COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

EDOUARD GOURSAT

Membre de L'institut
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

CINQUIÈME ÉDITION

TOME III

INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU SECOND ORDRE
ÉQUATIONS INTÉGRALES. CALCUL DES VARIATIONS

GAUTHIER — VILLARS
PARIS

Э. ГУРСА

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ ТРЕТИЙ

ЧАСТЬ II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Перевод с пятого французского издания
М. Г. ШЕСТОПАЛ

Под редакцией
проф. В. В. СТЕПАНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

Т 11-5-2

Редакция *Г. А. Сухомлинова.* Оформление *О. Н. Персияниновой.*
Корректура *З. В. Смирновой.* Выпускающий *В. П. Морев.*

Тираж 10 000. Подписано в печ. с матриц 2/II 1935 г. Формат бумаги 62 × 94.
Авторск. лист. 25. Бум. лист. 10. Печатн. знак. в бум. л. 106 800. Заказ № 192.
Уполномочен. Главлита В-73479. Выход в свет февраль 1935 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XXX

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Глава XXXI

УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА

Глава XXXII

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава XXXIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава XXXIV

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА XXX

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

На протяжении нашего курса мы уже несколько раз встречались с вопросом об интегральных уравнениях (т. I, § 137; т. II, § 389; т. III, § 513, 533, 547). Эта новая ветвь анализа очень быстро приобрела важное значение после работ Вольтерра (Volterra) и Фредгольма (Fredholm). Вольтерра занимался преимущественно изучением уравнений с переменными пределами; он рассматривал уравнение этого типа как предельный случай системы алгебраических уравнений, в которых число неизвестных неограниченно возрастает. Эта же идея была использована с очень большим успехом Фредгольмом в исследовании уравнений с постоянными пределами. В настоящей главе мы сначала покажем, как можно очень просто получить результаты Вольтерра методом последовательных приближений. В случае постоянных пределов этот метод вообще не дает полного решения, но приводит к важным свойствам резольвенты. Те трудности, которые возникают при определении аналитического характера этой резольвенты, дают возможность оценить важность окончательного шага, сделанного Фредгольмом*.

I. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

548. Уравнение Вольтерра. Уравнение Вольтерра *второго рода* с параметром λ имеет вид:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds+f(x), \tag{1}$$

где K и f суть данные функции, $\varphi(x)$ — неизвестная функция. Мы предположим, что функция $K(x, y)$, называемая *ядром*, непрерывна внутри

---

* Исторический и библиографический материал по интегральным уравнениям читатель может найти в работах Lalesco (Introduction à la théorie des équations intégrales, Hermann, 1912), а также Heywold et Fréchet (L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique, Hermann, 1912).

В ссылках на эти две работы мы будем указывать только имена авторов.

Можно также указать работу Hans Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (Band 20 des *Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1911) и еще общие изложения теории: Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik, 1911, и Bôcher, Introduction to the study of integral equations, 1909. Я должен еще указать на прекрасную книгу Vivanti, Elementi della theoria delle equazioni integrali lineare (Manuali Hoepli, 1916).

и на сторонах треугольника, ограниченного прямыми $y=a$, $x=b$, $y=x$ $(b>a)$. Дальше (§ 556 и след.) мы покажем, что можно сделать гораздо более общие предположения. Что касается функции $f(x)$, то о ней мы предположим, что она имеет в интервале (a, b) конечное число точек разрыва, а если она не ограничена, то $\int_a^b |f(s)|\,ds$ имеет конечное значение. Требуется определить функцию $\varphi(x)$ для каждого значения x в интервале (a, b).

Применяя метод, к которому мы уже неоднократно прибегали, мы будем искать *формальное* решение уравнения (1), взяв в качестве функции $\varphi(x)$ степенной ряд относительно λ:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\ldots+\lambda^n\varphi_n(x)+\ldots \tag{2}$$

подобно тому, как мы это видели в случае решения уравнений гиперболического типа (§ 494); мы таким путем придем к решению уравнения (1) способом последовательных приближений. Первым приближением функции $\varphi(x)$ будет функция $f(x)$, n-м приближением функции $\varphi(x)$ будет сумма n первых членов ряда (2), полученного этим процессом.

Подставляя ряд (2) в обе части уравнения (1) и приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях λ, мы получим соотношения:

$$\varphi_0(x)=f(x),\quad \varphi_1(x)=K[\varphi_0(x)],\quad \ldots,\quad \varphi_n(x)=K[\varphi_{n-1}(x)], \tag{3}$$

где вообще мы полагаем:

$$K[f(x)]=\int_a^x K(x, s)f(s)\,ds. \tag{4}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет поставленным условиям, то операция $K[f(x)]$ приводит к функции, непрерывной в интервале (a, b) (см. § 556). Соотношения (3) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$, которые все начиная с $\varphi_1(x)$ суть непрерывные функции от x. Полученный таким образом ряд (2) *сходится равномерно в этом интервале при любых значениях* λ.

Положим сначала, что функция $f(x)$ ограничена. Если заменить $K(x, y)$ и $f(x)$ двумя доминирующими функциями $K_1(x, y)$ и $f_1(x)$, то тот же метод, примененный к решению вспомогательного уравнения

$$\Phi(x)=\lambda\int_a^x K_1(x, s)\,\Phi(s)\,ds+f_1(x), \tag{1'}$$

приводит к степенному ряду относительно λ, причем коэфициенты этого ряда будут доминирующими функциями для соответствующих коэфициентов ряда (2). Пусть M и N — два положительных числа, превосходящие модули $|K(x, y)|$ и $|f(x)|$ соответственно. Можно взять в качестве вспомогательного уравнения просто

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x M\Phi(s)\,ds + N, \tag{5}$$

решением которого будет интеграл линейного уравнения

$$\Phi'(x) = \lambda M \Phi(x),$$

обращающийся в N при $x = a$, т. е. функция $Ne^{\lambda M(x-a)}$. Отсюда получается, что каждый коэфициент $\varphi_n(x)$ ряда (2) удовлетворяет условию:

$$|\varphi_n(x)| < N\frac{M^n(x-a)^n}{n!}, \tag{6}$$

что было бы легко получить и непосредственно (см. т. II, § 389).

Итак, ряд (2) сходится равномерно. Отсюда следует, что произведение $K(x, s)\varphi(s)$ можно интегрировать почленно, и, как это следует из самого способа получения коэфициентов, сумма ряда (2) удовлетворяет уравнению (1). *Это решение единственное*. В самом деле, если бы существовало два таких решения, то их разность $\psi(x)$ удовлетворяла бы *однородному* интегральному уравнению:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\psi(s)\,ds. \tag{7}$$

Но это уравнение имеет единственное решение $\psi(x) = 0$.

Действительно, пусть N — верхняя граница функции $|\psi(x)|$, тогда согласно соотношению (6) функция $\psi_n(x)$, которая получается из функции $\psi(x)$ с помощью операции $\lambda K[\ ]$, примененной последовательно n раз, стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Но если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), то все функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, полученные из нее с помощью операции $\lambda K[\ ]$, тождественны с функцией $\psi(x)$.

Таким образом $\psi(x) = 0$.

Если функция $f(x)$ в интервале (a, b) неограничена, то коэфициенты ряда (2) непрерывны, начиная со второго. Для доказательства сходимости достаточно будет исходить из интегрального уравнения:

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\Phi(s)\,ds + \int_a^x K(x, s)f(s)\,ds,$$

полученного из уравнения (1) заменой функции $\varphi(x)$ через $f(x) + \lambda\Phi(x)$. Функция $\varphi(x)$ имеет в интервале (a, b) те же точки разрыва, что и функция $f(x)$.

Обобщения представляются сами собой. Можно, например, вместо одного уравнения с одной неизвестной функцией рассматривать систему n линейных уравнений с n неизвестными функциями:

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^{n} \int_a^x K_{ip}(x, s)\,\varphi_p(s)\,ds + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

тем же способом и так же легко можно доказать, что ряды, полученные последовательными приближениями, равномерно сходятся, если ядра $K_{ip}(x, y)$ непрерывны и если функции $f_i(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функция $f(x)$. Оставив пока в стороне эти и еще другие, мы перейдем к более подробному изучению решения уравнения (1) в наиболее простом случае.

549. Разрешающее ядро (резольвента). Первые коэфициенты $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ряда (2) определяются равенствами:

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x, s) f(s)\,ds, \qquad \varphi_2(x) = \int_a^x K(x, s)\,\varphi_1(s)\,ds.$$

Заменим в первой формуле буквы x и s соответственно буквами s и t и подставим полученное выражение для $\varphi_1(s)$ во вторую формулу. Получим:

$$\varphi_2(x) = \int_a^x ds \int_a^s K(x, s) K(s, t) f(t)\,dt.$$

Согласно общей формуле Дирихле (т. I, § 309), которая и в дальнейшем будет играть очень важную роль, мы имеем:

$$\int_a^x ds \int_a^s F(x, s, t)\,dt = \int_a^x dt \int_t^x F(x, s, t)\,ds. \tag{8}$$

Применяя эту формулу, мы можем написать:

$$\varphi_2(x) = \int_a^x K^{(2)}(x, t) f(t)\,dt, \tag{9}$$

если положим

$$K^{(2)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K(s, y)\,ds. \tag{10}$$

Преобразуя точно так же выражения для $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, ..., мы приходим к бесконечной последовательности функций:

$$K^{(2)}(x, y), \quad K^{(3)}(x, y), \ \ldots, \quad K^{(n)}(x, y), \ \ldots,$$

определяемых рекуррентным соотношением:

$$K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K^{n-1}(s, y)\,ds. \tag{11}$$

Это суть последовательные *повторные ядра* функции $K(x, y) = K^1(x, y)$. Они все непрерывны в той же области, что и $K(x, y)$.

Общее выражение для $\varphi_n(x)$ с помощью n-го повторного ядра имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K^{(n)}(x, s) f(s)\, ds, \tag{12}$$

Это можно показать непосредственно, пользуясь шаг за шагом формулой Дирихле. Формула (2), которая представляет решение уравнения (1), может быть формально записана в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, ds, \tag{13}$$

если положить

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots \tag{14}$$

Для доказательства формулы (13) достаточно показать, что ряд (14) равномерно сходится. Действительно, если M есть верхняя граница функции $|K(x, y)|$, то нетрудно видеть, что абсолютная величина $K^{(n)}(x, y)$ меньше, чем $M \frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}$. Поэтому можно интегрировать почленно ряд*, изображающий произведение $\Gamma(x, s; \lambda) f(s)$. Функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ есть целая функция относительно параметра λ и зависит только от ядра $K(x, y)$. Эта функция называется *разрешающим ядром* или *резольвентой* для ядра $K(x, y)$. Формула (13) действительно дает решение уравнения (1) в явном виде для любой функции $f(x)$, и, таким образом, решение уравнения Вольтерра приводится к составлению резольвенты. Заметим, что эта резольвента, как и само ядро $K(x, y)$, определена только для значений x, заключающихся между a и b, и для $y < x$. Для общности формулы полагают обычно, что $K(x, y) = 0$, $\Gamma(x, y; \lambda) = 0$ при $y > x$ (ср. § 557).

Согласно самому определению разрешающего ядра $\Gamma(x, y; \lambda)$ оно удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s)\, \Gamma(s, y; \lambda)\, ds, \tag{15}$$

которое определяет эту функцию. В самом деле, если представить функцию $\Gamma(x, y; \lambda)$ в виде ряда, расположенного по степеням λ, то, исходя из соотношения (15), можно определить один за другим коэфициенты

* Если функция $f(x)$ ограничена, то это свойство очевидно. Если функция $f(x)$ неограничена, то пусть η будет верхняя граница абсолютной величины остатка $r_n(x, y; \lambda)$ ряда (14), начиная с члена, содержащего λ^n. Имеем:

$$\left| \int_a^x r_n(x, s; \lambda) f(s)\, ds \right| < \eta \int_a^x |f(s)|\, ds,$$

и ряд, следовательно, можно почленно интегрировать, ибо при неограниченном возрастании n величина η стремится к нулю.

при последовательных степенях λ, а это приведет к формуле (11). Несколько дальше (§ 559) мы покажем, что эта резольвента удовлетворяет также функциональному уравнению:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(s, y)\, \Gamma(x, s; \lambda)\, ds, \tag{16}$$

которое также может служить определением этой функции. Заметим, что повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела a.

Примечание. В уравнении (13) можно рассматривать функцию $\varphi(x)$ как данную, а искомой считать функцию $f(x)$. Тогда решение этого интегрального уравнения дается самим уравнением (1). Положим для определенности $\lambda = 1$. Ядром нового интегрального уравнения будет $-\Gamma(x, y; 1)$, а из уравнения (1) следует, что соответствующею резольвентою для того же значения параметра будет $-K(x, y)$ (ср. § 560).

550. Нахождение разрешающих ядер в некоторых частных случаях. Положим, что функция $K(x, y)$ есть многочлен $(n-1)$-й степени относительно y, так что ее можно представить в виде:

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x - y) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x - y)^{n-1}, \tag{17}$$

причем коэфициенты $a_i(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Для определения резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$ введем вспомогательную функцию:

$$u(x, y; \lambda) = \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_y^x \Gamma(t, y; \lambda)(x - t)^{n-1}\, dt + \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!},$$

которая при $x = y$ обращается в нуль вместе со своими $n-2$ первыми производными по x, а производная порядка $n-1$ при $x = y$ равна единице. Кроме того, мы имеем:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \lambda \Gamma(x, y; \lambda).$$

Функциональное уравнение (15) принимает в этом случае вид:

$$\frac{d^n u(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s) \frac{d^n u(s, y; \lambda)}{ds^n}\, ds;$$

применяя к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям, получим:

$$\frac{d^n u(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \left[K(x, s) \frac{d^{n-1} u}{ds^{n-2}} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} \frac{d^{n-2} u}{ds^{n-2}} + \ldots \pm \frac{\partial^{n-1} K}{\partial s^{n-1}} u \right]_{s=y}^{s=x}.$$

Принимая во внимание выражение для $K(x, y)$ и условия, которым удовлетворяет вспомогательная функция $u(x, y; \lambda)$, можно это же соотношение написать в виде:

$$D(u) = \frac{d^n u}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\, u \right] = 0. \tag{18}$$

Функция $u(x, y, \lambda)$ является, таким образом, интегралом линейного уравнения $D(u) = 0$, который удовлетворяет условиям Коши (т. II, § 405). Обозначая этот интеграл через $g(x, y; \lambda)$, мы получим для искомого разрешающего ядра выражение:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, y; \lambda)}{dx^n}. \tag{19}$$

Рассмотрим второй частный случай, когда $K(x, y)$ есть многочлен относительно x:

$$K(x, y) = b_0(y) + b_1(y)(y - x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(y)}{(n-1)!}(y - x)^{n-1} \tag{20}$$

с коэфициентами $b_i(y)$, непрерывными в интервале (a, b). Мы напишем резольвенту в виде $-\frac{1}{\lambda}\frac{d^n u}{dy^n}$, причем вспомогательная функция $u(x, y; \lambda)$ при $y = x$ обращается в нуль вместе с $n-2$ первыми производными, а производная $\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}$ при $y = x$ равна единице. Функциональное уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \lambda \int_y^x K(s, y) \frac{d^n u(x, s; \lambda)}{ds^n} ds - \lambda K(x, y). \tag{21}$$

Применим снова формулу интегрирования по частям, принимая во внимание значение $K(x, y)$ и условия, которым удовлетворяет функция $u(x, y; \lambda)$. Найдем:

$$D_1(u) = \frac{d^n u}{dy^n} + \lambda \left[b_0(y) \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(y) u \right] = 0. \tag{22}$$

Таким образом мы видим, что вспомогательная функция $u(x, y; \lambda)$ есть не что иное как интеграл $g_1(x, y; \lambda)$ уравнения $D_1(u) = 0$, удовлетворяющего условиям Коши, и что искомое разрешающее ядро имеет вид:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n g_1(y, x; \lambda)}{dy^n}. \tag{23}$$

Отсюда видно, как с помощью интегрирования линейного диференциального уравнения n-го порядка вида (18) или (22) можно составить разрешающее ядро для двух типов уравнения Вольтерра.

