac{(y-y_0)^n}{n!}F^{(2n)}(x)+\ldots;$$

$F(x)$ обозначает голоморфную функцию

$$F(x)=a_0+b_0(x-x_0)+a_1\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+b_1\frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+a_n\frac{(x-x_0)^{2n}}{(n+1)\ldots(2n-1)2n}+b_n\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(n+1)\ldots(2n+1)}+\ldots,$$

и это новое выражение содержит уже только одну функцию $F(x)$. Этот результат легко объяснить, если заметить, что с чисто формальной точки зрения совершенно равнозначаще задать два целых ряда $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ или задать один только ряд $F(x)$ (ср. I, § 170).

Это замечание приводит к важному свойству интегралов уравнения $r=q$. Функция $F(x)$ — это та функция, в которую обращается интеграл при $y=y_0$; мы видим, что этот интеграл вполне определен, если известна одна только функция $F(x)$, что как будто противоречит теореме Коши. Но это внешнее противоречие объясняется тем обстоятельством, что кривые $y=C$ интегральной поверхности являются характеристиками, для которых теорема неверна. Заметим также, что эта функция $F(x)$ не может быть выбрана произвольно, если предполагать интеграл голоморфным в области точки (x_0, y_0). В самом деле, тогда ряды $\varphi(y)$, $\psi(y)$ имеют конечный радиус сходимости, и существуют два таких положительных числа M и ρ, что, каково бы ни было n, имеем: $|a_n|<M\rho^{-n}$, $|b_n|<M\rho^{-n}$. Заменяя в $F(x)$ a_n и b_n через $M\rho^{-n}$, получаем *целую функцию*; следовательно, всякий интеграл уравнения $r=q$, который является аналитической функцией двух переменных x и y, голоморфной в области точки (x_0, y_0), *есть целая функция переменного x при $y=y_0$*. Отсюда следует, что нельзя отыскать аналитический интеграл, равный при $y=y_0$ заданной голоморфной функции от x, если эта голоморфная функция произвольна; в частности, необходимо, чтобы она была целой функцией от x.

Этот пример часто приводится в доказательство того, что теорема Коши неприложима к уравнению, которое не преобразовано к нормальному виду, который требуется в доказательстве.

472. Элементы соприкосновения. Многообразия M. Назовем для краткости *элементом соприкосновения*, или, проще, *элементом* совокупность точки с координатами (x, y, z) и плоскости, проходящей через эту точку, с угловыми коэфициентами p и q. Когда пять координат x, y, z, p, q элемента являются функциями одного или нескольких независимых переменных, мы получаем многообразие элементов. Но здесь мы будем рассматривать только такие многообразия, в которых функции

$$x, y, z, p, q$$

и их диференциалы тождественно удовлетворяют соотношению

$$dz = p\,dx + q\,dy; \tag{7}$$

тогда говорят, что два бесконечно близких элемента такого многообразия являются *соединенными*. Соотношение (7) выражает, что точка

$$(x + dx, y + dy, z + dz)$$

расположена в плоскости с угловыми коэфициентами p и q, проходящей через точку (x, y, z). Многообразия такого рода обозначаются буквой M_i, причем индекс i указывает число измерений многообразия, т. е. число независимых переменных, от которых зависят x, y, z, p, q.

Рассмотрим сначала многообразие M_1; x, y, z, p, q являются тогда функциями одного независимого переменного a, удовлетворяющими соотношению (7). Точка (x, y, z) описывает кривую Γ, и условие (7) выражает, что плоскость с угловыми коэфициентами p и q, соответствующая каждой точке кривой Γ, проходит через касательную к Γ в этой точке. Таким образом многообразие M_1 образовано соединением кривой Γ и развертывающейся поверхности Δ, проходящей через эту кривую, причем каждой точке кривой Γ поставлена в соответствие касательная плоскость к Δ в этой точке. В частности, может случиться, что кривая Γ сведется к одной точке; в этом случае многообразие M_1 составлено из совокупности элементов, которые состоят из одной определенной точки пространства и из касательных плоскостей любого конуса с вершиной в этой точке.

Если каждой точке поверхности S поставить в соответствие касательную плоскость в этой точке, то получается многообразие элементов, зависящих от двух переменных параметров и тождественно удовлетворяющих соотношению (7), т. е. многообразие M_2. Обратно, если даны пять функций двух независимых переменных, удовлетворяющих условию (7), то могут представиться три случая: 1) в общем случае точка (x, y, z) описывает поверхность S; плоскость с угловыми коэфициентами p и q является тогда касательной плоскостью к этой поверхности в точке (x, y, z), и многообразие M_2 получается, если каждой точке поверхности поставить в соответствие касательную плоскость в этой точке; 2) если точка (x, y, z) описывает кривую Γ, многообразие M_2 состоит из всех элементов, которые получаются, если каждой точке кривой Γ поставить в соответствие любую плоскость, проходящую через касательную в этой точке; эта совокупность, конечно, зависит, от двух параметров; 3) может также случиться, что точка (x, y, z) неподвижна, а p и q —

два переменных параметра. Соотношение (7) опять удовлетворяется, а многообразие M_2 состоит из всех элементов, получаемых, если неподвижной точке пространства поставить в соответствие произвольную плоскость, проходящую через эту точку. Для общности некоторых теорем представляет интерес рассматривать многообразия M_2 всех трех родов. Но в дальнейшем мы займемся лишь многообразиями M_1, образованными кривой и касательными плоскостями к развертывающейся поверхности, проходящей через эту кривую, и многообразиями M_2, каждый элемент которых образован точкой поверхности S и касательной плоскостью в этой точке. Ясно, что поверхность S, или, точнее, соответствующее многообразие M_2, может быть порождено бесконечно разнообразными способами семейством многообразий M_1, зависящим от произвольного постоянного. В самом деле, достаточно взять на поверхности S произвольное семейство кривых, зависящее от одного параметра, и каждой из этих кривых поставить в соответствие развертывающуюся поверхность, описанную около S вдоль этой кривой.

Пользуясь только что введенной терминологией, задачу Коши для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными можно поставить так:

Пусть дано многообразие M_1; найти интегральную поверхность, которой принадлежат все элементы этого многообразия.

473. Уравнения Монжа-Ампера. Характеристики. Мы разберем эту задачу для случая, когда уравнение второго порядка линейно относительно r, s, t или имеет более общий вид, рассмотренный Ампером:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0, \tag{8}$$

где H, K, L, M, N — функции от x, y, z, p и q. Пусть $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ — координаты элемента многообразия M_1, состоящего из точек кривой Γ, каждая из которых поставлена в соответствие касательной плоскости в этой точке к развертывающейся поверхности Δ, проходящей через эту кривую Γ. В любой точке кривой Γ вторые производные r, s, t неизвестной функции $z(x, y)$ должны удовлетворять уравнению (8) и двум условиям:

$$dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy, \tag{9}$$

где x, y, z, p, q — функции параметра λ, и сначала надо разрешить эту систему трех уравнений относительно r, s и t. Для облегчения исследования этой системы удобно употребить следующую геометрическую интерпретацию. Если рассматривать x, y, z, p, q, dx, dy, dp и dq как данные постоянные, r, s, t — как прямоугольные координаты точки, то уравнения (9) представляют прямую D, параллельную одной из образующих конуса (T), уравнение которого $rt-s^2=0$; уравнение же (8) при $N\neq 0$ представляет поверхность второго порядка S, для которой конус (T) является направляющим конусом, а при $N=0$ представляет собою плоскость P. При этом могут иметь место лишь следующие случаи:

1. В общем случае прямая D встречает поверхность S или плоскость P в единственной точке на конечном расстоянии, и следовательно,

уравнения (8) и (9) допускают единственную систему решений относительно r, s и t. Задача Коши имеет одно единственное решение*.

2. Может случиться, что прямая D не встречает поверхность S или плоскость P ни в какой точке на конечном расстоянии. Задача Коши не допускает голоморфного решения.

3. Наконец, может случиться, что прямая D расположена вся целиком на поверхности S или плоскости P, так что для каждой точки кривой Γ уравнения (8) и (9) допускают бесконечное множество систем решений относительно r, s и t. Тогда говорят, что рассматриваемое многообразие M_1 является ***характеристическим многообразием*** или ***характеристикой***.

Для составления уравнений, определяющих эти многообразия, достаточно выразить тот факт, что прямая D целиком расположена на поверхности, которую представляет уравнение (8). Предположим сначала, что $N \neq 0$; умножая все члены уравнения (8) на N, мы можем написать его в виде:

$$(Nr+L)(Nt+H)-N^2s^2+2KNs+MN-HL=0,$$

или иначе:

$$(Nr+L)(Nt+H)-(Ns+\lambda_1)(Ns+\lambda_2)=0, \tag{10}$$

где λ_1 и λ_2 — два корня уравнения второй степени

$$\lambda^2+2K\lambda+HL-MN=0. \tag{11}$$

$$\lambda_1=-K+\sqrt{K^2-HL+NM}, \quad \lambda_2=-K-\sqrt{K^2-HL+NM}. \tag{12}$$

Уравнение (10) выявляет обе системы прямолинейных образующих поверхности S; можно получить все эти образующие, придавая все возможные значения параметру μ в одной из следующих систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Nr+L&=\mu(Ns+\lambda_1), \\ Ns+\lambda_2&=\mu(Nt+H), \end{aligned}\right\} (A) \qquad \left.\begin{aligned} Nr+L&=\mu(Ns+\lambda_2), \\ Ns+\lambda_1&=\mu(Nt+H). \end{aligned}\right\} (B).$$

Для того чтобы прямая D, представляемая уравнениями (9), входила в состав одной из этих систем прямолинейных образующих, необходимо и достаточно, чтобы можно было определить μ так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\frac{dx}{N}=\frac{dy}{-\mu N}=\frac{dp}{\mu\lambda_1-L}=\frac{dq}{\mu H-\lambda_2},$$

или подобные соотношения, полученные перестановкой λ_1 и λ_2.

Исключение μ из предыдущих уравнений приводит к двум уравнениям:

$$N\,dp+L\,dx+\lambda_1\,dy=0, \quad N\,dq+\lambda_2\,dx+H\,dy=0.$$

---

* В самом деле, для этой системы решений выражение (5) (§ 471) не равно нулю, так как $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ суть направляющие параметры нормали к S или к P, а dy^2, $-dx\,dy$, dx^2 суть направляющие параметры прямой D.

В конечном счете всякая характеристика M_1 уравнения (8) состоит из системы *пяти* функций x, y, z, p, q одного независимого переменного, удовлетворяющих одной из следующих двух систем *трех* уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} N\,dp + L\,dx + \lambda_1\,dy = 0, \quad N\,dq + \lambda_2\,dx + H\,dy = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0, \end{array}\right\} \qquad (13)_1$$

$$\left.\begin{array}{c} N\,dp + L\,dx + \lambda_2\,dy = 0, \quad N\,dq + \lambda_1 dx + H\,dy = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0, \end{array}\right\} \qquad (13)_2$$

получающихся одна из другой перестановкой λ_1 и λ_2. Мы видим, что в общем случае имеются *два* различных семейства характеристик, которые сливаются, если $\lambda_1 = \lambda_2$, т. е. в том и только в том случае, когда поверхность S вырождается в конус.

Предположим теперь, что $N = 0$; уравнение (8) тогда линейно относительно r, s и t,

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0. \qquad (8')$$

Прямая, проходящая через начало координат параллельно прямой D, дается уравнениями:

$$\frac{r}{(dy)^2} = \frac{s}{-dx\,dy} = \frac{t}{(dx)^2};$$

эта параллельная прямая должна лежать в плоскости $Hr + 2Ks + Lt = 0$, проведенной через начало координат параллельно плоскости P, для чего требуется выполнение соотношения

$$H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2 = 0. \qquad (14)$$

Мы будем различать еще несколько случаев:

Первый случай. Пусть $H \neq 0$. Из уравнения (14) получаем для $\frac{dy}{dx}$ два конечных значения λ_1 и λ_2. Возьмем, например, $dy = \lambda_1 dx$; уравнения (9) дают, далее:

$$s = \frac{dq}{dx} - \lambda_1 t, \qquad r = \frac{dp}{dx} - \lambda_1 \frac{dq}{dx} + \lambda_1^2 t.$$

Подставляя эти значения для r и s в уравнение (8') и принимая во внимание соотношения между коэфициентами и корнями уравнения (14), мы напишем полученное условие в таком виде:

$$H\,dp + H\lambda_2\,dq + M\,dx = 0.$$

Итак, диференциальные уравнения обеих систем характеристик напишутся следующим образом:

$$dy = \lambda_1 dx, \quad H\,dp + H\lambda_2\,dq + M\,dx = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad (15)_1$$
$$dy = \lambda_2 dx, \quad H\,dp + H\lambda_1\,dq + M\,dx = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad (15)_2$$

причем λ_1 и λ_2 — два корня уравнения

$$H\lambda^2 - 2K\lambda + L = 0. \qquad (16)$$

Второй случай. Пусть $H=0$, но $L\neq 0$. Совершенно такие же вычисления приводят к следующим диференциальным уравнениям обеих систем характеристик:

$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad dx=0,\quad M\,dy+2K\,dp+L\,dq=0, \qquad (17)_1$$
$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad 2K\,dy-L\,dx=0,\quad M\,dy+L\,dq=0. \qquad (17)_2$$

Третий случай. Пусть $H=L=0$. Имеем две *всегда различные* системы характеристик, диференциальные уравнения которых соответственно таковы:

$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad dx=0,\quad 2K\,dp+M\,dy=0, \qquad (18)_1$$
$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad dy=0,\quad 2K\,dq+M\,dx=0. \qquad (18)_2$$

Заметим, что во всех случаях соотношение

$$K^2-HL+MN=0 \qquad (19)$$

выражает необходимое и достаточное условие того, чтобы две системы характеристик слились в одну.

Характеристики каждой системы зависят от одной произвольной функции, а не от конечного числа произвольных постоянных, как это было в случае уравнения первого порядка. В самом деле, между пятью функциями одного переменного и их производными имеется всего три соотношения; одно из переменных y, z, p, q можно считать произвольной функцией от x, и для определения трех остальных функций остается система трех диференциальных уравнений первого порядка. Возьмем, например, уравнение вида

$$s=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q);$$

диференциальные уравнения одной из систем таковы:

$$dx=0,\quad dz=q\,dy,\quad dp=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,dy.$$

Первое уравнение, $dx=0$, показывает, что вдоль всей характеристики x постоянно, т. е. что кривая Γ находится в плоскости, параллельной плоскости yz. Обратно, пусть Γ — любая плоская кривая, представляемая двумя уравнениями $x=x_0$, $z=\varphi(y)$. Из второго уравнения получаем $q=\varphi'(y)$, а p должно являться интегралом диференциального уравнения

$$\frac{dp}{dy}=f[x_0,\ y,\ \varphi(y),\ p,\ \varphi'(y)];$$

можно еще произвольно выбрать значение p при данном значении y_0 для y. Таким образом всякая плоская кривая, плоскость которой параллельна плоскости yz, принадлежит бесконечному множеству характеристических многообразий, зависящих от одного произвольного постоянного *. Ясно, что вследствие симметрии это же заключение справедливо для всякой плоской кривой, плоскость которой параллельна плоскости xz.

* Общие уравнения характеристик уравнения $s=f(x,\ y,\ z)$ могут быть получены явно. В самом деле, если взять $x=x_0$, $p=\varphi(y)$, то последнее уравнение $dq=f\,dy$ дает z, после чего второе уравнение дает $q=\frac{dz}{dy}$.

474. Свойства характеристик. Важная роль характеристик в теории уравнения (8) вытекает из следующей теоремы:

Всякий интеграл этого уравнения может быть построен двумя различными способами из характеристик.

Это свойство можно выразить еще более точно: *каждый элемент интеграла входит в состав некоторой характеристики каждой из двух систем, все элементы которой принадлежат этому интегралу.*

Предположим для определенности, что $N \neq 0$. Пусть $z = f(x, y)$ — одни из интегралов уравнения (8). Если в двух первых уравнениях $(13)_1$ заменить z, p, q, r, s, t соответственно через $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, то получатся два диференциальных уравнения первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} (Nr + L)\,dx + (Ns + \lambda_1)\,dy = 0, \\ (Ns + \lambda_2)\,dx + (Nt + H)\,dy = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

которые сводятся к одному, потому что исключение $\frac{dy}{dx}$ приводит как раз к уравнению (10). Следовательно, на рассматриваемой интегральной поверхности существует семейство кривых, зависящих от одного произвольного постоянного и удовлетворяющих обоим эквивалентным уравнениям (20). Пусть C — одна из этих кривых; элементы первого порядка интеграла образуют вдоль кривой C многообразие M_1, которое является характеристическим многообразием. В самом деле, в силу соотношений

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

можно обратным путем, отправляясь от уравнений (20), вернуться к диференциальным уравнениям $(13)_1$ характеристик. Итак, через каждую точку интегральной поверхности проходит такая кривая C, что элементы поверхности образуют вдоль этой кривой характеристическое многообразие первой системы. Точно так же легко видеть, что через каждую точку поверхности проходит кривая C', вдоль которой элементы интеграла образуют характеристику второй системы. Кривые C и C' образуют два семейства *характеристических кривых* на рассматриваемой интегральной поверхности. Оба этих семейства кривых определяются одним диференциальным уравнением первого порядка и второй степени. В самом деле, из первого из уравнений (20) получаем:

$$\lambda_1 = -(Nr + L)\frac{dx}{dy} - Ns$$

и, заменяя в уравнении (11) λ_1 этим выражением, приходим к диференциальному уравнению

$$(Nt + H)\,dy^2 + 2(Ns - K)\,dx\,dy + (Nr + L)\,dx^2 = 0,$$

что можно еще написать так (ср. § 471):

$$R dy^2 - S dx\,dy + T dy^2 = 0, \qquad (21)$$

где R, S и T обозначают соответственно частные производные правой части уравнения (8) по r, s и t.

Подобные же вычисления прилагаются к случаю, когда N равно нулю. На всякой интегральной поверхности существуют два семейства характеристических кривых, в общем случае различных, которые определяются диференциальным уравнением первого порядка и второй степени

$$H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2 = 0; \tag{22}$$

элементы интегральной поверхности вдоль одной из этих кривых образуют характеристическое многообразие *.

Обратно, *если многообразие M_2, каждый элемент которого состоит из точки некоторой поверхности S и касательной плоскости в этой точке, порождается семейством характеристических многообразий, зависящих от одного произвольного постоянного, то соответствующая поверхность S является интегральной поверхностью.*

В последующих рассуждениях мы будем опять предполагать N отличным от нуля. По предположению, через каждую точку поверхности S проходит такая кривая C, что многообразие M_1, образованное элементами поверхности S вдоль кривой C, является характеристическим многообразием. Предположим, например, что вдоль кривой C значения x, y, z, p, q удовлетворяют системе $(13)_1$. Два первых уравнения $(13)_1$ могут быть написаны в эквивалентном виде (20), и, для того чтобы эти уравнения давали те же значения $\frac{dy}{dx}$, необходимо, чтобы значения r, s и t удовлетворяли уравнению (10), т. е. чтобы S была интегральной поверхностью предложенного уравнения. Если N равно нулю, доказательство остается точно таким же.

Из этих теорем следует, что всякая система трех диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} dz = p\,dx + q\,dy, \quad A\,dp + B\,dq + F\,dx + G\,dy = 0, \\ A_1dp + B_1dq + F_1dx + G_1dy = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где $A, B, \ldots, G_1$ — произвольные функции от x, y, z, p, q (причем, по крайней мере, один из коэфициентов A, B, A_1, B_1 не равен нулю), определяет систему характеристик уравнения Монжа-Ампера. Это уравнение получится заменой dp через $r\,dx + s\,dy$, dq через $s\,dx + t\,dy$ и исключением $\frac{dy}{dx}$. Уравнение будет содержать член с $rt - s^2$, если $AB_1 - BA_1$ не равно нулю, и будет линейным относительно r, s и t в противном случае.

Характеристики можно изучать также с точки зрения задачи Коши. Выше мы видели, что, когда мы беремся за разрешение этой задачи для характеристического многообразия M_1, одна из производных второго порядка может быть взята произвольно. Переходя к вычислению последующих производных, точно так же находим, что для каждого порядка

* Рассуждение становится неверным в случае интегралов, удовлетворяющих одновременно трем уравнениям $R = S = T = 0$. Подобные интегралы, если они существуют, являются *особыми интегралами*, к ним теорема Коши неприменима, каково бы ни было взятое на одном из них многообразие M_1.

значение одной производной может быть взято произвольно, по крайней мере, в том случае, когда обе системы характеристик различны. *Мы действительно имеем случай неопределенности*; это вытекает из следующих предложений, которые здесь приводим без доказательств* и которые доказываются обычными методами „исчисления пределов".

Если оба семейства характеристик различны, то:

I. *Всякая характеристика принадлежит бесконечному множеству интегралов, зависящих от бесконечного множества произвольных постоянных.*

II. *Если два интеграла, содержащие все элементы некоторой характеристики, имеют в точке этой характеристики соприкосновение n-го порядка, то они имеют соприкосновение n-го порядка во всех точках этой характеристики.*

III. *Характеристика и кривая* Γ, *пересекающаяся с характеристической кривой в некоторой точке M, определяют интеграл единственным образом, если только касательная к кривой* Γ *в точке M лежит в плоскости соответствующего элемента.*

IV. *В частности, две характеристики из разных систем, имеющие общий элемент, определяют интегральную поверхность единственным образом.*

Если оба семейства характеристик сливаются в одно, то теоремы читаются несколько сложнее.

475. Промежуточные интегралы. Так как три диференциальных уравнения, определяющие характеристики, содержат пять переменных x, y, z, p, q, то их нельзя интегрировать как систему обыкновенных диференциальных уравнений. Однако можно заняться изысканием *первых интегралов* для этих уравнений. Мы скажем, что соотношение $V(x, y, z, p, q) = \text{const}$ является первым интегралом, например уравнений $(13)_1$, если соотношение $dV = 0$ является следствием этих трех уравнений. Если это так, то ясно, что вдоль любой характеристики этой системы функция $V(x, y, z, p, q)$ сохраняет одинаковое значение, которое меняется при переходе от одной характеристики к другой. Заменив dz, dp и dq в dV их выражениями, полученными из формул $(13)_1$, найдем:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_2}{N}\frac{\partial V}{\partial q}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_1}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{H}{N}\frac{\partial V}{\partial q}\right)dy;$$

для того чтобы из уравнений $(13)_1$ следовало соотношение $dV = 0$, необходимо и достаточно, чтобы V удовлетворяла двум условиям:

$$\left.\begin{aligned} &N\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) - L\frac{\partial V}{\partial p} - \lambda_2\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ &N\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \lambda_1\frac{\partial V}{\partial p} + H\frac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

* E. Goursat, Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre (I chap., 4; II chap., 10).

Во всех других случаях мы рассуждали бы точно так же, и полученный результат можно выразить так:

Для того чтобы $V(x, y, z, p, q)=C$ было первым интегралом диференциальных уравнений одной из систем характеристик, необходимо и достаточно, чтобы функция V являлась интегралом системы двух линейных уравнений, которые получаются из диференциальных уравнений характеристик другой системы при замене в них dx, dy, dp и dq соответственно через

$$\frac{\partial V}{\partial p}, \quad \frac{\partial V}{\partial q}, \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Если $V(x, y, z, p, q)$ является интегралом уравнений (24), то в силу самого способа получения этой системы имеем тождественно:

$$dV=\frac{\partial V}{\partial z}(dz-p\,dx-q\,dy)+\frac{1}{N}\frac{\partial V}{\partial p}(N\,dp+L\,dx+\lambda_1\,dy)+$$
$$+\frac{1}{N}\frac{\partial V}{\partial q}(N\,dq+\lambda_2\,dx+H\,dy).$$

Обратно, если каким бы то ни было образом удалось получить три таких множителя μ_1, μ_2, μ_3, что тождественно имеем

$$dU=\mu_1(dz-p\,dx-q\,dy)+\mu_2(N\,dp+L\,dx+\lambda_1\,dy)+$$
$$+\mu_3(N\,dq+\lambda_2\,dx+H\,dy),$$

то очевидно, что $U=C$ является первым интегралом для этой системы характеристик. Таким образом изыскание первых интегралов приводится также к изысканию интегрируемых комбинаций диференциальных уравнений характеристик (II, § 393).

При произвольных функциях L, H, N, λ_1, λ_2 система (24) допускает только тривиальное решение $V=C$. Мы уже видели, каким образом можно узнать, имеет ли эта система еще другие интегралы, и получить их путем интеграции обыкновенных диференциальных уравнений (II, § 450—451).

Знание первого интеграла позволяет найти интегралы уравнения второго порядка (8). В самом деле, *если $V(x, y, z, p, q)=C$ является первым интегралом диференциальных уравнений одной из систем характеристик, то все интегралы уравнения в частных производных первого порядка $V(x, y, z, p, q)=C$ (кроме, может быть, особых интегралов) являются также интегралами уравнения второго порядка* (8).

Предположим опять $N\neq 0$; пусть V — интеграл системы (24). Всякий не особый интеграл S уравнения первого порядка $V=C$ является геометрическим местом характеристических кривых, и многообразие M_1, образованное элементами поверхности S вдоль одной из этих кривых, удовлетворяет диференциальным уравнениям (II, § 447)

$$\frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial V}{\partial p}+q\frac{\partial V}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}}=\frac{-dq}{\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}}. \qquad (25)$$

Сопоставляя эти уравнения с соотношениями (24), видим, что элементы многообразия M_1 удовлетворяют диференциальным уравнениям, получающимся из формул (24) заменой

$$\frac{\partial V}{\partial p}, \quad \frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}$$

соответственно через dx, dy, $-dp$, $-dq$, т. е. уравнениям $(13)_2$. Таким образом многообразия M_1 являются также характеристическими многообразиями и для уравнения (8), и следовательно (§ 474), поверхность S есть интегральная поверхность этого уравнения.

Обратно, *если все не особые интегралы уравнения $V(x, y, z, p, q)=C$ являются также, каково бы ни было значение постоянного C, интегралами уравнения* (8), *то $dV=0$ представляет собою интегрируемую комбинацию диференциальных уравнений одной из систем характеристик уравнения* (8).

В самом деле, пусть M_1 — характеристическое многообразие уравнения $V=C$. Все элементы M_1 принадлежат бесконечному множеству не особых интегралов уравнения $V=C$, а следовательно, и бесконечному множеству интегралов уравнения (8). Итак, все многообразия M_1, определяемые диференциальными уравнениями (25), должны входить в состав одной из систем характеристик; следовательно, функция V должна удовлетворять соотношениям, которые получаются из диференциальных уравнений одной из этих систем при замене в них dx, dy, dp и dq соответствующими знаменателями формул (25) *.

---

* Это свойство можно установить также и непосредственно. Диференцируя уравнение

$$V(x, y, z, p, q)=C$$

по x и по y, получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}p+\frac{\partial V}{\partial p}r+\frac{\partial V}{\partial q}s=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}q+\frac{\partial V}{\partial p}s+\frac{\partial V}{\partial q}t=0. \qquad (e)$$

Если определить из этих уравнений две производные второго порядка, например r и s, и затем подставить их в уравнение (8), то результат подстановки должен привестись к тождеству. В самом деле, если бы этот результат содержал t, то из него можно было бы получить значение t, и следовательно, мы выразили бы три производных второго порядка через x, y, z, p и q. Последовательным диференцированием можно было бы шаг за шагом выразить все частные производные от z через посредство x, y, z, p и q, и интегралы, общие уравнению (8) и уравнению $V=C$, могли бы зависеть только от *конечного* числа произвольных постоянных. Если же результат подстановки не зависит от t, то, так как результат не содержит C, уравнение (8) может допускать все интегралы уравнения $V=C$ только в том случае, когда этот результат тождественно равен нулю.

Итак, возвращаясь к геометрической интерпретации текста, мы можем сказать, что прямая D, которую представляют уравнения (e), если рассматривать в них r, s и t как текущие координаты, должна быть расположена на поверхности, представляемой уравнением (8). Отсюда следует, что функция V должна удовлетворять одной из систем, которые получаются из диференциальных уравнений систем характеристик при замене в них dx, dy, dp и dq соответственно через

$$\frac{-\partial V}{\partial p}, \quad \frac{-\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если система (24), или одна из систем, образованных подобным же образом, исходя из диференциальных уравнений одной из систем характеристик, допускает два различных интеграла u и v, то, какова бы ни была функция φ, $\varphi(u, v)$ тоже будет интегралом (II, § 451), и все не особые интегралы уравнения $\varphi(u, v)=0$ являются также интегралами уравнения второго порядка. Обратно, пусть S есть интеграл уравнения (8); функцию φ можно выбрать таким образом, чтобы S была также интегралом уравнения первого порядка $\varphi(u, v)=0$. В самом деле, рассмотрим на поверхности S характеристики той системы, для которой $u=C$ и $v=C'$ являются двумя первыми интегралами, и пусть Γ — другая кривая этой поверхности, отличная от этих характеристик. Вдоль этой кривой Γ функции u и v являются функциями одного переменного параметра и вследствие этого связаны соотношением $\varphi(u, v)=0$; *это соотношение имеет место во всех точках поверхности* S. Пусть M — какая-нибудь точка поверхности S; характеристика рассматриваемой системы, проходящая через M, пересекает Γ в точке M_0, а так как при перемещении по этой характеристике u и v сохраняют одно и то же значение, то мы имеем также $\varphi(u, v)=\varphi(u_0, v_0)=0$. Таким образом мы видим, что *каждый интеграл уравнения второго порядка* (8) *удовлетворяет вместе с тем уравнению первого порядка вида* $\varphi(u, v)=0$, *и обратно*.

Уравнение $\varphi(u, v)=0$, которое может быть написано также в виде $v=\psi(u)$, зависящее от произвольной функции, называется *промежуточным интегралом** уравнения второго порядка.

Можно непосредственным вычислением проверить, что уравнение $\varphi(u, v)=0$ эквивалентно уравнению (8). Обозначим через $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$ производные от u и v, полученные, если рассматривать z как функцию переменных x и y, а p и q как ее частные производные. Из уравнения $\varphi(u, v)=0$ можно вывести уравнение второго порядка, не зависящее от функции φ:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}=0,$$

или, в развернутом виде:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p+\frac{\partial u}{\partial p}r+\frac{\partial u}{\partial q}s\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q+\frac{\partial v}{\partial p}s+\frac{\partial v}{\partial q}t\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p+\frac{\partial v}{\partial p}r+\frac{\partial v}{\partial q}s\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q+\frac{\partial u}{\partial p}s+\frac{\partial u}{\partial q}t\right)=0.$$

Предположим попрежнему, что уравнение (8) содержит член с $rt-s^2$ и что u и v — два интеграла системы (24). Умножим все члены предыдущего уравнения на N^2 и заменим

$$N\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad N\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right),\ldots$$

---

* Иногда *промежуточным интегралом* называют также каждое уравнение первого порядка $V=C$, все не особые интегралы которого удовлетворяют уравнению (8).

их выражениями из формул (24). Принимая во внимание значения $\lambda_1+\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2$, после нескольких простых упрощений мы в конце концов приходим к уравнению

$$N\frac{D(u, v)}{D(p, q)}[Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)]=0,$$

отличающемуся от уравнения (8) лишь одним множителем.

Итак, мы приходим к выводу: *если диференциальные уравнения одной из систем характеристик допускают две различные интегрируемые комбинации, то интегрирование уравнения Монжа-Ампера приводится к интегрированию уравнения первого порядка, зависящего от одной произвольной функции.*

В общем случае интегрирование этого уравнения первого порядка можно произвести только после того, как произвольная функция выбрана некоторым определенным образом. Но в этом случае разрешение задачи Коши всегда приводится к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений. В самом деле, если задано многообразие M_1, то координаты элемента (x, y, z, p, q) являются функциями переменного параметра α. После замены в u и v величин x, y, z, p и q их выражениями полученные результаты будут функциями $U(\alpha)$ и $V(\alpha)$ параметра α. Для того чтобы все элементы M_1 принадлежали интегралу уравнения $v=\phi(u)$, функция ϕ должна удовлетворять соотношению $V(\alpha)=\phi[U(\alpha)]$, которое, вообще говоря, определяет эту функцию. Если же функция ϕ известна, то мы приходим к задаче Коши для уравнения первого порядка.

Уравнения (24) допускают самое большее *три* различных интеграла; чтобы это имело место, они должны образовывать полную систему (II, § 451). Произведя вычисления, легко удостовериться, что это может быть только в случае $\lambda_1=\lambda_2$, и это условие недостаточно. Пусть u, v, w — три различных интеграла; уравнение (3) допускает тогда два различных промежуточных интеграла $v=\phi(u)$, $w=\pi(u)$. При двух различных системах характеристик уравнение (8) допускает также два промежуточных интеграла, если диференциальные уравнения каждой из систем допускают две интегрируемых комбинации. Предположим для определенности, что уравнения (24) допускают два различных интеграла u и v, а уравнения $(24)'$, получаемые из них перестановкой λ_1 и λ_2,

$$\left.\begin{aligned} &N\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+p\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)-L\frac{\partial V_1}{\partial p}-\lambda_1\frac{\partial V_1}{\partial q}=0,\\ &N\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+q\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)-\lambda_2\frac{\partial V_1}{\partial p}-H\frac{\partial V_1}{\partial q}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (24')$$

тоже допускают два различных интеграла u_1 и v_1. Уравнение (8) допускает тогда два промежуточных интеграла $v=\phi(u)$, $v_1=\pi(u_1)$. Но из уравнений (24) и (24') выводим:

$$[V, V_1]=\frac{\partial V}{\partial p}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+p\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)-\frac{\partial V_1}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial V}{\partial q}\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+q\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)-\frac{\partial V_1}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0,$$

и следовательно, $[v-\psi(u),\ v_1-\pi(u_1)]=0$, каковы бы ни были произвольные функции ψ и π. Отсюда следует (II, § 443), что два совокупных уравнения первого порядка

$$v=\psi(u),\quad v_1=\pi(u_1)$$

образуют вполне интегрируемую систему. До тех пор, пока функции ψ и π не имеют определенного вида, эти выражения в общем случае нельзя разрешить относительно производных p и q; поэтому вводим два новых независимых переменных α и β, полагая $u=\alpha$, $u_1=\beta$, что дает $v=\psi(\alpha)$, $v_1=\pi(\beta)$. Из этих четырех соотношений можно теперь получить x, y, p, q как функции z, α, β, $\psi(\alpha)$, $\pi(\beta)$. Заменяя в соотношении $dz=p\,dx+q\,dy$ p, q, dx и dy их значениями, окончательно приходим к уравнению в полных диференциалах:

$$dz=P\,d\alpha+Q\,d\beta,$$

причем P и Q зависят от z, α, β, $\psi(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$, $\pi(\beta)$, $\pi'(\beta)$; это уравнение вполне интегрируемо, каковы бы ни были функции $\psi(\alpha)$ и $\pi(\beta)$. После интегрирования этого уравнения мы получаем x, y, z, выраженные посредством двух параметров α и β.

476. Различные приложения. Примеры. 1. Обе системы характеристик уравнения $rt-s^2=0$ сливаются, и диференциальные уравнения

$$dp=0,\quad dq=0,\quad dz-p\,dx-q\,dy=0$$

допускают три интегрируемых комбинации, так как последнее уравнение можно переписать в виде $d(z-px-qy)=0$. Имеются, следовательно, два промежуточных интеграла:

$$q=\varphi(p),\quad z-px-qy=\psi(p);$$

для получения из них общего интеграла достаточно воспроизвести уже проделанные вычисления (I, § 214).

2. Уравнение $q^2r-2pqs+p^2t=0$ тоже имеет только одну систему характеристик, так как уравнение (16) приводится здесь к $q^2\lambda^2+2pq\lambda+p^2=0$ и допускает двойной корень $-\frac{p}{q}$. Диференциальные уравнения (15) в этом случае имеют вид:

$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad p\,dx+q\,dy=0,\quad q\,dp-p\,dq=0;$$

легко подметить три интегрируемые комбинации:

$$dz=0,\quad d\left(\frac{q}{p}\right)=0,\quad d\left(x+\frac{q}{p}y\right)=0.$$

Итак, уравнение допускает два промежуточных интеграла:

$$q+p\varphi(z)=0,\quad x+\frac{q}{p}y+\psi(z)=0,$$

которые интегрируются без затруднений. Но исключая $\frac{q}{p}$ из этих промежуточных интегралов, мы непосредственно получаем общий интеграл предложенного уравнения. Это приводит нас к уравнению

$$x-y\varphi(z)+\psi(z)=0,$$

которое представляет линейчатые поверхности, имеющие направляющей плоскостью плоскость xy (II, § 455).

3. Уравнение $(1+q^2)s-pqt=0$ выражает, что сечения поверхности $z=f(x, y)$ плоскостями, параллельными плоскости $x=0$, являются линиями кривизны. Формулы $(17)_1$ и $(17)_2$ дают нам для дифференциальных уравнений обеих систем характеристик:

$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad dx=0,\quad (1+q^2)\,dp-pq\,dq=0, \tag{17'$_1$}$$

$$dz-p\,dx-q\,dy=0,\quad (1+q^2)\,dy+pq\,dx=0,\quad dq=0. \tag{17'$_2$}$$

Каждая из этих систем допускает две интегрируемые комбинации; в самом деле, из уравнений $(17')_1$ выводим: $dx=0$, $d\left(\frac{p}{\sqrt{1+q^2}}\right)=0$, а из уравнений $(17')_2$ $dq=0$ и $d(y+qz)=0$. Следовательно, уравнение второго порядка допускает два промежуточных интеграла, которые можно написать так:

$$p=\sqrt{1+q^2}\,f'(x),\quad y+qz=\varphi(q);$$

f и φ две произвольные функции. Первый из них можно было бы получить сразу переписав уравнение второго порядка в виде

$$\frac{s}{p}=\frac{qt}{1+q^2}$$

и замечая, что левая и правая части представляют собой производные по y от $\lg p$ и $\frac{1}{2}\lg(1+q^2)$. Это уравнение первого порядка допускает полный интеграл

$$z=\sqrt{1+a^2}\,f(x)+ay+b,$$

а общий интеграл представляется системой двух уравнений:

$$z=\sqrt{1+a^2}\,f(x)+ay+\varphi(a),\quad y+\varphi'(a)+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}f(x)=0,$$

позволяющих выразить y и z при помощи x и вспомогательного параметра a. Читатель может без труда удостовериться, что это решение отличается от уже данного раньше (I, § 251) только обозначениями.

4. Уравнение $rt-s^2+a^2=0$, которое встречается в механической теории теплоты, допускает две системы характеристик, дифференциальные уравнения которых соответственно таковы:

$$\left.\begin{aligned} &dz-p\,dx-q\,dy=0,\\ &dp+a\,dy=0,\\ &dq-a\,dx=0,\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})\qquad \left.\begin{aligned} &dz-p\,dx-q\,dy=0,\\ &dp-a\,dy=0,\\ &dq+a\,dx=0.\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{II})$$

Легко сразу усмотреть по две интегрируемых комбинации для каждой из этих систем, а следовательно, два промежуточных интеграла, которые мы напишем в виде:

$$q-ax=\varphi'(p+ay),\quad q+ax=\psi'(p-ay),$$

где φ и ψ — произвольные функции. Прилагая метод, изложенный в конце предыдущего параграфа, положим $p+ay=\alpha$, $p-ay=\beta$. Тогда из предыдущих уравнений получаем:

$$x=\frac{\psi'(\beta)-\varphi'(\alpha)}{2a},\quad y=\frac{\alpha-\beta}{2a},\quad p=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad q=\frac{\varphi'(\alpha)+\psi'(\beta)}{2}$$

и, подставляя эти значения x, y, p, q в соотношение $dz=q\,dx+p\,dy$, находим:

$$dz=\frac{\alpha+\beta}{4a}(d\psi'-d\varphi')+\frac{\varphi'+\psi'}{4a}(d\alpha-d\beta)=$$

$$=\frac{\varphi'+\psi'-(\alpha+\beta)\varphi''(\alpha)}{4a}\,d\alpha+\frac{(\alpha+\beta)\psi''(\beta)-\varphi'(\alpha)-\psi'(\beta)}{4a}\,d\beta.$$

Интегрируя по частям, отсюда выводим:

$$z = \frac{[\varphi'(\alpha) + \varphi'(\beta)](\alpha - \beta)}{4a} - \frac{1}{2a}\int \alpha\varphi''(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2a}\int \beta\psi''(\beta)\,d\beta$$

и, наконец,

$$z = \frac{(\alpha + \beta)[\psi'(\beta) - \varphi'(\alpha)] + 2\varphi(\alpha) - 2\psi(\beta)}{4a}.$$

Мы имеем, таким образом, выражения для x, y, z в функции двух переменных параметров α и β и произвольных функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$.

5. Рассмотрим еще уравнение $s = kpz$, которое можно написать и так:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{2} k \frac{\partial (z^2)}{\partial x}.$$

Теперь непосредственно видно, что оно допускает промежуточный интеграл

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{kz^2}{2} = \varphi(y), \tag{26}$$

где φ — произвольная функция. Эту функцию φ можно представить в таком виде, чтобы общий интеграл уравнения Риккати (26) получался явно. В самом деле, мы знаем, что этот общий интеграл есть рациональная функция первой степени от постоянного интеграции, которое здесь является произвольной функцией от x. Следовательно, он имеет вид:

$$z = \Theta_1(y) + \frac{\Theta_2(y)}{X + \Theta_3(y)},$$

где Θ_1, Θ_2 и Θ_3 — определенные функции от y, а X — произвольная функция от x. Достаточно выбрать Θ_1, Θ_2 и Θ_3 так, чтобы левая часть уравнения (26) не содержала X, и тогда z будет общим интегралом уравнения этого вида (26).

Таким образом находим условия

$$\Theta_2' - k\Theta_1\Theta_2 = 0, \quad 2\Theta_2\Theta_3' + k\Theta_2^2 = 0,$$

позволяющие выразить Θ_2 и Θ_1 при помощи Θ_3, Θ_3', Θ_3''. Положим, $\Theta_3 = Y$, тогда $\Theta_2 = -\frac{2}{k} Y'$, затем $\Theta_1 = \frac{1}{k} \cdot \frac{Y''}{Y'}$, и следовательно, общий интеграл уравнения $s = kpz$ есть

$$z = \frac{1}{k} \cdot \frac{Y''}{Y'} - \frac{2Y'}{k(X + Y)}, \tag{27}$$

причем X и Y — две произвольные функции от x и от y соответственно.

6. Уравнение Лиувилля $s = e^{kz}$ приводится к предыдущему. В самом деле, рассмотрим систему двух совокупных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{ku}.$$

Исключение u приводит к уравнению $s = kpz$, а исключение z — к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = e^{ku}$. Отсюда заключаем, что общий интеграл этого последнего уравнения дается формулой

$$e^{ku} = \frac{2X'Y'}{k(X + Y)^2}, \tag{28}$$

правая часть которой является производной по x от правой части формулы (27).

7. Если уравнение второго порядка не допускает промежуточного интеграла, зависящего от произвольной функции, то общий интеграл этим методом найти нельзя. Но если диференциальные уравнения одной из систем характеристик допускают *одну* интегрируемую комбинацию $dU=0$, то, интегрируя уравнение первого порядка $U=C$, получаем интегралы, зависящие от одной произвольной функции. Предположим, например, что в линейном относительно r, s и t уравнении

$$Hr+2Ks+Lt=0 \tag{29}$$

H, K и L зависят только от переменных p и q. Из уравнений (14) и (15), определяющих характеристики, выводим, что вдоль характеристики справедливо соотношение

$$H\,dp^2+2K\,dp\,dq+L\,dq^2=0.$$

Для каждой системы характеристик имеем диференциальное уравнение вида:

$$\lambda_1\,dp+\mu_1\,dq=0, \quad \lambda_2\,dp+\mu_2\,dq=0,$$

причем λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 зависят только от p и q. Таким образом каждая из этих систем допускает одну интегрируемую комбинацию $d\,[u_1(p,q)]=0$, $d\,[u_2(p,q)]=0$, и следовательно, уравнение (29) допускает интегралы двух уравнений первого порядка:

$$u_1(p,q)=C_1, \quad u_2(p,q)=C_2.$$

Эти интегральные поверхности суть развертывающиеся поверхности (II, § 444).

В своих работах относительно прямолинейного движения газов Гюгонио* (см. дальше § 492) пришел к изысканию интеграла уравнения вида (29), касающегося плоскости $z=0$ вдоль некоторой кривой. Теория характеристик легко дает решение этой задачи.

Кривая соприкосновения L необходимо является характеристической кривой на решении $z=0$, а следовательно, эта кривая есть интеграл диференциального уравнения

$$H(0,0)\,dy^2+2K(0,0)\,dx\,dy+L(0,0)\,dx^2=0,$$

так как во всех точках интеграла $z=0$ мы имеем также $p=0$, $q=0$. Следовательно, эта кривая представляет собою некоторую прямую линию D. Пусть теперь S — интегральная поверхность, касающаяся плоскости xy вдоль всей прямой D. Эта поверхность порождена характеристиками системы, отличной от той, к которой принадлежит D, выходящими из различных точек D. Если $du_1=0$ есть интегрируемая комбинация диференциальных уравнений этой системы, то $u_1(p,q)$ постоянна вдоль каждой из этих характеристик и, следовательно, равна $u_1(0,0)$ во всех точках поверхности S. Отсюда вытекает, что поверхность S является интегралом уравнения первого порядка $u_1(p,q)=u_1(0,0)$, и обратно, каждая интегральная поверхность этого уравнения, если только она касается плоскости xy, является решением поставленной задачи. Для окончательного разрешения вопроса следует задать еще одно условие, например потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через некоторую кривую, которая, конечно, должна касаться плоскости xy. Задача приводится тогда к определению развертывающейся поверхности, проходящей через данную кривую и допускающей направляющим конусом данный конус. Мы получим эту поверхность, проводя через каждую касательную к кривой плоскость, параллельную касательной плоскости направляющего конуса (II, § 444). Отправляясь от уравнения первого порядка $u_2(p,q)=u_2(0,0)$, получим второе семейство решений.

---

* Hugoniot, *Journal de l'École Polytechnique*, t. 33. Cahiers 57 et 58, 1887.

II. МЕТОД ЛАПЛАСА. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

477. Промежуточные интегралы линейного уравнения. Обе системы характеристик уравнения

$$s + ap + bq + cz + g = 0, \tag{30}$$

где a, b, c, g — функции от x и y, всегда различны, и их диференциальные уравнения соответственно таковы:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dx = 0, \quad dp + (ap + bq + cz + g)\,dy = 0, \quad (31)_1$$
$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dy = 0, \quad dq + (ap + bq + cz + g)\,dx = 0. \quad (31)_2$$

Каждая из этих систем допускает интегрируемую комбинацию $dx = 0$, или $dy = 0$. Для существования промежуточного интеграла необходимо и достаточно, чтобы одна из них допускала вторую интегрируемую комбинацию. В силу высказанного выше (§ 475) общего предложения, которое в данном случае легко проверить, для того чтобы соотношение $dV = 0$ было следствием, например, уравнений $(31)_2$, функция V должна удовлетворять двум условиям:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}p - \frac{\partial V}{\partial q}(ap + bq + cz + g) = 0.$$

Первое показывает, что V не должна зависеть от p, и следовательно, нужно, чтобы во втором соотношении коэфициент при p и член, не содержащий p, были каждый в отдельности равны нулю. Это позволяет заменить предыдущую систему системой:

$$A(V) = \frac{\partial V}{\partial x} - (bq + cz + g)\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad B(V) = \frac{\partial V}{\partial z} - a\frac{\partial V}{\partial q} = 0; \tag{32}$$

здесь V — неизвестная функция от x, y, z, q. Эта система допускает уже решение $V = y$. Для того чтобы она допускала еще другое решение, не приводящееся к функции от y, необходимо и достаточно, чтобы она была якобиевой системой (II, § 451), т. е. чтобы тождественно имело место $A[B(V)] = B[A(V)]$, или $A(a) = B(bq + cz + g)$, что равносильно условию $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0$.

Даже не интегрируя систему (32), можно непосредственно усмотреть, что это условие достаточно для существования промежуточного интеграла, так как предложенное уравнение (30) всегда можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right)z + g = 0. \tag{33}$$

При $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0$ уравнение (33) приводится к линейному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + bu + g = 0, \tag{34}$$

если взять за вспомогательное переменное $u = \frac{\partial z}{\partial y} + az$. Таким образом общий интеграл уравнения (34)

$$u = e^{-\int b\,dx}\left(Y - \int g e^{\int b\,dx} dx\right)$$

приводит нас к промежуточному интегралу уравнения (30)

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = e^{-\int b\,dx}\left(Y - \int g e^{\int b\,dx} dx\right), \tag{35}$$

где Y — произвольная функция от y. Это уравнение первого порядка в свою очередь может быть проинтегрировано как обыкновенное диференциальное уравнение, в котором независимым переменным является y, и общий интеграл уравнения (30) представляется формулой

$$e^{\int a\,dy} z = X + \int e^{\int a\,dy - \int b\,dx}\left(Y - \int g e^{\int b\,dx} dx\right) dy,$$

причем X есть произвольная функция от x. Мы видим, что этот интеграл имеет вид:

$$z = \alpha X + \beta + \int \gamma Y\,dy, \tag{36}$$

где α, β и γ — определенные функции x и y. Одна из произвольных функций X содержится в нем явно, а вторая произвольная функция Y входит под знаком интеграла.

Переменив роли переменных x и y, мы таким же образом увидим, что существует промежуточный интеграл, когда $\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$ равно нулю. Общий интеграл представляется формулой, подобной формуле (36) и получающейся из нее перестановкой x и y, X и Y.

Оба выражения $h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$, $k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$ называются *инвариантами* уравнения (30). Легко проверить, что эти инварианты не изменяются при замене неизвестной функции $z = \lambda(x, y) z'$, какова бы ни была функция $\lambda(x, y)$. Только что установленный результат можно высказать так:

Для того чтобы уравнение (30) *допускало промежуточный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы один из инвариантов h или k был равен нулю.*

Пример. Возьмем уравнение $(x-y)s - q = 0$, для которого инвариант h равен нулю. Оно допускает промежуточный интеграл $q = Y(x-y)$, и следовательно, общий интеграл выражается так:

$$z = X + \int Y(x-y)\,dy.$$

Для уничтожения знака квадратуры достаточно заменить произвольную функцию Y второй производной Y'' некоторой произвольной функции, что дает общий интеграл уже целиком в явном виде

$$z = X + Y + (x-y)Y'.$$

Примечание. Может случиться, что оба инварианта h и k одновременно равны нулю. В этом случае имеем: $\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y}$, и a и b представляют собою частные производные некоторой функции $\lambda(x, y)$, $a=\frac{\partial\lambda}{\partial y}$, $b=\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, и, кроме того, имеем:

$$c=\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y}.$$

Полагая $z=e^{-\lambda}u$, приводим уравнение (30) к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+g(x, y)e^{\lambda}=0$, которое непосредственно интегрируется

478. Преобразования Лапласа. Если ни один из инвариантов h и k не равен нулю, уравнение (30) не допускает промежуточного интеграла. Лапласу * принадлежит метод преобразования, позволяющий интегрировать уравнение в неограниченном числе новых случаев. Предположим для определенности $h\neq 0$. Мы уже заметили, что если положить

$$\frac{\partial z}{\partial y}+az=z_1, \tag{37}$$

то уравнение (30) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}+bz_1+g=hz. \tag{38}$$

Будем рассматривать уравнения (37) и (38) как систему двух совокупных уравнений с двумя неизвестными z и z_1. Исключение z_1 приводит очевидным образом к уравнению (30), которое отныне мы будем называть *уравнением* (E). Исключая же, наоборот, z, мы придем к уравнению того же вида (E_1), в котором неизвестной является z_1:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+a_1\frac{\partial z_1}{\partial x}+b_1\frac{\partial z_1}{\partial y}+c_1z_1+g_1=0; \tag{E$_1$}$$

коэфициенты a_1, b_1, c_1 и g_1 имеют такие значения:

$$\left.\begin{aligned} &a_1=a-\frac{\partial\log h}{\partial y},\quad b_1=b,\quad c_1=c-\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}-b\frac{\partial\log h}{\partial y},\\ &g_1=g\left(a-\frac{\partial\log h}{\partial y}\right)+\frac{\partial g}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Очевидно, что интегрирование уравнения (E_1) и интегрирование уравнения (E) представляют собой две эквивалентные задачи, так как уравнения (37) и (38) устанавливают однозначное соответствие между инте-

---

* „Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles" (*Mémoires de l'Académie*, 1773). Мы указываем здесь лишь принцип метода, а читателя, желающего углубить свои сведения, отсылаем к прекрасным главам, которые посвятил этому вопросу Дарбу („Leçons sur la théorie générale des surfaces", t. II).

гралами обоих уравнений. Как показывает нетрудный подсчет, инварианты h_1 и k_1 уравнения (E_1) имеют значения

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1 - c_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \\ k_1 &= \frac{\partial b_1}{\partial y} + a_1 b_1 - c_1 = h; \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

k_1 не может быть равно нулю, так как по предположению $h \neq 0$, но может случиться, что h_1 обращается в нуль, хотя ни один из инвариантов h и k не равен нулю. В этом случае уравнение (E_1) допускает промежуточный интеграл, а общий интеграл представляется формулой, подобной формуле (36), с двумя произвольными функциями X и Y. В силу формулы (38) для общего интеграла уравнения (E) выводим из нее выражение вида

$$z = A_0 X + A_1 X' + B + \int CY\,dy,$$

причем A_0, A_1, B, C суть определенные функции от x и от y, а X' — производная функции X.

Точно так же, если инвариант k не равен нулю, два совокупных уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + bz = z_{-1}, \qquad \frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + az_{-1} + g = kz \tag{41}$$

приведут по исключении z_{-1} к данному уравнению (E), а по исключении z — к новому уравнению (E_{-1}):

$$\frac{\partial^2 z_{-1}}{\partial x \partial y} + a_{-1}\frac{\partial z_{-1}}{\partial x} + b_{-1}\frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + c_{-1} z_{-1} + g_{-1} = 0, \tag{E_{-1}}$$

со следующими выражениями для a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, g_{-1}:

$$\left.\begin{aligned} a_{-1} = a, \quad b_{-1} = b - \frac{\partial \log k}{\partial x}, \quad c_{-1} = c - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} - a\frac{\partial \log k}{\partial x}, \\ g_{-1} = g\left(b - \frac{\partial \log k}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Инварианты для (E_{-1}) суть соответственно

$$h_{-1} = k, \quad k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}. \tag{43}$$

Если инвариант k_{-1} равен нулю, то можно проинтегрировать уравнение (E_{-1}), а следовательно, и уравнение (E).

Если же ни один из инвариантов h_{-1}, k_{-1} не равен нулю, то таким способом интегрировать уравнение (E) не удастся. Тогда можно приложить эти же преобразования к двум уравнениям (E_1), (E_{-1}), но следует отметить, что каждое из них не породит двух новых уравнений.

Возьмем, например, уравнение (E_1) и приложим к нему второе преобразование Лапласа, полагая

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 z_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1.$$

Обращаясь к формуле (38), мы видим, что $z' = hz - g$, так что полученное относительно z' уравнение простым преобразованием приводится к начальному уравнению (E). Первое преобразование, приложенное к (E_{-1}), точно так же привело бы к уравнению, которое отличается от (E) лишь очень простым преобразованием неизвестной функции. Очевидно, что с точки зрения интегрирования эти уравнения можно рассматривать как тождественные. Вследствие этого повторное приложение метода Лапласа приведет только к линейной последовательности уравнений

$$\ldots (E_{-2}),\ (E_{-1}),\ (E),\ (E_1),\ (E_2), \ldots$$

с положительными и отрицательными индексами, в которой каждое уравнение (E_i), где $i > 0$, выводится из (E_{i-1}) первым преобразованием, а каждое уравнение (E_{-j}), где $j > 0$, выводится из (E_{1-j}) вторым преобразованием. Последовательность уравнений с положительным индексом можно продолжать до тех пор, пока мы не придем к уравнению (E_i), для которого h_i будет равен нулю Если в результате i преобразований мы приходим к уравнению (E_i), для которого $h_i = 0$, то это уравнение интегрируется, и, возвращаясь шаг за шагом назад, мы выведем из него общий интеграл уравнений (E_{i-1}), (E_{i-2}),... до уравнения (E) Если же мы придем к уравнению (E_{-j}), для которого инвариант k_{-j} равен нулю, то получим этот же результат приложением j раз второго преобразования Лапласа.

Пример. Приложим этот метод к уравнению

$$(x-y)s + p - q = 0,$$

которое не допускает промежуточного интеграла. Положим для этого

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{z}{x-y}.$$

Уравнение напишется в виде:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{z_1}{x-y} + \frac{2z}{(x-y)^2} = 0,$$

и исключение z приводит к уравнению относительно z_1:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} - \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial z_1}{\partial y}}{x-y} + \frac{2z_1}{(x-y)^2} = 0,$$

Это новое уравнение интегрируемо, ибо его можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{z_1}{x-y}\right) - \frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{z_1}{x-y}\right) = 0,$$

а отсюда заключаем, что оно допускает промежуточный интеграл

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{z_1}{x-y} = Y(x-y),$$

где Y — произвольная функция от y. Следовательно, общий интеграл есть

$$z_1 = \frac{2X + \int Y(x-y)\,dy}{x-y}.$$

Для освобождения от этого знака квадратуры достаточно заменить Y через Y''', что дает

$$z_1 = 2\frac{X+Y}{x-y} + 2Y' + (x-y)Y''.$$

Для общего интеграла уравнения относительно z окончательно находим:

$$z = (x-y)(Y' - X') + 2X + 2Y.$$

Метод Лапласа является лишь частным приложением более общего метода, принадлежащего Г. Дарбу и распространяющегося на все уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Несмотря на весь интерес этого метода, уравнения, которые он позволяет интегрировать, образуют весьма узкий класс, и уравнения второго порядка, поддающиеся формальному интегрированию, являются исключением. Ввиду этого вместо изыскания общего интеграла больше занимаются определением частных интегралов, удовлетворяющих условиям, достаточным для их определения. Условия эти, заимствованные чаще всего из задач математической физики, весьма различны в зависимости от действительности или мнимости характеристик. Это приводит нас к изложению классификации уравнений второго порядка, основанной на этом признаке.

479. Три типа линейных уравнений. Рассмотрим, в частности, уравнение вида

$$Ar + 2Bs + Ct + F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{44}$$

в котором коэфициенты A, B, C зависят только от независимых переменных x и y. На каждой интегральной поверхности оба семейства характеристических кривых получаются интегрированием диференциального уравнения

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0, \tag{45}$$

которое не зависит от рассматриваемого интеграла. Эти кривые в проекции на плоскость xy дают два семейства кривых, удовлетворяющих уравнению (45) первого порядка и второй степени. Обратно, всякая кривая такого рода является проекцией бесконечного множества характеристик уравнения (44) на плоскость xy.

В самом деле, уравнение (45) разлагается на два уравнения первого порядка и первой степени

$$a_1\,dy + b_1\,dx = 0, \qquad (45)_1$$

$$a_2\,dy + b_2\,dx = 0. \qquad (45)_2$$

из которых каждое входит в одну из систем характеристик; a_1, b_1, a_2, b_2 — функции от x и от y. Рассмотрим, в частности, одну из этих систем, определенную тремя уравнениями:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad a_1\,dy + b_1\,dx = 0, \quad E\,dp + G\,dq + H\,dx = 0;$$

здесь E, G, H — функции от x, y, z, p, q, выражения которых не стоит писать. Пусть Γ — пространственная кривая, дающая в проекции на плоскость xy кривую C_1, вдоль которой

$$a_1\,dy + b_1\,dx = 0;$$

так как x, y, z — известные функции параметра a, то соотношение $dz = p\,dx + q\,dy$ позволяет выразить одно из двух неизвестных, например p, в функции от q и от a. Подставляя эти значения x, y, z, p в последнее уравнение

$$E\,dp + G\,dq + H\,dx = 0,$$

приходим для определения q к диференциальному уравнению первого порядка. Мы видим, что кривая Γ в общем случае принадлежит бесконечному множеству характеристических многообразий уравнения (44), зависящих от произвольного постоянного. Для краткости мы будем часто называть *характеристическими кривыми уравнения* (44) два семейства плоских кривых в плоскости xy, определяемые диференциальным уравнением (45). Смысл этого сокращенного выражения не может представлять никакой неясности.

Если коэфициенты A, B, C являются действительными функциями действительных переменных x и y, то мы приходим к установлению следующих различий. Если $B^2 - AC$ *положительно*, оба семейства характеристик действительны и различны; уравнение (44) тогда есть уравнение *гиперболического типа*. Если $B^2 - AC$ *отрицательно*, оба семейства характеристик являются мнимыми; уравнение (44) — *эллиптического типа*. Наконец, если $B^2 - AC = 0$, имеется только одно, и притом действительное, семейство характеристик; уравнение принадлежит к *параболическому типу*. Очевидно, что в зависимости от рассматриваемой части плоскости одно и то же уравнение может принадлежать к различным типам.

Предположим, что оба семейства характеристик различны, и пусть $\xi(x, y) = \text{const}$, $\eta(x, y) = \text{const}$ — формулы, представляющие соответственно общий интеграл уравнений $(45)_1$ и $(45)_2$; $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ соответственно удовлетворяют двум уравнениям:

$$a_1\frac{\partial\xi}{\partial x} - b_1\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad a_2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b_2\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

и следовательно, являются интегралами уравнения первого порядка

$$A\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \tag{46}$$

Представим себе теперь, что за новые независимые переменные берутся $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Уравнение (44) превращается в новое уравнение того же вида:

$$A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + F_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{47}$$

характеристики которого являются интегральными кривыми диференциального уравнения

$$A_1\, d\eta^2 - 2B_1\, d\xi\, d\eta + C_1\, d\xi^2 = 0.$$

Но по самому определению характеристических многообразий (§ 473) ясно, что характеристики нового уравнения (47) соответствуют характеристикам первоначального. Следовательно, это суть два семейства прямых $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, и мы имеем $A_1 = C_1 = 0$, так что уравнение (47) содержит только производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$. Тогда говорят, что *уравнение отнесено к своим характеристикам*.

Если уравнение (44) параболического типа, то за $\xi(x, y)$ берется интеграл уравнения (46), а за второе переменное произвольная функция $\eta(x, y)$, отличная от ξ. Новое уравнение должно допускать только одну систему характеристик, состоящую из прямых $\xi = \text{const}$. Таким образом оба коэфициента A_1 и B_1 должны равняться нулю, и уравнение (47) содержит лишь производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$. Эти результаты, которые общая теория характеристик делает наглядными, легко проверить вычислением. В самом деле, по общим формулам замены переменных находим, что, каковы бы ни были функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, коэфициенты A_1, B_1 и C_1 имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \\ B_1 &= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ C_1 &= A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2; \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

если за ξ и η взяты два различных интеграла уравнения (46), то коэфициенты A_1 и C_1, конечно, равны нулю. Если $B^2 - AC = 0$, то уравнение (46) можно переписать в двух эквивалентных видах:

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad B\frac{\partial f}{\partial x} + C\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

и если ξ является интегралом этого уравнения, то A_1 и B_1 равны нулю.

Если уравнение (44) принадлежит к эллиптическому типу, то предыдущее преобразование вводит два комплексных сопряженных переменных $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Если мы хотим употреблять только действительные преобразования и переменные, то вместо ξ, η достаточно взять два действительных переменных $X=\xi+\eta$, $Y=\frac{\xi-\eta}{i}$, что заменяет $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}$ выражением $\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$. В конечном счете всякое уравнение вида (44) с действительными коэфициентами A, B, C соответствующим выбором действительных переменных может быть приведено к одному из трех следующих канонических видов, каждый из которых соответствует особому типу уравнения*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+f\left(\xi,\ \eta,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial\xi},\ \frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0 \text{ (гиперболический тип);} \qquad (H)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+f\left(\xi,\ \eta,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial\xi},\ \frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0 \text{ (эллиптический тип);} \qquad (E)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+f\left(\xi,\ \eta,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial\xi},\ \frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0 \text{ (параболический тип).} \qquad (P)$$

В случае, когда уравнение (44) *вполне линейно*, т. е. линейно относительно функции z и всех ее производных, таковым же является преобразованное уравнение (47), при любых новых переменных ξ, η. Итак, три канонических вида таковы:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+a\frac{\partial z}{\partial\xi}+b\frac{\partial z}{\partial\eta}+cz+g=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+a\frac{\partial z}{\partial\xi}+b\frac{\partial z}{\partial\eta}+cz+g=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+a\frac{\partial z}{\partial\xi}+b\frac{\partial z}{\partial\eta}+cz+g=0,$$

причем a, b, c, g зависят только от переменных ξ и η. Второй вид приводится к первому, если ввести комплексные переменные.

Примеры. 1. Уравнение $rx^2-ty^2=0$ принадлежит к гиперболическому типу. Характеристики проектируются на плоскость xy по двум семействам кри-

* Можно, не употребляя никаких мнимых символов, непосредственно притти к каноническому виду, соответствующему эллиптическому типу. В самом деле, если за новые переменные взять две функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{B}{A}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\sqrt{AC^2-B^2}}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{B}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad (E)$$

то приходим к преобразованному уравнению, в котором, как легко проверить, $A_1=C_1$, $B_1=0$. Но интегрирование этой системы по существу приводит к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial x}=\left(\frac{-B+i\sqrt{AC-B^2}}{A}\right)\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial y},$$

которое эквивалентно уравнению (46).

вых $xy=C$, $\frac{y}{x}=C'$. Возьмем за новые переменные $\xi=xy$, $\eta=\frac{y}{x}$. Имеем:

$$p=y\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial\eta},\quad q=x\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

$$r=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

$$t=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{1}{x^2}.$$

Предложенное уравнение превращается в уравнение, оба инварианта которого h и k равны нулю (§ 477) и которое легко интегрируется:

$$2\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\eta}=0.$$

2. Уравнение $ry^2+tx^2=0$ принадлежит к эллиптическому типу. Интегральные кривые уравнения $y^2dy^2+x^2dx^2=0$ мнимые. Полагая $x^2=\xi$, $y^2=\eta$, имеем новое уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0.$$

480. Изучение задачи Коши в частном случае. Различие между гиперболическими и эллиптическими уравнениями может, очевидно, распространяться на уравнения второго порядка произвольного вида, в зависимости от природы характеристик. Это различие не проявляется при изыскании промежуточных интегралов. Но в эллиптическом случае все рассуждения, основанные на теории характеристик, неявно предполагают, что дело идет об аналитических интегралах. Следует, впрочем, заметить, что формулы, почти тождественные по внешнему виду, могут допускать совершенно различные истолкования в зависимости от типа уравнения, к которому они относятся. Для того чтобы должным образом выявить это существенное обстоятельство, мы займемся изучением задачи Коши для двух уравнений $s=0$, $r+t=0$.

Возьмем сначала уравнение $s=0$. Пусть M_1 — многообразие, определенное пятью *действительными* функциями переменного α, $x=f_1(\alpha)$, $y=f_2(\alpha)$, $z=f_3(\alpha)$, $p=\varphi_1(\alpha)$, $q=\varphi_2(\alpha)$, удовлетворяющими соотношению

$$f_3'(\alpha)=\varphi_1(\alpha)f_1'(\alpha)+\varphi_2(\alpha)f_2'(\alpha).$$

Уравнение $s=0$ допускает два промежуточных интеграла $p=\psi(x)$, $q=\pi(y)$, и для получения интеграла, содержащего все элементы M_1, мы сначала должны определить произвольные функции ψ и π двумя условиями:

$$\varphi_1(\alpha)=\psi[f_1(\alpha)],\quad \varphi_2(\alpha)=\pi[f_2(\alpha)].$$

Пусть эти функции определены. Искомый интеграл выражается формулой

$$z=z_0+\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+\int_{y_0}^{y}\pi(y)\,dy,$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты некоторой точки на данной кривой, соответствующей значению α_0 параметра. Сделаем замену переменных

$$x=f_1(u),\quad y=f_2(v). \tag{49}$$

Принимая во внимание соотношения, определяющие функции ψ и π, получаем для z выражение:

$$z=z_0+\int_{\alpha_0}^{u}\varphi_1(u)f_1'(u)\,du+\int_{\alpha_0}^{v}\varphi_2(v)f_2'(v)\,dv. \tag{50}$$

Таким образом координаты x, y, z точки искомой поверхности выражаются при помощи двух параметров u и v формулами (49) и (50). Полагая $u=v$, получаем в самом деле данную кривую.

Поставим себе эту же задачу для уравнения Лапласа $r+t=0$, с теми же данными. Беря за новые переменные $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=p_1=\frac{p-iq}{2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta}=q_1=\frac{p+iq}{2},$$

и уравнение переходит в $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}=0$. Что же касается многообразия M_1, то оно заменяется новым многообразием M_1', определяемым соотношениями:

$$\xi=f_1(\alpha)+if_2(\alpha), \qquad \eta=f_1(\alpha)-if_2(\alpha),$$
$$p_1=\frac{\varphi_1(\alpha)-i\varphi_2(\alpha)}{2}, \qquad q_1=\frac{\varphi_1(\alpha)+i\varphi_2(\alpha)}{2}, \qquad z=f_3(\alpha).$$

Из полученных только что формул заключаем, что интеграл уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}=0$, содержащий все элементы M_1', представляется уравнениями:

$$\xi=f_1(u)+if_2(u), \qquad \eta=f_1(v)-if_2(v),$$
$$\left.\begin{aligned} z=z_0&+\frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{u}[\varphi_1(u)-i\varphi_2(u)]\,[f_1'(u)+if_2'(u)]\,du+\\ &+\frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{v}[\varphi_1(v)+i\varphi_2(v)]\,[f_1'(v)-f_2'(v)]\,dv, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Возвращаясь к переменным x, y, мы получаем для представления интеграла уравнения $r+t=0$, допускающего все элементы данного многообразия M_1, следующие формулы:

$$x=\frac{f_1(u)+f_1(v)+i[f_2(u)-f_2(v)]}{2}, \qquad y=\frac{f_1(u)-f_1(v)+i[f_2(u)+f_2(v)]}{2i}. \tag{52}$$

Формула, дающая z, не меняется. При действительных значениях параметров u и v переменные x и y вообще имеют мнимые значения; если приписывать этим параметрам мнимые значения, то формулы (51) и (52) имеют смысл только тогда, когда данные функции f_1, f_2, φ_1 и φ_2 суть *функции аналитические*. Предположим эти функции голоморфными в некоторой области D комплексного переменного α, содержащей отрезок ab действительной оси, соответствующий данной кривой. Эти функции в окрестности точки $\alpha=\alpha_0$ представляются целыми рядами относительно $(\alpha-\alpha_0)$ с действительными коэфициентами, и следовательно, при мнимых сопряженных значениях переменного в области D принимают мнимые сопряженные значения. Для того чтобы x, y, z были действительны, достаточно параметрам u и v придать мнимые сопряженные значения, и формулы, представляющие интеграл, можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} &x=\Re\,[f_1(u)+if_2(u)], \qquad y=\Re\left[\frac{f_1(u)+if_2(u)}{c}\right],\\ &z=z_0+\Re\left[\int_{\alpha_0}^{u}\{\varphi_1(u)-i\varphi_2(u)\}\,\{f_1'(u)+if_2'(u)\}\,du\right]. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Здесь $\Re(A)$ обозначает действительную часть A, а комплексное переменное u описывает область D. Отсюда мы видим, как в сущности различны между собою решения задачи Коши для обоих уравнений, кажущиеся тождественными с чисто формальной точки зрения. В то время как формулы (49) и (50) просто предполагают, что входящие в них функции непрерывны вместе со своими производными, формулы (51) и (52) имеют точный смысл лишь тогда, когда данные функции f_i, φ_i являются аналитическими, а в окончательных формулах (53), представляющих решение, переменный параметр u должен принимать комплексные значения.