551. Применение к линейным диференциальным уравнениям. Можно показать и обратно, что решение задачи Коши для линейного диференциального уравнения приводит к решению уравнения Вольтерра. В самом деле, положим, что нужно найти интеграл линейного уравнения

$$D(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \left[a_0(x) \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x) z \right] = f(x), \tag{24}$$

причем известно, что искомая функция z, как и $n-1$ первых ее производных, обращается в нуль при $x = x_0$ (к этой задаче всегда можно привести общую задачу Коши). Если в качестве неизвестной функции взять n производную

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi(x),$$

то найдем, что

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - s)^{n-1} \varphi(s) ds, \\ \frac{d^p z}{dx^p} &= \frac{1}{(n-p-1)!} \int_{x_0}^x (x - s)^{n-p-1} \varphi(s) ds \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

и функция $\varphi(x)$ определится из уравнения Вольтерра, ядро которого имеет в точности вид (17), причем $\lambda=1$. А отсюда уже нетрудно получить результат предыдущего параграфа. Действительно, известно, что решение задачи Коши дается формулой:

$$z=\int_{x_0}^{x} f(s)\,g(x,s)\,ds,$$

где $g(x,s)$ есть функция Коши для линейного уравнения $D(z)=0$. Следовательно, согласно свойствам этой функции $g(x,s)$ имеем:

$$\varphi(x)=\frac{d^nz}{dx^n}=\int_{x_0}^{x}\frac{d^ng(x,s)}{dx^n}f(s)\,ds+f(x),$$

что в точности совпадает с результатом, полученным непосредственно. Если уравнение $D(z)=0$ имеет сопряженное уравнение, то можно также найти самый интеграл $z(x)$ с помощью уравнения Вольтерра (см. упражнение 1).

Отсюда видно, что решение интегрального уравнения (1) является широким обобщением задачи Коши для линейного диференциального уравнения. Положим, что ядро $K(x,y)$ разлагается в ряд по степеням $(x-y)$ с коэфициентами, зависящими от x:

$$K(x,y)=a_0(x)+a_1(x)(x-y)+\ldots+\frac{a_n(x)}{n!}(x-y)^n+\ldots$$

Если мы возьмем только n первых членов ряда, то этому ядру можно поставить в соответствие линейное диференциальное уравнение n-го порядка $D_n(z)=0$, а решение задачи Коши для этого диференциального уравнения, если неограниченно увеличивать число n, приведет совершенно естественно к интегральному уравнению Вольтерра.

Примечание. Прием, с помощью которого линейное диференциальное уравнение приводится к интегральному, применяется и к более общему уравнению:

$$\frac{d^nz}{dx^n}=a_0(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)z+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left[K_0(x,s)z(s)\,ds+\ldots+K_p(x,s)\frac{d^pz}{ds^p}\right]ds+f(x) \qquad (26)$$

в предположении, что $p\leqslant n$. Чтобы найти интеграл этого *интегро-диференциального* уравнения, который при $x=x_0$ обращается в нуль вместе с $n-1$ первыми производными, примем снова в качестве неизвестной функции n-ю производную $\frac{d^nz}{dx^n}=\varphi(x)$.

Применяя формулы (25) и соотношение Дирихле

$$\int_{x_0}^{x}h(x,s)\,ds\int_{x_0}^{s}(s-t)^p\varphi(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt\int_{t}^{x}h(x,s)(s-t)^p\,ds,$$

мы непосредственно придем для определения функции к интегральному уравнению вида (1). Если бы было $p>n$, то, взяв в качестве вспомогательной функции производную p-го порядка, мы пришли бы к интегральному уравнению *первого рода* (см. § 554).

552. Распространение на функции многих переменных. Изложенный метод решения уравнения (1) может быть непосредственно распространен на интегральное уравнение следующего вида:

$$\varphi(x, y) = \lambda \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + f(x, y), \tag{27}$$

где неизвестная функция $\varphi(x, y)$ зависит от двух переменных, а также на уравнение несколько более общего вида:

$$\varphi(x, y) = \lambda\left[\int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \int_0^x K_1(x, y, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi + \int_0^y K_2(x, y, \eta)\,\varphi(x, \eta)\,d\eta\right] + f(x, y), \tag{28}$$

где K, K_1, K_2, f — данные функции, непрерывные в области D, определяемой неравенствами:

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant y.$$

Здесь можно, как и в случае уравнения (1), найти формальное решение уравнения (28) в виде ряда, целого относительно λ, коэфициентами которого будут непрерывные функции переменных x, y; как и в рассмотренном случае, значения этих коэфициентов находятся шаг за шагом с помощью самого уравнения. Чтобы доказать, что полученный таким образом ряд равномерно сходится, обозначим через M верхнюю границу абсолютных значений K, K_1, K_2 в области D и через N — верхнюю границу функции $|f(x, y)|$ и рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$\psi(x, y) = \lambda M\left[\int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \int_0^x \psi(\xi, y)\,d\xi + \int_0^y \psi(x, \eta)\,d\eta\right] + N. \tag{29}$$

Если составить формальное решение уравнения (29) в виде ряда, целого относительно λ, то ясно, что коэфициент при каждой степени λ этого второго ряда будет доминирующей функцией относительно соответствующего коэфициента первого ряда. Поэтому достаточно показать, что интегральное уравнение (29) допускает решение в виде ряда, целого относительно λ, равномерно сходящегося в каждой точке (x, y) рассматриваемой области.

Если мы положим

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

то интегральное уравнение (29) может быть заменено уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \lambda M\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u\right) + N. \tag{30}$$

Как уже было доказано (§ 494), интеграл $u(x, y; \lambda)$ уравнения (30), который вместе со своими первыми производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ обращается в нуль при $x=0$ и при любом y, а также при $y=0$ и при любом x, может быть представлен в виде ряда, целого относительно λ, равномерно сходящегося в любой точке (x, y) области D. Из уравнения (30) следует равномерная сходимость соответствующего ряда для второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, а значит, и для искомой функции $\varphi(x, y)$.

Можно пойти дальше и получить для решения явное выражение, аналогичное формуле (13). В самом деле, достаточно несколько раз применить формулу Дирихле, чтобы получить один за другим коэфициент при различных степенях λ и показать, что коэфициент при λ_ν в разложении этого решения имеет вид (см. упражнение 2):

$$\int_0^x \int_0^y G_n(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^x g_n(x, y; \xi) f(\xi, y)\, d\xi + \int_0^y g'_n(x, y; \eta) f(x, \eta)\, d\eta,$$

где функции G_n, g_n, g'_n зависят только от K, K_1, K_2. Функция $\varphi(x, y)$, следовательно, выразится так:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \left[\int_0^x \int_0^y \Gamma(x, y; \xi, \eta, \lambda) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_0^x \Gamma_1(x, y; \xi, \lambda) f(\xi, y)\, d\xi + \int_0^y \Gamma_2(x, y; \eta, \lambda) f(x, \eta)\, d\eta \right]. \quad (31)$$

Три функции Γ, Γ_1, Γ_2, которые суть целые функции параметра λ, играют здесь ту же роль, как разрешающее ядро. Заметим только, что если K_1 и K_2 равны нулю, то то же можно сказать и о Γ_1 и Γ_2.

Мы приходим к интегральному уравнению вида (28) при отношении интеграла диференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda \left[a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z \right] + f(x, y), \quad (32)$$

который обращается в нуль на двух характеристиках $x=0$, $y=0$. Действительно, если взять в качестве вспомогательной неизвестной вторую производную $\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ искомого интеграла, то эта функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\varphi(x, y) = \lambda \left[\int_0^x \int_0^y c(x, y) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^x b(x, y) \varphi(\xi, y)\, d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_0^y a(x, y) \varphi(x, \eta)\, d\eta \right] + f(x, y),$$

которое представляет частный случай уравнения (28).

Если коэфициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ допускают непрерывные частные производные $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial y}$, то можно также определить функцию $z(x, y)$ из уравнения того же вида. В самом деле, очевидно, что уравнение (32) можно заменить интегродиференциальным уравнением (§ 494):

$$z(x, y) = \lambda \int_0^x \int_0^y \left[c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta} \right] d\xi\, d\eta + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

которое приводится к виду (28) с помощью двукратного интегрирования по частям:

$$z(x, y) = \lambda \left\{ \int_0^x \int_0^y \left[c(\xi, \eta) - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \right] z(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_0^y a(x, \eta) z(x, \eta)\, d\eta + \int_0^x b(\xi, y) z(\xi, y)\, d\xi \right\} + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

553. Задача об обращении определенного интеграла. Уравнением Вольтерра *первого рода* называют уравнение вида:

$$\int_0^x K(x, s) \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{33}$$

где $K(x, y)$ и $f(x)$ — данные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция. Мы берем нижним пределом интеграла нуль, а не какую-нибудь другую постоянную только для определенности. В то время как при решении уравнения второго рода мы предполагали только непрерывность функций $K(x, y)$ и $f(x)$ в некотором интервале (a, b), при изучении уравнения (33) нам придется ввести еще другие требования. Чтобы выяснить необходимость этих новых требований, достаточно рассмотреть наиболее простое уравнение этого типа, получающееся при $K(x, y) = 1$:

$$\int_0^x \varphi(s)\, ds = f(x). \tag{34}$$

Если предположить, что неизвестная функция $\varphi(x)$ только ограничена и интегрируема, то задача оказывается неопределенной, ибо в этом случае можно, не изменяя значения интеграла, произвольно менять значения функции $\varphi(x)$ в конечном и даже бесконечном числе точек интервала интегрируемости, лишь бы только их можно было заключить в конечное число интервалов, сумма которых оставалась бы меньше любого наперед заданного числа ε (т. I, § 74). С другой стороны, функция $f(x)$ не может быть произвольной непрерывной функцией, она должна удовлетворять некоторым условиям, налагаемым на ее производные. Для большей точности в постановке задачи мы будем предполагать в дальнейшем (кроме тех случаев, когда это будет оговорено особо), что искомая функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывна в том интервале, в котором она будет определена. В таком случае, для того чтобы уравнение (34) имело решение в интервале $(0, a)$, необходимо, чтобы функция $f(x)$ обращалась в нуль при $x=0$ и допускала непрерывную производную в том же интервале. Тогда искомым решением будет:

$$\varphi(x)=f'(x).$$

Рассмотрим теперь более общее уравнение:

$$\int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(s)\,ds=f(x) \tag{35}$$

Для того чтобы это уравнение имело своим решением непрерывную функцию $\varphi(x)$, необходимо, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ и чтобы сама функция и ее $n-1$ первых производных обращались в нуль при $x=0$. Если эти условия выполняются, то уравнение (35) имеет своим решением непрерывную функцию $\varphi(x)=f^{(n)}(x)$.

554. Уравнение первого рода. Рассмотрим общее уравнение первого рода вида (33) В этом параграфе мы будем предполагать, что ядро $K(x, y)$ и все его частные производные, с которыми нам придется иметь дело, суть непрерывные функции. Прежде всего очевидно, что для того чтобы уравнение (33) допускало своим решением непрерывную функцию $\varphi(x)$, необходимо должно выполняться условие $f(0)=0$. Кроме того, если ядро $K(x, y)$ допускает непрерывную производную $K'_x(x, y)$, то и левая часть уравнения (33) также допускает непрерывную производную; отсюда следует, что то же условие должно выполняться и для функции $f(x)$. Если это условие выполнено, то, приравнивая производные обеих частей, мы придем к новому уравнению:

$$K(x, x)\varphi(x)+\int_0^x K'_x(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f'(x). \tag{36}$$

И наоборот, каждое решение этого уравнения (36) удовлетворяет также уравнению (33), ибо при $x=0$ обе части последнего обращаются в нуль и, кроме того, имеют одинаковые производные. Уравнение (36) есть уравнение Вольтерра второго рода, и к нему можно применить общий метод § 548, если только $K(0, 0)$ отлично от нуля. Если $K(x, x)$ не обращается в нуль в интервале $(0, h)$, заключенном в интервале $(0, a)$, то, как мы видели, уравнение (36) допускает в этом интервале $(0, h)$ непрерывное решение и притом единственное. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Если $K(0, 0)\neq 0$, $f(0)=0$ и если функции $f(x)$, $K(x, y)$ допускают производные $f'(x)$, $K'_x(x, y)$, непрерывные в интервале $(0, h)$, заключенном в интервале $(0, a)$, внутри которого $K(x, x)$ не обращается в нуль, то уравнение (33) допускает в этом интервале $(0, h)$ непрерывное решение и притом единственное *.

* Эта теорема была впервые установлена Le Roux, Thèse de doctorat (*Annales de l'École Normale*, 1894, стр. 19–22).

Если $K(0, 0) = 0$, то к уравнению (36) нельзя применить результатов § 548. Но если $K(x, x)$ тождественно равно нулю, то уравнение (36) есть опять уравнение первого рода, с которым можно поступать так же, как с первоначальным, если только $K(x, y)$ допускает вторую непрерывную производную $K''_{x^2}(x, y)$. Для того чтобы это уравнение (36) имело непрерывное решение, необходимо, чтобы было $f'(0) = 0$ и, кроме того, чтобы функция $f'(x)$ имела непрерывную производную $f''(x)$. Если эти условия выполнены, то можно снова заменить уравнение (36) другим, полученным диференцированием обеих частей:

$$K'_x(x, x)\varphi(x) + \int_0^x K''_{x^2}(x, s)\varphi(s)\,ds = f''(x), \tag{37}$$

которое представляет уравнение второго рода, если только $K'_x(0, 0)$ не нуль. Если $K''_x(x, x)$ тождественно равно нулю, то можно снова применить тот же прием, и так далее. Таким образом мы составляем ряд последовательных производных по x от ядра $K(x, y)$ до тех пор, пока не придем к производной $K^{(p-1)}_{x^{p-1}}(x, y)$, которая при $x = y$ не обращается тождественно в нуль. Для того чтобы уравнение (33) имело своим решением непрерывную функцию, необходимо, чтобы функция $f(x)$ допускала непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(p-1)}(x)$, которые обращались бы в нуль при $x = 0$. Если это так, то $p - 1$ уравнений полученных диференцированием обеих частей уравнения (33), удовлетворяются при $x = 0$. Если производная $\frac{\partial^p K}{\partial x^p}$ также непрерывна, то непрерывной должна быть и производная $f^{(p)}(x)$, и, диференцируя еще раз, мы придем к уравнению:

$$K^{(p-1)}(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^p K(x, s)}{\partial x^p}\varphi(s)\,ds = f^{(p)}(x), \tag{38}$$

которое представляет собой уравнение второго рода, если только $K^{(p-1)}(0, 0)$ не нуль. Это уравнение (38) допускает непрерывное решение и притом единственное. Переходя шаг за шагом к предыдущим уравнениям, мы найдем, что это решение удовлетворяет всем промежуточным уравнениям, а также первоначальному уравнению (33).

Пример. Предположим, что ядро $K(x, s)$ есть функция Коши $g(x, s)$ для линейного уравнения $D(z) = 0$, т. е. интеграл этого уравнения, который при $x = s$ обращается в нуль со своими $n - 2$ первыми производными, и что его производная $(n - 1)$-го порядка при $x = s$ равна единице.

Согласно предыдущему, для того чтобы уравнение

$$\int_0^x g(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{39}$$

допускало непрерывное решение, необходимо, чтобы функция $f(x)$ и ее $n - 1$ первых производных обращались в нуль при $x = 0$ и чтобы производная $f^{(n)}(x)$

была непрерывна. Тогда искомая функция $\varphi(x)$ определяется уравнением второго рода, полученным n-кратным диференцированием данного уравнения, т. е. уравнением:

$$\varphi(x)+\int_0^x \frac{d^n g(x, s)}{dx^n}\varphi(s)\,ds=f^{(n)}(x). \tag{40}$$

Пусть

$$D(z)=\frac{d^n z}{dx^n}-\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\,z\right]$$

будет левая часть рассматриваемого линейного уравнения. Выше (§ 550) мы видели, что производная $\dfrac{d^n g(x, s)}{dx^n}$ была при значении параметра $\lambda=1$ резольвентой уравнения второго рода, ядром которого была функция

$$K(x, z)=a_0(x)+a_1(x)\frac{x-s}{1}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

И обратно, согласно примечанию на стр. 14, функция $K(x, s)$ является резольвентой уравнения второго рода с ядром $\dfrac{d^n g}{dx^n}$, опять-таки в предположении, что $\lambda=1$. Решение уравнения (40) имеет, следовательно, вид:

$$\varphi(x)=f^{(n)}(x)-\int_0^x\left[a_0(x)+a_1(x)(x-s)+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]f^{(n)}(s)\,ds,$$

т. е.

$$\varphi(x)=D[f(x)]$$

(ср. т. II, § 405).

Если $K(0, 0)=0$, но $K(x, x)$ тождественно не нуль, то изложенный метод не применим. Достаточно широкий частный случай рассмотрен Вольтерра и Хольмгреном, а позже — Лалеско с помощью процесса последовательных приближений. Мы здесь, однако, рассматривать его не будем, а отошлем читателя к мемуару Лалеско.

Уравнение (33) можно также привести к уравнению второго рода, с помощью интегрирования по частям. Представим для этого искомую функцию $\varphi(x)$ как производную $\dfrac{du}{dx}$ некоторой функции $u(x)$, причем мы примем, что $u(0)=0$. Интегрируя уравнение (33) по частям, мы получим:

$$K(x, x)\,u(x)-\int_0^x K'_s(x, s)\,u(s)\,ds=f(x). \tag{41}$$

Это опять уравнение второго рода, если только $K(0, 0)$ не нуль. Если ядро $K(x, s)$ при $s=x$ вместе со своими $n-2$ первыми производными по s обращается в нуль тождественно, а производная $\dfrac{\partial^{n-1}K}{\partial s^{n-1}}$ при $x=s=0$ не нуль, то можно привести уравнение (33) к уравнению второго рода, представив искомую функцию $\varphi(x)$ как n-ю производную некоторой вспомогательной функции $u(x)$, которая при $x=0$ обращается в нуль вместе со своими $n-1$ первыми производными. Можно также применить метод последовательных приближений, (E. Picard, *Comptes Rendus*, t. 139, стр. 245, 1904).

555. Обобщенное уравнение Абеля. В предыдущем параграфе мы с помощью одного или нескольких диференцирований переходили от уравнения первого рода (33) к уравнению (36) или (38). Рассмотрим, к чему приведет обратная операция, примененная к тому же уравнению (33). Следуя общему приему, для того чтобы последовательно интегрировать n раз в пределах от 0 до x, достаточно заменить в обеих частях равенства x на t, умножить на $\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ и затем интегрировать по t в пределах от 0 до x (т. II, § 384). Мы получим новое уравнение:

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}\,dt \int_0^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds = \int_0^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt,$$

которое после применения формулы Дирихле принимает вид:

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds \left[\int_s^x K(t, s)\,(x-t)^{n-1}\,dt\right] = \int_0^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{42}$$

Это опять уравнение первого рода, ядром которого является

$$K_1(x, s) = \int_s^x (x-t)^{n-1} K(t, s)\,dt.$$

При $s = x$ это ядро и его частные производные по x до $(n-1)$-го порядка обращаются в нуль. Чтобы решить уравнение (42) относительно $\varphi(x)$, нужно будет согласно общему методу диференцировать обе его части по крайней мере $n+1$ раз. Этот прием, таким образом, оказывается бесполезным, если ядро $K(x, y)$ непрерывно. Но тот же прием, соответственным образом видоизмененный, дает возможность решить обобщенное уравнение Абеля (т. I, § 137):

$$\int_0^x \frac{G(x, s)}{(x-s)^{\alpha}}\,\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{43}$$

где $G(x, s)$ есть непрерывная функция, не обращающаяся тождественно в нуль при $s = x$, и где α — положительное число, меньшее единицы. Так как в преобразовании, изложенном выше, не предполагается, что n есть целое положительное число, то мы применим его к уравнению (43), полагая $n = \alpha$. Другими словами, заменим в этом уравнении x на t, умножим обе части на $(x-t)^{\alpha-1}$ и будем интегрировать в пределах от 0 до x. Мы придем к новому уравнению:

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds \left[\int_s^x \frac{G(t, s)\,dt}{(t-s)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\right] = \int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{44}$$

Это опять уравнение первого рода с ядром

$$K_1(x, s) = \int_s^x \frac{G(t, s)\,dt}{(t-s)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Это ядро уже не обращается в бесконечность при $x=s$, ибо если положить

$$t = s + (x-s)z,$$

то мы получим:

$$K_1(x, s) = \int_0^1 \frac{G[s+(x-s)z, s]\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{1-\alpha}}.$$

Оно также при $x=s$ не обращается тождественно в нуль. Следовательно, к нему можно применить общий метод, если только $G(0, 0)$ не равно нулю и если функция G диференцируема относительно x. Диференцируя обе части уравнения (44) по x, мы придем к уравнению второго рода:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)G(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K_1(x, s)}{\partial x}\varphi(s)\,ds = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]. \quad (45)$$

Обратно, всякое решение этого уравнения (45) удовлетворяет также уравнению (43), ибо разность

$$h(x) = \int_0^x \frac{G(x, s)}{(x-s)^{\alpha}}\varphi(s)\,ds - f(x)$$

удовлетворяет уравнению:

$$\int_0^x \frac{h(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = 0 \quad (46)$$

в силу того способа, каким соотношение (44) было получено из соотношения (43). Применим к этому уравнению тот же метод, т. е. умножим обе части на $(s-x)^{-\alpha}$ и проинтегрируем от 0 до s. После перемены порядка интегрирования мы получим $\int_0^x h(t)\,dt = 0$, и, следовательно, $h=0$.

В частном случае уравнения Абеля мы имеем $G=1$, и, следовательно, $K_1 = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$; уравнение (44) имеет таким образом вид:

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (47)$$

Отсюда непосредственно получаем:

$$\varphi(x)=\frac{\sin a\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]. \tag{48}$$

Производную в правой части можно легко вычислить с помощью преобразования, которым мы уже пользовались в частном случае при $a=\frac{1}{2}$ (т. I, § 100 и 137); найдем, что

$$\varphi(x)=\frac{\pi}{\sin a\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^x\frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right]. \tag{49}$$

Для более полного изучения интегральных уравнений с одним или несколькими переменными пределами отошлем читателя к работе Вольтерра „Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles“, 1913. Можно также рекомендовать книгу Лалеско и диссертацию Броуна *. В дальнейшем мы будем изучать уравнения с постоянными пределами, которые имеют особенно важное значение по своим многочисленным приложениям в анализе и математической физике.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ.

556. Требования, налагаемые на ядро. Прежде всего мы предположим, что ядро $K(x, y)$ ограничено в области D, заключенной между прямыми $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=b$ $(a<b)$, и что все точки разрыва, если они существуют, расположены на *конечном* числе кривых, которые могут быть двух родов. Первые, которые мы будем называть *линиями разрыва первого вида*, пересекаются прямыми, параллельными осям координат, в конечном числе точек. Линии *второго вида* суть отрезки прямых, параллельных одной из осей. Мы будем говорить о ядре, что оно первого вида или что оно *почти всюду* ** непрерывно, если все его линии разрыва суть только линии первого вида; ядро будет второго вида, если оно имеет линии разрыва второго вида. Отсюда ясно, что если ядро имеет конечное число точек разрыва, то оно первого вида.

Пусть $x=x_0$ будет линией разрыва второго вида; предположим, далее, что $K(x_0+\varepsilon, y)$ имеет своими пределами $K(x_0\pm 0, y)$, когда ε стремится к нулю, и что обе эти функции интегрируемы. Мы предположим, кроме того, что $K(x_0, y)$ тоже интегрируемо, и сделаем те же предположения относительно линий разрыва, параллельных оси Ox. Ясно, что если ядро $K(x, y)$ удовлетворяет всем этим условиям, то оно интегрируемо как в отношении обоих переменных, так и относительно каждого переменного в отдельности.

* Browne, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1913.
** Heywood et Fréchet, стр. 6.

Рассмотрим сначала ядро $K(x, y)$ первого вида. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), т. е. либо ограничена, либо во всяком случае такова, что $\int_a^b |f(s)|\,ds$ имеет конечное значение. Покажем, что *функция*

$$F(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds$$

непрерывна в интервале (a, b). Мы предположим для простоты, что ядро $K(x, y)$ имеет единственную точку разрыва y_0 на прямой $x = x_0$. Мы можем написать:

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^{y_1} [K(x, s) - K(x_0, s)] f(s)\,ds + \int_{y_1}^{y_2} + \int_{y_2}^{b},$$

где y_1 и y_2 находятся соответственно между a и y_0, y_0 и b. Пусть M будет верхней границей для $|K|$, тогда

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \{K(x, s) - K(x_0, s)\} f(s)\,ds \right| < 2M \int_{y_1}^{y_2} |f(s)|\,ds.$$

Выберем теперь y_1 и y_2 так близко к y_0, чтобы правая часть была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$; при таком выборе y_1 и y_2 можно указать такое число η, чтобы для значений x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \eta$, и для любых значений y из интервалов (a, y_1), (y_2, b)* абсолютная величина разности $|K(x, y) - K(x_0, y)|$ была меньше любого положительного числа. Отсюда легко заключить, что функция $F(x)$ непрерывна. Совершенно аналогично можно доказать, что $\int_a^b K(s, y) f(s)\,ds$ есть непрерывная функция от y в интервале (a, b).

Пусть $K(x, y)$ и $K_1(x, y)$ будут два ядра первого вида. Покажем, что *функция*

$$F(x, y) = \int_a^b K(x, s) K_1(s, y)\,ds \tag{50}$$

есть непрерывная функция от x и y в области D. Действительно, возьмем две близкие точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) в этой области. Можно написать, что

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = \int_a^b K(x_1, s) [K_1(s, y_1) - K_1(s, y_0)]\,ds +$$
$$+ \int_a^b K_1(s, y_0) [K(x_1, s) - K(x_0, s)]\,ds,$$

* Строгое доказательство читатель найдет в упражнении 3.

и аналогично предыдущему показать, что правая часть стремится к нулю, коль скоро стремятся к нулю разности $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$.

С ядром второго вида дело обстоит несколько иначе. Если $K(x, y)$ имеет своими линиями разрыва отрезки, параллельные оси Oy, то функция

$$F(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds$$

опять *непрерывна* в точке $x = x_0$, если это ядро имеет только конечное число точек разрыва на прямой $x = x_0$. Но если вся эта прямая есть линия разрыва, то

$$F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0) = \int_a^b [K(x_0 + \varepsilon, s) - K(x_0, s)] f(s)\, ds,$$

и, следовательно, если ε будет стремиться к нулю, то мы получим:

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = \int_a^b [K(x_0 + 0, s) - K(x_0, s)] f(s)\, ds,$$

т. е. для функции $F(x)$ точка x_0 есть точка разрыва первого рода.

Пусть будут, далее, $K(x, y)$ и $K_1(x, y)$ два ядра, из которых по крайней мере одно имеет линии разрыва второго вида. Функция $F(x, y)$, определяемая формулой (50), непрерывна в любой точке (x_0, y_0), которая не лежит ни на одной линии разрыва этого вида обоих ядер. Положим, далее, что прямая $x = x_0$ есть линия разрыва, например, для ядра $K(x, y)$, имеем:

$$F(x_0 + \varepsilon, y) - F(x_0, y) = \int_a^b K_1(s, y) \left\{ K(x_0 + \varepsilon, s) - K(x_0, s) \right\} ds,$$

и правая часть имеет своим пределом

$$\int_a^b K_1(s, y) \left\{ K(x_0 + 0, s) - K(x_0, s) \right\} ds,$$

т. е. функцию от y, которая имеет только конечное число точек разрыва в интервале (a, b), согласно только что проведенному рассуждению.

Итак, линиями разрыва функции $F(x, y)$ в области D могут быть только линии разрыва второго вида одного из ядер $K(x, y)$ или $K_1(x, y)$.

557. Решение с помощью последовательных приближений. Метод последовательных приближений, с помощью которого мы решили уравнение (1) Вольтерра, может быть непосредственно распространен на уравнение Фредгольма:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds + f(x), \tag{51}$$

в котором ядро $K(x, y)$ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям, о которых речь была выше. Но только вместо ряда, который всегда сходится, мы здесь приходим, вообще говоря, к целому ряду относительно λ, имеющему *конечный* радиус сходимости. В следующей главе мы будем подробно изучать свойства той аналитической функции параметра λ, которую здесь приходится ввести.

Предположим на время, что абсолютная величина λ меньше радиуса сходимости ряда.

В приложениях важно не ограничиваться теми случаями, когда и ядро $K(x, y)$ и функция $f(x)$ являются непрерывными. Вот почему мы останавливались на условиях несколько более широких, а впоследствии вынуждены будем их еще расширить. Уравнение (1) Вольтерра представляет частный случай уравнения (51), если мы предположим, что для $y > x$ ядро $K(x, y)$ равно нулю. Все результаты, которые были получены для уравнения (1), представляют не что иное, как частные случаи более общих результатов, и все теоремы, которые мы получим, будут справедливы также и для уравнения Вольтерра, если только принять во внимание частный вид его ядра.

Можно, как и раньше, получить формальное решение уравнения (51) в виде ряда относительно λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots, \tag{52}$$

коэфициенты которого определяются один за другим с помощью рекуррентной формулы:

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds, \tag{53}$$

причем $\varphi_0(x) = f(x)$. Все функции $\varphi_n(x)$, начиная с $\varphi_1(x)$, ограничены и интегрируемы и даже непрерывны, если $K(x, y)$ имеет линии разрыва только первого вида. Эти коэфициенты $\varphi_n(x)$ приводят к соответствующим доминирующим функциям — коэфициентам $\Phi_n(x)$ ряда

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \ldots + \lambda^n\Phi_n(x) + \ldots,$$

который дает формальное решение вспомогательного уравнения

$$\Phi(x) = \lambda\int_a^b M\Phi(s)\,ds + F(x), \tag{51'}$$

где M есть верхняя граница для $K(x, y)$, а $F(x)$ — интегрируемая функция, доминирующая относительно функции $f(x)$, например $|f(x)|$. Всякое решение этого вспомогательного уравнения имеет, очевидно, вид $F(x) + C$, причем значение постоянного C определится непосредственной подстановкой. Мы получим, таким образом, решение уравнения (51):

$$\Phi(x) = F(x) + \frac{\lambda M\int_a^b F(s)\,ds}{1 - \lambda M(b-a)},$$

которое разлагается в ряд вида (52), если только значение λ удовлетворяет условию:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \tag{54}$$

Если λ удовлетворяет этому условию, то и ряд (52) сам равномерно сходится, и, следовательно, его сумма $\varphi(x)$ представляет решение рассматриваемого уравнения. Подобно тому, как мы это делали в § 548, можно и здесь показать, что если λ удовлетворяет условию (54), то это решение единственное. Если ядро почти всюду непрерывно, то функция $\varphi(x)$ имеет в интервале (ab) те же точки разрыва, что и функция $f(x)$.

558. Повторные ядра. Формулы для определения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют вид:

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds, \quad \varphi_2(x) = \int_a^b K(x, t)\, \varphi_1(t)\, dt.$$

Если теперь заменить в первой из них x на t, подставить во вторую значение $\varphi_1(t)$ и затем поменять порядок интегрирований *, то мы получим для $\varphi_2(x)$ новое выражение:

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K^{(2)}(x, s) f(s)\, ds,$$

$$K^{(2)}(x, s) = \int_a K(x, t) K(t, s)\, dt.$$

Точно так же можно показать, что выражение для $\varphi_3(x)$ имеет вид:

$$\varphi_3(x) = \int_a^b K^{(3)}(x, s) f(s)\, ds,$$

где

$$K^{(3)}(x, s) = \int_a^b K(x, t) K^{(2)}(t, s)\, dt.$$

Мы приходим, таким образом, к бесконечной последовательности ядер:

$$K^{(1)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(2)}(x, y), \ \ldots, \ K^{(n)}(x, y), \ \ldots,$$

которые все получаются из первого с помощью рекуррентной формулы:

$$K^{(n)}(x, y) = \int_a^b K(x, t) K^{(n-1)}(t, y)\, dt. \tag{55}$$

Это — последовательные *повторные ядра* функции $K(x, y)$. Они все ограничены в области D и непрерывны в этой области, если функция $K(x, y)$ почти всюду непрерывна. Вообще они непрерывны в любой

* Ясно, что при таких предположениях, которые сделаны относительно ядра, эта операция здесь законна; ее можно применить и при более широких условиях, а следовательно, и все следствия будут также справедливы.