Легко убедиться, что эти условия не введены выбранным способом решения, но что они зависят от самой сущности задачи. Пусть C — плоская кривая, лежащая в плоскости xy, и D — область, заключающая эту кривую. Если задать вдоль C значения некоторой функции u и ее частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, причем эти значения только непрерывны и удовлетворяют вдоль этой кривой соотношению

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

то в общем случае не существует решения уравнения Лапласа $\Delta_2 u = 0$, непрерывного вместе со своими производными первых двух порядков в области D, как бы мала она ни была, и такого, чтобы его производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ принимали на кривой C заданные значения. В самом деле, если бы такое решение существовало, то из него мы бы вывели другую функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую в D тем же условиям, что и $u(x, y)$, и такую, что $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ (II, § 257). Так как значения $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ вдоль C известны, то сама эта функция $v(x, y)$ будет определена вдоль C с точностью до аддитивного постоянного. Следовательно, $u + iv$ будет аналитической функцией от $x + iy$, голоморфной в области D, значения которой вдоль C известны. Но мы знаем, что эта функция вполне определена, если известны ее значения вдоль дуги кривой C, как бы мала она ни была. Отсюда следует, что значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ должны быть вполне определены в произвольной точке C, если известны значения этих производных на некоторой части этого контура, как бы мала о-а ни была. Ясно, что это условие не будет выполнено, если заданные для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функции только непрерывны. В действительности же для уравнения $\Delta_2 u = 0$ ставится не задача Коши, а совсем иная задача, которая будет изучена дальше (гл. XXVII).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Проинтегрировать уравнения

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0, \qquad \left(s + \frac{p - q}{x - y}\right)^2 = rt, \qquad rt - s^2 + f'(x)\,pt = 0,$$

$$rt - s^2 = pqs, \qquad qr + (zq - p)\,s - zpt = 0, \qquad s = pq + e^z f(x, y),$$

$$rxy + s(x^2 + y) + txy - py - qx = 0.$$

2. Найти поверхности, для которых линии кривизны одной из систем суть плоские кривые, плоскости которых проходят через неподвижную прямую (*поверхности Иоахимсталя*), и поверхности, для которых линии кривизны одной из систем расположены на концентрических сферах (*поверхности Монжа*).

3. Определить функцию $\lambda(x, y)$ так, чтобы уравнение $r = \lambda^2 t$ интегрировалось методом Монжа.

4. Определить уравнения Монжа-Ампера, для которых характеристики одной из систем являются асимптотическими линиями или линиями кривизны интегральных поверхностей (Ли).

Определить также уравнения, для которых оба семейства характеристик образуют сопряженную сетку на интегральных поверхностях.

5. *Минимальные поверхности.* Если уравнение касательной плоскости к некоторой поверхности S написать в виде:

$$(1-\alpha\beta) X + i(1+\alpha\beta) Y + (\alpha+\beta) Z + \xi(\alpha, \beta) = 0,$$

причем α и β два переменных параметра, то, для того чтобы эта поверхность имела среднюю кривизну, равную нулю, необходимо и достаточно, чтобы (стр. 70)

$$(\alpha-\beta)\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\xi}{\partial\beta}=0.$$

Вывести отсюда общие уравнения поверхностей с нулевой средней кривизной.

ГЛАВА XXV.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С n ПЕРЕМЕННЫМИ.

I. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С n ПЕРЕМЕННЫМИ.

481. Характеристики уравнений с n переменными. Понятие характеристики распространяется на уравнения в частных производных второго порядка с любым числом переменных, а также на уравнения порядка выше второго. Мы рассмотрим лишь случай одного уравнения второго порядка с n переменными, линейного относительно производных второго порядка

$$\sum a_{ik} p_{ik} + F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}, \tag{1}$$

в котором коэфициенты a_{ik} зависят только от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Задача Коши может быть поставлена для этого уравнения следующим образом: *пусть в пространстве n измерений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана гиперповерхность S уравнением*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \tag{2}$$

найти интеграл уравнения (1), *зная значения, которые принимает этот интеграл и одна из его частных производных первого порядка вдоль S.*

Эта задача в общем случае является определенной. Заметим сначала, что значения n частных производных p_i вдоль S не независимы. Если в каждой точке S известна функция z и одна из этих производных, то остальные производные первого порядка можно вывести из них при помощи тождества $dz = \sum p_i dx_i$. В самом деле, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z могут быть выражены на гиперповерхности S известными функциями от $n-1$ параметров $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, и предыдущее соотношение эквивалентно $n-1$ различным соотношениям, которые позволяют вычислить значения n производных p_i, если известна одна из них. Предположим, например, что уравнение (2) для S разрешено относительно x_n. За параметры можно взять

$$u_1 = x_1, \ u_2 = x_2, \ldots, \ u_{n-1} = x_{n-1}.$$

Пусть $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — та функция, в которую должна обратиться z на этом многообразии. Из $n-1$ соотношений

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$n-1$ производных p_1, p_2, p_{n-1} могут быть выражены при помощи производной p_n, которая вдоль S может быть выбрана произвольно.

Если функции a_{ik}, F, Φ являются аналитическими функциями своих аргументов, то можно выбрать новую систему независимых переменных $(x'_1, \ldots, x'_n)$ таким образом, что в этой новой системе переменных уравнение гиперповерхности S перейдет в уравнение $x'_n = 0$. Уравнение (1) заменяется уравнением того же вида с аналитическими коэфициентами, и предложенная задача сводится к изысканию интеграла нового уравнения, обращающегося при $x'_n = 0$ в заданную функцию $f(x'_1, \ldots, x'_{n-1})$, между тем как $\frac{\partial z}{\partial x'_n}$ обращается в другую заданную функцию $\varphi(x'_1, \ldots, x'_{n-1})$ от тех же переменных. Если данные первоначальной задачи выражались аналитическими условиями, то функции f и φ также будут аналитическими. Если в преобразованном уравнении коэфициент при $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2_n}$ не равен нулю, то к этому уравнению можно приложить общую теорему (II, § 455), на основании которой, возвращаясь к первому уравнению, заключаем, что задача Коши допускает аналитическое решение, голоморфное в окрестности гиперповерхности, являющейся носителем данных значений. В противном случае, т. е. если коэфициент a'_{nn} при $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2_n}$ в преобразованном уравнении равен нулю, общая теорема существования неприложима. Заметим, даже не проделывая вычислений, что этот коэфициент a'_{nn} зависит только от коэфициентов a_{ik} и от самой функции Φ, но совершенно не зависит от данных на S. Гиперповерхности S, для которых a'_{nn} равно нулю, являются *характеристиками* уравнения (1). Эти характеристические гиперповерхности определяются уравнением в частных производных первого порядка, которое можно образовать, не производя никакой замены переменных. В самом деле, предположим, что известны значения z и ее частных производных p_i в каждой точке гиперповерхности S или, что то же самое, что нам известна система $2n+1$ функций x_i, p_k, z от $n-1$ параметров, удовлетворяющих уравнению (2) и соотношению $dz = \sum p_i dx_i$. Для того чтобы из них вывести значения производных второго порядка p_{ik} в произвольной точке этого многообразия, мы имеем соотношения

$$d_{p_i} = p_{i1} dx_1 + \ldots + p_{in} dx_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

и самое уравнение (1). Предположим для простоты, что за параметры взяты $n-1$ переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Соотношения (3) дают нам:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = p_{ik} + p_{in}\frac{\partial x_n}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = p_{ni} + p_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i},$$

и вследствие этого

$$p_{ik} = p_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Подставляя значения производных p_{ik}, p_{nl} из этих формул в уравнение (1), получаем для определения p_{nn} уравнение первой степени:

$$Ap_{nn}+B=0, \tag{4}$$

в котором коэфициент A выражается так:

$$A=\sum a_{ik}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} \quad (i, k=1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

при условии, что $\frac{\partial x_n}{\partial x_n}$ заменяется через -1.

Если для рассматриваемой гиперповерхности A не равно нулю, мы получим значения производных p_{ik} в каждой точке S, и, переходя к производным более высокого порядка, мы шаг за шагом удостоверимся, что все эти производные могут быть вычислены без всяких затруднений. Мы имеем здесь общий случай, когда задача Коши допускает единственное решение. Это уже не имеет места, если гиперповерхность S удовлетворяет соотношению $A=0$, которое можно переписать в более симметричном виде:

$$\sum a_{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=0 \quad (i, k=1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

предполагая, что это многообразие определяется уравнением (2). Гиперповерхность S является тогда характеристикой уравнения (1), и рассуждения общего случая уже неприложимы. Если одновременно $A=0$, $B=0$, значение производной p_{nn} неопределенно и задача Коши приводит к неопределенности. Доказано, что когда функции a_{ik}, F, Φ и данные задачи являются аналитическими, имеется истинная неопределенность *.

Предположим, что переменные, так же как и функции a_{ik}, F, действительны. Для существования *действительных* характеристик необходимо, чтобы уравнение первого порядка (6) допускало действительные интегралы. Но левая часть представляет собою квадратичную форму относительно производных от Φ и, следовательно, если дискриминант Δ формы $\sum a_{ik}u_iu_k$ не равен нулю, может быть написана в виде суммы n квадратов линейных функций от этих производных, умноженных на постоянные множители. Это приводит нас к классификации уравнений (1), основанной на природе характеристик.

Если дискриминант Δ квадратичной формы не равен нулю и если все коэфициенты при квадратах одного знака, уравнение (6) не допускает действительного интеграла, кроме интеграла $\Phi=C$, а следовательно, уравнение (1) не имеет действительных характеристик. Говорят, что оно принадлежит к *эллиптическому* типу.

Если дискриминант Δ не равен нулю и не все коэфициенты при квадратах одного знака, уравнение (6) имеет действительные интегралы,

* Этому предложению еще не дано абсолютно общего доказательства для неаналитического уравнения, но оно оправдывается во всех уже рассмотренных случаях.

и для уравнения (1) существуют действительные характеристики. Оно называется уравнением *гиперболического* типа.

Если дискриминант Δ равен нулю, уравнение (6) разложимо на сумму $n-p$ квадратов ($p>0$), и уравнение (1) принадлежит к *параболическому* типу. Уравнение этого рода может иметь действительные характеристики или не иметь их в зависимости от случая. Если, например, $n=3$, уравнение $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$ допускает действительные интегралы, между тем как уравнение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+b\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=0$$

допускает действительные интегралы только тогда, когда два уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+b\frac{\varphi}{\partial z}=0$$

образуют якобиеву систему. Таким образом всякое уравнение, допускающее действительные характеристики, принадлежит к гиперболическому или параболическому типу.

482. Распространение посредством волн. Уравнения с действительными характеристиками встречаются во всех явлениях, где имеется распространение посредством *волн*. В этом легко отдать себе отчет a priori. Рассмотрим сначала возмущение, распространяющееся вдоль бесконечной прямой линии, взятой за ось x. Предположим, например, что имеется бесконечный цилиндр чрезвычайно малого сечения, наполненный газом, состояние которого в каждый момент времени одинаково во всех точках каждого слоя, перпендикулярного образующим. Это состояние характеризуется переменным числом z, которое зависит от абсциссы x рассматриваемого слоя и от момента времени t. В наиболее обычных задачах z является интегралом уравнения второго порядка, линейного относительно производных второго порядка

$$H\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2K\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}+L\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+M=0, \tag{7}$$

допускающего решение $z=0$, соответствующее состоянию покоя.

Мы предполагаем, что если произвести возмущение в некоторой части цилиндра, то это возмущение распространится посредством волн, т. е. что слой с абсциссой x, расположенный вне возмущенной вначале части, остается в покое до известного момента времени $t=\varphi(x)$, начиная с которого он участвует в колебании. Будем рассматривать x и t как прямоугольные координаты точки. Пусть C — кривая, уравнение которой есть $t=\varphi(x)$, а $z=f(x, t)$ — интеграл уравнения (7), соответствующий изучаемому явлению. Кривая C разделяет плоскость xt на две части; в области, расположенной под C, $t\leqslant\varphi(x)$ и $z=0$; в области, расположенной над C, напротив, z отлично от нуля. Допустим, что вдоль кривой Cz и ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ равны нулю, что сводится к предположению, что при переходе от еще невозмущенной к возмущенной части z и ее частные производные изменяются непрерывным образом.

Таким образом интегральная поверхность $z=f(x, t)$ касается плоскости xt вдоль всей кривой C, которая является, следовательно, на этом частном интеграле характеристикой (§ 473). Иными словами, *уравнение $t=\varphi(x)$, соответствующее фронту волны, представляет собою на плоскости $z=0$ характеристическую кривую.*

Эти характеристические кривые являются интегральными кривыми диференциального уравнения $H_0\,dt^2-2K_0\,dt\,dx+L_0\,dx^2=0$; H_0, K_0 и L_0 обозначают выражения, в которые обращаются коэфициенты H, K и L после замены в них z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ нулем. В частности, когда H, K и L не содержат x и t, H_0, K_0 и L_0 суть постоянные, и обе системы характеристик составлены из параллельных прямых. Уравнение фронта волны $t=\varphi(x)$ имеет вид: $t=ax+b$, из чего мы заключаем, что возмущение распространяется с постоянной скоростью $\frac{1}{a}$.

Рассмотрим еще уравнение распространения звука в пространстве. Составляющие скорости газовой молекулы, находящейся в момент времени t в точке с координатами (x, y, z), являются частными производными функции $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющей уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{8}$$

где a — постоянный коэфициент.

Если при $t=0$ мы произведем возмущение, ограниченное некоторой областью пространства, то молекула, находящаяся в точке (x, y, z) вне этой области, остается в покое до момента времени $t=\varphi(x, y, z)$, начиная с которого u перестает быть нулем. Уравнение $\varphi(x, y, z)=t$, где t имеет определенное значение, представляет поверхность в пространстве (x, y, z), отделяющую в момент времени t еще не возмущенную область от области, уже возмущенной. Если мы допустим, что u и ее частные производные при переходе из одной области в другую изменяются непрерывным образом, то уравнение $\varphi(x, y, z)-t=0$ в пространстве четырех измерений (x, y, z, t) представляет характеристическую гиперповерхность уравнения (8), так как должен существовать интеграл этого уравнения, касающийся частного интеграла $u=0$ вдоль всей этой гиперповерхности. Соотношение (6), определяющее характеристические гиперповерхности уравнения (8), при предположении, что уравнение этой гиперповерхности разрешено относительно t, принимает в настоящем случае следующий вид:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{a^2}. \tag{9}$$

В силу уже известного результата * (II, ч. 2, стр. 282) уравнение

$$\varphi(x, y, z) = C$$

представляет тогда семейство параллельных поверхностей, так что *последовательные положения фронта волны образуют семейство параллельных поверхностей.*

Можно высказать более точный результат. При $t = 0$ уравнение $\varphi(x, y, z) = 0$ должно представлять поверхность Σ_0, отделяющую в момент $t = 0$ уже колеблющуюся часть пространства от части, находящейся в покое. Мы получаем интеграл уравнения (9), удовлетворяющий этому условию, беря огибающую полного интеграла

$$at = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

когда точка (α, β, γ) описывает поверхность Σ_0. Пусть $t = F(x, y, z)$ — уравнение этой огибающей поверхности. Из теории вариации постоянных (II, § 452) следует, что $F(x, y, z)$ является интегралом уравнения (9), и ясно, что при $t = 0$ огибающая поверхность приводится к самой поверхности Σ_0. Итак, положение фронта волны в момент времени t получается, если взять огибающую сфер радиуса at, центр которых описывает поверхность Σ_0. Очевидно, поставленному вопросу отвечает лишь часть этой огибающей, находящаяся вне поверхности Σ_0. Все эти результаты, выведенные исключительно из теории характеристик, будут подтверждены дальше (§ 484).

483. Общие свойства вполне линейных уравнений. Большое число задач математической физики приводит к уравнениям в частных производных, которые *линейны* и однородны относительно неизвестной функции и ее производных; кроме того, искомый интеграл должен удовлетворять условиям, которые могут быть весьма различны. Из линейного характера этих уравнений вытекает, что если известны p частных интегралов, то всякая линейная комбинация этих p интегралов с постоянными коэфициентами будет тоже интегралом. Если известен интеграл, зависящий от одного или нескольких произвольных параметров, то диференцированием или квадратурами из него можно вывести новые интегралы. Пусть, например, $\varphi(x, y, z, \ldots; a)$ — интеграл, зависящий

* Можно также проверить этот результат, показав, что ортогональные траектории семейства поверхностей $\varphi(x, y, z) = 0$ суть прямые линии. Если u, v, w — направляющие косинусы нормали к поверхности этого семейства, проходящей через точку (x, y, z), то в силу уравнения (9) имеем: $u = a\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = a\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $w = a\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, и достаточно показать, что u, v и w не меняются, когда от точки m пространства мы переходим к бесконечно близкой точке m' по направлению (u, v, w), выходящему из этой точки. Но с точностью до множителя имеем:

$$du = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0.$$

Точно так же dv и dw равны нулю.

от одного параметра a, не входящего в коэфициенты предложенного уравнения. Диференцируя, можем немедленно проверить, что $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ также является интегралом, что вполне понятно, так как эта производная может быть рассматриваема как предел линейной комбинации двух интегралов

$$\varphi(x, y, z,\ldots; a+h)-\varphi(x, y, z,\ldots; a).$$

Рассуждение приложимо и в общем случае. Если интеграл зависит от некоторого числа параметров $a, b, c,\ldots, l$, не входящих в коэфициенты уравнения, то все частные производные любого порядка этого интеграла по этим параметрам являются новыми интегралами, если, конечно, эти производные существуют. Может также случиться, что производные интеграла по одному из независимых переменных также будут интегралами. Так, например, это будет иметь место, если одно из переменных не входит в коэфициенты уравнения, а производные берутся по этому переменному. В частности, в случае линейного уравнения с *постоянными* коэфициентами все частные производные интеграла тоже являются интегралами, конечно, при допущении, что эти производные существуют и сами имеют производные до порядка, равного порядку предложенного уравнения.

Из интеграла, зависящего от *произвольных параметров*, посредством квадратур можно также вывести интегралы, зависящие от *произвольных функций*. Предположим, например, что для данного линейного уравнения с четырьмя независимыми переменными x, y, z, t известен интеграл $u=\varphi(x, y, z, t; a, b, c)$, зависящий от трех произвольных параметров a, b, c. Если умножить это частное решение на произвольную функцию $f(a, b, c)$ от этих параметров, то интеграл от произведения $f(a, b, c)\varphi(x, y, z, t; a, b, c)$, распространенный на *фиксированную* область одного, двух или трех измерений пространства (a, b, c), также будет решением предложенного уравнения в частных производных, какова бы ни была функция $f(a, b, c)$. Это непосредственно следует из обычных формул диференцирования под знаком интеграла, но можно просто заметить, вместе с Фурье, что интеграл такого рода в сущности является не чем иным, как суммой бесконечного числа частных решений. Когда известно несколько различных частных интегралов, зависящих от произвольных параметров, то таким же способом можно образовать другие интегралы, зависящие от произвольных функций. Выражая, что полученные таким образом интегралы удовлетворяют желаемым условиям, мы обычно получаем для определения произвольных функций *интегральные уравнения*. Случается также для некоторых частных интегралов, зависящих от произвольных постоянных, что из них можно получить новые интегралы посредством квадратур, распространенных на области, которые сами изменяются с x, y, z, t. Именно эти интегралы обычно и играют наиболее важную роль *.

---

* Ж. ле-Ру (J. Le-Roux) посвятил несколько работ изучению этих интегралов, которые он называет *главными* (*Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XII, 1895; *Journal de Mathématiques*, 5-e série, t. IV, 1898; t. VI, 1900; t. IX, 1903). Несколько дальше приведен интересный пример (§ 484).

Если известно бесконечное множество линейно независимых интегралов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, то очевидно, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} C_i \varphi_i$ с постоянными коэфициентами C_i тоже будет интегралом, если только этот ряд и ряды, получающиеся из него диференцированием до порядка уравнения, равномерно сходятся. Может даже случиться, что не все эти условия необходимы. Очевидно, что из всякого интеграла, зависящего от одного или нескольких произвольных параметров, можно получить, и притом бесчисленным множеством способов, бесконечное множество линейно-независимых частных интегралов, приписывая этим параметрам последовательность частных значений, и следовательно, образовать бесконечное множество представляемых рядами интегралов. Обычно частные значения параметров выбираются так, чтобы удовлетворялись некоторые граничные условия. Предположим, например, что интеграл $\varphi(x, y, z; a)$, зависящий от одного параметра a, обращается в нуль вдоль некоторых многообразий при бесконечной последовательности значений этого параметра $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Всякий ряд $\sum C_n \varphi(x, y, z; a_n)$ формально удовлетворяет предложенному уравнению и обращается в нуль вдоль этих же многообразий. Если коэфициентами C_n можно располагать таким образом, чтобы этот интеграл удовлетворял остальным условиям, наложенным на искомое решение, то задача будет разрешена. Ясно, что в каждом частном случае нужно будет рассматривать вопрос о сходимости.

Чаще всего частные интегралы, содержащие произвольные параметры, подсказываются самой сущностью задачи или аналитической формой коэфициентов. Пусть, например, дано уравнение *с постоянными коэфициентами*. Аналогия с линейными диференциальными уравнениями того же рода приводит к изысканию частных интегралов, выражающихся посредством показательной функции. Написав, что $e^{\alpha x+\beta y}$ является интегралом уравнения этого рода с двумя переменными, получаем *одно* уравнение, связывающее постоянные α и β, откуда выводим один или несколько интегралов, зависящих от произвольного параметра.

Все вышеизложенное прилагается к трем типам линейных уравнений; эллиптическому, гиперболическому или параболическому. Эти три типа встречаются в математической физике; так, например, распространение звука определяется уравнением гиперболического типа, а распространение теплоты — уравнением параболического типа. Распределение электричества на одном или нескольких проводниках или распределение температур внутри тела, находящегося в состоянии теплового равновесия, приводят к уравнениям эллиптического типа. Следует заметить, что задачи, к которым мы приходим, различны в зависимости от типа уравнения, определяющего явление. Но в каждом случае задача правильно поставлена, т. е. данные как раз таковы, что вполне определяют решение для соответствующего типа уравнения.

Для уравнений гиперболического или параболического типа приходится разрешать *задачу Коши**, или *смешанную задачу*, которая получается, если комбинировать задачу Коши с некоторыми граничными

* Задание только самого интеграла вдоль некоторой характеристики должно рассматриваться как эквивалентное данным Коши. Обычно задача Коши и сме-

условиями, смысл которых будет уточнен в каждом отдельном случае. Для уравнения эллиптического типа получается совершенно другая задача. Требуется найти интеграл, правильный в области, ограниченной *замкнутым* многообразием $n-1$ измерения S_{n-1}, зная значение этого интеграла в каждой точке S_{n-1} или соотношение между интегралом и некоторыми из его первых производных вдоль этого многообразия. Наиболее известным типом вопросов этого рода является *задача Дирихле*, которая будет нами подробно изучена. Отметим раз навсегда, что в этих различных задачах данные не являются необходимо аналитическими, так что даже для задачи Коши общая теорема существования (II, § 456) далеко не дает разрешения всех вопросов, которые можно поставить. В случаях, когда она приложима, она определяет решение лишь в окрестности того многообразия, которое является носителем данных задачи, что недостаточно для поставленной нами цели.

II. ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ПРИМЕРАМ.

Прежде чем приступить к систематическому изучению уравнений различных типов, дадим несколько примеров синтетических решений, представляющих приложение вышеизложенных общих понятий.

484. Уравнение звука. Задача Коши для уравнения распространения звука (§ 482)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{10}$$

состоит в нахождении интеграла $u(x, y, z, t)$, обращающегося при $t=0$ в данную функцию $f(x, y, z)$, в то время как $\frac{\partial u}{\partial t}$ должна обращаться в другую заданную функцию $\varphi(x, y, z)$. Эти две функции f и φ предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными во всем пространстве и равными нулю вне некоторой области R, являющейся местом начального возмущения. Задача была сначала разрешена Пуассоном и Коши. Следующий способ, принадлежащий Буссине (Boussinesq), позволяет легко исследовать все обстоятельства этого явления.

Функция $u=\frac{1}{r}$, где r — расстояние переменной точки (x, y, z) от неподвижной точки α, β, γ, является интегралом уравнения (10), зависящим от трех параметров α, β, γ. Двойной интеграл

$$u(x, y, z, t)=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu(\alpha, \beta, \gamma)\,d\sigma}{r}, \tag{11}$$

взятый на поверхности сферы Σ радиуса at, описанной из точки (x, y, z) как из центра, как мы сейчас покажем, тоже является интегра-

---

шанная задача ставится таким образом для уравнения *параболического* типа. Обо всех этих общих сведениях можно с интересом прочесть в статье Адамара в *Bulletin de la Société de Physique* (1906).

лом; здесь $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ — произвольная функция от α, β, γ. Этот интеграл Буссине назвал *сферическим потенциалом* (гл. XXVIII). Заметим, что частный интеграл $\frac{1}{r}$ не зависит от i; в формуле (11) от t зависит только область интеграции, так что $\frac{1}{r}$ можно рассматривать как *главный* интеграл, в смысле ле-Ру (стр. 85) *.

Для вычисления вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ удобно произвести замену переменных

$$\alpha = x + at\xi,\quad \beta = y + at\eta,\quad \gamma = z + at\zeta.$$

Когда точка α, β, γ описывает сферу Σ, точка ξ, η, ζ описывает сферу S радиуса, равного *единице*, с центром в начале координат, а между соответствующими элементами площади ds и $d\sigma$ обеих сфер имеется соотношение $d\sigma = a^2t^2 ds = r^2 ds$. Формула (11) переходит в

$$u(x, y, z, t) = \iint \mu(x + at\xi,\ y + at\eta,\ z + at\zeta),\ at\, ds; \tag{12}$$

---

* Метод Буссине может быть связан с общей теоремой Вейерштрасса относительно линейных уравнений с постоянными коэфициентами (см. Volterra, Leçons Professées à Stockholm 1906, р. 58). Пусть $\Theta(x, y, z)$ — однородная функция первой степени от x, y, z, такая, что уравнение $\Theta(x, y, z) = t$ представляет замкнутую поверхность Σ_t, заключающую начало координат и пересекающуюся каждой полупрямой, выходящей из начала координат, только в одной точке. Рассмотрим интеграл

$$I = \iiint \varphi(u, v, w) f(x + u, y + v, z + w)\, du\, dv\, dw,$$

распространенный на область, заключенную между двумя поверхностями Σ_{t_0}, Σ_t, причем t_0 — произвольное постоянное. Производная $\frac{\partial I}{\partial t} = F(x, y, z, t)$, функция четырех переменных x, y, z, t, является интегралом линейного уравнения с постоянными коэфициентами

$$\sum A_{h_1h_2h_3h_4} \frac{\partial^n V}{\partial x^{h_1} \partial y^{h_2} \partial z^{h_3} \partial t^{h_4}} = 0, \tag{E}$$

какова бы ни была произвольная функция f, если только уравнение

$$\sum (-1)^{n-h_4} A_{h_1h_2h_3h_4} \frac{\partial^n V}{\partial x^{h_1} \partial y^{h_2} \partial z^{h_3} \partial t^{h_4}} = 0 \tag{E'}$$

допускает интеграл $\varphi(x, y, z)\, \Phi[t - \theta(x, y, z)]$, где Φ — произвольная функция. В случае уравнения (10) оба уравнения (E) и (E') тождественны и допускают интеграл $\frac{1}{r}\Phi(at - r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Следовательно, в этом случае можно положить $\varphi = \frac{1}{r}$, $\theta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Поверхности Σ_t являются сферами, и легко видеть, что производная $\frac{\partial I}{\partial t}$ тождественна с интегралом по поверхности в методе Буссине.

Метод Кирхгоффа также основан на применении интегралов $\frac{1}{r}$ $\Phi(at - r)$, новый интеграл берется по поверхности сферы S. Так как область интеграции не зависит от x, y, z, то непосредственно имеем:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \iint\limits_S \Delta_2 \mu\,(x + at\xi,\quad y + at\eta,\quad z + at\zeta)\, at\, ds,$$

или, возвращаясь к первоначальной области интеграции,

$$\Delta_2 u = \iint\limits_\Sigma \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \gamma^2}\right) d\sigma, \tag{13}$$

причем двойной интеграл берется по поверхности сферы Σ.

Выражение для $\frac{\partial u}{\partial t}$, выведенное из формулы (12), составляется из двух слагаемых и может быть написано так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + at \iint\limits_S \left[a\xi \frac{\partial \mu}{\partial x} + a\eta \frac{\partial \mu}{\partial y} + a\zeta \frac{\partial \mu}{\partial z}\right] ds,$$

или, возвращаясь к сфере Σ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t} \iint\limits_\Sigma \left[\frac{\alpha - x}{at}\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \frac{\beta - y}{at}\frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \frac{\gamma - z}{at}\frac{\partial \mu}{\partial \gamma}\right] d\sigma.$$

Но $\frac{\alpha - x}{at}$, $\frac{\beta - y}{at}$, $\frac{\gamma - z}{at}$ суть направляющие косинусы внешней нормали к Σ, а двойной интеграл в правой части тождественен с интегралом

$$I = \iint \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\, d\beta\, d\gamma + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\, d\gamma\, d\alpha + \frac{\partial \mu}{\partial \gamma}\, d\alpha\, d\beta,$$

взятым по внешней стороне поверхности Σ, или же, по формуле Грина, с тройным интегралом (I, § 144)

$$I = \iiint \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \gamma^2}\right) dv, \tag{14}$$

распространенным на внутренность Σ. Вновь диференцируя по t формулу, дающую $\frac{\partial u}{\partial t}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t} I,$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{1}{t} I\right) - \frac{1}{t^2} I + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}, \tag{15}$$

что можно переписать в виде $\frac{a^2}{r}\frac{\partial I}{\partial r}$, где r есть радиус сферы Σ. Заменяя в тройном интеграле (14) прямоугольные координаты α, β, γ полярными координатами (ρ, θ, ψ), легко вычислить выражение $\frac{\partial I}{\partial r}$, но можно также заметить, что когда r увеличивается на dr, приращение ΔI представляется тройным интегралом, распространенным на часть пространства, заключенную между двумя концентрическими сферами радиусов r и $r+dr$. Главная часть этого приращения, очевидно, равняется произведению dr на двойной интеграл от $\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\gamma^2}\right)$, распространенный на поверхность сферы радиуса r. Таким образом мы имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{r}\frac{\partial I}{\partial r}=\frac{a^2}{r}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\gamma^2}\right)d\sigma. \tag{16}$$

Сравнивая с формулой (13), видим, что функция $u(x, y, z, t)$ действительно является интегралом уравнения (10), какова бы ни была функция $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$, если только встречающиеся в вычислении производные непрерывны. Из формулы (12) непосредственно усматриваем, что $u(x, y, z, 0)=0$, между тем как предел $\frac{u}{t}$ при t, стремящемся к нулю, равен $4\pi a\mu(x, y, z)$. Следовательно, интеграл (11) удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, y, z, 0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=4\pi a\mu(x, y, z) \quad (\text{при } t=0).$$

С другой стороны, $u_1(x, y, z, t)=\frac{\partial u}{\partial t}$ тоже является интегралом уравнения (10) (§ 483), а формула (16) показывает, что $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ при $t=0$ равна нулю. Итак, этот новый интеграл удовлетворяет начальным условиям:

$$u_1(x, y, z, 0)=4\pi a\mu(x, y, z), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}=0 \quad (\text{при } t=0).$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, t)&=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{\Sigma}\frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{r}\,d\sigma, \\ \Phi(x, y, z, t)&=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{r}\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ясно, что функция

$$u(x, y, z, t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\Phi(x, y, z, t) \tag{18}$$

дает решение задачи Коши для уравнения (10), так как из предыдущих формул следует, что при $t=0$ она сама обращается в $f(x, y, z)$, а ее производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ в $\varphi(x, y, z)$. Из формулы, дающей $\frac{\partial F}{\partial t}$, видно, что эта функция u выражается двойным интегралом, распространенным на поверхность сферы радиуса at с центром (x, y, z), и следовательно, значение u в момент времени t в некоторой точке (x, y, z) зависит только от значений f и φ на той части сферы радиуса at, которая расположена в области R, где произошло начальное возмущение.

По этим результатам легко отдать себе отчет в различных обстоятельствах этого явления. Предположим, что область R ограничена замкнутой поверхностью S. Пусть M — точка пространства, расположенная вне R, d и D — наименьшее и наибольшее расстояние от этой точки до точки поверхности S.

Пока t меньше $\frac{d}{a}$, сфера радиуса at с центром в точке M не достигает области R; $u(x, y, z, t)$ равна нулю, и молекула, расположенная в M, остается в покое до момента времени $t_1=\frac{d}{a}$, когда она начинает колебаться. Но начиная с момента, когда t превосходит значение $\frac{D}{a}$, поверхность сферы радиуса at с центром в точке M уже не имеет общих точек с областью R, и помещенная в точке M молекула опять приходит в состояние покоя.

Геометрическим местом точек, до которых достигает колебание в момент времени t, является поверхность, параллельная поверхности S и получающаяся, если на направлении внешних нормалей отложить длину at. Таким образом различные положения фронта волны представляют собою поверхности, параллельные S (§ 472), а величина a представляет скорость распространения. Через точку M последовательно проходят два фронта волны: передний фронт только что определенной волны и задний фронт волны — геометрическое место точек, получающихся, если на нормали к S отложить длину, равную D.

Когда область R неограниченна, то для точки M, расположенной вне R, всегда существует передний фронт волны, но заднего фронта волны в общем случае не будет, так как, начиная с момента, когда t превзошло величину $\frac{d}{a}$, $u(x, y, z, t)$ остается отличной от нуля (или от некоторого постоянного).

485. Цилиндрические волны. Если данные функции $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ не зависят от z, т. е. если начальное состояние одинаково вдоль прямой, параллельной оси Oz, то ясно, что сам интеграл (18) тоже не зависит от z. В самом деле, когда z изменяется при постоянных x, y, t, то сфера Σ только перемещается параллельно Oz, но двойные интегралы, распространенные на поверхность этой сферы, не меняют своего значения. Следовательно, в каждый момент времени состояние одинаково вдоль прямой, параллельной оси Oz, и мы можем ограничиться изучением того, что происходит в плоскости xy.

Формула (18) представляет тогда интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{19}$$

при $t=0$ обращающийся в $f(x, y)$, тогда как $\frac{\partial u}{\partial t}$ обращается в $\varphi(x, y)$. Двойные интегралы (17) распространены на поверхность сферы Σ радиуса $r=at$, с центром в точке с координатами $(x, y, 0)$. Замечая, что элемент площади $d\sigma$ имеет выражение

$$d\sigma=\frac{r\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}},$$

и что каждый элемент большого круга сферы, расположенного в плоскости xy, является проекцией двух симметричных элементов сферы, мы можем двойные интегралы по поверхности сферы заменить двойными интегралами, распространенными на площадь этого большого круга в плоскости xy. Формула (18) переходит в

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta^2)}}+\\ +\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint\limits_{\Gamma}\frac{f(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}}\right];\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

оба двойных интеграла распространены на круг Γ радиуса at, описанный из точки (x, y).

Предположим, что функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ равны нулю вне области R', ограниченной некоторой замкнутой кривой C, что соответствует случаю, когда область R, место начального возмущения, расположена внутри цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, причем это возмущение одинаково во всех точках прямой, параллельной образующим. Если точка (x, y) находится вне области R', $u(x, y, t)$ будет равна нулю до тех пор, пока at остается меньше кратчайшего расстояния d от этой точки до C, но, начиная с момента, когда t превзойдет $\frac{d}{a}$, круг Γ будет содержать по меньшей мере часть области R, и $u(x, y, t)$ в общем случае уже не вернется к нулевому (или постоянному) значению. Таким образом всегда имеется передний фронт волны, последовательные положения которого представляют собою цилиндрические параллельные поверхности, но *заднего фронта волны нет*. Другими словами, позади фронта волны имеет место бесконечная *диффузия* (*рассеяние*) звука. Ухо, находящееся в некоторой точке пространства, будет неограниченно получать звуковое впечатление, начиная с момента, когда фронт дойдет до него, но это впечатление со временем будет ослабевать. В самом деле, легко видеть, что при безграничном возрастании t оба двойных интеграла, входящих в формулу (20), стремятся к нулю, и можно совершенно строго доказать, что то же самое происходит и с частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Плоские волны. Рассмотрим еще более частный случай, когда обе функции $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ зависят только от x. Физически это предположение соответствует случаю, когда R есть область, заключенная между двумя плоскостями P_1 и P_2, перпендикулярными к Ox, а начальное возмущение одинаково во всех точках каждой плоскости, параллельной этим плоскостям. Как и выше, мы находим, что и функция $u(x, y, z, t)$ не зависит от y и от z, и формула (18) представляет интеграл уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{21}$$

обращающийся со своей производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t=0$ соответственно в $f(x)$ и $\varphi(x)$. Оба двойных интеграла, входящие в эту формулу, распространяются на поверхность сферы радиуса $r=at$, с центром в точке $(x, 0, 0)$. Замечая, что площадь пояса, заключенного между двумя перпендикулярными к Ox плоскостями с абсциссами α и $\alpha+d\alpha$, выражается через $2\pi at\,d\alpha$, непосредственно находим, что эти двойные интегралы приводятся к простым интегралам, и формула (18) переходит в

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at}f(\alpha)\,d\alpha\right]= \\ &=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

В изучаемом нами случае обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны нулю вне интервала (x_0, x_1). Предположим $x_0 < x_1 < x$. До тех пор, пока t меньше $\frac{x-x_1}{a}$, обе функции $f(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ в интервале интеграции равны нулю, и мы имеем $u=0$. Когда t превосходит $\frac{x-x_0}{a}$, можно заменить пределы интеграции через x_0 и x_1, и $u(x, t)$ *остается постоянной.* Так как впечатление, воспринимаемое ухом, зависит только от производных функции u, то мы видим, что фронт волны имеется как спереди, так и сзади. Эти результаты будут подтверждены далее (§ 492) непосредственным изучением уравнения (21).

486. Распространение теплоты в неограниченной среде. Аналитически задача ставится так*: найти интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{23}$$

---

* В действительности это частный случай задачи Коши (примечание в конце § 483), потому что гиперповерхность $t=0$ пространства (x, y, z, t) является характеристическим многообразием. С точки зрения физики эта задача соответствует следующей задаче. Предполагая, что пространство заполнено однородной жидкостью, температура которой в момент $t=0$ известна в каждой точке, найти температуру в любой момент времени. Можно еще предположить, что при 0° в пространство введено горячее тело, обладающее теми же свойствами в отношении теплоты, что и внешняя жидкость. Задача была бы совершенно иной, если бы в среду с температурой в 0° погрузить нагретое тело с другими свойствами и оставить его затем свободно охлаждаться, поддерживая температуру в окружающей среде при 0°. Мы рассмотрим два частных случая этой задачи в § 487 и 488.

правильный для всякой системы значений x, y, z и для $t>0$, обращающийся при $t=0$ в данную функцию $f(x, y, z)$. Для того чтобы произведение вида $XYZT$, где X, Y, Z и T зависят соответственно только от x, y, z и t, было интегралом уравнения (23), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T},$$

и следовательно, каждое из отношений, входящих в это уравнение, должно равняться постоянному. Если мы хотим, чтобы переменные x, y, z входили под знаком тригонометрических функций, для отношений типа $\frac{X''}{X}$ нужно взять отрицательные значения, и мы получим таким образом частный интеграл:

$$v=e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2t}\cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta(y-\mu)\cos\gamma(z-\nu), \tag{24}$$

зависящий от *шести* произвольных постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$. Выражение

$$w=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \tag{25}$$

тоже будет частным интегралом уравнения (23). Но w есть произведение простых интегралов типа

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2t}\cos\alpha(x-\lambda)\,d\alpha. \tag{26}$$

Значение этого интеграла легко выводится из одной ранее выведенной формулы (I, § 108), которую можно переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos 2by\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-b^2},$$

если в этой формуле заменить y через $\alpha a\sqrt{t}$ (причем α новое переменное интегрирования), b через $\frac{x-\lambda}{2a\sqrt{t}}$. Таким образом получим

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2t}\cos\alpha(x-\lambda)\,d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}$$

и еще две таких же формулы, дающих значения интегралов, подобных (26). Окончательно имеем:

$$w=\pi^{\frac{3}{2}}\frac{e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{t})^3}. \tag{27}$$

Новый интеграл w зависит уже только от трех произвольных постоянных λ, μ, ν. Выражение

$$u = \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w f(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \tag{28}$$

опять будет интегралом. Чтобы доказать, что это и есть требуемый интеграл, сделаем замену переменных

$$\lambda = x + 2a\sqrt{t}\,\xi, \quad \mu = y + 2a\sqrt{t}\,\eta, \quad \nu = z + 2a\sqrt{t}\,\zeta;$$

заменяя в формуле (28) w его значением, получаем:

$$\left.\begin{aligned} u = \pi^{-\frac{3}{2}} & \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2} f \times \\ & \times (x + 2a\sqrt{t}\,\xi,\ y + 2a\sqrt{t}\,\eta,\ z + 2a\sqrt{t}\,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

При $t = 0$ этот интеграл обращается в следующий:

$$\pi^{-\frac{3}{2}} f(x, y, z) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

т. е. в $f(x, y, z)$, потому что каждый из простых интегралов равен $\sqrt{\pi}$ (I, § 128).

Предположим, что функция $f(x, y, z)$ равна нулю всюду, кроме ограниченной области R пространства, где она *положительна*. Это предположение соответствует случаю, когда в пространство при $t = 0°$ вводится тело, занимающее область R, с температурой выше 0°. Тогда за область интеграции в формуле (28) можно взять самую область R, так как $f(\lambda, \mu, \nu)$ равна нулю вне этой области. Эта формула показывает нам, что как бы t ни было мало, u имеет положительное значение в каждой точке пространства. Отсюда следует, что распространение теплоты от нагретого тела в пространстве с температурой 0° происходит мгновенно, т. е. что в момент, который следует за введением нагретого тела, температура любой точки пространства начинает подниматься. Таким образом тепловой волны не существует, что можно было предвидеть a priori, так как уравнение (23) параболического типа и не допускает действительных характеристик, кроме гиперповерхностей $t = C$.

Формула (28) показывает также, что в вычислении температуры в точке (x, y, z) в любой момент времени участвует все горячее тело, потому что правая часть представляет собою тройной интеграл, распространенный на часть пространства, занятую этим телом. Поэтому наблюдатель, помещающийся в точке (x, y, z), испытывает в момент времени t тепловое ощущение, которое зависит от начального состояния *всего нагретого тела в целом*. При изучении распространения звука мы видим, напротив, что слуховое ощущение в момент t зависит только от начального состояния точек, расположенных на сфере радиуса at с центром в точке (x, y, z). По мнению Буссине, этот аналитический факт объясняет, почему зрение и слух доставляют нам о внешнем мире достаточно ясные сведения, в то время как тепловые явления приносят лишь смутные и неясные впечатления. Это происходит оттого, что законы оптических или акустических явлений выражаются уравнениями, решение которых содержит двойные интегралы, а тепловые явления протекают по законам, в решения уравнений которых входят тройные интегралы.

487. Задача о кольце. *Кольцом* называется нить очень малого поперечного сечения, образующая замкнутую окружность. Задается начальное распределение температуры в кольце и спрашивается, каково будет это распределение, если оставить кольцо свободно охлаждаться в течение произвольного промежутка времени. Уравнение задачи таково:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+au=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{30}$$

где a и k — положительные постоянные, t обозначает время, x — длину нити, которая отсчитывается вдоль ее оси, начиная с некоторого начала отсчета, а u — температуру слоя с абсциссой x в момент времени t. Мы предполагаем, что единица длины выбрана так, чтобы вся длина нити равнялась 2π. Полагая $u=ve^{-at}$, приводим уравнение (30) к следующему:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{31}$$

Требуется найти интеграл этого уравнения, определенный для всех положительных значений t и при $t=0$ обращающийся в заданную функцию $f(x)$, необходимо допускающую период 2π. Ясно, что функция v должна иметь тот же период.

Для разрешения этой задачи Фурье сначала замечает, что уравнение (31) допускает бесконечное множество простых решений, которые получаются при умножении некоторой функции от t на некоторую периодическую функцию от x периода 2π. Все эти решения имеют вид $e^{-n^2kt}(A\cos nx+B\sin nx)$, причем n — любое целое число, A и B — произвольные постоянные. При помощи этих простых решений можно образовать искомый интеграл в весьма общем случае, когда функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{32}$$

В самом деле, очевидно, что функция, представляемая рядом

$$v=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2kt}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{33}$$

формально удовлетворяет уравнению (31), а при $t=0$ этот ряд обращается в разложение функции $f(x)$.

Это рассуждение, конечно, недостаточно строго, но этот недостаток легко восполнить. Заметим сначала, что $|a_n|$ и $|b_n|$ имеют верхнюю границу M. Ряд (33) и ряды, получающиеся для $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, равномерно сходятся для каждого значения t, превосходящего некоторое положительное число τ. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить общий член этих рядов с членом того же номера сходящегося ряда $2M\sum n^2 e^{-n^2k\tau}$. Итак, соотношение (31) удовлетворяется для всякого значения $t>\tau$, а следовательно, и для любого положительного значения t, так как τ есть произвольное положительное число. Остается доказать, что, когда t стремится к нулю, а x остается постоянным, сумма ряда (33) имеет пределом сумму ряда (32), который предполагается сходящимся. Но если положить $q=e^{-kt}$, ряд (33) является целым рядом относительно q

$$v=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{33'}$$

у которого все показатели — точные квадраты. Когда t стремится к нулю по положительным значениям, то q стремится к единице, и по теореме Абеля сумма ряда (33') имеет пределом сумму этого же ряда, если положить в нем $q=1$, т. е. ряда (32).

Следует отметить, что соотношение (31) может и не выполняться при $t=0$, что, например, имеет место, если данная функция $f(x)$ не имеет второй производной *.

Примечание. Каждый член ряда (33') может быть разложен в целый ряд расположенный по степеням x. После замены каждого члена его разложением v представляется суммой двойного ряда, каждый член которого есть некоторая степень x. Этот двойной ряд *абсолютно сходится* для любого положительного значения t. В самом деле, пусть M есть верхняя грань абсолютных величин $|a_n|$ и $|b_n|$. Сумма модулей членов, заключенных в n-й строке таблицы, очевидно, меньше, чем $Mq^{n^2}e^{n\rho}$, причем ρ равно $|x|$. Но ряд, общий член которого равен $q^{n^2}e^{n\rho}$, сходится при $q<1$, каково бы ни было ρ. Отсюда следует, что *для любого положительного значения t* функция $v=F(x,t)$, представляющая тепловое состояние кольца в момент времени t, *есть целая функция от x*. Следовательно, произвольно выбранная непрерывная функция от x не может представлять теплового состояния кольца для времени, следующего за тем моментом, когда его оставили свободно охлаждаться.

488. Охлаждение сферы. Предположим, что сфера радиуса R погружена в среду температуры 0° и что начальная температура произвольной точки этой сферы является функцией только расстояния r от центра. В силу симметрии это же будет иметь место в любой момент времени. Температура u некоторой точки сферы в момент t есть функция переменных r и t, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{34}$$

Эта функция определена для любого положительного значения t и для любого значения r, заключенного между 0 и R, а когда t становится нулем, она должна обращаться в некоторую известную функцию $f(r)$, определенную от 0 до R. Кроме того, если допустить закон охлаждения Ньютона, эта функция u должна удовлетворять следующему условию на поверхности: при $r=R$ мы должны иметь $\frac{\partial u}{\partial r}+hu=0$, каково бы ни было t; h — некоторое положительное постоянное.

Если положить $u=\frac{v}{r}$, уравнение (34) упрощается и переходит в

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{35}$$

* Одна из теорем Вейерштрасса утверждает, что, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, сумма ряда (33) имеет своим пределом $f(x)$, когда t стремится к нулю по положительным значениям, причем a_n и b_n суть коэфициенты ряда Фурье, соответствующего функции $f(x)$ (см. Пикар, Traité d'Analyse, 2-е издание, т. I, стр. 283).

между тем как условие на поверхности становится

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1-hR}{R}v \quad (\text{при } r=R), \tag{36}$$

а новое начальное условие имеет вид $v=rf(r)$ при $t=0$.

Уравнение (35) тождественно с уравнением (31) задачи о кольце, но искомый интеграл должен удовлетворять уже совсем другому граничному условию. Для того чтобы решение вида

$$v=e^{-\mu^2 kt}(A\cos\mu r+B\sin\mu r)$$

было пригодно для новой задачи, нужно прежде всего, чтобы $\frac{v}{r}=u$ при $r=0$ сохраняло конечное значение, а следовательно, чтобы A равнялось нулю. Для того чтобы этот интеграл удовлетворял условию (36), нужно, кроме того, чтобы μ было корнем трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\mu R)=\frac{\mu R}{1-hR}. \tag{37}$$

Можно легко доказать, что это уравнение допускает бесчисленное множество положительных корней $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ В самом деле, полагая $\mu R=x$, мы приходим к изысканию точек пересечения кривой $y=\operatorname{tg}x$ с прямой $(1-hR)y=x$. Если, например, $1-hR$ положительно, — уравнение (37) имеет единственный корень между $\frac{(2n-1)\pi}{2R}$ и $\frac{(2n+1)\pi}{2R}$; этот корень превосходит $\frac{n\pi}{R}$, и разность двух последовательных корней превосходит $\frac{\pi}{2R}$. Предположим теперь, что функция $rf(r)$ в интервале $(0, R)$ разлагается в ряд вида:

$$rf(r)=A\sin(\mu_1 r)+A_2\sin(\mu_2 r)+\ldots+A_n\sin(\mu_n r)+\ldots, \tag{38}$$

где коэфициенты A_n постоянны. Ряд

$$v=A_1e^{-\mu_1^2 kt}\sin(\mu_1 r)+A_2e^{-\mu_2^2 kt}\sin(\mu_2 r)+\ldots \tag{39}$$

дает решение задачи. В самом деле, этот ряд равномерно сходится при $t\geqslant 0$, и если положить $e^{-kt}=q$, то для ряда $\sum A_n q^{\mu_n^2}\sin(\mu_n r)$ можно повторить рассуждения, посредством которых устанавливается теорема Абеля (I, § 182), а отсюда мы заключаем, что когда t стремится к нулю, v имеет пределом $rf(r)$. Для доказательства того, что ряды, получаемые из v почленным диференцированием, равномерно сходятся, стоит только повторить вычисления задачи о кольце. Единственная разница состоит в том, что последовательность целых чисел заменяется последовательностью возрастающих чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots$, в которой разность $\mu_n-\mu_{n-1}$ заключена между $\frac{\pi}{2R}$ и $\frac{3\pi}{2R}$. Возможность разложения функции $rf(r)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, в ряд вида (38) была строго установлена Коши* (см. ниже Упражнение 2).

* Oeuvres complètes, 1-re série, t. VII. См. также: E. Picard, Traité d'Analyse, t. II, p. 179—195.—H. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur. [Leçons redigées par Rouyer et Baire, гл. XI и следующие.]

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. *Задача, изученная Фурье.* Рассмотрим бесконечное тело, заключенное между двумя параллельными плоскостями B и C и плоскостью A, им перпендикулярной. Предполагается, что каждая точка M плоскости A поддерживается при постоянной температуре, которая является данной функцией $\varphi(x)$ одного только расстояния x этой точки от плоскости B, а все точки граней B и C поддерживаются при 0°. В конце концов устанавливается температурное равновесие. Найти конечную температуру $u(x, y)$ в точке P, расстояния которой от плоскостей B и A равны x и y.

Функция $u(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u = 0$; обращаться в $\varphi(x)$ при $y = 0$; равняться нулю, каково бы ни было y, при $x = 0$ и $x = l$ и быть очень малой при очень больших значениях y. Мы исходим из простого решения $e^{-\frac{m\pi y}{l}} \sin \frac{m\pi x}{l}$, удовлетворяющего последним условиям, и разлагаем функцию $\varphi(x)$ в ряд по синусам дуг, кратных $\frac{\pi x}{l}$.

2. Пусть μ, μ' — два различных корня уравнения (37). Доказать, что

$$\int_0^R \sin(\mu r) \sin(\mu' r)\, dr = 0.$$

Отсюда следует, что, предполагая ряд (38) равномерно сходящимся, можно определить его коэфициенты таким же способом, как и коэфициенты ряда Фурье.

ГЛАВА XXVI.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

I. ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, ОТНОСЯЩИХСЯ К УРАВНЕНИЮ $s=f(x, y)$.

489. Определение интеграла по данным Коши. Мы приступим к подробному изучению некоторого количества задач, относящихся к элементарному уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f(x,\ y). \tag{1}$$

Интеграл называется *правильным* в некоторой области, если в этой области он непрерывен и допускает непрерывные частные производные первого порядка. Функция $f(x, y)$ сама тоже предполагается непрерывной *. Поставим себе сначала целью определить интеграл, зная значения, которые он принимает на двух характеристиках различных систем, или, точнее, будем искать интеграл, который при $y=y_0$ обращается в данную функцию $\varphi(x)$, а при $x=x_0$ в другую известную функцию $\psi(y)$, причем обе эти функции удовлетворяют условию $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$. Если обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определены соответственно в интервалах (x_0, x_0+a) и $(y_0, y_0+\beta)$, искомый интеграл сам определен внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=x_0$, $x=x_0+a$, $y=y_0$, $y=$ $=y_0+\beta$, и мы можем тотчас написать его выражение, замечая, что двойной интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} d\xi \int\limits_{y_0}^{y} f(\xi,\ \eta)\,d\eta$ есть интеграл уравнения (1), обращающийся в нуль при $y=y_0$, каково бы ни было x, и при $x=x_0$, каково бы ни было y. Но мы разрешим задачу способом, который одинаково прилагается ко всем последующим задачам.

Предположим, для определенности, $a>0$, $\beta>0$, и пусть $ABCD$ есть прямоугольник, вершины которого имеют координаты $(x_0,\ y_0)$, (x_0+a, y_0), $(x_0+a, y_0+\beta)$, $(x_0, y_0+\beta)$. Возьмем внутри или на контуре этого прямоугольника некоторую точку M и опустим из нее перпендикуляры MP и MQ на стороны AB и AD. Всякий интеграл $z(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяет также соотношению:

$$\iint \frac{\partial^2 z(\xi,\ \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta=\iint f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{2}$$

---

* Оси Ox и Oy для простоты предполагаются прямоугольными, но результаты не зависят от этого предположения; это очевидно, если двойные интегралы, входящие в формулы, написать так, чтобы выявить пределы последовательных интеграций, подлежащих выполнению.

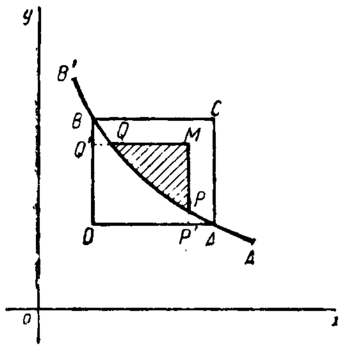
где оба двойных интеграла распространены на площадь прямоугольника $APMQ$. Но значение левой части есть (I, § 122) $z(x, y)+z(x_0, y_0)-z(x_0, y)-z(x, y_0)$. Для искомого интеграла $z(x, y_0)$ и $z(x_0, y)$ являются как раз данными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, и этот интеграл выразится так:

$$z(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x} d\xi \int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)\, d\eta. \tag{3}$$

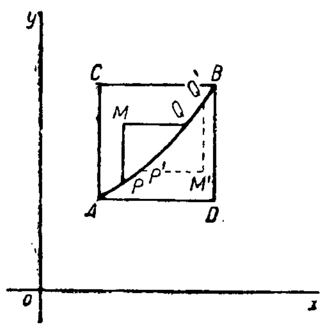
Очевидно, что полученная таким образом функция удовлетворяет поставленным условиям. Для того чтобы она была правильной, в прямоугольнике $ABCD$ нужно, кроме того, чтобы функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ имели непрерывные производные.

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, так же как и $\varphi'(x)$ и $\psi'(y)$, непрерывны всюду, кроме *конечного* числа значений x, заключенных между x_0 и $x_0+\alpha$, и конечного числа значений y между y_0 и $y_0+\beta$, то $z(x, y)$ правильна в прямоугольнике $ABCD$, за исключением конечного числа отрезков характеристик. Отсюда мы видим, что всякий разрыв интеграла или его производных в некоторой точке границы области дает себя знать во всей области. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ не имеют производной, $z(x, y)$ не является, собственно говоря, интегралом уравнения (1), если только не принять обобщенное определение для производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ (I, § 22).

Рассмотрим теперь дугу кривой AB (черт. 80a), которую прямая, параллельная каждой из осей, пересекает только в одной точке. За-



Черт. 80a.



Черт. 80b.

дача Коши может быть поставлена так: *определить интеграл уравнения* (1), *зная значения частных производных* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *во всех точках дуги* AB, *и значение самого интеграла в некоторой точке этой дуги.*

В силу допущений, сделанных относительно дуги AB, можно предполагать, что обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ вдоль AB являются соответственно данными функциями от x и от y, $\frac{\partial z}{\partial x}=\pi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\chi(y)$. Предположим еще, для определенности, что известно значение z_1

интеграла в точке A с координатами (x_0, y_0). Тогда значение этого интеграла в произвольной точке дуги AB с координатами (x, y) дается формулой:

$$z(x, y) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \pi(\xi)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} \chi(\eta)\, d\eta. \tag{4}$$

Итак, можно сказать, что предполагаются известными значения интеграла и двух его частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в любой точке дуги AB, причем эти три функции связаны соотношением (4). Интеграл, удовлетворяющий этим условиям, определен во всем прямоугольнике $ABCD$, включая стороны. В самом деле, пусть M — произвольная точка этого прямоугольника (черт. 80а). Прямые, параллельные осям, проведенные через M, встречают дугу AB соответственно в точках Q и P, и всякий интеграл уравнения (1) удовлетворяет соотношению:

$$\iint \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\, d\xi\, d\eta = \iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta; \tag{5}$$

здесь оба двойных интеграла распространены на площадь криволинейного треугольника PMQ. Прилагая к двойному интегралу в левой части формулу Грина, можно заменить его криволинейным интегралом $\int \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\eta$, взятым вдоль контура в прямом направлении, интегралом, который, очевидно, равен $z_M - z_P + \int_{QP} \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\eta$; для краткости мы обозначаем через z_M значение $z(x, y)$ в точке M с координатами (x, y). Для искомого интеграла мы должны иметь $\frac{\partial z}{\partial \eta} = \chi(\eta)$ вдоль AB. Следовательно, этот интеграл выразится так:

$$z_M = z_P - \int_{QP} \chi(\eta)\, d\eta + \iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

принимая во внимание соотношение (4), это равенство можно переписать так:

$$z(x, y) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \pi(\xi)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} \chi(\eta)\, d\eta + \iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{6}$$

Мы убеждаемся, что эта функция $z(x, y)$ является интегралом уравнения (1), удовлетворяющим условиям Коши, замечая, что двойной интеграл в правой части есть частный интеграл уравнения (1), обращающийся в нуль вместе со своими частными производными первого порядка в любой точке дуги AB (I, § 122, стр. 311).

Формулу (6) можно еще переписать в следующих эквивалентных видах:

$$z_M = z_P + \int\limits_{PQ} \chi(\eta)\, d\eta + \iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{6'}$$

$$z_M = z_Q + \int\limits_{QP} \pi(\xi)\, d\xi + \iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta; \tag{6''}$$

сюда входят только значения интеграла и одной из его производных вдоль дуги AB. Можно без труда удостовериться, что эти формулы прилагаются также и в том случае, когда дуга AB расположена так, как указано на черт. 80b; только придется переменить знак двойного интеграла.

Интеграл (6) будет правильным во всем прямоугольнике, если только функции $\pi(x)$ и $\chi(y)$ непрерывны в этой области. Если эти функции имеют конечное число точек разрыва, производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ будут разрывны вдоль некоторых отрезков характеристик. Точно так же, если задать значение интеграла $z = \Phi$ и частную производную $\frac{\partial z}{\partial x} = \pi(x)$ в каждой точке дуги AB, то, для того чтобы функция $z(x, y)$, представляемая формулой (6), была правильной, необходимо, чтобы разность $\Phi - \int\limits_{x_0}^{x} \pi(\xi)\, d(\xi)$ была функцией от y, допускающей вдоль дуги AB непрерывную производную.

Формулы, разрешающие задачу, дают место нескольким важным замечаниям.

1. Из этих формул с очевидностью явствует, что значение интеграла в точке M зависит только от значений, которые принимает функция и ее производные первого порядка вдоль дуги PQ, и, следовательно, значение функции $z(x, y)$ в точке, бесконечно близкой дуге AB, зависит только от значений z и ее производных на части дуги AB, *бесконечно близкой* к точке M. Эти формулы (6), (6′), (6″) дают значение z только внутри прямоугольника $ABCD$, но и сами данные Коши вдоль дуги AB определяют интеграл только в этой области. В самом деле, существует бесчисленное множество интегралов уравнения (1), правильных в некоторой области $\mathfrak{D}$, содержащей прямоугольник $ABCD$ и совпадающих с предыдущим интегралом в этой области. Чтобы уяснить это важное обстоятельство, продолжим дугу AB в двух направлениях так, чтобы получить дугу $A'B'$, удовлетворяющую тем же условиям, что и дуга AB, и зададим вдоль $A'B'$ две непрерывные функции соответственно от x и от y, совпадающие с $\pi(x)$ и $\chi(y)$ в части AB. Интеграл уравнения (1), который принимает значение z_0 в точке A и частные производные которого $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны этим функциям вдоль $A'B'$, является правильным в новом прямоугольнике $A'B'C'D'$ и совпадает с интегралом (6) внутри и на сторонах прямоугольника $ABCD$. Если первый интеграл допускает непрерывные частные производные до n-го порядка, то новые данные можно всегда выбрать так, чтобы сохранить непрерывность этих производных при выходе из прямоугольника $ABCD$.

2. Рассмотрим в частности уравнение $s=0$ и интеграл $Z(x, y)$ этого уравнения, который вдоль дуги AB принимает значения непрерывной функции Φ от параметра, определяющего положение точки на этой дуге, в то время как $\frac{\partial z}{\partial x}$ вдоль AB равна некоторой непрерывной функции $\Pi(x)$. Этот интеграл представляется формулой (6″), если положить $f=0$ и заменить $\pi(\xi)$ через $\Pi(\xi)$. Предположим, что вдоль AB обе функции Φ и $\Pi(x)$ могут быть разложены в ряды

$$\Phi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_i+\ldots$$
$$\Pi(x)=\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_i(x)+\ldots,$$

причем второй ряд *равномерно сходится*. Формула, дающая $Z(x, y)$, может тогда быть переписана так:

$$Z(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(\varphi_i)_Q+\int_{QP}\pi_i(\xi)\,d\xi\right]=\sum_{i=1}^{\infty}z_i(x, y), \tag{7}$$

где $z_i(x, y)$ есть интеграл, обращающийся вдоль AB в φ_i, тогда как $\frac{\partial z_i}{\partial x}$ равняется $\pi_i(x)$. Это примечание распространяется также на те задачи, которыми мы займемся в следующих параграфах.

3. Первая из разобранных нами задач может быть рассматриваема как предельный случай задачи Коши. В самом деле, если задать функцию $\varphi(x)$, в которую при $y=y_0$ обратится интеграл $z(x, y)$, то этим самым мы уже знаем производную $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)$ вдоль этой характеристики. Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ зависит еще от одного произвольного постоянного, но если, кроме того, известна функция $\psi(y)$, в которую при $x=x_0$ обращается $z(x, y)$, то $\frac{\partial z}{\partial y}$ уже известна при $x=x_0$, $y=y_0$, и следовательно, значение ее определено во всех точках характеристики $y=y_0$ (§ 474). Мы перейдем к рассмотрению других задач, в которых задается значение интеграла на некоторых дугах кривых, не являющихся характеристиками, а на других частях кривых задаются данные Коши.

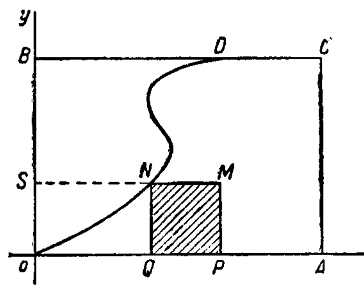
490. Смешанные задачи. Пусть $OABC$ — прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=a>0$, $y=0$, $y=b>0$, и OD дуга кривой, выходящая из начала координат и расположенная в этом прямоугольнике, причем прямая, параллельная оси Ox, проведенная через произвольную точку M этого прямоугольника, пересекает OD в единственной точке N. Эта дуга OD имеет уравнение $x=\pi(y)$, причем функция $\pi(y)$ непрерывна в интервале $(0, b)$. Поставим себе целью найти интеграл $z(x, y)$ уравнения (1), обращающийся при $y=0$ в некоторую функцию $\varphi(x)$ и в некоторую другую функцию $\psi(y)$, когда точка M попадает на дугу OD, причем обе функции φ и ψ удовлетворяют условию $\varphi(0)=\psi(0)$. Если обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определены соответственно в промежутках $(0, a)$ и $(0, b)$, то искомый интеграл определен в прямоугольнике $OACB$. В самом деле, для любого интеграла уравнения (1) мы имеем:

$$\iint_R \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta = \iint_R f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{8}$$

где оба двойных интеграла распространены на площадь прямоугольника $MNPQ$. Но двойной интеграл в левой части равен $z_M + z_Q - z_N - z_P$, а z_N, z_Q, z_P известны в силу условий, которым удовлетворяет рассматриваемый интеграл $z(x, y)$. Итак, для значения этого интеграла в точке M с координатами (x, y) мы имеем следующее выражение:

$$z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi[\pi(y)] + \iint_R f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta; \tag{9}$$

легко видеть, что когда точка M расположена между дугой OD и осью Oy, знак двойного интеграла следует переменить. Обратно, функция $z(x, y)$, представляемая этой формулой, удовлетворяет всем поставленным условиям. С одной стороны, очевидно, что когда точка M приходит на OA, эта функция обращается в $\varphi(x)$, а когда M приходит на дугу OD — в $\psi(y)$. С другой стороны, это интеграл уравнения (1), так как двойной интеграл в правой части представляет разность двух двойных интегралов, из которых один распространяется на прямоугольник $OPMS$, а другой на прямоугольник $OQNS$,



Черт. 81.

и этот последний интеграл зависит только от y. Этот интеграл $z(x, y)$ правилен в прямоугольнике $OACB$, если только функции φ, ψ, π имеют в соответствующих интервалах непрерывные производные. Отметим, что в начале координат частные производные p_0 и q_0 удовлетворяют соотношению:

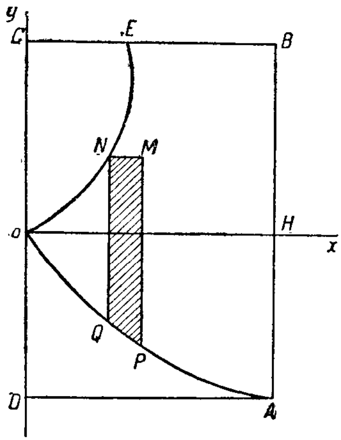
$$q_0 + p_0\pi'(0) = \psi'(0), \tag{10}$$

какова бы ни была функция $\varphi(x)$.

Предположим теперь, что известны значения интеграла и его производных вдоль дуги OA, расположенной под осью Ox, и значение только самого интеграла вдоль дуги OE, расположенной над осью Ox (черт. 82).

Прямая, параллельная каждой из осей в прямоугольнике $ODAH$, пересекает дугу OA только в одной точке, в то время как дуга OE пересекается в одной и только в одной точке всякой прямой, параллельной оси Ox в прямоугольнике $OHBC$. На дуге OA мы имеем данные

Коши, и следовательно, интеграл определен во всем прямоугольнике $ODAH$, в частности на OH. Зная значения интеграла на OH и на OE, мы приходим к предыдущей задаче, предполагая, конечно, что заданные для интеграла значения стремятся в точке O к одному и тому же пределу по обеим дугам OA и OE. Но здесь уместно сделать следующее существенное замечание. Обозначим через $z_1(x, y)$ интеграл, определенный в прямоугольнике $ODAH$ данными Коши вдоль OA, а через $z_2(x, y)$ интеграл, определенный в прямоугольнике $OHBC$, совпадающий с $z_1(x, y)$ вдоль OH и обращающийся вдоль дуги OE, уравнение которой $x = \pi(y)$, в некоторую известную функцию $z = \psi(y)$. Оба эти интеграла равны во всех точках отрезка OH, а следовательно, это же имеет место для их производных $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial z_2}{\partial x}$; но ничто не доказывает, что это будет справедливо для производных $\frac{\partial z_1}{\partial y}$, $\frac{\partial z_2}{\partial y}$, и при произвольных данных этого, вообще говоря, и не будет. Чтобы это имело место, достаточно, чтобы эти производные были равны в начале координат (конец § 473). Обозначим через



Черт. 82.

$$(p_1)_0,\ (q_1)_0,\ (p_2)_0,\ (q_2)_0$$

значения производных от z_1 и z_2 в начале координат; $(p_1)_0$ и $(q_1)_0$ известны в силу условий Коши, относящихся к дуге OA. Кроме того, имеем $(p_2)_0 = (p_1)_0$; для того чтобы было еще $(q_2)_0 = (q_1)_0$, необходимо и достаточно, в силу только что сделанного замечания, чтобы выполнялось условие

$$(q_1)_0 + (p_1)_0 \pi'(0) = \psi'(0).$$

Когда это условие выполнено, интеграл, совпадающий с $z_1(x, y)$ в прямоугольнике $ODAH$ и с $z_2(x, y)$ в прямоугольнике $OHBC$, является правильным во всем прямоугольнике $ABCD$. Его значение в точке прямоугольника $ODAH$ дается формулой (6). Можно непосредственно получить его значение в точке прямоугольника $OHBC$, исходя из соотношения

$$\iint \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi\, d\eta = \iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где оба двойных интеграла распространены на криволинейный четырехугольник $MNQP$, прилагая к левой части формулу Грина. Таким образом находим:

$$z_M = z_P + z_N - z_Q + \int_{PQ} \chi(\eta)\, d\eta + \iint_{MNQP} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{11}$$

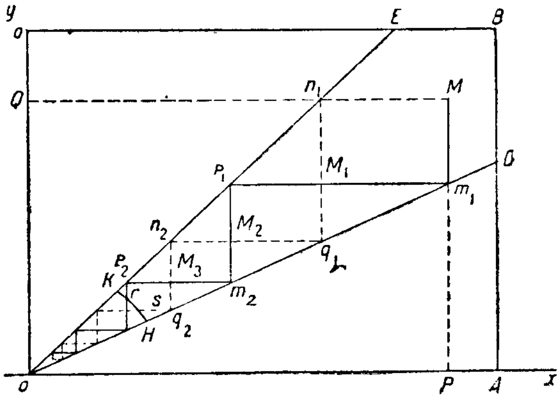
предполагая, что вдоль OA производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ обращается в $\chi(y)$. Когда точка M находится между дугой OE и OC, у двойного интеграла в правой части надо изменить знак.

Можно представить себе много других комбинаций для определения интеграла, например предположить, что известны данные Коши вдоль дуги AB и значения интеграла вдоль двух дуг AC и BD, выходящих из точек A и B. Задача о колебании струны (§ 493) представит нам пример такого рода.

491. Определение интеграла по его значениям вдоль двух кривых. Последняя из разобранных задач не была бы определенной, если задать только значения интеграла вдоль двух дуг OA и OE, потому что можно еще произвольно выбрать функцию, в которую обращается одна из частных производных от z вдоль OA. Но когда обе дуги расположены в одном и том же углу, составленном из характеристик, этого уже не будет. Рассмотрим в прямоугольнике $OABC$ две дуги кривых OD и OE, выходящие из начала координат, причем нижняя дуга OD пересекается только в одной точке прямою, параллельною Oy, а дуга OE пересекается в одной лишь точке прямою, параллельною Ox. Пусть будут $y=\pi(x)$, $x=\chi(y)$ уравнения этих двух дуг кривых, которые для большего удобства чертежа представлены отрезками прямых (черт. 83). Существует единственный интеграл уравнения (1), обращающийся вдоль OD в некоторую заданную функцию $\varphi(x)$, а вдоль OE в другую заданную функцию $\psi(y)$. Мы можем, очевидно, предположить, что эти функции равны нулю в начале координат.

Разберем сначала случай, когда $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ тождественно равны нулю.

Начиная с произвольной точки M прямоугольника $OABC$ чертим две ломаных линии. Одна из них L, начерченная сплошной чертой, получается, если провести через M прямую Mm_1, параллельную Oy, до ее пересечения в точке m_1 с OD, затем прямую m_1p_1, параллельную Ox, прямую p_1m_2, параллельную Oy, и так далее поочередно. Вторая ломаная линия L', обозначенная пунктиром, получается подобным же построением, начиная с прямой Mn_1, параллельной Ox. Ясно, что обе эти ломаные имеют бесконечное число сторон и все более и более приближаются к началу координат.



Черт. 83.

Пусть теперь I и I' — двойные интегралы $\iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, распространенные соответственно на части плоскости, заключенные с одной стороны, между Ox, линией L и ординатой MP; с другой стороны, между Oy, линией L' и прямой MQ. Ясно, что эти интегралы зависят соответственно только от x и от y и что обе ломаные L и L' сливаются, когда точка M попадает на одну из линий OD, OE. Функция

$$z(x, y)=\int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - I - I'$$

является, следовательно, интегралом уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=f(x, y)$, который обращается в нуль, когда точка M попадает на OD или на OE.

Для разбора того случая, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ произвольны, обозначим через $F(x, y)$ двойной интеграл $\int_0^x\int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, который представляет собою в прямоугольнике $OABC$ правильную функцию. Если $Z(x, y)$ — другой правильный интеграл уравнения (1), то имеем: $\frac{\partial (Z-F)}{\partial x \partial y}=0$, и вследствие этого, рассматривая последовательно все прямоугольники $Mn_1M_1m_1$, $M_1p_1M_2q_1$, $M_2n_2M_3m_2, \ldots$, можем написать ряд равенств (I, § 122):

$$\left.\begin{aligned} Z_M + Z_{M_1} - Z_{m_1} - Z_{n_1} &= F_M + F_{M_1} - F_{n_1} - F_{m_1} \\ Z_{M_1} + Z_{M_2} - Z_{p_1} - Z_{q_1} &= F_{M_1} + F_{M_2} - F_{p_1} - F_{q_1}, \\ Z_{M_2} + Z_{M_3} - Z_{m_2} - Z_{n_2} &= F_{M_2} + F_{M_3} - F_{m_2} - F_{n_2}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В этой последовательности равенств все известно, кроме величин Z_{M_1}, Z_{M_2}, ... Для исключения этих неизвестных достаточно сложить предыдущие равенства, предварительно умножив их поочередно на $+1$ и -1. Мы получаем таким образом выражение для Z_M посредством ряда, и можно показать, что, обратно, этот ряд сходится и представляет функцию, удовлетворяющую условиям задачи, правильную в прямоугольнике $OABC$*.

Примечание. Пересечем обе дуги OD и OE дугой HK (черт. 83). Если мы знаем данные Коши вдоль KH и значения интеграла вдоль HD и KE, то интеграл будет однозначно определен в области, которую легко определить. При данном чертеже значение интеграла в точке M получится, если к трем равенствам (12) прибавить формулу, полученную применением теоремы Грина к двойному интегралу

$$\iint \frac{\partial^2 (Z-F)}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta,$$

распространенному на площадь криволинейного пятиугольника $M_3p_2rsq_2$, и исключить неизвестные Z_{M_1}, Z_{M_2} и Z_{M_3}.

492. Прямолинейное движение газа. Рассмотрим цилиндрическую трубку, закрытую на одном конце O и бесконечную в другом направлении. Если при помощи стенки или подвижного поршня сообщить слою, находящемуся в O, некоторое движение, то столб воздуха, содержащийся в цилиндре, претерпевает известные изменения, изучаемые в акустике. Пусть MN есть слой газа, находящийся от O на расстоянии x, z — его смещение в момент времени t; z есть функция от x и от t, и физические соображения показывают, что z удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{13}$$

где a некоторое постоянное. Беря за новые переменные $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, приводим это уравнение к виду: $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\, \partial\eta} = 0$, предполагая, однако, что частные производные второго порядка от z непрерывны (I, § 63). Следовательно, в плоскости xt характеристики представляются двумя семействами прямых $x \pm at = C$.

Искомый интеграл должен удовлетворять следующим условиям: 1. В начальный момент $t=0$ стенка и столб воздуха находятся в покое, т. е. при $t=0$, $x \geqslant 0$ мы имеем: $z=0$, $\frac{\partial z}{\partial t}=0$; это — данные Коши вдоль положительной части оси Ox. 2. Начальному слою сообщается движение, закон которого известен, т. е. при $x=0$, $t \geqslant 0$ функция z должна быть равна некоторой функции $f(t)$,

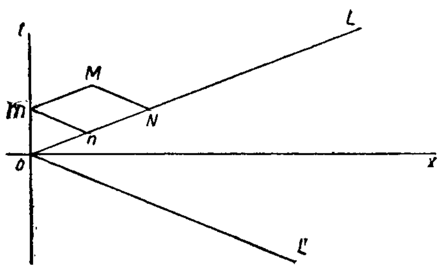
* E. Goursat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2-me série, t. VI, 1904, p. 117.

которая при $t=0$ обращается в нуль вместе со своей производной. Таким образом подлежащая разрешению задача является *смешанной задачей*, и решение ее легко получается на основании общей теории § 490. Проведем через начало координат две характеристики $x=\pm at$ (черт. 84). Так как z и $\frac{\partial z}{\partial t}$ равны нулю вдоль Ox, то z равно также нулю во всем угле между характеристиками LOL' и, в частности, вдоль OL. Для того чтобы иметь значение z в точке $M(x, t)$, расположенной над OL, проведем прямую Mm, параллельную OL, и MN, mn, параллельные второй характеристике. В силу вышеизложенных результатов мы должны иметь:

$$Z_M+Z_n=Z_N+Z_m,$$

и следовательно, $Z_M=Z_m$. Но ордината точки m равна $t-\frac{x}{a}$, а потому

$$Z_M=f\left(t-\frac{x}{a}\right).$$



Черт. 84.

В конечном счете искомый интеграл имеет следующее выражение:

$$z=0\left(\text{при } t\leqslant\frac{x}{a}\right),\quad z=f\left(t-\frac{x}{a}\right)\left(\text{при } t\geqslant\frac{x}{a}\right).$$

Мы видим, что слой, находящийся от начального слоя на расстоянии x, остается в покое до тех пор, пока $t\leqslant\frac{x}{a}$; итак, постоянное a представляет скорость распространения волны. Если по истечении промежутка времени T перестать действовать на начальный слой, функция $f(t)$ остается постоянной при $t\geqslant T$. Слой с абсциссой x, начинающий двигаться в момент $\frac{x}{a}$, начиная с момента $\frac{x}{a}+T$ возвращается в состояние покоя. Так как интеграл зависит только от $t-\frac{x}{a}$, то мы видим, что волна распространяется вся целиком, без внутренних изменений.

Подобную волну называют *правильной* *.

---

* В действительности уравнение (13) применимо лишь *к малым движениям* газов. Точное уравнение таково:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=[\psi'(p)]^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad \psi(p)=-\frac{1}{k}(1+p)^{\frac{1-m}{2}};\qquad (13')$$

здесь k и m два постоянных, из которых второе m больше единицы. От уравнения (13') переходим к упрощенному уравнению в тексте, предполагая, что изменения $\psi'(p)$ во время движения бесконечно малы, и заменяя $\psi'(p)$ через постоянное a. Но можно также разрешить предложенную задачу для уравнения (13'), т. е. найти интеграл $z(x, t)$ этого уравнения, непрерывный вместе со своими производными первого порядка $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial t}$ при $x\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, обращающийся в нуль при $t=0$, каково бы ни было x, и равный при $x=0$ некоторой функции $f(t)$, обращающейся при $t=0$ в нуль вместе с $f'(t)$. В силу физического смысла этой задачи точка положительной части оси Ox остается в покое до известного момента $t=\varphi(x)$, причем $\varphi(x)$ — положительная и возрастающая функция, т. е. имеется распространение посредством волн. Таким образом поверхность, представляющая искомый интеграл, совпадает с плоскостью $z=0$ в обла-

Рассмотрим теперь цилиндр, бесконечный в обоих направлениях. Мы будем предполагать, что начальное смещение было произведено в некоторой ограниченной части трубы. Аналитически это предположение сводится к тому, что при $t=0$ z и $\frac{\partial z}{\partial t}$ должны обращаться в данные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые равны нулю вне некоторого интервала $(0, l)$. Мы имеем здесь самую задачу Коши, так как данные расположены на всей оси Ox, а потому без всякого вычисления мы можем предусмотреть природу решения. Проведем характеристики через начало координат и через точку A с абсциссой l на оси Ox. Эти прямые разделяют плоскость на некоторое число областей (черт. 85). Пусть MP и MQ — две характеристики, проходящие через точку M. Мы видели, что значение интеграла в точке M выражается интегралом, взятым вдоль PQ, который зависит только от

сти, заключенной между осью Ox и кривой $t=\varphi(x)$. Выше этой кривой C искомое решение представляется поверхностью, касающейся плоскости xy вдоль C, и мы приходим к задаче Гюгонио (конец § 476).

Выше мы видели, что эта интегральная поверхность S есть развертывающаяся поверхность, касающаяся плоскости xy по кривой C, которая является характеристикой для решения $z=0$. В данном случае характеристики, расположенные на плоскости xy, образуют две системы прямых $t=t_0\pm\frac{x}{\psi'(0)}$. Так как кривая C должна проходить через начало координат и быть расположенной в угле xOt, если начальный слой начинает колебаться в момент $t=0$, то эта кривая C необходимо совпадает с прямой D, $x=t\psi'(0)$, и мы видим, что волна распространяется с постоянной скоростью $\psi'(0)$.

Чтобы закончить определение поверхности S, заметим, что она должна удовлетворять одному из двух уравнений $\psi(p)\pm q=\psi(0)$, так как диференциальные уравнения обеих систем характеристик уравнения (13') допускают две интегрируемые комбинации:

$$d[q+\psi(p)]=0, \quad d[(q-\psi(p)]=0.$$

Первая относится к характеристикам той системы, к которой не принадлежит прямая D, и следовательно, перед q мы должны брать знак $+$. Это уравнение первого порядка пишется еще так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(1+k\frac{\partial z}{\partial t}\right)^{\frac{2}{1-m}}-1, \tag{e}$$

и мы приходим к изысканию интеграла этого уравнения первого порядка, проходящего через плоскую кривую Γ плоскости zt, уравнение которой есть $z=f(t)$. Уравнение же (e) допускает полный интеграл, состоящий из плоскостей (II, § 444),

$$z=[(1+ka)^{\frac{2}{1-m}}-1]x+at+b,$$

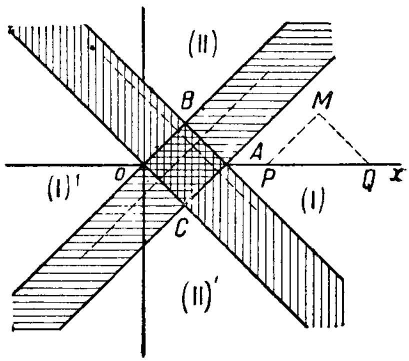
а искомый интеграл является огибающей этих плоскостей, когда между a и b установлено такое соотношение, что плоскость содержит касательную к кривой Γ (II, § 446). Уравнение плоскости P, проходящей через касательную к кривой Γ в точке с координатами $[0, \lambda, f(\lambda)]$, будет, как легко видеть, таково:

$$z=f(\lambda)+f'(\lambda)(t-\lambda)+\left\{[1+kf'(\lambda)]^{\frac{2}{1-m}}-1\right\}x.$$

Таким образом между прямой D и осью Ot искомая функция $z(x, t)$ представлена развертывающейся поверхностью, огибающей семейства плоскостей P, зависящего от переменного параметра λ.

Если часть ребра возврата этой поверхности проектируется в угол xOt, вторые производные r, s и t в этих точках обращаются в бесконечность. Этот разрыв соответствует *явлению Римана-Гюгонио*. (Для полного изучения прямолинейного движения газа см. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, chap. IV.)

данных $f(x)$ и $\varphi(x)$. Так как эти функции вправо от A и влево от O равны нулю, то искомый интеграл равен нулю в областях (I) и (I)'; в области (II) он равняется некоторому постоянному K, а в области (II)' тому же постоянному с обратным знаком, $-K$. В одной из областей, отмеченных только горизонтальной штриховкой, он сохраняет постоянную величину, когда M перемещается параллельно характеристике OB; следовательно, интеграл есть функция разности $x-at$. Точно так же в одной из областей, отмеченных только вертикальной штриховкой, он является функцией от $x+at$. Наконец, в параллелограмме $OCAB$ он зависит и от $x+at$ и от $x-at$ одновременно.



Черт. 85.

Эти выводы легко проверить вычислением. Общий интеграл уравнения (13) дается выражением $z=F(x+at)+\Phi(x-at)$, причем функции F и Φ определены с точностью до постоянного. Эти функции должны удовлетворять таким начальным условиям:

$$F(x)+\Phi(x)=f(x),$$

$$F'(x)-\Phi'(x)=\frac{1}{a}\varphi(x).$$

Можно предполагать, что $F(0)=\Phi(0)$, и, следовательно, положить

$$F(x)-\Phi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)\,dx=\psi(x);$$

искомый интеграл выражается так [§ 485, формула (22)]:

$$z=\frac{1}{2}[f(x+at)+\psi(x+at)]+\frac{1}{2}[f(x-at)-\psi(x-at)]. \qquad (14)$$

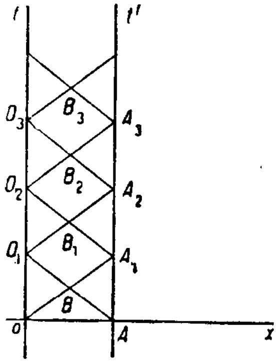
Напомним, что $f(x)$ равна нулю вне интервала $(0, l)$, что $\psi(x)$ равна нулю при $x\leqslant 0$ и сохраняет постоянную величину H при $x\geqslant l$. Прилагая последовательно к каждой из областей плоскости формулу (14), мы легко приходим снова к предыдущим значениям. Дадим, например, x постоянное значение $x_1>l$. Когда t изменяется от 0 до $\frac{x_1-l}{a}$, то $f(x_1+at)$ и $f(x_1-at)$ равны нулю, $\psi(x_1+at)$ и $\psi(x_1-at)$ имеют одну и ту же постоянную величину H. Следовательно, $z=0$. Когда t изменяется от $\frac{x_1-l}{a}$ до $\frac{x_1}{a}$, то $f(x_1+at)=0$, $\psi(x_1+at)=H$, и z выражается величиной

$$\frac{H}{2}+\frac{1}{2}[f(x_1-at)-\psi(x-at)].$$

Наконец, $f(x_1+at)$, $f(x_1-at)$ и $\psi(x_1-at)$ равны нулю при $t\geqslant\frac{x_1}{a}$ и $z=\frac{H}{2}$. Волна достигает слоя с абсциссой x_1 в момент времени $\frac{x_1-l}{a}$, и этот слой возвращается в состояние покоя в момент времени $\frac{x_1}{a}$, с постоянным перемещением $\frac{H}{2}$. Точно так же можно усмотреть, что существует правильная волна, распространяющаяся налево. В конечном счете все происходит так, как если бы начальное возмущение происходило от наложения двух правильных волн, которые разделяются и распространяются со скоростью a одна направо, другая налево

Можно также получить снова формулу (22) (гл. XXV), делая замену переменных: $x+at=\xi$, $x-at=\eta$, и прилагая к преобразованному уравнению общую формулу (6) (см. Упражнение 2).

493. Колеблющаяся струна. Упругая струна OA длины l закреплена в двух своих концах. Если отклонить струну от ее положения равновесия, то смещение z точки с абсциссой x в момент времени t, перпендикулярное струне, есть функция переменных x и t, также удовлетворяющая уравнению (13). Эта неизвестная функция z должна удовлетворять еще другим условиям: 1. *Начальным условиям*, выражающим, что в начальный момент $t=0$ для каждого значения x известны z и $\frac{\partial z}{\partial t}$, пусть $z=f(x)$ и $\frac{\partial z}{\partial t}=\varphi(x)$, причем эти функции равны нулю при $x=0$ и $x=l$. 2. *Граничным условиям*, выражающим, что концы струны закреплены, т. е. что z равно нулю при $x=0$ и $x=l$, каково бы ни было t. Мы опять имеем дело со смешанной задачей. Проведем через точку A на Ox с абсциссой l характеристику $x+at=l$ и прямую At', параллельную Ot, а через начало координат характеристику $x-at=0$ (черт. 86). На OA мы имеем данные Коши, а на прямых Ot и At' z должно быть равно нулю.



Черт. 86.

Данные Коши определяют интеграл в треугольнике OAB. Значения интеграла вдоль OO_1 и OB известны и определяют его в треугольнике OBO_1; точно так же в треугольнике ABA_1 интеграл определяется его значениями вдоль AB и AA_1 *. Значения же интеграла вдоль BO_1 и BA_1 определяют его в параллелограме $O_1BA_1B_1$; продолжая это рассуждение, мы шаг за шагом убеждаемся, что он определен во всей области, заключенной между параллельными прямыми Ot и At' над осью Ox.

Пусть $z=F(x+at)+\Phi(x-at)$ есть искомый интеграл. В силу начальных условий мы должны иметь:

$$F(x)+\Phi(x)=f(x), \quad F'(x)-\Phi'(x)=\frac{\varphi(x)}{a}.$$

Отсюда, как и выше, выводим:

$$F(x)=\frac{f(x)+\psi(x)}{2}, \quad \Phi(x)=\frac{f(x)-\psi(x)}{2},$$

полагая

$$\psi(x)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Эти формулы определяют обе функции $F(u)$, $\Phi(u)$ только для значений u, заключающихся между 0 и l. Для того чтобы решение имело смысл, необходимо, чтобы $F(u)$ была определена для всех положительных значений аргумента, а $\Phi(u)$ для всех отрицательных значений. Граничные условия дают следующие соотношения:

$$F(at)+\Phi(-at)=0, \quad F(l+at)+\Phi(l-at)=0,$$

* Эти интегралы непрерывно вместе с первыми производными переходят друг в друга вдоль AB и OB, так как из данных следует, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$ равны нулю в точках O и A (§ 490).

каково бы ни было t; заменяя at через u, это можно переписать так:

$$F(u)+\Phi(-u)=0, \quad F(l+u)+\Phi(l-u)=0, \quad u>0.$$

Из первого соотношения получаем $\Phi(-u)=-F(u)$, что показывает, что если функция $F(u)$ известна для положительных значений u, то функция $\Phi(u)$ будет определена для всех отрицательных значений u. Когда u изменяется от 0 до l, $l-u$ убывает от l до 0, и $\Phi(l-u)$ известна; поэтому $F(l+u)$ тоже известна, а следовательно, $F(u)$ определена от 0 до $2l$. С другой стороны, заменяя во втором из предыдущих соотношений u через $u+l$, получаем:

$$F(2l+u)+\Phi(-u)=0,$$

и следовательно

$$F(2l+u)=F(u).$$

Функция $F(u)$ допускает период $2l$ и определена таким образом для любого положительного значения u, а следовательно, это же имеет место для $\Phi(u)$ при $u<0$.

Способ Бернулли. Будем искать сначала частные интегралы уравнения (13) вида $U(x)V(t)$, причем функция $U(x)$ равна нулю при $x=0$, $x=l$. Мы должны иметь:

$$\frac{U''(x)}{U(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{V''(t)}{V(t)},$$

и следовательно общее значение этих отношений должно равняться некоторому постоянному K. Для того чтобы уравнение $U''(x)=KU(x)$ допускало частный интеграл, обращающийся в нуль при $x=0$ и при $x=l$, K должно быть вида $-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, где n целое число; таким образом мы получаем бесчисленное множество интегралов уравнения (13) желаемого вида:

$$z=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(C\cos\frac{an\pi t}{l}+C'\sin\frac{an\pi t}{l}\right),$$

каждый из которых определяет колебательное движение периода $\frac{2l}{na}$. При $t=0$ этот интеграл обращается в $C\sin\frac{n\pi x}{l}$, между тем как $\frac{\partial z}{\partial t}$ равняется

$$\frac{an\pi}{l}C'\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Предположим теперь, что обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в интервале $(0, l)$ разлагаются в ряды по синусам (I, § 204)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{15}$$

Очевидно, что ряд

$$z=\sum_{r=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{an\pi t}{l}+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{an\pi t}{l} \tag{16}$$

формально удовлетворяет уравнению (13) и при $t=0$ обращается в $f(x)$, тогда как ряд, получаемый почленным диференцированием по t, обращается в $\varphi(x)$. Это и есть решение Бернулли. Конечно, оно не является вполне строгим, но его можно оправдать, сделав несколько предположений весьма общего характера. В самом деле, внутри треугольника OAB мы можем представить искомое решение формулой (22) (гл. XXV, § 485). Отсюда следует, что если ряд для $\varphi(x)$

равномерно сходится, искомое решение в этом треугольнике представляется суммой ряда $\sum z_n$, членами которого являются интегралы, соответствующие начальным условиям:

$$z_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial z_n}{\partial t} = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{при } t=0);$$

следовательно, оно представляется рядом (16) Бернулли.

Из самого способа, которым значения интеграла в произвольной точке выводятся из значений, которые он принимает в треугольнике OAB, с очевидностью вытекает, что формула имеет смысл во всей области. Но в силу общего предложения относительно рядов Фурье, ряды (15) равномерно сходятся, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям Дирихле, будут непрерывны * (§ 489, Примечание II).

II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ. СПОСОБ РИМАНА.

494. Определение интеграла по его значениям на двух характеристиках. Мы займемся теперь опять для линейного уравнения общего вида гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f(x, y) \tag{17}$$

задачами, уже разрешенными для элементарного уравнения $s=f(x, y)$; функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ предполагаются непрерывными. Поставим себе сначала целью найти интеграл, который при $y=y_0$ обращается в заданную функцию $\varphi(x)$, а при $x=x_0$ в другую функцию $\psi(y)$, удовлетворяющую условию $\psi(y_0)=\varphi(x_0)$. Очевидно, можно предполагать $x_0=y_0=0$. Кроме того, для определенности будем считать, что $\varphi(x)$ определена в интервале $(0, \alpha)$, а $\psi(y)$ в интервале $(0, \beta)$, причем α и β — два положительных числа, и постараемся определить интеграл в прямоугольнике R, ограниченном прямыми $x=0$, $x=\alpha$, $y=0$, $y=\beta$. Способ, которому мы будем следовать, принадлежит Пикару**. Перепишем уравнение (17) в несколько более общем виде:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda\left[a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z\right] + f(x, y), \tag{18}$$

причем λ есть некоторый параметр, который потом в конечном результате положим равным единице, и будем сначала искать целый ряд относительно λ:

$$z = z_0(x, y) + \lambda z_1(x, y) + \lambda^2 z_2(x, y) + \ldots + \lambda^n z_n(x, y) + \ldots, \tag{19}$$

формально удовлетворяющий уравнению (18) и начальным условиям. При $\lambda=0$ уравнение (18) приводится к уже изученному уравнению $s=f(x, y)$, а следовательно, за первый член ряда (19) мы возьмем функцию

$$z_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta,$$

---

* См., например, Пикар, Traité d'Analyse (t. I, 2-e édition, p. 256).

** *Journal de Mathématiques* (1890). Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, I примечание IV тома.

которая при $y=0$ обращается в $\varphi(x)$, а при $x=0$ в $\psi(y)$. Остальные коэфициенты z_1, z_2, ... все должны обращаться в нуль при $x=0$, каково бы ни было y, и при $y=0$, каково бы ни было x. Приравнивая после подстановки коэфициенты при λ в обеих частях уравнения (18), получаем

$$z_1(x, y)=\int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_0}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial z_0}{\partial \eta}+c(\xi, \eta) z_0\right] d\eta,$$

и вообще $z_n(x, y)$ связана с $z_{n-1}(x, y)$ рекуррентной формулой

$$z_n(x, y)=\int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}+c(\xi, \eta) z_{n-1}\right] d\eta. \tag{20}$$

Полученный этим способом результат не отличается от того, какой мы получили бы, прилагая метод последовательных приближений, если взять за первое приближенное значение $z_0(x, y)$. Второе приближенное значение было бы, очевидно, $z_0+\lambda z_1$, третье $z_0+\lambda z_1+\lambda^2 z_2$, и вообще n-е приближенное значение выражалось бы как раз суммой n первых членов ряда (19). Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны в интервалах $(0, \alpha)$ и $(0, \beta)$ и имеют непрерывную производную, то все функции $z_n(x, y)$ будут правильными в прямоугольнике R.

Для доказательства сходимости ряда (19) мы воспользуемся следующим замечанием: пусть $z(x, y)$ — функция, правильная в R, а $Z(x, y)$ двойной интеграл:

$$Z(x, y)=\int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \eta}+c(\xi, \eta) z\right] d\eta.$$

Если заменить коэфициенты a, b, c другими положительными коэфициентами A, B, C, постоянными или переменными, но превосходящими абсолютные величины коэфициентов a, b, c, если заменить также $z(x, y)$ другой функцией $u(x, y)$, такой, что u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, являются в R преобладающими функциями для z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, то ясно, что $Z(x, y)$ заменится некоторой другой функцией $U(x, y)$, положительной в R вместе со своими производными, и что в любой точке этой области будут иметь место неравенства:

$$|Z|<U, \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial x}\right|<\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial y}\right|<\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Предположим теперь, что в любой точке R мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &|z_{n-1}(x, y)|<H\frac{(x+y)^n}{n!}, \quad \left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right|<H\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ &\left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right|<H\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

причем H положительное число. Пусть M верхняя граница абсолютных величин коэфициентов a, b, c в области R. В силу предыдущего замечания мы будем иметь:

$$|z_n(x, y)| < \int\limits_0^x \int\limits_0^y MH\left[2\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x+y)^n}{n!}\right] dx\, dy,$$

и подавно

$$|z_n(x, y)| < H\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left[2M + \frac{M(x+y)}{n+2}\right].$$

Точно так же мы видим, что $\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right|$ меньше, чем

$$H\frac{(x+y)^n}{n!}\left[2M + \frac{M(x+y)}{n+1}\right].$$

Таким образом неравенства (21) влекут за собой следующие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &|z_n(x, y)| < HK\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < HK\frac{(x+y)^n}{n!}, \\ &\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < HK\frac{(x+y)^n}{n!}. \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

Здесь K — положительное число, зависящее только от M и от размеров прямоугольника R. Если L — верхняя граница величин

$$|z_0|, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|,$$

то имеем сначала:

$$|z_1(x, y)| < 3MLxy, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3MLy, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3MLx,$$

и тем более:

$$|z_1(x, y)| < 3ML\frac{(x+y)^2}{1\cdot 2}, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3ML(x+y), \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3ML(x+y).$$

Отсюда, вычисляя шаг за шагом, выводим неравенства

$$|z_n(x, y)| < 3MLK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3MLK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}, \quad \ldots,$$

которые показывают, что ряд (19) и оба ряда, полученные диференцированием, равномерно сходятся в области R. Пусть $z(x, y)$ есть сумма ряда (19), представляющая собою в R правильную функцию. Чтобы доказать, что это действительно интеграл уравнения (18), достаточно заметить, что по самому способу определения последовательных коэфициентов $z_n(x, y)$ мы имеем:

$$S_n(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial S_{n-1}}{\partial \xi} + \ldots + c(\xi, \eta) S_{n-1} \right] d\eta,$$

где $S_n(x, y)$ есть сумма n первых членов ряда (19). Когда n неограниченно возрастает, S_{n-1}, $\frac{\partial S_{n-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial S_{n-1}}{\partial y}$ равномерно стремятся к $z(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, и в пределе получаем:

$$\left.\begin{aligned} z(x, y) &= \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \\ &+ \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z \right] d\eta. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Итак, функция $z(x, y)$ действительно является интегралом уравнения (18), и ясно, что она удовлетворяет также и начальным условиям. *Это единственный правильный в R интеграл, удовлетворяющий этим условиям.* В самом деле, пусть $Z(x, y)$ — некоторый интеграл, удовлетворяющий этим условиям. Положим:

$$Z - S_n = U_n(x, y),$$

причем S_n имеет прежний смысл. Сравнивая написанное выше выражение для S_n с формулой

$$Z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \lambda \int_0^x \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial Z}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) Z \right] d\xi\, d\eta,$$

получаем:

$$U_n(x, y) = \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial U_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial U_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) U_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\eta.$$

Из только что проделанных нами вычислений следует, что, когда n неограниченно возрастает, $U_n(x, y)$ стремится к нулю, какова бы ни была начальная функция $U_0(x, y)$, служащая для последовательного определения функций U_1, U_2, ..., U_n, ... z. Следовательно, интеграл $Z(x, y)$ является пределом $S_n(x, y)$, т. е. тождественен с $z(x, y)$.

Если функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ или их производные $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ имеют в интервалах $(0, a)$ и $(0, \beta)$ конечное число точек разрыва и при этом остаются ограниченными, то функции $z_1, z_2, \ldots$ попрежнему регулярны в области R, и интеграл $Z(x, y)$, представляемый рядом (19), тоже является правильным во всей области R, за исключением конечного числа отрезков характеристик (§ 489).

495. Функция Римана. Только что разобранную задачу можно всегда привести к частному случаю, когда обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ тождественно равны нулю; стоит только вместо z взять за неизвестную функцию $z-\varphi(x)-\psi(y)+\varphi(0)$. Это преобразование изменяет только выражение для $f(x, y)$, не влияя на коэфициенты a, b, c. Первый член $z_0(x, y)$ ряда (19) равен тогда двойному интегралу

$$z_0(x, y)=\int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Предположим, вообще, что z_{n-1} имеет вид:

$$z_{n-1}(x, y)=\int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, g_{n-1}(x, y;\ \xi, \eta)\, d\eta, \tag{23}$$

причем $g_{n-1}(x, y; \xi, \eta)$ есть непрерывная функция от двух пар переменных (x, y), (ξ, η), допускающая непрерывные частные производные по x и по y. Мы сейчас покажем, что и $z_n(x, y)$ может быть представлена в подобном же виде. Для приложения рекуррентной формулы (20) вычислим сперва $z_{n-1}(\xi, \eta)$, $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}$. По предположению, если заменить в (23) x, y, ξ, η через ξ, η, u, v, мы имеем:

$$z_{n-1}(\xi, \eta)=\int_0^\xi du \int_0^\eta f(u, v)\, g_{n-1}(\xi, \eta;\ u, v)\, dv,$$

и следовательно

$$\frac{\partial z_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi}=\int_0^\xi \int_0^\eta f(u, v) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \xi}\, du\, dv+\int_0^\eta f(\xi, v)\, g_{n-1}(\xi, \eta;\ \xi, v)\, dv,$$

$$\frac{\partial z_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta}=\int_0^\xi \int_0^\eta f(u, v) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \eta}\, du\, dv+\int_0^\xi f(u, \eta)\, g_{n-1}(\xi, \eta;\ u, \eta)\, du.$$

Выражение для $z_n(x, y)$ будет состоять из трех членов:

$$\left.\begin{aligned}
z_n(x, y)&=\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\xi du \int_0^\eta f(u, v)\, \times \\
&\times\left[a(\xi, \eta) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi, \eta) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \eta}+c(\xi, \eta)\, g_{n-1}\right] dv+ \\
&+\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\eta a(\xi, \eta) f(\xi, v)\, g_{n-1}(\xi, \eta;\ \xi, v)\, dv+ \\
&+\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\xi b(\xi, \eta) f(u, \eta)\, g_{n-1}(\xi, \eta;\ u, \eta)\, du.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Переставим порядок двух первых интеграций в первом тройном интеграле правой части, прилагая формулу Дирихле (I, § 121). Он примет вид:

$$\int_0^x d\xi \int_0^y dv \int_v^y a(\xi, \eta) f(\xi, v) g_{n-1}(\xi, \eta; \xi, v)\, d\eta,$$

или, переставляя буквы η и v:

$$\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_\eta^y a(\xi, v) f(\xi, \eta) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta)\, dv =$$

$$= \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta \left[\int_\eta^y a(\xi, v) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta)\, dv\right]. \tag{25}$$

Точно так же второй тройной интеграл формулы (24) может быть переписан в виде:

$$\int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta \left[\int_\xi^x b(u, \eta) g_{n-1}(u, \eta; \xi, \eta)\, du\right].$$

Что же касается четырехкратного интеграла, являющегося первым членом в выражении $z_n(x, y)$, то он распространяется на область в пространстве четырех измерений, определенную неравенствами:

$$0 \leqslant u \leqslant \xi \leqslant x, \quad 0 \leqslant v \leqslant \eta \leqslant y.$$

Если проинтегрировать сначала по переменным ξ, η, то для ξ пределы будут u и x, для η же v и y, а затем пределы будут 0 и x для u, 0 и y для v. Итак, этот четырехкратный интеграл можно переписать в эквивалентном виде:

$$\int_0^x du \int_0^y dv \int_u^x d\xi \int_v^y f(u, v)\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial g_{n-1}(\xi, \eta; u, v)}{\partial \xi} + \ldots\right] d\eta,$$

или, меняя местами обе пары переменных (u, v) и (ξ, η), еще в таком виде:

$$\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta\, f(\xi, \eta) \left\{\int_\xi^x du \int_\eta^y \left[a(u, v)\frac{\partial g_{n-1}(u, v; \xi, \eta)}{\partial u} + \ldots\right] dv.\right\}$$

Таким образом мы видим, что после всех этих преобразований выражение для $z_n(x, y)$ принимает следующий вид:

$$z_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta) g_n(x, y; \xi, \eta)\, d\eta, \tag{26}$$

причем мы положили:

$$g_n(x, y; \xi, \eta) = \int_\xi^x du \int_\eta^y \left[a(u, v)\frac{\partial g_{n-1}(u, v; \xi, \eta)}{\partial u} + \ldots\right] dv +$$

$$+ \int_\xi^x b(u, \eta) g_{n-1}(u, \eta; \xi, \eta)\, du + \int_\eta^y a(\xi, v) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta)\, dv. \tag{27}$$

Начиная от $g_0 = 1$, мы шаг за шагом вычислим по этой формуле $g_1(x, y;\ \xi, \eta)$, $g_2(x, y;\ \xi, \eta), \ldots$ Полученный результат можно сформулировать так:

Интеграл уравнения (18), *обращающийся в нуль при* $x = 0$, *каково бы ни было* y, *и при* $y = 0$, *каково бы ни было* x, *представляется в прямоугольнике* R *двойным интегралом*:

$$z(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, G(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)\, d\eta, \tag{28}$$

причем $G(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)$, *обозначает сумму ряда:*

$$G(x, y; \xi, \eta;\ \lambda) = 1 + \lambda g_1(x, y;\ \xi, \eta) + \ldots + \lambda^n g_n(x, y; \xi, \eta) + \ldots. \tag{29}$$

Эта функция G была введена Риманом совершенно другим способом, который будет изложен дальше. Этот ряд (29) можно было бы изучать непосредственно, как ряд (19), но его свойства легко выводятся из всех предыдущих результатов. Заметим сначала, что он формально удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y} = \lambda \left(a \frac{\partial G}{\partial x} + b \frac{\partial G}{\partial y} + cG\right). \tag{30}$$

В самом деле, предполагая, что ряд (29), а также ряды, которые выводятся из него диференцированием по x и по y, равномерно сходятся, мы можем в силу рекуррентной формулы (27) написать

$$G(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda) = \lambda \int_\xi^x du \int_\eta^y \left[a(u, v) \frac{\partial G(u, v; \xi, \eta; \lambda)}{\partial u} + \ldots\right] dv + $$
$$+ X(x; \xi, \eta, \lambda) + Y(y;\ \xi, \eta, \lambda).$$

Поэтому имеем также:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y} = \lambda \left[a(x, y) \frac{\partial G}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial G}{\partial y} + c(x, y)\, G\right].$$

С другой стороны, при $x = \xi$ этот ряд приводится к ряду

$$1 + g_1(\xi, y;\ \xi, \eta)\lambda + \ldots + g_n(\xi, y;\ \xi, \eta)\lambda^n + \ldots, \tag{31}$$

а рекуррентное соотношение (27) обращается здесь в

$$g_n(\xi, y;\ \xi, \eta) = \int_\eta^y a(\xi, v)\, g_{n-1}(\xi, v;\ \xi, \eta)\, dv.$$

Ряд (31) в точности представляет собою ряд, который мы получили бы, разлагая по степеням λ интеграл линейного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lambda a(\xi, y)\, w,$$

равный *единице* при $y = \eta$; интеграл этот есть $e^{\lambda \int_\eta^y a(\xi, v)\, dv}$. Точно так же можно усмотреть, что G обращается при $y = \eta$ в $e^{\lambda \int_\xi^x b(u, \eta) du}$. В предыдущем параграфе было доказано, что существует интеграл уравнения (30), обращающийся при $x=\xi$ в $e^{\lambda\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi, v)\,dv}$, а при $y=\eta$ в $e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x} b(u, \eta)\,du}$. Этот интеграл представляется равномерно сходящимся рядом, все члены которого в силу самого способа их получения являются голоморфными функциями от λ. Следовательно, весь ряд тоже представляет собою целую функцию от параметра λ, и его разложение по степеням λ необходимо совпадает с рядом (29). В итоге *функция* $G(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ *есть интеграл уравнения* (30), *удовлетворяющий вышенаписанным граничным условиям:*

$$G=e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x} b(u, \eta)\,du} \quad (\text{при } y=\eta), \qquad G=e^{\lambda\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi, v)\,dv} \quad (\text{при } x=\xi). \tag{32}$$

496. Первое решение задачи Коши. Займемся, далее, разрешением задачи Коши для общего уравнения (18) и поставим себе целью разложить по степеням параметра λ его интеграл, удовлетворяющий тем же условиям, что и в § 489. За первый член ряда мы возьмем интеграл $z_0(x, y)$ уравнения $s=f(x, y)$, удовлетворяющий данным условиям, и определим последовательные коэфициенты $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, ... при помощи рекуррентного закона:

$$z_n(x, y)=\pm\iint\limits_{PMQ}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}+c(\xi, \eta)\,z_{n-1}(\xi, \eta)\right]d\xi\,d\eta; \tag{33}$$

перед интегралом берется знак $+$ или знак $-$, в зависимости от того, расположена ли дуга AB, несущая данные, как на черт. 80a или как на черт. 80b. Область интегрирования, представляющая собою криволинейный треугольник PMQ, выбрана так, чтобы $z_n(x, y)$ вместе со своими частными производными первого порядка обращалась в нуль вдоль AB. Возьмем для определенности случай черт. 80a и предположим, что точка M лежит над дугой AB. Достаточно применить весьма простой прием, чтобы привести формулу (33) к рекуррентной формуле вида (20). В самом деле, построим три функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$, равные нулю в криволинейном треугольнике ABD ниже дуги AB, а выше AB равные, соответственно, коэфициентам $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$. Ясно, что если $u_{n-1}(x, y)=z_{n-1}(x, y)$, то двойной интеграл

$$u_n(x, y)=\iint\limits_{P'MQ'D}\left[\alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi}+\beta(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}+\gamma(\xi, \eta)u_{n-1}(\xi, \eta)\right]d\xi\,d\eta, \tag{33'}$$

распространенный на площадь прямоугольника $P'MQ'D$, будет равен нулю, если точка M лежит под дугой AB, и равен $z_n(x, y)$, если точка M лежит над AB. Несмотря на разрыв функций $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ вдоль AB, эта функция вместе с частными производными $\frac{\partial u_n}{\partial x}$,

$\frac{\partial u_n}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике R. Представим себе теперь, что мы хотим разложить по степеням λ интеграл вспомогательного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\lambda\left[\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma(x, y)\,u\right]+f(x, y), \qquad (34)$$

принимающий вдоль сторон AD и BD прямоугольника R те же значения, что и $z_0(x, y)$:

$$u(x, y)=u_0(x, y)+\lambda u_1(x, y)+\ldots+\lambda^n u_n(x, y)+\ldots \qquad (35)$$

Очевидно, что $u_0(x, y)=z_0(x, y)$, и коэфициенты $u_1, u_2, \ldots$ получаются шаг за шагом при помощи формулы (33').

Несмотря на разрыв коэфициентов α, β, γ вдоль дуги AB рассуждения § 494 применяются без изменения, и этот ряд, так же как и те, которые получаются из него почленным диференцированием по x и по y, равномерно сходится. Если точка $M(x, y)$ лежит ниже дуги AB, то, очевидно, $u_n(x, y)=0$, $n\geqslant 1$, и ряд (35) приводится к своему первому члену $u_0(x, y)$. Но если точка M находится выше AB, то в силу предыдущего замечания мы шаг за шагом удостоверяемся, что $u_1(x, y)=z_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)=z_n(x, y)$, и ряд (35) в криволинейном треугольнике ACB в точности представляет интеграл $z(x, y)$ уравнения (18), для которого

$$\delta=z(x, y)-z_0(x, y)$$

равна нулю вдоль AB, так же как и $\frac{\partial\delta}{\partial x}, \frac{\partial\delta}{\partial y}$. Итак, ряд, полученный методом последовательных приближений, представляет интеграл, удовлетворяющий над дугой AB условиям Коши. Точно так же можем убедиться, что этот ряд равномерно сходится и ниже AB. Рассуждение заканчивается, как выше.

В частном случае, когда искомый интеграл вместе с обоими частными производными должен равняться нулю вдоль AB, первый член ряда выражается интегралом

$$z_0(x, y)=\iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

и последовательными преобразованиями кратных интегралов, совершенно подобными тем, которые производились в § 495, мы шаг за шагом докажем, что $z_n(x, y)$ можно представить в виде:

$$z_n(x, y)=\iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\,g_n(x, y;\ \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

причем функции $g_1(x, y;\ \xi, \eta)$, $g_2(x, y;\ \xi, \eta)$, ... выводятся из

$$g_0(x, y;\ \xi, \eta)=1$$

посредством рекуррентной формулы (27). Таким образом значение интерала, удовлетворяющего этим условиям, представляется в точке M прямоугольника R двойным интегралом

$$z(x, y) = \iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\, G(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)\, d\xi\, d\eta, \tag{36}$$

где G — введенная выше функция Римана. В случае черт. 80b перед двойным интегралом надо поставить знак —.

Предположим теперь, что данные Коши вдоль AB произвольны. Пусть $\zeta(x, y)$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая этим условиям, например, интеграл уравнения $s = 0$. Полагая $z = \zeta + u$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \lambda\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) + f(x, y) + \lambda\left(a\frac{\partial \zeta}{\partial x} + b\frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\zeta\right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}, \tag{37}$$

и вдоль AB функция u должна равняться нулю, равно как $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Коэфициенты a, b, c не изменились, а потому функция Римана G одинакова для обоих уравнений (18) и (37). Следовательно, искомый интеграл выражается так:

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + \iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\, G(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \iint\limits_{PMQ} \left\{\lambda\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\,\zeta\right] - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\, \partial \eta}\right\} G\, d\xi\, d\eta. \tag{38}$$

Точно так же, взяв за область интегрирования в двойном интеграле прямоугольник $MQ'DP'$, получим интеграл, принимающий те же значения, что и данная функция $\zeta(x, y)$, вдоль AD и BD.

К формуле (36) можно очень легко притти синтетическим способом. Мы видели (II, § 401), что интеграл линейного диференциального уравнения с правой частью $F(y) = f(x)$, который обращается вместе со своими $n-1$ первыми производными в нуль при $x = x_0$, представляется определенным интегралом

$$\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

где $\varphi(x, \alpha)$ — некоторая определенная функция от x и от α. По аналогии постараемся à priori определить такую функцию $\varphi(x, y;\ \xi, \eta)$, чтобы двойной интеграл

$$z(x, y) = \iint\limits_{PMQ} f(\xi, \eta)\, \varphi(x, y;\ \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{39}$$

распространенный на площадь треугольника PMQ, был интегралом уравнения (18). При вычислениях мы будем предполагать, что функция φ непрерывна и допускает непрерывные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$. Производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ будет состоять из двух членов, из которых первый получается обычной формулой диференцирования под знаком интеграла, а второй происходит от изменения области интегрирования. Для подсчета этого последнего члена заметим, что, когда x получает приращение $\Delta x > 0$, область интегрирования увеличивается на полосу ширины Δx

с высотою, равной MP (черт. 80), и главная часть значения двойного интеграла, распространенного на эту полосу, очевидно, равна

$$\Delta x \int_{PM} f(x, \eta)\, \varphi(x, y;\, x, \eta)\, d\eta.$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\xi\, d\eta + \int_{PM} f(x, \eta)\, \varphi(x, y;\, x, \eta)\, d\eta.$$

Эту формулу можно было бы также установить элементарными вычислениями, выявив переменные пределы в двойном интеграле (39). Точно так же находим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\xi\, d\eta + \int_{QM} f(\xi, y)\, \varphi(x, y;\, \xi, y)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\, d\xi\, d\eta + \int_{PM} f(x, \eta)\, \frac{\partial}{\partial y}\, [\varphi(x, y;\, x, \eta)]\, d\eta +$$
$$+ \int_{QM} f(\xi, y)\, \frac{\partial}{\partial x}\, [\varphi(x, y;\, \xi, y)]\, d\xi + \varphi(x, y;\, x, y)\, f(x, y).$$

Для того чтобы функция $z(x, y)$, представляемая формулой (39), была интегралом уравнения (18), какова бы ни была функция $f(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы после подстановки члены под различными знаками интеграла были тождественны, равно как и члены вне знака интеграла, т. е. чтобы было

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \lambda \left[a(x, y)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x, y)\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c(x, y)\, \varphi\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\, [\varphi(x, y;\, x, \eta)] = \lambda a(x, y)\, \varphi(x, y;\, x, \eta),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\, [\varphi(x, y;\, \xi, y)] = \lambda b(x, y)\, \varphi(x, y;\, \xi, y), \quad \varphi(x, y;\, x, y) = 1.$$

Эти условия тождественны с условиями, определяющими функцию

$$G(x, y;\, \xi, \eta;\, \lambda).$$

В самом деле, первое выражает, что $\varphi(x, y;\, \xi, \eta)$ есть интеграл однородного уравнения (30). Что же касается трех последних, то из них мы выводим, что

$$\varphi(x, y;\, x, \eta) = e^{\lambda \int_{\eta}^{y} a(x, v)\, dv}, \quad \varphi(x, y;\, \xi, y) = e^{\lambda \int_{\xi}^{x} b(u, y)\, du}.$$

Достаточно заменить x через ξ в первом из этих соотношений, и y через η во втором, чтобы вернуться к условиям (32).

497. Сопряженное уравнение. Риман разрешил эту же задачу совершенно другим методом, основанным на теории сопряженного уравнения*. Пусть дано линейное и однородное уравнение второго порядка

$$\mathfrak{F}(z) = A\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + C\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\, \frac{\partial z}{\partial x} + E\, \frac{\partial z}{\partial y} + Fz. \tag{40}$$

---

* *Göttingen Abhandlungen*, t. VIII, 1860; „Oeuvres", p. 145. Смотреть также гл. IV II тома „Теории поверхностей" Г. Дарбу (см. Упражнение 5). Метод, который Риман прилагал только к уравнению частного вида, был распространен Г. Дарбу на общее уравнение вида (18).

Умножив каждый член на одну и ту же функцию $u(x, y)$ и проинтегрировав по частям столько раз, сколько возможно, получим последовательность тождеств:

$$
\begin{aligned}
Au\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[Au\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial (Au)}{\partial x} z\right] + z\frac{\partial^2(Au)}{\partial x^2},\\
Bu\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(Bu\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[z\frac{\partial (Bu)}{\partial y}\right] + z\frac{\partial^2 (Bu)}{\partial x\,\partial y},\\
Cu\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[Cu\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial (Cu)}{\partial y} z\right] + z\frac{\partial^2 (Cu)}{\partial y^2},\\
Du\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(Duz) - z\frac{\partial (Du)}{\partial x},\\
Eu\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(Euz) - z\frac{\partial (Eu)}{\partial y},\\
Fuz &= z(Fu),
\end{aligned}
$$

а отсюда выводим следующее соотношение, имеющее место для функций u и z любого вида:

$$u\mathfrak{F}(z) - \mathfrak{G}z(u) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}. \tag{41}$$

Здесь мы положили:

$$\mathfrak{G}(u) = \frac{\partial^2 (Au)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (Bu)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 (Cu)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Du)}{\partial x} - \frac{\partial (Eu)}{\partial y} + Fu, \tag{42}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
H &= Au\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial (Au)}{\partial x} - z\frac{\partial (Bu)}{\partial y} + Duz,\\
K &= Bu\frac{\partial z}{\partial x} + Cu\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial (Cu)}{\partial y} + Euz.
\end{aligned}
\right\} \tag{43}
$$

Уравнение $\mathfrak{G}(u) = 0$ называется *сопряженным* уравнением для уравнения (40).

Можно было бы проверить непосредственным вычислением, что между этими двумя уравнениями имеется взаимность, что также является следствием тождества (41) (II, § 404). Заметим, что в этом тождестве можно заменить H через $H + \frac{\partial \theta}{\partial y}$ и K через $K - \frac{\partial \theta}{\partial x}$, где $\theta(x, y)$ — произвольная функция*.

* Определение сопряженного уравнения можно распространить на линейное уравнение с любым числом переменных. Для уравнения с n переменными

$$\mathfrak{F}(z) = \sum a_{ik}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + cz = 0$$

сопряженным будет уравнение

$$\mathfrak{G}(u) = \sum \frac{\partial^2 (a_{ik}u)}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum \frac{\partial (b_i u)}{\partial x_i} + cu = 0,$$

Двойной интеграл $\iint [u\mathfrak{F}(z) - z\mathfrak{G}(u)]\,dx\,dy$, распространенный на область, в которой функции z и u непрерывны вместе со своими производными до второго порядка, может быть заменен в силу тождества (41) криволинейным интегралом

$$\int H\,dy - K\,dx, \tag{44}$$

взятым в прямом направлении вдоль контура Г, ограничивающего эту область. В частности, если z и u являются соответственно интегралами уравнения (40) и сопряженного с ним, правильными в некоторой области, то криволинейный интеграл (44), взятый вдоль контура этой области, всегда равен нулю.

498. Способ Римана. Приложим этот результат к линейному уравнению гиперболического типа, которое мы теперь напишем так:

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0. \tag{45}$$

В этом частном случае имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0, \\ H &= auz - z\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad K = buz + u\frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Пусть $z(x, y)$ будет интеграл уравнения (45)*, удовлетворяющий условиям Коши вдоль некоторой дуги AB (черт. 80а), а $u(x, y)$ — произвольный интеграл сопряженного уравнения, правильный в прямоугольнике $ABCD$. Заменяя под знаком интеграла буквы x и y через ξ и η, имеем в силу общего предложения:

$$\int_{QP} H\,d\eta - K\,d\xi + \int_{PM} H\,d\eta - \int_{MQ} K\,d\xi = 0, \tag{47}$$

и мы имеем тождество

$$u\mathfrak{F}(z) - z\,\mathfrak{G}(u) = \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial M_n}{\partial x_n};$$

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ суть билинейные функции относительно z, u и их производных первого порядка. Выражения для них получаются из тождеств:

$$U\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_k} - V\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_i}\right),$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x_i} + V\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial (UV)}{\partial x_i}.$$

Примеры мы увидим впоследствии (§ 501, 528, 534).

* Для простоты предполагаем $f(x, y) = 0$. Если бы f не равнялось нулю, мы бы имели еще один член, который в выражении интеграла легко восстановить.

причем в H и K была сделана та же подстановка; точка M есть точка прямоугольника $ABCD$ с координатами x, y. По предположению, нам известно значение искомого интеграла $z(\xi, \eta)$ и его частных производных вдоль дуги AB, а $u(\xi, \eta)$ есть определенное решение сопряженного уравнения. Следовательно, первый криволинейный интеграл, взятый вдоль дуги QP, является известной функцией от координат x, y точки M. Напротив, кажется, что криволинейные интегралы вдоль PM и вдоль MQ не могут быть вычислены без знания значений z вдоль этих прямых. Прием Римана как раз и состоит в таком выборе функции u, что эти интегралы исключаются. Мы имеем:

$$\int_{MQ} K\,d\xi = \int_{MQ} \left(buz + u\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) d\xi.$$

Интегрируя по частям, легко получаем:

$$\int_{MQ} K\,d\xi = (uz)_M^Q + \int_{MQ} z\left(bu - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) d\xi,$$

и общая формула (47) дает нам

$$(uz)_M = (uz)_Q + \int_{MQ} z\left(bu - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) d\xi - \int_{PM} z\left(au - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) d\eta + \\ + \int_{PQ} H\,d\eta - K\,d\xi. \tag{48}$$

Для того чтобы интегралы, в которые входят неизвестные значения z вдоль PM и MQ, исчезли, достаточно за $u(\xi, \eta)$ взять интеграл сопряженного уравнения (в котором x и y заменены через ξ и η), удовлетворяющий следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, y) = b(\xi, y)\, u(\xi, y), \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} u(x, \eta) = a(x, \eta)\, u(x, \eta).$$

Но $u(\xi, y)$ и $u(x, \eta)$ представляют соответственно функции от ξ и η, в которые обращается этот интеграл вдоль MQ и MP. Обозначим через u_M значение этого интеграла, когда точка (ξ, η) приходит в M. Тогда для того, чтобы в формуле (48) исчезли интегралы вдоль MP и MQ, необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

$$u(\xi, y) = u_M e^{\int_x^{\xi} b(t, y)\, dt}, \qquad u(x, \eta) = u_M e^{\int_y^{\eta} a(x, v)\, dv}.$$

Предполагая $u_M = 1$, обозначим определенную таким образом функцию от двух пар переменных (x, y), (ξ, η) через $u(x, y; \xi, \eta)$. Рассматриваемая как функция переменных (ξ, η), она представляет собою решение сопряженного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} - a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} - b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \left[c(\xi, \eta) - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta}\right] u(\xi, \eta) = 0.$$

При $\xi = x$ она обращается в $e^{\int_y^\eta a(x,v)\,dv}$, а при $\eta = y$ равна $e^{\int_x^\xi b(t,y)\,dt}$; следовательно, при $\xi = x$, $\eta = y$ она равна единице. Если мы предположим, что этот интеграл сопряженного уравнения уже определен, то формула (48) даст нам значение в точке (x, y) интеграла, удовлетворяющего вдоль дуги условиям Коши:

$$z_M = (uz)_Q + \int_{QP} uz\,(b\,d\xi - a\,d\eta) + \int_{QP} u\frac{\partial z}{\partial \xi}\,d\xi + z\frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\eta. \tag{49}$$

В эту формулу входят только значения z и $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ вдоль AB. Принимая во внимание тождество

$$(uz)_Q - (uz)_P = \int_P^Q \frac{\partial (uz)}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial (uz)}{\partial \eta}\,d\eta,$$

мы можем заменить формулу (49) одной из двух следующих формул:

$$z_M = (uz)_P + \int_{PQ} uz\,(a\,d\eta - b\,d\xi) + \int_{PQ} u\frac{\partial z}{\partial \eta}\,d\eta + z\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\xi, \tag{49'}$$

$$z_M = \frac{(uz)_P + (uz)_Q}{2} + \int_{PQ} uz\,(a\,d\eta - b\,d\xi) + \frac{1}{2}\int_{PQ} u\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\,d\eta - \frac{\partial z}{\partial \xi}\,d\xi\right) + $$
$$+ \frac{1}{2}\int_{PQ} z\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\xi - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)d\eta. \tag{49''}$$

Вторая из них более симметрична, но зависит от значений функции z и двух ее производных вдоль AB.

Во всех этих формулах точка (x, y) считается неподвижной, а переменными интегрирования являются ξ и η, так что переменные входят под знаком интеграла только через посредство функции u и ее производных. Относительно этих формул можно повторить все те замечания, которые были сделаны по поводу уравнения $s = 0$ (§ 489). В этом частном случае функция Римана $u(x, y;\ \xi, \eta)$ равна единице.

Когда дуга AB совпадает с ломаной линией ADB, эти формулы остаются приложимыми. Тогда точки P и Q приходят в P' и Q', и формула (49'), например, дает

$$z_M = (uz)_{P'} + \int_{P'D} \left(z\frac{\partial u}{\partial \xi} - buz\right)d\xi + \int_{DQ'} u\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + az\right)d\eta.$$

Интегрируя по частям выражение $z\frac{\partial u}{\partial \xi}$, можем это переписать еще так

$$z_M = (uz)_D - \int\limits_{P'D} u\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + bz\right) d\xi + \int\limits_{DQ'} u\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + az\right) d\eta. \tag{50}$$

Для вычисления z_M достаточно согласно общей теории знать значения z вдоль ломаной линии ADB. В самом деле, так как вдоль AD $z(x, y)$ есть известная функция от x, то $\frac{\partial z}{\partial x}$ вдоль AD известна, и по той же причине $\frac{\partial z}{\partial y}$ представляет собою вдоль DB известную функцию от y.

Пусть x_1, y_1 — координаты точки D. Обозначим через

$$z(x, y;\ x_1, y_1)$$

интеграл уравнения $\mathfrak{F}(z) = 0$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$z(x, y_1;\ x_1, y_1) = e^{-\int\limits_{x_1}^{x} b(t, y_1)\,dt}, \quad z(x_1, v;\ x_1, y_1) = e^{-\int\limits_{y_1}^{y} a(x_1, v)\,dv}.$$

В точке D этот интеграл равен единице, и если заменить x, y через ξ, η, он удовлетворяет двум соотношениям соответственно вдоль AD и BD:

$$bz + \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \quad az + \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Если за z взять этот интеграл, то формула (50) обращается в $z_M = u_D$; т. е. мы имеем:

$$z(x, y;\ x_1, y_1) = u(x, y;\ x_1, y_1). \tag{51}$$

Заменим x_1, y_1 соответственно через ξ, η. Мы видим, что функция $u(x, y;\ \xi, \eta)$, рассматриваемая как функция от x и y, является интегралом предложенного уравнения, удовлетворяющим условиям, совершенно подобным тем, которые определяют его, когда он рассматривается как функция от (ξ, η), так как, при переходе от данного уравнения к сопряженному, a и b нужно заменить через $-a$ и $-b$. Таким образом знание этой функции $u(x, y;\ \xi, \eta)$ позволяет разрешить задачу Коши также и для сопряженного уравнения, и можно сказать, что *интегрирование линейного уравнения и интегрирование сопряженного с ним уравнения представляют собою две эквивалентные задачи*.

Последние условия, определяющие $u(x, y;\ \xi, \eta)$, тождественны условиям, определяющим функцию $G(x, y;\ \xi, \eta)$, когда λ предполагается равной -1. В силу этого легко убедиться в тождественности обоих решений. В самом деле, предполагая $f(x, y)$ равной нулю и заменяя G через $-u$, перепишем формулу (38) в виде

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + \iint\limits_{PMQ} \mathfrak{F}[\zeta(\xi, \eta)]\, u(x, y;\ \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{38'}$$

Достаточно теперь применить к этому двойному интегралу общую формулу (44), которая приводит его к криволинейному интегралу, и произведенные только что преобразования дадут в точности решение Римана. В самом деле, значения ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ вдоль дуги AB по предположению равны значениям искомого интеграла и его производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ вдоль той же дуги. Можно только отметить, что решение задачи Коши, которое дается формулой (38) в виде двойного интеграла, не предполагает существования сопряженного уравнения, т. е. существования производных $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial y}$.

499. Уравнения с постоянными коэфициентами. Всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэфициентами допускает в качестве характеристик два семейства прямых (§ 482). Если отнести уравнение к его характеристикам, то коэфициенты a, b, c в приведенном виде (45) тоже можно предполагать постоянными (I, § 63). Полагая затем $z = ue^{-bx-ay}$, получаем уравнение, не содержащее производных первого порядка, в котором коэфициент при u остается постоянным. Итак, всякое уравнение рассматриваемого рода может быть приведено к простому виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + cz = 0, \tag{52}$$

причем c постоянный коэфициент.

Если c не равно нулю, то замена x через kx позволяет еще дать этому коэфициенту произвольную величину, например ± 1. Уравнение (52) представляет после элементарного уравнения $s = 0$ один из наиболее простых типов, к которым прилагается способ Римана. В самом деле, для этого уравнения мы умеем найти функцию $u(x, y; \xi, \eta)$, так как достаточно найти интеграл, обращающийся в единицу при $x = \xi$, каково бы ни было y, и при $y = \eta$, каково бы ни было x. Положим $v = (x - \xi)(y - \eta)$ и будем искать частный интеграл уравнения (52), зависящий только от v, $z = \varphi(v)$. Мы придем к уравнению второго порядка

$$v\varphi''(v) + \varphi'(v) + c\varphi(v) = 0,$$

которое является одним из видов уравнения Бесселя (II, § 414). Мы видели, что это уравнение допускает в качестве интеграла целую функцию от v, которая при $v = 0$ равна *единице*, и этот интеграл имеет выражение $J(-cv)$, где $J(t)$ есть целый ряд:

$$J(t) = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{(1 \cdot 2)^2} + \ldots + \frac{t^n}{(n!)^2} + \ldots$$

Итак, задача Коши для уравнения гиперболического типа с постоянными коэфициентами всегда может быть разрешена.

Рассмотрим, например, *телеграфное уравнение**, которое при надлежащем выборе единиц пишется так:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \tag{53}$$

V обозначает потенциал в момент времени t в некоторой точке абсциссы x на прямолинейном неограниченном проводе, направленном по оси Ox, который передает электрическое возмущение. Характеристиками здесь являются два семейства прямых $x \mp t = C$. Вводя два новых переменных

$$x' = \frac{x - t}{\sqrt{2}}, \qquad y' = \frac{x + t}{\sqrt{2}}$$

---

* Излагаемый здесь способ принадлежит Э. Пикару (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1894, *t.* 22, p. 2—8).

и полагая в то же время $V = ze^{-t}$, преобразуем уравнение (53) в

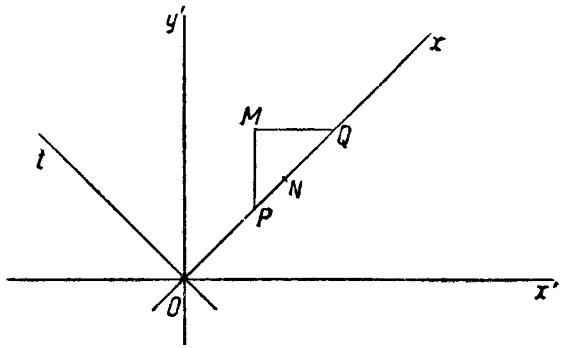
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{2} z = 0. \tag{54}$$

Предполагается, что начальное электрическое возмущение было произведено на проводе между двумя точками $x=0$ и $x=a$ $(a > 0)$. Спрашивается, каково будет значение V в момент t в точке с абсциссой x. С аналитической точки зрения поставленная задача такова: известны значения z и $\frac{\partial z}{\partial t}$ в момент времени $t=0$,

$$z = f(x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = g(x),$$

причем эти функции вне интервала $(0, a)$ равны нулю. Вывести отсюда значение $z(x, t)$, каковы бы ни были x и $t\ (t > 0)$.



Черт. 87.

Это как раз задача Коши, а кривая, несущая данные, — здесь прямая $t = 0$ в системе осей (Ox, Ot) и прямая $y' = x'$ в системе осей (Ox', Oy'). Значение z и ее частных производных вдоль этой прямой легко получаются из данных.

Пусть M — точка с координатами (x, t) в системе (Ox, Ot), причем t положительно. Значение искомого интеграла в точке M дается общей формулой (49''), которая здесь имеет вид:

$$z_M = \frac{(uz)_P + (uz)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{PQ} u \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \right) - z \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi \right), \tag{55}$$

причем функция Римана u равна $J\left(-\frac{v}{2}\right)$, где

$$v = (x' - \xi)(y' - \eta);$$

мы ее обозначим через $\varphi(v)$. Пусть N есть точка отрезка PQ с координатами $(\lambda, 0)$ в системе (Ox, Ot). В системе (Ox', Oy') ее координаты равны

$$\xi = \eta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}},$$

и вдоль отрезка PQ λ изменяется от $x - t$ до $x + t$. Для приложения формулы (55) необходимо знать

$$u, \quad z, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

в каждой точке N отрезка PQ.

Сначала имеем:

$$v=\left(x'-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(y'-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{x+t-\lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x-t-\lambda}{\sqrt{2}}\right)=\frac{(x-\lambda)^2-t^2}{2},$$

$$u=\varphi\left[\frac{(x-\lambda)^2-t^2}{2}\right],\quad \frac{\partial u}{\partial \xi}=\varphi'(v)(\eta-y')=\varphi'\left[\frac{(x-\lambda)^2-t^2}{2}\right]\left(\frac{\lambda-x-t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\varphi'(v)(\xi-x')=\varphi'\left[\frac{(x-\lambda)^2-t^2}{2}\right]\left(\frac{\lambda-x+t}{\sqrt{2}}\right)$$

Точно так же, принимая во внимание начальные условия, видим, что в каждой точке N отрезка PQ имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{\sqrt{2}}[f'(\lambda)-g(\lambda)],\qquad \frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{1}{\sqrt{2}}[f'(\lambda)+g(\lambda)].$$

В точках P и Q имеем $u=1$, а z соответственно равняется $f(x-t)$ и $f(x+t)$, и формула (55) принимает вид:

$$z=\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\varphi\left[\frac{(x-\lambda)^2-t^2}{2}\right]g(\lambda)-tf(\lambda)\varphi'\left[\frac{(x-\lambda)^2-t^2}{2}\right]\right\}d\lambda. \tag{56}$$

Переменные x' и y' не входят в окончательную формулу (56), которая непосредственно дает выражение решения через данные задачи. Для разбора этого решения напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ равны нулю вне интервала $(0, a)$. Предположим $x>a$; до тех пор, пока $t<x-a$, $x-t$ и $x+t$ будут больше a, и правая часть формулы (56) будет равна нулю. Следовательно, электрическое возмущение достигает точки с абсциссой x только к моменту $x-a$. Если t превосходит $x-a$ и меньше x, то $x-t$ меньше a и положительно, $x+t$ все еще больше a, $f(x+t)$ равна нулю, и выражение $x+t$ в верхнем пределе интеграла можно заменить через a. Формулу (56) можно переписать так:

$$z=\frac{f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{a}F(x,t,\lambda)\,d\lambda\quad (a-x<t<x), \tag{56'}$$

где для краткости функция под знаком $\int$ обозначена через $F(x, t, \lambda)$. Наконец, если $t>x$, $x-t$ отрицательно, $x+t$ больше a, $f(x+t)$ и $f(x-t)$ равны нулю. За пределы интеграла можно взять 0 и a, и формула, дающая z, переходит в

$$z=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a}F(x,t,\lambda)\,d\lambda\quad (t>x). \tag{56''}$$

Таким образом мы видим, что при данном значении $x>a$ значение z перестает быть нулем только тогда, когда t достигает значения $x-a$, но начиная с этого значения t оно уже не обращается опять в нуль. Для возмущения действительно имеется передний фронт волны, продвигающийся со скоростью, равной единице, но *заднего фронта волны* нет. Можно еще сказать, что в промежутке времени от $t=x-a$ до $t=x$ через точку x проходит волна, представляемая формулой (56'); но эта волна оставляет за собой нечто вроде *остатка*, представляемого формулой (56''). Когда t неограниченно возрастает, этот остаток стремится к пределу, не зависящему от x. Отметим, что потенциал V равен ze^{-t}, и наличие показательного множителя влечет за собою чрезвычайно быстрое затухание потенциала.

500. Другие задачи. Задача Коши не является единственной, которая ставится для линейных уравнений гиперболического типа. Может также потребоваться разрешение смешанных задач, как в случае уравнения $s=0$. К этим задачам также приложим метод последовательных приближений. Предположим, например, что требуется найти интеграл уравнения

$$s=\lambda(ap+bq+cz)+f(x, y),$$

принимающий заданные значения вдоль характеристики $y=0$ и вдоль дуги кривой OND (черт. 81), которая пересекается прямою, параллельною оси Ox, только в одной точке. Обозначая через $z_0(x, y)$ интеграл уравнения $s=f(x, y)$, удовлетворяющий этим условиям (§ 490), мы шаг за шагом определим функции z_n посредством соотношения

$$z_n(x, y)=\iint\limits_{MNQP}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}+c(\xi, \eta)z_{n-1}\right]d\xi\, d\eta,$$

где интеграл распространяется на прямоугольник $MNQP$. Рассуждениями, сходными с доказательством в § 494, доказывается, что ряд

$$z_0(x, y)+\lambda z_1(x, y)+\ldots+\lambda^n z_n(x, y)+\ldots$$

равномерно сходится так же, как и оба ряда, образованные частными производными первого порядка. Равным образом можно употребить метод последовательных приближений для определения интеграла, принимающего заданные значения вдоль двух дуг кривых, расположенных в одном и том же углу характеристик. Адамар показал также, что на эти задачи можно распространить метод Римана. Функцию $u(x, y; \xi, \eta)$ следует заменить решением сопряженного уравнения, представляющим линии разрыва *.