точке, не лежащей на линии разрыва второго вида функции $K(x, y)$. Из определения этих ядер легко можно получить некоторые их свойства, которые будут нам впоследствии полезны. Так, подсчитывая одно за другим повторные ядра, можно написать, что

$$K^{(n)}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x_1, t_1) K(t_1, t_2) \ldots K(t_{n-1}, y)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1};$$

отсюда с помощью простой перемены порядка интегрирований мы получаем, что для любых целых и положительных значений μ и ν имеет место соотношение:

$$K^{(\mu+\nu)}(x, y) = \int_a^b K^{(\mu)}(x, t) K^{(\nu)}(t, y)\, dt, \tag{56}$$

и эту последнюю формулу легко было бы еще обобщить. Так, например, ядра $K^{(2\mu)}(x, y)$, $K^{(3\mu)}(x, y)$ получаются последовательными повторениями из $K^{(\mu)}(x, y)$ *.

559. Разрешающее ядро. Легко показать, что выражение для коэфициента $\varphi_n(x)$ при λ^n в ряде (52) имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K^{(n)}(x, s) f(s)\, ds. \tag{57}$$

В самом деле, если предположить, что формула верна для $\varphi_n(x)$, то согласно рекуррентной формуле (53) имеем:

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t)\, dt = \int_a^b \int_a^b K(x, t) K^{(n)}(t, s) f(s)\, ds\, dt,$$

т. е.

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b f(s) K^{(n+1)}(x, s)\, ds.$$

Приняв это во внимание, рассмотрим ряд:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \cdots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \cdots \tag{58}$$

Из закона составления коэфициентов этого ряда следует, что если M есть верхняя граница для $|K(x, y)|$, то $|K^{(n)}(x, y)|$ будет меньше $M^n(b-x)^{n-1}$ в каждой точке области D. Ряд (58), следовательно,

* В частном случае уравнения Вольтерра, где для $y > x$ значение $K(x, y) = 0$, ясно, что все последовательные повторные ядра также равны нулю при $y > x$, и рекуррентное соотношение (55) обращаются в соотношение (11). Резольвента $\Gamma(x, y; \lambda)$ при $y > x$ также равна нулю, и функциональные уравнения (60) и (61), которые ниже будут получены, обращаются в уравнения (15) и (16) § 549.

сходится равномерно * в этой области, если параметр λ удовлетворяет условию (54). Поэтому можно интегрировать почленно (§ 549) ряд, выражающий разложение произведения $\Gamma(x, s; \lambda) f(s)$, и формула (52), которая дает решение интегрального уравнения, принимает вид:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, ds. \tag{59}$$

Функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ называется также *резольвентой* или *разрешающим ядром* уравнения (51), а формула (59) дает явное решение интегрального уравнения с помощью резольвенты. Но эта формула (59) верна только для таких значений параметра, которые по модулю не превосходят определенного предела, ибо ряд (58), вообще говоря, не

---

* Э. Шмидт указал нижнюю границу для радиуса сходимости ряда (58), которая больше границы (54). Метод Шмидта основан на неравенстве Шварца:

$$\left[\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b \varphi^2(x)\,dx, \tag{A}$$

которое можно получить, если записать, что квадратичная форма относительно α и β

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta\varphi(x)]^2\,dx$$

есть определенная форма, и которое непосредственно распространяется на кратные интегралы, если только область интеграции всех трех интегралов одна и та же. Применим неравенство Шварца к формуле, которая дает n-е повторное ядро $K^{(n)}(x, y)$. Мы получаем:

$$[K^{(n)}(x, y)]^2 \leqslant \int_a^b [K^{(n-1)}(t, y)]^2\,dt \times \int_a^b [K(x, t)]^2\,dt$$

и, следовательно,

$$\int_a^b\int_a^b [K^{(n)}(x, y)]^2\,dx\,dy \leqslant \int_a^b\int_a^b [K^{(n-1)}(t, y)]^2\,dy\,dt \times \int_a^b\int_a^b [K(x, t)]^2\,dx\,dt.$$

Применяя последовательно эту последнюю формулу, мы приходим к неравенству:

$$\int_a^b\int_a^b [K^{(n)}(x, y)]^2\,dx\,dy \leqslant \left\{\int_a^b\int_a^b [K(x, y)]^2\,dx\,dy\right\}^n. \tag{B}$$

С другой стороны, из формулы (56) и аналогичных соотношений мы получаем:

$$K^{(n)}(x, y) = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,K^{(n-2)}(s, t)\,K(t, y)\,ds\,dt$$

и, следовательно, применяя неравенство Шварца к двойным интегралам, получим, что

$$[K^{(n)}(x, y)]^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b [K^{(n-2)}(s, t)]^2\,ds\,dt \times \int_a^b\int_a^b [K(x, s)\,K(t, y)]^2\,ds\,dt. \tag{C}$$

сходится для любых значений λ, как это имело место в случае уравнения Вольтерра. Напротив того, при произвольном ядре $K(x, y)$ он имеет конечный радиус сходимости, так что формула (59) только частично решает задачу. Полное ее решение будет дано в следующей главе. Существуют, однако, ядра, отличные от ядер Вольтерра, для которых формула (59) дает решение интегрального уравнения при любом значении λ. Таков случай ядра, *ортогонального самому себе*, т. е. такого, для которого $K^{(2)}(x, y)$ тождественно равно нулю. В этом случае все остальные повторные ядра также нули, и разрешающее ядро обращается в функцию $K(x, y)$ *.

Предположим, что λ удовлетворяет соотношению (54) или, общее, что ряд (58) равномерно сходится в области D для любого значения этого параметра. Функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ удовлетворяет двум функциональным уравнениям:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\Gamma(t, y; \lambda)\,dt, \tag{60}$$

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(t, y)\,\Gamma(x, t, \lambda)\,dt. \tag{61}$$

Чтобы доказать, например, первое, достаточно в формуле (58) заменить x на t, умножить обе части на $K(x, t)$ и проинтегрировать почленно в пределах от a до b. Второе устанавливается совершенно аналогично. С помощью каждого из этих соотношений легко проверить,

---

Сопоставляя неравенства (B) и (C), мы приходим, наконец, к неравенству

$$[K^{(n)}(x, y)]^2 \leqslant \left\{\int_a^b\int_a^b [K(x, y)]^2\,dn\,dy\right\}^{n-2} \times \int_a^b [K(x, s)]^2\,ds \times \int_a^b [K(t, y)]^2\,dt,$$

которое можно написать в виде

$$|K^{(n)}(x, y)| \leqslant L^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{N},$$

если положить

$$L = \int_a^b\int_a^b [K(x, y)]^2\,dx\,dy, \qquad N = \int_a^b [K(x, s)]^2\,ds \times \int_a^b [K(t, y)]^2\,dt.$$

Итак, ряд (58) сходится равномерно во всей области D, если только абсолютная величина λ меньше чем $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

* Если пределы a и b суть 0 и π, то ядро

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \cos ny,$$

в котором ряд $\Sigma\,|a_n|$ сходится, ортогонально самому себе. Для ядра

$$K(x, y) = a_1 \sin x \sin 2y + a_2 \sin 2x \sin 3y + \ldots + a_p \sin px \sin (p+1)y$$

резольвента $\Gamma(x, y\ \lambda)$ есть многочлен относительно λ степени $p - 1$.

что функция $\varphi(x)$, определяемая формулой (59), удовлетворяет интегральному уравнению (51) и что, кроме того, это решение единственное, в предположении, конечно, что ряд (58) для рассматриваемого значения λ сходится. Вычисление ведется в обоих случаях совершенно одинаково; мы приведем доказательство только для второго случая.

Пусть $\varphi(x)$ будет решением уравнения (51). Из этого уравнения мы получаем, что

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\varphi(s)\,ds = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\,ds + \lambda \int_a^b\int_a^b K(s, t)\Gamma(x, s; \lambda)\varphi(t)\,dt\,ds,$$

или, принимая во внимание формулу (61):

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\varphi(s)\,ds = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\,ds + \int_a^b \varphi(t)\,[\Gamma(x, t; \lambda) - K(x, t)]\,dt,$$

т. е.

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\,ds = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt.$$

Из этого равенства и из самого уравнения (51) мы приходим к формуле (59) и получаем таким образом результат, полученный нами ранее другим путем: *для каждого значения λ, достаточно малого по абсолютной величине, уравнение* (51) *допускает решение, и притом единственное, и это решение определяется формулой* (59).

Если переставить переменные x и y в ядре $K(x, y)$, то получится новое ядро $K(y, x)$, вообще говоря, отличное от первого. Соответствующее уравнение Фредгольма

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds + g(x) \tag{62}$$

называется *союзным* уравнению (51). Легко видеть, что ядра, которые получаются повторением ядра $K(y, x)$, получаются из повторных ядер $K(x, y)$ соответствующего порядка, если переставить местами переменные x и y, так что резольвента уравнения (62) есть $\Gamma(y, x; \lambda)$. Выводы будут совершенно те же, что и для уравнения (51). Если абсолютная величина λ достаточно мала, то уравнение (62) допускает решение, и притом единственное, которое дается формулой:

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) g(s)\,ds. \tag{63}$$

В частном случае уравнения Вольтерра ядро $K(y, x)$ при $y < x$ равно нулю, и союзное уравнение есть опять уравнение Вольтерра:

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_x^b K(s, x)\psi(s)\,ds.$$

560. Свойства разрешающих ядер. Из разложения (58) разрешающего ядра можно получить еще другие важные свойства этой функции. Доказательство предполагает, что модуль λ меньше радиуса сходимости, но самые свойства по самой своей природе сохраняются во всей области определения аналитической функции $\Gamma(x, y; \lambda)$ параметра λ. Пусть $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ будет разрешающее ядро уравнения Фредгольма, в котором ядром является функция $K^{(n)}(x, y)$. Согласно приведенному выше имеем:

$$\Gamma_n(x, y; \lambda) = K^{(n)}(x, y) + \lambda K^{(2n)}(x, y) + \ldots + \lambda^{(p-1)} K^{(pn)}(x, y) + \ldots$$

Эта функция $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ очень просто выражается через $\Gamma(x, y; \lambda)$. Действительно, умножим обе части формулы (58) на λ и заменим в ней последовательно λ на $\omega\lambda$, $\omega^2\lambda, \ldots, \omega^{n-1}\lambda$, где ω есть первообразный корень уравнения $\omega^n = 1$. Складывая почленно полученные равенства, мы после преобразований получим:

$$n\lambda^n \Gamma_n(x, y; \lambda^n) = \lambda [\Gamma(x, y; \lambda) + \omega\Gamma(x, y; \omega\lambda) + \ldots + \omega^{n-1} \Gamma(x, y; \omega^{n-1}\lambda)],$$

а затем, заменив λ на $\lambda^{\frac{1}{n}}$, найдем, что

$$\Gamma_n(x, y; \lambda) = \frac{\Gamma\left(x, y; \lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \omega\Gamma\left(x, y; \omega\lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \ldots + \omega^{n-1}\Gamma\left(x, y; \omega^{n-1}\lambda^{\frac{1}{n}}\right)}{n\lambda^{1-\frac{1}{n}}}. \quad (64)$$

Обратно, из $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ можно получить $\Gamma(x, y; \lambda)$. В самом деле, имеем:

$$\int_a^b K^{(i)}(x, s)\Gamma_n(s, y; \lambda)ds = K^{(n+i)}(x, y) + \lambda K^{(2n+i)}(x, y) + \lambda^2 K^{(3n+i)}(x, y) + \ldots,$$

и, следовательно, группируя в формуле (58) члены по n, начиная с n-го, ее можно записать в виде:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2} K^{(n-1)}(x, y) +$$
$$+ \lambda^{n-1}\Gamma_n(x, y; \lambda^n + \lambda^n)\int_a^b K(x, s)\Gamma_n(s, y; \lambda^n)\,ds + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{2n-2}\int_a^b K^{(n-1)}(x, s)\Gamma_n(s, y; \lambda^n)\,ds$$

или в виде:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = H(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1}\Gamma_n(x, y; \lambda^n) + \lambda^n\int_a^b H(x, s; \lambda)\Gamma_n(s, y; \lambda^n)\,ds, \quad (65)$$

если положить

$$H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2} K^{(n-1)}(x, y). \quad (66)$$

Вот еще другое важное свойство, доказательство которого очень просто. Будем рассматривать функцию $\Gamma(x, y; \lambda)$ как ядро и применим к ней изложенный процесс повторения ядер. Мы получим последовательность функций, первая из которых $\Gamma^{(1)}(x, y; \lambda)=\Gamma(x, y; \lambda)$ и для которых мы введем аналогичные обозначения:

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda),\ \Gamma^{(3)}(x, y; \lambda), \ldots,\ \Gamma^{(n)}(x, y; \lambda), \ldots$$

Эти функции определяются одна за другой из рекуррентного соотношения:

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda)=\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\,\Gamma^{(n-1)}(s, y; \lambda)\,ds.$$

Согласно этому рекуррентному закону и выражениям для последовательных повторных ядер нетрудно видеть, что

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda)=\frac{\partial\Gamma}{\partial\lambda},\quad \Gamma^{(3)}(x, y; \lambda)=\frac{1}{1\cdot 2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\lambda^2}, \ldots$$

и вообще

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda)=\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}\Gamma}{\partial\lambda^{n-1}}.$$

Следовательно, разложение функции $\Gamma(x, y; \lambda+\mu)$ в ряд Тейлора по степеням λ имеет следующий вид:

$$\Gamma(x,y;\lambda+\mu)=\Gamma(x,y;\mu)+\lambda\Gamma^{(2)}(x,y;\mu)+\ldots+\lambda^{n-1}\Gamma^{(n)}(x,y;\mu)\ldots \tag{67}$$

Таким образом, *если рассматривать* $\Gamma(x, y; \mu)$ *при определенном значении* μ *как ядро уравнения Фредгольма, то соответствующим разрешающим ядром будет* $\Gamma(x, y; \lambda+\mu)$. Можно поэтому обобщить функциональные соотношения (60) и (61), которые представляют не что иное, как частные случаи общего соотношения:

$$\Gamma(x, y; \lambda+\mu)=\Gamma(x, y; \mu)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)\,\Gamma(t, y; \lambda+\mu)\,dt. \tag{68}$$

Полагая $\mu=0$, мы получим формулу (60). Заменив λ на $-\lambda$ и μ на λ, мы получим формулу (61). Формулу (68) можно еще написать в несколько более симметричной форме, если заменить μ на λ и λ на $\lambda'-\lambda$:

$$\Gamma(x, y; \lambda')-\Gamma(x, y; \lambda)=(\lambda'-\lambda)\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\,\Gamma(t, y; \lambda')\,dt. \tag{69}$$

Достаточно теперь приближать λ' к λ, и мы получаем интегро-дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial\Gamma(x, y; \lambda)}{\partial\lambda}=\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\,\Gamma(t, y; \lambda)\,dt, \tag{70}$$

которое вместе с условием $\Gamma(x, y; 0)=K(x, y)$ определяет резольвенту, ибо если разложить Γ в ряд относительно λ, то, принимая во внимание эти два условия, мы как раз придем к разложению (58).

Примечание I. Формулы (51) и (59) могут быть рассматриваемы как обратные одна относительно другой. В самом деле, будем в соотношении (59) рассматривать функцию $\varphi(x)$ как данную, а $f(x)$ — как неизвестную и запишем его в несколько более общей форме:

$$f(x)=\varphi(x)+\mu\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)f(s)\,ds. \tag{71}$$

Это есть уравнение Фредгольма с ядром $\Gamma(x,\ y;\ \lambda)$. Его резольвентой, как это нетрудно показать, будет $\Gamma(x,\ y;\ \lambda+\mu)$, и для значения параметра $\mu=-\lambda$ она принимает значение $\Gamma(x,\ y;\ 0)=K(x,\ y)$. Таким образом формула, выражающая решение уравнения (59), совпадает с уравнением (51).