Метод последовательных приближений позволяет также решать эти же задачи для уравнения более общего вида:

$$s=F(x, y, z, p, q). \tag{57}$$

Мы ограничимся наиболее простой из этих задач, а именно займемся определением интеграла, зная значения, которые он принимает на двух характеристиках различных систем. Для того чтобы несколько упростить изложение, предположим, что имеется интеграл уравнения (57), обращающийся в нуль при $x=0$, каково бы ни было y, и при $y=0$, каково бы ни было x. Очевидно, что простые преобразования позволяют привести общий случай к этому частному случаю. Относительно функции $F(x, y, z, p, q)$ мы сделаем следующие предположения: эта функция непрерывна в области D, определяемой неравенствами:

$$0\leqslant x\leqslant \alpha, \quad 0\leqslant y\leqslant \beta, \quad |z|\leqslant H, \quad |p|\leqslant P, \quad |q|\leqslant Q,$$

где α, β, H, P, Q — некоторые положительные числа. Кроме того, в этой области она удовлетворяет условию Липшица относительно z, p и q, т. е. при заданных значениях x, y, z, z', p, p', q, q', заключенных в предыдущих интервалах, имеем неравенство:

$$|F(x, y, z', p', q')-F(x, y, z, p, q)|<K_1|z'-z|+K_2|p'-p|+K_3|q'-q|, \tag{58}$$

где K_1, K_2, K_3 — положительные числа. Пусть M есть верхняя граница для $|F|$ в этой области D, и R — прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\alpha$, $y=0$, $y=\beta$. За первое приближенное значение интеграла мы возьмем

$$z_0(x, y)=0,$$

---

* E. Picard, I примечание в IV томе Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, стр. 353 и следующие; E. Goursat, *Annales de la Faculté des Sciences, de Toulouse*, 2-me série, t. VI, 1904, p. 117; *Bulletin de la Société mathématique* (заседание 24 мая 1911 г.); J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, p. 208 et t. XXXII, p. 242.

затем положим в общем случае

$$z_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y F\left[\xi, \eta, z_{n-1}(\xi, \eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right] d\eta.$$

Пусть ρ и ρ' — два положительных числа, меньших или равных соответственно α и β и удовлетворяющих, кроме того, условиям $M\rho\rho' < H$, $M\rho' < P$, $M\rho < Q$. Шаг за шагом мы легко усматриваем, что все функции $z_n(x, y)$ правильны в прямоугольнике R' со сторонами длины ρ и ρ', подобном R, и что в этом прямоугольнике $|z_n| < H$, $|p_n| < P$, $|q_n| < Q$. Для того чтобы доказать, что $z_n(x, y)$ при неограниченном возрастании n стремится к некоторому пределу, заметим, что в силу условия (58) имеют место неравенства:

$$|z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)| < \int_0^x d \int_0^y \{K_1 |z_{n-1}(\xi, \eta) - z_{n-2}(\xi, \eta)| + K_2 |p_{n-1} - p_{n-2}| +$$
$$+ K_3 |q_{n-1} - q_{n-2}|\} d\eta,$$

$$|p_n(x, y) - p_{n-1}(x, y)| < \int_0^y \{K_1 |z_{n-1}(\xi, \eta) - z_{n-2}(\xi, \eta)| + \ldots\} d\eta.$$

. . . .

Положим вообще

$$u_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \left[K_1 u_{n-1}(\xi, \eta) + K_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + K_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}\right] d\eta$$

и предположим, что за $u_1(x, y)$ взята функция, правильная в R' и такая, что в любой точке этой области

$$u_1(x, y) > |z_1|, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} > \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} > \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|.$$

Шаг за шагом мы усматриваем, что для любого значения n

$$|z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)| < u_n(x, y).$$
$$|p_n(x, y) - p_{n-1}(x, y)| < \frac{\partial u_n}{\partial x}$$
$$|q_n(x, y) - q_{n-1}(x, y)| < \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Но выше (§ 494) было доказано, что ряды $\sum u_n$, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}$ равномерно сходятся. Следовательно, это же имеет место для ряда

$$z_1(x, y) + [z_2(x, y) - z_1(x, y)] + \ldots + [z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)] + \ldots$$

и для рядов, которые получаются из него почленным диференцированием по x или по y. Рассуждение заканчивается, как в § 494. Когда n неограниченно возрастает, z_n стремится к некоторой функции $Z(x, y)$, удовлетворяющей всем условиям задачи. Более того, это единственный интеграл уравнения (57), удовлетворяющий этим условиям.

Область, в которой существование интеграла обеспечено, вообще говоря, меньше, чем соответствующая область для линейного уравнения. В одном интересном случае обе эти области совпадают. Это будет в том случае, когда функция $F(x, y, z, p, q)$ остается непрерывной для любой системы действительных значений переменных z, p и q, если точка (x, y) остается в области R, и допускает производные $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$, которые при тех же условиях по абсолютной величине остаются меньше некоторого определенного числа. Нам тогда не нужно принимать во внимание условия, выражающие, что z_n, p_n, q_n остаются в области D, и мы можем взять $\rho = \alpha$, $\rho' = \beta$. Ряд, который дают последовательные приближения, сходится в прямоугольнике R. Так будет в случае уравнения

$$s = ap + bq + c \sin z,$$

где a, b, c — непрерывные функции от x и y в области R.

Очевидно что уравнение, полученное после подстановки,

$$z = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + u$$

удовлетворяет желаемым условиям, если только $\varphi'(x)$ и $\psi'(y)$ соответственно непрерывны в интервалах $(0, \alpha)$ и $(0, \beta)$.

III. УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Было естественно стремление обобщить такой простой способ Римана на уравнения гиперболического типа с числом независимых переменных, большим двух. Кирхгофф, Вольтерра, Тедоне, Кулон, д'Адемар (d'Adhémar) рассмотрели некоторое количество частных примеров. Адамар (Hadamard) первый получил общее решение, показав, что достаточно знать интеграл сопряженного уравнения, представляющий в произвольной точке особенность определенной природы, чтобы из него можно было вывести посредством квадратур решение задачи Коши. Как и в способе Римана, этот частный интеграл не зависит от поверхности, несущей данные задачи. Для изучения этого трудного вопроса мы отошлем к работам знаменитого ученого* и ограничимся тем, что укажем изящный способ Вольтерра** для уравнения цилиндрических волн.

501. Основная формула. Пусть $U(x, y, z)$ непрерывная функция, допускающая непрерывные частные производные. Часто бывает удобно ввести производную от U, взятую *по данному направлению.* Будем рассматривать x, y, z как прямоугольные координаты точки пространства, и пусть L есть некоторое направление, выходящее из точки M. В этом направлении возьмем точку M' на расстоянии h от точки M. Производною функции $U(x, y, z)$ по направлению L называется предел отношения $\frac{U(M') - U(M)}{MM'}$, когда точка M' неограниченно приближается к точке M, оставаясь на рассматриваемой полупрямой. Мы для краткости пишем $U(M)$ вместо $U(x, y, z)$, причем M есть точка с координатами (x, y, z). Если углы направления L с положительными направлениями осей равны α, β, γ, то имеем:

$$\frac{U(M') - U(M)}{MM'} = \frac{U(x + h\cos\alpha,\ y + h\cos\beta,\ z + h\cos\gamma) - U(x, y, z)}{h}.$$

* *Annales de l'Ecole Normale supérieure,* 1904 и 1905; *Acta mathematica,* t. XXXI, 1908.

** *Acta mathematica,* t. XXVIII, 1894; см. также мемуар Кирхгоффа, *Sitzungsberichte der Berliner Akademie,* 1882.

Предел этого отношения, т. е. искомая производная $\frac{dU}{dL}$, выражается по формуле, дающей производную сложной функции, следующим образом:

$$\frac{dU}{dL}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \tag{59}$$

Пусть MV вектор с началом в точке M и составляющими $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$; соотношение (59) выражает, что $\frac{dU}{dL}$ равняется алгебраической величине проекции вектора MV на направление L. Отсюда непосредственно вытекает, что производные по двум противоположным направлениям отличаются только знаком. Напомним еще, что вектор MV направлен по нормали к поверхности уровня $U(x, y, z)=C$, проходящей через точку M, в ту сторону этой нормали, где функция U возрастает, и что длина этого вектора обратно пропорциональна отрезку нормали, заключенному между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня. Все эти определения, очевидно, прилагаются и к функции двух переменных, если заменить пространство плоскостью.

Пусть теперь

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Мы имеем тождество (§ 497, сноска)

$$vF(u)-uF(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

справедливое для любых функций u и v. Если эти функции непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка в некоторой ограниченной области D, границей которой является поверхность Σ, то из предыдущего тождества выводим соотношение:

$$\iiint\limits_D [vF(u)-uF(v)]\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy\,dz+$$
$$+\left(v\frac{\partial y}{\partial u}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz\,dx-\ldots, \tag{60}$$

где поверхностный интеграл распространен на внешнюю сторону поверхности Σ. Пусть будут α, β, γ углы, образуемые внешним направлением нормали к Σ с осями координат. Интеграл по поверхности тождественно равен

$$\iint_\Sigma v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma-$$
$$-\iint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta-\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma.$$

Но $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $-\cos\gamma$ суть направляющие косинусы направления, симметричного направлению внешней нормали относительно плоскости, проведенной через основание нормали параллельно плоскости $z=0$. Согласно выражению, принадлежащему д'Адемару (d'Adhémar), мы будем называть эту прямую *конормалью* к поверхности Σ в рассматриваемой точке. Положительное направление на конормали соответствует направлению внешней нормали. Коэфициенты при v и при u в предыдущих интегралах по поверхности представляют соответственно производные от функций u и v, взятые по положительному направлению конормали. Обозначим эти производные через $\frac{du}{dN}$, $\frac{dv}{dN}$, что позволяет переписать формулу (60) в сокращенном виде:

$$\iiint_D [vF(u)-uF(v)]\,dx\,dy\,dz=\iint_\Sigma\left(v\frac{du}{dN}-u\frac{dv}{dN}\right)d\sigma. \tag{61}$$

502. Способ Вольтерра. Рассмотрим уравнение

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=Z; \tag{62}$$

правая часть является известной функцией от (x, y, z). Достаточно предположить $Z=0$ и заменить z через at, чтобы получить уже известное уравнение цилиндрических волн (§ 485). Это уравнение принадлежит к гиперболическому типу, и характеристические поверхности являются интегральными поверхностями уравнения в частных производных

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1=0, \tag{63}$$

выражающего, что касательная плоскость составляет с плоскостью $z=0$ угол в 45°. Таким образом конормаль в каждой точке расположена в касательной плоскости, и это свойство, как легко видеть, принадлежит только характеристическим поверхностям. Геометрическим местом характеристических кривых уравнения (63), выходящих из произвольной точки P пространства, является конус вращения с вершиной в P, ось которого параллельна оси Oz, а угол при вершине прямой; это *характеристический конус*.

В способе Вольтерра функция Римана заменяется интегралом уравнения $F(u)=0$, который обращается в нуль вдоль всего характеристического конуса с вершиной в точке (x_1, y_1, z_1). Для получения такого интеграла займемся сначала изысканием интеграла, зависящего только от $\frac{z}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Если сделать замену переменных $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, уравнение $F(u)=0$ переходит в следующее (I, стр. 148):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

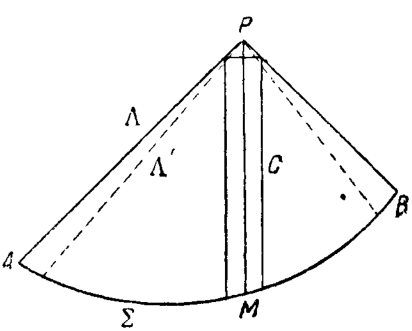
Изыскание интеграла, зависящего только от $w=\frac{z}{r}$, приводит нас к диференциальному уравнению

$$(w^2-1)\frac{d^2u}{dw^2}+w\frac{du}{dw}=0,$$

которое легко интегрируется. Таким образом мы получаем частный интеграл $\log\left(\frac{\pm z+\sqrt{z^2-r^2}}{r}\right)$, обращающийся в нуль в любой точке характеристического конуса с вершиной в начале координат, если только перед z взят подходящий знак. Так как уравнение $F(u)=0$ не изменяется при произвольном перемещении начала координат, то мы видим, что функция

$$v=\log\left(\frac{z_1-z+\sqrt{(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}}\right) \qquad (64)$$

является частным интегралом уравнения $F(u)=0$, обращающимся в нуль во всех точках нижней полости характеристического конуса, имеющего вершиной точку P с координатами (x_1, y_1, z_1). Эта функция v имеет разрыв вдоль всей оси этого характеристического конуса.



Черт. 88.

Предположим, что известны значения некоторого интеграла u уравнения (62) и его частных производных первого порядка на поверхности Σ, и мы хотим вычислить значение этого интеграла в некоторой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ вне Σ. Предполагая, что эта точка P расположена над Σ как это указывает черт. 88, рассмотрим область D, ограниченную нижней полостью характеристического конуса Λ с вершиной P и частью Σ' поверхности Σ, лежащей внутри этого конуса. Допуская, что существует интеграл уравнения (62), удовлетворяющий условиям Коши и правильный в области D, мы сейчас покажем, каким образом можно вычислить значение этого интеграла в точке P. К двум функциям u и v в области D нельзя непосредственно прилагать общую формулу (61), потому что функция v разрывна вдоль оси конуса, а также потому, что производные от v разрывны на конусе Λ. Во избежание этих затруднений мы сначала выделим особую линию при помощи цилиндра вращения C очень малого радиуса η с той же осью, что и конус, и заменяем конус Λ конусом вращения Λ' с той же вершиной и с той же осью, у которого половина угла при вершине φ несколько меньше, чем $\frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, а затем рассмотрим область D', образованную частью области D, которая лежит вне цилиндра C и внутри нижней полости конуса Λ'. Обе функции u и v правильны в этой области D', а потому можно прилагать формулу (61). Поверхность, ограничивающая D', состоит из трех различных частей: части Σ'' от Σ', цилиндрической поверхности Σ_1 и части конической поверхности, принадлежащей конусу Λ'. Заменяя в формуле (61) $F(u)$ через Z, а $F(v)$ через нуль, получаем

$$\iiint\limits_{D'} vZ\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma''}\left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right)d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_1}\left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right)d\sigma + \\ + \iint\limits_{\Lambda'}\left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right)d\sigma.$$

Легко подсчитать, что в точке поверхности конуса Λ', на расстоянии l от вершины, имеем

$$v = \log\left(\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}\right), \quad \frac{dv}{dN} = -\frac{1}{l}\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin\varphi};$$

когда угол φ стремится к $\frac{\pi}{4}$, то v, $\frac{dv}{dN}$, а следовательно, и двойной интеграл вдоль Λ' стремятся к нулю *. Двойной интеграл, распространенный на поверхность Σ_1 цилиндра, вычислить нельзя, так как нам неизвестны значения u и $\frac{du}{dN}$ на этой поверхности. Но можно найти предел этого интеграла, когда радиус η цилиндра стремится к нулю. В самом деле, за элемент поверхности на этом цилиндре мы можем взять $d\sigma = \eta\,d\omega\,dz$, причем угол ω изменяется от 0 до 2π. В точке поверхности функция v имеет вид:

$$v = \log\left[z_1 - z + \sqrt{(z_1 - z)^2 - \eta^2}\right] - \log\eta;$$

направление конормали сливается с направлением внутренней нормали к цилиндру, и мы имеем

$$\frac{dv}{dN} = -\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - \eta^2}\left[z_1 - z + \sqrt{(z_1 - z)^2 - \eta^2}\right]}.$$

* Так как функция v равна нулю на Λ, то производная от v по произвольному направлению в касательной плоскости тоже должна равняться нулю. А конормаль как раз лежит в касательной плоскости.

Произведение ηv имеет пределом нуль, тогда как $\eta \frac{dv}{dN}$ имеет пределом $+1$. Отсюда легко вывести, что предел двойного интеграла, распространенного на поверхность цилиндра, равен

$$-2\pi \int_{z_0}^{z_1} u(x_1, y_1, z)\,dz,$$

где z_0 — координата точки, в которой ось конуса пересекает поверхность Σ. Но когда ε и η стремятся к нулю, интегралы, распространенные на области D' и Σ'', имеют пределами соответственно интегралы, распространенные на D и Σ'. Итак, в пределе имеем

$$\iiint_D vZ\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma'} \left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN} \right) d\sigma - 2\pi \int_{z_0}^{z_1} u(x_1, y_1, z)\,dz. \quad (65)$$

Беря производные по z_1 от обеих частей предыдущего равенства, в итоге находим:

$$u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\iiint_D vZ\,dx\,dy\,dz - \iint_{\Sigma'} \left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN} \right) d\sigma\right]. (66)$$

Вспомогательная функция v известна; u и $\frac{du}{dN}$ предполагаются известными на Σ, и следовательно правая часть этой формулы является определенной функцией от координат (x_1, y_1, z_1) вершины P конуса Λ. Таким образом формула (66) дает решение задачи Коши в предположении, что это решение существует, что a priori отнюдь не очевидно. Итак, необходимо доказать обратное, т. е. что функция $u(x_1, y_1, z_1)$, представляемая этой формулой, является интегралом уравнения (62), значения которого, так же как и значения его первых производных, стремятся к данным значениям, когда точка P стремится к точке поверхности Σ. Этот вопрос, который Вольтерра оставил в стороне, был изучен д'Адемаром, установившим обратное положение*.

Если поверхность Σ, несущая данные, является характеристической поверхностью, то направление конормали в каждой точке лежит в касательной плоскости к поверхности. Если задается значение функции u в каждой точке Σ, то этим самым значение $\frac{du}{dN}$ тоже известно. Таким образом интеграл определен, если известно его значение вдоль некоторой характеристической поверхности (§ 494).

Пример: Предположим, что поверхность Σ есть плоскость $z=0$ и что, кроме того, $Z=0$. Требуется найти интеграл уравнения $F(u)=0$, зная, что при $z=0$ он обращается в функцию $f(x, y)$, а $\frac{\partial u}{\partial z}$ обращается в $\varphi(x, y)$. Мы ограничимся вычислением значения этого интеграла в точке $P(x_1, y_1, z_1)$, у которой координата z_1 положительна.

---

* *Journal de Liouville*, 5-e série, t. X, p. 131—207. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XX, 1905.—По всем вопросам, относящимся к уравнениям гиперболического типа, см. работу Адамара (Hadamard), Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations (*Yale University Press*, 1923.

В каждой точке плоскости $z=0$ направление конормали параллельно Oz, и следовательно на той части плоскости xy, которая входит в вычисление интеграла, мы должны взять

$$u=f(x, y), \quad \frac{du}{dN}=\varphi(x, y).$$

С другой стороны, на плоскости xy имеем:

$$v=\log\left(\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-r^2}}{r}\right), \quad \frac{\partial v}{dN}=\frac{dv}{dz}=\frac{-1}{\sqrt{z_1^2-r^2}}.$$

Областью интегрирования здесь является круг радиуса z_1 с центром в точке с координатами (x_1, y_1) в плоскости $z=0$. Откидывая индексы, мы можем переписать формулу (66) в таком виде:

$$u(x, y, z)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\iint\left[\log\frac{z+\sqrt{z^2-r^2}}{r}\varphi(\alpha, \beta)+\frac{f(\alpha, \beta)}{\sqrt{z^2-r^2}}\right]d\alpha\, d\beta\right\}, \tag{67}$$

где $r^2=(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2$, а двойной интеграл распространяется на круг Γ радиуса z в плоскости xy, с центром в точке (x, y). При переходе к полярным координатам первый двойной интеграл превращается в

$$I_1=\iint\limits_{\Gamma}\log\left(\frac{z+\sqrt{z^2-r^2}}{r}\right)\varphi(\alpha, \beta)\,d\alpha\, d\beta=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\log\left(\frac{z+\sqrt{z^2-r^2}}{r}\right)\varphi(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)\,r\,dr.$$

Интеграл в правой части равномерно сходится (I, § 100), если функция φ ограничена, и можно прилагать обычную формулу диференцирования, что дает для $\frac{\partial I_1}{\partial z}$ следующее выражение:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{\varphi(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)}{\sqrt{z^2-r^2}}r\,dr=\iint\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\alpha, \beta)\,d\alpha\, d\beta}{\sqrt{z^2-r^2}}.$$

Достаточно заменить z через t, чтобы вновь получить формулу (20) § 485, в которой положено $a=1$.

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. Изучить движение колеблющейся струны, зная, что при $t=0$ она имеет форму дуги параболы, симметричной по отношению к перпендикуляру в середине отрезка, соединяющего концы, и что начальная скорость в каждой точке равна нулю.

2. Разрешить задачу Коши для уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, прилагая общий метод § 489.

Если начальные условия таковы: $z=f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t}=\varphi(x)$, при $t=0$, то полагая $x+at=\xi$, $x-at=\eta$, получаем новое уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$, а начальные условия переходят в следующие: вдоль прямой $\xi=\eta$ мы должны иметь:

$$z=f(\xi), \quad \frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{1}{2}f'(\xi)+\frac{1}{2a}\varphi(\xi), \quad \frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{1}{2}f'(\xi)-\frac{1}{2a}\varphi(\xi).$$

3. Разрешить задачу Гюгонио (сноска, на стр. 109—110), предполагая

$$\psi(p)=\frac{1}{k}\log(1+p),\ f(t)=at^2.$$

Какова должна быть функция $f(t)$ для того, чтобы поверхность S была конусом?

4. Способом последовательных приближений установить формулу Коши (II, § 401),

$$y=\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\varphi(x,\ \alpha)\,d\alpha$$

для интеграла линейного уравнения $F(y)=f(x)$, который при $x=x_0$ обращается в нуль вместе со своими $n-1$ первыми производными (§ 495).

Указание. Пишем уравнение в виде

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\lambda\left(a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n y\right)+f(x)=\lambda F_x[y(x)]+f(x)$$

и замечаем, что искомый интеграл удовлетворяет интегро-диференциальному уравнению

$$y(x)=\lambda\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}F_s[y(s)]\,ds+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s)\,ds,$$

что позволяет разложить его по степеням λ. Таким образом для этого интеграла находим выражение:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,[g_0(x,\ t)+\lambda g_1(x,\ t)+\ldots+\lambda^m g_m(x,\ t)+\ldots],$$

в котором $g_0(x,\ t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, а следующие коэфициенты получаются посредством рекуррентной формулы

$$g_m(x,\ t)=\int_t^x\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}F_s[g_{m-1}(s,\ t)]\,ds.$$

5. ***Уравнение Римана.*** Функция Римана $u(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

имеет вид:

$$u(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=(\eta-x)^{-\beta'}(y-\xi)^{-\beta}F\left[\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)}\right](\xi-\eta)^{\beta+\beta'},$$

причем F обозначает гипергеометрический ряд (II, § 413) (см. Дарбу, Теория поверхностей, т. II, стр. 81 и следующие). Можно также обратиться к статье Жамэ (Jamet) (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2-e série, t. XIX, 1895, p. 208).

ГЛАВА XXVII.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

I. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА.

503. Общие свойства*. Уравнению Лапласа принадлежит такая же роль в изучении линейных уравнений эллиптического типа, как уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ в теории уравнений гиперболического типа. Но задачи, возникающие в связи с новым уравнением, совершенно отличны от тех, которые изучались нами до сих пор.

Функция $u(x, y)$ двух действительных переменных x, y называется *гармонической в области* D, если она *правильна* в этой области, т. е. непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка, и если она удовлетворяет во всякой точке этой области уравнению Лапласа, которое мы напишем, опуская индекс, в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Действительная часть функции $f(z)$ переменного $z = x + iy$ голоморфной в некоторой области D, является гармонической функцией в этой области (II, § 261). Обратно, к каждой гармонической функции $u(x, y)$ можно подобрать другую функцию $v(x, y)$, определенную с точностью до аддитивного постоянного и удовлетворяющую двум соотношениям**:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

---

* При редактировании этой главы я широко пользовался Traité d'Analyse Пикара, в частности главами I, III, X 2-го тома.

** Пусть mt и mt' — два взаимно перпендикулярных направления, причем угол tmt' имеет такое же расположение, как угол xOy; если через $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d}{dt'}$ обозначить производные, взятые в точке m по этим направлениям, то соотношения (2) можно заменить эквивалентными им соотношениями:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt'}; \quad \frac{du}{dt'} = -\frac{dv}{dt}. \tag{2a}$$

Легко провести и прямое доказательство, но достаточно заметить, что соотношения (2а) согласно их значению в теории функций не изменяются при по-так что $u+iv$ будет аналитической функцией от $x+iy$. Эта функция $v(x, y)$ также является интегралом уравнения (1); кроме того, она однозначна и правильна в области D и, следовательно, представляет гармоническую функцию внутри D, если эта область ограничена простым контуром*; функция же $u+iv$ голоморфна в этой области. Эта связь с теорией функций комплексного переменного позволяет легко вывести некоторые важные свойства гармонических функций.

Так, мы сейчас покажем, что *всякая гармоническая функция есть аналитическая функция переменных* x и y в том смысле, который мы приписали этому термину (I, § 197). Пусть $u(x, y)$ — правильная функция внутри круга C радиуса R, описанного из точки (x_0, y_0) как центра; то же самое имеет место для $v(x, y)$, и, следовательно, $f(z)=u+iv$ есть голоморфная функция от z внутри этого круга. Итак, внутри C имеем:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z_n-z_0)^n+\ldots; \quad z_0=x_0+iy_0, \tag{3}$$

где коэфициенты a_n, вообще говоря, комплексные числа. Заменим $z-z_0$ через $x-x_0+i(y-y_0)$ и отделим действительные части от коэфициентов при i в ряде (3); $u(x, y)$ представится в виде целого ряда с двойным входом:

$$u(x, y)=\sum_{p, q} b_{p, q}(x-x_0)^p(y-y_0)^q. \tag{4}$$

Равенство (3) доказывает, что $u(x, y)$ равно сумме этого двойного ряда, если сгруппировать вместе все члены одинаковых степеней по $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$.

Но этого недостаточно для доказательства *абсолютной* сходимости ряда. Для доказательства этого существенного свойства необходимо показать, что ряд остается сходящимся при замене каждого члена его абсолютной величиной, если только $|x-x_0|$ и $|y-y_0|$ достаточно малы.

Но, собирая все члены степени n в ряде (4) и полагая $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, имеем:

$$\alpha_n\left[(x-x_0)^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2+\ldots\right]+$$
$$+\beta_n\left[-n(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-x_0)^{n-3}(y-y_0)^3-\ldots\right].$$

вороте осей на любой угол; значит, достаточно повернуть их так, чтобы сделать параллельными направлениям mt и mt'.

Вообразим, что точка m описывает замкнутую кривую C в положительном направлении; если за направление mt принять направление касательной, совпадающее с направлением движения, то mt' будет направлением внутренней нормали mn и соотношения (2a) примут вид:

$$\frac{du}{ds}=\frac{dv}{dn}; \quad \frac{du}{dn}=-\frac{dv}{ds}, \tag{2b}$$

где через $\frac{d}{ds}$ и $\frac{d}{dn}$ обозначены производные по этим двум направлениям.

* Если область D ограничена несколькими отдельными кривыми, то функция $v(x,y)$ может быть многозначной. Возьмем, например, функцию $\mathrm{Log}\cdot z$; действительная часть является гармонической вне некоторого круга, описанного из начала координат, между тем как коэфициент при i допускает период 2π.

Ясно, что если заменить каждый член его абсолютной величиной, то полученная сумма будет меньше, чем

$$|a_n|\{|x-x_0|+|y-y_0|\}^n.$$

Если R есть радиус сходимости целого ряда (3), то ряд

$$\sum |a_n| r^n$$

сходится при условии, что $r<R$, и, следовательно, ряд (4) сходится абсолютно, если только

$$|x-x_0|+|y-y_0|<R, \tag{5}$$

т. е. если точка (x, y) находится внутри квадрата, который легко определить.

Из этого важного предложения вытекает целый ряд следствий, совершенно подобных тем, которые были выведены для аналитических функций комплексного переменного.

Так, все производные функции, гармонической в некоторой области D, суть аналитические функции, правильные в этой области; они являются также гармоническими функциями, в чем легко убедиться, диференцируя уравнение (1). Если две гармонические функции совпадают на некоторой *площади*, как бы мала она ни была, то они тождественны, так как во всякой точке данной площади все их частные производные равны, и здесь можно было бы повторить для аналитического продолжения гармонической функции все, что было сказано по поводу функций комплексного переменного (т. II, ч 1, гл. XVI). Мы не будем к этому возвращаться*.

* Всякая гармоническая функция, будучи аналитической функцией от x и y, может быть определена для *комплексных* значений этих переменных, так же как она определена для *действительных* значений, если только известен один элемент этой функции (т. II, ч. 1, § 335). Отсюда получаем интересное следствие. Пусть $f(z)$ голоморфная функция комплексного переменного $z=x+iy$ в окрестности точки $z_0=x_0+iy_0$,

$$f(z)=\alpha_0+i\beta_0+\ldots+(\alpha_n+i\beta_n)(z-z_0)^n+\ldots$$

Действительная часть $u(x, y)$ функции $f(z)$ представляется в этой области рядом

$$u(x, y)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_n+i\beta_n}{2}[x-x_0+i(y-y_0)]^n+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_n-i\beta_n}{2}[x-x_0-i(y-y_0)]^n\right\}.$$

По замене $x-x_0$ через $\frac{z-z_0}{2}$, $y-y_0$ через $\frac{z-z_0}{2i}$ формула эта примет вид:

$$u\left(x_0+\frac{z-z_0}{2}, y_0+\frac{z-z_0}{2i}\right)=\alpha_0+\frac{1}{2}f(z)-\frac{\alpha_0+\beta_0 i}{2};$$

это соотношение, определенное для значений $|z-z_0|<R$, очевидно, сохраняет силу во всей области существования $f(z)$, поскольку оба члена являются аналитическими функциями от z. В частности, если $u(x,y)$ представляет рациональную или алгебраическую функцию от (x, y), то $f(z)$ есть такая же функция от z.

Совокупность членов n-й степени ряда (4) имеет вид:

$$C_1\rho^n \cos n\varphi + C_2\rho^n \sin n\varphi,$$

где положено:

$$x - x_0 = \rho\cos\varphi, \quad y - y_0 = \rho\sin\varphi.$$

Отсюда ясно, что гармонический однородный многочлен самого общего вида n-й степени от $x - x_0$, $y - y_0$ зависит только от *двух* произвольных постоянных C_1 и C_2. Из общего вида членов ряда (4) вытекает также, что гармоническая функция не может иметь в точке (x_0, y_0) *ни максимума, ни минимума*. В самом деле, если разложение в ряд $u(x, y) - u(x_0, y_0)$ начинается с членов n-й степени, то совокупность этих членов имеет вид:

$$\rho^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$$

и меняет знак для n различных значений φ *.

Исследование изолированных особых точек однозначной аналитической функции (т. II, § 300) позволяет вывести общее выражение гармонической функции в области изолированной особой точки. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, правильная во всякой точке внутри круга C с центром $A(a, b)$, за исключением, может быть, самой точки A. Присоединяя к ней гармоническую функцию

$$v(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

где интеграл берется от точки (x_0, y_0) круга C отличной от центра, получим аналитическую функцию $u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, не допускающую внутри круга C особых точек кроме точки A; но эта функция не является обязательно однозначной, так как функция $v(x, y)$ может иметь период при обходе в положительном направлении вокруг центра. Пусть этот период, который должен быть непременно действительным, равен $2\pi\alpha$; разность

$$u + iv - \alpha \operatorname{Log}(z - z_0),$$

где

$$z_0 = a + ib,$$

есть однозначная функция $\alpha f(z)$ в области точки z_0, которая не может допускать в этой области другой особой точки, кроме самой точки z_0. Итак, имеем

$$e^{\frac{u+iv}{\alpha}} = (z - z_0)\,e^{f(z)} = F(z),$$

* Точка (x_0, y_0) кривой $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ может быть только обыкновенной или кратной точкой, в которой кривая имеет различные касательные, но ни в коем случае не изолированной точкой и не точкой возврата.

причем $F(z)$ — также однозначная функция в окрестности точки z_0, не имеющая в этой области другой особой точки кроме z_0 и отличная от нуля во всех остальных точках области. Следовательно,

$$u(x, y) = \alpha \log |F(z)|, \tag{a}$$

и, обратно, из всякой однозначной функции $F(z)$, обладающей указанными свойствами, можно получить при помощи вышеприведенной формулы функцию, гармоническую в окрестности точки A за исключением, быть может, самой точки A. Формула (a) непосредственно распространяется на случай, когда функция $v(x, y)$ также однозначна.

Все изложенное позволяет легко вывести некоторые элементарные теоремы Пикара*.

Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, правильная в области D за исключением, может быть, одной точки A этой области, вблизи которой известно только, что абсолютное значение этой функции меньше некоторого постоянного числа. Функция $F(z)$, которая входит в формулу (a), не может допускать точки A ни в качестве существенно особой точки, ни в качестве полюса, ни в качестве нуля, так как при всех этих предположениях абсолютное значение $\log |F(z)|$ превосходило бы любое заданное число вблизи точки A. Отсюда следует, что в окрестности точки A функция $F(z)$ представляется рядом Тейлора, начинающимся с постоянного, отличного от нуля члена; функция $\operatorname{Log}\{F(z)\}$ также голоморфна вокруг этой точки, и действительная часть $u(x, y)$ функции $\alpha \operatorname{Log}\{F(z)\}$ является правильной в окрестности точки A и, следовательно, *во всей области* D. Это — первое предложение Пикара.

Во-вторых, предположим, что абсолютное значение $u(x, y)$ бесконечно возрастает по мере того, как расстояние r точки (x, y) от точки A стремится к нулю.

Это не может произойти ни в том случае, если точка A существенно особая точка для $F(z)$ (т. II, ч. 1, § 300), ни в случае, если это обыкновенная точка $F(z)$, не являющаяся нулем. Следовательно, необходимо, чтобы z_0 была полюсом или нулем функции $F(z)$, которая имеет вид $(z - z_0)^m \varphi(z)$, где m — целое число, положительное или отрицательное, а $\varphi(z)$ — голоморфная функция, не обращающаяся в нуль при $z = z_0$. Тогда

$$u(x, y) = \alpha [m \log r + \log |\varphi(z)|],$$

т. е.

$$u(x, y) = K \log r + U,$$

где U — гармоническая правильная функция в точке A. В этом и состоит вторая теорема Пикара.

В первом случае функция $F(z)$ правильна в точке A и не обращается в нуль в этой точке. Во втором случае точка A есть полюс, или нуль, функции $F(z)$. Когда точка A является существенно особой точкой $F(z)$,

* Э. Пикар, Некоторые элементарные теоремы, относящиеся к гармоническим функциям (*Bulletin de la Société mathématique de France*, *t.* LII, 1924, p. 162). См. также в т. 176 *Comptes Rendus* (1923) различные заметки на эту тему Пикара, Лебега и Булигана (Bouligand).

функция $u(x, y)$ неопределенна в этой точке. Например, если взять $F(z) = e^{\frac{1}{z}}$, то начало есть точка неопределенности для $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Большинство других свойств гармонических функций, которые сейчас будут доказаны, могло бы быть точно так же выведено из теории функций комплексного переменного. Тем не менее, они будут доказаны непосредственно так, чтобы можно было распространить доказательство на случай трех переменных. Но прежде заметим, что к гармоническим функциям можно применить замечания, сделанные раньше относительно линейных уравнений (§ 483). Так, из каждого решения уравнения (1), зависящего от одного или нескольких параметров, можно получить путем диференцирования и квадратур бесконечное число других решений.

Среди известных решений важную роль будет играть функция $u = \log r$, где r — расстояние между двумя точками (x, y) и (a, b), зависящее от двух параметров a и b.

Частные производные от u по какому-нибудь из переменных a, b, x, y также представляют гармонические функции; то же имеет место и для всякой линейной комбинации этих производных, коэфициенты которой не зависят от x и y. Пусть, например, L — некоторое направление, выходящее из точки (a, b) и образующее угол φ с направлением отрезка, соединяющего точку (a, b) с точкой (x, y). Производная от $\log r$, взятая по этому направлению, рассматриваемая как функция параметров a и b, есть новая гармоническая функция переменных x и y, так как она представляет собой линейную комбинацию производных $\frac{\partial \log r}{\partial a}$, $\frac{\partial \log r}{\partial b}$ с постоянными коэфициентами. Эта производная имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dL}, \text{ т. е. } -\frac{\cos \varphi}{r}$$

(I, § 84); чтобы непосредственно убедиться в том, что $\frac{\cos \varphi}{r}$ есть гармоническая функция, достаточно заметить, что это — действительная часть функции $e^{\theta i}\frac{1}{z - a - bi}$, где θ — аргумент, соответствующий направлению L. Очевидно также, что и $\frac{\cos \psi}{r}$, где ψ — угол между направлением отрезка, соединяющего (x, y) с (a, b), и *постоянным* направлением Λ, не зависящим от точки (x, y), является гармонической функцией, так как это выражение с точностью до знака равно производной по направлению Λ от $\log r$, рассматриваемого как функция от x, y.

Заметим еще, что всякое точечное преобразование, сохраняющее углы неизменными, преобразует гармоническую функцию в новую гармоническую функцию. Это свойство уже было неявно установлено (II, § 275 Упр., I § 65 Упр.).

504. Равномерно сходящиеся интегралы. Во избежание излишних повторений мы прежде всего докажем одно свойство некоторых интегралов, на которое часто придется ссылаться.

Пусть вообще $u(M, P)$ — функция координат двух точек M и P, каждая из которых может описывать определенную область, причем u непрерывна для всех систем взаимного расположения этих двух точек, за исключением случая, когда обе точки совпадают; таково, например, выражение вида $\dfrac{v(M,P)}{\overline{MP}^{\alpha}}$, где $v(M, P)$ непрерывна, а α — положительное число. Сначала предположим, что точка M описывает определенную плоскую кривую C, тогда как точка P может занимать любое положение на плоскости. Интеграл

$$U(P) = \int\limits_C u(M, P)\, ds,$$

взятый в предположении, что точка P неподвижна, а точка M описывает дугу C, есть непрерывная функция координат точки P, пока эта точка не находится на кривой C (I, § 98). Когда точка P совпадает с точкой M_0 кривой C, интеграл $U(M_0)$ может иметь смысл, хотя он имеет бесконечный элемент, но наличие этого бесконечного элемента не позволяет без дальнейшего исследования утверждать, что интеграл непрерывен в этой точке, т. е. что $U(P) - U(M_0)$ стремится к нулю вместе с расстоянием M_0P.

Мы будем говорить, что интеграл $U(P)$ *равномерно сходится в окрестности точки* M_0 *кривой* C, когда выполнено следующее условие: для любого заданного положительного числа ε, можно найти на дуге C такую дугу C', содержащую точку M_0, и такое положительное число ρ, что для всякой точки P, взятой внутри круга c_ρ радиуса ρ, описанного из точки M_0, как центра, абсолютная величина интеграла $\int\limits_{C'} u(M, P)\, ds$ будет меньше, чем ε. Если выполнено это условие, то для доказательства того, что $U(P) - U(M_0)$ стремится к нулю вместе с M_0P достаточно воспроизвести классическое обычно применяемое рассуждение. В самом деле, можно написать:

$$U(P) - U(M_0) = U'(P) - U'(M_0) + \{U''(P) - U''(M_0)\},$$

где через U' и U'' обозначены интегралы, взятые по дуге C' и по дуге $C'' = C - C'$. Если дуга C' и число ρ выбраны, как только что было указано, то абсолютные величины $U'(P)$ и $U'(M_0)$ меньше ε, когда P находится внутри c_ρ. Но так как ρ может быть заменено любым меньшим положительным числом, то можно считать, что дуга C'' находится целиком вне c_ρ. Тогда интеграл $U''(P)$ есть непрерывная функция внутри этого круга c_ρ. Выберем такое положительное число $\rho' \leqslant \rho$, чтобы было

$$|U''(P) - U''(M_0)| < \varepsilon,$$

когда $M_0P < \rho'$. Очевидно, что будем иметь также

$$|U(P) - U(M_0)| < 3\varepsilon,$$

когда M_0P будет меньше ρ'.

Определение интегралов, равномерно сходящихся в окрестности точки, распространяется на двойные и тройные интегралы.

Вообразим, что точка P может занимать любое положение в пространстве, между тем как точка M вынуждена оставаться на поверхности Σ. Мы будем также говорить, что поверхностный интеграл

$$U(P)=\iint\limits_{\Sigma} u(M, P)\, d\sigma$$

равномерно сходится в окрестности точки M_0 поверхности Σ, если при заданном положительном числе ε можно найти на поверхности Σ такую часть Σ', охватывающую точку M_0, и такое положительное число ρ, что для каждой точки P, взятой внутри сферы радиуса ρ с центром в точке M_0 абсолютная величина интеграла

$$\iint\limits_{\Sigma'} u(M, P)\, d\sigma$$

будет меньше ε. Наконец, если точка M сама описывает трехмерную область D, мы будем говорить, что тройной интеграл

$$U(P)=\iiint\limits_{D} u(M, P)\, dv$$

равномерно сходится в окрестности точки M_0 области D, если при заданном положительном числе ε можно найти такую область D', заключающую внутри себя точку M_0, и такое положительное число ρ, что для всякой точки P, взятой внутри сферы радиуса ρ с центром M_0, абсолютная величина тройного интеграла

$$\iiint\limits_{D'} u(M, P)\, dv$$

будет меньше ε. Не изменяя ничего в рассуждении, проведенном выше, можно для последних двух случаев доказать, что $U(P)$ непрерывна в точке M_0.

505. Логарифмический потенциал. Из частных интегралов уравнения (1), приведенных в конце § 503, можно путем квадратур получить бесконечное множество других гармонических функций. Сначала мы будем исследовать только функции, представленные в виде определенных интегралов, взятых вдоль некоторой кривой C. Относительно кривых C, о которых будет итти речь в дальнейшем, мы делаем следующие предположения: допустим, что они состоят из *конечного* числа таких дуг, что координаты точки, описывающей каждую из этих дуг, являются непрерывными функциями одного параметра, допускающими непрерывные производные. Эти условия, очевидно, выполняются для кривой, состоящей из конечного числа аналитических дуг (I, § 198), но в интересах теории не следует ограничиваться только этим случаем.

Пусть μ — некоторая функция, принимающая определенное значение в каждой точке M кривой C и изменяющаяся непрерывно с изменением положения этой точки, например, непрерывная функция дуги s, отсчитываемой от произвольной неподвижной начальной точки.

Определенный интеграл

$$V = \int_C \mu \log r\, ds, \tag{6}$$

где r — расстояние переменной точки M кривой C от определенной точки P плоскости, и где ds существенно положительно, представляет гармоническую функцию координат (a, b) точки P во всей области, не заключающей никакой точки кривой C. Это вытекает из свойств $\log r$ и из обычной формулы диференцирования под знаком интеграла, которая здесь применима, так как интеграл (6) и те интегралы, которые из него получаются путем диференцирования, не имеют бесконечных элементов. Эту функцию V называют *логарифмическим потенциалом простого слоя* (гл. XXVIII).

Функция $V(a, b)$ непрерывна на самой кривой C. Достаточно доказать, что интеграл $\int_C \mu \log(r)\, ds$ равномерно сходится в окрестности точки M_0 кривой C. Примем за начало точку M_0, за оси x и y — касательную и нормаль в этой точке, и пусть C' — малая дуга кривой C, изображаемая уравнением $y = f(x)$, где x изменяется от $-h$ до $+h$, причем h есть положительное число, столь малое, что дуга C' находится внутри круга радиуса $\frac{1}{2}$, описанного из начала как центра. Пусть c_ρ — концентрическая окружность радиуса $\rho \leqslant h$, а $P(a, b)$ — точка внутри c_ρ. Расстояние r точки P от точки M кривой C' меньше единицы; обозначая через H верхний предел выражения $|\mu| \sqrt{1 + f'^2(x)}$, взятого на отрезке кривой C, заключающем дугу C', получим: абсолютная величина интеграла

$$\int_{C'} \mu \log r\, ds$$

меньше чем

$$-H \int_{-h}^{+h} \log\left[\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right] dx < -H \int_{-h}^{+h} \log(|x-a|)\, dx,$$

где a заключается между $-h$ и $+h$, а последний интеграл в свою очередь меньше чем $-2H \int_0^{2h} \log(t)\, dt$ и стремится к нулю вместе с h. Легко распространить доказательство на случай, когда M_0 — угловая точка кривой C. Напротив, когда точка P пересекает кривую C, переходя с одной ее стороны на другую, частные производные функции V претерпевают разрывы непрерывности, которые будут рассмотрены ниже (гл. XXVIII).

Заменяя в формуле (6) $\log r$ через $\frac{1}{r} \cos(r, \lambda)$, где $\cos(r, \lambda)$ обозначает косинус угла между направлением MP и произвольным направлением, исходящим из точки M и не зависящим от положения точки (a, b), мы снова получаем гармонические функции, ибо, как мы уже отмечали, это выражение представляет гармоническую функцию от (a, b), каково бы ни было положение точки M. В частности, если взять одно из направлений проходящей через M нормали к контуру C, то получим *логарифмический потенциал двойного слоя*:

$$W = \int_C \mu \frac{\cos\varphi}{r} ds; \tag{7}$$

здесь φ — угол между направлением MP и выбранным направлением на нормали, проходящей через M; W есть также гармоническая функция координат точки P во всей области, не заключающей ни одной точки контура C, но она разрывна, когда точка P пересекает контур, по которому производится интегрирование. Чтобы исследовать этот разрыв, предположим, что C представляет замкнутую кривую без двойных точек и что берется внутреннее направление нормали.

Если μ постоянна, то интеграл $\int_C \frac{\cos\varphi}{r} ds$, к которому мы приходим, имеет геометрическое значение, которое наглядно обнаруживает разрыв. В самом деле этот интеграл равен интегралу

$$\int_C d \operatorname{arc\,tg} \frac{y-b}{x-a} = \int_C \frac{(x-a)\,dy - (y-b)\,dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

взятому вдоль C в положительном направлении. Это можно проверить при помощи формул $dx = ds \cos\beta'$, $dy = -ds \cos\alpha'$, где α' и β' — углы (отсчитываемые от 0 до π) между направлением внутренней нормали и осями Ox и Oy (см. стр. 154).

Достаточно рассмотреть бесконечно малый треугольник PMM', где M и M' — две бесконечно близкие точки на C, чтобы убедиться, что $\frac{\cos\varphi}{r} ds$ равен взятому с соответствующим знаком углу $d\omega$, под которым виден элемент дуги MM' из точки P.

Следовательно, интеграл $\int_C \frac{\cos\varphi}{r} ds$ равен 2π, когда точка P находится внутри контура C, и нулю, когда точка P — внешняя по отношению к этому контуру.

Если P — обыкновенная точка контура, то этот интеграл равен π; в угловой точке контура он равен углу α, под которым пересекаются две касательных, отсчитываемому от 0 до 2π в соответствующем направлении.

Исследования этого частного случая достаточно, чтобы показать, что интеграл (7) не является равномерно сходящимся вблизи точки M_0 контура C. Вообразим, например, что точка M_0 — обыкновенная точка кривой C, и пусть C' — весьма малая дуга, на которой расположена точка M_0; если пренебречь изменением μ на протяжении дуги C', то очевидно, что интеграл $\int\limits_C \mu \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$ для внутренней точки P контура C, весьма близкой к точке M_0, почти равен $\pi\mu_0 = \pi\mu(M_0)$, в то время как для самой точки M_0 значение интеграла мало отличается от нуля. Но интеграл

$$I(P) = \int\limits_{C'} (\mu - \mu_0)\frac{\cos\varphi}{r}\,ds \tag{8}$$

равномерно сходится в окрестности точки M_0. В самом деле, возьмем дугу C' столь малой, чтобы во всякой точке M дуги C' было:

$$|\mu(M) - \mu(M_0)| < \varepsilon.$$

Для любой точки P вблизи M_0 абсолютная величина интеграла $\int\limits_{C'} (\mu - \mu_0)\frac{\cos\varphi}{r}\,ds$ меньше, чем $2\pi\varepsilon$ и, следовательно, может быть сделана меньше любого заданного числа, если взять дугу C' достаточно малой. Следовательно, интеграл $I(P)$ непрерывен в точке M_0.

Принимая это во внимание, обозначим через W_0 значение интеграла (7), когда точка P совпадает с M_0, и через W_{i0} и W_{e0} — предельные значения $W(P)$, когда точка P стремится к точке M_0, оставаясь внутри или вне контура C. Если M_0 — обыкновенная точка контура, то $I(M_0) = W_0 - \pi\mu_0$; с другой стороны, предел $I(P)$ равен $W_{i0} - 2\pi\mu_0$ или W_{e0}, смотря по тому, стремится ли точка P к M_0, оставаясь внутри или вне контура.

Принимая во внимание, что $I(P)$ непрерывна в точке M_0, имеем два равенства.

$$W_0 - \pi\mu_0 = W_{i0} - 2\pi\mu_0 = W_{e0},$$

откуда получаем основные соотношения:

$$W_{i0} = W_0 + \pi\mu_0, \quad W_{e0} = W_0 - \pi\mu_0. \tag{9}$$

В угловой точке, где касательные образуют угол α, эти соотношения должны быть заменены следующими:

$$W_{i0} = W_0 + (2\pi - \alpha)\mu_0, \quad W_{e0} = W_0 - \alpha\mu_0. \tag{9'}$$

506. Вторая формула Грина. В частном случае уравнения Лапласа общая формула (41) § 497 принимает простой вид:

$$\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Если функции φ и ψ правильны в области D, ограниченной замкнутым контуром C, то на основании первой формулы Грина (I, § 123) имеем:

$$\iint\limits_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dx\,dy = \int\limits_C \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dy - \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx,$$

где криволинейный интеграл взят в направлении положительного обхода контура C. Пусть α и β — углы (отсчитываемые от 0 до π), которые образует с осями координат положительное направление касательной MT к контуру C, α' и β' — углы, образуемые направлением *внутренней* нормали MN с этими же осями. Очевидно, имеем:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = 0$$

С другой стороны, предположим также, что через точку M контура C проведены две полупрямые Mx' и My', соответственно параллельные Ox и Oy; вращение, которое приводит Mx' в совпадение с MT, приведет также My' к совпадению с MN, следовательно, имеем $\cos\beta' = \cos\alpha$, откуда $\cos\alpha' = -\cos\beta$.

Следовательно, в криволинейном интеграле можно заменить dx через $\cos\beta'\,ds$ и dy через $-\cos\alpha'\,ds$, и предыдущая формула примет вид:

$$\iint\limits_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dx\,dy = \int\limits_C \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta'\right)ds - \\ - \int\limits_C \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta'\right)ds.$$

Но $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta'$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta'$ в точности представляют (§ 501) производные $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\psi}{dn}$, взятые по внутренней нормали, и мы таким образом получаем новую формулу Грина:

$$\iint\limits_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dx\,dy + \int\limits_C \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right)ds = 0. \tag{10}$$

Заметим раз навсегда, что в этом и во всех подобных интегралах ds существенно положительно, и потому нет нужды оговариваться в каком направлении обходится контур. Контур может состоять из отдельных замкнутых кривых, но направление внутренней нормали контура всегда то, которое проникает в область D; оно совпадает с направлением внешней нормали к геометрической кривой, когда последняя ограничивает область изнутри.

Важно также отметить, что формула (10), в которую входят производные $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\psi}{dn}$, предполагает, что частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}\ldots$ имеют конечные значения на контуре. Когда говорят, например, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ имеет конечное значение в точке M контура C, то это означает, что значение $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в точке m области D, лежащей на прямой, проведенной из M параллельно Ox, стремится к пределу, когда m стремится к M; то же относится и к другим производным. Эти условия, конечно, соблюдены, когда φ и ψ правильны в некоторой области, внутри которой расположен контур C, однако последнее условие не является необходимым; мы можем не делать никаких предположений относительно поведения функции φ и ψ вне контура.

Из общей формулы (10) можно вывести несколько важных частных формул. Если φ и ψ — две гармонические функции в области D, то формула (10) примет вид:

$$\int_C \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) ds = 0, \tag{11}$$

где φ и ψ заменены через U и V.

Положим, далее, что $\psi = 1$, и заменим φ гармонической функцией U или квадратом гармонической функции U^2; тогда получим две новые формулы

$$\int_C \frac{dU}{dn} ds = 0, \tag{12}$$

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx\,dy + \int_C U \frac{dU}{dn} ds = 0. \tag{12bis}$$

Первое из этих соотношений характеризует гармонические функции, так как левая часть его на основании общей формулы (10) равна $-\iint_D \Delta U\,dx\,dy$, и следовательно, каков бы ни был контур C, интеграл (12) может равняться нулю только в том случае, когда имеем тождественно $\Delta U = 0$.

507. Приложения к гармоническим функциям. Пусть P — точка области D с координатами (a, b), $U(x, y)$ — гармоническая функция в этой области. Положим $V = \log r$, где через r обозначено расстояние точки P от переменной точки (x, y), и применим общую формулу (11) к области D', ограниченной контуром C и кругом γ, описанным из P, как центра, радиусом ρ столь малым, чтобы круг целиком находился внутри D.

Так как функции U и V правильны внутри D', то имеет место равенство:

$$\int_C \left(U \frac{d \log r}{dn} - \log r \frac{dU}{dn} \right) ds = \int_\gamma \left(U \frac{d \log r}{dn} - \log r \frac{dU}{dn} \right) ds,$$

где производные $\frac{d}{dn}$ вдоль круга γ взяты по его внутренней нормали. Следовательно, криволинейный интеграл вдоль γ не зависит от радиуса ρ, а потому, чтобы определить его величину, достаточно найти предел его при $\rho = 0$. Вторая часть этого интеграла может быть написана в виде:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dU}{dn} \rho \log \rho \, d\varphi$$

и, очевидно, стремится к нулю вместе с ρ. Что же касается первой части, отметим, что вдоль γ имеем:

$$\frac{d \log r}{dn} = -\frac{1}{\rho}, \quad ds = \rho\, d\varphi,$$

и интеграл может быть написан в виде:

$$-\int_0^{2\pi} [U(a, b) + \varepsilon]\, d\varphi,$$

где ε бесконечно мало вместе с ρ. Следовательно, искомый предел равен

$$-2\pi U(a, b),$$

и мы получаем основную формулу:

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\log r \frac{dU}{dn} - U \frac{d \log r}{dn} \right) ds, \tag{13}$$

причем производные $\frac{d}{dn}$ всюду взяты по внутренней нормали.

Едва ли нужно указывать на аналогию между полученным здесь результатом и основной формулой интеграла Коши (II, § 291), из которой, впрочем, можно вывести нашу формулу (13) (упражнение 1).

Если контур C представляет собою окружность радиуса R с центром в P, то вдоль всего контура имеем:

$$\log r = \log R, \quad \frac{d \log r}{dn} = -\frac{1}{R}$$

и, принимая во внимание равенство (12), получаем *формулу среднего значения* Гаусса:

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi R} \int_C U\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\psi)\, d\psi, \tag{14}$$

где $U(\psi)$ — значение U на конце радиуса, образующего угол ψ с произвольным постоянным направлением. Отсюда легко вывести, что *гармоническая функция не может иметь ни максимума, ни минимума* (§ 503). Предположим, например, что $U(x, y)$ имеет максимум в точке P. Опишем из этой точки, как из центра, окружность C достаточно малого радиуса, чтобы во всякой точке C было: $U(\psi) < U(a, b)$. Ясно, что равенство (14) было бы невозможно. Доказательство это применимо также к случаю, если $U(x, y)$ имеет в точке P *несобственный* максимум. Предположение, что $U(\psi)$ может быть постоянно равна значению U в точке P, как бы мал радиус окружности C ни был, очевидно, следует отбросить, так как в этом случае функция превратилась бы в постоянную величину (§ 503).

Пусть A и B — максимальное и минимальное значения некоторой гармонической функции вдоль контура C. Эта функция не может принимать внутри C никаких значений, больших A и меньших B, *ни значений, равных A и B*, так как тогда она непременно имела бы собственный или несобственный максимум в некоторой точке внутри контура.

Выведем другое важное следствие. Говорят, что функция $u(x, y)$, определенная внутри C, принимает значение u_M в некоторой точке M контура C, когда разность $u_P - u_M$ стремится к нулю одновременно с расстоянием MP, где P некоторая точка внутри C. Внутри замкнутого контура C не может существовать более одной гармонической функции, принимающей заданное значение в каждой точке M контура C, причем это значение непрерывно изменяется с изменением положения точки M. В самом деле, если бы существовали две такие функции, то разность их была бы гармонической функцией внутри C, исчезающей вдоль всего контура C; если бы эта разность не равнялась тождественно нулю, она непременно имела бы максимум или минимум внутри C, что невозможно. Формула (13) не дает решения задачи, известной под именем *задачи Дирихле*, которая состоит в том, чтобы определить U, зная ее значения на контуре C, так как правая часть содержит U и $\frac{dU}{dn}$. Из только что сказанного, наоборот, следует, что нельзя произвольно выбирать значения U и $\frac{dU}{dn}$ вдоль C, т. е. формула (13) содержит *лишние* данные. Это никоим образом не противоречит теоремам существования Коши, так как задача, которую требуется решить, совершенно отлична от задачи Коши С одной стороны, контур C, являющийся носителем данных, и сами данные не являются непременно аналитическими; с другой стороны, вопрос заключается в том, чтобы определить функцию *во всей области внутри* замкнутого контура, а не только *вблизи* дуги кривой по одну и по другую стороны этой дуги.

508. Интеграл Пуассона. Свойства потенциала двойного слоя позволяют легко решить задачу Дирихле, когда контур C представляет окружность. Пусть $U(M)$ — функция, изменяющаяся непрерывно с изменением положения точки M на C, P — внутренняя точка. Потенциал двойного слоя

$$V(a, b) = \int_C U(M) \frac{\cos\varphi}{r} ds, \tag{15}$$

где r и φ имеют обычный смысл, есть внутри круга гармоническая функция координат (a, b) точки P. Когда точка P совпадает с какой-нибудь точкой контура C, то для всякого положения точки M на этом контуре $r = 2R\cos\varphi$, где R — радиус окружности, а потому интеграл (15) имеет постоянное значение

$$\int_C U(M) \frac{ds}{2R}$$

в любой точке C. Согласно общей теореме § 505, когда точка P, лежащая внутри круга, стремится к точке M_0 на окружности, функция $V(a, b)$ стремится к

$$\pi U(M_0) + \int_C \frac{U(M)\, ds}{2R}.$$

Следовательно, функция, представленная определенным интегралом

$$U(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_C U(M) \left(\frac{\cos \varphi}{r} - \frac{1}{2R} \right) ds \tag{16}$$

дает решение задачи Дирихле для круга. Обычно этот интеграл пишут в следующей форме, рассмотренной Пуассоном. Пусть за начало координат принят центр круга, (ρ, θ) суть полярные координаты точки P, а (R, ψ) — координаты точки M окружности C. Принимая во внимание соотношения

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi,$$
$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \theta),$$

можем написать формулу (16) в виде:

$$\left. \begin{aligned} U(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{(R^2 - \rho^2)\, d\psi}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \theta)}, \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

где $f(\psi)$ поставлено вместо $U(M)$.

Формулу (17) можно также вывести из общей формулы (13) при помощи искусственного приема, основанного на одном геометрическом свойстве окружности, позволяющего исключить $\frac{dU}{dn}$. Пусть P_1 — точка, гармонически сопряженная с P по отношению к концам диаметра, проходящего через P, и r_1 — расстояние точки P_1 от некоторой точки (x, y). Функция $\log r_1$, будучи гармонической внутри круга C, удовлетворяет соотношению (13):

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \left(U \frac{d \log r_1}{dn} - \log r_1 \frac{dU}{dn} \right) ds = 0, \tag{13'}$$

где U — искомая гармоническая функция, значения которой на C заданы. Складывая равенства (13) и (13'), получаем:

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_C U \left(\frac{d \log r_1}{dn} - \frac{d \log r}{dn} \right) ds, \tag{18}$$

так как коэфициент при $\frac{dU}{dn}$ под знаком интеграла, $\log\frac{r}{r_1}$, остается постоянным на окружности C, и, следовательно, соответствующий интеграл в силу соотношения (12) равен нулю. Пусть ρ и ρ_1 суть расстояния OP и OP_1, φ_1 — угол внутренней нормали в точке M окружности C с MP; имеем соотношения

$$\frac{d\log r}{dn}=-\frac{\cos\varphi}{r};\quad \frac{d\log r_1}{dn}=-\frac{\cos\varphi_1}{r_1};\quad \rho\rho_1=R^2;\quad \frac{r}{r}=\frac{R}{\rho};$$

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos\varphi,\quad \rho_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos\varphi_1,$$

откуда, исключая φ, φ_1, r_1, ρ_1, получаем:

$$\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{\cos\varphi_1}{r_1}=\frac{R^2-\rho^2}{Rr^2},$$

что действительно доказывает равнозначность формул (17) и (18).

Второе доказательство менее полно, чем первое, ибо оно предполагает, что $\frac{dU}{dn}$ имеет конечное значение вдоль C, а с другой стороны, не доказывает, что значение интеграла (18) действительно стремится к данному значению U в точке M окружности C, когда точка P стремится к точке M.

Приложение. Допустим, что $f(\psi)\geqslant 0$ вдоль C; тогда $U(a, b)$ положительно для всякой внутренней точки; так как r изменяется от минимума $R-\rho$ до максимума $R+\rho$, то, заменяя в формуле (17) последовательно r через $R-\rho$ и $R+\rho$ и замечая, что

$$\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi=2\pi U_0,$$

очевидно имеем:

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}U_0<U_P<\frac{R+\rho}{R-\rho}U_0, \tag{19}$$

где U_0 и U_P — значения $U(a, b)$ в центре круга и в точке P. Отсюда можно вывести, что абсолютная величина U_P-U_0 меньше, чем разность двух крайних членов этого двойного неравенства, $\frac{4R\rho}{R^2-\rho^2}U_0$. Если некоторая гармоническая функция U правильна и положительна на всей плоскости, то можно предположить число R сколь угодно большим и, следовательно, $\frac{4R\rho}{R^2-\rho^2}U_0$ меньшим любого заданного числа. Итак, имеем $U_P=U_0$, что доказывает, что *всякая гармоническая функция, положительная во всей плоскости, есть постоянная.*

Еще общее: *всякая функция, гармоническая на всей плоскости, ограниченная сверху или снизу, есть постоянная.* В самом деле, если, например, мы имеем: $U(x, y)<C$, то функция $C-U(x, y)$ является гармонической функцией, положительной на всей плоскости. Это предложение соответствует теореме Лиувилля (II, § 294).

Рассмотрим еще случай, когда функция $f(\psi)$ испытывает на окружности конечное число разрывов *первого рода*. Интеграл Пуассона остается гармонической функцией внутри круга. Когда внутренняя точка круга P стремится к точке M окружности, где $f(\psi)$ непрерывна, то $f(\psi)$ попрежнему является пределом интеграла и не приходится ничего изменять в рассуждении. Остается исследовать поведение функции $U(a, b)$ вблизи точки разрыва функции $f(\psi)$.

Возьмем сначала частный случай, когда $f(\psi) = \psi$, где ψ — центральный угол, отсчитываемый в положительном направлении от $-\pi$ до $+\pi$ от начального радиуса OA', противоположного радиусу OA, который оканчивается точкой разрыва A. Интеграл (16) может быть написан:

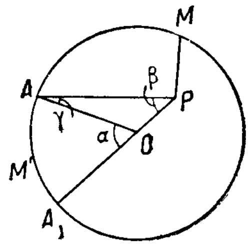
$$u(a, b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \psi\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds = \frac{1}{\pi}\int \psi\, d\omega, \tag{20}$$

где ω — угол, отсчитываемый от 0 до 2π в положительном направлении, между направлением PM и постоянным направлением; в самом деле, очевидно, что интеграл $\int\limits_C \psi\frac{ds}{R}$ равен нулю, а $\frac{\cos\varphi}{r}ds$ равен $d\omega$ (§ 505). Ясно, что если точка P расположена на диаметре, проходящем через точку A, то имеем: $u(a, b) = 0$, так как элементы, симметричные по отношению к диаметру, попарно уничтожаются. Если точка P не лежит на этом диаметре, то пусть будет A_1 — один из концов диаметра, проходящего через P, и $u_1(a, b)$ — интеграл $\frac{1}{\pi}\int\limits_C \psi_1\, d\omega$, где ψ_1 — центральный угол, отсчитываемый от радиуса OA'_1, противоположного OA_1, в положительном направлении от $-\pi$ до $+\pi$. В соответствии с только что изложенным $u_1(a, b) = 0$. Итак, можно написать:

$$u(a, b) = u(a, b) - u_1(a, b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{A'MA}(\psi - \psi_1)d\omega + \frac{1}{\pi}\int\limits_{AM'A_1}(\psi - \psi_1)\, d\omega;$$

вдоль A_1MA имеем: $\psi - \psi_1 = \alpha$ (черт. 89), тогда как вдоль $AM'A_1$ имеем: $\psi - \psi_1 = \alpha - 2\pi$. Отсюда

$$u(a, b) = \frac{1}{\pi}\alpha(2\pi - \beta) + \frac{1}{\pi}(\alpha - 2\pi)\beta = 2(\alpha - \beta) = 2\gamma.$$



Черт. 89.

Следовательно, в случае, представленном на чертеже, *интеграл $u(a, b)$ равен двойному углу γ между направлениями AP и AO, отсчитываемому от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении*; было бы легко показать, что это соотношение имеет место во всех случаях, представляемых этим чертежом, но достаточно заметить, что если это соотношение установлено для одной части круга, то оно имеет место во всем круге, так как оба члена суть гармонические функции в этом круге.

Возьмем теперь общий случай, когда $f(\psi)$ имеет разрыв первого рода в точке A. Помня, что угол ψ отсчитывается, как только что было указано, от $-\pi$ до $+\pi$, начиная от радиуса OA', допустим, что имеют место соотношения:

$$f(\pi - 0) = l, \quad f(-\pi + 0) = m \quad (l \neq m).$$

Разность $f(\psi) - \frac{l - m}{2\pi}\psi$ есть функция $f_1(\psi)$, непрерывная вблизи точки A, принимающая в этой точке значение $\frac{l + m}{2}$, и интеграл Пуассона (17) представляется суммой двух интегралов

$$\frac{l - m}{2\pi}u(a, b), \qquad U_1(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f_1(\psi)\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}d\psi,$$

причем оба интеграла суть гармонические функции внутри C. Когда точка P стремится к точке A, предел $U_1(a, b)$ равен $\frac{l+m}{2\pi}$, тогда как предел $\frac{l-m}{2\pi}u(a, b)$ зависит от того, каким образом точка P стремится к точке A, и изменяется от $-\frac{l-m}{2}$ до $\frac{l-m}{2}$. В частности, если точка P описывает радиус OA, предел $U(a, b)$ равен $\frac{l+m}{2}$. Когда точка P приближается к A так, что направление AP не имеет предела, то не существует предела и для $U(a, b)$ *.

509. Связь интеграла Пуассона с рядом Фурье. Интеграл Пуассона тесно связан с теорией тригонометрических рядов. Для простоты положим $R=1$, вследствие чего вместо $\frac{\rho}{R}$ будем писать ρ. Разложение на простые дроби дает:

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega+\rho^2} = -1 + \frac{1}{1-\rho e^{\omega i}} + \frac{1}{1-\rho e^{-\omega i}};$$

с другой стороны, так как ρ меньше единицы, имеем:

$$\frac{1}{1-\rho e^{\omega i}} = 1 + \rho e^{\omega i} + \rho^2 e^{2\omega i} + \ldots + \rho^n e^{n\omega i} + \ldots,$$

и аналогичное тождество, получаемое при замене i на $-i$.

Складывая оба равенства, получим отсюда

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega+\rho^2} = 1 + 2\sum^{+\infty}\rho^n\cos n\omega,$$

причем ряд, входящий в правую часть, *равномерно сходится*, в силу предположения, что $\rho<1$. Заменим ω через $\psi-\theta$, умножим на $f(\psi)$ и интегрируем от 0 до 2π; формула (17) примет вид:

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi-\theta)\,d\psi$$

или

$$U(a, b) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta), \tag{21}$$

где α_n и β_n представляют в точности коэфициенты ряда Фурье для непрерывной функции $f(\psi)$ (т. I, ч. II, § 197). Заметим, что это разложение функции $U(a, b)$ совпадает с действительной частью целого ряда для $z=a+ib$:

$$F(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n - i\beta_n)(a+ib)^n,$$

который заведомо сходится внутри круга радиуса единицы, ибо абсолютные величины коэфициентов α_n и β_n ниже верхнего предела $|f(\psi)|$ (§ 503).

Формула (21) доказана для всех точек внутри круга радиуса единицы; если ряд Фурье, полученный из $f(\psi)$, сходится для некоторого значения ψ, то равенство существует для $\rho=1$, $\theta=\psi$. В самом деле, когда точка (a, b) приближается к точке $(\cos\psi, \sin\psi)$ окружности, двигаясь по радиусу, то пределом $U(a, b)$ будет $f(\psi)$; с другой стороны, на основании теоремы Абеля, предел правой части равен сумме ряда, получаемого, если положить $\rho=1$, $\theta=\psi$.

---

* Фату (Fatou) исследовал интеграл Пуассона, делая гораздо более общие предположения относительно $f(\psi)$ (*Acta mathematica*, *t.* XXX, 1907). См. также мемуар Лихтенштейна в томе 141 *Journal du Crelle*, стр. 12.

Однако, не делая никаких предположений относительно сходимости ряда Фурье, теория интеграла Пуассона доказывает, что *для любой непрерывной функции* всегда удовлетворяется равенство:

$$f(\psi)=\lim_{\rho=1}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n(\alpha_n\cos n\psi+\beta_n\sin n\psi)\right], \tag{22}$$

где α_0, α_n, β_n коэфициенты ряда Фурье для $f(\psi)$. Пикар вывел отсюда изящное доказательство одной теоремы Вейерштрасса (см. ниже § 531).

Обратно, можно было бы поставить себе целью вывести интеграл Пуассона из ряда Фурье. Пусть $f(\psi)$ непрерывная функция, имеющая период в 2π и разложимая в ряд Фурье

$$f(\psi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos n\psi+\beta_n\sin n\psi). \tag{23}$$

Ряд (21), который получается, если принять для α_0, α_n, β_n те же самые значения, как в ряде (23), равномерно сходится во всяком круге радиуса $\rho<1$, описанном из начала. Следовательно, к этому ряду можно применить последовательно преобразования, обратные тем, которые были проведены, и вернуться от этого ряда к интегралу Пуассона. Полученная таким образом функция

$$U(a,\ b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{(1-\rho^2)\,d\psi}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\theta)}$$

в самом деле представляет функцию, гармоническую внутри круга C. Однако если бы этот интеграл не был уже исследован непосредственно, то мы могли бы утверждать только одно, а именно, что значение $U(a,\ b)$ стремится к $f(\psi)$, когда точка $(a,\ b)$ стремится к точке $(\cos\psi\sin\psi)$, *двигаясь по радиусу, конец которого совпадает с данной точкой*. Итак, первое доказательство более полно и, между прочим, оно не предполагает, что $f(\psi)$ разложима в ряд Фурье.

510. Теорема Гарнака. Теорема Гарнака аналогична теореме Вейерштрасса для рядов голоморфных функций (II, § 290). Пусть $u_0(x,\ y)$, $u_1(x,\ y),\ \ldots,\ u_n(x,\ y)\ \ldots$ последовательность функций, гармонических в некоторой конечной области D, ограниченной контуром Γ, который может состоять из одной или нескольких замкнутых кривых. ***Если ряд $\Sigma u_i(x,\ y)$ равномерно сходится вдоль Γ, то он равномерно сходится и в области D.***

Пусть U_i значение $u_i(x,\ y)$ в некоторой точке контура Γ. Согласно определению равномерной сходимости, если ε произвольное положительное число, то мы можем выбрать такое целое число n, что, каково бы ни было p, в любой точке контура Γ будем иметь:

$$|U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}|<\varepsilon;$$

это неравенство сохраняет силу также для максимального значения левой части на контуре Γ. Отсюда, если $(x,\ y)$ координаты какой-нибудь внутренней точки области D, то мы будем иметь:

$$|u_{n+1}(x,\ y)+\ldots+u_{n+p}(x,\ y)|<\varepsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость.

Сумма ряда

$$F(x,\ y)=\sum_0^{+\infty}u_i(x,\ y)$$

есть непрерывная функция внутри области D *и на самом контуре*; когда некоторая точка P области D стремится к точке M контура Γ, то сумма ряда в точке P стремится к сумме ряда в точке M, каким бы способом точка P ни приближалась к M. *Эта функция* $F(x, y)$ *является гармонической функцией внутри* D.

Очевидно, достаточно показать, что это имеет место внутри некоторого круга C, содержащегося в D. Пусть (x, y) — координаты некоторой точки P внутри круга C; на основании формулы Пуассона имеем:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C U_i \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds,$$

где R, ρ, r имеют тот же смысл, как и выше (§ 508), а U_i есть значение u_i в точках круга C. Отсюда следует:

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \int\limits_C U_i \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left(\sum_{i=0}^{+\infty} U_i \right) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds,$$

ибо если ряд ΣU_i равномерно сходится на окружности C, то же самое имеет место для ряда $\frac{1}{r^2} \Sigma U_i$, и можно переставить знаки интеграла и суммы. Последнее выражение для $F(x, y)$ показывает, что эта функция является гармонической внутри C. Таким же образом можно показать, что частные производные от $F(x, y)$ представляют собой суммы рядов, получаемых при почленном диференцировании первого ряда (II, § 290).

Приложение. Пусть C и C_1 две окружности с центром в начале и радиусами R и R_1 $(R > R_1)$, и $U(\varphi)$, $V(\varphi)$ — две непрерывные периодические функции с периодом 2π, удовлетворяющие условиям Дирихле. Эти функции разложимы в *равномерно сходящиеся* ряды Фурье (§ 493, стр. 114):

$$U(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$V(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Теорема Гарнака позволяет легко построить функцию, гармоническую внутри кольца, заключенного между двумя окружностями C и C_1, и обращающуюся соответственно в $U(\varphi)$ или $V(\varphi)$ на этих двух окружностях, причем φ — аргумент, соответствующий некоторой точке на C или на C_1.

В самом деле, положим:

$$F(r, \varphi) = A_0 + B_0 \log r + \sum_{m=1}^{+\infty} [(A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos m\varphi + (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin m\varphi],$$

где A_m, B_m, C_m, D_m — постоянные коэфициенты. Все члены этого ряда являются гармоническими функциями внутри рассматриваемого кольца, что следует из равенства $z^{-n} = r^{-m}(\cos m\varphi - i \sin m\varphi)$. Следовательно, на основании теоремы Гарнака, достаточно выбрать коэфициенты таким образом, чтобы ряд $F(r, \varphi)$ обращался в $U(\varphi)$ при $r=R$ и в $V(\varphi)$ при $r=R_1$. Таким образом получаем следующие соотношения для определения коэфициентов:

$$A_0+B_0 \operatorname{Log} R=\frac{a_0}{2}, \quad A_m R^m+B_m R^{-m}=a_m, \quad C_m R^m+D_m R^{-m}=b_m,$$

$$A_0+B_0 \operatorname{Log} R_1=\frac{\alpha_0}{2}, \quad A_m R_1^m+B_m R_1^{-m}=\alpha_m, \quad C_m R_1^m+D_m R_1^{-m}=\beta_m.$$

Когда все гармонические функции некоторой последовательности *положительны* внутри односвязной области D, то имеет место следующая теорема: *если ряд $\Sigma u_i(x, y)$, все члены которого являются гармоническими положительными функциями внутри области D, сходится в одной точке O внутри D, то он сходится во всех точках области D, и сумма этого ряда представляет гармоническую функцию.*

Из точки D, как из центра, опишем окружность C радиуса R столь малую, чтобы она была целиком расположена внутри D, и пусть P — произвольная внутренняя точка круга C, отстоящая от точки O на расстоянии $\rho<R$. На основании неравенства (19), выведенного выше, для всех значений i имеем:

$$(u_i)_P<\frac{R+\rho}{R-\rho}(u_i)_0,$$

что доказывает, что ряд $\Sigma u_i\ (x,y)$, сходится в точке P. То же неравенство доказывает, что этот ряд равномерно сходится внутри всякого круга C' радиуса $R'<R$, имеющего центром O, следовательно, он представляет гармоническую функцию внутри круга C. Будем теперь исходить из другой точки O_1 внутри C и опишем новый круг C_1 с центром в O_1, расположенный внутри D; идя последовательно далее при помощи цепи кругов, как в случае аналитического продолжения (II, гл. XVI), мы убеждаемся, что ряд сходится в любой точке области D и представляет гармоническую функцию. Таким же способом можно легко показать, что ряд сходится равномерно во всякой области, лежащей внутри D и не имеющей общих точек с ее границей.

511. Аналитическое продолжение гармонической функции. Прежде всего вспомним определение дуги аналитической кривой (I, § 189). Дуга кривой AB, выражаемая уравнениями $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, где параметр t изменяется от a до b, есть дуга *аналитической кривой*, если обе функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ разложимы в целые ряды по степеням $t-t_0$, в окрестности любого значения t_0, взятого между a и b; разумеется, коэфициенты этих рядов должны быть действительными числами. Если обе производные $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ не обращаются в нуль одновременно, то соответствующая точка M_0 является *обыкновенной, или правильной, точкой*. Если эти две производные равны нулю для $t=t_0$, то M_0 — особая точка за исключением случая, когда каждой точке M на дуге, соседней с M_0, соответствует несколько значений t, соседних с t_0 вследствие самого выбора параметра t. Дуга аналитической кривой, не имеющая особых точек, называется *правильной дугой*.

Пусть $u\ (x,y)$ функция двух переменных x,y, определенная в области D, внутри которой расположена дуга аналитической кривой AB. Значение этой функции в некоторой точке дуги есть ф нкция $F(t)$ параметра t, которая, очевидно, будет аналитической, если сама функция

$u(x, y)$ является аналитической внутри D и, в частности, если $u(x, y)$ — гармоническая функция. Принимая это во внимание, положим, что $u(x, y)$ — гармоническая функция внутри области D, ограниченной контуром Γ, часть которого образована дугой аналитической кривой AB. Мы будем говорить, что эта гармоническая функция $u(x, y)$ может быть продолжена за дугу AB, если можно найти функцию $U(x, y)$, гармоническую внутри области $\mathfrak{D}$, заключающей область D и дугу AB, и совпадающую с $u(x, y)$ внутри D (II, § 342). Для того чтобы было возможно продолжить функцию за AB, *необходимо*, как только что было указано, *чтобы последовательность значений, принимаемых $u(x, y)$ вдоль AB, представляла аналитическую функцию от t.* Шварц показал, что это условие является достаточным, если дуга AB правильна: ***всякая функция, гармоническая внутри некоторой области, граница которой включает правильную дугу аналитической кривой AB, может быть продолжена за эту дугу, если последовательность значений, принимаемых функцией на этой дуге, сама образует аналитическую функцию.***

Допустим сперва, что дуга AB представляет собой отрезок оси x, и что некоторая функция $u(x, y)$, гармоническая внутри области D, расположенной над осью Ox и ограниченной частично отрезком AB, равна нулю на протяжении всего этого отрезка. Пусть D' — область, симметричная с областью D по отношению к оси Ox, и $v(x, y)$ — функция, которая во всякой точке $P'(x, -y)$ области D' принимает значение $-u(x, y)$, симметричное значению, принимаемому функцией $u(x, y)$ в точке P, симметричной с P'. Ясно, что $v(x, y)$ есть гармоническая функция внутри D'; функция $F(x, y)$, равная $u(x, y)$ внутри D и $v(x, y)$ внутри D', непрерывна во всей области $D+D'$. Отсюда не следует, что она является гармонической во всей этой области, ибо еще нет никаких оснований утверждать, что она допускает непрерывные производные во всякой точке дуги AB. Чтобы доказать это существенное обстоятельство, возьмем вокруг некоторой точки отрезка AB отрезок $\alpha\beta$ оси Ox столь малый, чтобы окружность C, описанная на $\alpha\beta$, как на диаметре, была целиком расположена внутри области $D+D'$; предложение будет доказано, если мы покажем, что $F(x, y)$ есть гармоническая функция внутри этого круга.

Через γ, γ' обозначим полуокружности, расположенные соответственно над отрезком $\alpha\beta$ и под ним.

Рассмотрим функцию, представляемую интегралом Пуассона, где R, ρ, r имеют обычный смысл (§ 508):

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \mu \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds$$

и где положено $\mu = u(x, y)$ вдоль γ и $\mu = v(x, y)$ вдоль γ'. Эта функция $U(x, y)$ есть гармоническая функция внутри C; она равна нулю вдоль $\alpha\beta$, ибо симметричные элементы интеграла взаимно уничтожаются.

Функция $U(x, y)$ совпадает с $u(x, y)$ в верхнем полукруге и с $v(x, y)$ в нижнем полукруге, ибо она принимает вдоль $\alpha\beta$ и вдоль γ те же самые значения, что $u(x, y)$, и вдоль $\alpha\beta$ и γ' те же значения, что $v(x, y)$. Следовательно, имеем $U(x, y) = F(x, y)$, внутри всего круга C.

Во-вторых, предположим, что функция $u(x, y)$, гармоническая внутри области D, расположенной над осью Ox, принимает вдоль отрезка AB оси Ox последовательность значений, образующую аналитическую функцию $f(x)$. Эта функция $f(x)$, будучи разложимой в целый ряд в окрестности всякой точки x_0 отрезка AB, тем самым определена внутри области R плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, заключающей отрезок AB (II, § 336, сноска). Действительная часть $u_1(x, y)$ функции $f(z)$ является гармонической функцией внутри R и обращается в $f(x)$ вдоль AB. Предположим, что область D расположена внутри R; разность $u(x, y)-u_1(x, y)$ является гармонической внутри D и равна нулю вдоль AB; как только что было доказано, она может быть продолжена вниз от AB. Так как функция $u_1(x, y)$ может быть продолжена вниз от AB, то то же самое имеет место для $u(x, y)$.

Возьмем, наконец, случай, когда AB — произвольная правильная дуга аналитической кривой, и пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, определенная по одну сторону этой дуги и притом такая, что последовательность значений, которые она принимает на AB, образует аналитическую функцию параметра t. Мы сейчас покажем, что если дана какая-нибудь точка M_0 на AB, то можно взять вокруг M_0 дугу $\alpha\beta$ столь малую, что функция $u(x, y)$ может быть продолжена за $\alpha\beta$. Пусть

$$\begin{aligned} x&=a_0+a_1(t-t_0)+\ldots+a_n(t-t_0)^n+\ldots \\ y&=b_0+b_1(t-t_0)+\ldots+b_n(t-t_0)^n+\ldots \end{aligned}$$

представляют разложение в ряд x и y вблизи значения t_0, соответствующего точке M_0. Положим

$$\begin{aligned} z=x+iy=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)(Z-t_0)+\ldots \\ +(a_n+ib_n)(Z-t_0)^n+\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

и пусть r — положительное число столь малое, что ряд (24) сходится, когда удовлетворяется соотношение $(Z-t_0)\leqslant r$. Предыдущее соотношение приводит в соответствие каждой точке круга γ радиуса r, описанного из точки $(X=t_0, Y=0)$, как центра на плоскости комплексного переменного $Z=X+iY$, точку (x, y) области d в окрестности точки M_0 плоскости xy. Если оба коэфицента a_1 и b_1 не обращаются одновременно в нуль, то $\frac{dz}{dZ}$ не равно нулю для $Z=t_0$. Следовательно, уравнение (24) имеет единственный корень $Z=\varphi(z)$, который стремится к t_0, когда z стремится к $z_0=a_0+ib_0$, и этот корень $\varphi(z)$ голоморфен в окрестности точки z_0. Мы будем предполагать, что радиус r окружности γ взят столь малым, что $\varphi(z)$ является голоморфной функцией во всей соответствующей области d. Соотношение (24) тогда выражает однозначное соответствие, с сохранением углов, между точками круга γ плоскости XY и точками области d плоскости xy; дуге $\alpha\beta$ отрезка AB, расположенной внутри d, соответствует отрезок $\alpha'\beta'$ действительной оси на плоскости XY. Гармоническая функция $u(x, y)$, определенная по одну сторону дуги $\alpha\beta$, преобразовывается в гармоническую функцию $U(X, Y)$ переменных X, Y, определенную с одной стороны отрезка $\alpha'\beta'$ действительной оси, и из сделанных предположений следует, что последовательность значений, которые эта функция принимает вдоль

$\alpha'\beta'$, представляет собой аналитическую функцию. Эта функция $U(X, Y)$ может быть, следовательно, продолжена по другую сторону отрезка $\alpha'\beta'$, а потому $u(x,y)$ может быть продолжена за дугу $\alpha\beta$.

Когда дуга AB имеет особые точки, может случиться, что аналитическое продолжение на всем протяжении дуги будет невозможно. Например, действительная часть выражения $\sqrt{x+iy}$, положительная вправо от начала на оси x, есть гармоническая функция вправо от полукубической параболы $y^2=x^3$. Последовательность значений, которые она принимает на этой кривой, является аналитической функцией, ибо, положив $x=t^2$, $y=t^3$, имеем $\sqrt{x+iy}=t\sqrt{1+it}$, и тем не менее начало есть особая точка для этой функции. Эта точка делит кривую на две правильные дуги, причем гармоническая функция может быть продолжена через каждую из них, но оба продолжения не совпадают влево от этой параболы.

Если функция $u(x, y)$ является гармонической внутри контура C, образованного некоторым числом правильных дуг аналитических кривых, и принимает аналитические значения на этом контуре, то она может быть продолжена за каждую из этих дуг, и единственные возможные особые точки суть точки контура, в которых соединяются две правильные дуги аналитической кривой. В частности, если контур образован единственной правильной дугой аналитической кривой, как окружность или эллипс, то всякая функция, гармоническая внутри контура и принимающая аналитические значения на контуре C, может быть продолжена в область, охватывающую этот контур *.

II. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. ФУНКЦИЯ ГРИНА.

512. Доказательство Римана. Выше было доказано, что задача Дирихле не может допускать более одного решения **, причем это единственное решение было найдено для случая, когда контур представляет собой окружность. Займемся теперь этой задачей в общем случае и прежде всего воспроизведем рассуждение, посредством которого Риман доказы-

---

* Теорема Шварца показывает, что задача Коши представляется в совершенно другом виде для уравнения Лапласа, чем для гиперболического уравнения. Пусть $u(x,y)$, $v(x,y)$ — две функции, гармонические внутри области D, лежащей вправо от Oy, ограниченной частично отрезком AB оси Oy. Если вдоль AB эти две функции u и v обращаются в одну и ту же функцию $f(y)$, то разность $u-v$ является гармонической функцией, которая может быть продолжена влево от Oy и, следовательно, $\frac{d(u-v)}{dx}$ является аналитической функцией от y вдоль отрезка AB. Отсюда вытекает, что нельзя ставить задачу — найти гармоническую функцию $u(x,y)$ внутри области D, обращающуюся при $x=0$ в данную функцию $f(y)$ вдоль AB, между тем как $\frac{\partial u}{\partial x}$ равна другой заданной функции $g(y)$, если при этом обе эти функции $f(y)$ и $g(y)$ произвольны.

Пусть, в самом деле, $v(x,y)$ есть гармоническая функция, удовлетворяющая первому условию. Разность $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}$ является аналитической функцией от y вдоль AB, и, следовательно, функция $g(y)$ определена с точностью до аналитической функции, когда задана $f(y)$.

** Невозможность двух решений задачи Дирихле может быть выведена также из формулы (12 bis) (§ 506). В самом деле, эта формула показывает, что если невает, что эта задача, которую он называет *принципом Дирихле*, допускает всегда решение. Пусть D замкнутая область, ограниченная контуром Γ, состоящим из одной или нескольких отдельных замкнутых кривых. Ради краткости будем говорить, что функция $v(x, y)$, определенная внутри D и на контуре Γ, принадлежит к классу (A), если она удовлетворяет следующим условиям: 1) она непрерывна в области D, включая и контур Γ; 2) она принимает на этом контуре заданные значения, причем значение функции в каждой точке контура Γ изменяется непрерывно с изменением положения этой точки; 3) она допускает непрерывные частные производные первого и второго порядка во всякой *внутренней* точке области D. Относительно частных производных в точках контура не делается при этом никаких предположений.

Для всех функций класса (A) двойной интеграл

$$I=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{25}$$

очевидно, положителен, если только u не равно постоянной внутри D и, следовательно, и на контуре Γ. Исключим этот случай, когда решение очевидно, и пусть $v(x, y)$ — функция класса (A), для которой интеграл I имеет *минимум*. Легко показать по Риману, что *$v(x, y)$ является гармонической функцией*. В самом деле, пусть $\eta(x, y)$ — функция, исчезающая на контуре Γ и непрерывная вместе со своими производными первого и второго порядков внутри D и на самом контуре, α — произвольный параметр. Функция

$$u=v(x, y)+\alpha\eta(x, y)$$

принадлежит к классу (A), каково бы ни было α, и разность

$$\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy-\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

должна быть положительной. Но эта разность равна

$$2\alpha\iint\limits_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)dx\,dy+\alpha^2\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Чтобы эта разность была положительной при любом α, очевидно, необходимо, чтобы коэфициент при 2α был равен нулю.

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\eta\,\Delta v=\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

которая функция U равна нулю в каждой точке контура C и представляет гармоническую функцию внутри области, ограниченной этим контуром, то в каждой точке этой области будем иметь $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}=0$. Следовательно, функция имеет постоянную величину и равна нулю, так как она равна нулю на контуре C. Однако это доказательство предполагает, что функция U допускает непрерывные производные на контуре C, чего не требовалось при первом доказательстве.

и первую формулу Грина (I, § 116) можем написать этот коэфициент в виде:

$$\int_{\Gamma} \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) - \iint_{D} \eta \, \Delta v \, dx \, dy;$$

так как η равна нулю на всем протяжении контура Γ, то, очевидно, двойной интеграл

$$\iint_{D} \eta \, \Delta v \, dx \, dy$$

должен равняться нулю для всевозможных видов функций $\eta(x, y)$, удовлетворяющих поставленным условиям. Но это может быть только, если $\Delta v = 0$ во всех точках области D. Допустим, в самом деле, что в какой-нибудь точке x_0, y_0 внутри D имеем, например, $\Delta v > 0$. Опишем из этой точки, как центра, окружность C радиусом ρ столь малым, чтобы круг был целиком расположен внутри D, и чтобы в каждой точке круга C было $\Delta v > 0$. Если положить $\eta(x, y) = 0$ вне этого круга и

$$\eta(x, y) = [\rho^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]^m$$

внутри круга, то эта функция будет непрерывной вместе со своими производными первого и второго порядков при $m > 2$ и будет исчезать на контуре Γ. Ясно, что соответствующий двойной интеграл $\iint \eta \, \Delta v \, dx dy$, распространенный на область D, будет положителен. Следовательно, функция $v(x, y)$ есть гармоническая в области D.

Заключительная часть рассуждения бесспорна, но она опирается на два постулата, казавшиеся Риману очевидными, но, как было доказано более строгой критикой, являющиеся ошибочными. С одной стороны, допускается существование функций, принадлежащих к классу (A), для которых двойной интеграл I имеет конечное значение; с другой стороны, предполагается также, что существует по крайней мере одна из таких функций, для которой интеграл I действительно достигает нижнего предела. Вейерштрасс показал*, что этот последний пункт не может быть принят без доказательства. Позже Адамар дал простой пример, когда не существует никакой функции класса (A), для которой двойной интеграл I имел бы конечное значение**.

Итак, метод Римана не дает строгого доказательства принципа Дирихле, но он дает нам образец способа рассуждения, часто применяемого в математической физике, и он делает по крайней мере вероятным результат, который желательно установить.

Замечание. Выше уже было объяснено, как следует понимать утверждение, что некоторая функция, гармоническая в области D, принимает заданное значение в какой-нибудь точке контура. Если не принимать во внимание точного значения этого условия, то может показаться, что в известных случаях задача Дирихле до-

---

* Weierstrass, Mathematische Werke, t. II, S. 49.

** *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, p. 135. В этом примере контур Γ представляет собой круг, и, следовательно, задача Дирихле заведомо имеет решение (см. упражнение 5).

пускает несколько решений. Например, функция

$$u=\frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}$$

обращается в 0 во всякой точке окружности, выражаемой уравнением $x^2+y^2-2x=0$, и эта функция является гармонической внутри этого круга, ибо она представляет действительную часть выражения $1-\frac{2}{z}$; прибавляя Ku к другой функции, гармонической внутри C, казалось бы, можно получить бесконечное число функций, гармонических внутри C и принимающих то же самое значение на контуре. Чтобы объяснить этот парадокс, достаточно заметить, что значение $u(x, y)$ в некоторой точке P, расположенной внутри круга C близ начала, не стремится ни к какому пределу, когда эта точка P неограниченно приближается к началу. Следовательно, было бы неточно говорить, что функция $u(x, y)$ равна нулю в начале координат.

513. Способ Неймана. Нейману* принадлежит заслуга введения известного метода решения задачи Дирихле для случая *выпуклого* контура, имеющего лишь конечное число угловых точек. Приступаем к изложению с некоторыми изменениями в деталях этого метода, основанного на свойствах потенциала двойного слоя. Для определения положения точки M на замкнутом контуре C примем за переменный параметр длину s дуги AM, отсчитываемую от произвольного начала A. Всякая функция, имеющая определенное значение в каждой точке контура, будет в этом случае функцией $f(s)$ с периодом l, если l — длина замкнутого контура.

Эти условия принимаются лишь для уточнения обозначений; результаты абсолютно независимы от выбора параметра. Пусть $\mu(s)$ — непрерывная функция на контуре C; выше было показано (§ 505), что потенциал двойного слоя

$$W=\int\limits_C \mu\frac{\cos\varphi}{r}\,ds \tag{26}$$

есть гармоническая функция внутри C, принимающая в точке контура с криволинейной абсциссой x значение

$$w(x)=2\pi\mu(x)+\int\limits_C\left[\mu(s)-\mu(x)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds, \tag{27}$$

где вместо $\frac{\cos\varphi_x}{r_x}$ принято обозначение $\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x$, и r_x представляет расстояние от точки x до переменной точки s, а φ_x — угол между направлением sx и внутренней нормалью к контуру в точке s. Формула (27) является общей и применима также к угловым точкам контура.

Принимая это во внимание, положим, что $f(s)$ — заданная непрерывная функция с периодом l. Для решения задачи Дирихле, следуя Нейману, будем искать такую вспомогательную непрерывную функцию $\mu(s)$ с периодом l, чтобы потенциал двойного слоя W, выражаемый формулой (26) внутри C, принимал в точности значение $f(x)$ в каждой точке контура C.

* „Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential" (Leipzig, 1877).

Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu(s)$ удовлетворяла функциональному соотношению:

$$2\pi\mu(x)+\int_C\left[\mu(s)-\mu(x)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds=f(x); \tag{28}$$

к решению этого *интегрального уравнения* применим метод последовательных приближений, который впоследствии будет связан с общей теорией. Для этого напишем это уравнение, введя параметр λ, который впоследствии приравняем единице (§ 494):

$$\mu(x)=\frac{1}{2\pi}f(x)+\frac{\lambda}{2\pi}\int_C\left[\mu(x)-\mu(s)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds, \tag{29}$$

и будем искать разложение в ряд вида:

$$\mu(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\mu_0(x)+\lambda\mu_1(x)+\ldots+\lambda^n\mu_n(x)+\ldots\right], \tag{30}$$

формально удовлетворяющее уравнению (29).

Таким образом найдем последовательно:

$$\mu_0(x)=f(x),\qquad \mu_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\mu_0(x)-\mu_0(s)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds$$

и вообще:

$$\mu_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\mu_{n-1}(x)-\mu_{n-1}(s)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds. \tag{31}$$

Ясно, что все эти функции $\mu_i(x)$ обладают периодом l; если они *непрерывны*, и если ряд (30), в котором положено $\lambda=1$, ***равномерно сходится***, то сумма $\mu(x)$ есть непрерывная функция, действительно удовлетворяющая соотношению (28). Это легко непосредственно проверить, интегрируя почленно ряд, дающий разложение $\mu(s)-\mu(x)$, и принимая во внимание соотношение (31). Достаточно будет заменить $\mu(s)$ функцией, определенной таким образом в формуле (26), чтобы получить решение задачи Дирихле.

Необходимо теперь исследовать те пункты, которые остается обосновать, чтобы это решение не было только формальным. Во-первых, ***функции $\mu_i(x)$ непрерывны***. Вообще, если функция $f(x)$ непрерывна, то то же самое имеет место для функции

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[f(s)-f(x)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds;$$

в самом деле, если x_0 — какое-нибудь значение x, то можно написать:

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[f(s)-f(x_0)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds+\frac{1}{2\pi}\left[f(x_0)-f(x)\right]\int_C\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds$$

Рассуждение, приведенное на стр. 153, применимо здесь без изменений и доказывает, что первый интеграл есть непрерывная функция от x при $x=x_0$, и то же самое очевидно для второго интеграла. Продолжая таким образом шаг за шагом, убеждаемся, что все функции $\mu_1, \mu_2 \ldots$ непрерывны.

Для того чтобы доказать равномерную сходимость, необходимо предварительно вывести две леммы относительно выпуклых замкнутых контуров.

Лемма I. Пусть P_1 и P_2 — две какие-нибудь точки контура C, а C' — некоторая часть C, которая может состоять из нескольких отдельных дуг. Из геометрического смысла интеграла почти очевидно, что определенный интеграл

$$I=\int\limits_{C'}\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}-\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}\right]ds=\int\limits_{C'}\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}ds-\int\limits_{C'}\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}ds$$

по абсолютной величине меньше π. Чтобы он был равен π, необходимо, например, чтобы первый интеграл стал равен π, а второй был бы равен нулю. Но первый интеграл может быть равен π, только если контур C' или совпадает с контуром C или состоит из дуги AB, соединяющей две точки A и B, причем точка P_1 расположена на отрезке прямой AB; в обоих случаях второй интеграл не может равняться нулю, если только контур C не представляет собою треугольника. Абсолютная величина I остается, таким образом, меньше некоторого максимума $h\pi$, где h — положительное число, *меньшее единицы*, зависящее только от контура C*, но отнюдь не от C'.

Лемма II. Пусть $f(s)$ — функция положительная или равная нулю в каждой точке C, а J — интеграл:

$$J=\int\limits_{C}f(s)\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}-\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}\right]ds.$$

Разобьем контур C на две части C_1 и C_2 так, чтобы было:

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}\geqslant\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}$$

на C_1 и

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}<\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}$$

на C_2, и пусть J_1 и J_2 — интегралы, распространенные соответственно на C_1 и C_2. Имеем: $J=J_1+J_2$, и следовательно $|J|$ меньше, чем большее из двух чисел J_1 и $|J_2|$. Пусть будет L — верхняя граница $f(s)$; на основании предыдущей леммы каждое из этих двух чисел меньше, чем $L\cdot h\pi$. Таким образом имеем также $|J|<\pi hL$, каковы бы ни были точки P_1 и P_2.

---

* Это заключение не может считаться абсолютно строгим; но ясно, что оно точно для выпуклых контуров, подобных тем, которые обычно рассматриваются.

Установив это, положим, что M и m — максимум и минимум функции $f(s)$ на контуре C; если P_1 и P_2 — две точки контура, то мы можем написать:

$$\mu_1(x_1)-\mu_1(x_2)=\frac{1}{2\pi}\left[\mu_0(x_1)\int\limits_C\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}ds-\mu_0(x_2)\int\limits_C\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}ds\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left\{\mu_0(s)-m\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}-\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}\right]\right\}ds+$$
$$+\frac{m}{2\pi}\int\limits_C\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}-\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}\right]ds.$$

Если точки P_1 и P_2 — не угловые точки, то последний интеграл равен нулю, и абсолютная величина первого члена

$$\frac{1}{2}\left[\mu_0(x_1)-\mu_0(x_2)\right]$$

меньше, чем $\frac{M-m}{2}$. С другой стороны, разность $\mu_0(s)-m$ остается заключенной между 0 и $M-m$, и следовательно, на основании леммы II, абсолютная величина первого члена второй строки меньше, чем $\frac{M-m}{2}h$. Следовательно, абсолютная величина разности $\mu_1(x_1)-\mu_1(x_2)$ меньше, чем $(M-m)\left(\frac{1+h}{2}\right)=(M-m)\rho$, где ρ — *положительное число, меньшее единицы*. Так как $\mu_1(x)$ непрерывна, то это неравенство остается в силе, каковы бы ни были точки P_1 и P_2. Следовательно, обозначая через M_1 и m_1 максимум и минимум $\mu_1(x)$, имеем основное неравенство

$$M_1-m_1<(M-m)\rho. \tag{32}$$

Отсюда последовательно можно показать, что вообще

$$M_l-m_l<(M-m)\rho^l,$$

где M_l и m_l — максимум и минимум функции μ_l. Так как абсолютная величина разности $\mu_{l-1}(x)-\mu_{l-1}(s)$ остается меньше или в крайнем случае равна M_l-m_l, то и подавно на основании формулы (31) имеем:

$$|\mu_n(x)|<\frac{1}{2}(M-m)\rho^{n-1},$$

и следовательно, ряд (30) равномерно сходится при $\lambda=1$. Сумма $\mu(x)$ этого ряда есть непрерывная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (28), и, заменяя μ этой функцией в формуле (26), получим решение задачи Дирихле для выпуклого контура C.

Пример. Допустим, что C представляет окружность радиуса R; в этом случае имеем $\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x=\frac{1}{2R}$, какова бы ни была точка x контура. Положив

$\mu_0 = f(x)$, имеем непосредственно

$$\mu_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - K \right],$$

где

$$K = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_C f(s)\, ds;$$

и каково бы ни было n, рекуррентное соотношение (31) дает

$$\mu_n(x) = \frac{1}{2^n}\left[f(x) - K \right].$$

Итак, имеем:

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} f(x) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int\limits_C f(s)\, ds;$$

заменяя μ этим выражением в формуле (26), вновь получаем интеграл Пуассона (16), если вместо $f(s)$ писать U_M. Впрочем, в этом частном случае уравнение (28) легко разрешить непосредственно. В самом деле, очевидно, что $\mu(x)$ имеет вид $\frac{f(x)+H}{\pi}$, где H — постоянная, которую определяем, подставив это выражение вместо $\mu(x)$ в уравнение (28).

Метод Неймана и аналогичный метод в пространстве для выпуклых поверхностей были распространены на более общие случаи различными математиками*. Наиболее важное обобщение вытекает из работ Фредгольма и будет изложено ниже.

Введение вполне общего метода, называемого *методом выметания*** для решения задачи Дирихле в пространстве представляет заслугу Пуанкаре. Параф*** (Paraf) показал, что этот метод, с некоторыми изменениями, применим также к задаче Дирихле на плоскости. Сущность метода Шварца будет указана ниже.

514. Обобщение задачи. Для некоторых исследований представляет интерес исследование задачи несколько более общей, чем задача Дирихле. Пусть D — область, ограниченная замкнутым контуром C, который мы предположим состоящим из одной кривой. Каждой точке M контура C поставим в соответствие некоторое число U_M, изменяющееся вообще непрерывно с изменением положения точки M, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода (I, § 9), и поставим себе целью найти *функцию $u(x, y)$, гармоническую внутри D и принимающую значение U_M во всякой точке контура C, где U непрерывна.*

Мы не делаем никаких предположений a priori о свойствах искомой функции $u(x, y)$ вблизи точки разрыва функции U на этом контуре; поэтому не может быть речи о значении $u(x, y)$ в одной из таких точек. *Если известно решение задачи Дирихле для контура C, то всегда возможно найти одно решение обобщенной задачи.*

Пусть $A_i(\alpha_i, \beta_i)$ — точка разрыва функции U на контуре C; когда точка M стремится к этой точке A_i, то U_M стремится к двум различным пределам a_i, b_i

* Пуанкаре, Метод Неймана и задача Дирихле (*Acta mathematica*, т. XX). Этот мемуар является основным для этой теории. В последней статье Булигана (Bouligand) о гармонических функциях (*Mémorial des Sciences mathématiques*, вып. XI, 1926) можно найти полную библиографию новейших работ по этому вопросу; теорема о среднем значении играет существенную роль в некоторых из этих работ.

** *American Journal of Mathematics*, т. XII.

*** *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, т. VI, 1892.

в зависимости от того, описывает ли точка M контур C в положительном или отрицательном направлении. При этом функция

$$W_i(x, y) = \frac{a_i - b_i}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta_i}{x - \alpha_i},$$

где для arc tg выбрано какое-нибудь частное значение, есть гармоническая функция внутри D, и значение $(W_i)_M$, которое она принимает в некоторой точке M контура, изменяется непрерывно с изменением положения точки M, за исключением точки A_i, где она претерпевает тот же самый разрыв, как и заданная функция U. При этом предполагается, что эта точка A_i не является угловой точкой контура; если бы эта точка была точкой встречи двух дуг, пересекающихся под углом ω, то следовало бы заменить π через ω в знаменателе предыдущей формулы. Проделаем то же самое со всеми точками разрыва $A_1, A_2 \ldots A_n$ функции U. Разность

$$W_M = U_M - \sum_{i=1}^{n} (W_i)_M$$

изменяется непрерывно с изменением положения точки M на контуре C даже в точках, где функция U разрывна. Пусть $v(x, y)$ — гармоническая функция внутри D, принимающая значение W_M в каждой точке M контура C; функция

$$u(x, y) = v(x, y) + \sum_{i=1}^{n} W_i(x, y) \tag{33}$$

является гармонической внутри D, и в силу способа, которым она была получена, она действительно принимает значение U_M во всякой точке контура C, которая не является точкой разрыва для U. Это дает решение обобщенной задачи, и нахождение этого решения сводится к отысканию $v(x, y)$, т. е. к задаче Дирихле.

Формула (33) выясняет ход изменения функции $u(x, y)$ вблизи каждой точки разрыва функции U на контуре; эта функция есть сумма функции, стремящейся к определенному пределу, и выражения вида $K \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{x - \alpha}$, которое не имеет определенного значения в точке (α, β). Заметим только, что эта функция *ограничена* внутри D. Мы не можем утверждать, что $u(x, y)$ есть единственное решение обобщенной задачи, но оно единственное, остающееся ограниченным во всей области D. Мы это выведем из изящного предложения Зарембы *.

Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция внутри области D, ограниченной кривой C, обращающаяся в нуль в каждой точке C за исключением конечного числа точек A_1 $A_2 \ldots A_n$, относительно которых известно только, что отношение $\frac{u(x, y)}{\log r_i}$ стремится к нулю вместе с расстоянием r_i от точки A_i до произвольной точки (x, y) области D. Эта функция $u(x, y)$ равна нулю во всей области D.

В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число, а H — число, превышающее расстояние между двумя любыми точками области D. Ясно, что вспомогательная функция

$$v(x, y) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \log \frac{H}{r_i}$$

является гармонической функцией внутри D, положительной в этой области и на контуре C, где она непрерывна за исключением точек A_i. Из каждой точки A_i как центра опишем окружность весьма малого радиуса ρ, и пусть σ_i — дуга окружности, лежащая внутри D. Если вычесть из области D те ее части, которые попали внутрь этих маленьких кругов, то получим область D_ρ, ограниченную частями первоначального контура и дугами σ_i. Согласно предположениям, сделанным относительно функций $u(x, y)$, можно выбрать число ρ, столь малое, чтобы оба выражения

$$v(x, y) + u(x, y) \quad \text{и} \quad v(x, y) - u(x, y)$$

* *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1909.

были положительны на дугах σ_i. В самом деле, каждое из этих выражений представляет собой сумму из части, правильной в окрестности точки A_i, и члена, имеющего вид $(\eta_i - \varepsilon)\log r_i$, где η_i бесконечно мала вместе с ρ. Если ρ выбрано указанным образом, то обе функции $v(x, y) + u(x, y)$ и $v(x, y) - u(x, y)$ являются гармоническими внутри D_ρ и положительными на контуре, ограничивающем эту область. Следовательно, в каждой точке этой области имеем: $|u(x, y)| < v(x, y)$. Если дана какая-нибудь точка M внутри D, то всегда можно выбрать столь малый радиус ρ, чтобы эта точка находилась также внутри D_ρ, и, следовательно, предшествующее неравенство доказано для всякой точки области D. Очевидно, можно выбрать произвольное положительное число ε таким образом, чтобы в определенной точке $v(x, y)$ была меньше некоторого наперед заданного числа. Следовательно, каково бы ни было ε, неравенство это может существовать только в случае, если

$$u(x, y) = 0.$$

Ясно, что это заключение применимо и в частном случае, когда гармоническая функция $u(x, y)$, удовлетворяющая всем прочим условиям, изложенным выше, остается ограниченной внутри D. Если так, то при существовании двух решений обобщенной задачи Дирихле, ограниченных внутри D, разность их была бы гармонической функцией, ограниченной внутри D и обращающейся в нуль на контуре за исключением конечного числа точек; но, как мы только что видели, эта разность должна тождественно равняться нулю.

Примечание I. Если не ставить условия, чтобы гармоническая функция оставалась ограниченной внутри D, то обобщенная задача может допускать бесконечное число решений. Допустим, например, что C представляет собой окружность $x^2 + y^2 - 2x = 0$, и что начало представляет единственную точку разрыва функции U на этом контуре. Прибавляя к решению обобщенной задачи $u(x, y)$, остающемуся ограниченным внутри C, выражение $K\dfrac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$, где K обозначает произвольную постоянную, получим бесконечное множество решений той же задачи, но эти решения не являются ограниченными в данной области (§ 512, Примечание).

Примечание II. Пусть L и l — максимум и минимум разрывной функции U на контуре C; гармоническая функция $u(x, y)$, представляемая формулой (33), остается заключенной между L и l в области D. Чтобы показать, например, что $u(x, y)$ не принимает никакого значения, большего чем L, достаточно заменить $v(x, y)$ через

$$L + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{H}{r_i}\right)$$

в рассуждении Зарембы. Гармоническая функция $v(x, y) - u(x, y)$, будучи положительной на контуре, ограничивающем область D_ρ при условии, что ρ достаточно мало, положительна во всякой точке области D, но так как ε—произвольное положительное число, то это не могло бы иметь места, если бы $u(x, y)$ было больше L. Точно так же можно убедиться, что $u(x, y)$ не может принимать значения, меньшего l, в какой-нибудь точке области D; $u(x, y)$ не может принимать значения L и l, ибо тогда эта функция имела бы максимум или минимум внутри D (§ 503).

Мы уже видели, что на контуре C, вблизи точки разрыва A функции, U $u(x, y)$ имеет вид:

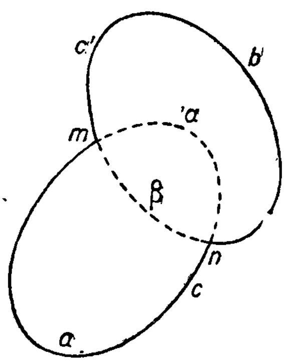
$$u(x, y) = V(x, y) + K \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{x - a},$$

где $V(x, y)$ стремится к определенному пределу, когда точка (x, y) стремится к A. Если точка (x, y) приближается к точке A по кривой, *касательная к которой в то же A не совпадает с касательной к контуру C*, то предельное значение арктангенса заключено между значениями дуги для этих двух направлений касательных к контуру C, проведенных из точки A и, следовательно, предельное значение $u(x, y)$ заключено между двумя предельными значениями a и b функции U_M, когда точка M стремится к точке A на контуре C.

515. Альтернирующий метод Шварца. Заслугой Шварца является введение альтернирующего процесса, применимого ко многим другим задачам и позволяющего переходить от выпуклого контура к другим контурам, гораздо менее частным. Этот процесс основан на одной лемме, которую мы и докажем прежде всего.

Пусть C — выпуклый контур или, общее, замкнутый контур, для которого известно решение задачи Дирихле, и пусть mn — дуга, расположенная в области D, ограниченной контуром C, и соединяющая две точки m и n этого контура, не касающаяся контура ни в одной из этих точек. Точки m и n делят C на две части C_0 и C_1; обозначим через $u(x, y)$ гармоническую функцию, ограниченную внутри D, рассмотренную в предыдущем параграфе, принимающую значение нуль на C_0 и единицу на C_1. Эта функция положительна и меньше единицы во всякой точке P дуги mn, и если точка P приближается к одной из точек m или n, то, как было показано, u_P стремится к пределу, заключенному между нулем и единицей. Следовательно, функция $u(x, y)$ остается на всей дуге mn меньше положительного числа q, *меньшего, чем единица.* Пусть, с другой стороны, $v(x, y)$ гармоническая функция внутри D, обращающаяся в нуль на контуре C_0, абсолютная величина которой остается меньше положительного числа g вдоль контура C_1; для определенности предположим что $v(x, y)$ принимает определенное значение в каждой точке контура и что это значение изменяется непрерывно Обе функции $gu+v$, $gu-v$ являются гармоническими и ограниченными внутри области D, обращаются в нуль на контуре C_0 и положительны на C_1; значит, они положительны в каждой точке области D, и абсолютная величина $v(x, y)$ меньше, чем gu. В частности, вдоль дуги mn абсолютное значение $v(x, y)$ меньше, чем gq; едва ли нужно отметить, что только что определенное число q зависит лишь от контура C и дуги mn, но никоим образом не от функции $v(x, y)$. Ясно, что это свойство сохраняет силу, когда C_0 и C_1 состоят из нескольких отдельных дуг; можно также заменить дугу mn системой нескольких дуг, расположенных внутри D и соединяющих точки C_0 или точки, отделяющие C_0 от C_1. Предыдущее рассуждение приложимо здесь без изменений.

Чтобы изложить метод Шварца обратимся к наиболее простому случаю, когда область $\mathfrak{D}$ образована путем наложения двух областей D и D', ограниченных замкнутыми контурами C и C', пересекающимися только в двух точках m и n (черт. 90) и нигде не соприкасающимися.



Черт. 90.

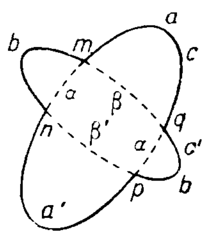
Предполагается, что оба контура C и C_1 выпуклы или, в более общем случае, что известно решение задачи Дирихле для каждой из областей D и D'. Две точки m и n делят каждый из контуров C и C' на две различных дуги (a, α) и (b, β). Дуге α, если ее рассматривать как дугу, соединяющую две точки контура C', соответствует положительное число, меньшее единицы, и точно так же дуге β, рассматриваемой по отношению к контуру C, соответствует положительное число, меньшее единицы; обозначим через q большее из этих двух чисел.

Допустим, что дана непрерывная последовательность значений на (a, b), т. е. на совокупности двух дуг a и b. Построим функцию u_1, гармоническую внутри D и принимающую на a заданные значения, а на α непрерывную последовательность значений, удовлетворяющих только условию, чтобы в точках m и n они были равны соответствующим заданным значениям. Эта функция u_1 принимает определенные значения на дуге β. Построим, далее, функцию v_1, гармоническую внутри D', принимающую на β те же значения, что u_1, и принимающую заданные значения на b; затем построим функцию u_2, гармоническую внутри D и принимающую заданные значения на a и те же значения, что v_1, на α и т. д. попеременно. Таким образом мы получим два бесконечных ряда функций $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ и $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$. Функции u_i являются гармоническими внутри D и принимают заданные значения на a; функции v_i принимают заданные значения на b и являются гармоническими внутри D'. Кроме того, u_n и v_n принимают одинаковые значения на β, в то время как u_n и v_{n-1} принимают одинаковые значения на α. Докажем теперь, что *в областях D и D' соответственно функции u_n и v_n стремятся к пределу, когда n неограниченно возрастает.*

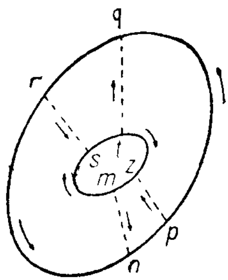
Пусть g — верхний предел $|u_2 - u_1|$ на β; $v_2 - v_1$ равно нулю на b и равно $u_2 - u_1$ на β; значит, абсолютная величина разности $v_2 - v_1$ на α меньше, чем gq. Функция $u_3 - u_2$ обращается в нуль на a и равна $v_2 - v_1$ на α; значит, будем также на β иметь: $|u_3 - u_2| < q^2 g$. Продолжая таким образом шаг за шагом, видим, что на β будем иметь: $|u_{n+1} - u_n| < q^{(n-1)} g$, а на α будет: $|v_{n+1} - v_n| < q^{2n-1} g$. Таким образом ряд

$$u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots$$

сходится равномерно на контуре (a, α), а значит, на основании теоремы Гарнака, равномерно сходится в области D. Сумма этого ряда $U(x, y) = \lim u_n(x, y)$ есть гармоническая функция внутри D, принимающая заданные значения на a. Точно так же отсюда видно, что v_n имеет пределом функцию $V(x, y)$, гармоническую внутри D' и принимающую заданные значения на b. Эти две функции U и V принимают одинаковые значения на α и на β, ибо имеем $u_n = v_n$ на β и $u_n = v_{n-1}$ на α; следовательно, они совпадают в области, ограниченной дугами α и β. Если так, то функция $F(x, y)$, равная U в области D и V в области D', является гармонической во всей области $\mathfrak{D}$ и дает решение задачи Дирихле для этой области.



Черт. 91a.



Черт. 91b.

Этот метод непосредственно распространяется на случаи гораздо менее простые когда контуры C и C' пересекаются более чем в двух точках или даже имеют общие части. В случае, представленном на рис. 91a, контуры C и C' имеют четыре общие точки m, n, p, q; на чертеже отмечены дуги, которые в рассуждениях для этого случая должны заменить дуги a, b, α, β.

В случае, изображенном на рис. 95b, контурами C и C' являются контуры *mnpqrstzm* и *mstqrnpzm*, имеющие общие части. Подставляя в наши рассуждения вместо a дуги *npqr* и *mzts*, вместо α дуги *mn* и *rs*, вместо b дуги *qrnp* и *tsmz* и вместо β дуги *tq* и *zp*, мы видим, что если мы можем решать задачу Дирихле для областей, ограниченных контурами C и C', то мы сможем решать ее и для области, ограниченной двумя контурами *mztsm* и *npqrn*.

Последний пример показывает, как можно переходить от области, ограниченной одним контуром, к области, ограниченной несколькими контурами.

Приложение. Из решения задачи Дирихле Лебег* вывел очень простое доказательство первой теоремы Пикара, установленной выше (стр. 147). Пусть $u(x, y)$ — некоторая *ограниченная* гармоническая функция, правильная в каждой точке области D, за исключением, может быть, одной точки A этой области. Из точки A, как центра, опишем две окружности C и c радиусами R и ρ соответственно ($\rho < R$), расположенные в области D. Пусть $v(x, y)$ гармоническая функция, правильная внутри C и совпадающая с $u(x, y)$ на C; метод Лебега заключается в доказательстве того, что во всякой точке (x, y) внутри C, отличной от точки A, будем иметь $u = v$.

* *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1097.

Если M — верхняя граница абсолютной величины $u(x, y)$ в области D, то и абсолютная величина $v(x, y)$ на окружности C, а следовательно, и внутри C, будет меньше M. Пусть будут $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ две гармонические правильные функции внутри кольца, заключенного между C и c, совпадающие с $u(x, y)$ на C и равные соответственно $+M$ и $-M$ на c. Разность $u_1 - u$ положительна на c, равна нулю на C, и так как она не может иметь минимума между C и c, то в этой области будем иметь: $u_1 - u > 0$. Точно так же получим неравенства

$$u - u_2 > 0; \quad u_1 - v > 0; \quad v - u_2 > 0.$$

Итак, в рассматриваемом кольце имеем:

$$|u - v| < u_1 - u_2.$$

Следовательно, гармоническая функция $u_1 - u_2$, равная $2M$ на c и обращающаяся в нуль на C, тождественно равна

$$2M \frac{\log R - \log r}{\log R - \log \rho},$$

где r — расстояние от точки (x, y) до точки A. Если дана какая-нибудь точка (x, y) внутри C, отличная от центра, то можно выбрать число $\rho < r$ столь малым, чтобы предыдущее выражение было меньше любого произвольно выбранного положительного числа ε. Таким образом в каждой точке данной области мы действительно имеем: $u(x, y) = v(x, y)$.

Доказательство это распространяется и на гармонические функции в пространстве, если заменить $\log r$ на $\frac{1}{r}$.

516. Внешняя задача. До сих пор мы изучали гармонические функции только в ограниченной области. Рассмотрим теперь область $\mathfrak{D}$, образованную частью плоскости, внешней по отношению к некоторому замкнутому контуру Γ, и пусть $u(x, y)$ — интеграл уравнения $\Delta u = 0$ — представляет функцию, правильную в каждой точке (a, b) области $\mathfrak{D}$. Чтобы изучить изменение этой функции при неограниченном возрастании x и y, достаточно применить преобразование обратными радиусами-векторами, положив, например, $x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$, $y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$. Части плоскости xy, внешней по отношению к кругу C радиуса R, расположенному внутри $\mathfrak{D}$ и имеющему центр в начале координат, соответствует на плоскости $x'y'$ круг c радиуса $\frac{1}{R}$. Функция $u(x, y)$ преобразуется в функцию

$$u'(x', y') = u\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right),$$

которая также представляет интеграл уравнения Лапласа (§ 503) и является правильной во всякой точке c, за исключением, может быть, начала. Если эта функция $u'(x', y')$ правильна также и в начале, то она является гармонической функцией внутри c, и мы будем говорить, что функция $u(x, y)$ *правильна в бесконечности*. Внутри c функция $u'(x', y')$ может быть разложена в ряд вида:

$$u' = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m(x', y'), \tag{34}$$

где $v_m(x', y')$ — однородный гармонический многочлен m-й степени (§ 503). Производя обратное преобразование, получаем отсюда, что в области, внешней по отношению к C, функция $u(x, y)$ разложима в ряд вида:

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v_m(x, y)}{(x^2+y^2)^m}; \tag{35}$$

обратно, разложение в ряд такого вида характеризует гармоническую функцию, правильную в бесконечности, так как можно непосредственно от ряда (35) вернуться к ряду (34).

Для области $\mathfrak{D}$, образованной частью плоскости, внешней по отношению к некоторому замкнутому контуру Γ, можно поставить задачу, аналогичную задаче Дирихле:

Найти функцию, гармоническую в области $\mathfrak{D}$, внешней по отношению к контуру Γ, правильную в бесконечности и принимающую на контуре Γ непрерывную последовательность заданных значений.

Эту задачу называют *внешней задачей* относительно контура Γ; в противоположность этому задача, которой мы занимались до сих пор, называется *внутренней задачей*. Внешняя задача, относящаяся с замкнутому контуру Γ, приводится к внутренней задаче для *другого* контура Γ'. В самом деле, пусть O — внутренняя точка контура Γ; преобразование обратными радиусами-векторами с полюсом в точке O переводит контур Γ в контур Γ', а область $\mathfrak{D}$, внешнюю по отношению к Γ, — в область $\mathfrak{D}'$, внутреннюю для Γ'. С другой стороны, всякая функция $u(x, y)$, гармоническая внутри $\mathfrak{D}$, правильная в бесконечности, преобразуется в функцию $u(x', y')$, гармоническую внутри $\mathfrak{D}$! Если дана последовательность значений $u(x, y)$ вдоль контура Γ, то тем самым известна последовательность значений u' вдоль контура Γ'. Следовательно, если известно решение внутренней задачи для контура Γ', то отсюда можно получить решение внешней задачи для контура Γ.

Примечание. Если даны две функции U и V, гармонические вне некоторого контура Γ и правильные в бесконечности, то на них можно распространить общую формулу (11). Действительно, рассмотрим вспомогательную окружность C с центром в неподвижной точке O, заключающую внутри весь контур Γ. Так как обе функции U и V являются гармоническими в области, ограниченной кривыми C и Γ, то можно применить формулу (11) к совокупности этих двух кривых. Когда радиус R окружности C неограниченно возрастает, интеграл, соответствующий C, стремится к нулю; действительно $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, ..., и, следовательно, $\frac{\partial U}{\partial n}$, $\frac{\partial V}{\partial n}$: суть бесконечно-малые порядка $\frac{1}{R^2}$, а интеграл, взятый по контуру C, имеет вид: $\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} F\, d\varphi$, причем функция F остается конечной. Итак, остается соотношение:

$$\int_\Gamma \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) ds = 0, \tag{11'}$$

где производные взяты по направлению нормали, *внешней* по отношению к Γ. Следует заметить, что формула (13) не распространяется таким же способом на функцию гармоническую во внешней по отношению к Γ области (упражнение 6).

517. Конформное отображение. Задача конформного отображения тесно связана с задачей Дирихле. Пусть D, D' — две области, ограниченные замкнутыми контурами C и C', для которых известно конформное преобразование, устанавливающее однозначное соответствие между точками D и D' и C и C'. Всякая функция u, гармоническая в области D, переводится этим преобразованием в функцию u', гармоническую внутри D'; ясно, что если известны значения u вдоль контура C, то известны также значения u' вдоль C'. Таким образом, если будет известно решение задачи Дирихле для области D, то будет также известно решение этой задачи для области D'. В частности, если дана область D, ограниченная одной замкнутой кривой C, то мы получим решение задачи Дирихле для этой области, если сумеем осуществить конформное отображение области D на плоскость некоторого круга. Обратно, Риман доказал возможность этого конформного преобразования, пользуясь принципом Дирихле.

Пусть $Z=f(z)$ — аналитическая функция, позволяющая осуществить конформное отображение области D на круг радиуса единица; функция $f(z)$ должна быть голоморфной внутри D, и для всякой точки этой области должно быть $|f(z)|<1$. Кроме того, значению Z, модуль которого меньше единицы, должна соответствовать одна и только одна точка z внутри D. Пусть $z_0=a+bi$ точка D, соответствующая значению $Z=0$; уравнение $f(z)=0$ должно допускать единственный корень $z=z_0$ внутри этой области, и следовательно, $f(z)$ имеет вид: $(z-z_0)e^{\pi(z)}$, где $\pi(z)$ — функция, голоморфная внутри D; это можно написать, заменяя $\pi(z)$ через $P+Qi$ в виде

$$Z=e^{\log r+P+i(\varphi+Q)},$$

где r и φ — модуль и аргумент разности $z-z_0$. Для всякой точки контура C должно быть $|Z|=1$ и, следовательно, $P+\log r=0$. Следовательно, функция $P(x, y)$ должна быть гармонической внутри D и принимать те же значения, что $-\log r$ на контуре C. Мы пришли к частному случаю задачи Дирихле. Допустим, что известно решение этой задачи для рассмотренной области; тогда можно подобрать к функции $P(x, y)$, гармонической внутри D, другую функцию, гармоническую внутри D и определенную с точностью до аддитивной постоянной так, что $P+Qi$ будет голоморфной функцией z внутри D. Остается исследовать, удовлетворяет ли определенная таким образом функция

$$Z=(z-z_0)\,e^{P+iQ}=e^{u+iv}$$

всем требуемым условиям. Можно здесь же заметить, что постоянная, от которой зависит Q, не имеет никакого значения для этого вопроса, ибо изменение значения этой постоянной приводит к прибавлению к аргументу Z некоторого постоянного угла, но не изменяет его модуля.

1. Каждой точке z, расположенной внутри контура C, соответствует точка Z внутри окружности Γ радиуса единица, описанной из начала на плоскости Z. Действительно, функция $u=P+\log r$ стремится к $-\infty$, когда z стремится к z_0, следовательно, можно описать из точки z_0, как центра, окружность c столь малого радиуса ρ, что функция u будет отри-

цательна внутри круга. Функция u, будучи гармонической в области, заключенной между C и c, и равной нулю на контуре C, отрицательна во всякой точке, расположенной между C и c. А так как радиус ρ может быть взят сколь угодно малым, то функция u отрицательна во всякой точке z внутри области D, откуда заведомо будем иметь: $|Z|<1$.

2. Обратно, пусть Z — какая-нибудь точка внутри Γ; уравнение $f(z)=Z$ имеет один и только один корень внутри области D. Это очевидно для $Z=0$. Рассмотрим теперь какое-нибудь отрицательное число m. На всякой дуге кривой, соединяющей точку z_0 с некоторой точкой окружности C, имеется по крайней мере одна точка, для которой $u(x, y)$ принимает значение m, так как u изменяется на этой дуге от $-\infty$ до нуля. Геометрическое место этих точек образует одну или несколько замкнутых кривых, ибо аналитическая кривая $u(x, y)=m$ обладает только обыкновенными точками или кратными точками с различными касательными (§ 503); более того, дуга аналитической кривой может пересекаться с этой кривой только в *конечном* числе точек, так как вдоль дуги такого рода $u(x, y)$ представляет аналитическую функцию одного параметра. Можно утверждать, что эта кривая состоит из единственной замкнутой кривой C_m, *окружающей точку* z_0. Действительно, во всех других случаях она бы определяла область S, внутри которой функция $u(x, y)$ была бы гармонической, в то время как на контуре она имела бы постоянную величину; она являлась бы тогда постоянной. Кривая C_m таким образом разбивает область D на две части — одну внутреннюю, заключающую точку z_0, для которой имеем $u<m$, и другую кольцеобразную, заключенную между C_m и C, для которой $u>m$. При изменении m от $-\infty$ до нуля получаем семейство кривых C_m, охватывающих друг друга, начиная с бесконечно малой замкнутой кривой вокруг z_0, и все более приближающихся к контуру C, по мере того как m стремится к нулю. Вообразим, что точка z описывает кривую C_m в положительном направлении; соответствующая точка Z описывает окружность радиуса e^m, двигаясь все время в том же направлении. Пусть, в самом деле, s — дуга кривой C_m, отсчитываемая в положительном направлении; аргумент Z равен $v=\varphi+Q$. Соотношение $\frac{dv}{ds}=-\frac{du}{dn}$ (§ 503) показывает, что производная $\frac{dv}{ds}$ положительна, так как производная $\frac{du}{dn}$, взятая по внутренней нормали, очевидно, отрицательна; значит, аргумент v все время возрастает, и так как этот аргумент возрастает на 2π, когда z описывает кривую C_m, то отсюда следует, что каждой точке C_m соответствует одна единственная точка окружности $|Z|=e^m$, и наоборот. Установив это, возьмем какую-нибудь точку $Z=e^{m+ni}$ внутри Γ $(m<0)$; тогда всякая точка, являющаяся корнем уравнения $f(z)=e^{m+ni}$, должна находиться на кривой C_m, и очевидно, что имеется одна и только одна точка этой кривой, для которой $v=n+2k\pi$.

3. Остается показать, что соответствие точек контуров C и Γ взаимно-однозначно. Риман, повидимому, не заботился об этом пункте,

который никоим образом не очевиден Когда точка z приближается к точке M контура C, то $P+\log r$ действительно стремится к нулю, и модуль Z стремится к единице, но мы пока не можем ничего утверждать относительно поведения функции $Q(x, y)$ вблизи точки M. Действительно, эта функция Q получается из производных $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ путем квадратур; нельзя быть уверенным a priori в том, что эти производные сохраняют конечные значения на контуре C; могло бы случиться, что Q не стремится ни к какому пределу или что ее модуль неограниченно возрастает; аргумент Z также не стремился бы ни к какому пределу, когда z стремится к точке M.

Трудность немедленно устраняется, если контур C образован одной единственной правильной дугой аналитической кривой. Функция $P(x, y)$, принимающая аналитические значения на этой дуге, является в этом случае гармонической в некоторой области $\mathfrak{D}$, заключающей внутри область D (§ 511). То же самое имеет место для сопряженной функции $Q(x, y)$, и, следовательно, каждой точке контура C соответствует одна определенная точка контура Г. Рассуждение, только что приведенное для кривых C_m, доказывает, что, обратно, каждой точке Г соответствует только одна точка C. Возьмем еще более общий случай, когда контур C состоит из конечного числа правильных дуг аналитических кривых, сходящихся в вершинах контура, причем особые точки на дуге аналитической кривой рассматриваются как вершины. Пусть ab — одна из таких дуг; функция $P(x, y)$ может быть продолжена за дугу ab; то же самое рассуждение доказывает, что точке m дуги ab соответствует единственная точка μ контура Г, причем обе точки m и μ перемещаются одновременно в положительном направлении. Когда точка m описывает дугу ab, μ может описать только часть Г; действительно, если бы двум точкам m и m' дуги ab соответствовала одна и та же точка μ контура Г, то точке внутри Г, бесконечно близкой к μ, должна была бы соответствовать точка области D, бесконечно близкая одновременно и к m и к m'. Следовательно, дуге ab контура C соответствует определенная дуга $\alpha\beta$ контура Г, причем обе эти дуги описываются в то же самое время в положительном направлении. Вся трудность заключается в том, чтобы показать, что *такие дуги, как $\alpha\beta$, покрывают окружность Г один и только один раз* *.

Примечание. Все конформные преобразования, приводящие в соответствие с самим собой круг радиуса единицы, имеющий центр в начале, получаются посредством линейного преобразования $Z = e^{i\gamma}\frac{z - z_0}{d(z - z_0')}$, где z_0 — аффикс внутренней точки этого круга, отстоящей на расстоянии d от центра, z_0' — аффикс сопряженной точки, α — вещественная постоянная. Эти преобразования зависят от трех вещественных постоянных. Если известно одно конформное отображение некоторой области, ограниченной простым контуром D на этот круг, то все другие отображения можно получить, комбинируя данное отображение с предыдущими преобразованиями.

---

* Доказательство это было дано Пикаром (Traité d'Analyse, t. II, p. 301 и след., 2-е издание). В заметке Монтеля в конце второй части настоящего тома указан метод, применимый к значительно более общим случаям.

518. Функция Грина. Пусть D — область, заключенная внутри простого контура C, удовлетворяющая условиям предыдущего параграфа, которую можно конформно отобразить на круг радиуса единица. Если известно, как осуществить это отображение, то задача Дирихле, относящаяся к области D, приводится к задаче Дирихле, относящейся к кругу, для которого решение известно.

Пусть $U(s)$ — заданная непрерывная функция на контуре C, которую предположим выраженной при посредстве дуги s, отсчитываемой в положительном направлении от произвольного начала. Чтобы найти значение в некоторой точке (a, b) области D функции, гармонической внутри D и равной $U(s)$ на C, возьмем функцию

$$Z = (z - a - bi)\, e^{P + iQ},$$

которая приводит во взаимно-однозначное соответствие точки области D и круга радиуса единица так, что центр круга соответствует точке (a, b). Точке s контура C соответствует точка, имеющая аргумент

$$\theta = Q + \varphi, \text{ где } z - a - bi = re^{i\varphi}$$

на окружности Γ. Функция $U(s)$ преобразуется в непрерывную функцию $U_1(\theta)$ с периодом 2π, а искомая гармоническая функция переходит в функцию, гармоническую внутри круга и принимающую значение $U_1(\theta)$ на окружности. Значение в центре круга, т. е. значение $U(a, b)$ в точке (a, b), дано формулой (17) (§ 508)

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_1(\theta)\, d\theta.$$

Если принять за независимое переменное дугу s контура C, то эта формула примет вид

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C U(s)\left(\frac{dQ}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}\right) ds,$$

где $\frac{dQ}{ds}$, $\frac{d\varphi}{ds}$ обозначают производные, взятые в направлении положительной касательной к контуру C. Но эти производные равны соответственно $-\frac{dP}{dn}$, $-\frac{d\log r}{dn}$ (§ 503), причем последние производные взяты по внутренней нормали к контуру C. Итак, значение $U(a, b)$ можно написать в виде:

$$U(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int_C U\left(\frac{dP}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\right) ds$$

или еще

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C U\frac{dG}{dn}\, ds, \tag{37}$$

где через $G(x, y; a, b)$ обозначена функция $-P(x, y) - \log r$. Эта функция $G(x, y; a, b)$ есть *функция Грина*, относящаяся к контуру C и к внутренней точке (a, b). Согласно определению гармонической функции $P(x, y)$ функция Грина определяется следующими свойствами: 1) она равна нулю во всякой точке контура C; 2) внутри C она равна сумме гармонической функции и $-\log r$. Отсюда следует, что она является гармонической функцией в окрестности всякой точки внутри контура C, за исключением точки (a, b), где она обращается в бесконечность, как

$$-\frac{1}{2}\log[(x-a)^2+(y-b)^2].$$

Знание этой функции Грина для контура C позволяет, как мы видим, решать внутреннюю задачу Дирихле для данного контура, какова бы ни была заданная функция $U(s)$ на контуре C. С этой точки зрения функция Грина представляет сходство с функцией Римана $u(x, y; \xi, \eta)$ (§ 498). Но в то время как функция Римана не зависит от контура, для которого нужно решить задачу Коши, и зависит только от коэфициентов уравнения, функция Грина зависит от самого контура C; кроме того, она допускает логарифмическую бесконечность, тогда как функция Римана непрерывна. Каждому замкнутому контуру рассмотренного вида соответствует своя функция Грина; исследование этой функции приводится к нахождению конформного отображения внутренней области D на круг, т. е. к решению частного случая той же задачи Дирихле.

Для некоторых простых случаев функцию Грина легко получить. Сначала возьмем круг радиуса R; пусть P — внутренняя точка на расстоянии ρ от центра, P_1 — точка, гармонически сопряженная с P по отношению к концам диаметра, проходящего через P, r и r_1 — расстояния некоторой точки M от точек P и P_1. Отношение $\frac{r_1}{r}$ равно $\frac{R}{\rho}$ в каждой точке окружности; функция $\log\left(\frac{\rho r_1}{Rr}\right) = \log\left(\frac{\rho r_1}{R}\right) - \log r$ есть функция Грина для круга, ибо она равна нулю на окружности, а $\log\left(\frac{\rho r_1}{R}\right)$ является гармонической функцией внутри круга. Заменяя G этим выражением в общей формуле (37), приходим снова к формуле (16) (§ 508). Возьмем теперь контур, состоящий из полуокружности AMB и диаметра AB. Пусть P — внутренняя точка, P_1 — точка, гармонически сопряженная с P, по отношению к концам диаметра, проходящего через P, P' и P_1' — точки, симметричные с P и P_1, по отношению к диаметру AB; r, r_1, r', r_1' — расстояния от точки M до точек P, P_1, P', P_1'. Легко убедиться, что выражение $\log\left(\frac{r_1 r'}{r r_1'}\right)$ есть функция Грина для этого контура.

Прием § 508, при помощи которого возможно было добиться исчезновения члена с $\frac{dU}{dn}$ в общей формуле (13), когда контур C представлял собой окружность, достигал цели потому, что функция Грина для этого контура была известна a priori. Тот же прием мог бы быть с успехом применен для любого контура, если бы была известна соответствующая функция Грина $G(x, y; a, b)$. Действительно, так как функция

$$G(x, y; a, b)+\log r$$

является гармонической внутри контура C, то имеет место соотношение:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left[U\left(\frac{dG}{dn}+\frac{d\log r}{dn}\right)-(G+\log r)\frac{dU}{dn}\right] ds. \qquad (38)$$

Складывая почленно формулы (13) и (38) и замечая, что G равно нулю на контуре C, снова получаем формулу (37).

Это доказательство имеет преимущество, так как применимо и к многосвязной области, или к области, ограниченной несколькими различными замкнутыми кривыми. Функция Грина для подобной границы определяется такими же условиями, как вышеприведенные; она должна исчезать на контуре, а внутри контура равняться сумме гармонической функции и $-\log r$, где r всегда обозначает расстояние от точки (x, y) до внутренней точки (a, b). Но это доказательство предполагает существование $\frac{dU}{dn}$ на контуре для искомой гармонической функции *. Для случая кругового кольца вычисление указано ниже (упражнение 14).

Можно также определить функцию Грина для внешней задачи, относящейся к некоторой области $\mathfrak{D}$, простирающейся до бесконечности и ограниченной одной или несколькими замкнутыми кривыми, образующими границу C этой области. Пусть P — какая-нибудь точка области $\mathfrak{D}$ с координатами (a, b).

---

* Когда различные части контура C состоят из конечного числа правильных дуг аналитических кривых, можно легко дополнить доказательство. С одной стороны, методы Шварца позволяют доказать, что задача Дирихле имеет решение для этой области. Следовательно, функция Грина существует, так как ее можно получить, прибавляя к $-\log r$ гармоническую функцию $P(x, y; a, b)$, принимающую на контуре те же значения, как $\log r$. Эта функция P, принимающая аналитические значения вдоль дуг аналитических кривых контура, может быть продолжена за пределы области, и следовательно, $\frac{dG}{dn}$ существует на контуре. Мы не можем утверждать, что $\frac{dU}{dn}$ также существует на контуре для гармонической функции U, принимающей последовательность заданных значений $U(s)$ на контуре C. Чтобы обойти затруднение, возьмем на каждой дуге контура C такую аналитическую функцию $V(s)$, чтобы было $|U(s)-V(s)|<\varepsilon$ в каждой точке контура C. Гармоническая функция V, равная $V(s)$ на контуре, может быть продолжена за пределы контура и, значит, $\frac{dV}{dn}$ существует на контуре C. Следовательно, можно приложить к этой гармонической функции V общую формулу (37). С другой стороны, разность $U-V$ меньше ε во всякой внутренней точке. В тождестве

$$U-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C U(s)\frac{dG}{dn}ds=(U-V)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_C (V-U)\frac{dG}{dn}ds$$

члены правой части меньше ε (§ 519) и, следовательно, абсолютная величина левой части меньше, чем 2ε; так как ε произвольно, то левая часть равна нулю.

Функция Грина $G(x, y; a, b)$, относящаяся к контуру C, для *внешней* задачи определяется следующими свойствами: она обращается в нуль во всех точках контура C, она является правильной в бесконечности и гармонической вблизи каждой точки $\mathfrak{D}$, за исключением точки (a, b), вблизи которой обращается в бесконечность, как $-\frac{1}{2}\log[(x-a)^2+(y-b)^2]$. Чтобы найти значение $U(a, b)$ в точке P функции, гармонической внутри $\mathfrak{D}$, правильной в бесконечности и принимающей заданные значения на контуре C, достаточно приложить формулу (11') к функциям U и $G(x, y; a, b)$, которые являются гармоническими в области $\mathfrak{D}_1'$, полученной путем вычитания из области $\mathfrak{D}$ внутренней части окружности γ весьма малого радиуса, имеющей центр в точке P. Заставляя стремиться к нулю радиус окружности γ и воспроизводя вычисление § 507, легко получить формулу:

$$U(a, b)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C U\frac{dG}{dn}\,ds, \tag{39}$$

где производная взята по нормали, направленной внутрь области $\mathfrak{D}$ *.

В случае круга функция Грина для внешней задачи есть $\log\left(\frac{MP_1}{MP}\,\frac{d}{R}\right)$, где P_1 — точка, гармонически сопряженная с P по отношению к концам диаметра, проходящего через P, M — какая-нибудь точка, R — радиус, d — расстояние точки P от центра. Произведя вычисления, находим формулу, вполне аналогичную формуле Пуассона:

$$U(a, b)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C U\frac{d^2-R^2}{2Rr^2}\,ds,$$

которую можно проверить таким же способом, выделяя член, который представляет потенциал двойного слоя

$$U(a, b)=\frac{1}{\pi}\int\limits_C U\frac{ds}{2R}-\frac{1}{\pi}\int\limits_C U\frac{\cos\varphi}{r}\,ds,$$

и применяя известные свойства этого потенциала (§ 505).