Примечание II. Согласно предыдущему формулы (68) и (69) доказаны только для тех случаев, когда значения λ, λ', μ по абсолютной величине достаточно малы. Но так как обе части каждой из этих формул представляют аналитические функции этих параметров, то ясно, что каждое равенство остается справедливым во всей области существования резольвенты. Заметим еще, что эти соотношения не зависят от первоначального ядра $K(x, y)$. Всякая функция $\Gamma(x,\ y;\ \lambda)$, которая удовлетворяет этим соотношениям, дает возможность написать явное решение бесконечного множества интегральных уравнений. Достаточно для этого дать параметру такое частное значение λ_0, чтобы функция $\Gamma(x,\ y;\ \lambda)$ была в окрестности этой точки голоморфна, и взять в качестве ядра $\Gamma(x,\ y;\ \lambda_0)$. Соответствующей резольвентой будет $\Gamma(x,\ y;\ \lambda_0+\lambda)$.

561. Неограниченные ядра. В наиболее важных приложениях встречаются интегральные уравнения, в которых ядром служит неограниченная функция, хотя и интегрируемая. Если процесс последовательных приближений, изложенный выше (§ 557), приводит к функциям $\varphi_n(x)$, имеющим конечное значение, то формулы (52) и (59) дают и в этом случае формальное решение интегрального уравнения. Это формальное решение годится для очень широкого класса случаев, когда все ядра, полученные из ядра $K(x,y)$ последовательными повторениями, начиная с некоторого определенного, например $K^{(n)}(x,\ y)$, остаются ограниченными. Тогда в ряду (58) только некоторое число членов вначале может не быть конечным, но начиная с члена, содержащего λ^{n-1}, все коэфициенты остаются ограниченными. Ряд, составленный из этих членов, сходится равномерно, если только $|\lambda|$ остается меньше определенной границы. В самом деле, пусть M будет верхняя грань для $K(x,y)$. Тогда непосредственно видно, что ряд, составленный из членов, взятых группами по n, начиная с $\lambda^{n-1}K^{(n)}(x,\ y)$, равномерно сходится, если только $M(b-a)|\lambda^n|$ будет меньше единицы; то же можно сказать о различных рядах, полученных из данного ряда группированием по n членов, начиная с $\lambda^n K^{(n+1)}(x,y),\ \ldots,\ \lambda^{2n-2}K^{(2n-1)}(x,y)$. Рассуждения предыдущих параграфов остаются в силе, и для достаточно малых значений $|\lambda|$ формула (59) дает решение интегрального уравнения. Все свойства разрешающего ядра, которые вытекают из разложения в ряд (58), остаются в силе в более широком случае неограниченного ядра, если только радиус сходимости этого ряда отличен от нуля; как мы только что видели, это имеет место в тех случаях, когда все повторные ядра, начиная с некоторого, остаются ограниченными.

Можно непосредственно доказать, что решение уравнения (51) приводится к решению уравнения того же вида с ядром $K^{(n)}(x, y)$. Действительно, из соотношения (51) мы получаем:

$$\lambda^p \int_a^b K^{(p)}(x, s)\varphi(s)\,ds = \lambda^{p+1}\int_a^b K^{(p+1)}(x, s)\varphi(s)\,ds + \lambda^p \int_a^b K^{(p)}(x, s) f(s)\,ds,$$

где p — целое положительное число. Положим в этом равенстве $p = 1, 2, \ldots, n-1$ и сложим почленно все полученные уравнения с уравнением (51). Мы получим:

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)\varphi(s)\,ds + \Big[f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{n-1}\int_a^b K^{(n-1)}(x, s) f(s)\,d\Big], \quad (51')$$

так что $\varphi(x)$ есть решение нового уравнения (51'). Пусть, наоборот, $\varphi(x)$ будет решением уравнения (51'); эта функция $\varphi(x)$ удовлетворяет также уравнению:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds - f(x) =$$
$$= \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)[\varphi(s) - f(s)] - \lambda^{n+1}\int_a^b K^{(n+1)}(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

которое получается из уравнения (51') простым преобразованием и которое может быть записано в виде:

$$\psi(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)\psi(s)\,ds,$$

где $\psi(x)$ означает левую часть предыдущего соотношения. Но это последнее уравнение для достаточно малых значений $|\lambda|$ не имеет другого решения, кроме $\psi(x) = 0$, т. е. функции $\varphi(x)$; решение уравнения (51') является также решением уравнения (51). Читатель легко покажет тождественность решений обоих уравнений (51) и (51'), данных общими формулами, стоит только принять во внимание соотношение (65) между резольвентами $\Gamma(x, y; \lambda)$ и $\Gamma_n(x, y; \lambda^n)$.

Наибольший интерес для приложений представляет случай, когда ядро имеет вид $\dfrac{G(x, y)}{|x-y|^\alpha}$, где числитель остается ограниченным, а показатель α есть положительное число, *меньшее единицы*, так что интеграл

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\,ds$$

имеет, вообще говоря, конечное значение Число α носит название показателя ядра.

Если даны два ядра этого вида: $\dfrac{G}{|x-y|^{\alpha}}$ и $\dfrac{G_1}{|x-y|^{\beta}}$ с показателями α и β соответственно, то ядро

$$F(x, y)=\int_a^b \frac{G(x, s)\, G_1(s, y)}{|x-s|^{\alpha}|s-y|^{\beta}} ds \tag{72}$$

имеет своим показателем число не большее $\alpha+\beta-1$. Положим для определенности, что $x<y$, и пусть M и M_1 будут верхними гранями соответственно для $|G|$ и $|G_1|$. Полагая $s=x+t(y-x)$, мы, очевидно, получим:

$$|F(x, y)|<\frac{MM_1}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{|t|^{\alpha}|1-t|^{\beta}},$$

и интеграл в правой части имеет конечное значение, если только $\alpha+\beta-1$ положительно. Если $\alpha+\beta<1$, то легко показать, что функция $F(x, y)$ ограничена, если разбить интеграл (72) на три других с пределами (a, x) (x, y) и (y, b). Если $\alpha+\beta=1$, то, вообще говоря, функция $F(x, y)$ при $x=y$ становится бесконечной, как $\log|x-y|$.

Если функции $G(x, y)$ и $G_1(x, y)$ непрерывны вне биссектрисы $y=x$, то и ядро $F(x, y)$ непрерывно в окрестности всякой точки (x_0, y_0), не находящейся на биссектрисе. Интеграл (72), рассматриваемый как функция двух переменных (x, y), равномерно сходится в окрестности системы значений $x=x_0$, $y=y_0$ (§ 504). В более общем случае, когда $G(x, y)$ и $G_1(x, y)$ почти всюду непрерывны, из рассуждений § 556 без труда следует, что функция $F(x, y)$ непрерывна в любой точке, не находящейся на биссектрисе. Если одна из функций G или G_1 имеет в качестве линии разрыва отрезок прямой, параллельной одной из осей, то и функция $F(x, y)$ также имеет, вообще говоря, эту линию линией разрыва.

Пусть $K(x, y)$ будет ядро указанного вида с показателем $\alpha<1$. Последовательные повторные ядра $K^{(2)}(x, y)$, $K^{(3)}(x, y)$, ..., $K^{(p)}(x, y)$ имеют согласно предыдущему показатели не большие, чем $2\alpha-1$, $3\alpha-2$, ..., $p\alpha-(p-1)$. Для того чтобы ядро $K^{(p+1)}(x, y)$ было ограничено, достаточно, чтобы $(p+1)\alpha<p$ или $p>\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. Следовательно, среди ядер, полученных из данного ядра с помощью повторений, только конечное число ядер являются неограниченными.

Или точнее: *если m есть первое целое число, превосходящее $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, то m-е повторное ядро не может обращаться в бесконечность при $x=y$.*

Примечание I. Если ядро $K(x, y)$ при $x=y$ обращается в бесконечность, как $\log|x-y|$, то произведение $(x-y)^{\alpha}K(x, y)$ при любом положительном значении α остается ограниченным. Если мы возьмем, например, $\alpha=\dfrac{1}{3}$, то видим, что первое повторное ядро остается конечным при $y=x$.

Примечание II. Можно также рассматривать уравнения Вольтерра, ядра которых при $y = x$ обращаются в бесконечность. Такое ядро имеет вид:

$$K(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x-y)^{\alpha}}$$

для $y < x$ и равно нулю для $y > x$. Все предыдущие рассуждения остаются в силе, но только последовательные повторные ядра равны нулю при $y > x$. Мы приходим таким образом после конечного числа повторений к ядру Вольтерра уже конечному. Положим, например, что первое повторное ядро $K^{(2)}(x, y)$ ограничено. Уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x \frac{G(x, s)}{(x-s)^{\alpha}} \varphi(s)\, ds + f(x) \tag{73}$$

приводится к уравнению с ограниченным ядром:

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^x K^{(2)}(x, s)\varphi(s)\, ds + f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s) f(s)\, ds,$$

решение которого удовлетворяет также уравнению (73), ибо уравнение

$$\psi(x) = \lambda^2 \int_a^x K^{(\cdot)}(x, s)\psi(s)\, ds$$

имеет своим единственным решением $\psi(x) = 0$ (§ 548).

Примечание III. Решение уравнения (51), изложенное в предыдущих параграфах, применимо также к некоторым неограниченным ядрам, из которых нельзя получить ограниченного ядра конечным числом повторений. Возьмем, например, ядро $K(x, y) = \dfrac{H(x, y)}{(x-c)^{\alpha}}$, в котором числитель $H(x, y)$ есть ограниченная функция, а α — положительный показатель, *меньший единицы; с* заключено в интервале (a, b). Ясно, что все последовательные повторные ядра, полученные из $K(x, y)$, обращаются в бесконечность при $x = c$. Однако формальное решение § 557—558 сохраняет смысл и может быть применено без изменений. В самом деле, рассмотрим последовательность функций $H^{(p)}(x, y)$, полученных из функции $H(x, y)$ с помощью рекуррентной формулы:

$$H^{(n)}(x, y) = \int_a^b \frac{H(x, t)\, H^{(n-1)}(t, y)}{|t-c|^{\alpha}}\, dt.$$

Все эти функции ограничены, и нетрудно шаг за шагом показать, что $|H^{(n)}| < M^n h^{n-1}$, где через h обозначено число $\dfrac{(c-a)^{1-\alpha} + (b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, а M есть верхняя граница функции $|H(x, y)|$. Положим

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{1}{|x-c|^{\alpha}}\left\{H(x, y) + \lambda H^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} H^{(n)}(x, y) + \ldots\right\}.$$

Ряд, который входит в числитель правой части, равномерно сходится, коль скоро $|\lambda|$ не превосходит $\dfrac{1}{Mh}$; и кроме того, можно показать, что $\Gamma(x, y; \lambda)$ удовлетворяет функциональным соотношениям (60) и (61) для разрешающего ядра. Функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ дает, таким образом, возможность решить два союзных уравнения:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{H(x, s)}{|x-c|^{\alpha}} \varphi(s)\, ds, \quad \psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \frac{H(s, x)}{|s-c|^{\alpha}} \psi(s)\, ds,$$

если только значение $|\lambda|$ достаточно мало. Если, например,

$$K(x, y)=\sqrt{\frac{y}{x}} \qquad (a=0, \quad b=1),$$

то все последовательные повторные ядра равны первому, и резольвента равна $\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1-\lambda}$. В этом частном случае формула (59) дает решение соответствующего интегрального уравнения для всякого λ, отличного от единицы. Ясно, что такой же результат мы получим для ядра

$$\frac{H(x, y)}{|x-c_1|^{\alpha_1}\ldots|x-c_p|^{\alpha_p}},$$

если каждый из показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ меньше единицы, а числитель $H(x,y)$ есть ограниченная функция.

562. Системы интегральных уравнений. Совершенно аналогично предыдущему можно развить метод приближений для системы интегральных уравнений:

$$\varphi_i(x)=\lambda\int_0^1\sum_{h=1}^{n}K_{ih}(x, s)\,\varphi_h(s)\,ds+f_i(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{74}$$

где для определенности мы полагаем $a=0$, $b=1$. Но Фредгольм очень изящно привел решение такой системы к решению одного уравнения, ядро которого имеет линии разрыва, параллельные осям координат; вот почему, собственно, мы и рассматривали ядра этого рода в предыдущих параграфах. Он вводит ядро $H(x, y)$, определенное для значений x и y, заключенных между 0 и n, с помощью n^2 условий вида:

$$H(x, y)=K_{ih}(x-i+1, \; y-h+1) \quad \text{для} \quad \begin{pmatrix} i-1<x<i \\ h-1<y<h \end{pmatrix}, \tag{75}$$

где i и h — целые числа, принимающие значения от 1 до n, а также функцию $F(x)$, определенную в интервале $(0, n)$ с помощью n условий:

$$F(x)=f_i(x-i+1) \qquad \text{для } i-1<x<i. \tag{76}$$

Ясно, что прямые $x=1, 2, \ldots, n-1$, $y=1, 2, \ldots, n-1$, представляют, вообще говоря, линии разрыва для функции $H(x, y)$. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ будет системой решений уравнений (74). С помощью этих n функций можно определить в интервале $(0, n)$ вспомогательную функцию $\Phi(x)$ при помощи условий:

$$\Phi(x)=\varphi_i(x-i+1) \qquad \text{для} \qquad i-1<x<i. \tag{77}$$

Полагая в уравнении (74), что x заключается между $i-1$ и i, мы находим:

$$\varphi_i(x-i+1)=\lambda\sum_{h=1}^{n}\int_{h-1}^{h}K_{ih}(x-i+1, \; s-h+1)\,\varphi_h(s-h+1)\,ds+f_i(x-i+1),$$

что согласно формулам (76) и (77) можно еще записать так:

$$\Phi(x)=\lambda\int_0^n H(x, s)\,\Phi(s)\,ds+F(x). \tag{78}$$

Наоборот, зная решение уравнения (78), мы с помощью соотношений (76) и (77) получим систему решений уравнений (74).

563. Случай функций многих переменных. Распространение изложенной теории на решение интегральных уравнений вида:

$$\varphi(x, y)=\lambda\iint_{(\Sigma)}K(x, y; \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta+f(x, y), \tag{79}$$

очевидно. Ядро $K(x, y; \xi, \eta)$ есть данная функция двух пар переменных (x, y) и (ξ, η), определенная, когда каждая из точек (x, y) и (ξ, η) находится в области D, на плоскости; $f(x, y)$ есть данная функция, а функцию $\varphi(x, y)$ нужно найти. При изложении метода Неймана (§ 533) мы встретились с интегральным уравнением несколько более общего вида, где интеграции были распространены на замкнутую поверхность. Пусть вообще $F(M)$ будет функция, которая имеет определенное значение в каждой точке M поверхности Σ; замкнутой или нет. Мы будем говорить, что $F(M)$ есть *функция точки* M, определенная на Σ. Точно так же можно говорить, что функция $F(M_1, M_2, \ldots M_p)$, которая имеет определенное значение для всех положений точек M_1, $M_2, \ldots, M_p$ на Σ, есть функция этих p точек, определенная на Σ. Всякий кратный интеграл *

$$\int\limits_{(\Sigma)} F(M_1, M_2, \ldots, M_p)\, d\delta_1\, d\delta_2 \ldots d\delta_p,$$

где $d\delta$ выражает элемент поверхности, а точки M_i описывают поверхность Σ, имеет конечное значение, если функция F интегрируема относительно каждой пары переменных.

Пусть теперь $K(M, M')$ будет данная функция точек M и M' на Σ, $f(M)$ — данная функция точки M, $\varphi(M)$ — неизвестная функция. Можно опять найти формальное решение интегрального уравнения

$$\varphi(M) = \lambda \int\limits_{(\Sigma)} K(M, M')\, \varphi(M')\, d\delta' + f(M), \tag{80}$$

определенное рядом, расположенным по степеням λ, в виде:

$$\varphi(M) = f(M) + \lambda \int\limits_{(\Sigma)} \Gamma(M, M'; \lambda) f(M')\, d\delta', \tag{81}$$

где

$$\Gamma(M, M'; \lambda) = K(M, M') + \lambda K^{(2)}(M, M') + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(M, M') + \ldots \tag{82}$$

Коэфициенты $K^{(i)}(M, M')$, получаются из первого $K^{(1)}(M, M')$, который мы принимаем равным $K(M, M')$, с помощью рекуррентной формулы:

$$K^{(n)}(M, M') = \int\limits_{(\Sigma)} K(M, M_1)\, K^{(n-1)}(M_1, M')\, d\delta_1; \tag{83}$$

их называют также *последовательными повторными ядрами* ядра, $K(M, M')$, а функция $\Gamma(M, M'; \lambda)$ называется *резольвентою*. Если ядро $K(M, M')$ ограничено, то ряд (82) равномерно сходится, коль скоро $|\lambda|$ будет достаточно мало. Тогда уравнение (80) имеет решение, и притом единственное, определяемое формулой (81). Другие свойства резольвенты также распространяются на функцию Γ. То же остается в силе и для неограниченного ядра, если только ядра, которые получаются из него

* Мы для краткости пишем один знак $\int$, число интеграций указано числом множителей.

последовательным повторением, начиная с некоторого определенного, будут ограничены.

Для приложений наиболее интересным представляется случай ядра $K(M, M')$ вида $\frac{G(M, M')}{\overline{MM'}^\alpha}$, где функция $G(M, M')$ ограничена в области Σ, а α — положительный показатель, меньший 2, так что интегралы, входящие в предыдущее решение, имеют конечное значение, когда функция $f(M)$ ограничена. Пусть вообще $\frac{G}{\overline{MM'}^\alpha}$ и $\frac{G_1}{\overline{MM'}^\beta}$ будут два ядра этого вида с показателями α и β соответственно. Покажем, что ядро

$$F(M, M') = \int\limits_{(\Sigma)} \frac{G(M, M_1)\, G_1(M_1, M')}{\overline{MM_1}^\alpha\, \overline{M_1M'}^\beta}\, d\sigma, \tag{84}$$

есть ядро того же вида и имеет показатель $\alpha+\beta-2$, т. е., что произведение $F(M, M')\, \overline{MM'}^{\alpha+\beta-2}$ остается ограниченным, если расстояние MM' неограниченно убывает*.

Положим сначала, что поверхность Σ есть плоскость. Если обозначить через ρ и ρ' расстояния переменной точки P от двух постоянных точек M и M', то доказательство сведется к тому, чтобы показать, что $\int\limits_{(\Sigma)} \frac{d\sigma}{\rho^\alpha \rho'^\beta}$ обращается в бесконечность порядка $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$, если M' неограниченно приближается к M. Пусть C будет круг радиуса $2MM'$, описанный из точки M, как из центра. Он разделяет поверхность Σ на две части, внутреннюю часть Σ' и внешнюю Σ''. Интеграл, распространенный на Σ'', сравним с $\int\limits_{(\Sigma'')} \frac{d\sigma}{\rho^{\alpha+\beta}}$, ибо, когда точка P описывает часть Σ'', отношение $\frac{\rho'}{\rho}$ остается между $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$, т. е. сравним с простым интегралом $\int\limits_{2MM'}^{R} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\beta-1}}$, где через R обозначено положительное число, настолько большое, что Σ'' заключается внутри круга, описанного из точки M, как из центра, радиусом R. Когда MM' стремится к нулю, то этот интеграл стремится к бесконечности как $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$, если $\alpha+\beta>2$, и как $\log(MM')$, если $\alpha+\beta=2$. Что касается интеграла, распространенного на Σ', то (геометрическое) преобразование, преобразующее круг C в круг C_1 с тем же центром в точке M и с радиусом, равным единице, приводит этот интеграл к интегралу такого же вида, распространенному на круг C_1, умноженному на $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$, и новый интеграл имеет конечное значение, не зависящее от MM'.

* Этот метод принадлежит Адамару (см. Heywood et Fréchet, Note I).

Доказательство легко распространяется на любую поверхность S, если каждой точке этой поверхности можно отнести точку плоскости Σ, так чтобы отношение $\frac{mm'}{MM'}$ расстояний двух соответствующих точек поверхностей Σ и S заключалось между двумя *положительными* числами, так же, как и отношение соответствующих элементов обеих поверхностей. Это имеет место, например, в случае части правильной поверхности, если ее можно проектировать на одну из ее касательных плоскостей, так что, если взять эту плоскость за плоскость xy, уравнение поверхности имеет вид $z=f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ есть непрерывная функция, допускающая непрерывные производные первого порядка.

Рассмотрим теперь некоторую правильную поверхность S и точку M этой поверхности. Разобьем S на две части S' и S'', причем часть S' содержит точку M и удовлетворяет указанным требованиям. Так как M' бесконечно близка к точке M, то мы можем предположить, что обе они лежат внутри некоторой кривой C, расположенной в области S' и не имеющей ни одной точки на границе S'. Ясно, что интеграл (84), распространенный на S'', имеет конечное значение, а мы только что видели, что интеграл, распространенный на S' стремится к бесконечности как $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$, если расстояние MM' неограниченно убывает.

Если теперь ядро $K(M, M')$ при неограниченном приближении M к M' стремится к бесконечности как $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha}$ $(\alpha<2)$, то первое повторное ядро $K^{(2)}(M, M')$ при $MM'=0$ остается конечным, если α меньше единицы, и оно будет порядка $2\alpha-2$, если α больше единицы. Подобно предыдущему (§ 561) мы видим, что можно притти к ограниченному ядру с помощью конечного числа повторений. Если $\alpha=1$, то первое повторное ядро стремится к бесконечности как $\log(MM')$, а второе повторное ядро ограничено, ибо при $MM'=0$ произведение $\sqrt{MM'}\log(MM')$ равно нулю.

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. *Линейные уравнения* (см. § 551). Пусть $z(x)$ будет интегралом линейного уравнения (24), который вместе со своими $n-1$ первыми производными обращается в нуль при $x=x_0$. Заменим в обеих частях этого уравнения x на s, умножим на $\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}$ и проинтегрируем в пределах от x_0 до x. Мы получим:

$$z(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\left[a_0(s)(x-s)^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{ds^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(s)(x-s)^{n-1}z(s)\right]ds+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}f(s)(x-s)^{n-1}ds.$$

Последовательное интегрирование по частям приводит к уравнению Вольтерра, ядро которого имеет вид:

$$H(x,s)=\frac{1}{(n-1)!}\left\{a_{n-1}(s)(x-s)^{n-1}-\frac{d}{ds}\left[a_{n-2}(s)(x-s)^{n-1}\right]+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[a_0(s)(x-s)^{n-1}\right]\right\}.$$

Это ядро представляет собой целый многочлен относительно x степени $n-1$, и согласно § 550 решение этого интегрального уравнения приводится к интегрированию линейного уравнения, которое есть не что иное, как уравнение сопряженное уравнению $D(z)=0$. Сравнить эти два решения.

2. Доказать, что в разложении решения уравнения (28) (§ 552) коэфициент при λ^n имеет вид, указанный на стр. 18, где функции

$$G_n(x,y;\ \xi,\eta),\quad g_n(x,y;\ \xi),\quad g_n'(x,y;\ \eta)$$

вычисляются рекуррентным путем с помощью формул:

$$g_n(x,y;\xi)=\int_\xi^x K_1(x,y;u)\,g_{n-1}(u,y;\xi)\,du,$$

$$g_n'(x,y;\eta)=\int_\eta^y K_2(x,y;v)\,g_{n-1}'(x,v;\eta)\,dv,$$

$$G_n(x,y;\xi,\eta)=\int_\xi^x\int_\eta^y K(x,y;u,v)\,G_{n-1}(u,v;\xi,\eta)\,du\,dv+$$
$$+\int_\xi^x K(x,y;u,\eta)\,g_{n-1}(\ ,\eta;\xi)\,du+\int_\eta^y K(x,y;\xi,v)\,g_{n-1}'(\xi,v;\eta)\,dv+$$
$$+\int_\xi^x K_1(x,y;u)\,G_{n-1}(u,y;\xi,\eta)\,du+\int_\eta^y K_2(x,y;v)\,G_{n-1}(x,v;\xi\ \eta)\,dv+$$
$$+K_1(x,y;\xi)\,G_{n-1}'(x,y;\eta)+K_2(x,y;\eta)\,G_{n-1}(x,y;\xi).$$

3. *Замечание к стр. 26.* Пусть $f(x,y)$ будет функция двух переменных x,y, определенная в области D, непрерывная в любой точке отрезка прямой AB, параллельной оси OY, который находится в области D вместе со своими концами (x_0y_0) и (x_0y_1). *Для всякого положительного числа* ε *можно указать другое число* η *(зависящее только от* ε*) таксе, что из* неравенства $|x-x_0|<\eta$ вытекает неравенство $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$ для произвольного значения y, принадлежащего интервалу (y_0,y_1).

Если функция $f(x,y)$ не имеет точек разрыва в непосредственной близости к отрезку AB, то достаточно взять область δ, заключающую в себе AB и не содержащую ни одной точки разрыва, чтобы то же свойство имело место в области δ, как это непосредственно вытекает из равномерной непрерывности функции $f(x,y)$. Но может случиться, что функция $f(x,y)$ имеет точки разрыва в непосредственной близости к AB. Возьмем для примера $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$ для $y\neq0$ и $f(x,0)=0$. Эта функция непрерывна в каждой точке оси Oy и разрывна во всех точках оси Ox, кроме начала.

Не делая никаких предположений относительно точек разрыва функции $f(x,y)$, допустим, что наше предположение неверно. Подразделяя последовательно интервал (y_0,y_1) и рассуждая так, как обычно в этих случаях (I, § 8), можно показать, что существует в этом интервале число c такое, что теорема неверна в интервале

$$(c-\rho, \quad c+\rho),$$

как бы мало ни было положительное число ρ. Но это несовместимо с допущением, что функция непрерывна в точке (x_0, c). Действительно, в таком случае можно было бы найти два числа η' и η'', каждое из которых по абсолютной величине меньше произвольно выбранного положительного числа η, такие, что

$$|f(x+\eta'', \quad c+\eta')-f(x_0, \quad c+\eta')|>\varepsilon.$$

Но эту разность можно написать в виде:

$$f(x_0+\eta'', \quad c+\eta')-f(x_0, c)+[f(x_0, c)-f(x_0, c+\eta')],$$

а абсолютная величина каждой из этих разностей меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если $\eta'^2+\eta''^2<\lambda^2$, где λ зависит только от ε.

4. Рассмотреть уравнение первого рода (33), предполагая, что

$$K(x, s)=a_0(x)+a_1(x)(x-s)+\ldots+a_n(x)\frac{(x-s)^n}{n!}$$

Полагая

$$z(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n\varphi(s)\,ds,$$

мы приходим к линейному диференциальному уравнению:

$$a_0(x)\frac{d^nz}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)z(x)=f(x),$$

и задача сводится к нахождению его интеграла, который при $x=0$ обращается в нуль вместе со своими n первыми производными. Производная $(n+1)$-го порядка дает искомую функцию $\varphi(x)$. Предполагаем, что $f(0)=0$ и что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, как и коэфициенты a (x).

5. *Уравнение второго рода с двумя переменными пределами.* Интегральное уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} K(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

где ψ_1 и ψ_2 суть две непрерывные функции в интервале $(-b, b)$, каждая из которых по абсолютной величине меньше b, может быть рассматриваемо как особый случай уравнения Фредгольма, в котором ядро $K(x, y)$ для всех значений y вне интервала (ψ_1, ψ_2) равно нулю. Когда абсолютные значения $|\psi_1|$ и $|\psi_2|$ не превосходят $|x|$, резольвента представляет целую функцию от λ, как в случае уравнения Вольтерра. Достаточно сравнить это уравнение с вспомогательным уравнением вида:

$$\Phi(x)=N+\lambda\int_{-|x|}^{|x|} M\Phi(s)ds,$$

которое имеет своим решением функцию $Ne^{2\lambda M|x|}$.

6. *Решение уравнения первого рода с помощью последовательных приближений.* Можно рассмотреть более общее уравнение

$$\int_0^x K(s, s)\,\varphi(s)\,ds+\lambda\int_0^x [K(x, s)-K(s, s)]\,\varphi(s)]\,ds=f(x)$$

и искать формальное решение в виде:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$$

Полагая $K(0,0) \neq 0$, находим сходящийся ряд, который при $\lambda = 1$ тождествен с решением Вольтерра.

Можно применить тот же прием для случая обобщенного уравнения Абеля (E. Picard, *Comptes rendus*, t. 139, 25 Juillet, 1904).

7. *Уравнение Вольтера для многих переменных.* Решение уравнения второго рода (28) может быть приведено к последовательному решению двух уравнений вида (1) и одного уравнения вида (27).

Напишем уравнение (28), полагая $\lambda = 1$:

$$\varphi(x, y) = \int_0^x K_1(x, y; \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi + V(x, y),$$

где через $V(x, y)$ обозначена совокупность всех остальных членов. Если в этом уравнении y рассматривать как параметр, то мы получим:

$$\varphi(x, y) = V(x, y) + \int_0^x S(x, y; u)\, V(u, y)\, du$$

где $S(x, y; u)$ — известная функция. Это новое уравнение имеет вид:

$$\varphi(x, y) - \int_0^y K_2(x, y; \eta)\, \varphi(x, \eta)\, d\eta = f_1(x, y) + \int_0^x \int_0^y H(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где f_1 и H — данные функции. Обозначая правую часть через $W(x, y)$, мы получаем:

$$\varphi(x, y) = W(x, y) + \int_0^y T(x, y; v)\, W(x, v)\, dv,$$

где T есть данная функция. Наконец, заменяя W его значением, мы приходим в конце концов к виду (127) (Volterra, Leçons sur les équations intégrales, стр. 76).

ГЛАВА XXXI.

УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА.

I. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА.

564. Об одном методе наведения. При изучении диференциальных уравнений (т. II, § 392) мы видели, что первый метод Коши, при котором диференциальное уравнение рассматривается как предельное для уравнения в конечных разностях, дает возможность определить интеграл в более широкой области, чем другие методы интегрирования. В этом смысле метод Коши имеет большие преимущества. Аналогичная идея, уже использованная Вольтерра, была применена Фредгольмом для решения интегрального уравнения второго рода при произвольном значении параметра λ. Свои результаты, к которым он пришел индуктивным путем, он изложил в своем основном мемуаре („Acta Mathematica", т. XXVII, 1903 стр. 365), синтетически доказав, что полученные выражения дают решение задачи. Мы будем пользоваться смешанным методом, используя уже полученное разложение резольвенты.

Чтобы решить уравнение второго рода:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x), \tag{1}$$

в котором мы предполагаем ядро $K(x, y)$ ограниченным, заменим интеграл в правой части суммой

$$h\,[K(x, s_1)\,\varphi_1 + K(x, s_2)\,\varphi_2 + \ldots + K(x, s_n)\,\varphi_n],$$

где мы для краткости полагаем

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad s_i = a + ih, \quad \varphi_i = \varphi(s_i) \quad (i = 1, 2. \ldots, n).$$

Уравнение (1) тогда заменяется функциональным уравнением:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\,[K(x, s_1)\,\varphi_1 + \ldots + K(x, s_n)\,\varphi_n]\,h, \tag{2}$$

которое дает возможность определить $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. В самом деле, если в этом уравнении положить последовательно $x = s_1$, $x = s_2, \ldots$, $x = s_n$, мы получим n линейных соотношений относительно $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1 - \lambda h\,[K(s_1, s_1)\,\varphi_1 + K(s_1, s_2)\,\varphi_2 + \ldots + K(s_1, s_n)\,\varphi_n] = f_1, \\
\varphi_2 - \lambda h\,[K(s_2, s_1)\,\varphi_1 + K(s_2, s_2)\,\varphi_2 + \ldots + K(s_2, s_n)\,\varphi_n] = f_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_n - \lambda h\,[K(s_n, s_1)\,\varphi_1 + K(s_n, s_2)\,\varphi_2 + \ldots + K(s_n, s_n)\,\varphi_n] = f_n.
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Выражения для $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, полученные из этих уравнений, представятся в виде дробей, общим знаменателем которых будет определитель:

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1, s_1)h & -\lambda K(s_1, s_2)h & -\lambda K(s_1, s_n)h \\ -\lambda K(s_2, s_1)h & 1-\lambda K(s_2, s_2)h & -\lambda K(s_2, s_n)h \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda K(s_n, s_1)h & -\lambda K(s_n, s_2)h & 1-\lambda K(s_n, s_n)h \end{vmatrix}; \quad (4)$$

числителем для φ_i будет также определитель n-го порядка $D_n^i(\lambda)$, который мы выписывать не будем. Положим теперь, что два числа n и i неограниченно возрастают так, что числа s_i приближаются к некоторому числу x, заключенному между a и b. Можно с полной строгостью доказать, что $D_n(\lambda)$ и $D_n^i(\lambda)$ имеют своими пределами две целые функции от λ*. Но мы будем рассматривать этот способ лишь как наведение и исследуем только, что делается с детерминантом $D_n(\lambda)$, когда n неограниченно возрастает.