519. Свойства функции Грина. Функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ зависит от двух пар переменных (x, y) и (ξ, η). Она была определена пока (ограничиваясь внутренней задачей) только для случая, когда точка (ξ, η) находится *внутри* контура C, а точка (x, y), являясь внутренней точкой или точкой контура C, *отлична* от точки (ξ, η). Пусть (a, b) и (a', b') — две какие-нибудь точки внутри C, γ и γ' — две окружности весьма малых радиусов ρ, ρ', описанные из этих точек, как центров, и расположенные целиком в области D. Обе функции

$$G(x, y; a, b) \quad \text{и} \quad G'=G(x, y; a', b')$$

являются гармоническими в области D', ограниченной контуром C и двумя окружностями γ и γ'. Замечая, что $G=G'=0$ вдоль контура C, выводим из общей формулы (11) соотношение:

$$\int\limits_\gamma\left(G\frac{dG'}{dn}-G'\frac{dG}{dn}\right)ds+\int\limits_{\gamma'}\left(G\frac{dG'}{dn}-G'\frac{dG}{dn}\right)ds=0,$$

---

* Важно заметить, что функция $G+\log r$ не является правильной в бесконечности, так что нельзя приложить формулу (11) вдоль C к двум функциям U и $G+\log r$. Наоборот, метод, примененный при доказательстве формулы (39) для случая внешней задачи, применим без изменений к внутренней задаче.

причем производная взята по внешней нормали к окружности. Вблизи точки (a, b) функция

$$G(x, y; a, b)$$

имеет вид: $-\log r + g(x, y)$, где $g(x, y)$ является гармонической функцией, а r есть расстояние от точки (x, y) до точки (a, b). Интеграл, взятый вдоль γ, обращается, таким образом, в следующий:

$$\int\limits_{\gamma}\left(g\frac{dG'}{dn}-G'\frac{dg}{dn}\right)ds-\int\limits_{\gamma}\left(\log r\frac{dG'}{dn}-G'\frac{d\log r}{dn}\right)ds=2\pi G'(a, b; a', b').$$

Интеграл, взятый вдоль γ', точно так же равен

$$-2\pi G(a', b'; a, b).$$

Заменяя (a, b) через (x, y) и (a', b') через (ξ, η), получаем основное соотношение:

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y). \tag{40}$$

Итак, функция $G(x, y; \xi, \eta)$ *симметрична* по отношению к двум парам переменных (x, y) и (ξ, η), и следовательно, она является гармонической функцией от (ξ, η) в каждой точке области D, за исключением точки $\xi = x$, $\eta = y$. Следовательно, если мы рассмотрим в пространстве четырех измерений $(x, y; \xi, \eta)$ область R_4, определенную так, что каждая из точек (x, y) и (ξ, η) описывает область D и контур C, то функция $G(x, y; \xi, \eta)$ имеет определенное значение в каждой точке области R_4, за исключением многообразия двух измерений: $\xi = x$, $\eta = y$. Она равна нулю, когда одна из точек (x, y), (ξ, η) попадает на контур C. Она является гармонической по отношению к каждой паре переменных (x, y), (ξ, η) вблизи всякой точки внутри области R_4, не принадлежащей к особому многообразию; она не изменяется при перестановке обеих пар переменных (x, y) и (ξ, η).

Эта функция всегда положительна, если обе точки (x, y) и (ξ, η) находятся внутри C. Действительно, рассматриваемая как функция от (x, y), она равна нулю на C и равна $+\infty$ в точке (ξ, η). Отсюда следует, что производная $\frac{dG}{dn}$ положительна во всякой точке контура C, поскольку G может только возрастать при перемещении внутрь. Интеграл $\int\limits_{C}\frac{dG}{dn}ds$, все элементы которого положительны, равен 2π, ибо если функция U равна единице на контуре C, то имеем во всякой внутренней точке $U(a, b) = 1$.

Пусть $x = \varphi(x', y')$ и $y = \psi(x', y')$ — формулы, определяющие конформное преобразование, которое позволяет отобразить область D, ограниченную контуром C, на другую область D', ограниченную контуром C', так что имеет место однозначное соответствие между точками двух областей и двух контуров. Функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, относящаяся к контуру C, переходит в функцию $G(\varphi, \psi; \xi, \eta)$ переменных x', y', которая равна нулю на контуре C' и представляет гармоническую функцию в области D', за исключением окрестности точки (ξ', η'), соответствующей точке (ξ, η). В самом деле, $G(x, y; \xi, \eta)$ есть действительная часть аналитической функции $F(z)$ вида

$$g(z) - \log(z - \xi - \eta i),$$

где $g(z)$ — функция, голоморфная в области D. После преобразования $x+iy=\varphi+i\psi$ функция F переходит в аналитическую функцию

$$F_1(z')=F_1(x'+iy'),$$

которая имеет вид:

$$g_1(z')-\log(z'-\xi'-\eta' i),$$

причем $g_1(z')$ голоморфна в области D'. Отсюда следует, что в окрестности точки (ξ',η') функция $G(\varphi,\psi;\xi,\eta)$ равна

$$-\frac{1}{2}\log\left[\left(x'-\xi'\right)^2+\left(y'-\eta'\right)^2\right]$$

плюс правильная часть. Итак, имеем:

$$G\left[\varphi(x',y'),\psi(x',y');\xi,\eta\right]=G'(x',y';\xi',\eta'),$$

где G' — функция Грина для контура C', особая точка которой (ξ',η') при данном конформном преобразовании соответствует точке (ξ,η).

В частности, если область D ограничена единственной замкнутой кривой C, то можно отобразить эту область на круг; при этом некоторые свойства функции Грина * становятся интуитивно ясными. Если при помощи преобразования инверсии мы заменим круг полуплоскостью, например верхней полуплоскостью плоскости xy, то функция Грина заменится функцией $g(x,y;\xi,\eta)$, которая должна обращаться в нуль вдоль оси x и представлять гармоническую функцию во всякой точке этой полуплоскости, за исключением одной точки (ξ,η), где она имеет логарифмическую бесконечность, и которая стремится к нулю при неограниченном возрастании (x^2+y^2). Такой функцией, очевидно, является

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right].$$

III. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

520. Обобщение задачи Дирихле. Рассуждение, при помощи которого было доказано, что задача Дирихле для уравнения Лапласа не может допускать нескольких решений, в некоторых случаях легко распространяется на общее уравнение эллиптического типа, приведенное к каноническому виду (§ 479)

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y), \tag{41}$$

где a, b, c, f — непрерывные функции переменных x, y в областях, о которых будет итти речь. Обобщенная задача Дирихле состоит также в нахождении интеграла уравнения (41), правильного в замкнутой области D, ограниченной контуром C, и принимающего на этом контуре непрерывную последовательность заданных значений. Эта задача не может допускать более одного решения, *если коэфициент c отрицателен или равен нулю* во всякой точке области D. Элементарный метод, приведенный ниже, принадлежит Парафу.

Предположим сначала, что коэфициент c отрицателен в каждой точке области D. Если бы задача допускала два решения, то их разность v была бы интегралом однородного уравнения $F(v)=0$, правильным в области D и обращающимся в нуль на контуре. Если эта разность не равна тождественно нулю, то она принимает положительные или отрица-

---

* Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique* (заседание 28 июня 1911 г.).

тельные значения внутри D, и следовательно, допускает положительный максимум или отрицательный минимум в некоторой точке (x_0, y_0) этой области. Так как второй случай приводится к первому путем замены v через $-v$, то мы можем предположить, что в точке (x_0, y_0) функция $v(x, y)$ имеет *положительный* максимум v_0. Согласно общей теории (I, § 47) в этой точке мы должны иметь:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0 \leqslant 0 \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0 \leqslant 0$$

— условия, несовместимые с уравнением $F(v) = 0$ и неравенством $v_0 > 0$ для точки (x_0, y_0). Итак, не может существовать решения уравнения $F(v) = 0$, удовлетворяющего поставленным условиям.

Случай, когда коэфициент c не является положительным ни в какой точке области D, приводится к предыдущему случаю, если положить $v = zw$, где z — функция от x и y, правильная в области D и не обращающаяся в нуль ни в какой точке этой области или ее границы. Уравнение $F(v) = 0$ заменяется уравнением того же вида, причем коэфициент при w равен $\frac{F(z)}{z}$. Чтобы предыдущее заключение оставалось в силе, достаточно, чтобы можно было выбрать функцию z так, что во всей области D имело бы место $z > 0$, $F(z) < 0$, и равенство нулю было бы исключено. Но если взять для z функцию вида $A - e^{\alpha x}$, где A и α — два положительных постоянных, то будем иметь $F(z) = cA - (\alpha^2 + a\alpha + c) e^{\alpha x}$, и это выражение отрицательно в рассматриваемой области, каково бы ни было A, если только $\alpha^2 + a\alpha + c$ положительно во всякой точке D,— условие, которому всегда можно удовлетворить, взяв положительное число α достаточно большим. Если число α таким образом определено, то достаточно взять для A положительное число, большее максимума $e^{x\alpha}$ в области D. В частности, очевидно, что, когда $c = 0$, уравнение (41) не может допускать более одного интеграла, правильного в области D и принимающего заданные значения на контуре.

Это заключение не может быть распространено на случай, когда коэфициент c принимает положительные значения в области D. Например, уравнение $\Delta u + 2u = 0$ допускает интеграл $u = \sin x \cdot \sin y$, правильный внутри квадрата, образуемого прямыми $x = 0, x = \pi, y = 0, y = \pi$, и обращающийся в нуль на контуре.

Из предыдущего можно также вывести следующее заключение: задача, поставленная для уравнения (41,) не может допускать нескольких решений, когда уравнение $F(u) = 0$ имеет частный интеграл u_1, правильный в данной области и не исчезающий ни внутри области D, ни на контуре. Действительно, преобразование $u = u_1 v$ приводит к уравнению такого же вида для v, коэфциенты которого будут непрерывными функциями, а коэфициент при v будет нуль. Мы только что видели, что новое уравнение не может допускать нескольких правильных интегралов, принимающих одинаковые значения на контуре C.

Пусть (x_0, y_0) — какая-нибудь точка плоскости; всякий интеграл u_1 уравнения $F(u) = 0$ правильный в окрестности данной точки и принимающий положительное значение при $x = x_0$, $y = y_0$, разумеется, положителен вблизи этой точки. Если взять замкнутую кривую γ, заключающую точку (x_0, y_0) и настолько близкую к этой точке, что интеграл u_1 положителен внутри кривой, то можно приложить все, что сказано выше, к области, ограниченной кривой γ. Следовательно, уравнение (41) не может допускать более одного интеграла, принимающего последовательность заданных значений на замкнутой кривой c, заключающей какую-нибудь точку (x_0, y_0), и правильного внутри кривой γ, если только эта кривая *достаточно мала*. Из сказанного выше ясно, какой смысл надо придавать этим словам.

521. Исследование уравнения $\Delta u = f(x, y)$. Следуя тому же порядку, как и для уравнений гиперболического типа (гл. XXVI), мы начнем с изучения простого уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{42}$$

Поставим себе целью найти интеграл этого уравнения, правильный внутри области D, ограниченной контуром C, и обращающийся в нуль на этом контуре; допустим, далее, что функция $f(x, y)$ имеет частные производные первого порядка, непрерывные в данной области и на контуре C. Согласно изложенному в предыдущем параграфе, эта задача не может иметь нескольких решений; это очевидно и непосредственно, если заметить, что при существовании двух решений их разность была бы гармонической функцией внутри D и обращалась бы в нуль на контуре C. Если известен какой-нибудь правильный интеграл $u_1(x, y)$ уравнения (42), то задача немедленно приводится к задаче Дирихле; чтобы получить искомую функцию, достаточно прибавить к $u_1(x, y)$ функцию, гармоническую внутри D и принимающую те же значения, что — u_1, в каждой точке контура. Например, когда $f(x, y)$ есть единица, мы получаем интеграл уравнения $\Delta u = 1$, обращающийся в нуль на контуре, прибавляя к $\frac{x^2+y^2}{4}$ гармоническую функцию, равную $-\frac{x^2+y^2}{4}$ в каждой точке C.

Допустим, что существует интеграл $U(x, y)$ уравнения (42), удовлетворяющий требуемому условию, и применим общую формулу Грина к двум функциям $U(\xi, \eta)$ и $G(x, y; \xi, \eta)$ переменных ξ, η, где G — функция Грина, соответствующая контуру C для внутренней задачи. Эти две функции правильны в области D', ограниченной контуром C и окружностью γ весьма малого радиуса ε с центром в точке (x, y) области D. Принимая во внимание само уравнение (42) и то, что обе функции U и G обращаются в нуль на C, получаем соотношение:

$$\iint\limits_D f(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \int\limits_\gamma \left[U(\xi, \eta) \frac{dG}{dn} - G \frac{dU}{dn} \right] ds,$$

причем производные взяты по наружной нормали окружности γ.

В окрестности точки (x, y) можно заменить G через $g(x, y; \xi, \eta) - \log r$, где g — гармоническая функция, а r обозначает расстояние между двумя точками (x, y) и (ξ, η). Когда радиус ε стремится к нулю, единственным членом криволинейного интеграла, не стремящимся к нулю, будет $-\int\limits_{\gamma} U \frac{d \log r}{dn}\, ds$, имеющий пределом $-2\pi U(x, y)$.

Итак, если искомая функция существует, она имеет вид:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} f(\xi, \eta)\, G(x,y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta; \qquad (43)$$

обратно, функция $U(x,y)$, представленная этой формулой, удовлетворяет всем требованиям. Рассмотрим сперва область Δ, целиком расположенную внутри D; пока точка (x,y) остается в области Δ, мы можем написать:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} f(\xi, \eta) \log\left[\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right] d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} f(\xi, \eta)\, g(x,y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где g — гармоническая функция от (x,y). Следовательно, $U(x,y)$ представляет сумму гармонической функции и логарифмического потенциала (см. ниже § 537). Так как функция $f(x,y)$ имеет непрерывные производные, то можно применить формулу Пуассона (§ 537), и функция $U(x,y)$ действительно удовлетворяет соотношению (42) во всякой внутренней точке области D. Остается доказать, что эта функция $U(x,y)$ стремится к нулю, когда точка (x,y) стремится к какой-нибудь точке контура C. Но, очевидно, абсолютная величина U меньше, чем

$$\frac{M}{2\pi}\iint\limits_{D} G(x,y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где M — верхняя граница $|f(x,y)|$, а двойной интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} G(x,y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

представляет в точности интеграл уравнения $\Delta u = 1$, обращающийся в нуль на контуре C, т. е. функцию, существование которой только что было доказано. Итак, это выражение стремится к нулю, когда точка (x, y) стремится к некоторой точке контура C, и следовательно, то же самое имеет место и для функции $U(x, y)$, представленной фурмулой (43).

Примечание. Когда функция $f(x, y)$ является аналитической, то всякий интеграл уравнения (42) также будет аналитическим. В самом деле, пусть (x_0, y_0) — какая-нибудь точка; уравнение (42), очевидно, допускает бесчисленное множество правильных аналитических интегралов в окрестности этой точки. Пусть $u_1(x, y)$ один из них; всякий другой интеграл, правильный в этой области, представляет собой сумму $u_1(x, y)$ и гармонической функции, т. е. является аналитической функцией.

522. Метод Пикара. Первый метод, примененный Пикаром для решения задачи Дирихле, относящейся к уравнению (41), есть также метод последовательных приближений, весьма похожий, по крайней мере общим ходом вычислений, на метод, примененный в § 494, 495, 500. Напишем уравнение (41) в виде:

$$\Delta u = \lambda \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu \right) + f(x, y), \tag{44}$$

где λ — вспомогательный параметр, который затем в результате будет заменен через -1. Поставим целью определить интеграл этого уравнения, правильный внутри замкнутого контура C и принимающий на этом контуре непрерывную последовательность заданных значений. Для этого сначала будем искать формальное решение

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \ldots + \lambda^n u_n(x, y) + \ldots, \tag{45}$$

где функции $u_0, u_1, \ldots, u_n \ldots$ правильные внутри контура C, функция $u_0(x, y)$ принимает заданные значения на C, а все остальные функции u_1, u_2, $\cdots$ обращаются на этом контуре в нуль. Эти функции определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u_0 = f(x, y) \\ &\Delta u_1 = a \frac{\partial u_0}{\partial x} + b \frac{\partial u_0}{\partial y} + c u_0 \\ &\Delta u_2 = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_1}{\partial y} + c u_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

вместе с условиями на границах. Первая функция $u_0(x, y)$ получается путем прибавления к функции $U(x, y)$, определяемой формулой (43), гармонической функции, принимающей заданные значения на контуре C. Как только будет известна функция $u_0(x, y)$, следующие функции $u_1(x, y)$ $u_2(x, y) \ldots$ вычисляются одна за другой повторным применением формулы (43). При посредстве известных допущений относительно контура C, заданных значений неизвестной функции на этом контуре и коэфициентов a, b, c, f, Пикару удалось доказать, что ряд (45) и ряды, получаемые из него, если взять частные производные до второго порядка, сходятся равномерно для $\lambda = -1$, так что функция $u(x, y)$ действительно дает решение задачи. Его метод применяется в известных случаях также к уравнениям:

$$\Delta u = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

но, вообще говоря, эти заключения менее точны, чем для уравнений гиперболического типа. Объяснение этого мы встретим ниже. Для доказательства мы отсылаем к работам, цитированным выше.

Этот процесс вычисления ведет к одному очень важному предложению. Когда коэфициенты a, b, c, f, являются аналитическими функциями, то все члены ряда (45) также представляют аналитические функции (§ 521). Более глубокое исследование этого ряда показывает, что то же самое имеет место и для суммы ряда, что привело Пикара к важной теореме:

когда коэфициенты уравнения (41) *представляют аналитические функции, то и все интегралы суть также аналитические функции.* Это предложение было затем обобщено С. Н. Бернштейном *.

523. Функция Грина для общего уравнения эллиптического типа. Выше было доказано, что знание функции Грина для некоторого контура C позволяет решать задачу Дирихле для этого контура, каковы бы ни были заданные значения на C. Точно так же мы сумеем решать задачу Дирихле, относящуюся к некоторому контуру C для любого уравнения эллиптического типа, если сумеем найти одну специальную функцию, удовлетворяющую известным условиям, которые сейчас будут выяснены.

Возьмем снова общую формулу (41) § 497, играющую основную роль в методе Римана. В случае эллиптического уравнения,

$$\mathfrak{F}(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \tag{47}$$

сопряженное уравнение есть:

$$\mathfrak{G}(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial (av)}{\partial x}-\frac{\partial (bv)}{\partial y}+cv=0, \tag{48}$$

и, каковы бы ни были функции u и v, мы будем иметь тождество:

$$v\mathfrak{F}(u)-u\mathfrak{G}(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+auv\right]+\\ +\frac{\partial}{\partial y}\left[v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+buv\right]. \tag{49}$$

Допустим, что функции u и v правильные в области D, ограниченной контуром C, в которой функции $a, b, c, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ непрерывны. На основании предыдущего тождества имеем также:

$$\iint\limits_D [v\mathfrak{F}(u)-u\mathfrak{G}(v)]\,dx\,dy=\int\limits_C\left[v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+auv\right]dy-\\ -\left[v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+buv\right]dx,$$

где криволинейный интеграл взят в положительном направлении. Заменяя dx и dy через $\cos\beta'\,ds$ и $-\cos\alpha'\,ds$, где α' и β' — углы внутренней нормали с осями (§ 506), придадим предыдущей формуле вид:

$$\iint\limits_D [v\mathfrak{F}(u)-u\mathfrak{G}(v)]\,dx\,dy=\int\limits_C\left(u\frac{dv}{dn}-v\frac{du}{dn}\right)ds-\\ -\int\limits_C (a\cos\alpha'+b\cos\beta')\,uv\,ds, \tag{50}$$

* Докторская диссертация (1904). Можно также распространить теорему Гарнака (§ 510) относительно рядов с гармоническими положительными членами на ряды с положительными членами, если члены этих рядов суть интегралы уравнения (41), в котором положено $f=0$. (Lichtenstein, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1912, p. 201.)

где $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ обозначают производные, взятые по внутренней нормали.

Эта формула предполагает, разумеется, что производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ остаются конечными на контуре.

Принимая это во внимание, положим, что $u(x, y)$ — какой-нибудь интеграл уравнения $\mathfrak{F}(u) = f(x, y)$, правильный в области D и остающийся конечным на контуре вместе со своими частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Пусть, с другой стороны, $v(x, y, \xi, \eta)$ — *частный* интеграл сопряженного уравнения $\mathfrak{G}(v) = 0$, удовлетворяющий следующему условию:

A. *В области D он имеет вид $U \log r + V$, причем U и V функции, правильные в этой области, а r равен*

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

точка (ξ, η) принадлежит области D и, кроме того, предполагается что $U(\xi, \eta) = -1$.

На контуре C мы допустим только, что v остается конечной, так же как $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Применим общую формулу (50) к области D', ограниченной контуром C и окружностью γ весьма малого радиуса ρ, имеющей центр в точке (ξ, η). Так как в этой области $\mathfrak{F}(u) = f(x, y)$ и $\mathfrak{G}(v) = 0$, то формула принимает вид:

$$\iint\limits_{D'} vf(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_C \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) ds - \int\limits_C (a\cos\alpha' + b\cos\beta')\,uv\,ds + \\ + \int\limits_\gamma \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) ds - \int\limits_\gamma (a\cos\alpha' + b\cos\beta')\,uv\,ds,$$

причем внутренняя нормаль в точке окружности γ является внешней нормалью к самой окружности. Когда радиус ρ стремится к нулю, интеграл $\int\limits_\gamma (a\cos\alpha' + b\cos\beta')\,uv\,ds$ также стремится к нулю, так как элемент этого интеграла имеет вид $\rho\,d\theta\,(A + B\log\rho)$, где A и B остаются конечными.

По тем же соображениям интеграл $\int\limits_\gamma v\frac{du}{dn}ds$ также стремится к нулю.

Что касается интеграла $\int\limits_\gamma u\frac{dv}{dn}ds$, то он может быть написан в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[(-1+\varepsilon)\frac{1}{\rho} + \log\rho\,\frac{dU}{dn} + \frac{dV}{dn}\right] u\rho\,d\theta,$$

и его предел, очевидно, равен $-2\pi u(\xi, \eta)$. Таким образом, переходя к пределу, имеем:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left[u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right] ds - \\ - \frac{1}{2\pi}\int\limits_C (a\cos\alpha' + b\cos\beta')uv\,ds - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D vf\,dx\,dy. \quad (51)$$

Если дано значение $u(x, y)$ во всех точках контура, то можно вычислить все члены, входящие в правую часть, за исключением интеграла $\int\limits_C v\frac{du}{dn}ds$, заключающего $\frac{du}{dn}$. Для того чтобы этот член исчез, достаточно взять в качестве функции v интеграл сопряженного уравнения, удовлетворяющий условию А и равный нулю во всех точках контура C. Знание одного интеграла $v(x, y; \xi, \eta)$ сопряженного уравнения, удовлетворяющего всем этим условиям, позволит решить задачу Дирихле для контура C, каковы бы ни были заданные значения на контуре, ибо формула (51) принимает тогда вид:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C u\frac{dv}{dn}ds - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D vf(x, y)\,dx\,dy; \quad (52)$$

она обращается в формулу (37), когда $f(x, y) = 0$.

Итак, функция $v(x, y; \xi, \eta)$, если она существует, выполняет точно такую же роль, как функция Грина для уравнения Лапласа. Определение этой функции распадается на две отдельные задачи. Сначала нужно найти *фундаментальное* решение сопряженного уравнения $\mathfrak{G}(v) = 0$, т. е. интеграл, обладающий в произвольной точке (ξ, η) логарифмической особенностью такого рода, который был установлен выше *.

Эта первая задача не зависит от контура C

В частном случае уравнения $\Delta u = 0$ фундаментальное решение есть $\log\left(\frac{1}{r}\right)$. В общем случае, получив фундаментальное решение $V(x, y; \xi, \eta)$, достаточно для получения функции $v(x, y; \xi, \eta)$, относящейся к контуру C, прибавить к этому фундаментальному решению интеграл сопряженного уравнения, правильный внутри контура и принимающий значение $-V$ в каждой точке этого контура. Таким образом мы приходим к частному случаю той же задачи Дирихле. Мы еще вернемся в дальнейшем к этой второй части задачи.

Можно также распространить на функцию $v(x, y; \xi, \eta)$ доказанное выше для функции Грина свойство относительно симметричности двух пар переменных (x, y), (ξ, η). Пусть $u(x, y; \xi, \eta)$ интеграл уравнения $\mathfrak{F}(u) = 0$, определенный таким же образом, как v, т. е. обращающийся в нуль во

* Существование этого решения, когда коэфициенты a, b, c аналитические, сначала было доказано для частного случая Пикаром, затем для общего случа Гильбертом, Гедриком (Hedrick) и Адамаром; см. уже цитированную работу Адамара. (Hadamard, *Annales de l'École Normale*, 1903, p. 535 и далее).

всех точках контура C и имеющий вид $U_1 \log r + V_1$, где U_1 и V_1 функции, правильные в области D, а $U_1(\xi, \eta)$ равна -1. Возьмем две какие-нибудь точки (a, b), (a', b') области D и применим общую формулу (50) к двум функциям $u(x, y; a', b')$ и $v(x, y; a, b)$ в области D', образованной частью области D, внешней к двум окружностям γ, γ' весьма малых радиусов ρ, ρ', имеющим центры в точках (a, b), (a', b') соответственно. Криволинейный интеграл, взятый вдоль C, равен нулю, и можно показать так же, как это было только что сделано, что интегралы, взятые вдоль γ и γ' имеют пределами соответственно $-2\pi u(a, b; a', b')$ и $2\pi v(a', b', a, b)$, когда ρ и ρ' стремятся к нулю. Заменяя (a, b) через (x, y) и (a', b') через (ξ, η), получаем соотношение:

$$u(x, y; \xi, \eta) = v(\xi, \eta; x, y), \tag{53}$$

вполне подобное тем, которые были установлены для функции Римана (§ 498) и для функции Грина, из которого можно вывести такие же следствия. Однако следует отметить, что функция $u(x, y; \xi, \eta)$ зависит не только от самого уравнения, как функция Римана, но также и от контура C.

524. Смешанные эллиптические задачи. Формула (51) позволяет подойти к задачам, более общим, чем задача Дирихле. В этой формуле мы имеем под знаком интеграла билинейное выражение относительно двух пар переменных $\left(u, \dfrac{du}{dn}\right)$, $\left(v, \dfrac{dv}{dn}\right)$. Предположим, что вместо того, чтобы задавать значения u на контуре C, задается линейное соотношение между u и $\dfrac{du}{dn}$, которое должно выполняться в каждой точке контура C:

$$Hu + K\frac{du}{dn} = L, \tag{54}$$

где H и K — постоянные или функции, известные для каждой точки контура, которые, впрочем, могут иметь некоторое число точек разрыва на этом контуре, а L — данная функция на контуре C. Например, можно задать значение $\dfrac{du}{dn}$ в каждой точке C или значение u в некоторых частях C и значение $\dfrac{du}{dn}$ на остальной части контура. Функция, стоящая под знаком интеграла в формуле (51), будет известна, если коэфициенты при u и $\dfrac{du}{dn}$ пропорциональны коэфициентам H и K, а для этого необходимо, чтобы интеграл v сопряженного уравнения в свою очередь удовлетворял вдоль контура C соотношению:

$$K\frac{\partial v}{\partial n} + v\,(H - aK\cos\alpha' - bK\cos\beta') = 0. \tag{55}$$

Эту функцию v можно также получить, прибавляя к фундаментальному решению $V(x, y; \xi, \eta)$ интеграл v_1 сопряженного уравнения, правильный внутри контура C и удовлетворяющий на этом контуре соотношению:

$$\left(\frac{dv_1}{dn} + \frac{dV}{dn}\right) + (v_1 + V)(l - a\cos\alpha' - b\cos\beta') = 0 \qquad l = \frac{H}{K},$$

что представляет частный случай той общей задачи, которую нужно решить. Знание этой функции $v(x, y; \xi, \eta)$ позволит решить также и поставленную смешанную задачу, каковы бы ни были значения L в формуле (54), выражающей условия на границах.

Таким образом мы видим, что существует бесконечное множество функций, зависящих от двух пар переменных (x, y), (ξ, η), из которых каждая играет роль функции Грина для некоторой граничной задачи эллиптического типа. Эти функции зависят одновременно от самого уравнения, от контура C, а также от самой природы задачи, т. е. от коэфициентов H и K. Ясно, что здесь изложены только общие положения, которые требуют уточнения для каждого частного случая; и может случиться, что условия, которым должна удовлетворять функция v, окажутся несовместными.

Простой пример такого случая представляет *задача Неймана*, заключающаяся в том, чтобы, *зная значения* $\frac{du}{dn}$ *на контуре, определить функцию* $u\,(x,y)$, *гармоническую внутри этого контура*. Пусть $U'(M)$ — значение $\frac{du}{dn}$, заданное в каждой точке M контура C; на основании общего свойства, выраженного соотношением (12) (§ 506), эта функция $u\,(x, y)$ может существовать, только если данная функция $U'(M)$ удовлетворяет условию:

$$\int\limits_C U'(M)\,ds = 0. \qquad (56)$$

Этого достаточно, чтобы доказать, что не существует такого решения уравнения $\Delta v = 0$, у которого производная по нормали $\frac{dv}{dn}$ была бы равна нулю на контуре C, а сама функция была бы правильной внутри контура за исключением окрестности точки (ξ, η), в которой она имела бы логарифмическую бесконечность. Действительно, функция v была бы гармонической в области, ограниченной контуром C и окружностью γ весьма малого радиуса ρ, описанной из точки (ξ, η), как центра, и мы должны были бы иметь $\int\limits_\gamma \frac{dv}{dn}\,ds = 0$, поскольку $\frac{dv}{dn}$ обращается в нуль на C. Но вычисление сразу же показывает, что этот интеграл стремится к 2π, когда ρ стремится к нулю.

Когда условие (56) выполнено, задача Неймана приводится к задаче Дирихле; мы ограничимся областью с простым контуром. Действительно, рассмотрим на контуре C функцию

$$V(s) = \int\limits_0^s U'(M)\,ds,$$

где дуга отсчитывается от произвольного начала; эта функция $V(s)$ непрерывна и допускает единственное значение в каждой точке в силу соотношения (56). Пусть $V(x, y)$ функция, гармоническая в области D, принимающая значение $V(s)$ на контуре C; к этой функции $V(x, y)$ можно присоединить другую гармоническую функцию $U(x, y)$ так, что $V + iU$ будет голоморфной функцией от $x + iy$ внутри C. На основании общих соотношений § 503 имеем на этом контуре:

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dV}{ds} = U'(M)$$

и, следовательно, функция $U(x, y)$ дает решение задачи Неймана. Эта функция определена только с точностью до произвольной постоянной, что было a priori очевидно (см. упражнение 12).

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. Вывести общую формулу (13) (§ 507) из интеграла Коши (II § 291).

Решение. Пусть $U(x, y) + iV(x, y)$ — функция, голоморфная внутри некоторого контура C. Заменяя в формуле Коши x через $a + bi$, где a и b суть координаты некоторой внутренней точки P, и сравнивая действительные части, получаем соотношение:

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left(V\frac{d\log r}{ds} - U\frac{d\log r}{dn}\right) ds,$$

так как

$$\frac{dz}{z-a-bi}=\left(\frac{d\log r}{ds}-i\frac{d\log r}{dn}\right)ds$$

вдоль контура C. Достаточно проинтегрировать по частям первый интеграл, чтобы прийти к формуле (13) после замены $\frac{dV}{ds}$ на $-\frac{dU}{dn}$.

2. Доказать, что функция $U(a, b)$, представленная формулой (18), дает решение задачи Дирихле для круга, принимая во внимание, что правая часть есть разность двух потенциалов двойного слоя.

3. Доказать, пользуясь теоремами Коши, что интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\;\frac{d\log r}{dn}\,d\psi$$

равен значению аргумента $(1+a+bi)$, заключенному между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; r есть расстояние от некоторой точки окружности радиуса единица, имеющей центр в начале, до точки (a, b) внутри этого круга (см. стр. 159—161).

Указание. Начать с доказательства соотношения

$$\int_C \operatorname{Log} z\,\frac{dz}{z-x}=2\pi i\operatorname{Log}(1+x),$$

где $x=a+bi$, аргумент z отсчитывается от $-\pi$ до $+\pi$, а аргумент $1+x$ от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Для этого применить теорему о вычетах к контуру, образованному кривой C и двумя сторонами разреза, соединяющего начало с точкой (-1).

4. Показать при помощи инверсий, что формула Пуассона (17) может быть написана в виде:

$$U(a, b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\,d\psi',$$

где ψ' — полярный угол второй точки пересечения прямой PM с окружностью C. Пусть P и Q — две произвольные точки внутри круга, ρ и ρ' — их расстояния от центра, d — расстояние между ними, D — колебание данной функции $f(\psi)$ на окружности; имеем неравенство:

$$|V_Q-V_P|<\frac{2D}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{Rd}{\sqrt{R^2-\rho^2}\sqrt{R^2-\rho'^2}}.$$

[Darboux, *Bullet. des Sc. math.*, 2-я серия, т. XXXIV, 1910, стр. 287.]

5. *Пример Адамара* (сноска на стр. 169). Функция

$$U=\sum_{h=1}^{\pm\infty}\frac{\rho^{2^{2n}}}{2^n}\cos(2^{2n}\theta)$$

является гармонической внутри круга C радиуса единица и обращается на окружности C в непрерывную функцию θ, $\sum\frac{1}{2^n}\cos(2^{2n}\theta)$. Двойной интеграл

$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

распространенный на площадь концентрического круга радиуса $\rho < 1$, имеет значение:

$$\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{2^{2n}+1}$$

и безгранично возрастает, когда ρ стремится к единице.

6. Пусть $U(x, y)$ — функция, гармоническая на части плоскости, внешней по отношению к контуру C, и правильная в бесконечности. Доказать, что для этой части плоскости следует заменить общую формулу (13) следующей:

$$U(a, b) - U_{\infty} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C} \left(\log r \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{d \log r}{dn} \right) ds,$$

где производные взяты по направлению внешней нормали.

Применить сначала формулу (13) к контуру, образованному из C и из круга Γ с центром (a, b), радиус которого считать затем бесконечно возрастающим.

7. Вычислить потенциалы простого слоя

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos n\psi \log r \, d\psi \qquad I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin n\psi \log r \, d\psi,$$

где r — расстояние между двумя точками с полярными координатами (ρ, ω) и $(1, \psi)$, n — целое положительное число.

Указание. Из классической формулы, которая дает разложение $\operatorname{Log}(1 - z)$, положив в ней $z = \rho e^{i\theta}$, где $\theta = \psi - \omega$, и предполагая $\rho < 1$, получаем:

$$\log (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{\frac{1}{2}} = - \rho \cos \theta - \rho^2 \frac{\cos 2\theta}{2} - \ldots - \rho^n \frac{\cos n\theta}{n} - \ldots,$$

заменяя $\log r$ его разложением в ряд и интегрируя почленно, получим:

$$I_1 = -\frac{\pi}{n} \rho^n \cos n\omega; \qquad I_2 = -\frac{\pi}{n} \rho^n \sin n\omega,$$

если $\rho < 1$.

Когда $\rho > 1$, то значения I_1 и I_2 получим, заменяя ρ через $\frac{1}{\rho}$. Так как потенциал непрерывен, то формулы справедливы и для $\rho = 1$, что дает соотношения:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos n\psi \log \left\{ 2 \left| \sin \frac{\psi - \omega}{2} \right| \right\} d\psi = -\frac{\pi}{n} \cos n\omega,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin n\psi \log \left\{ 2 \left| \sin \frac{\psi - \omega}{2} \right| \right\} d\psi = -\frac{\pi}{n} \sin n\omega.$$

8 Проверить, что единственные функции $F(\psi)$, удовлетворяющие соотношению вида:

$$\int\limits_0^{2\pi} F(\psi) \log \left\{ 2 \left| \sin \frac{\psi - \omega}{2} \right| \right\} d\psi = KF(\omega),$$

где K — постоянная, имеют вид $A \cos n\psi + B \sin n\psi$.

Указание Рассмотрим потенциал

$$V(\rho, \omega) = \int\limits_0^{2\pi} F(\psi) \log r \, d\psi;$$

вычисляя $\frac{\partial V}{\partial \rho}$, после некоторых простых преобразований можно показать, что потенциал удовлетворяет соотношению:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\pi}{K} V = C,$$

где C — постоянное. Это постоянное должно равняться нулю, так как V равно нулю в центре круга и, следовательно, V является однородной гармонической функцией.

9. Вычислить потенциалы двойного слоя

$$\int_0^{2\pi} \cos n\psi \frac{\cos \varphi}{r} d\psi \qquad \int_0^{2\pi} \sin n\psi \frac{\cos \varphi}{r} d\psi,$$

где r и φ имеют обычное значение.

10. Пусть U — некоторая функция, непрерывная вдоль окружности C радиуса R; если x — аффикс внутренней точки, то интеграл

$$F(x) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{U\,dz}{z-x} - \frac{1}{\pi} \int_C U \frac{ds}{2R}$$

представляет внутри круга C голоморфную функцию от x, действительная часть которой стремится к U, когда точка x стремится к точке окружности C.

Указание. Замечая, что эта действительная часть представляет собой потенциал двойного слоя, получаем отсюда соотношение:

$$F(x) - F(0) = \frac{x}{\pi i} \int_C U \frac{dz}{z(z-x)} = -\frac{x}{\pi R} \int_C U \frac{d \operatorname{Log}(z-x)}{dx} ds.$$

11. Пусть u и v — две сопряженные гармонические функции в круге C, имеющем центр в начале, так что $u + iv = F(z)$. Доказать, что $\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}$ и $\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ суть также сопряженные гармонические функции, и что имеет место соотношение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + i\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = zF'(z).$$

12. *Задача Неймана для окружности.* Пусть $u(a, b)$ — функция, гармоническая внутри круга C радиуса R, имеющего центр в начале, производная которой $\frac{du}{dn}$ принимает заданное значение в каждой точке окружности C, так что

$$\int_C \frac{du}{dn} ds = 0;$$

пусть $v(a, b)$ — сопряженная функция; положим

$$f(x) = u + iv, \quad x = a + ib.$$

На основании результата упражнения 11 имеем:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + i\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = xf'(x).$$

Действительная часть голоморфной функции $xf'(x)$ равна $-R\frac{du}{dn}$ на окружности C; итак, имеем (упражнение 10):

$$xf'(x)=\frac{x}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{dn}\frac{d\,\mathrm{Log}\,(z-x)}{dx}\,ds,$$

$$f'(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{dn}\frac{d\,\mathrm{Log}\,(z-x)}{dx}\,ds$$

и, следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{dn}\,\mathrm{Log}\,(z-x)\,ds.$$

Взяв действительную часть, получим формулу Дини (Dini), представляющую внутри круга искомую гармоническую функцию:

$$u=\frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{dn}\log r\,ds.$$

Полученный результат легко проверить, пользуясь свойствами производных по нормали потенциала простого слоя [§ 538, формула (54)], или формулами упражнения 7.

См. статью Tommaso Boggio, *Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 1911—1912).

13. *Обобщение.* Определить функцию u', гармоническую внутри круга C радиуса R, так чтобы было на окружности

$$\frac{a}{R}u'-\frac{du'}{dn}=U$$

[и заданная функция на C (T. Boggio, ibid.)].

Указание. Пусть u — гармоническая функция, равная U на C; мы должны иметь:

$$au'+\rho\frac{\partial u'}{\partial\rho}=Ru,$$

ибо оба члена являются гармоническими функциями, равными на C. Пусть v и v' — функции, соответственно сопряженные функциям u и u'; можно также предположить, что

$$av'+\rho\frac{\partial v'}{\partial\rho}=Rv.$$

Пусть $u'+iv'=f(z)$; $u+iv=F(z)$. Из этих равенств следует, что функция $f(z)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$af(z)+zf'(z)=RF(z),$$

которое допускает решение, голоморфное внутри C, если a не является целым отрицательным числом.

14. *Задача Дирихле для кольцеобразной области.* Эта задача, одно решение которой уже приводилось (§ 510), является предметом обширного труда Вилла (Villat, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, XXXIII, 1912, 134). Соответствующая функция Грина может быть достаточно просто выражена посредством эллиптических функций.

Пусть D — область, заключенная между двумя окружностями C и C' радиусов 1 и $R>1$, имеющими центры в начале координат на плоскости переменного z. Полагая $u=i\,\mathrm{Log}\,z$, ставим в соответствие окружности C — действительную ось на плоскости переменного u, а окружности C' — прямую, параллельную действительной оси, имеющую ординату $\log R$; при этом круговому кольцу будет соответствовать бесконечная полоса D', ширины $\log R$, заключенная между этими двумя прямыми. Каждой точке области D соответствует бесконечное множество точек полосы D', имеющих одну и ту же ординату, абсциссы которых составляют арифметическую прогрессию с разностью 2π. Рассмотрим систему периодов $2\omega = 2\pi$, $2\omega' = 2i \log R$; e_1, e_2, e_3, g_2, g_3 — действительные, а функции $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, образованные для этих периодов, разлагаются в целые ряды с действительными коэфициентами; η, а также $\frac{\eta'}{i}$ действительны *.

Пусть $\alpha + \beta i$ — точка, взятая внутри полосы D'. Частное

$$\frac{\sigma(u - \alpha - \beta i)}{\sigma(u - \alpha + \beta i)}$$

имеет модуль, равный единице, когда u описывает действительную ось; оно голоморфно внутри D' и не имеет здесь других нулей, кроме точек $\alpha + \beta i + 2k\pi$. Произведение

$$\varphi(u) = e^{\frac{2\beta\eta i u}{\pi}} \frac{\sigma(u - \alpha - \beta i)}{\sigma(u - \alpha + \beta i)}$$

также обладает этими свойствами, но, кроме того, легко видеть, что эта функция имеет период $2\omega = 2\pi$, если принять во внимание соотношение между σu и $\sigma(u + 2\omega)$. Модуль $\varphi(u)$ остается постоянным, когда u описывает верхний край полосы D'. Действительно, на основании общих соотношений

$$\sigma(u + \omega') = e^{\eta' u} \sigma\omega' \sigma_3 u, \qquad \eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi}{2} i$$

имеем:

$$\varphi(u + \omega') = e^{-\beta} e^{\frac{2\beta\eta i u}{\pi}} \frac{\sigma_3(u - \alpha - \beta i)}{\sigma_3(u - \alpha + \beta i)},$$

а так как коэфициенты функции σ_3 действительны, то модуль $\varphi(u + \omega')$ равен $e^{-\beta}$ для действительного u. Приняв это во внимание, положим $v = \operatorname{Log}[\varphi(u)]$; когда z описывает замкнутый контур в кольце D, u возрастает на $2k\pi$, $\varphi(u)$ снова принимает начальное значение, а действительная часть v представляет однозначную функцию переменных x, y в этой области, обращающуюся в нуль на контуре C и равную $-\beta$ на контуре C'. Кроме того, функция v допускает только одну логарифмическую особую точку витури D — точку $e^{-i(\alpha+\beta i)} = e^{\beta - \alpha i}$. Прибавляя к действительной части v действительную часть выражения $\frac{\rho}{\operatorname{Log} R} \operatorname{Log} z$, получаем искомую функцию Грина.

---

* См., например, Tannery et Molk, Fonctions elliptiques (t. I, p. 188 и следующие).

ГЛАВА XXVIII.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ.

1. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ.

525. Общие свойства. Определение гармонических функций непосредственно распространяется на функции трех переменных. Мы будем говорить, что функция $u(x, y, z)$ от трех переменных x, y, z является *гармонической* в некоторой области D пространства, если она правильна, т. е. непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка, и если частные производные второго порядка удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

во всякой точке данной области. Функция $\frac{1}{r}$, где r представляет расстояние от переменной точки $M(x, y, z)$ до постоянной точки $P(a, b, c)$, является гармонической во всякой области, не включающей точки P, причем эта функция играет такую же роль, как функция $\log \frac{1}{r}$ в теории уравнений с двумя переменными. Частные производные от этой функции, взятые как по переменным x, y, z, так и по параметрам a, b, c, являются гармоническими в той же области, и это же самое справедливо для всякой линейной комбинации этих производных, коэфициенты которой не зависят от x, y, z. Например, выражение $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, где φ обозначает угол между направлением PM и направлением произвольной прямой, проведенной из P, является гармонической функцией, ибо оно равно производной от $\frac{1}{r}$, взятой по указанному направлению, если рассматривать $\frac{1}{r}$ как функцию координат (a, b, c) точки P.

Точно так же $\frac{\cos\psi}{r^2}$, где ψ — угол между направлением MP и *постоянным* направлением, независимым от M, является гармонической функцией, так как она представляет взятую по этому направлению производную от $\frac{1}{r}$, рассматриваемой как функция от x, y, z. Свойства гармонических функций, выведенные из теории потенциала или из формулы Грина, распространяются с некоторыми изменениями, которые легко усмотреть, и на гармонические функции трех переменных; мы будем часто ограничиваться лишь некоторыми указаниями, представляя читателю развитие доказательств, вполне подобных доказательствам § 505—507.

Напротив, теория аналитических функций комплексного переменного и теория конформных преобразований не имеют аналогов при переходе от двух к трем переменным. Всякая гармоническая функция преобразуется в гармоническую же при замене x, y, z через kx, ky, kz, при применении любой ортогональной подстановки к этим переменным или при замене x, y, z соответственно через $x+a$, $y+b$, $z+c$; в этом можно убедиться непосредственно. Точно так же, если $U(x, y, z)$ представляет гармоническую функцию, то функция

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,U\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

также является гармонической*.

Комбинируя предыдущие преобразования, получаем все преобразования

$$\begin{aligned} X &= f_1(x, y, z), \\ Y &= f_2(x, y, z), \\ Z &= f_3(x, y, z), \\ U &= \varphi(u, x, y, z), \end{aligned}$$

при которых уравнение $\Delta U = 0$ переходит в уравнение такого же вида $\Delta u = 0$ **.

Мы видели (§ 503), что однородный гармонический многочлен n-й степени с двумя переменными самого общего вида зависит от *двух* произвольных постоянных. Однородный многочлен n-й степени от трех переменных содержит

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

коэфициентов; из того условия, что он удовлетворяет уравнению Лапласа, получим $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений между этими коэфициентами; следовательно, остаются

$$\frac{(n+1)(n+2)-n(n-1)}{2} = 2n+1$$

произвольных коэфициентов. Можно также в этом убедиться замечая, что уравнение Лапласа и уравнения, которые из него получаются посредством диференцирования, позволяют выразить все производные n-го порядка при посредстве тех производных этого порядка, в которых x или не встречается или встречается только один раз.

---

* Это свойство обнаружено лордом Кельвином (Kelvin, *Journal de Liouville*, t. X (1 серия), 1845, стр. 364. Оно легко доказывается при посредстве уравнения Лапласа в полярных координатах (т. I. Упр. к гл. IV).

** Painlevé, *Mémoires des Facultès de Lille*. т. I, 1889.

Итак, в однородном гармоническом многочлене n-го порядка можно произвольно выбрать только коэфициенты при членах, не содержащих x или содержащих x в первой степени; число таких членов, очевидно, равно $2n+1$. Эти гармонические многочлены $V_n(x, y, z)$ можно получить из частных производных гармонической функции $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

В самом деле, все эти производные также удовлетворяют уравнению Лапласа, а производная n-го порядка имеет вид:

$$V_n(x, y, z)(x^2+y^2+z^2)^{-n-\frac{1}{2}},$$

где $V_n(x, y, z)$ — однородный многочлен n-й степени; гармоническая функция, получаемая отсюда преобразованием Кельвина, представляет в точности многочлен $V_n(x, y, z)$. Все эти многочлены приводятся к $2n+1$ линейно независимым многочленам, так как число линейно независимых частных производных n-го порядка от гармонической функции равно $2n+1$. Для $n=1, 2, 3$ имеем соответственно:

$$\begin{aligned}
&V_1(x, y, z)=\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z,\\
&V_2(x, y, z)=\lambda_1(x^2-z^2)+\lambda_2(y^2-z^2)+\lambda_3 xy+\lambda_4 xz+\lambda_5 yz,\\
&V_3(x, y, z)=\lambda_1(x^3-3xy^2)+\lambda_2(x^3-3xz^2)+\ldots+\lambda_7 xyz,
\end{aligned}$$

коэфициенты λ_i произвольны, а невыписанные члены в V_3 получаются из двух первых круговой подстановкой.

526. Ньютонов потенциал простого слоя. Прежде всего вспомним некоторые определения, относящиеся к поверхностям. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности S называется обыкновенной точкой, если координаты (x, y, z) соседних точек M поверхности S являются непрерывными функциями двух параметров u, v, $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$, имеющими непрерывные частные производные первого порядка вблизи системы значений (u_0, v_0), соответствующих точке M_0, и если, далее, три якобиана

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

не обращаются одновременно в нуль для этой системы значений. Часть поверхности называется *правильной*, если она заключает только обыкновенные точки. Поверхности, о которых будет итти речь в дальнейшем, не являются непременно аналитическими, но мы всегда будем предполагать, что они состоят из конечного числа правильных частей. Они могут иметь конечное число ребер, вдоль которых соединяются два куска поверхности с двумя различными касательными плоскости, и конечное число изолированных особых точек, как конические точки или вершины, где сходятся несколько ребер. Ясно, что поверхностный интеграл, распространенный на поверхность такого вида, имеет всегда смысл, если функция под знаком интеграла непрерывна, или если она, оставаясь ограниченной, разрывна в конечном числе точек или вдоль конечного числа линий. Например, если функция под знаком интеграла зависит от направления нормали, то она разрывна вдоль ребер; но если выбрано определенное направление нормали на каждой части поверхности, то двойной интеграл имеет конечное значение.

Пусть Σ — поверхность рассматриваемого вида, замкнутая или нет, но расположенная целиком на конечном расстоянии, и пусть μ — некоторая непрерывная функция на Σ. Интеграл, распространенный на эту поверхность,

$$V(a, b, c) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\mu}{r}\right) d\sigma, \tag{2}$$

где r обозначает расстояние от точки M поверхности Σ до постоянной точки P с координатами (a, b, c), есть *ньютонов потенциал простого слоя*. Можно доказать так же, как в § 505, что $V(a, b, c)$ есть гармоническая функция координат (a, b, c) во всякой области D, не имеющей общих точек с Σ, и что *она непрерывна во всем пространстве*. Для того чтобы установить последнее свойство, достаточно доказать, что интеграл (2) равномерно сходится в окрестности всякой точки M_0 поверхности Σ (§ 504). Допустим, что точка M_0 есть обыкновенная точка поверхности Σ; примем эту точку за начало, а нормаль за ось z. Пусть Σ' есть часть Σ, окружающая точку M_0, и такая, что прямые, параллельные оси z, пересекают ее только один раз; пусть ее проекция на плоскость xy есть внутренность замкнутой кривой γ, заключающей начало. Интеграл

$$V'(a, b, c) = \iint_{\Sigma'} \frac{\mu d\sigma}{r} = \iint \frac{\mu\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

распространенный на часть плоскости xy внутри кривой γ, по абсолютной величине меньше, чем

$$M \iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}},$$

где M обозначает верхнюю границу выражения $|\mu\sqrt{1 + p^2 + q^2}|$ на части поверхности Σ, заключающей Σ'. Переходя к полярным координатам, положив $x = a + \rho\cos\varphi$, $y = b + \rho\sin\varphi$, мы видим, что абсолютная величина $V'(a, b, c)$ меньше, чем интеграл $M\iint d\rho\, d\varphi$, и следовательно, меньше, чем $2\pi Ml$, если кривая γ расположена целиком внутри круга диаметра l. Так как число l может быть взято сколь угодно малым, то то же самое имеет место для $|V'|$. Доказательство легко распространяется на случай, когда точка M_0 расположена на ребре поверхности Σ.

Вне поверхности Σ функция $V(a, b, c)$ *представляет аналитическую функцию от a, b, c*. Так как мы можем принять за начало произвольную точку вне Σ, то достаточно показать, что V может быть разложена в целый ряд по степеням a, b, c, когда начало расположено вне Σ. Функция $\frac{1}{r}$, где x, y, z суть координаты точки поверхности Σ, представляет голоморфную функцию от a, b, c вблизи значений $a=b=c=0$. Будем рассматривать эти переменные как комплексные; если модуль каждого из них меньше ρ, то модуль r^2 больше, чем

$$x^2+y^2+z^2-2\rho\,[|x|+|y|+|z|]-3\rho^2.$$

Если число ρ выбрано достаточно малым, так что предыдущее выражение не обращается в нуль, когда точка (x, y, z) описывает поверхность Σ, то функция $\frac{1}{r}$ от комплексных переменных a, b, c является голоморфной в указанной области, и ее модуль остается меньше некоторого положительного числа M, каково бы ни было положение точки (x, y, z) на поверхности Σ. Следовательно, если разложить эту функцию в целый ряд по степеням a, b, c, то модули коэфициентов будут меньше (II, § 352), чем соответствующие коэфициенты разложения

$$\frac{M}{\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(1-\frac{b}{\rho}\right)\left(1-\frac{c}{\rho}\right)}.$$

Таким образом ряд равномерно сходится, когда точка (x, y, z) описывает поверхность Σ, если только абсолютные величины a, b, c будут меньше ρ. Умножая все члены на $\mu(x, y, z)$ и интегрируя почленно вдоль Σ, получим для $V(a, b, c)$ целый ряд, расположенный по степеням a, b, c, что и доказывает наше предложение.

Важно отметить, что это свойство не является справедливым для точек поверхности Σ; по одну и по другую стороны любой части данной поверхности потенциал $V(a, b, c)$ представляет две различные аналитические функции, которые не являются аналитическим продолжением одна другой при переходе через поверхность. Например, в случае, когда Σ представляет сферу радиуса R, если $\mu=1$, то внутри сферы имеем $V=4\pi R$, а снаружи $V=4\pi\frac{R^2}{d}$, где d — расстояние точки P от центра. Разрыв частных производных $\frac{\partial V}{\partial a}, \ldots$ при переходе через Σ является достаточным объяснением этого результата (§ 538).

Чтобы исследовать потенциал $V(a, b, c)$, когда точка неограниченно удаляется, достаточно переменить роли двух систем переменных (x, y, z) и (a, b, c) в предыдущем рассуждении. Пусть S — сфера радиуса ρ с центром в начале, заключающая внутри себя поверхность Σ; взяв точку P, внешнюю по отношению к S, будем рассматривать $\frac{1}{r}$ как функцию комплексных переменных x, y, z, причем модули этих переменных остаются меньше ρ. В этой области модуль r^2 остается большим, чем

$$a^2+b^2+c^2-2\rho\,\{|a|+|b|+|c|\}-3\rho^2=$$
$$=\{|a|-\rho\}^2+\{|b|-\rho\}^2+\{|c|-\rho\}^2-6\rho^2;$$

если предположить, что точка $P(a, b, c)$ находится вне сферы S' радиуса $R=5\rho$, концентрической сфере S, то легко видеть, что этот модуль больше, чем $3\rho^2$. Следовательно, функция $\frac{1}{r}$ от комплексных переменных x, y, z голоморфна, и ее модуль остается меньше определенного положительного числа, каково бы ни было положение точки P вне поверхности S', если модули x, y, z меньше ρ. Отсюда заключаем, что $\frac{1}{r}$ может быть разложена в целый ряд, расположенный по степеням x, y, z и *сходящийся равномерно*, когда точка x, y, z описывает поверхность Σ:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\sum A_{mnp}\,x^m y^n z^p, \tag{3}$$

где коэфициент A_{mnp} имеет выражение:

$$A_{mnp}=(-1)^{m+n+p}\frac{\partial^{m+n+p}}{\partial a^m \partial b^n \partial c^p}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\frac{1}{m!\,n!\,p!}.$$

Умножая обе части формулы (3) на $\mu(x, y, z)$ и интегрируя почленно, получим разложение $V(a, b, c)$, имеющее место для всякого положения точки P вне S',

$$V(a, b, c)=\frac{Q}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\sum B_{mnp}\frac{\partial^{m+n+p}}{\partial a^m \partial b^n \partial c^p}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right), \tag{4}$$

где Q и B_{mnp} — постоянные коэфициенты. Заметим, что все члены данного разложения суть гармонические функции от a, b, c, и что коэфициент Q равен интегралу $\iint \mu\, d\sigma$, распространенному на Σ.

Такие же вычисления, примененные к логарифмическому потенциалу простого слоя, доказывают, что он представляет аналитическую функцию, но разложение в ряд для весьма больших значений a, b начинается с члена $Q\log\sqrt{a^2+b^2}$.

527. Потенциал двойного слоя. Пусть MN - направление нормали, определенное в каждой точке M поверхности Σ, меняющееся непрерывно с изменением положения точки M на всей поверхности или на каждой части поверхности.

Обозначим через φ угол между направлением MN и направлением MP, соединяющим точку M и точку P с координатами (a, b, c). Можно показать так же, как в § 505, что двойной интеграл

$$W(a, b, c)=\iint\limits_{\Sigma}\mu\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma=\iint\mu\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma, \tag{5}$$

где μ — функция, изменяющаяся непрерывно с изменением положения точки M на поверхности Σ, является гармонической функцией координат точки P во всякой области, не имеющей общих точек с поверхностью Σ. Эта функция получила название *потенциала двойного слоя*, заимствованное из теории магнетизма. Эта функция является также *аналитической*. Для доказательства возьмем те же условия, что в предыдущем параграфе; мы можем написать:

$$\frac{-\cos\varphi}{r^2}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a}\cos\alpha+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial b}\cos\beta+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial c}\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы между направлением MN и осями координат.

Если модули комплексных переменных a, b, c меньше, чем соответствующим образом выбранное положительное число ρ, то, как мы видели, функция $\frac{1}{r}$ может быть разложена в целый ряд, который остается равномерно сходящимся, когда точка (x, y, z) описывает поверхность Σ. Очевидно, то же самое справедливо и для частных производных от $\frac{1}{r}$ по переменным a, b, c и, следовательно, для $\frac{\cos\varphi}{r^2}$. Рассуждение проводится так же, как в случае потенциала простого слоя *.

Из соотношения

$$\frac{\cos\varphi}{r^2}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\cos\gamma$$

можно вывести также, что функция $W(a, b, c)$ разлагается в ряд вида (4), если $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ больше некоторого положительного числа, выбранного соответствующим образом, но следует заметить, что в разложении не будет члена с $(a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$, ибо в бесконечности W имеет порядок $(a^2+b^2+c^2)^{-1}$.

Функция $W(a, b, c)$ разрывна в точках поверхности Σ. Возьмем сначала простой случай, когда имеем $\mu=1$: полученный таким образом интеграл

$$W_1(a, b, c)=\iint_{\Sigma}\mu\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma=\iint_{\Sigma}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,d\sigma, \tag{6}$$

называемый *интегралом Гаусса*, имеет геометрическое значение, обнаруживающее с очевидностью его разрывность. Если дана некоторая точка O и такая часть поверхности σ, что полупрямая, проведенная из O, не может пересекать ее более, чем в одной точке, то геометрическое место полупрямых, проведенных из O и проходящих через точки σ, есть телесный конус; площадка, вырезаемая этим конусом на сфере радиуса единица

* Когда поверхность Σ аналитическая, если μ также представляет аналитическую функцию на Σ, то оба потенциала $V(a, b, c)$ и $W(a, b, c)$ могут быть аналитически продолжены через поверхность Σ. (Bruns, *Journal de Crelle*, т. 81; Erhard Schmidt, *Mathematische Annalen*, т. LXVIII.)

с центром в O, является мерой *телесного угла*, под которым видна поверхность σ из точки O. Если так, то выражение $\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma$ равно $\pm$ телесному углу, под которым виден из точки P элемент поверхности $d\sigma$, ибо $\cos\varphi\,d\sigma$ есть с точностью до знака элементарная площадка, вырезанная на сфере радиуса r с центром в P элементарным конусом с вершиной в P, имеющим основанием элемент $d\sigma$. Что касается знака, то он определяется следующим условием: назовем положительной стороной поверхности Σ сторону, соответствующую выбранному направлению нормали, и отрицательной — противоположную сторону; очевидно, что $\cos\varphi\,\frac{d\sigma}{r^2}$ положительно, если полупрямая, проведенная из P и пересекающая элемент поверхности, переходит с положительной стороны на отрицательную, и отрицательно в противоположном случае.

Отсюда непосредственно видно, каково значение интеграла (6); это — сумма элементарных телесных углов, взятых с сответствующим знаком, под которыми видны из точки P различные элементы поверхности Σ. Допустим, в частности, что Σ представляет замкнутую поверхность, и что за направление MN принято направление внутренней нормали; $W_1(a, b, c)$ равно 4π, если точка P расположена внутри области D, ограниченной поверхностью Σ, и равно нулю, если точка расположена вне этой области. В обыкновенной точке P, взятой на Σ, этот интеграл равен 2π; в точке, где поверхность не допускает единственной касательной плоскости, этот интеграл равен мере телесного угла α, образованного касательными линиями к поверхности, выходящими из этой точки *.

Возвратимся теперь к общему случаю, предполагая все время, что поверхность Σ является замкнутой, и что выбрано направление внутренней нормали. Так же, как выше (§ 505), можно показать, что интеграл

$$I(P)=\iint\limits_{\Sigma}[\mu-\mu_0]\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma,$$

где μ_0 — значение μ в точке M_0 поверхности Σ, есть непрерывная функция координат точки P в этой точке M_0, т. е. что разность $I(P)-I(M_0)$ стремится к нулю одновременно с расстоянием M_0P. Принимая это во внимание, обозначим через W_0 значение самого интеграла (5), когда точка P совпадает с точкой M_0, и через W_{0i} и W_{0e} — пределы, к которым стремится $W(a, b, c)$, когда точка P стремится к точке M_0, оставаясь соответственно внутри или вне поверхности Σ.

* Эти результаты также очень легко выводятся из формул § 528. Если точка P расположена вне области D, то $U=\frac{1}{r}$ является гармонической функцией в этой области, и формула (12) дает $W_1=0$. Если точка P находится внутри D, то формула (14), приложенная к гармонической функции $U=1$, дает $W_1=4\pi$. Если точка P принадлежит поверхности Σ, то следует применить формулу (12) к функции $U=\frac{1}{r}$, гармонической в части области D, внешней к сфере радиуса ρ с центром в P, и заставить радиус ρ этой сферы стремиться к нулю.

Когда P совпадает с M_0, I равен $W_0 - 2\pi\mu_0$; если P стремится к M_0, оставаясь внутри Σ, то первый член в выражении I имеет пределом W_{0i}, тогда как коэфициент при μ_0 постоянно равен -4π. Наоборот, когда P стремится к M_0, находясь вне Σ, то первый член I имеет пределом W_{0e}, а коэфициент при μ_0 равен нулю. Так как функция I непрерывна в точке M_0, то имеем:

$$W_0 - 2\pi\mu_0 = W_{0i} - 4\pi\mu_0 = W_{0e},$$

откуда можно вывести два соотношения, вполне аналогичных соотношениям § 505:

$$W_{0i} = W_0 + 2\pi\mu_0, \quad W_{0e} = W_0 - 2\pi\mu. \tag{7}$$

В особой точке эти соотношения должны быть заменены следующими:

$$W_{0i} = W_0 + (4\pi - \alpha)\mu_0, \quad W_{0e} = W_0 - \alpha\mu_0, \tag{8}$$

где α имеет значение, указанное выше.

528. Вторая формула Грина. Если даны две какие-нибудь функции $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, то имеем тождественно:

$$\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Если функции φ, ψ правильны в замкнутой области D, ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями, и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхностях, ограничивающих данную область, то согласно первой формуле Грина имеем (I, § 116):

$$\iiint\limits_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_\Sigma \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dy\,dz + \frac{\partial\psi}{\partial y}dz\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial z}dx\,dy\right) - \tag{9}$$

$$- \iint\limits_\Sigma \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\,dz + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dz\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dx\,dy\right),$$

где двойные интегралы взяты по *внешней* стороне поверхности Σ, ограничивающей область D. Пусть α, β, γ — углы, образуемые с осями направлением *внутренней* нормали в точке поверхности Σ; первый двойной интеграл может быть написан в виде:

$$-\iint\limits_\Sigma \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma = -\iint\limits_\Sigma \varphi\frac{d\psi}{dn}d\sigma.$$

Можно также преобразовать и второй двойной интеграл, и формула (9) примет вид:

$$\iiint\limits_D (\varphi\,\Delta\psi-\psi\,\Delta\varphi)\,dx\,dy\,dz+\iint\limits_\Sigma\left(\varphi\frac{d\psi}{dn}-\psi\frac{d\varphi}{dn}\right)d\sigma=0, \tag{10}$$

где производные $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\psi}{dn}$ взяты по направлению внутренней нормали, т. е. нормали, входящей в область D.

Если функции φ и ψ — две гармонические функции внутри D, U и V, то тройной интеграл исчезает, и остается соотношение:

$$\iint\limits_\Sigma\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma=0. \tag{11}$$

Можно получить еще две важные формулы, положив $\psi=1$, $\varphi=U$ или $\varphi=U^2$, где U — гармоническая функция:

$$\iint\limits_\Sigma\frac{dU}{dn}\,d\sigma=0, \tag{12}$$

$$\iiint\limits_D\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\iint\limits_\Sigma U\frac{dU}{dn}\,d\sigma=0; \tag{13}$$

первая формула характеризует гармонические функции (§ 506).

Пусть $P(a, b, c)$ — точка области D, а $U(x, y, z)$ — гармоническая функция в этой области. Обе функции U и $V=\frac{1}{r}$, где r — расстояние от точки P до переменной точки (x, y, z), являются гармоническими в части области, внешней по отношению к некоторой сфере S радиуса ρ с центром в точке P, столь малой, что она целиком расположена внутри D. Применим формулу (11) к области, ограниченной поверхностями Σ и S; неограниченно уменьшая ρ и рассуждая так же, как в § 507, получим формулу:

$$U(a, b, c)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma\left[U\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}-\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right]d\sigma, \tag{14}$$

вполне подобную формуле (13) § 507. Множитель 2π заменен множителем 4π, измеряющим поверхность сферы радиуса единица, а $\log\frac{1}{r}$ заменен через $\frac{1}{r}$. В частности, если поверхность Σ есть поверхность сферы S радиуса R, имеющей центр в точке P, то вдоль всей этой сферы имеем $r=R$,

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}=\frac{1}{R^2},$$

и таким образом получаем *формулу среднего значения* для гармонических функций от трех переменных:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S U d\sigma. \qquad (15)$$

Отсюда можно вывести, как это сделано выше (§ 507), что гармоническая функция трех переменных не может иметь внутри области ни максимума, ни минимума.

Правая часть формулы (14) представляет сумму потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя, т. е. двух аналитических функций (§ 526—527). Отсюда заключаем, *что всякая гармоническая функция есть функция аналитическая.* Действительно, если дана точка P в области D, где функция U является гармонической, то всегда можно применить формулу (14), принимая за Σ замкнутую поверхность, окружающую точку P и расположенную целиком внутри этой области D. Пусть x_0, y_0, z_0 — координаты некоторой точки области D; вблизи этой точки гармоническая функция $U(x, y, z)$ может быть разложена в целый ряд, расположенный по степеням $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Совокупность членов n-й степени представляет многочлен

$$V_n(x - x_0, \ y - y_0, \ z - z_0),$$

где V_n обозначает однородный гармонический многочлен n-й степени * (§ 525).

Формула (14) позволяет распространить на пространственные гармонические функции вторую теорему Пикара (стр. 147). Пусть $V(x, y, z)$ — функция, гармоническая в некоторой области D, за исключением одной точки O этой области, где она принимает значение $+\infty$. Тогда семейство поверхностей $V(x, y, z) = K$ для весьма больших значений K представляет замкнутые поверхности, окружающие точку O и стремящиеся к этой точке при безграничном возрастании K. Производная $\frac{dV}{dn}$, взятая в направлении внешней стороны одной из этих поверхностей, отрицательна, и интеграл $\iint \frac{dV}{dn} d\sigma$, взятый по внешней стороне, имеет отрицательное значение $-4\pi H$, независимое от K, ибо функция V является гармонической в области, заключенной между любыми двумя из этих поверхностей. Имея это в виду, допустим, что S — сфера с центром O, расположенная внутри области D, $M(a, b, c)$ — какая-нибудь точка внутри S, несовпадающая с O, Σ — одна из поверхностей $V = K$, расположенная внутри S так, что точка M остается внешней по отношению к ней. Формула (14) дает для $V(a, b, c)$ сумму двух интегралов: одного, взятого по внутренней стороне поверхности S, и другого, взятого по внешней стороне поверхности Σ. Интеграл, взятый по внутренней стороне поверхности S, представляет функцию $U(a, b, c)$, гармоническую внутри S. Интеграл, взятый по внешней стороне поверхности Σ равен

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Так как производная $\frac{dV}{dn}$ сохраняет постоянный знак на поверхности Σ, то можно

---

* На эти ряды распространяются известные теоремы относительно целых рядов с одним комплексным переменным (см. Appell, *Acta Mathematica*, т. IV, 1884 313—374).

к этому интегралу применить формулу среднего значения; когда поверхность Σ стягивается в точку O, этот интеграл обращается в $\frac{H}{\rho}$ где ρ обозначает расстояние OM. Итак, функция $V(a, b, c)$ имеет вид $\frac{H}{\rho} + U(a, b, c)$, где $U(a, b, c)$ является гармонической функцией в области D.

Формула (14) позволяет также ответить утвердительно на следующий вопрос: *Пусть U — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка в области D; кроме того, известно, что частные производные второго порядка непрерывны и удовлетворяют уравнению Лапласа во всех точках области D за исключением, быть может, конечного числа поверхностей, расположенных в этой области Можно ли отсюда заключить, что U является гармонической функцией во всей области?*

Пусть S — одна из поверхностей области D, вдоль которой вторые производные от U можно считать разрывными. Из точки A этой поверхности, как из центра, опишем сферу Σ достаточно малого радиуса, так чтобы она целиком была расположена внутри D и не заключала внутри другой поверхности, подобной S Часть S' поверхности S, расположенная внутри сферы Σ, разбивает сферу на две области D' и D'', ограниченных соответственно S' и двумя частями Σ' и Σ'' поверхности Σ. В каждой из этих двух областей функция U является гармонической; обозначим через U', U'' — две гармонические функции, с которыми она совпадает соответственно в областях D'' и D'. Мы хотим показать, что эти две функции U' и U'' являются одна для другой аналитическим продолжением при переходе через поверхность S', или, что сводится к тому же, что существует функция, гармоническая внутри области $D' + D''$ и совпадающая с U' внутри D и с U'' внутри D''.

Пусть P — какая-нибудь точка области D'; так как U' является гармонической внутри D', то согласно формуле (14) имеем:

$$U'_P = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma'}\left[\frac{1}{r}\frac{dU'}{dn} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iint_{S'}\left[\frac{1}{r}\frac{dU'}{dn'} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn'}\right]d\sigma,$$

где через $\frac{d}{dn'}$ обозначена производная в некоторой точке S' по нормали внутренней к D'. Так как обе функции U'' и $\frac{1}{r}$ являются гармоническими внутри области D'', то правая часть предыдущей формулы будет равна нулю, если заменить в ней U' через U'', Σ' через Σ'' и $\frac{d}{dn'}$ через производную $\frac{d}{dn''}$, взятую по внутренней нормали к D'' в некоторой точке S'. Но так как данная функция U вместе со своими частными производными первого порядка непрерывна вдоль S', то имеем $\frac{dU'}{dn'} + \frac{dU''}{dn''} = 0$; следовательно, если совершим указанную только что замену и сложим полученное равенство с вышенаписанным, то получим:

$$U'_P = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma'}\left[\frac{1}{r}\frac{dU'}{dn} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma''}\left[\frac{1}{r}\frac{dU''}{dn} - U''\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma.$$

Ясно, что такое выражение мы получим и для U''_P, если P — внутренняя точка D''. Но правая часть этой формулы, рассматриваемая как функция координат точки P, является гармонической функцией внутри поверхности Σ, а это и доказывает результат, указанный выше.

529. Внутренняя и внешняя задача. Внутренняя задача Дирихле для пространства ставится так же, как аналогичная задача для плоскости. Если дана замкнутая область D, ограниченная одной или несколькими замкнутыми поверхностями, то задача состоит в том, чтобы найти функцию, гармоническую внутри D и принимающую заданные значения на ограничивающих область поверхностях, причем эти значения образуют непрерывную последовательность на каждой из этих поверхностей. Отсутствие максимума и минимума у гармонической функции доказывает также, что эта задача допускает не более одного решения, а рассуждения Римана для доказательства существования решения встречают те же возражения, что и для случая задачи на плоскости. Читатель легко проведет сам эти рассуждения.

Прежде чем заняться *внешней задачей*, дадим несколько определений. Пусть $U(x, y, z)$ — функция, гармоническая в окрестности всякой точки P, расположенной вне сферы радиуса R, имеющей центр в начале. Функция, полученная преобразованием Кельвина,

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,U\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right),$$

представляет решение уравнения $\Delta V=0$, правильное во всякой точке внутри сферы радиуса $\frac{1}{R}$, имеющей центр в начале за исключением, может быть, самого начала.

Если эта функция $V(x, y, z)$ правильная также и вначале, то она может быть разложена в целый ряд вида

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(x, y, z),$$

и следовательно, функция $U(x, y, z)$, которая получается из $V(x, y, z)$ таким же образом, как V выводится из U, разлагается в ряд вида:

$$U(x, y, z)=\frac{A_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}V_n\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\dots\right),\tag{16}$$

если $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ больше некоторого, соответствующим образом выбранного, положительного числа. Тогда мы будем говорить, что *гармоническая функция U правильна и равна нулю в бесконечности.* Это имеет место для потенциала простого или двойного слоя (§ 526 — 527). Действительно, формулы (4) и (16) отличаются только обозначениями, ибо, как было уже отмечено (§ 525), n-е производные от $\frac{1}{r}$ имеют вид:

$$V_n(x,y,z)\ (x^2+y^2+z^2)^{-n-\frac{1}{2}},$$

где $V_n(x, y, z)$ — однородный гармонический многочлен n-й степени.

Вообще мы будем говорить, что гармоническая функция $U(x, y, z)$ является *правильной в бесконечности*, если существует такая постоянная C, что разность $U(x, y, z) - C$ будет правильной и равной нулю в бесконечности. Эта функция стремится к значению C, когда расстояние точки (x, y, z) от начала безгранично возрастает.

Установив это, рассмотрим для определенности единственную замкнутую поверхность Σ, и пусть $\mathfrak{D}$ — бесконечная область вне Σ. Внешняя задача, относящаяся к поверхности Σ, формулируется так: *Найти функцию, гармоническую внутри $\mathfrak{D}$, правильную и равную нулю в бесконечности, принимающую на поверхности Σ непрерывную последовательность заданных значений.*

Задача, так поставленная, сейчас же приводится к внутренней задаче. Действительно, допустим, что начало расположено внутри поверхности Σ, и сделаем преобразование инверсии, взяв модуль, равный единице, и поместив полюс в точке O. Поверхность Σ заменится замкнутой поверхностью Σ', а область $\mathfrak{D}$ областью $\mathfrak{D}'$, внутренней к поверхности Σ'. С другой стороны, в преобразовании Кельвина искомой гармонической функции $U(x, y, z)$ соответствует функция $V(x, y, z)$, гармоническая внутри $\mathfrak{D}'$ и принимающая на поверхности Σ' известные значения, которые получаются из заданных значений U на поверхности Σ. Таким образом мы получаем эту функцию $V(x, y, z)$, а следовательно, и функцию $U(x, y, z)$, решив внутреннюю задачу.

Отсюда видна существенная разница между внешней задачей для плоскости и для пространства. Если в последнем случае не налагать на гармоническую функцию $U(x, y, z)$ условия равенства нулю в бесконечности, то задача будет неопределенной.

Пусть в самом деле $U(x, y, z)$ — гармоническая функция, дающая решение внешней задачи в собственном смысле для поверхности Σ; пусть, с другой стороны, $U_1(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри $\mathfrak{D}$, правильная и равная нулю в бесконечности, принимающая значение единица на поверхности Σ.

Функция $U(x, y, z) + C\,[1 - U_1(x, y, z)]$ является гармонической внутри $\mathfrak{D}$, правильной в бесконечности и принимающей те же значения, что $U(x, y, z)$ на поверхности Σ, какова бы ни была постоянная C; она принимает значение C в бесконечности. Для того чтобы задача была вполне определенной, необходимо задать значение искомой гармонической функции в бесконечности; если выбрать *нуль* за значение U в бесконечности, то получим обычную внешнюю задачу. Например, когда Σ — сфера радиуса R, то все функции $1 + C\left(\frac{R}{r} - 1\right)$, где r обозначает расстояние от центра, являются гармоническими вне сферы, правильными в бесконечности и принимают значение единица на сфере; для того чтобы получить функцию, равную нулю в бесконечности, необходимо положить $C = 1$.

Примечание. Пусть U и V — две функции, гармонические вне поверхности Σ, правильные и *равные нулю* в бесконечности. К этим двум функциям можно также приложить формулу (11) при условии, что $\frac{d}{dn}$ представляет производную, взятую по нормали, *внешней* по отношению к Σ. Действительно, пусть S — сфера с центром в неподвижной точке O радиуса R столь большого, что поверхность Σ расположена целиком внутри этой сферы. Так как обе функции U и V являются гармоническими в области, ограниченной поверхностями S и Σ, то можно применить формулу (11) к совокупности двух поверхностей S и Σ. Если теперь неограниченно увеличивать R, то двойной интеграл, распространенный на S, будет бесконечно мал, ибо U и V равны нулю в бесконечности, а $\frac{dU}{dn}$ и $\frac{dV}{dn}$ имеют порядок $\frac{1}{R^2}$.

Рассмотрим в частности функцию $U(x, y, z)$, гармоническую вне Σ и равную нулю в бесконечности, и функцию $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от точки (x, y, z) до постоянной точки $P(a, b, c)$, внешней по отношению к поверхности Σ. Эти две функции правильны вне поверхности Σ и вне сферы σ радиуса ρ с центром в P. Применим формулу (11) к совокупности двух поверхностей: Σ и σ, затем будем стремить к нулю радиус ρ сферы σ; мы можем убедиться также, что функция $U(a, b, c)$ дается формулой (14), где производные взяты по нормали, внешней по отношению к Σ (см. упражнение 6, стр. 200).

530. Решение задачи для шара. Решение внутренней задачи для шара дается формулой, аналогичной интегралу Пуассона. Пусть $U(x, y, z)$ функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R, принимающая заданные значения на поверхности.

Если бы было известно также значение $\dfrac{dU}{dn}$ в каждой точке этой поверхности, то значение этой функции в внутренней точке с координатами (a, b, c) было бы дано формулой (14). При помощи искусственного приема, вполне подобного примененному в § 508, можно исключить $\dfrac{dU}{dn}$.

Пусть P_1 — точка, гармонически сопряженная с P по отношению к концам диаметра, проходящего через P, r_1, — расстояние от точки P_1 до точки (x, y, z). Так как функция $\dfrac{1}{r_1}$ является гармонической внутри сферы S, то имеем соотношение:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[U\frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dU}{dn}\right] d\sigma = 0. \tag{17}$$

Но в каждой точке сферы S имеем $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{R}{\rho}$, где ρ — расстояние точки P от центра сферы.

Складывая формулы (14) и (17), предварительно умножив последнюю на $-\dfrac{R}{\rho}$, получим соотношение:

$$U(a,\ b,\ c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S U\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{R}{\rho}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn}\right] d\sigma, \tag{18}$$

где интеграл зависит только от значения U на поверхности шара. Пусть ρ_1 — расстояние P_1 от центра шара S, φ и φ_1 — углы внутренней нормали к поверхности S в точке M с MP и MP_1. Имеем соотношения:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{\cos\varphi}{r^2}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn} = \frac{\cos\varphi_1}{r_1^2}, \quad \rho\rho_1 = R^2, \quad \frac{r_1}{r} = \frac{R}{\rho},$$

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi, \quad \rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi_1,$$

откуда, исключая φ, φ_1, r_1, ρ_1, получаем:

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{R}{\rho}\,\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} = \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3},$$

и формула (18) принимает вид:

$$U(a,\ b,\ c)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S U\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3}\,d\sigma. \qquad (19)$$

Предыдущее доказательство предполагает, что внутренняя задача допускает решение и, кроме того, что $\frac{dU}{dn}$ существует на поверхности, что не всегда имеет место. Мы сейчас непосредственно убедимся, *что функция* $U(a,\ b,\ c)$, *представленная формулой* (19), *дает решение задачи Дирихле для шара*, какова бы ни была заданная непрерывная функция U на поверхности. Действительно, эта формула может быть написана в виде:

$$U(a,\ b,\ c)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S U\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S \frac{U}{r}\,ds \qquad (20)$$

в силу соотношения

$$R^2-\rho^2=2Rr\cos\varphi-r^2.$$

Правая часть представляет разность между потенциалом двойного слоя и потенциалом простого слоя и, следовательно, является гармонической функцией. Пусть K' — значение потенциала простого слоя

$$\frac{1}{4\pi R}\iint\frac{U}{r}\,d\sigma,$$

когда точка P совпадает с точкой M' поверхности сферы, а U' — заданное значение U в этой точке. Когда внутренняя точка P сферы стремится к точке M', потенциал двойного слоя стремится к пределу $U'+K'$ (§ 527), ибо когда точка P совпадает с точкой M', то для какой-нибудь точки M сферы имеем $2R\cos\varphi=r$. С другой стороны, предел второго интеграла равен $-K'$, так как потенциал простого слоя непрерывен на поверхности (§ 526). Следовательно, когда точка P стремится к точке M', предел $U(a,\ b,\ c)$ равен U', и формула (20) действительно дает решение *внутренней* задачи. Точно так же можно убедиться, что формула

$$U(a,\ b,\ c)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S U\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\,d\sigma \qquad (21)$$

дает решение *внешней* задачи для сферы.

Из формулы (19) можно вывести те же следствия, как из интеграла Пуассона (§ 508). Если заданная функция U положительна во всех точках поверхности сферы, то $U(a,\ b,\ c)$ также положительна для каждой внутренней точки, и так как r изменяется от $R-\rho$ до $R+\rho$, то для $U(a,\ b,\ c)$ получим верхнюю и нижнюю границы, заменяя в формуле r сначала через $R-\rho$, затем через $R+\rho$; далее, интеграл $\iint\limits_S U\,d\sigma$ на основании теоремы о среднем значении равен $4\pi R^2U_0$, где U_0 — значение U в центре сферы.

Таким образом мы имеем два неравенства:

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2} U_0 < U_P < \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2} U_0,$$

и так как значение U_0 также заключается между двумя крайними членами, то абсолютная величина $U_P - U_0$ меньше разности этих двух членов, т. е. меньше, чем

$$U_0 \frac{R(6R^2\rho + 2\rho^3)}{(R^2-\rho^2)^2}.$$

Числитель и знаменатель этой дроби являются соответственно многочленами третьей и четвертой степеней по R; следовательн , эта дробь стремится к нулю, если, оставляя ρ постоянным, мы будем безгранично увеличивать R. Отсюда заключаем, что *функция, гармоническая во всем пространстве и всюду положительная, есть постоянная величина*, и далее, что функция, гармоническая во всем пространстве, абсолютная величина которой ограничена, является постоянной величиной (§ 508). Это обобщение теоремы Лиувилля принадлежит Пикару. Теорема Гарнака, доказательство которой основывается на интеграле Пуассона, точно так же без всяких затруднений распространяется на гармонические функции трех переменных.

531. Функции Лапласа. Предположим, что сфера S имеет центр в начале O, а радиус сферы равен единице. Изменяя несколько обозначения, назовем через x, y, z прямоугольные координаты точки P внутри шара, а через ρ, θ, ψ — полярные координаты, связанные с первыми соотношениями:

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Формула (19) напишется в эквивалентной форме:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos\gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} f(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\psi', \quad (22)$$

координаты переменной точки M сферы суть $(1, \theta', \psi')$, а $f(\theta', \psi')$ представляет заданную функцию U на поверхности сферы, выраженную через переменные θ', ψ'; γ — угол между радиусом OM и направлением OP, а $\cos\gamma$ согласно основному соотношению сферической тригонометрии имеет выражение:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi) \quad (23)$$

На основании уже доказанной формулы (I, § 183) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\gamma+\rho^2}} = P_0 + P_1(\cos\gamma)\rho + \ldots P_n(\cos\gamma)\rho^n + \ldots, \quad (24)$$

где P_n есть n-й полином Лежандра. Складывая эту формулу с формулой, получающейся при диференцировании по ρ, и умножая обе части на 2ρ, будем иметь:

$$\frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos\gamma+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=P_0+3P_1(\cos\gamma)\rho+\ldots+(2n+1)P_n(\cos\gamma)\rho^n+\ldots \quad (24')$$

Этот ряд *сходится равномерно*, когда точка M описывает сферу S. Действительно, согласно только что упомянутой формуле $P_n(\cos\gamma)$ равно коэфициенту при ρ^n в разложении в ряд произведения $(1-\rho e^{\gamma i})^{-\frac{1}{2}}(1-\rho e^{-\gamma i})^{-\frac{1}{2}}$. Если разлагать в ряд каждый множитель в отдельности, то коэфициенты при $\rho^p e^{p\gamma i}$ и при $\rho^p e^{-p\gamma i}$ будут *положительными* числами, а потому заменяя $e^{\gamma i}$ и $e^{-\gamma i}$ единицей, мы можем только увеличить модуль коэфициента при какой-нибудь степени ρ. Таким образом абсолютная величина коэфициента при ρ^n в произведении меньше, чем значение коэфициента при ρ^n в разложении в ряд $(1-\rho)^{-1}$, т. е. меньше единицы. Отсюда следует, что члены ряда (24′) по абсолютной величине меньше членов ряда $\Sigma\,(2n+1)\,\rho^n$, который сходится, так как мы предполагаем $\rho<1$. Умножая обе части формулы (24′) на $f(\theta'\,\psi')\sin\theta'$ и интегрируя почленно, получим:

$$U(x,\,y,\,z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\,\rho^n\int_0^{\pi}d\theta'\int_0^{2\pi}P_n(\cos\gamma)f(\theta\psi',\,\Psi')\sin\theta' d\psi'. \quad (25)$$

Многочлен $P_n\cos\gamma$ содержит только те члены с $\cos\gamma$, показатели которых имеют ту же четность, что n; следовательно, можно преобразовать его в однородный многочлен относительно $\sin\gamma\cos\gamma$, содержащий только четные степени $\sin\gamma$. Заменяя $\sin^2\gamma$ через

$$\sin^2\theta\,(\cos^2\psi+\sin^2\psi)+\cos^2\theta-\cos^2\gamma,$$

а $\cos\gamma$ его выражением (23), окончательно убеждаемся, что $P_n(\cos\gamma)$ есть целая однородная функция n-й степени от $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, коэфициенты которой суть функции от θ' и ψ'. Коэфициент при ρ^n в ряде (25) представляет выражение такого же рода, и таким образом мы получаем разложение искомой функции $U(x,\,y,\,z)$ в ряд, каждый член которого есть однородный многочлен от $(x,\,y,\,z)$ степени, равной его индексу. Так как функция $U(x,\,y,\,z)$ является гармонической, то ясно, что все эти многочлены также представляют гармонические функции. Мы напишем это разложение в ряд в виде:

$$U(x,\,y,\,z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,Y_n\,\rho^n, \quad (26)$$

где Y_n — однородный многочлен n-й степени от $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, получающийся из однородного гармонического многочлена n-й степени V_n путем замены x, y, z соответственно через $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\,\sin\psi$, $\cos\theta$. Эти многочлены Y_n суть функции Лапласа; согласно самому их определению имеется $2n+1$ линейно независимых функций Y_n порядка n.

Формула (26) была доказана только для внутренних точек шара. Если ряд, стоящий в правой части, сходится в некоторой точке M

поверхности с координатами $(1, \theta, \psi)$, то функция $U(x, y, z)$ имеет пределом $f(\theta, \psi)$, когда точка P стремится к точке M; предполагая, что точка P остается на радиусе OM, имеем, таким образом, на основании теоремы Абеля (I, § 182)

$$f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{-\infty} (2n+1) Y_n(\theta, \psi), \tag{27}$$

где $Y_n(\theta, \psi)$ равно двойному интегралу

$$Y_n(\theta, \psi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) f(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta'. \tag{28}$$

Эта формула дает разложение в ряд непрерывной функции на поверхности сферы, совершенно аналогичное ряду Фурье для функции одного переменного. Оставляя пока открытым вопрос о сходимости, заметим только, что согласно предшествующему, какова бы ни была заданная непрерывная функция на поверхности сферы, будем иметь:

$$f(\theta, \psi = \lim_{\rho=1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) Y_n(\theta, \psi) \rho^n\right]. \tag{29}$$

Приложение. Пикар вывел из формулы (29) изящное обобщение теоремы Вейерштрасса (I, § 206) на непрерывные функции двух переменных. Пусть U — произвольная непрерывная функция на поверхности сферы S, а $f(\theta, \psi)$ — функция, представляющая ее выражение через переменные θ и ψ. Функция, представленная рядом (26) внутри шара и равная $f(\theta, \psi)$ на поверхности, непрерывна во всей этой замкнутой области и, следовательно, равномерно непрерывна. Если дано некоторое положительное число ε, то можно найти такое число $\rho_1 < 1$, что разность

$$f(\theta, \psi) - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) Y_n(\theta, \psi) \rho_1^n$$

по абсолютной величине будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ для всех точек сферы. Далее, ряд, общий член которого есть $(2n+1) Y_n \rho_1^n$, сам равномерно сходится, ибо на основании выражения (28) для Y_n имеем:

$$|Y_n| < H,$$

где H — максимум функции $|f(\theta, \psi)|$. Следовательно, каковы бы ни были θ и ψ, можно взять сумму конечного числа членов этого ряда

$$\Phi = Y_0 + 3Y_1 + \ldots + (2n+1) Y_n,$$

отличающуюся от суммы ряда менее, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$.

Наконец, эта сумма Φ сама может быть разложена в целый ряд по θ и ψ, и можно взять конечное число членов этого ряда, т. е. многочлен $Q(\theta, \psi)$ по θ и ψ так, что будет

$$\Phi - Q(\theta, \psi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех систем значений θ и ψ, взятых между 0 и 2π. Ясно, что разность $f(\theta, \psi) - Q(\theta, \psi)$ будет по абсолютной величине меньше ε для всех систем этих значений.

Если функция $f(\theta, \psi)$ определена не на всей сфере, а только на некоторой части ее, то всегда можно дополнить это определение для остальной части сферы, сохраняя непрерывность, и притом бесконечным множеством способов. Предыдущее заключение сохраняет силу, и можно отсюда вывести, как в § 106 (т. I), *что всякая функция двух переменных, непрерывная в некоторой области A, может быть представлена в этой области равномерно сходящимся рядом многочленов.*

532. Свойства функций Y_n. Многочлены $V_m(x, y, z)$ суть единственные однородные функции, являющиеся гармоническими внутри сферы, имеющей начало в центре. В самом деле, всякая гармоническая функция внутри этой сферы разложима в ряд многочленов V_m, и ясно, что сумма этого ряда может быть однородной только в случае, когда ряд состоит из единственного члена. На сфере радиуса R с центром в O производная $\frac{dV_m}{dn}$, взятая по внутренней нормали, вследствие однородности равна $-\frac{m}{R}V_m$. Если применить формулу (11) к двум многочленам V_p, $V_q (p \gtrless q)$ внутри сферы с центром в O, то легко убедиться, что двойной интеграл $\iint V_p V_q d\sigma$, распространенный на поверхность сферы равен нулю; это можно также записать в виде:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_p(\theta, \psi)\, Y_q(\theta, \psi) \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 0 \qquad (p \neq q). \tag{30}$$

Гармоническая функция

$$V_m(x, y, z) = \rho^m Y_m(\theta, \psi)$$

на сфере S радиуса единица обращается в $Y_m(\theta, \psi)$, а потому на основании общей формулы (25), если ρ меньше единицы, будем иметь:

$$\rho^m Y_m(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \rho^n \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi';$$

отсюда следует:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi' = 0, \quad \text{если } m \neq n,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_m(\cos\gamma)\, Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi' = \frac{4\pi}{2m+1} Y_m(\theta, \psi).$$

Сравнивая эти формулы с формулой (24), дающей разложение $\frac{1}{r}$ в ряд, заключаем, что, в предположении $\rho < 1$, имеем:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi' = \frac{4\pi\rho^m}{2m+1} Y_m(\theta, \psi); \tag{31}$$

это равенство сохраняется и для $\rho=1$, ибо левая часть, представляющая потенциал простого слоя, является непрерывной функцией на самой сфере.

Таким образом имеем также:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_m(\theta', \varphi') \frac{\sin\theta'}{\sqrt{2-2\cos\gamma}}\, d\theta' d\psi' = \frac{4\pi}{2m+1} Y_m(\theta, \psi), \tag{32}$$

причем $\cos\gamma$ дается формулой (23). Следовательно, потенциал простого слоя, порождаемый слоем плотности $V_m(\theta', \psi')$, распространенным по сфере, равен $\frac{4\pi\rho^m}{2m+1} Y_m(\theta, \psi)$ внутри шара и на его поверхности (см. упражнение 7, стр. 200).

Обратно, всякая функция $f(\theta, \psi)$, удовлетворяющая соотношению вида:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\theta', \psi') \frac{\sin\theta'}{\sqrt{2-2\cos\gamma}}\, d\theta' d\psi' = 4\pi K f(\theta, \psi), \tag{33}$$

где K — постоянный множитель, есть одна из функций $Y_m(\theta, \psi)$.

Действительно, рассмотрим потенциал простого слоя:

$$V(\rho, \theta, \psi) = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \psi')\sin\theta'}{r}\, d\theta' d\psi',$$

где r обозначает расстояние от точки с полярными координатами (ρ, θ, ψ) до точки $(1, \theta', \psi')$ сферы. Это — функция гармоническая внутри сферы, и она обращается в $4\pi K f(\theta, \psi)$ при $\rho=1$ вследствие соотношения (33) Вычисляя производную $\frac{\partial V}{\partial\rho}$ по обычным правилам диференцирования, после некоторых простых преобразований находим:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} \int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\theta', \psi')\left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta' d\theta' d\psi';$$

правая часть равенства является гармонической функцией, так как она есть разность двух потенциалов. На основании свойств потенциалов и соотношения (33) эта функция на сфере равна $2\pi(1-K)f(\theta, \psi)$. Отсюда следует, что разность $\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} - \frac{1-K}{2K}V$ есть гармоническая функция, обращающаяся в нуль на поверхности сферы. Следовательно, она равна нулю в каждой внутренней точке; значит, функция V представляет однородную функцию степени $\frac{1-K}{2K}$, откуда следует, что $\frac{1-K}{2K}$ должно быть целым числом m, функция V — функцией вида $C\rho^m Y_m(\theta, \psi)$.

Функция $f(\theta, \psi)$ сама равна $Y_m(\theta, \psi)$ с точностью до постоянного множителя.

Примечание 1. Когда ρ больше единицы, правая часть формулы (31) должна быть заменена через $\frac{4\pi}{(2m+1)\rho^{m+1}} Y_m(\theta, \psi)$, ибо это есть функция гармоническая вне сферы, согласно теореме Кельвина, равная нулю в бесконечности и принимающая при $\rho = 1$ те же значения, что и левая часть. Следовательно, она тождественна вне сферы с потенциалом простого слоя, представленным левой частью.

Примечание 2. Из предшествующих формул можно также вывести значение потенциала двойного слоя:

$$W = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^2} Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi'$$

для точки внутри или вне сферы. Внутри сферы W представляет гармоническую функцию, которая согласно соотношениям (31) и (7) обращается на самой сфере в

$$2\pi Y_m(\theta, \psi) + \frac{2\pi}{2m+1} Y_m(\theta, \psi),$$

следовательно, она равна

$$2\pi \frac{2m+2}{2m+1} \rho^m Y_m(\theta, \psi).$$

Точно так же можно убедиться, что этот потенциал вне сферы равен $-\frac{4\pi m}{2m+1} \cdot \frac{Y_m(\theta, \psi)}{\rho^{m+1}}$. Полагая $m = 0$, мы снова находим свойства интеграла Гаусса (§ 527).

533. Метод Неймана. Метод Неймана, подробно рассмотренный для случая выпуклых контуров (§ 513), распространяется без существенных изменений и на выпуклые поверхности.

Если дана замкнутая поверхность S, то принцип Неймана решения внутренней задачи заключается в том, чтобы выразить искомую гармоническую функцию через потенциал двойного слоя

$$\iint_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma.$$

Свойства этого потенциала дают для определения неизвестной функции μ следующее функциональное уравнение (где надо положить $\lambda = 1$):

$$\mu(M) = \frac{\lambda}{4\pi} \iint_S [\mu(M) - \mu(P)] \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} U(M); \qquad (34)$$

$F(M)$ обозначает вообще значение функции F в точке M поверхности, U есть заданная непрерывная функция на поверхности S, r — расстояние между двумя точками M и P этой поверхности, φ — угол внутренней нормали в точке P с направлением PM, а двойной интеграл взят в предположении, что точка P является переменной, а точка M — постоянной.

Этому уравнению можно *формально* удовлетворить, положив:

$$\mu(M)=\frac{1}{4\pi}[U_0(M)+\lambda U_1(M)+\ldots+\lambda^n U_n(M)+\ldots], \tag{35}$$

где $U_0(M)$ равно заданной функции $U(M)$, а последующие члены получаются из первого по рекуррентной формуле:

$$U_n(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S [U_{n-1}(M)-U_{n-1}(P)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma, \tag{36}$$

причем двойной интеграл всегда берется в предположении, что точка P описывает поверхность S. Можно указать совершенно так же, как в § 513, что все функции U_n непрерывны на поверхности S. Для того чтобы доказать сходимость ряда (35), когда поверхность *выпукла*, необходимо обратиться к двум леммам, аналогичным тем, которые были выведены для выпуклого контура.

Лемма 1. Если на выпуклой поверхности S даны две какие-нибудь точки M_1 и M_2 и часть S' этой поверхности, которая может состоять из нескольких различных кусков, то разность между телесными углами, под которыми видны различные части S' из точек M_1 и M_2, меньше $2\pi h$, где h положительное число, меньшее единицы, зависящее только от выпуклой поверхности *. Действительно, для того чтобы эта разность была равна 2π, необходимо, чтобы S' была видна из точки M_1 под телесным углом, равным 2π, т. е. чтобы S' заключала поверхность S целиком или была образована поверхностью, имеющей плоскую грань,

* Доказательство самого Неймана основано на несколько отличной лемме. Пусть поверхность S разбита на две части S', S'', α и β — две какие-нибудь точки поверхности S; если обозначить через I_Σ^γ телесный угол, под которым видна поверхность Σ из точки γ, то для выпуклой поверхности, *если она не является „дважды звездообразной“* (т. е. такой, что существуют две точки α и β и две соответствующие им составляющие части поверхности S' и S'', так что $I_{S'}^\alpha+I_{S''}^\beta=0$; к этому типу принадлежат, например, поверхность куба, α и β две его противоположных вершины; поверхность, составленная из двух конусов, α вершина одного, S' его боковая поверхность, β вершина второго, S'' — его боковая поверхность; пирамида), имеем основное неравенство:

$$I_{S'}^\alpha+I_{S''}^\beta>4\lambda\pi,$$

где λ *положительное* число, меньшее единицы, зависящее только от S.

Отсюда легко вывести лемму, приводимую в тексте. Положим $I_{S''}^\alpha\geqslant I_{S''}^\beta$; так как сумма $I_{S'}^\alpha+I_{S''}^\alpha$ не больше 2π, то неравенство Неймана дает и подавно

$$2\pi-I_{S'}^\alpha+I_{S''}^\beta>4\lambda\pi$$

или

$$I_{S'}^\alpha-I_{S''}^\beta<2\pi(1-2\lambda).$$

Множитель $1-2\lambda$ заведомо меньше единицы, и отсюда также можно заключить, что множитель Неймана λ меньше $\frac{1}{2}$. Но второе неравенство применимо также к выпуклым поверхностям, дважды звездообразным.

на которой была бы расположена точка M_1. В обоих случаях телесный угол, под которым видна часть S' из точки M_2, не мог бы равняться нулю, по крайней мере, если поверхность S не является пирамидой.

Лемма 2. Пусть $F(M)$ есть функция, положительная или равная нулю на поверхности S, и J — двойной интеграл:

$$J = \iint_S F(P)\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 - \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2\right] d\sigma,$$

где $\left(\frac{\cos\varphi}{r_2}\right)_1$ обозначает косинус угла, образуемого внутренней нормалью в точке P с направлением PM_1, деленный на квадрат PM_1, а $\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2$ имеет аналогичный смысл.

Разобьем S на две части S_1 и S_2 так, чтобы было

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 \geqslant \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2$$

на части S_1 и

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 < \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2$$

на S_2, и пусть J_1 и J_2 — двойные интегралы, распространенные соответственно на S_1 и S_2. Имеем $J = J_1 + J_2$ и, следовательно, $|J|$ меньше, чем большее из двух чисел $|J_1|$ и $|J_2|$. Пусть L есть верхний предел $F(M)$; согласно предыдущей лемме каждое из этих чисел меньше, чем $2h\pi L$. Таким образом имеем также $|J| < 2h\pi L$, каковы бы ни были точки M_1 и M_2.

Принимая это во внимание, положим, что L и l максимум и минимум функции U на поверхности S; если M_1 и M_2 — две какие-нибудь точки поверхности S, то можно написать:

$$U_1(M_1) - U_1(M_2) = \frac{1}{4\pi}\left[U(M_1)\iint_S \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 d\sigma - U(M_2)\iint_S \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2 d\sigma\right] +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[U(P) - l\right]\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2 - \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1\right] d\sigma +$$
$$+ \frac{l}{4\pi}\iint_S \left[\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2 - \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1\right] d\sigma.$$

Если точки M_1 и M_2 — обыкновенные точки поверхности S, то последний интеграл равен нулю, а абсолютная величина первого члена,

$$\frac{1}{2}\left[U(M_1) - U(M_2)\right]$$

меньше, чем $\frac{L-l}{2}$. С другой стороны, $U(P) - l$ остается заключенным между 0 и $L - l$, и следовательно, на основании второй леммы абсолютная величина членов второй строки меньше, чем

$$\frac{L-l}{4\pi}2\pi h=\frac{L-l}{2}h.$$

Итак, абсолютное значение $U_1(M_1)-U_1(M_2)$ само меньше, чем

$$(L-l)\left(\frac{1+h}{2}\right)=(L-l)\rho,$$

где ρ *положительное число, меньшее единицы.* Так как функция $U_1(M)$ непрерывна, то это неравенство справедливо для всякого расположения точек M_1 и M_2; отсюда, обозначая через L_1 и l_1 максимум и минимум функции U_1, имеем также $L_1-l_1<(L-l)\rho$, и далее, шаг за шагом выводим отсюда, что

$$L_i-l_i<(L-l)\rho^i,$$

где L_i и l_i — максимум и минимум функции U_i. Доказательство получается таким же путем, как в § 513.

Примечание. Метод Неймана, приложенный к сфере, как будто не приводит непосредственно к формуле (19), как это имеет место в случае круга (§ 513). Тем не менее, можно связать с этим методом решение, полученное непосредственно В самом деле, интегральное уравнение, которое необходимо решить, можем написать в виде:

$$\mu(M)+\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S\frac{\mu(P)}{r}\,d\sigma=\frac{U(M)}{2\pi}, \tag{E}$$

замечая, что $2R\cos\varphi=r$, где r есть расстояние между двумя точками M и P поверхности S. Если положить

$$\mu(M)=\frac{U(M)}{2\pi}-V(M),$$

то это уравнение примет вид:

$$2\pi V(M)+\iint\limits_S V(P)\frac{d\sigma}{2Rr}=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S U(P)\frac{d\sigma}{r}; \tag{E'}$$

это уравнение такого же типа, как первое, в нем неизвестной функцией является $V(M)$. Но для того чтобы получить решение задачи Дирихле, нет необходимости знать $V(M)$, нужно только знать потенциал двойного слоя

$$\iint\limits_S V(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma$$

для любой точки внутри сферы. Соотношение (E') как раз выражает, что значение, к которому стремится этот потенциал, когда эта внутренняя точка приближается к точке M сферы, равно значению потенциала простого слоя

$$\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S U(P)\frac{d\sigma}{r}$$

в этой же точке. Так как эти две гармонические функции принимают одинаковые значения во всех точках сферы, то они равны и внутри сферы, и решение задачи Дирихле выражается разностью между потенциалом двойного слоя и патенциалом простого слоя. Мы снова получаем формулу (20),

534. Функция Грина. Если дана замкнутая область D, ограниченная поверхностью Σ, состоящей из одной или нескольких различных замкнутых поверхностей, то соответствующая функция Грина есть функция $G(x, y, z; a, b, c)$, равная нулю на поверхности Σ и гармоническая вблизи любой точки области D, за исключением окрестности внутренней точки $P(a, b, c)$, где она имеет вид $\frac{1}{r}+g(x, y, z; a, b, c)$, причем g — гармоническая функция. Знание этой функции Грина позволяет решить внутреннюю задачу Дирихле; для этого достаточно сопоставить две формулы:

$$U(a, b, c)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[U\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}-\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right]d\sigma,$$

$$0=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[U\frac{d\left(G-\frac{1}{r}\right)}{dn}-\left(G-\frac{1}{r}\right)\frac{dU}{dn}\right]d\sigma,$$

откуда, складывая эти формулы и замечая, что функция G равна нулю на поверхности Σ, получаем:

$$U(a, b, c)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}U\frac{dG}{dn}d\sigma. \tag{37}$$

Это доказательство предполагает, что искомая гармоническая функция $U(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные на поверхности Σ.

Точно так же функцией Грина для внешней задачи называется функция, гармоническая в окрестности любой точки, внешней по отношению к Σ, за исключением окрестности одной точки (a, b, c), где она бесконечна, как $\frac{1}{r}$, правильная и равная нулю в бесконечности и обращающаяся в нуль на поверхности Σ. Так как формулы (11) и (14) распространяются на функции, гармонические вне Σ и равные нулю в бесконечности, то в предыдущих выкладках ничего не приходится изменять, и формула (37) дает также решение внешней задачи, причем производная $\frac{dG}{dn}$ берется по *внешней* нормали.

Возьмем случай сферы радиуса R, и пусть P — точка, находящаяся на расстоянии d от центра, P_1 — точка, гармонически сопряженная с точкой P по отношению к концам диаметра, проходящего через P, r и r_1 — расстояния от некоторой точки M до точек P и P_1 соответственно. Функция Грина для внутренней задачи есть $\frac{1}{r}-\frac{R}{d}\frac{1}{r_1}$ и для внешней $\frac{1}{r}-\frac{R}{d}\frac{1}{r_1}$. В первом случае имеем $d<R$, а во втором $d>R$.

Применяя общую формулу (37) к этому частному случаю, вновь находим результаты, полученные непосредственно в § 530.

Можно также распространить определение функции Грина на линейные уравнения с тремя переменными, более общего типа, чем уравнение Лапласа, как это было сделано для случая двух переменных (§ 523). Два уравнения *

$$\mathfrak{F}(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + gu = 0, \tag{38}$$

$$\mathfrak{G}(v) = \Delta v - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} - \frac{\partial (cv)}{\partial z} + gv = 0 \tag{39}$$

сопряжены друг с другом и дают тождество:

$$\begin{gathered} v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + auv\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + buv\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z} + cuv\right) \end{gathered} \tag{40}$$

Положим, что обе функции u и v правильны в замкнутой области D и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности Σ, ограничивающей эту область. Из тождества (40) получаем новое соотношение:

$$\iiint\limits_D [v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v)]\,dx\,dy\,dz + \iint\limits_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + auv\right) dy\,dz + \ldots = 0,$$

где двойной интеграл взят по *внутренней* стороне поверхности Σ. Пусть α, β, γ — углы внутренней нормали с осями; предыдущая формула принимает более простой вид:

$$\begin{gathered} \iiint\limits_D [v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v)]\,dx\,dy\,dz + \iint\limits_\Sigma \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right) d\sigma + \\ + \iint\limits_\Sigma (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\,uv\,d\sigma = 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Положим теперь, что $u(x, y)$ есть интеграл уравнения

$$\mathfrak{F}(u) = f(x, y, z),$$

правильный в области D, а v — интеграл сопряженного уравнения

$$\mathfrak{G}(v) = 0,$$

правильный в области D, за исключением окрестности одной точки (a, b, c) этой области, где он имеет вид:

$$U\frac{1}{r} + V,$$

причем U и V правильные функции, и $U(a, b, c)$ равно единице **; r обозначает всюду расстояние от некоторой точки (x, y, z) до точки (a, b, c). Мы можем применить общую формулу (41) к области D', ограниченной поверхностью Σ и сферой S весьма малого радиуса ρ с центром (a, b, c). Заставляя радиус ρ стремиться к нулю, будем иметь для поверхностного интеграла, распространенного на S, предел

$$4\pi u(a, b, c)$$

---

* Уравнение $\mathfrak{F}(u) = 0$ не представляет общего вида линейного уравнения эллиптического типа с тремя переменными. Если дано уравнение общего типа, то не существует вообще никаких новых независимых переменных, позволяющих привести это уравнение к виду (38). Условие возможности такого приведения вытекает из исследований Коттона (Cotton, Thèse, n° 15—17).

** Решения в этом виде были получены Хольмгреном (Holmgren, *Arkiv for Matematik*, I, 1903); см. также выше цитированный мемуар Адамара.

(§ 528) и, переходя к пределу, получим из формулы (41):

$$u(a\ b,\ c) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn} + (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\right]uv\,d\sigma -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D} vf(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (42)$$

Эта формула позволяет решить задачу Дирихле, если интеграл $v(x, y, z; a, b, c)$ равен нулю на поверхности Σ. Можно также распространить на смешанные задачи, относящиеся к этому уравнению, общие соображения, которые были высказаны выше для уравнения с двумя переменными (§ 524).

II. НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ.

Мы уже несколько раз пользовались потенциалами простого и двойного слоя. Сейчас мы вкратце резюмируем основные свойства ньютонова потенциала, которые будут использованы ниже; распространение этих свойств на логарифмический потенциал не представляет затруднений.

535. Потенциал объема. Пусть D есть область, лежащая в конечной части пространства трех измерений, ограниченная одной или несколькими замкнутыми поверхностями S, $\mu(x, y, z)$ — функция, непрерывная в этой области, и r — расстояние переменной точки $M(x, y, z)$ до определенной точки $P(a, b, c)$. Функция, представленная тройным интегралом

$$V(a,\ b,\ c) = \iiint\limits_{D}\frac{\mu(x,\ y,\ z)}{r}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D}\frac{\mu}{r}\,dv, \qquad (43)$$

есть функция координат (a, b, c) точки P, непрерывная вместе с своими частными производными любого порядка во всякой области пространства, не имеющей общих точек с областью D; далее, эта функция является гармонической, как и сама функция $\frac{1}{r}$ (§ 483). Частные производные этой функции:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial a} &= \iiint\limits_{D}\mu\,\frac{x-a}{r^3}\,dv,\\
\frac{\partial V}{\partial b} &= \iiint\limits_{D}\mu\,\frac{y-b}{r^3}\,dv,\\
\frac{\partial V}{\partial c} &= \iiint\limits_{D}\mu\,\frac{z-c}{r^3}\,dv
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

равны с точностью до постоянного множителя слагающим притяжения, которое производила бы на материальную точку массы, равной единице, помещенную в P, масса переменной плотности $\mu(x, y, z)$, занимающая область D, в предположении, что притяжение происходит по закону Ньютона: этим и объясняется название ньютонова потенциала, данное функции $V(a, b, c)$ *.

Интегралы (43) и (44) сохраняют смысл, когда точка P расположена внутри области D; достаточно убедиться, что эти интегралы, распространенные на обьем шара с центром в P, имеют конечное значение.

Действительно, если заменить прямоугольные координаты полярными r, θ, ψ, поместив начало в точке P, то интеграл (43), распространенный на шар, примет вид:

$$\int_0^\rho dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \mu(a + r\sin\theta\cos\psi \dots) r\sin\theta \, d\psi, \tag{43'}$$

где ρ есть радиус шара; первый из интегралов (44) точно так же может быть написан в виде:

$$\int_0^\rho dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \mu(a + r\sin\theta \cos\psi \dots) \cos\psi \sin^2\theta \, d\psi. \tag{44'}$$

Очевидно, что эти интегралы не имеют бесконечных элементов. Если H есть верхняя граница $|\mu|$ в области D, то абсолютная величина интеграла (43′), очевидно, меньше, чем $2\pi H\rho^2$. Вообще, тройной интеграл $\iiint \frac{\mu}{r} dv$, распространенный на область D', заключающую точку P, наибольшая хорда которой меньше l, по абсолютной величине сам меньше $2\pi H l^2$, так как эта область D' расположена внутри шара радиуса l, с центром в точке P. Отсюда следует, что тройной интеграл (43) сходится равномерно в окрестности всякой точки P_0 внутри области D или на границе. Действительно, если из точки P_0, как центра, опишем сферу Σ радиуса ρ, то тройной интеграл $\iiint \frac{\mu}{r} dv$, распространенный на объем, ограниченный этой сферой, по абсолютной величине меньше $8\pi H\rho^2$ для любой точки P внутри Σ. Отсюда заключаем, что потенциал $V(a, b, c)$ есть непрерывная функция во всем пространстве (§ 504). Точно так же мы видим, что интеграл (44′) по абсолютной величине меньше $4\pi H\rho$, и следовательно, интеграл $\iiint \mu \frac{x-a}{r^3} dv$, распространенный на за-

* Для притяжения в собственном смысле μ существенно положительна; если речь идет об электрическом действии, μ может быть и положительной и отрицательной.

Рассмотрим однородную бесконечную прямую, и пусть μ есть масса единицы длины. Часть AB этой прямой действует на точку P вне прямой с силой притяжения, которая расположена в плоскости PAB и составляющие которой легко определить. Когда обе точки A и B бесконечно удаляются в противоположных направлениях, составляющая, параллельная прямой, делается равной нулю, тогда как нормальная составляющая стремится к некоторому пределу, независимому от закона, по которому бесконечно удаляются точки A и B, и этот предел обратно пропорционален расстоянию от точки P до прямой. Вообще можно сказать, что составляющие притяжения, оказываемого бесконечной однородной прямой на точку P с координатами (a, b, c), равны, с точностью до постоянного множителя, частным производным по a, b, c от функции $\mu \log\left(\frac{1}{r}\right)$, где r — расстояние от точключающую точку P область D', наибольшая хорда которой меньше l, по абсолютной величине меньше $4\pi Hl$. Отсюда также следует, что интегралы (44) равномерно сходятся в окрестности любой точки P_0 внутри D или на границе D, и следовательно, эти интегралы суть непрерывные функции координат (a, b, c) во всем пространстве.

Формулы (44) сохраняют силу и в области D. Мы это докажем для первой из формул, воспроизведя еще раз классическое рассуждение. Пусть дана точка P области D с координатами (a, b, c); опишем из этой точки, как центра, сферу Σ радиуса ρ, разбивающую D на две области D_1, D_2, внутреннюю и внешнюю к сфере. Пусть P_1 — точка с координатами $(a+\Delta a, b, c)$, взятая внутри D_1; обозначая через r_1 расстояние от точки P_1 до переменной точки M, можем написать:

$$\frac{V(a+\Delta a, b, c)-V(a, b, c)}{\Delta a}-\iiint\limits_D \mu\frac{x-a}{r^3}\,dv=$$

$$=\frac{\Delta V_1}{\Delta a}-\iiint\limits_{D_1}\mu\frac{x-a}{r^3}\,dv+\left[\frac{\Delta V_2}{\Delta a}-\iiint\limits_{D_2}\mu\frac{x-a}{r^3}\,dv\right], \qquad (45)$$

где V_1 и V_2 обозначают потенциалы, относящиеся соответственно к областям D_1 и D_2. Напишем $\frac{\Delta V_1}{\Delta a}$ в развернутом виде:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta a}=\frac{1}{\Delta a}\iiint\limits_{D_1}\mu(x, y, z)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)dv=\frac{1}{\Delta a}\iiint\limits_{D_1}\mu(x, y, z)\frac{r-r_1}{rr_1}\,dv.$$

Замечая, что

$$|r-r_1|\leqslant|\Delta a|,\ \frac{1}{rr_1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}\right),$$

мы видим, что абсолютная величина $\frac{\Delta V_1}{\Delta a}$ меньше, чем

$$\delta=\frac{H}{2}\iiint\limits_{D_1}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)dv.$$

ки P до прямой. Точно так же притяжение точки объемом бесконечного цилиндра имеет определенную величину, если считать плотность μ постоянной вдоль прямых, параллельных образующим. Возьмем ось Oz параллельной образующим, а за плоскость xy примем перпендикулярную к Oz плоскость, проходящую через притягиваемую точку. Сечение цилиндра плоскостью xy представляет замкнутую кривую C, ограничивающую некоторую область D. Разбивая эту область на элементы поверхности и самый цилиндр на бесконечно малые цилиндры, имеющие основаниями эти элементы поверхности, убеждаемся, что составляющие притяжения, испытываемого точкой P с координатами (a, b), равны с точностью до множителя частным производным по a, b от двойного интеграла $\iint\limits_D \mu\log\frac{1}{r}\,dx\,dy$. Это логарифмический потенциал поверхности, который таким образом оказывается связанным с ньютоновым потенциалом объема. Логарифмические потенциалы простого и двойного слоя аналогичным образом могут быть связаны с такими же ньютоновскими потенциалами

Но, введя полярные координаты, легко убедиться, что интеграл $\iiint \frac{dv}{r^2}$, распространенный на область, расположенную целиком внутри сферы радиуса l, с центром в точке P, по абсолютной величине меньше $4\pi l$. Число δ поэтому меньше, чем $\frac{H}{2}(4\pi\rho + 8\pi\rho) = 6\pi H\rho$. Таким образом сумма двух первых членов правой части формулы (45) по абсолютной величине меньше $4\pi H\rho + 6\pi H\rho = 10\pi H\rho$. Установив это, выберем сначала число ρ так, чтобы $10\pi H\rho$ было меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольное положительное число. Тогда интеграл V_2 представляет в области D_1 непрерывную функцию координат точки P, производная которой равна:

$$\iiint\limits_{D_2} \mu \frac{x-a}{r^3}\, dv.$$

Итак, последний член правой части формулы (45) стремится к нулю вместе с Δa и, проводя обычные рассуждения, заключаем отсюда, что и левая часть имеет пределом нуль. Таким образом формулы (44), дающие *первые производные* потенциала, применимы во всем пространстве.

536. Формула Пуассона. Диференцируя снова формулы (44), придем к тройным интегралам, не имеющим смысла, когда точка P находится в области D. Чтобы доказать существование вторых производных, прежде всего преобразуем посредством формулы Грина интегралы, представляющие первые производные. Пусть P_0 (a_0, b_0, c_0) *внутренняя* точка области D, Σ сфера радиуса ρ с центром в точке P_0, столь малая, что она целиком помещается внутри области D; обозначим опять через D_1 и D_2 две части D, разделенные поверхностью Σ, через V_1 и V_2 соответствующие потенциалы. Потенциал $V_2(a, b, c)$ есть гармоническая функция внутри Σ. Что касается потенциала $V_1(a, b, c)$, то, как мы только что видели, он имеет в этой области непрерывные производные первого порядка. Замечая, что

$$\mu \frac{x-a}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{1}{r},$$

можем написать, например, выражение для $\frac{\partial V_1}{\partial a}$, применяя первую формулу Грина для тройных интегралов (I, § 144):

$$\frac{\partial V_1}{\partial a} = \iiint\limits_{D_1} \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial v}{r} - \iint\limits_{\Sigma} \frac{\mu}{r}\, dy\, dz,$$

где двойной интеграл взят по внешней стороне поверхности Σ. Тройной интеграл правой части представляет потенциал и, следовательно, допускает непрерывные производные первого порядка во всем пространстве. То же самое имеет место для функции, представленной поверхностным интегралом, когда точка (a, b, c) находится внутри Σ. Таким образом потенциал $V(a, b, c)$ допускает непрерывные производные второго порядка во всей области D, исключая границу, так как P_0 — произвольная внутренняя точка области D. Вычислим ΔV для точки P_0; в этой точке $\Delta V_2 = 0$ и, следовательно, $\Delta V = \Delta V_1$. Обычные формулы диференцирования дают.

$$(\Delta V_1)_0 = \iiint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{x-a_0}{r_0^3} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{y-b_0}{r_0^3} + \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{z-c_0}{r_0^3}\right) dv -$$
$$- \iint\limits_{\Sigma} \mu \left(\frac{x-a_0}{r_0^3}\,dy\,dz + \frac{y-b_0}{r_0^3}\,dz\,dx + \frac{z-c_0}{r_0^3}\,dx\,dy\right),$$

где r_0 есть расстояние от точки P_0 до переменной точки M. Левая часть не зависит от радиуса ρ; остается найти предел правой части, когда ρ стремится к нулю Но если обозначить через K верхнюю границу абсолютных величин частных производных от μ, то абсолютная величина тройного интеграла, на основании предыдущего примечания, будет меньше $12K\pi\rho$ и, следовательно, стремится к нулю вместе с ρ. Что касается поверхностного интеграла, то на поверхности Σ имеем $r_0 = \rho$, и

$$\frac{x-a_0}{\rho}, \quad \frac{y-b_0}{\rho}, \quad \frac{z-c_0}{\rho}$$

представляют в точности направляющие косинусы внешней нормали. Этот интеграл обращается в

$$-\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\Sigma} \mu(x, y, z)\,d\sigma = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(a_0 + \rho\sin\theta\cos\psi \ldots)\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

и, очевидно, имеет пределом

$$-\mu(a_0, b_0, c_0)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

или $-4\pi\mu_0$. Итак, для всякой точки (a, b, c) *внутри области* D имеем следующее соотношение между вторыми производными потенциала:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = -4\pi\mu(a, b, c); \tag{46}$$

это — *формула Пуассона*, которая, если угодно, содержит формулу Лапласа как частный случай. Действительно, достаточно взять $\mu(a, b, c) = 0$ во внешней точке, чтобы снова получить соотношение $\Delta V = 0$, которое применимо ко всем точкам вне области D. Из сравнения этих двух формул вытекает, что вторые производные, или, по меньшей мере, некоторые из них, должны претерпевать разрыв при переходе через граничную поверхность S области D. Важно также заметить, что предыдущее доказательство предполагает, что плотность $\mu(x, y, z)$ допускает непрерывные или по меньшей мере ограниченные и интегрируемые производные *.

* Формула Пуассона была распространена различными математиками на более общие случаи. См., например, два мемуара Петрини (Petrini, *Acta mathematica*, XXXI, 1908, p. 127, *Journal de Liouville*. VI série, t. V, p. 117, 1909).

Все предшествующие свойства распространяются без труда на логарифмический потенциал, который мы напишем, заменяя $\frac{1}{r}$ через $\log\frac{1}{r}$, в виде:

$$V(a, b) = \iint\limits_D \mu(x, y) \log\frac{1}{r}\, dx\, dy,$$

где двойной интеграл распространен на двухмерную область D плоскости, в которой $\mu(x, y)$ является непрерывной и диференцируемой функцией; $V(a, b)$ есть функция, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка во всей плоскости, причем производные ее получаются посредством применения обычных формул диференцирования под знаком интеграла; V является гармонической функцией вне области D; внутри D она допускает непрерывные производные второго порядка, удовлетворяющие соотношению

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = -2\pi\mu(a, b). \tag{47}$$

Резюмируя, мы видим, что потенциал $V(a, b, c)$ есть функция трех переменных (a, b, c), обладающая следующими свойствами:

1. Она непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка во всем пространстве и равна нулю в бесконечности. (Это положение доказывается, как в § 526.)

2. Она является гармонической вне замкнутой области D, ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями.

3. Внутри области D она допускает непрерывные производные второго порядка, удовлетворяющие соотношению Пуассона $\Delta V = -4\pi\mu$.

Эти свойства вполне определяют функцию $V(a, b, c)$. Пусть, в самом деле, $V_1(a, b, c)$ — потенциал, производимый действием масс плотности $\mu(x, y, z)$, распределенных в области D. Разность $V - V_1$ непрерывна во всем пространстве вместе с своими частными производными первого порядка, и притом представляет гармоническую функцию во всех точках пространства за исключением, может быть, точек на поверхностях S. Но выше (§ 528) было доказано, что вторые производные остаются непрерывными на этих поверхностях, так что $V - V_1$ является гармонической функцией во всем пространстве, а так как эта разность равна нулю в бесконечности, то она тождественно равна нулю.

В некоторых случаях можно воспользоваться этими свойствами, чтобы облегчить вычисление потенциала. Допустим, например, что мы желаем вычислить потенциал однородного шара плотности μ и радиуса R. Функция V, определенная равенствами:

$$V = 2\pi\mu\left(R^2 - \frac{d^2}{3}\right)$$

внутри шара и

$$V = \frac{4}{3}\pi\mu\frac{R^3}{d}$$

вне шара, где d, расстояние от точки P до центра, удовлетворяет тем же условиям, как и искомый потенциал. Она непрерывна так же, как и ее производные первого порядка, и равна нулю в бесконечности; вне шара имеем $\Delta V = 0$, а внутри шара $\Delta V = -4\pi\mu$. Следовательно, она тождественна с искомым потенциалом. Лежен-Дирихле дал менее элементарный пример, вычислив синтетическим путем потенциал, вызванный притяжением однородного эллипсоида (*Journal de Crelle, t.* 32).

537. Формула Гаусса. Из формулы Пуассона легко вывести значение интеграла $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dV}{dn} d\sigma$, взятого по некоторой замкнутой поверхности Σ, причем производная $\frac{dV}{dn}$ берется по *внешней* нормали. Допустим для определенности, что область внутри Σ состоит только из двух частей — области D_1, являющейся частью D, и области D_2, внешней по отношению к D. Область D_1 ограничена частью Σ_1 поверхности Σ и частью S' поверхностей S, ограничивающих D. Область D_2 в свою очередь ограничена поверхностями S' и частью Σ_2 поверхности Σ. Применив формулу Грина (10) к области D_1 и принимая во внимание формулу Пуассона, получим, положив $\varphi = 1$, $\psi = V$:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{dV}{dn_1} d\sigma + \iint\limits_{S'} \frac{dV}{dn_1} d\sigma = -4\pi \iiint\limits_{D_1} \mu\, dv,$$

где $\frac{dV}{dn_1}$ обозначает производную, взятую по направлению внешней нормали: так как V — гармоническая функция в области D_2, то имеем, с другой стороны:

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{dV}{dn_2} d\sigma + \iint\limits_{S'} \frac{dV}{dn_2} d\sigma = 0,$$

где $\frac{dV}{dn_2}$ имеет аналогичное значение.

Но вследствие непрерывности первых производных от V, имеем вдоль S':

$$\frac{dV}{dn_1} + \frac{dV}{dn_2} = 0;$$

складывая предыдущие формулы, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi M, \qquad (48)$$

где M равно тройному интегралу $\iiint\limits_{D_1} \mu\, dv$, т. е. сумме притягивающих масс, заключенных внутри поверхности Σ.

538. Нормальные производные потенциала простого слоя. Потенциал простого слоя можно рассматривать, как предельный случай объемного потенциала. Рассмотрим объем, заключенный между поверхностью Σ и бесконечно близкой к ней параллельной поверхностью, находящейся на расстоянии ε от первой, и положим, что этот объем заполнен материей, плотность которой ρ постоянна вдоль каждой общей нормали. Элемент этого объема, образуемый частями нормалей, проведенных из всех точек элемента $d\sigma$ поверхности Σ, имеет выражение $\varepsilon\, d\sigma$. Если теперь допустим, что ε бесконечно уменьшается и в то же время δ увеличивается, так что произведение $\delta\varepsilon$ стремится в каждой точке к некоторому пределу μ, то потенциал от действия рассматриваемого объема обратится в пределе в поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma$, что оправдывает название *потенциала простого слоя*, данное этому интегралу. Число μ выражает поверхностную плотность этого слоя. Общие свойства этого интеграла были выведены выше: остается исследовать разрыв производных при переходе через Σ.

Положим, что поверхность Σ замкнутая, и пусть M_0 — обыкновенная точка этой поверхности. На нормали в точке M_0 возьмем две бесконечно близкие точки P_i, P_e по одну и по другую сторону от M_0. Производные потенциала в этих двух точках, взятые по направлению внутренней нормали в точке M_0, стремятся соответственно к пределам, которые мы обозначим через $\frac{dV_i}{dn_i}$ и $\frac{dV_e}{dn_i}$, когда точки P_i и P_e бесконечно приближаются к M_0 *. Примем за начало координат точку M_0, направление внутренней нормали — за положительное направление оси z, а две перпендикулярные прямые в касательной плоскости — за оси x и y; мы предполагаем, что часть поверхности Σ вблизи точки M_0 выражается в полуполярных координатах уравнением вида:

$$z = \rho^{1+\alpha} f(\rho, \omega),$$

где α положительно, а функция f непрерывна вместе с своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ вблизи начала. Эти условия заведомо выполняются, когда z допускает непрерывные вторые производные вблизи начала. Формулы замены переменных (I, § 61) непосредственно показывают, что производные p и q имеют вид $\rho^\alpha f_1(\rho, \omega)$, где f_1 непрерывна при $\rho = 0$.

Производная $\frac{dV}{dz}$ в какой-нибудь точке P оси z, внутренней или внешней по отношению к поверхности Σ, имеет выражение

$$\frac{dV}{dz} = \iint\limits_{\Sigma} \mu \frac{\cos\psi_1}{r^2} d\sigma, \tag{49}$$

---

* На основании формулы среднего значения $\frac{dV_i}{dn_i}$ есть предел отношения $\frac{V(P_i) - V(M_0)}{M_0P_i}$, когда точка P_i приближается к точке M_0, оставаясь на внутренней нормали, тогда как $\frac{dV_e}{dn_i}$ есть предел отношения $\frac{V(M_0) - V(P_e)}{M_0P_e}$, когда P_e приближается к точке M_0, оставаясь на внешней нормали. Вообще, когда точка P с координатами (a, b, c) приближается к M_0, то производные $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$ стремятся к тем же самым пределам, будет ли точка P внутренней или внешней по отношению к поверхности Σ; только производная $\frac{\partial V}{\partial c}$ имеет два различных предела, если ось z взята параллельно нормали в точке M_0 (см. Пуанкаре, Ньютонов потенциал).

где ψ_1 есть угол между направлением Pz и направлением PM, выходящим из P и соединяющим точку P с какой-нибудь точкой M поверхности Σ. Если точка P совпадает с самой точкой M_0, то этот интеграл принимает вид:

$$V'_0 = \iint\limits_{\Sigma} \mu \frac{\cos\psi}{r_0^2} d\sigma, \tag{50}$$

где r_0 обозначает расстояние от точки M_0 до какой-нибудь точки M поверхности Σ, а ψ есть угол внутренней нормали в M_0 с направлением M_0M. Чтобы убедиться, что этот интеграл имеет конечное значение, достаточно рассмотреть малую часть Σ' поверхности Σ, заключающую начало и проектирующуюся на плоскость xy в область, ограниченную замкнутой кривой γ. Элемент интеграла (50), распространенный на Σ', напишется в полярных координатах в виде $\frac{\pi(\rho, \omega) d\rho\, d\omega}{\rho^\alpha}$, причем функция $\pi(\rho, \omega)$ ограничена в окрестности начала. Отсюда не следует, что $\frac{dV}{dz}$ имеет пределом V'_0, когда точка P стремится к точке M_0, ибо ничто не доказывает непрерывности этого интеграла в окрестности точки M_0. Наоборот, мы сейчас покажем, что эта производная имеет в этой точке такой же разрыв, как потенциал двойного слоя. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \left(\mu \frac{\cos\psi_1}{r^2} + \mu_0 \frac{\cos\varphi}{r^2}\right) d\sigma, \tag{51}$$

где φ есть угол между MP и направлением внутренней нормали в точке M; применяя рассуждение, вполне аналогичное проведенному в § 505, 527, мы докажем прежде всего, что этот интеграл непрерывен в точке M_0. Для этого рассмотрим триэдр, имеющий вершиной какую-нибудь точку M поверхности Σ и ребрами — направление MP, направление внутренней нормали MN в точке M и линию Mz', параллельную оси z. Угол между MP и Mz' равен $\pi - \psi_1$, угол между MP и MN есть φ; обозначим через θ угол между MN и Mz', и через Ω плоский угол двухгранного угла с ребром MN; согласно основной формуле сферической тригонометрии имеем:

$$\cos(\pi - \psi_1) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\Omega,$$

и интеграл I может быть написан в виде:

$$I = -\iint\limits_{\Sigma} (\mu\cos\theta - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma - \iint\limits_{\Sigma} \mu\sin\varphi\cos\Omega \frac{\sin\theta\, d\sigma}{r^2}. \tag{52}$$

Первый двойной интеграл правой части непрерывен в точке M_0: действительно, если рассмотрим потенциал двойного слоя $-\iint \frac{\nu\cos\varphi\, d\sigma}{r^2}$, где $\nu = \mu\cos\theta$, то этот интеграл представляет не что иное, как

$$-\iint\limits_{\Sigma} (\nu - \nu_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma,$$

между тем выше было доказано, что последний интеграл непрерывен в точке M_0 (§ 505, 527). Чтобы доказать, что то же самое имеет место и для второго интеграла, достаточно доказать, что этот интеграл равномерно сходится в окрестности точки M_0 (§ 504), или, что интеграл $\iint \frac{\sin\theta \, d\sigma}{r^2}$, распространенный на бесконечно малую часть Σ' поверхности Σ, окружающую начало, бесконечно мал. Но если перейти к полярным координатам, то элемент этого интеграла примет вид $\rho^{\alpha-1}\pi(\rho, \omega)\, d\rho\, d\omega$, причем функция $\pi(\rho, \omega)$ остается ограниченной. Следовательно, интеграл, распространенный на бесконечно малую область, сам бесконечно мал.

Установив эти положения, допустим сначала, что точка P оси z есть внутренняя точка P_i; предел интеграла I, когда эта точка P_i стремится к началу, очевидно, равен $\frac{dV_i}{dn_i} + 4\pi\mu_0$; наоборот, если бы точка P была внешней точкой P_e, то предел был бы равен $\frac{dV_e}{dn_i}$. Наконец, если точка P совпадает с самой точкой M_0, то I равен $V_0' + 2\pi\mu_0$. Приравнивая эти три числа, находим искомые значения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_i}{dn_i} &= -2\pi\mu_0 + \iint_\Sigma \mu \frac{\cos\psi}{r_0^2}\, d\sigma, \\ \frac{dV_e}{dn_i} &= 2\pi\mu_0 + \iint_\Sigma \mu \frac{\cos\psi}{r_0^2}\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Опуская индекс при r_0, эти соотношения* можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_e}{dn_i} - \frac{dV_i}{dn_i} &= 4\pi\mu_0, \\ \frac{dV_e}{dn_i} + \frac{dV_i}{dn_i} &= 2\iint_\Sigma \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Для производных по нормали логарифмического потенциала простого слоя $V = \int_C \mu \log \frac{1}{r}\, ds$ в некоторой точке M_0 кривой C (§ 505) имеем вполне аналогичные формулы, доказываемые таким же образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_i}{dn_i} &= -\pi\mu_0 + \int_C \mu \frac{\cos\psi}{r}\, ds, \\ \frac{dV_e}{dn_i} &= \pi\mu_0 + \int_C \mu \frac{\cos\psi}{r}\, ds, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

* Второе из соотношений (54) было доказано Племели в 1904 г. (Plemelj, *Monatshefte für Mathematik und Physik*).

где r — расстояние от точки M_0 до переменной точки M кривой C, а ψ — угол между M_0M и направлением внутренней нормали в точке M_0.

539. Ньютонов потенциал двойного слоя. Покажем еще, как теория магнетизма приводит к поверхностным интегралам, называемым *потенциалами двойного слоя* (§ 527). Вообразим слой положительной плотности μ, наложенный на поверхность Σ, и слой отрицательной плотности $-\mu'$, наложенный на параллельную поверхность Σ', находящуюся на бесконечно малом расстоянии ε от первой. Нормали к поверхности Σ, проведенные из контура элемента $d\sigma$ поверхности Σ, вырезают на поверхности Σ' элемент поверхности $d\sigma'$; мы предполагаем, что μ' выбрано так, что постоянно имеем $\mu\, d\sigma = \mu'\, d\sigma'$. Сумма потенциалов этих двух слоев на внешнюю точку P равна поверхностному интегралу

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu\, d\sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

где r и r' суть расстояния от точки P до элементов $d\sigma$ и $d\sigma'$. Если расстояние ε стремится к нулю и если в то же время плотность μ возрастает таким образом, что произведение $\mu\varepsilon$ остается равным μ_1, то этот интеграл имеет пределом двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu_1 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, d\sigma,$$

где производная $\frac{d}{dn}$ взята по нормали, направленной от Σ к Σ'. Мы приходим к выражению, которое мы взяли для определения потенциала двойного слоя.

Производная по нормали от этого потенциала ведет себя совершенно иначе, чем такая же производная от потенциала простого слоя, при переходе через поверхность Σ. Пусть M_0 некоторая точка поверхности Σ. P и P' две соседние точки на нормали в M_0 по разные стороны от этой точки и на равном расстоянии h от нее. Производные

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_P, \qquad \left(\frac{dW}{dn}\right)_{P'},$$

взятые по определенному направлению, выбранному на нормали в точке M_0, не стремятся непременно к пределу, когда h стремится к нулю, но доказано, что *их разность стремится к нулю вместе с h.*

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. Из формулы, дающей решение задачи Дирихле для шара, вывести значение поверхностного интеграла

$$\iint\limits_{S} \frac{d\sigma}{r^3},$$

где r расстояние от постоянной точки P внутри или вне сферы S до переменной точки M на сфере.

2. При помощи преобразования инверсии доказать, что формула (19) может быть написана в виде:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint_S U' \frac{d\sigma}{Rr},$$

где U' обозначает заданное значение U в точке M' сферы, являющейся второй точкой пересечения прямой MP со сферой (упражнение 4, стр. 199).

3. Дан однородный цилиндр плотности μ, радиуса R и высоты h. Вычислить объемный потенциал для точки оси и производную от этого потенциала по направлению оси. Заставляя h стремиться к нулю, а μ возрастать таким образом чтобы μh имело пределом μ', вывести отсюда разрыв производной от потенциала простого слоя, вызванного однородным круговым слоем.

4. *Лемма Пуанкаре.* Пусть S — сфера радиуса R с центром в O, A — внешняя точка и P — внутренняя точка. Предполагая точку A неподвижной, получим, что $\frac{1}{AP}$ — гармоническая функция координат точки P внутри сферы S и, следовательно, на основании формулы (19) (стр. 219) имеем:

$$\Delta = \frac{1}{AP} - \iint_S \frac{1}{AM}\frac{R^2 - \overline{OP}^2}{4\pi R\,\overline{PM}^3}\,d\sigma = 0, \tag{1}$$

та же формула (19) при $U = 1$ дает:

$$\iint_S \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{4\pi R\,\overline{PM}^3}\,d\sigma = 1. \tag{2}$$

Наконец, будем рассматривать точку P как постоянную и точку A как переменную; вследствие непрерывности потенциала простого слоя разность Δ будет равна нулю в каждой точке сферы S. Эта разность Δ является гармонической внутри S за исключением точки P, где она равна $+\infty$. Так как при этом она равна нулю на сфере, то она положительна во всякой внутренней точке. Объединяя все эти выводы, получаем следующее предложение, положенное в основу метода выметания Пуанкаре:

Если дана масса, равная единице, помещенная в некоторой точке P внутри шара, то, распределяя эту массу на всю поверхность шара так, что плотность в какой-нибудь точке M сферы будет обратно пропорциональна кубу MP, получим шаровой слой, вызывающий тот же потенциал, как и взятая первоначально масса, во всякой внешней точке и меньший потенциал во всякой внутренней точке.

ГЛАВА XXIX.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Линейные уравнения параболического типа обладают одновременно свойствами как уравнений эллиптического типа, так и уравнений типа гиперболического. В этой главе я ограничусь изложением основных свойств уравнения теплопроводности, о котором уже была речь неоднократно * (§ 486, 487, 488).

540. Общие положения. Частные интегралы. Уравнение с частными производными

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

среди уравнений параболического типа с двумя переменными является аналогом уравнения Лапласа для случая уравнений эллиптического типа. В настоящей главе мы будем обозначать через $u(x, y)$ всякий интеграл этого уравнения; точно так же $v(x, z)$ будет представлять интеграл сопряженного уравнения (§ 497), которое для данного случая есть

$$\mathfrak{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Оба эти уравнения допускают единственное семейство характеристик, состоящее из прямых, параллельных оси Ox. Мы будем называть каждую из этих функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$ *правильной* в некоторой области D, если она непрерывна вместе с своими частными производными первого порядка в этой области. Достаточно было бы даже потребовать, чтобы производная по y была непрерывна; ибо если, например, $\frac{\partial u}{\partial y}$

---

* Начиная с Фурье, это уравнение было предметом довольно большого числа работ:

Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, гл. VI, Paris 1835; Schlaefli, *Journal de Crelle*, t. 72; Betti, *Memorie delle Soc. italiana delle Scienze*, 3 série, t. 1; Appell, *Journal de Liouville*, 4 série, t. VIII; Volterra, Leçons professées à Stockholm (Upsala 1906).

Основные граничные задачи были разрешены в различных работах, принадлежащих главным образом Хольмгрену (Holmgren) и Леви (E. Levi). Последние параграфы настоящей главы (§ 544, 546, 547) взяты почти целиком в основном из работы Хольмгрена. Уравнения параболического типа в общем виде были изучены в важных работах Э. Леви (*Annali di Matematica*, 1908), Блока (H. Block, *Arkiv de Stockholm*, t. V), Жевре (Gevrey, *Journal de Mathématiques*, 6 série, t. IX, 1913, t. X, 1914; *Ann. de l'Ecole Normale supérieure*, 3 série, t. XXXV, 1918).