565. Функции $D(\lambda)$ **и** $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$. Для упрощения записи будет удобно воспользоваться следующим сокращенным обозначением, введенным также Фредгольмом. Если заданы две системы по n переменных:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то мы положим:

$$K\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \ldots x_n \\ y_1 \, y_2 \ldots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \ldots & K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \ldots & K(x_2, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(x_n, y_1) & K(x_n, y_2) & \ldots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix};$$

здесь переменная x_i входит во все элементы i-й строки и только в эти элементы, а переменная y_k — во все элементы k-го столбца и только в них. Отсюда следует, что если поменять местами переменные x_i и x_l или переменные y_i и y_k, то определитель поменяет знак. Определитель не меняет своей величины от перестановки двух пар переменных x_i, y_i и x_k, y_k. Таким образом, не изменяя значения определителя, можно расставлять в нем n пар переменных (x_i, y_i) в произвольном порядке. В частности, функция $K\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \ldots x_n \\ x_1 \, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$ есть симметричная функция относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Положим теперь, что мы разлагаем $D_n(\lambda)$ по степеням λ. Мы найдем члены, содержащие λ^p, если возьмем всевозможные определители p-го порядка, полученные из D_n вычеркиванием всех строк и столбцов, содержащих $n-p$ произвольно выбранных элементов главной диагонали.

* Это сделано Гильбертом в его первых работах по этим вопросам (Erste Mitteilung, *Göttingen Nachrichten*, 1904).

Таким образом коэфициент при $(-\lambda)^p h^p$ равен сумме определителей p-го порядка вида:

$$K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix};$$

но произведение этого детерминанта на h^p есть один из элементов суммы, которая имеет своим пределом p-кратный интеграл

$$I_p = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_p \\ x_1 x_2 \ldots x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

и этот элемент в этой сумме встречается $p!$ раз, так как функция

$$K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix}$$

симметрична относительно $s_1, s_2, \ldots, s_p$. Очевидно, то же можно сказать о всех аналогичных детерминантах, и следовательно, при неограниченном возрастании n коэфициент при $(-\lambda)^p$ в многочлене $D_n(\lambda)$ имеет своим пределом $\frac{1}{p!} I_p$. Мы приходим, таким образом, к ряду целому относительно λ:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(s_1, s_1)\, ds_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_p + \ldots, \tag{5}$$

который сходится при любом значении λ. Действительно, по теореме Адамара (т. I, § 54) коэфициент при λ^n по абсолютной величине меньше $M^n (b-a) \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$, где M — верхняя грань функции $|K(x, y)|$. Но ряд, общий член которого равен произведению λ^n на предыдущее выражение, сходится, ибо отношение двух последовательных членов, равное

$$\frac{M(b-a)}{\sqrt{n+1}} \lambda \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

при неограниченном возрастании n стремится к нулю.

Покажем теперь, что произведение целой функции $D(\lambda)$ на ряд, выражающий значение резольвенты (§ 559), есть также целая функция от λ. Пусть $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ обозначает ряд относительно λ, полученный от этого умножения. По аналогии с разложением $D(\lambda)$ напишем это произведение в виде:

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)\Gamma(x, y; \lambda) D(\lambda) = K(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p(x, y). \tag{6}$$

Коэфициент $C_p(x, y)$ непосредственно выражается через ядра $K(x, y)$, $K^{(2)}(x, y)$, ... и через коэфициенты ряда (5), но проще получить выражение для этого коэфициента, если воспользоваться функциональным уравнением (60) § 559, которому удовлетворяет резольвента. Если умножить обе части этого уравнения на $D(\lambda)$, то оно дает:

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = K(x, y) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, s) D\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds; \tag{7}$$

приравнивая теперь коэфициенты при λ^p в обеих частях, мы получим рекуррентное соотношение между двумя последовательными коэфициентами:

$$C_p(x, y) = K(x, y) c_p - p \int_a^b K(x, s) C_{p-1}(s, y) ds, \tag{8}$$

где c_p есть соответствующий коэфициент функции $D(\lambda)$. Полагая последовательно $p = 1, 2, \ldots$, мы легко покажем, что первые коэфициенты C_1, C_2 имеют вид:

$$C_1(x, y) = \int_a^b K\begin{pmatrix} x\, s \\ y\, s \end{pmatrix} ds, \quad C_2(x, y) = \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} x\, s_1\, s_2 \\ y\, s_1\, s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2;$$

чтобы доказать, что этот закон общий, достаточно показать, что кратные интегралы

$$I_p(x, y) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x\, s_1 \ldots s_p \\ y\, s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_p$$

удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и коэфициенты C_p, так как C_1 и I_1 тождественны. Развернем определитель $K\begin{pmatrix} x\, s_1 \ldots s_p \\ y\, s_1 \ldots s_p \end{pmatrix}$ по элементам первой строки; принимая во внимание предыдущие замечания, мы получаем:

$$K\begin{pmatrix} x\, s_1 \ldots s_p \\ y\, s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} = K(x, y) K\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_p \\ s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} - K(x, s_1) K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ y\, s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} -$$

$$- K(x, s_2) K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 y \ldots s_p \end{pmatrix} - \ldots - K(x, s_p) K\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_p \\ s_1 \ldots y \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь обе части на $ds_1 ds_2 \ldots ds_p$ и будем интегрировать в пределах от a до b. Заметив, что значения этих интегралов не зависят от обозначений переменных интегрирования, мы приходим к соотношению:

$$I_p(x, y) = K(x, y)\, c_p - p \int_a^b K(x, s)\, I_{p-1}(s, y)\, ds,$$

которое тождественно с соотношением (8), связывающим C_{p-1} и C_p. Предположение, таким образом, доказано, и ряд, выражающий произведение $D(\lambda)$ и резольвенты, имеет вид:

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = K(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x\, s_1 \ldots s_p \\ y\, s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_p. \quad (9)$$

Ряд, стоящий в правой части, сходится при всяком значении λ, ибо по теореме Адамара общий член его меньше, чем

$$\frac{M^{p+1}}{p!} (b-a)^p (p+1)^{\frac{p+1}{2}} |\lambda|^p.$$

Таким образом резольвента есть частное от деления двух функций, целых относительно λ,

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)}{D(\lambda)}, \quad (10)$$

т. е. *мероморфная* функция параметра λ. Результат этот очень существенный, и предвидеть его заранее было бы трудно (см. упражнение 1).

Теперь легко будет распространить решение, данное в предыдущей главе для уравнения второго рода, на все те значения λ, которые не обращают в нуль функцию $D(\lambda)$. Действительно, к соотношению (7) можно присоединить соотношение того же вида;

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = K(x, y)\, D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(s, y)\, D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) ds, \quad (7')$$

которое доказывается тем же путем. Разделив каждое из этих равенств на $D(\lambda)$, мы придем к функциональным уравнениям (60) и (61) § 559, которые характеризуют резольвенту, если только заменить в них функции $\Gamma(x, y; \lambda)$ ее выражением (10). Итак, соображения этого параграфа приводят к первой теореме Фредгольма:

Если λ не есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$, то уравнение второго рода (1) *имеет одно и только одно решение; оно дается формулой:*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\left(D\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)}{D(\lambda)} f(s)\, ds. \quad (11)$$

Совершенно аналогично можно показать, что уравнение второго рода, союзное с уравнением (1)

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b K(s,\ x)\,\psi(s)\,ds+g(x), \tag{12}$$

имеет также единственное решение, выражаемое формулой:

$$\psi(x)=g(x)+\lambda\int_a^b \frac{D\left(\begin{array}{c|c} s & \lambda \\ x & \end{array}\right)}{D(\lambda)}\,g(s)ds. \tag{13}$$

Эти формулы можно получить из формул (59) и (63) § 559, если заменить в них $\Gamma(x,\ y;\ \lambda)$ на $\frac{1}{D(\lambda)}D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)$, т. е. аналитическим выражением резольвенты, которое имеет место во всей плоскости переменного λ*.

566. Разложение функции $D'(\lambda):D(\lambda)$. Логарифмическая производная функции $D(\lambda)$ допускает очень простое разложение в ряд, полученное также Фредгольмом. Чтобы к нему притти, заменим в тождестве (6) x и y на s и будем интегрировать обе части в пределах от a до b. Согласно формуле (9) интеграл левой части равен как раз — $D'(\lambda)$; чтобы получить интеграл правой части, предположим, что функция $\Gamma(x,\ y;\ \lambda)$ заменена своим разложением по степеням λ и что $|\lambda|$ меньше радиуса сходимости этого ряда. В таком случае мы можем интегрировать почленно и получаем:

$$\int_a^b \Gamma(s,\ s;\ \lambda)\,ds=A_1+A_2\lambda+\ldots+A_n\lambda^{n-1}+\ldots,$$

полагая вообще:

$$A_n=\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(s_1,\ s_2)K(s_2,\ s_3)\ldots K(s_n,\ s_1)\,ds_1\,ds_2\ldots ds_n=$$

$$=\int_a^b K^{(n)}(s,\ s)\,ds, \tag{14}$$

и мы приходим к новому соотношению:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-G(\lambda)=-(A_1+A_2\lambda+\ldots+A_n\lambda^{n-1}+\ldots). \tag{15}$$

---

* В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что значения переменных действительны, а ядро может принимать и комплексные значения. Доказательства останутся прежние, ибо теорема Адамара применима также к определителям с комплексными элементами (см., например, Wirtinger, *Bulletin des Sciences math.*, 1907, стр. 175).

Интегрируя и замечая, что $D(0)=1$, мы получаем:

$$D(\lambda)=e^{-\left(A_1\lambda+A_2\frac{\lambda^2}{2}+\ldots+A_n\frac{\lambda^n}{n}+\ldots\right)}. \tag{16}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$, которые входят в эти формулы, носят название последовательных *следов* ядра $K(x, y)$. Ясно, что формулы (15) и (16) применимы только в том случае, если $|\lambda|$ меньше модуля наименьшего из корней уравнения $D(\lambda)=0$. Но если правую часть формулы (16) разложить в ряд по степеням λ, мы неизбежно придем к ряду (5), и, следовательно, коэфициент при λ^n в этом ряду есть целый многочлен относительно $A_1, A_2, \ldots, A_n$, в чем можно было бы убедиться и непосредственно (упражнение 2). Таким образом коэфициент при λ^n в разложении $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ сам выражается через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и через ядра $K(x, y)$, $K^{(2)}(x, y), \ldots, K^{(n+1)}(x, y)$.

Примеры. Выше (§ 559) мы приводили ряд примеров, в которых резольвентой была целая функция от λ. Легко показать, что соответствующее уравнение $D(\lambda)=0$ не имеет ни одного корня. Так, в уравнении Вольтерра мы должны положить $K(x, y)=0$ для $y>x$. Отсюда следует, что все следы, кроме первого, равны нулю. В самом деле, по крайней мере один из множителей произведения $K(s_1, s_2)\ldots K(s_n, s_1)$ равен нулю, если только не имеют места равенства $s_1=s_2=\ldots=s_n$. А тогда подинтегральная функция n переменных равна нулю во всей области, кроме множества одного измерения в этой области, и интеграл равен нулю. В этом случае, следовательно, $D(\lambda)=e^{-A_1\lambda}$; для ядра, ортогонального самому себе, получится тот же результат.

567. Миноры функции $D(\lambda)$. *Всякий корень $\lambda=c$ уравнения $D(\lambda)=0$ есть полюс резольвенты.* В самом деле, если m есть порядок кратности этого корня, то числитель $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ не может делиться на $(\lambda-c)^m$, ибо тогда в силу уже указанного соотношения мы имели бы:

$$D'(\lambda)=-\int_a^b D\left(\begin{matrix}s\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)ds, \tag{17}$$

и производная $D'(\lambda)$ делилась бы на тот же делитель.

Поэтому формула, которая дает решение уравнения второго рода, теряет смысл в том случае, когда λ есть корень уравнения $D(\lambda)=0$. Изучая этот особый случай, Фредгольм рассматривает его как предельный случай системы n линейных уравнений с определителем, равным нулю, в предположении, что число n неограниченно возрастает. На этом пути он приходит к необходимости ввести новые целые функции, аналогичные функции $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$, которые он называет *минорами* функции $D(\lambda)$. Минор n-го порядка определяется сходящимся рядом:

$$D\left(\begin{matrix}x_1\, x_2 \ldots x_n\\y_1\, y_2 \ldots y_n\end{matrix}\middle|\lambda\right)=K\left(\begin{matrix}x_1\, x_2 \ldots x_n\\y_1\, y_2 \ldots y_n\end{matrix}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K\left(\begin{matrix}x_1 \ldots x_n\, s_1 \ldots s_p\\y_1 \ldots y_n\, s_1 \ldots s_p\end{matrix}\right)ds_1\ldots ds_p; \tag{18}$$

Из теоремы Адамара снова вытекает, что если ядро есть ограниченная функция, то правая часть есть целая функция от λ. Эти миноры удовлетворяют функциональному уравнению, частным случаем которого и является соотношение (7) и которое доказывается непосредственно. Разлагая определитель $K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix}$ по элементам первой строки, мы находим:

$$K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} = K(x_1, y_1) K\begin{pmatrix} x_2 x_3 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_2 y_3 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} K(x_1, y_n) K\begin{pmatrix} x_2 \ldots x_n \quad s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_{n-1} \, s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} -$$

$$-K(x_1, s_1) K\begin{pmatrix} s_1 x_2 \ldots x_n s_2 \ldots s_p \\ y_1 y_2 \ldots y_n s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} - \ldots$$

$$\ldots - K(x_1, s_p) K\begin{pmatrix} s_p x_2 \ldots x_n s_1 \ldots s_{p-1} \\ y_1 y_2 \ldots y_n s_1 \ldots s_{p-1} \end{pmatrix};$$

чтобы получить коэфициент при $K(x_1, s_l)$, нужно сначала переставить первый и $(n+l)$-й столбцы, отчего детерминант изменит знак, а затем в миноре, соответствующем первому элементу $K(x_1, s_l)$, привести пару (s_l, y_1) на первое место.

Умножим обе части предыдущего равенства на $\frac{(-\lambda)^p}{p!} ds_1 \, ds_2 \ldots ds_p$ и проинтегрируем по каждой из переменных s_l от a до b; просуммируем затем все равенства, которые получаются, если давать p значения от 1 до ∞, а также прибавим и предыдущее, положив в нем $p=0$. Мы приходим к искомому равенству:

$$\left.\begin{aligned} D\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) &= K(x_1, y_1) D\left(\begin{matrix} x_2 \ldots x_n \\ y_2 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \\ &- K(x_1\, y_2) D\left(\begin{matrix} x_2 x_3 \ldots x_n \\ y_1 y_3 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{n-1} K(x_1 y_n) D\left(\begin{matrix} x_2 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_{n-1} \end{matrix}\middle|\lambda\right) + \\ &+ \lambda \int_a^b K(x_1, t) D\left(\begin{matrix} t\, x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) dt. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Если разложить детерминант $K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix}$ по элементам первого столбца, то таким же путем мы придем к соотношению:

$$\left.\begin{aligned}D\begin{pmatrix}x_1 \dots x_n\\y_1 \dots y_n\end{pmatrix}\lambda\Bigg) &= K(x_1 y_1)\, D\begin{pmatrix}x_2 \dots x_n\\y_2 \dots y_n\end{pmatrix}\lambda\Bigg) -\\ &- K(x_2\, y_1)\, D\begin{pmatrix}x_1\, x_3 \dots x_n\\y_2\, y_3 \dots y_n\end{pmatrix}\lambda\Bigg) + \dots\\ &\dots + (-1)^{n-1} K(x_n, y_1)\, D\begin{pmatrix}x_1 \dots x_{n-1}\\y_2 \dots y_n\end{pmatrix}\lambda\Bigg) +\\ &+ \lambda\int_a^b K(t,\ y_1)\, D\begin{pmatrix}x_1\, x_2 \dots x_n\\t\quad y_2 \dots y_n\end{pmatrix}\lambda\Bigg)\, dt.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Если заменить в формуле (18) y_l на x_l, умножить обе части на $dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ и проинтегрировать в пределах от a до b, то получится еще соотношение:

$$\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b D\left(\begin{matrix}x_1 \dots x_n\\x_1 \dots x_n\end{matrix}\middle|\lambda\right) dx_1 \dots dx_n = \pm\frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n}, \tag{21}$$

которое является обобщением соотношения (17).