является непрерывной функцией, то уравнение (1) показывает, что то же самое имеет место и для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и, следовательно, для $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Уравнение (1), будучи уравнением с постоянными коэфициентами, допускает частные интегралы вида: e^{ax+by} (§ 483); связь между a и b в этом случае выражается так: $b = a^2$ *. Из полученного таким образом интеграла e^{ax+a^2y} можно вывести бесконечное множество других, беря последовательно производные по параметру a, или, что сводится к тому же, беря последовательно коэфициенты разложения в ряд по степеням a этого интеграла. Напишем это разложение в виде:

$$e^{ax+a^2y} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} V_n(x, y); \tag{3}$$

$V_n(x, y)$ есть многочлен n-й степени по x, y, однородный относительно x и $\sqrt{y}$,

$$\begin{gathered} V_n(x, y) = x^n + n(n-1)x^{n-2}y + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!} x^{n-2p} y^p + \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

и оканчивающийся членом с $y^{\frac{n}{2}}$ при n четном и с $xy^{\frac{n-1}{2}}$ при n нечетном. Эти многочлены V_n представляют интегралы уравнения (1) по самому их определению. В этом также легко убедиться, замечая, что уравнение (3) после диференцирования по x и по y дает соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial x} &= nV_{n-1}, \\ \frac{\partial V_n}{\partial y} &= n(n-1)V_{n-2}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

откуда непосредственно заключаем, что V_n удовлетворяет уравнению (1). Всякий многочлен U_n степени n по x, y, удовлетворяющий уравнению (1), *представляет линейную комбинацию с постоянными коэфициентами многочленов* $V_0 = 1$, $V_1, \ldots, V_n$.

Действительно, всякий многочлен, удовлетворяющий уравнению (1), вполне определен, если известны коэфициенты при членах, не содержащих y, так как при посредстве уравнения (1) и уравнений, полученных из него диференцированием, можно выразить все производные интеграла при помощи одних только производных по x. Поэтому, если выбрать коэфициенты $C_0, C_1, \ldots, C_n$ так, чтобы многочлен

$$C_0V_0 + C_1V_1 + \ldots + C_nV_n$$

имел члены, независимые от y, такие же, как U_n, то эти многочлены необходимо тождественны.

* Заменяя a через αi, снова получаем интегралы $e^{-\alpha^2 y}\cos\alpha x$, $e^{-\alpha^2 y}\sin\alpha x$ (§ 487).

Многочлены $V_n(x, y)$ легко выражаются через полиномы Эрмита $P_n(z)$, определяемые равенством:

$$\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}) = e^{-z^2} P_n(z).$$

В самом деле, напишем формулу разложения в ряд для $e^{-(z+h)^2}$, разделив обе части на e^{-z^2}:

$$e^{-2hz-h^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} P_n(z);$$

чтобы отождествить левую часть с левою частью формулы (3), достаточно заменить h через $a\sqrt{-y}$ и z через $-\frac{x}{2\sqrt{-y}}$. Замечая, что правые части обеих формул тождественны после сделанного преобразования, получаем следующее выражение для $V_n(x, y)$:

$$V_n(x, y) = (-y)^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{-x}{2\sqrt{-y}}\right).$$

На основании теоремы Ролля легко доказать, что все n корней уравнения $P_n(z) = 0$ действительны, различны и попарно равны по абсолютной величине. Отсюда следует, что уравнение $V_n(x, y) = 0$ представляет $\frac{n}{2}$ парабол, если n четное, и $\frac{n-1}{2}$ парабол вместе с осью y, если n нечетное.

Очевидно, что уравнение (1) не изменяет вида при замене переменных: $x' = kx + \alpha$, $y' = k^2y + \beta$, каковы бы ни были постоянные k, α, β. Таким образом, если $u(x, y)$ — интеграл, то и $u(kx + \alpha, k^2y + \beta)$ также будет интегралом. Для уравнения (1) существует также преобразование, аналогичное инверсии, определяемое формулами:

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}};$$

произведя вычисление, находим, что уравнение (1) преобразуется в уравнение того же вида* $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'}$. Следовательно, если $u(x, y)$ интеграл уравнения (1), то интегралом будет и

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} u\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right)$$

541. Аналитические интегралы. Сначала мы дополним то, что уже было сказано (§ 471) об аналитических интегралах уравнения (1), ограничившись, впрочем, действительной областью Пусть $u(x, y)$ — голоморфный аналитический интеграл в окрестности точки (x_0, y_0), который обращается при $x = x_0$ в голоморфную функцию $\varphi(y)$, и производная

---

* Аппель показал, что все преобразования вида $x' = \varphi(x, y)$, $y' = \psi(x, y)$, $u = \lambda(x, y) u'$, которыми уравнение (1) преобразуется само в себя, приводятся к комбинации приведенных простых преобразований (*Journal de Mathématiques*, 4 série, t. VIII, 1892, p. 187).

которого $\frac{\partial u}{\partial x}$ равна $\psi(y)$ при этом же значении x. Разложение интеграла $u(x, y)$ в ряд по степеням $(x-x_0)$, как мы видели, есть:

$$u(x, y)=\varphi(y)+\frac{x-x_0}{1}\psi(y)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\varphi'(y)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\psi'(y)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(n)}(y)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}\psi^{(n)}(y)+\ldots \tag{6}$$

Для того чтобы преобразовать этот ряд (6) в целый двойной ряд T, достаточно заменить $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и их производные их разложениями в ряды по степеням $y-y_0$. Пусть R есть радиус меньшего из кругов сходимости двух целых рядов по $y-y_0$; если r — произвольное положительное число, меньшее R, то ряды $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ допускают в качестве усиливающей функции (мажоранты) выражение $\dfrac{M}{1-\dfrac{y-y_0}{r}}$. Следовательно, если заменить в ряде (6) $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ этой функцией, то двойной ряд T', полученный таким образом, будет, наверное, мажорантой для двойного ряда T, полученного из (6) без всяких изменений.

Вспомогательная таблица с двойным входом T' сходится абсолютно, если только абсолютная величина $y-y_0$ меньше r. Действительно, заменим $x-x_0$ и $y-y_0$ их абсолютными величинами и соберем вместе члены одинаковой степени относительно $|x-x_0|$: ясно, что коэфициентами при $|x-x_0|^{2n}$ и при $|x-x_0|^{2n+1}$ будут соответственно:

$$\frac{Mn!}{(2n)!\left[1-\dfrac{|y-y_0|}{r}\right]^{n+1}r^n},\qquad \frac{Mn!}{(2n+1)!\left[1-\dfrac{|y-y_0|}{r}\right]^{n+1}r^n},$$

и следовательно, эта таблица сходится абсолютно, каково бы ни было x, если только $|y-y_0|<r$. Так как число r может быть сколь угодно близким к R, то отсюда заключаем, что двойной ряд

$$u(x, y)=\Sigma a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k, \tag{7}$$

представляющий функцию $u(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), абсолютно сходится в полосе B плоскости xy, ограниченной двумя характеристиками $y=y_0+R$, $y=y_0-R$. Он не может сходиться в более широкой полосе, так как, по крайней мере, один из целых рядов, представляющих $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, расходится вне интервала $(y_0-R,\ y_0+R)$. Пусть x_1 — какое-нибудь значение x; функции $u(x_1, y)$, $\dfrac{\partial u(x_1, y)}{\partial x_1}$ могут быть разложены в целые ряды по $y-y_0$, заведомо сходящиеся в интервале (y_0-R, y_0+R); мы их действительно получим, заменяя x через x_1 в выражениях $u(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$. Они не могут быть оба сходящимися в большем интервале, ибо, рассуждая в обратном порядке, мы отсюда заключили бы, что ряды $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ сами сходятся в более широком интервале. Из этого замечания следует, что в исследовании аналитического продолжения функции $u(x, y)$, определенной рядом (7), можно дать x какое-нибудь постоянное значение и рассматривать u как функцию одного переменного y. Допустим, что обе функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ могут быть аналитически продолжены в интервале (α, β), охватывающем первый интервал $(y_0 - R, y_0 + R)$, если давать y *действительные* значения; тогда интеграл $u(x, y)$ является аналитическим и правильным в полосе, ограниченной характеристиками $y = \alpha$, $y = \beta$, но он не может быть аналитически продолжен за эту полосу, по крайней мере, если исключить комплексные значения переменной y. Впрочем, может случиться, что одно из чисел α, β или оба сразу будут бесконечны; в последнем случае интеграл является голоморфным на всей плоскости. Это имеет место, например, если взять

$$\varphi(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad \psi(y) = 0.$$

Изучение аналитических интегралов возбуждает другой вопрос. Интеграл подобного рода определен, если мы зададим функцию $F(x)$, в которую обращается интеграл при данном значении y, например при $y = 0$. Эта функция $F(x)$ является непременно целой функцией от x, но это не произвольная целая функция. Для того чтобы найти ее характерное свойство, напишем ее разложение в ряд по степеням x:

$$F(x) = \varphi(0) + x\psi(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi'(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\psi'(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\psi^{(n)}(0) + \ldots, \tag{8}$$

причем $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ всюду обозначают функции, в которые обращаются u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x = 0$. Придавая M и r те же значения, что и выше, мы видим, что $F(x)$ допускает в качестве мажоранты ряд:

$$F_1(x) = M\left[1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot r} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot r} + \ldots \frac{n!}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{r^n} + \frac{n!}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{r^n} + \ldots\right].$$

Члены этого нового ряда соответственно меньше членов ряда $L(1+x)e^{Kx^2}$, если два числа L и K удовлетворяют неравенству:

$$L > \frac{M(n!)^2}{(2n)!(Kr)^n},$$

правая часть которого есть общий член ряда, сходящегося, если K выбрано так, что $4Kr$ больше 1. Следовательно, и сама функция $F(x)$ допускает в качестве мажоранты выражение вида $L(1+x)e^{x^2}$, где L и K — два положительных числа.

Обратно, если целый ряд $F(x)$ удовлетворяет этому условию, то уравнение (1) имеет интеграл, голоморфный в окрестности начала и обращающийся в $F(x)$ при $y=0$. Если такое решение существует, то для $u(0, y)$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ имеем следующие разложения в ряд по степеням y (§ 471):

$$\varphi(y)=F(0)+\frac{F''(0)}{1\cdot 2}y+\ldots+\frac{F^{(2n)}(0)}{n!}y^n+\ldots,$$

$$\psi(y)=F'(0)+F'''(0)y+\ldots+\frac{F^{(2n+1)}(0)}{n!}y^n+\ldots,$$

и достаточно показать, что эти два целые ряда имеют радиус сходимости, отличный от нуля. Но первый ряд, например, имеет в качестве мажоранты ряд:

$$L\sum\frac{(2n)!}{(n!)^2}K^n y^n,$$

сходящийся, если $|4Ky|<1$, и то же самое справедливо для второго ряда. Следовательно, *для того чтобы уравнение* (1) *допускало интеграл, голоморфный в окрестности начала и обращающийся в целую функцию $F(x)$ при $y=0$, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ имела мажоранту вида:*

$$L(1+x)e^{Kx^2},$$

где L и K — два положительных числа.

Это условие может быть заменено другим, куда входит только порядок величины коэфициентов ряда $F(x)$ (см. упражнение 1).

Заметим также, что если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ голоморфны в действительном интервале (α, β), то ряд (6) представляет интеграл во всей полосе, ограниченной прямыми $y=\alpha$, $y=\beta$. Наоборот, ряд (7) вообще сходится только в более узкой полосе, заключенной внутри первой.

542. Фундаментальное решение. Преобразования, указанные в конце § 540, позволяют получить из интеграла $u(x, y)=1$ интеграл, зависящий от двух произвольных параметров ξ, η:

$$u(x, y)=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

который играет по отношению к уравнению (1) такую же роль, как $\log r$ в теории гармонических функций. Можно также получить этот интеграл из частного интеграла $e^{-\alpha^2(y-\eta)}\cos\alpha(x-\xi)$, зависящего от трех параметров α, ξ, η путем квадратуры (§ 486). Этот интеграл имеет действительное значение только в случае, если $y>\eta$; однако для дальнейшего полезно принять следующее определение. Обозначим через $U(x, y; \xi, \eta)$ функцию, определенную равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &U(x, y; \xi, \eta)=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} &&\text{для } y>\eta,\\ &U(x, y; \xi, \eta)=0 &&\text{для } y\leqslant\eta. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Функция, определенная таким образом, есть интеграл уравнения (1), который является правильным для всех систем действительных значений x и y за исключением точки $(x=\xi,\ y=\eta)$; действительно, всякая частная производная функции $u(x, y)$ представляет сумму членов вида:

$$\frac{P(x)}{(y-\eta)^{n+\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

где $P(x)$ — многочлен, и это выражение стремится к нулю одновременно с $y-\eta$, если только $x-\xi$ не стремится также к нулю.

Функция $U(x, y; \xi, \eta)$, рассматриваемая как функция от (ξ, η), есть также интеграл сопряженного уравнения, правильный во всей плоскости, за исключением точки $\xi=x$, $\eta=y$, и тождественно равный нулю для $\eta \geqslant y$. Диференцируя U по x, y, ξ, η несколько раз, получаем новые функции $U^{(i)}(x, y; \xi, \eta)$, которые обладают теми же свойствами, как и функция U. Каждая из этих функций, рассматриваемая как функция одной пары переменных (x, y), представляет решение уравнения (1), правильное во всей плоскости, за исключением точки $x=\xi$, $y=\eta$; рассматриваемые как функции от (ξ, η), они являются интегралами сопряженного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial v}{\partial \eta}=0,$$

допускающими на всей плоскости единственную особую точку $\xi=x$, $\eta=y$. Все эти функции тождественно равны нулю, если $\eta \geqslant y$.

Из фундаментального решения $U(x, y; \xi, \eta)$ можно также получить путем квадратур новые интегралы, аналогичные логарифмическому потенциалу простого слоя. Пусть $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ — две какие-нибудь непрерывные функции координат (ξ, η) точки M вдоль дуги кривой C, расположенной на конечном расстоянии. Криволинейный интеграл

$$u(x, y)=\int_C U(x, y, \xi, \eta)\,[P(\xi, \eta)\,d\xi+Q(\xi, \eta)\,d\eta] \tag{10}$$

представляет интеграл уравнения (1), правильный вместе со своими частными производными во всякой области D, не имеющей общих точек с кривой C; действительно, можно применить любое число раз обычные формулы диференцирования, если точка (x, y) остается в области D. Заметим, что согласно определению функции $U(x, y; \xi, \eta)$ для вычисления $u(x, y)$ следует брать только часть дуги C, расположенную ниже характеристики, проходящей через точку (x, y). Отсюда следует, что ниже характеристики, проходящей через точку кривой C с минимальной ординатой, функция $u(x, y)$ равна нулю; то же самое имеет место во всех точках этой характеристики, не принадлежащих к C. Выше характеристики $y=y_0$, оставляющей под собой всю дугу C, $u(x, y)$ есть голоморфная аналитическая функция двух переменных x, y. В самом деле, будем временно рассматривать x и y как комплексные переменные; если ξ, η обозначают координаты какой-нибудь точки дуги C, то $U(x, y; \xi, \eta)$ есть голоморфная функция переменных x и y, какова бы ни была область изменения комплексного переменного x, если только действительная часть y больше, чем ν_0 (для $\sqrt{y-\eta}$ берем положительное значение, когда y действительно). Следовательно, $u(x, y)$ представляет голоморфную функцию двух переменных x, y над характеристикой $y=y_0$ *.

Для того чтобы исследовать, что будет с функцией $u(x, y)$ при приближении точки (x, y) к точке M контура C, необходимо сделать предположения относительно формы этого контура.

543. Формула Пуассона. Исследуем сначала случай, когда кривая C представляет отрезок характеристики. Определенный интеграл

$$u(x, y)=\int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi, \tag{11}$$

где $\varphi(\xi)$ — функция, непрерывная в интервале (a, b), представляет на основании изложенных свойств интеграл уравнения (1), правильный во всякой точке плоскости, не расположенной на отрезке AB характеристики $y=h$ между двумя точками A и B с абсциссами a и b. Для определенности предположим, что $a<b$. Эта функция $u(x, y)$ равна нулю во всякой точке ниже характеристики $y=h$ и во всякой точке этой характеристики вне отрезка AB. В части плоскости, расположенной выше, она является голоморфной функцией переменных x, y. Остается выяснить, каков предел $u(x, y)$, когда точка (x, y), находящаяся над AB, стремится к какой-нибудь точке этого отрезка. Для выяснения этого воспользуемся несколькими леммами, часто применяемыми в этой теории.

Пусть $F(u)$ непрерывная или, по меньшей мере, ограниченная и интегрируемая функция, имеющая в интервале (a, b) разрывы только первого рода. Зададимся целью найти предел интеграла

$$I=\int_a^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} dy, \tag{12}$$

когда *положительное* число y стремится к нулю.

Первый случай. Сначала предположим, что a и b оба положительны или оба отрицательны, например $0<a<b$. Если M — верхняя граница для $|F(u)|$ в интервале (a, b), то, очевидно, имеем:

$$|I|<\frac{M}{\sqrt{y}}(b-a)e^{-\frac{a^2}{4y}},$$

и это выражение стремится к нулю вместе с y. Имеем, следовательно:

$$\lim I=0.$$

Второй случай. Допустим, что один из пределов равен нулю, например $a=0$, $b>0$. Пусть β — положительное число, меньшее b,

* Достаточно воспроизвести рассуждение § 353 (т. II), заметив, что предположение, что F является аналитической функцией переменного интегрирования, не играет никакой роли в этом доказательстве.

такое, что $|F(u) - F(+0)|$ будет меньше заданного числа η в интервале $(0, \beta)$; можно выбрать β столь малым, что число η в свою очередь будет меньше всякого заданного наперед числа. Мы можем написать:

$$I = F(+0)\int_0^\beta e^{-\frac{u^2}{4y}} \frac{du}{\sqrt{y}} + \int_0^\beta [F(u) - F(+0)]\, e^{-\frac{u^2}{4y}} \frac{du}{\sqrt{y}} + \int_\beta^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du,$$

или, полагая в двух первых интегралах $u = 2t\sqrt{y}$:

$$I = F(+0)\int_0^{\frac{\beta}{2\sqrt{y}}} 2e^{-t^2} dt + 2\int_0^{\frac{\beta}{2\sqrt{y}}} [F(2\sqrt{y}t) - F(+0)]\, e^{-t^2} dt + \int_\beta^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du.$$

Из способа выбора числа β ясно, что абсолютная величина второго интеграла меньше, чем

$$2\eta \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \eta\sqrt{\pi}.$$

Предположим, что β взято так, что мы имеем: $\eta\sqrt{\pi} < \varepsilon$, где ε есть наперед заданное положительное число; определив число β таким образом, заставим y безгранично уменьшаться: первый интеграл имеет пределом $\sqrt{\pi}\, F(+0)$, а предел последнего интеграла есть нуль. Следовательно, возможно найти такое положительное число h, чтобы было

$$|I - \sqrt{\pi} F(+0)| < \varepsilon,$$

когда $y < h$, а потому I имеет пределом $\sqrt{\pi} F(+0)$. Точно так же можно убедиться, что когда a равно нулю, а $b < 0$, пределом I будет $-\sqrt{\pi} F(-0)$.

Третий случай. Пусть a и b имеют разные знаки, например $a < 0$, $b > 0$. Имеем:

$$I = \int_0^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du - \int_0^a \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du;$$

интегралы правой части имеют пределами соответственно $\sqrt{\pi} F(+0)$, $-\sqrt{\pi} F(-0)$. Следовательно, предел I равен

$$\sqrt{\pi}\,[F(+0) + F(-0)].$$

В частности, если функция $F(u)$ непрерывна при $u = 0$, то предел I равен $2\sqrt{\pi} F(0)$.

Установив это, будем искать предел интеграла (11), когда точка (x, y), расположенная над AB, приближается к некоторой точке с координатами (x_0, h) этого отрезка $(a < x_0 < b)$. Сначала предположим, что точка (x, y) перемещается по параллели к Oy. Необходимо найти предел интеграла

$$\int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi = \int_{a-x_0}^{b-x_0} \frac{\varphi(x_0+u)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du,$$

когда $y-h$ стремится к нулю. В интеграле предел $a-x_0$ отрицателен, другой предел $b-x_0$ положителен; если $\varphi(\xi)$ непрерывна в точке x_0, то предел, как мы видели, равен $2\sqrt{\pi}\varphi(x_0)$. На границах отрезка в точках A и B пределом будет $\sqrt{\pi}\varphi(a)$ или $\sqrt{\pi}\varphi(b)$.

Предположим теперь, что точка (x, y) стремится *любым* способом к внутренней точке (x_0, h) отрезка AB. Интеграл, предел которого мы ищем, можно написать в виде:

$$\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+u)}{\sqrt{y-h}} e^{\frac{u^2}{4(y-h)}} du = \int_{q-x}^{b-x} \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du +$$
$$+ \int_{a-x}^{a-x} \frac{\varphi(x+u)-\varphi(x_0)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du,$$

первый интеграл правой части может быть представлен в виде:

$$2\int_{\frac{a-x}{2\sqrt{y-h}}}^{\frac{b-x}{2\sqrt{y-h}}} \varphi(x_0) e^{-t^2} dt \qquad (13)$$

и имеет пределом $2\sqrt{\pi}\varphi(x_0)$, когда x стремится к числу x_0, *заключенному между a и b*, и y стремится к h.

Что касается второго интеграла, то легко доказать, что он стремится к нулю, если разложить его на сумму интегралов

$$\int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b-x},$$

где ε — весьма малое положительное число. Пусть η верхняя граница выражения $|\varphi(x+u)-\varphi(x_0)|$, когда x изменяется от $x_0-\varepsilon$ до $x_0+\varepsilon$, а u от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$; абсолютная величина второго интеграла меньше, чем $2\eta\sqrt{\pi}$ и, следовательно, может быть сделана меньше всякого заданного положительного числа, если взять ε достаточно малым. Если ε выбрано таким образом, то можно показать, как это сделано выше, что первый и третий интегралы стремятся к нулю, когда $y-h$ стремится к нулю, а x стремится к x_0.

Следует заметить, что это доказательство неприменимо, когда точка (x, y) стремится к одной из границ отрезка AB, ибо интеграл (13) неопределен, когда x стремится к a, а y к h. Предел этого интеграла зависит от того, каким способом точка (x, y) приближается к точке A (см. упражнение 2).

Итак, значение определенного интеграла

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi \tag{14}$$

стремится к $\varphi(x_0)$, когда точка (x, y) приближается каким-нибудь способом к внутренней точке (x_0, h) отрезка AB характеристики, оставаясь над этим отрезком.

Интеграл (14) сохраняет смысл, когда один из пределов обращается в бесконечность, если функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет определенным условиям. Если существует такое положительное число K, что произведение

$$\varphi(\xi) e^{-K\xi^2}$$

ограничено для всех значений ξ от a до $+\infty$, то определенный интеграл

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi \tag{15}$$

имеет смысл, когда точка (x, y) остается в любой ограниченной области D, расположенной между двумя характеристиками

$$y = h + \varepsilon, \quad y = h + \frac{1-H}{4K},$$

где H — положительное число, меньшее единицы.

В самом деле, любой элемент этого интеграла по абсолютной величине меньше, чем соответствующий элемент интеграла

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^{+\infty} \frac{M}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{H\xi^2 + 2x\xi - x^2}{4(y-h)}} d\xi, \tag{16}$$

где M есть верхняя граница выражения $|\varphi(\xi) e^{-K\xi^2}|$. Но вспомогательный интеграл (16) равномерно сходится в области D; следовательно, то же самое справедливо и для интеграла (15), который, таким образом, представляет решение уравнения (1), правильное ниже прямой

$$y = h + \frac{1-H}{4K},$$

за исключением части прямой $y = h$, от точки (a, h) до бесконечности в положительном направлении. Эта функция равна нулю под этой характеристикой и на части прямой влево от точки (a, h). Над этой характеристикой она голоморфна по x и y (II, § 353). Когда точка (x, y) стремится к точке с координатами (x_0, h), где $x_0 > a$, то предел интеграла (15) равен $\varphi(x_0)$, так как можно разбить этот интеграл на два: один от a до некоторого числа $b > x_0$, другой от b до $+\infty$. Первый, как мы видели, имеет пределом $\varphi(x_0)$, тогда как второй стремится к нулю. Сохраняя те же предположения относительно функции $\varphi(\xi)$, очевидно, можно распространить полученные результаты на интеграл $\int_{-\infty}^{a}$, а следовательно, и на интеграл *

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi, \tag{17}$$

где $\varphi(\xi)$ такая непрерывная функция, что произведение $\varphi(\xi) e^{-K\xi^2}$ остается ограниченным; определенный интеграл (17) представляет решение уравнения (1), голоморфное в полосе, ограниченной характеристиками

$$y = h, \quad y = h + \frac{1}{4K}$$

и стремящееся к $\varphi(x_0)$, когда точка (x, y) этой полосы стремится к точке (x_0, h) характеристики; действительно, число H можно предположить сколь угодно малым.

Если произведение $\varphi(\xi) e^{-K\xi^2}$ ограничено, какова бы ни была положительная постоянная K, то функция $u(x, y)$ голоморфна во всей области; расположенной над характеристикой $y = h$. В частности это имеет место, если сама функция $\varphi(\xi)$ ограничена. Можно распространить эти свойства и на случай, когда $\varphi(\xi)$ допускает разрывы первого рода, но в точке разрыва x_0 функция $u(x, y)$ не стремится непременно к

$$\varphi(x_0) = \frac{\varphi(x_0 - 0) + \varphi(x_0 + 0)}{2},$$

когда точка (x, y) стремится к точке (x_0, h); она всегда стремится к этому пределу, когда точка (x, y) приближается к точке разрыва, перемещаясь по параллели к Oy.

Формула (17) дает общее решение одной задачи теории теплопроводности, частный случай которой мы уже разбирали (§ 487). Пусть дан однородный стержень весьма малого поперечного сечения, неограниченно простирающийся в обе стороны, и пусть для момента h известна температура $\varphi(x)$ сечения с абсциссой x; требуется найти температуру произвольного сечения в какой-нибудь последующий момент. Если через y обозначим время, то искомая температура есть функция $u(x, y)$ переменных x и y, которая при надлежащем выборе единиц удовлетворяет уравнению (1); эта функция должна быть правильной во всей части плоскости (x, y), расположенной над прямой $y = h$, и обращаться в

* Таким же способом можно строго доказать, что формула (23) § 486 (стр. 95) представляет искомый интеграл, когда функция $f(x, y, z)$ остается ограниченной

$\varphi(x)$ при $y=h$. Из физического значения функции $\varphi(x)$ очевидно, что она ограничена, и следовательно, функция $u(x, y)$, представленная формулой (17), удовлетворяет всем поставленным условиям. Далее (§ 545) мы увидим, что эта функция — единственная. Это позволяет обобщить примечание, сделанное выше (§ 487) для частного случая, когда функция φ периодическая; функция $u(x, y_1)$, выражающая температуру сечения с абсциссой x в некоторый момент y_1, следующий за моментом h, есть целая функция от x, которая не может быть взята произвольно.

Примечание. Пользуясь известными предположениями относительно функции $F(x)$, мы вывели выше (стр. 49) формулу, представляющую интеграл уравнения (1), обращающийся в $F(x)$ при $y=h$. Пуассон показал, что эта формула и формула (17) могут быть получены одна из другой. Для простоты положим $h=0$; приняв

$$\xi = x + 2\sqrt{y}t,$$

получим формулу (17) в виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2\sqrt{y}t)\, e^{-t^2}\, dt.$$

Заменим

$$\varphi(x + 2\sqrt{y}t)$$

ее разложением в ряд по степеням $2\sqrt{y}t$; общий член интеграла выразится так:

$$\frac{2^n y^{\frac{n}{2}} \varphi^{(n)}(x)}{n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt.$$

Если n нечетно, то этот член равен нулю; если считать n четным, то можно заменить его через $2n$. Принимая во внимание формулу, полученную ранее (I, § 115), видим, что этот член обращается в $\frac{y^n \varphi^{(2n)}(x)}{n!}$, и мы приходим к формуле стр. 49, где следует вместо F поставить φ, а вместо y_0 — нуль.

Несмотря на большой интерес этого преобразования, доказательство, очевидно, лишено строгости. Впрочем, обе формулы далеко не эквивалентны. Первая предполагает, что $F(x)$ есть целая функция известного вида, и дает значение u по одну и по другую сторону характеристики $y=y_0$. Наоборот, формула (17) никоим образом не предполагает, что функция $\varphi(x)$ аналитическая, но она применима только над прямой $y=h$.

544. Интегралы, аналогичные потенциалу. Примем теперь за путь интегрирования дугу AB, представленную уравнением

$$x = \chi(y),$$

причем функция $\chi(y)$ непрерывна в интервале (a, b), где $a<b$. Если функция $\varphi(y)$ непрерывна в этом же интервале, то, как мы видели, определенный интеграл

$$\Phi(x, y) = \int_a^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-h}}\, e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\, d\eta \tag{18}$$

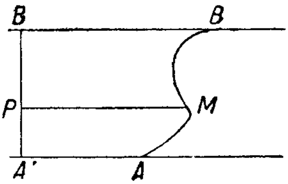
представляет решение уравнения (1), правильное вместе со своими частными производными произвольного порядка во всякой области на плоскости, не имеющей общих точек с дугой AB. Эта функция остается непрерывной, когда точка (x, y) попадает на дугу AB, ибо интеграл (18) остается равномерно сходящимся в окрестности любой точки этой дуги (§ 504).

В самом деле, этот интеграл, взятый вдоль бесконечно малой дуги CD, сам бесконечно мал, каково бы ни было положение близкой к этой дуге точки (x, y): обозначая через H верхний предел функции $|\varphi(\eta)|$, очевидно, получим для верхней границы абсолютной величины интеграла вдоль этой дуги выражение вида

$$H\int_a^y \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}},$$

которое является бесконечно малым вместе с разностью $y-a$. Несколько ниже мы увидим, что $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ претерпевает разрыв, когда точка (x, y) переходит через дугу AB.

Характеристики $y=a$, $y=b$, проходящие через низшую и высшую точки дуги AB, разбивают плоскость на несколько областей. Ниже прямой $A'A$ и на самой этой прямой (черт. 92) имеем $\Phi(x, y)=0$; выше прямой $B'B$ функция $\Phi(x, y)$ есть голоморфная аналитическая функция двух переменных x и y (§ 542). Остается исследовать природу этой функции внутри полосы, заключенной между этими двумя характеристиками, направо и налево от дуги AB. Предположим, что точка (x, y) перемещается по отрезку прямой $A'B'$, параллельной оси Oy, заключенному между этими двумя характеристиками и не имеющему ни одной общей точки* с дугой AB. Пусть x_0 — абсцисса точки A'; $\Phi(x_0 y)$ есть непрерывная функция от y, имеющая непрерывные частные производные в интервале (a, b), но, ***вообще говоря, эта функция не является аналитической функцией от*** y, если $\varphi(\eta)$ — произвольная непрерывная функция. В самом деле, значение этой функции в точке P отрезка $A'B'$ зависит только от значений $\varphi(\eta)$ вдоль дуги AM. Следовательно, если заменить $\varphi(\eta)$ другой непрерывной функцией $\varphi_1(\eta)$, совпадающей с $\varphi(\eta)$ вдоль дуги AM, но отличающейся от нее вдоль дуги MB, то новый интеграл $\Phi_1(x_0, y)$ совпадает с $\Phi(x_0, y)$ вдоль отрезка $A'P$, но будет отличен от $\Phi(x_0, y)$ вдоль отрезка PB'. Так как P — произвольная точка отрезка $A'B'$, то отсюда следует, что $\Phi(x_0, y)$ не может быть голоморфной



Черт. 92.

* Это предположение не уменьшает общности. Пусть, в самом деле, A_1B_1 — отрезок параллели к оси Oy, заключенный между характеристиками

$$y=\alpha, \quad y=\beta \quad (a<\alpha<\beta<b)$$

и не имеющий ни одной общей точки с дугой AB. Интеграл (18), взятый вдоль AB, разбивается на три части: интеграл от a до α, представляющий голоморфную функцию от y вдоль A_1B_1, интеграл от β до b, равный нулю для всякой точки этого отрезка, и наконец, интеграл от α до β, рассмотренный в тексте.

функцией y ни вдоль $A'B'$, ни даже вдоль какой-нибудь части $A'B'$, если $\varphi(\eta)$ является произвольной непрерывной функцией. Между тем, производные этой функции $\Phi(x_0, y)$ удовлетворяют определенным неравенствам, аналогичным тем, которые характеризуют аналитические функции* (I, § 197; II, § 343, примечания).

Прежде всего докажем, что если задать определенное значение y, заключенное между a и b, то функция $\Phi(x, y)$ будет голоморфной функцией комплексного переменного $x = x' + ix''$ в окрестности значения $x = x_0$. Имеем:

$$[x' + ix'' - \chi(\eta)]^2 = [x' - \chi(\eta)]^2 - x''^2 + 2ix''[x' - \chi(\eta)];$$

пусть 2ρ есть минимум выражения $|\chi(\eta) - x_0|$, когда η изменяется от a до b. Если $|x' - x_0| < \rho$, $|x''| < \rho$, то действительная часть выражения $[x - \chi(\eta)]^2$ положительна, и следовательно, модуль показателя степени в интеграле (18) меньше единицы. Итак, модуль любого элемента этого интеграла меньше соответствующего элемента интеграла

$$\int_a^y \frac{H}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta,$$

где H — верхний предел выражения $|\varphi(\eta)|$. Отсюда следует, что если давать x такие комплексные значения, что $|x - x_0|$ не превзойдет числа ρ, то интеграл (18) будет равномерно сходиться и, следовательно, будет представлять голоморфную функцию от x в этой области. Модуль этой функции меньше, чем $2H\sqrt{y-a}$, и, следовательно, меньше $2H\sqrt{b-a}$. В результате, если задать некоторое значение y между a и b, то $\Phi(x, y)$ будет голоморфной функцией от x внутри круга радиуса ρ, описанного из x_0, как центра, модуль которой остается меньше положительного числа M, когда $|x - x_0| \leqslant \rho$, *причем оба числа M и ρ не зависят от заданного значения y.*

Итак, в произвольной точке $A'B'$ с координатами (x_0, y) имеем

$$\left|\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}\right| < \frac{Mn!}{\rho^n}; \tag{19}$$

но на основании уравнения (1) и уравнений, получаемых из него путем последовательного диференцирования, любой интеграл этого уравнения удовлетворяет также соотношению

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}.$$

Следовательно, положив для сокращения

$$f(y) = \Phi(x_0, y)$$

и $r = \rho^2$, получим, что функция $f(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

---

* E. Holmgren, *Comptes Rendus*, 30, XII, 1907 и 9, I, 1908; *Arkiv för Matematik*, t. IV, § 14, 18.

1. Она непрерывна вместе со всеми своими частными производными в интервале (a, b).

2. В любой точке этого интервала последовательные производные удовлетворяют неравенствам:

$$f^{(n)}(y) < \frac{M(2n)!}{r^n}, \tag{19'}$$

где M и r — два положительные числа, *не зависящие от* y.

Для краткости будем говорить, что функция $f(y)$, удовлетворяющая этим условиям, принадлежит к классу 2 внутри интервала (a, b); при этом класс 1 образуют голоморфные функции. Ясно, что последние охватываются функциями класса 2. Легко видеть, что сумма произвольного числа функций класса 2, есть также функция этого класса; в частности, сумма функции класса 2 и голоморфной функции есть функция того же вида.

Производная по x от интеграла (18) имеет вид:

$$-\frac{1}{2}\Psi(x, y),$$

где положено:

$$\left.\begin{aligned}\Psi(x, y) = \int_a^y \varphi(\eta)\frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \\ d\eta = -2\int_a^y \varphi(\eta)\frac{\partial U}{\partial x}d\eta.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Функция $\Psi(x, y)$ также является интегралом уравнения (1), правильным во всей полосе между прямыми $y=a$, $y=b$ за исключением точек дуги интегрирования Г. Можно распространить это определение на всю плоскость, условившись, что $\varphi(\eta)=0$ при $\eta > b$. Эта функция также представляет аналитическую функцию от x, если дать y постоянное значение; из способа получения этой функции из функции $\Phi(x, y)$ видно, что она удовлетворяет неравенствам такого же вида, как неравенства (19), во всякой точке отрезка $A'B'$, и следовательно, эта функция является функцией от y класса 2 вдоль этого отрезка.

Интеграл (20) аналогичен потенциалу двойного слоя * и представляет вдоль дуги Г разрыв, исследование которого было проведено Хольмгреном. Мы будем предполагать, что функция $\chi(y)$ допускает внутри интервала (a, b) непрерывную производную $\chi'(y)$.

Следуя тем же путем, как в § 505, исследуем сначала простой случай, когда $\varphi(\eta)=1$. Интеграл

$$F(x, y) = \int_a^y \frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}d\eta, \tag{21}$$

* Так как направления характеристик обоих семейств совпадают, то характеристика, проведенная из какой-нибудь точки дуги Г, может рассматриваться как сопряженная с касательной по отношению к совокупности этих двух направлений.

не имеет простого геометрического значения, позволяющего непосредственно усмотреть разрывность, как это было в случае интеграла Гаусса; таким образом необходимо прямое исследование. Интеграл (21) сохраняет смысл, когда точка $M(x, y)$ совпадает с точкой P с координатами (X, Y) дуги Γ:

$$F(X, Y) = \int_a^Y \frac{X - \chi(\eta)}{(Y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X - \chi(\eta)]^2}{4(Y - \eta)}} d\eta, \tag{22}$$

но $F(x, y)$ стремится к различным пределам, когда точка (x, y) стремится к точке (X, Y) в зависимости от того, находится ли точка (x, y) вправо или влево от дуги Γ. Чтобы доказать это, рассмотрим вспомогательный интеграл

$$F_1(x, y) = \int_a^y \frac{-2\chi'(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} e^{-\frac{[x - \chi(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} d\eta, \tag{23}$$

непрерывный на дуге Γ, ибо он имеет такой же вид, как интегралы, рассмотренные в начале этого параграфа. Как показывает элементарное вычисление, имеем:

$$F(x, y) + F_1(x, y) = 4 \int_\alpha^\beta e^{-u^2} du, \tag{24}$$

где

$$u = \frac{x - \chi(\eta)}{2\sqrt{y - \eta}},$$

а пределы α и β определяются в зависимости от положения точки (x, y).

Предположим сначала, что эта точка находится вправо от дуги Γ, или $x > \chi(y)$; когда η изменяется от a до y, u изменяется от $\frac{x - \chi(a)}{2\sqrt{y - a}}$ до $+\infty$. Если бы точка (x, y) была влево от дуги Γ, то предел β был бы равен $-\infty$. Итак, если точка (x, y) не находится на дуге Γ, то имеем:

$$F(x, y) + F_1(x, y) = 4 \int_{\frac{x - \chi(a)}{2\sqrt{y - a}}}^{\pm\infty} e^{-u^2} du,$$

когда точка (x, y) стремится к точке (X, Y), это соотношение принимает вид:

$$\lim F(x, y) + \lim F_1(x, y) = 4 \int_{\frac{X - \chi(a)}{2\sqrt{Y - a}}}^{\pm\infty} e^{-u^2} du, \tag{25}$$

знак плюс соответствует случаю, когда точка (x, y) находится вправо от дуги Γ, а знак минус — противоположному случаю.

Если имеем $x = X$, $y = Y$, то пределы для u суть $\frac{X - \chi(a)}{2\sqrt{Y - a}}$ и нуль; формула (24) дает:

$$F(X, Y) + F_1(X, Y) = 4 \int_{\frac{X - \chi(a)}{2\sqrt{Y - a}}}^{0} e^{-u^2} du. \tag{26}$$

Вычитая почленно равенство (26) из (25) и замечая, что $F_1(x, y)$ непрерывна в точке (X, Y), получаем:

$$\lim F(x, y) = F(X, Y) + 4\int_0^{\pm\infty} e^{-u^2}\,du = F(X, Y) \pm 2\sqrt{\pi}. \tag{27}$$

В этой формуле следует брать знак плюс или минус в зависимости от того, находится ли точка (x, y) справа или слева от дуги Γ.

Рассмотрим теперь произвольный интеграл вида (20), который можно написать в форме:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, y) = \int_a^y [\varphi(\eta) - \varphi(y)]\frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta + \\ + \varphi(y)\int_a^y \frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

Если функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица в интервале (a, b), то абсолютная величина любого элемента первого интеграла меньше соответствующего элемента интеграла

$$\int_a^y \frac{H\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}.$$

Следовательно, этот интеграл равномерно сходится в окрестности любой точки (X, Y) дуги Γ и представляет вблизи Γ непрерывную функцию. Разрывность $\Psi(x, y)$ в случае, когда точка (x, y) стремится к точке (X, Y), выводится непосредственно из разрывности второго интеграла, который мы только что исследовали, и таким образом получаем общую формулу в окончательном виде:

$$\lim \Psi(x, y) = \pm 2\sqrt{\pi}\,\varphi(Y) + \int_a^Y \varphi(\eta)\frac{X-\chi(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X-\chi(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}\,d\eta; \tag{28}$$

знак в правой части следует брать, как указано выше.

В частном случае, когда дуга Γ представляет отрезок прямой $x = x_0$, интеграл, стоящий в правой части, тождественно равен нулю. Отсюда заключаем, что, *когда точка (x, y) стремится к точке (x_0, Y) этой прямой, предел интеграла*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_a^y \varphi(\eta)\frac{x-x_0}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta$$

равен $\pm\varphi(Y)$.

545. Распространение формулы Грина. Приложения. Рассмотрим две произвольные функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ переменных x, y, допускающие производные до второго порядка. Давая $\mathfrak{F}(\ )$ и $\mathfrak{G}(\ )$ то же значение, что выше (§ 540), имеем тождественно

$$\psi\mathfrak{F}(\varphi) - \varphi\mathfrak{G}(\psi) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi). \tag{29}$$

Если функции φ и ψ вместе с своими частными производными, входящими в предыдущую формулу, непрерывны внутри замкнутой области D, ограниченной контуром C, то из этой формулы (29) получим следующее соотношение, эквивалентное формуле Грина (§ 506):

$$\iint\limits_D [\psi\,\mathfrak{F}(\varphi) - \varphi\,\mathfrak{G}(\psi)]\,dx\,dy = \int\limits_C \varphi\psi\,dx + \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy, \tag{30}$$

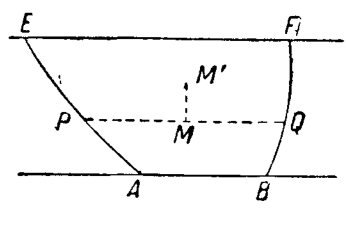
причем криволинейный интеграл взят в положительном направлении. Отсюда легко вывести ряд следствий, вполне подобных тем, которые были получены для уравнения Лапласа. Заменяя ψ единицей и φ интегралом u уравнения (1), правильным в области D, получим новое соотношение

$$\int\limits_C u\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0, \tag{31}$$

которое, очевидно, эквивалентно самому уравнению (1) в силу первой формулы Грина. Точно так же, заменяя ψ единицей, а φ квадратом u^2 интеграла, правильного внутри D, получим:

$$2\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = \int\limits_C u^2\,dx + 2u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{32}$$

Из этой формулы, аналогичной формуле (12 bis) § 506, можно вывести важное следствие. Пусть $u(x, y)$ есть интеграл, правильный внутри некоторого контура $ABFE$, подобного изображенному на черт. 93, образованного из двух отрезков характеристик AB и EF и двух дуг AE, BF, каждая из которых может пересекаться с характеристикой только в одной точке; отрезок EF расположен над отрезком AB, и один из этих отрезков или даже оба могут обращаться в точку. *Если этот интеграл равен нулю вдоль двух дуг AE и BF и вдоль отрезка AB, то он равен нулю во всей этой области.*



Черт. 93.

Пусть в самом деле M — какая-нибудь точка этой области, PQ — отрезок характеристики, проходящей через M, заключенный между дугами AE и BF. Соотношение (32) в применении к области D', ограниченной контуром $ABQPA$, дает:

$$2\iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy + \int\limits_{PQ} u^2 dx = 0,$$

так как u согласно предположению равен нулю вдоль $PABQ$. Так как все элементы этих двух интегралов положительны или равны нулю, то необходимо, чтобы было $u=0$ вдоль всего отрезка PQ, и следовательно, u равен нулю во всей области D, ибо точка M — произвольная точка этой области. Отсюда заключаем, что не может быть двух интегралов, правильных внутри области D и принимающих заданные значения вдоль AB, AE и BF. Задача определения этого интеграла аналогична задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Предыдущее рассуждение доказывает, что задача не допускает более одного решения, но не доказывает существования этого решения.

Для того чтобы получить соотношение, аналогичное основной формуле (13) § 507, достаточно применить тот же метод, заменив функцию $\log r$ фундаментальным решением $U(x, y;\ \xi, \eta)$. Пусть M — точка с координатами (x_0, y_0) в указанной выше области, M' — соседняя точка той же области с координатами x_0, y_0+h, где h есть положительное число. Применим общую формулу (30), заменяя буквы x и y соответственно буквами ξ, η, беря в качестве функции φ интеграл $u(\xi, \eta)$ уравнения (1), правильный внутри области D, а в качестве функции ψ функцию

$$U_0=U(x_0, y_0+h;\ \xi, \eta),$$

представляющую решение сопряженного уравнения, правильное в той же области. Эта формула дает соотношение

$$\int\limits_C u(\xi, \eta)\,U(x_0, y_0+h;\ \xi, \eta)\,d\xi+\left(U_0\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial U_0}{\partial \xi}\right)d\eta=0,$$

где через C обозначен контур $ABQPA$; это соотношение можно переписать еще так:

$$\int\limits_{PQ} u(\xi, y_0)e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4h}}\frac{d\xi}{\sqrt{h}}=$$
$$=\int\limits_{PABQ} u(\xi, \eta)U(x_0, y_0+h;\ \xi, \eta)\,d\xi+\left(U_0\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial U_0}{\partial \xi}\right)d\eta. \tag{33}$$

Выше мы видели (§ 543), что левая часть этого равенства имеет пределом $2\sqrt{\pi}\,u(x_0, y_0)$, когда положительное число h стремится к нулю, ибо значение x_0 заключено между абсциссами точек P и Q. Предел правой части получается сразу, так как

$$U(x_0, y_0+h;\ \xi, \eta) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U_0}{\partial \xi}$$

представляют непрерывные функции от h вдоль контура $PABQ$. Итак, опуская индексы при буквах x_0, y_0, получим соотношение

$$u(x, y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{PABQ} u(\xi, \eta)\,U(x, y;\ \xi, \eta)\,d\xi+\left(U\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)d\eta, \tag{34}$$

аналогичное соотношению (13) § 507. Заменяя функцию U ее выражением, можем написать это соотношение еще в виде:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{PABQ}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-h}}\left[u(\xi,\eta)\,d\xi+\frac{\partial u}{\partial \xi}d\eta-u(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{2(y-\eta)}d\eta\right]^{*}. \quad (35)$$

Формула (35) не дает решения граничной задачи, о которой только что шла речь, ибо правая часть может быть вычислена, только если известны значения $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ вдоль дуг AE и BF. Однако можно исключить значения $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ на всякой части контура, состоящей из отрезка прямой (см. упражнение 3).

Формула Пуассона § 543 получается, как предельный случай из общей формулы (35). Положим, что в части полосы, ограниченной двумя характеристиками с ординатами h и $h+\delta$, проходящими через A и E, расположенной вправо от дуги AE, интеграл $u(x, y)$ правилен, и что, кроме того, существует такое положительное число K, что произведения

$$u(x, y)\,e^{-Kx^2};\quad \frac{\partial u}{\partial x}e^{-Kx^2}$$

остаются ограниченными в этой области. Мы будем исследовать, что дает формула (35), если принять за BF отрезок прямой $x=R$, где R есть положительное число, которое мы будем неограниченно увеличивать. Часть криволинейного интеграла, получаемая при интегрировании по дуге BQ, равна

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{h}^{y}\frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_R-u(R,\eta)\,\frac{x-R}{2(y-\eta)}\right]d\eta\,. \quad (36)$$

Мы докажем, что этот интеграл стремится к нулю, когда R неограниченно возрастает, если K и δ удовлетворяют некоторому условию. Возьмем первую часть; согласно предположению произведение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_R e^{-KR^2}$$

---

* Всякий интеграл уравнения $\mathfrak{F}(u)=f(x, y)$, правильный внутри области D, удовлетворяет соотношению, которое отличается от соотношения (35) только прибавлением к правой части члена

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint\limits_{D'}f(\xi,\eta)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\,.$$

ограничено, и следовательно, абсолютная величина этого интеграла меньше, чем

$$\frac{M}{2\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon R^2} \int_h^y \frac{e^{(K+\varepsilon) R^2 - \frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} d\eta,$$

где M — определенное число, а ε — произвольное положительное число. Так как сомножитель $e^{-\varepsilon R^2}$ стремится к нулю, когда R неограниченно возрастает, то достаточно показать, что абсолютная величина интеграла

$$\int_h^y \frac{e^{\frac{4(K+\varepsilon)(y-\eta)R^2-(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \tag{37}$$

сохраняет конечное значение. Но числитель показателя степени меньше, чем $4(K+\varepsilon)\delta R^2-(x-R)^2$, и этот числитель будет отрицательным для весьма больших значений R, если коэфициент при R^2, т. е. $4(K+\varepsilon)\delta-1$ отрицателен; тогда абсолютная величина интеграла (37) меньше, чем интеграл

$$\int_h^y \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}},$$

имеющий конечное значение. Таким образом первая часть интеграла (36) стремится к нулю при неограниченном возрастании R, если δ меньше, чем $\frac{1}{4(K+\varepsilon)}$; а так как ε — произвольное положительное число, то это условие будет выполнено, если числа K и δ удовлетворяют соотношению $4K\delta < 1$. Таким же образом можно показать, что вторая часть интеграла (36) также стремится к нулю, когда R неограниченно возрастает, и в формуле (35) следует заменить контур интеграции $PABQ$ отрезком PA и отрезком характеристики, простирающимся вправо от точки A до бесконечности.

Если интеграл $u(x, y)$ правильный во всей полосе, ограниченной двумя характеристиками $y=h$, $y=h+\delta$, и если в этой полосе произведения ue^{-Kx^2}, $\frac{\partial u}{\partial x}e^{-Kx^2}$ остаются ограниченными, причем оба положительных числа K и δ удовлетворяют соотношению $4K\delta < 1$, то можно также принять за кривую AE отрезок прямой $x=-R$, где R положительное число, которое мы будем неограниченно увеличивать. Точно так же можно убедиться и в том, что часть криволинейного интеграла (35), получающаяся от интегрирования по PA, стремится к нулю и формула (35) в пределе примет вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{38}$$

где $\varphi(x)$ есть значение интеграла $u(x, h)$ вдоль характеристики $y = h$ мы вновь приходим к формуле (17) Пуассона (§ 543). Если производения $u(x, y)e^{-Kx^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}e^{-Kx^2}$ остаются ограниченными в части плоскости, расположенной над характеристикой $y = h$, как бы мало ни было положительное число K, то число δ может быть взято сколь угодно большим, и следовательно, формула (38) применима во всей этой части плоскости.

546. Свойства интегралов. Формула (35) позволяет доказать некоторые важные свойства интегралов уравнения (1). Пусть $u(x, y)$ — интеграл, правильный в области D. Возьмем внутри D частичную область, ограниченную так же, как в предыдущем параграфе, например, прямоугольник R, ограниченный двумя отрезками характеристик AB, EF и двумя прямыми AE, BF, параллельными оси Oy. Применяя формулу (35) к какой-нибудь точке M этого прямоугольника с координатами x, y, выразим функцию $u(x, y)$ суммой криволинейных интегралов, взятых соответственно вдоль AB, AP, BQ. Интеграл, взятый вдоль AB, есть аналитическая функция двух переменных x, y внутри прямоугольника R (§ 543); каждый из интегралов, взятых вдоль отрезков AP, BQ, представляет сумму функции $\Phi(x, y)$ и функции $\Psi(x, y)$ (§ 544). Следовательно, интеграл $u(x, y)$ обладает внутри прямоугольника R теми же свойствами, как и сами эти функции: все его частные производные правильны внутри этого прямоугольника; если дать y постоянное значение y_0, то $u(x, y_0)$ представляет голоморфную функцию от x, между тем как если дать x постоянное значение x_0, то $u(x_0, y)$ представляет функцию от y класса 2.

Так как всякий отрезок прямой, параллельной одной из осей, и расположенный целиком в области D, может быть заключен внутрь такого прямоугольника, как только что рассмотренный, который в свою очередь заключен внутри D, то можно формулировать следующие предложения: *Если интеграл $u(x, y)$ является правильным внутри некоторой области D, то* 1) *все его частные производные также правильны в этой области;* 2) *вдоль отрезка характеристики, расположенного внутри области D, интеграл $u(x, y)$ представляет голоморфную функцию от x;* 3) *вдоль отрезка прямой, параллельной оси Oy, расположенного внутри области D, интеграл $u(x, y)$ представляет функцию от y класса 2.*

Этими свойствами обладают также частные производные от $u(x, y)$, так как они сами представляют интегралы уравнения (1). В частности $\frac{\partial u}{\partial x}$ есть функция от y класса 2 вдоль всякого отрезка, параллельного оси Oy, расположенного внутри той области, где функция $u(x, y)$ правильна. Обратно, если даны две функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$, класса 2 в интервале (a, b), то существует интеграл, удовлетворяющий условиям Коши при $x = x_0$:

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0} = \psi(y),$$

и правильный внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $y = a$, $y = b$, $x = x_0 \pm r$, где r — соответствующим образом выбранное положительное число. Действительно, частные производные функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ по предположению удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi^{(n)}(y)| < \frac{M(2n)!}{\rho^n}, \quad |\psi^{(n)}(y)| < \frac{M(2n)!}{\rho^n} \tag{39}$$

для всех значений y в интервале (a, b); M и ρ суть два положительных числа, которые, очевидно, можно взять одинаковыми для обеих функций. Ряд (6), рассмотренный в § 541, так же как и ряды, полученные из него двукратным диференцированием по x или однократным диференцированием по y, на основании соотношений (39) сходятся равномерно, каково бы ни было значение y в интервале (a, b), если имеем $(x - x_0) < \rho^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, сумма этого ряда представляет интеграл уравнения (1), удовлетворяющий условиям Коши. Притом это—единственный интеграл, удовлетворяющий этим условиям и правильный внутри области D, заключающей рассматриваемый отрезок прямой. Действительно, если бы существовали два такие интеграла, то их разность представляла бы интеграл, правильный внутри области D и обращающийся в нуль вместе со своей частной производной по x вдоль всего этого отрезка прямой. Таким образом все частные производные этого интеграла были бы равны нулю вдоль этого же отрезка, а так как этот интеграл представляет аналитическую функцию от x, то отсюда следует, что он тождественно равен нулю *.

Указанные выше свойства обобщаются, если рассматривать вместо отрезка прямой, параллельного оси Oy, дугу кривой AB, выражаемую уравнением $x = \chi(y)$, где $\chi(y)$ — голоморфная функция от y в интервале (a, b). Если имеем интеграл $u(x, y)$, правильный в области D, заключающий внутри себя дугу AB, то функция $u[\chi(y), y]$, в которую обращается интеграл вдоль этой дуги, принадлежит к классу 2. Обратно, если даны две функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, принадлежащие к классу 2 в интервале (a, b), то существует один и только один интеграл уравнения (1), правильный в области, заключающей дугу AB и ограниченной прямыми $y = a$, $y = b$ и двумя кривыми $x = \chi(y) \pm r$ (где r есть положительное число), удовлетворяющий условиям Коши вдоль дуги AB:

$$u(x, y) = \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \psi(y) \quad \text{при } x = \chi(y). \tag{40}$$

Для доказательства отсылаем к работам Хольмгрена. Теорема Шварца об аналитическом продолжении гармонической функции также была распространена Хольмгреном на интегралы уравнения (1). Пусть $u(x, y)$ — интеграл, правильный в области D; говорят, что его можно продолжить в область D', смежную с первой, если существует интеграл $U(x, y)$, правильный в области $D + D'$ и совпадающий с $u(x, y)$ в области D. Если область D ограничена частично дугою AB, пересекающеюся с характеристиками только в одной точке, то продолжение $u(x, y)$ за эту дугу AB возможно только единственным способом, так как вдоль характеристики $u(x, y)$ есть голоморфная функция от x. Выше уже было отмечено, что иначе обстоит дело при продолжении за отрезок характеристики (§ 544). Уста-

---

* Если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ удовлетворяют для всякого значения y внутри интервала (a, b) неравенствам

$$|\varphi^n(y)| < \frac{M\Gamma[n(1+\alpha)]}{\rho^n}, \quad |\psi^n(y)| < \frac{M\Gamma[n(1+\alpha)]}{\rho^n}, \tag{39'}$$

где α положительное число, *меньшее* единицы, то формула (6) представляет интеграл, удовлетворяющий условиям Коши и правильный в полосе, заключенной между характеристиками $y = a$, $y = b$.

новив это, положим, что дуга AB выражается уравнением $x=\chi(y)$, где $\chi(y)$ — функция, голоморфная для всякого значения y, заключенного между a и b, и, что $u(x, y)$ есть интеграл, правильный по одну сторону от этой дуги, например вправо, и принимающий на дуге AB заданную последовательность значений $f(y)$. Для того чтобы этот интеграл $u(x, y)$ мог быть продолжен влево за дугу AB, *необходимо и достаточно, чтобы в любом интервале* (α, β), *заключенном внутри интервала* (a, b), *функция* $f(y)$ *принадлежала классу* 2 *.

547. Граничные задачи. Пусть D — область, ограниченная так же, как в § 545, двумя отрезками характеристик AB и EF с ординатами h и l $(l>h)$ и двумя дугами кривых AE и BF, заключенными между этими характеристиками и выражаемыми соответственно уравнениями $x=\chi_1(y), x=\chi_2(y)$; функции χ_1, χ_2, χ_1', χ_2' предполагаются непрерывными в интервале (h, l), и $\chi_1>\chi_2$. Поставим себе целью доказать, что существует один и только один интеграл, правильный в области D и обращающийся на каждой из дуг AE, BF в заданную непрерывную функцию $f_1(y)$ или $f_2(y)$, а на отрезке AB — в другую непрерывную функцию $g(x)$, значение которой совпадает с первыми в точках A и B. Без уменьшения общности можно положить $g(x)=0$; действительно, мы видели (§ 543), как можно построить бесчисленным множеством способов интеграл, правильный над отрезком AB и принимающий заданные значения на AB. Пусть будет $u_1(x, y)$ один из этих интегралов: полагая $u-u_1=z$, мы видим, что новая функция $z(x, y)$ должна обращаться в нуль вдоль отрезка AB и в заданные непрерывные функции от y вдоль дуг AE и BF. Таким образом мы будем предполагать, что такое преобразование проведено с самого начала, и следовательно, имеем $g(x)=0$.

На основании сказанного в § 545 эта задача не может допускать более одного решения. Чтобы доказать существование этого решения, можно воспользоваться методом, аналогичным методу Неймана (§ 513), и попытаться представить искомый интеграл в виде суммы функций $\Psi(x, y)$ (§ 544). Для этого положим:

$$
\left.\begin{aligned}
(x, y) &= \int_h^y \mu_1(\eta)\frac{x-\chi_1(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}d\eta+\\
&+\int_h^y \mu_2(\eta)\frac{x-\chi_2(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[x-\chi_2(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}d\eta,
\end{aligned}\right\} \qquad (41)
$$

---

* Из этого предположения можно вывести следствие, аналогичное указанному (в сноске на стр. 167), для *обобщенной* задачи Коши. Пусть требуется найти интеграл $u(x, y)$, удовлетворяющий условиям Коши (40) и определенный только по одну сторону от дуги аналитической кривой AB, на которой заданы значения. Эта задача вообще неразрешима, если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — произвольные непрерывные функции.

В самом деле, пусть $u_1(x, y)$ есть интеграл, правильный по ту же сторону от дуги AB и удовлетворяющий первому условию Коши (§ 547); разность $u(x, y)-u_1(x, y)$, равная нулю вдоль дуги AB, может быть продолжена в другую сторону и, следовательно,

$$
\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}=\psi(y)-\frac{\partial u_1}{\partial x}
$$

должна быть функцией от y класса 2 вдоль всего отрезка дуги AB, не заключающего концов.

где μ_1 и μ_2 — функции, непрерывные в интервале (h, l), которые нужно определить. На основании доказанного выше $u(x, y)$ есть интеграл, правильный в области D и равный нулю вдоль AB. Когда точка (x, y) приближается к точке (X, Y) дуги AE, оставаясь направо от этой дуги, $u(x, y)$ должна стремиться к $f_1(Y)$, для чего необходимо, чтобы имело место соотношение [формула (28)]:

$$\left.\begin{aligned} &2\sqrt{\pi}\,\mu_1(Y)+\int_h^Y \mu_1(\eta)\frac{\chi_1(Y)-\chi_1(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_1(Y)-\chi_1(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta+\\ &+\int_h^Y \mu_2(\eta)\frac{\chi_1(Y)-\chi_2(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_1(Y)-\chi_2(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta=f_1(Y). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Точно также, отмечая, что $u(x,y)$ стремится к $f_2(Y)$, когда точка (x, y) стремится к точке с ординатой Y дуги BF, оставаясь налево от этой дуги, получим вполне аналогичное соотношение:

$$-2\sqrt{\pi}\,\mu_2(Y)+\int_h^Y \mu_1(\eta)\frac{\chi_2(Y)-\chi_1(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_2(Y)-\chi_1(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta+$$

$$+\int_h^Y \mu_2(\eta)\frac{\chi_2(Y)-\chi_2(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_2(Y)-\chi_2(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta=f_2(Y). \tag{43}$$

Два соотношения (42) и (43) образуют систему интегральных уравнений вида:

$$\begin{gathered} \mu_1(Y)+\int_h^Y \mu_1(\eta)K_1(Y,\eta)\,d\eta+\int_h^Y \mu_2(\eta)K_2(Y,\eta)\,d\eta=F_1(Y),\\ \mu_2(Y)+\int_h^Y \mu_1(\eta)H_1(Y,\eta)\,d\eta+\int_h^Y \mu_2(\eta)H_2(Y,\eta)\,d\eta=F_2(Y), \end{gathered} \tag{44}$$

где $K_1, K_2, H_1, H_2, F_1, F_2$ суть заданные функции, а μ_1, μ_2 — неизвестные функции. В следующей главе будет доказано, что эта система, при известных условиях, которые здесь выполнены, имеет решение и притом единственное.

Вместо того чтобы задавать значение неизвестной функции в каждой точке дуг AE, BF, можно задавать значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ или, общее, предположить, что на каждой из этих дуг известно значение $u(x, y)$, или эта функция удовлетворяет соотношению вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda(y)\,u=f(y), \tag{45}$$

где $\lambda(y)$ и $f(y)$ — известные функции от y. Мы опять приходим к системе двух интегральных уравнений вида (44), выражая неизвестную функцию в виде суммы функции типа $\Phi(x, y)$ и функции типа $\Psi(x, y)$ или суммы двух функций $\Phi(x, y)$ (§ 544). Достаточно заменить в формуле (41) функцию $\Psi(x, y)$ функцией $\Phi(x, y)$, определенной при помощи интеграла, взятого вдоль той из дуг, для которой неизвестная функция удовлетворяет соотношению вида (45), и заметить, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ представляет функцию $\Psi(x, y)$. Применяя соотношение (28) также приходим к системе двух интегральных уравнений. Мы решали непосредственно задачу этого рода в § 488, ибо уравнение (35) (стр. 97) отличается от уравнения (1) только обозначениями. Так как полученное решение является нечетной функцией от r, то из данных задачи мы знаем значение неизвестной функции v в интервале $(-R, +R)$ при $t=0$ и, кроме того, мы имеем линейное соотношение между $\frac{\partial v}{\partial r}$ и v при $r=\pm R$.

Рассмотрим область $\mathfrak{D}$, образованную частью полосы, которая заключена между двумя характеристиками и расположена вправо или влево от дуги Γ, определяемой уравнением $x=\chi(y)$. Предполагая, что одна из дуг AE, BF черт. 98 бесконечно удаляется, приходим как к предельному случаю, к следующей задаче: *Определить интеграл, правильный в области $\mathfrak{D}$ и равный нулю вдоль части характеристики, ограничивающей эту область снизу, зная значение этого интеграла в каждой точке дуги Γ или зная, что u, а также $\frac{\partial u}{\partial x}$ удовлетворяют на дуге Γ соотношению вида* (45).

Мы опять постараемся выразить неизвестную функцию $u(x, y)$ в зависимости от условий, через функцию $\Phi(x, y)$ или через функцию $\Psi(x, y)$, что приводит *к одному* интегральному уравнению для определения вспомогательной неизвестной, стоящей под знаком интеграла. Возьмем, например, первый случай и положим:

$$u(x, y)=\int_h^y \mu(\eta) \frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} d\eta;$$

функция $\mu(\eta)$ определяется интегральным уравнением

$$\pm 2\sqrt{\pi}\,\mu(y)+\int_h^y \mu(\eta) \frac{\chi(y)-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[\chi(y)-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} d\eta=f(y). \tag{46}$$

Это уравнение немедленно разрешается, если кривая Γ обращается в отрезок прямой $x=x_0$, ибо тогда имеем $\chi(y)=\chi(\eta)$, откуда следует $\pm 2\sqrt{\pi}\,\mu(y)=f(y)$. Этот результат уже был отмечен в конце § 544

Решение этих различных задач можно также привести к определению интеграла сопряженного уравнения, играющего ту же роль, что функция Грина. Для определенности ограничимся первой из этих задач, т. е.

случаем, когда задаются значения u на контуре $EABF$ (черт. 98), причем вдоль AB этот интеграл равен нулю. Если бы были известны также значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ на дугах AE, BF, то значение u в некоторой точке (x, y) области D определялось бы формулой (35), которая здесь принимает вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{(PA+BQ)} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - u(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{2(y-\eta)} \right] d\eta + u\, d\xi \right\}. \tag{47}$$

Пусть $g(x, y; \xi, \eta)$ — интеграл сопряженного уравнения

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0,$$

зависящий от двух параметров (x, y), правильный внутри контура $PABQ$, равный нулю в каждой точке отрезка PQ и принимающий на дугах PA и BQ те же значения, что

$$\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}.$$

Так как обе функции $u(\xi, \eta)$, $g(x, y; \xi, \eta)$ правильны внутри контура $ABQPA$, то общая формула (30) дает (так как $u = 0$ вдоль AB и $g = 0$ вдоль PQ):

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{(PA+BQ)} \left[g(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} - u(\xi, \eta) \frac{\partial g}{\partial \xi} \right] d\eta + ug\, d\xi. \tag{48}$$

Вычитая почленно равенство (48) из (47), мы видим, что $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ исчезает на основании предположения относительно значений g на дугах AP и BQ, и остается

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{(PA+BQ)} u(\xi, \eta) \left[\frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{x-\xi}{2(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right] d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{(PA+BQ)} u(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta, \tag{49}$$

если положить:

$$G(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}. \tag{50}$$

Здесь ясна аналогия между формулой (49) и формулой (37) (§ 518), дающей решение задачи Дирихле.

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. Условия, полученные в § 514 для коэфициентов функции $F(x)$,

$$|a_{2n}| < \frac{M}{r^n}\frac{n!}{(2n)!}, \quad |a_{2n+1}| < \frac{M}{r^n}\frac{n!}{(2n+1)!},$$

могут быть преобразованы, как указано ниже. Например, первое условие может быть написано в виде

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} < \frac{\sqrt[2n]{M}}{\sqrt{r}} \sqrt[2n]{\frac{n!}{(2n)!}};$$

заменяя $n!$ и $(2n)!$ их асимптотическими значениями приходим к неравенству вида

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} < \frac{L}{\sqrt{2n}},$$

где L не зависит от n. Совершенно подобное неравенство имеем для радикала $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}$, и следовательно, произведение $\sqrt{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}$ остается ограниченным (Le Roux, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIX, серия 2, 1895, стр. 127).

2. Для того чтобы получить предел интеграла (§ 543)

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\xi \quad (a > 0),$$

когда x и y стремятся к нулю, пишем этот интеграл, полагая $\xi = x + 2\sqrt{y}t$ в виде:

$$I = 2\int_{-\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{a-x}{2\sqrt{y}}} e^{-t^2} dt = 2\int_{-\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{0} e^{-t^2} dt + 2\int_0^{\frac{a-x}{2\sqrt{y}}} e^{-t^2} dt.$$

Когда x и y стремятся к нулю, второй интеграл стремится к $\sqrt{\pi}$, но первый интеграл имеет предел только в случае, если $\frac{x}{\sqrt{y}}$ стремится к пределу 2λ, и этот предел равен $2\int_{-\lambda}^{0} e^{-t^2} dt$. От этого частного случая легко перейти к общему случаю, где под знаком интеграла входит множителем функция $\varphi(\xi)$.

3. Когда на черт. 98 кривая AE представляет отрезок прямой, то можно уничтожить в формуле (35) часть криволинейного интеграла, взятого вдоль AP, зависящую от $\frac{\partial u}{\partial \xi}$.

Пусть (x_1, y) — координаты точки M_1, *внешней* по отношению к области D и имеющей ту же ординату, что точка $M(x, y)$; так как функция $U(x, y; \xi, \eta)$ правильная в этой области, то на основании общей формулы (30) имеем:

$$\int_{PAQB} \frac{e^{-\frac{(x_1-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[u(\xi,\eta)\, d\xi + \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - u(\xi,\eta) \frac{x_1 - \xi}{2(y-\eta)} d\eta \right] = 0. \tag{35'}$$

Для того чтобы, комбинируя два соотношения (35) и (35′), можно было исключить значения $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ вдоль AE, достаточно выбрать два числа x_1 и K так, чтобы вдоль всего отрезка AE имело место соотношение

$$(x-\xi)^2-(x_1-\xi)^2=4K\,(y-\eta).$$

Но, рассматривая $(\xi,\ \eta)$ как текущие координаты, мы видим, что это уравнение представляет прямую линию. Для того чтобы отрезок AE принадлежал к этой прямой, достаточно выбрать на продолжении отрезка PQ точку M_1 $(x_1\ y)$, симметричную с M по отношению к точке P, и затем определить постоянную K, сравнивая, например, угловые коэфициенты.

4. Если $u\,(x,\ y)$ есть интеграл уравнения (1), то то же самое имеет место для функции

$$u_1\,(x,\ y)=\int u\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Значения $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ на дугах AE, BF (черт. 98) равны значениям u на этих дугах.

5. Когда дуга AE (черт. 98) представляет отрезок прямой $x=x_0$, и дуга BF отодвинута вправо в бесконечность, функция Грина $g\,(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ для точки $(x,\ y)$, расположенной вправо от AE внутри полосы, заключенной между двумя характеристиками, проходящими через точки A и E, имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\,e^{-\frac{(2x_0-x-\xi)^2}{4\,(y-\eta)}}.$$

Вывести отсюда результат, полученный в конце § 544.

УКАЗАТЕЛЬ*

(Цифры обозначают страницы настоящего полутома)

* Подробный именной и предметный указатель ко всему „Курсу математического анализа“ Э. Гурса будет дан в конце III тома.