568. Однородное уравнение. Фундаментальные функции. Если в уравнении (1) положить $f(x) = 0$, то при значении λ, отличном от корня уравнения $D(\lambda) = 0$, полученное уравнение имеет единственное решение $\varphi(x) = 0$; это вытекает из формулы, дающей единственное решение уравнения второго рода в общем случае. Но однородное уравнение

$$\varphi(x) = c\int_a^b K(x,\ s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{22}$$

для которого $D(c) = 0$, допускает некоторое число решений, отличных от нуля, подобно тому как система однородных линейных уравнений с определителем, равным нулю, всегда имеет решения, не равные нулю. Пусть m будет порядок кратности корня $\lambda = c$ уравнения $D(\lambda) = 0$. Может случиться, что этот корень обращает в нуль некоторые из миноров

$$D\left(\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\middle|c\right),\quad D\left(\begin{matrix}x_1\, x_2\\y_1\, y_2\end{matrix}\middle|c\right), \dots$$

тождественно, т. е. для любых значений переменных x_l, y_k, но он не может обращать тождественно в нуль все миноры первого, второго и т. д. до m-го порядка включительно. В самом деле, согласно соотношению (21) в этом случае производные $D'(\lambda)$, $D''(\lambda)$, ..., $D^{(m)}(\lambda)$ при $\lambda = c$ также обращались бы в нуль, что невозможно. Мы можем поэтому предположить, что минор n-го порядка при $\lambda = c$ не равен тождественно нулю, но все миноры низшего порядка $\lambda = c$ тождественно равны нулю. Число n может быть равно единице, но не может быть больше m.

Пусть число n удовлетворяет указанным условиям, и пусть (ξ_i, η_k) будет система $2n$ числовых значений таких, что минор

$$\Delta = D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} c$$

отличен от нуля. Если в соотношении (19) заменить λ на c, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — на $x, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — на $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ соответственно и принять во внимание, что согласно предположению минор $(n-1)$-го порядка при $\lambda = c$ тождественно равен нулю, то это соотношение принимает вид:

$$D\left(\begin{matrix} x & \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 \ldots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) = c\int_a^b K(x, t)\, D\left(\begin{matrix} t & \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 \ldots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) dt.$$

Мы получим таким образом решение однородного уравнения (22), если в миноре Δ заменим ξ_1 на x, а отсюда ясно, что можно также получить решение этого уравнения, если заменить ξ_i на x, ибо пару (ξ_i, η_i) можно поставить на первое место. Решение, полученное из минора Δ заменой ξ_i на x и делением на этот минор Δ, мы будем вместе с Фредгольмом обозначать через $\Phi_i(x)$.

Система n таких решений $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)$ линейно независима. В самом деле, согласно общему соотношению (19), имеем:

$$D\left(\begin{matrix} \xi_i\, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) = c\int_a^b K(\xi_i, s)\, D\left(\begin{matrix} s & \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 \ldots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) as,$$

и следовательно, интеграл

$$c\int_a^b K(\xi_i, s)\, \Phi_1(s)\, ds$$

равен единице при $i = 1$ и нулю $i > 1$. Таким же путем мы получим, что интеграл

$$c\int_a^b K(\xi_i, s)\, \Phi_k(s)\, ds$$

равен единице, если $i = k$, и нулю, если $i \neq k$. Предположим теперь, что функции $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)$ связаны линейным соотношением:

$$a_1\Phi_1(x) + a_2\Phi_2(x) + \ldots + a_n\Phi_n(x) = 0 \tag{23}$$

с постоянными коэфициентами.

Умножая левую часть на $K(\xi_i, x)$ и интегрируя от a до b, мы найдем, согласно предыдущим соотношениям, что $a_i = 0$. Соотношение (23) представляет, таким образом, тождество.

Всякое решение однородного уравнения (22) представляет собой линейную комбинацию функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ с постоянными коэфициентами.

Доказательство Фредгольма основано на одном общем замечании, которым мы в дальнейшем будем пользоваться. Всякая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению второго рода (1), удовлетворяет также бесчисленному количеству уравнений того же вида, зависящих от произвольного ядра $H(x, s)$. В самом деле, из уравнения (1) мы получаем:

$$\int_a^b H(x, s)\varphi(s)\,ds = \lambda\int_a^b\int_a^b H(x, s)K(s, t)\varphi(t)\,ds\,dt + \int_a^b H(x, s)f(s)\,ds;$$

если умножить обе части этого уравнения на λ и сложить его с первым, то полученное уравнение можно написать в виде:

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b F(x, s)\varphi(s)\,ds + f(x) + \lambda\int_a^b H(x, s)f(s)\,ds, \tag{24}$$

ядро $F(x, s)$ нового интегрального уравнения имеет вид:

$$F(x, s) = K(x, s) - H(x, s) + \lambda\int_a^b H(x, t)K(t, s)\,dt. \tag{25}$$

Всякое решение уравнения (1) есть также решение уравнения (24), какова бы ни была интегрируемая функция $H(x, s)$.

Приняв это во внимание, положим, что $\varphi(x)$ есть решение однородного уравнения (22). В соотношении (24) положим:

$$H(x, s) = \frac{1}{D\begin{pmatrix}\xi_1 \dots \xi_n\\ \eta_1 \dots \eta_n\end{pmatrix}\!\Bigg|\, c} D\begin{pmatrix}x\,\xi_1 \dots \xi_n\\ s\,\eta_1 \dots \eta_n\end{pmatrix}\!\Bigg|\, c, \tag{26}$$

где постоянные (ξ_i, η_i) выбраны так, чтобы минор n-го порядка не был равен нулю.

Принимая во внимание функциональное уравнение (20), в котором n заменено на $n+1$, мы видим, что ядро $F(x, s)$ нового интегрального уравнения (24) равно:

$$K(\xi_1, s)\,D\left(\begin{matrix}x\ \xi_2 \dots \xi_n\\ \eta_1\ \eta_2 \dots \eta_n\end{matrix}\,\middle|\, c\right) + \dots + K(\xi_n, s)\,D\left(\begin{matrix}\xi_1 \dots \xi_{n-1}\ x\\ \eta_1 \dots \eta_{n-1}\ \eta_n\end{matrix}\,\middle|\, c\right),$$

и следовательно, всякое решение уравнения (24), в котором $f(x)=0$, представляет линейную комбинацию функций $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ с постоянными коэфициентами.

Итак, *если $\lambda = c$ есть корень кратности m уравнения $D(\lambda) = 0$, то однородное уравнение* (22) *имеет n линейно независимых решений* $(0 < n \leqslant m)$. Это — вторая теорема Фредгольма.

Таким же путем можно доказать, что союзное однородное уравнение

$$\psi(x) = c\int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds \tag{27}$$

имеет n линейно независимых решений $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, причем функция $\psi_i(x)$ получается из функции $D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_n\\ \eta_1 \ldots \eta_n\end{matrix}\middle| c\right)$ заменой η_i на x.

Числа c, корни характеристического уравнения $D(\lambda)=0$ называются *характеристическими числами, особыми значениями* или *фундаментальными числами*. Решения соответствующего однородного уравнения называются *характеристическими функциями, особыми функциями* или *фундаментальными функциями* *

569. Исследование особого случая. Рассмотрим, наконец, неоднородное уравнение второго рода:

$$\varphi(x) = c\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x), \tag{28}$$

где c — корень функции $D(\lambda)$. Рассмотрение этого особого случая приводит к исследованиям, совершенно аналогичным исследованию системы n линейных неоднородных уравнений с n неизвестными, если определитель из коэфициентов равен нулю. Прежде всего очевидно, что если уравнение (28) допускает решение, то таких решений существует бесчисленное множество; все эти решения можно получить, если к первому решению прибавить решения однородного уравнения, полученного отбрасыванием члена $f(x)$ в уравнении (28). Но для того чтобы решение существовало, функция $f(x)$ должна удовлетворять некоторым условиям. В самом деле, пусть функция $\psi_i(x)$ будет одним из решений однородного уравнения (27). Умножим обе части уравнения (28) на $\psi_i(x)$ и проинтегрируем в пределах от a до b. Если переставить буквы s и x в двойном интеграле, то полученную формулу можно представить в виде:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\left[\psi_i(x) - c\int_a^b K(s, x)\,\psi_i(s)\,ds\right] = \int_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx.$$

Так как левая часть этого равенства равна нулю, то то же следует и для правой части, и следовательно, для того чтобы уравнение (28) допускало решение, необходимо, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла n условиям:

$$\int_a^b \psi_i(x) f(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{29}$$

Эти условия и *достаточны*. В самом деле, всякое решение уравнения (28) удовлетворяет бесчисленному множеству интегральных уравнений вида (24), если только в нем заменить λ на c, каково бы ни было вспомогательное ядро $H(x, s)$. Но если в качестве $H(x, s)$ взять ту же

---

* В русской математической литературе чаще применяются термины: „собственные значения" и „собственные функции". В этом переводе мы оставляем терминологию Гурса (*Ред.*).

функцию (26), что в предыдущем параграфе, то легко видеть, что функция $\varphi(x)$ будет линейною комбинацией функций $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)$ с постоянными коэфициентами, сложенною с функцией

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{c}{D\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n\end{pmatrix}\bigg| c} \int_a^b f(s)\, D\begin{pmatrix}x\, \xi_1 \ldots \xi_n \\ s\, \eta_1 \ldots \eta_n\end{pmatrix}\bigg| c\Big)\, ds. \qquad (30)$$

Теперь достаточно показать, что эта последняя функция (30) удовлетворяет уравнению (28), если условия (29) выполнены. Если подставить это выражение для $\Phi(x)$ в уравнение (28), то, принимая во внимание функциональное соотношение (19), мы придем к равенству вида:

$$\int_a^b f(s) \sum_{i=1}^n \{C_i \psi_i(s)\}\, ds = 0,$$

где коэфициенты C_i не зависят от s.

Итак, *для того чтобы уравнение* (28), *где с есть корень уравнения* $D(\lambda)=0$, *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *удовлетворяла п условиям* (29); *при этом решение зависит от п произвольных постоянных.*

Это — *третья теорема Фредгольма.* В нашем изложении мы придерживались синтетического метода, которому следовал автор. Позже мы придем к тем же результатам при изучении разрешающего ядра.

570. Случай неограниченных ядер. Как известно, всякая мероморфная функция от λ может быть представлена бесчисленным множеством способов в виде частного двух целых функций от λ.

Теорема Фредгольма дает для числителя и знаменателя резольвенты особенно симметричные выражения, но эти выражения, конечно, не единственно возможные. С одной стороны, обе функции $D(\lambda)$ и $D\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\bigg|\lambda\Big)$ могут делиться на линейные множители вида $\lambda - \lambda_i$, которые в таком случае могут быть сокращены. С другой стороны, умножая обе эти функции на одну и ту же целую функцию от λ, можно получить новое выражение для резольвенты. Из бесчисленного множества различных форм функции $\Gamma(x, y; \lambda)$ рассмотрим ту, которая получается с помощью теории повторных ядер (§ 560). Пусть $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ будет резольвентой относительно n-го повторного ядра:

$$\Gamma_n(x, y; \lambda) = K^{(n)}(x, y) + \lambda K^{(2n)}(x, y) + \ldots + \lambda^{p-1} K^{(pn)}(x, y) + \ldots; \qquad (31)$$

согласно первой теореме Фредгольма ее можно также представить в виде:

$$\Gamma_n(x, y; \lambda) = \frac{D_n\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\bigg|\lambda\Big)}{D_n(\lambda)}, \qquad (32)$$

где $D_n(\lambda)$ и $D_n\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\bigg|\lambda\Big)$ суть целые функции Фредгольма, составленные с помощью ядра $K^{(n)}(x, y)$; это второе выражение для $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ имеет смысл для всякого значения λ. Подставив теперь в формулу (65) § 560 вместо $\Gamma_n(x, y; \lambda^n)$ его значение из соотношения (32), мы получим:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = H(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1} \frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda^n\right)}{D_n(\lambda^n)} + \\ + \lambda^n \int_a^b H(x, s; \lambda) \frac{D_n\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix} \middle| \lambda^n\right)}{D^n(\lambda^n)} ds, \tag{33}$$

где попрежнему

$$H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2} K^{(n-1)}(x, y).$$

Так как $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda^n\right)$ есть целая функция от λ^n, то ясно, что правая часть формулы (33) есть *мероморфная функция* от λ, знаменателем которой служит $D_n(\lambda^n)$:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{E_n(x, y; \lambda)}{D_n(\lambda^n)}. \tag{34}$$

В случае, когда ядро $K(x, y)$ ограничено, как мы это до сих пор предполагали, можно от формы Фредгольма перейти к новому выражению для резольвенты, умножив числитель и знаменатель на целую функцию, которую довольно легко определить. В самом деле, согласно формуле (16) имеем:

$$D_n(\lambda) = e^{-\left(A_n \lambda + \frac{A_{2n}}{2}\lambda^2 + \ldots + \frac{A_{pn}}{p}\lambda^p + \ldots\right)}, \tag{35}$$

и следовательно, как это легко показать,

$$D_n(\lambda^n) = D(\lambda) D(\omega\lambda) \ldots D(\omega^{n-1}\lambda), \tag{36}$$

где ω — первообразный корень уравнения $\omega^n = 1$. Таким образом, чтобы перейти от формы (10) Фредгольма к новой форме (34), достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на целую функцию

$$D(\omega\lambda) \ldots D(\omega^{n-1}\lambda).$$

Чтобы притти к выражению (33) резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$, достаточно было предположить, что все повторные ядра, начиная с $K^{(n)}(x, y)$, ограничены, но доказательство не требует, чтобы само ядро $K(x, y)$ было ограничено. Первая теорема Фредгольма распространяется, таким образом, на ядра этого рода, и *резольвента и в этом случае есть также мероморфная функция параметра* λ. Для всякого значения λ, которое не есть полюс резольвенты, уравнение (1) допускает единственное решение, которое дается формулой (11), если в ней заменить $\Gamma(x, y; \lambda)$ ее выражением (34). Дальше мы увидим, что остальные теоремы Фредгольма также распространяются на этот случай.

В новом выражении резольвенты числитель и знаменатель выражаются с помощью последовательных повторных ядер ядра $K(x, y)$ и с помощью следов $A_n, A_{2n}, \ldots$, *но следы* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ *не входят в это выражение.* В самом деле, ясно, что всякий коэфициент функции $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ выражается через $A_n, A_{2n}, A_{3n}, \ldots$ и через ядра $K^{(n)}(x, y)$, $K^{(2n)}(x, y), \ldots$; следовательно, интеграл

$$\int_a^b H(x, s; \lambda)\, D_n\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda^n\right) ds$$

выразится только с помощью $A_n, A_{2n}, \ldots, A_{pn}, \ldots$ и последовательных ядер, начиная с $K^{(n+1)}(x, y)$.

Пуанкаре (*Acta mathematica*, т. 33, 1910) указал на другую форму резольвенты, которая применима для неограниченного ядра, если только все повторные ядра, начиная с некоторого, остаются конечными. Положим сначала, что ядро $K(x, y)$ ограничено. Если представить резольвенту в обычной форме (10), то, умножив числитель и знаменатель дроби на целую функцию

$$e^{A_1\lambda + \ldots + A_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}},$$

мы получим новое выражение для резольвенты в виде:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{\mathfrak{D}_n(\lambda)}, \tag{37}$$

если положить:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_n(\lambda) &= e^{-\frac{A_n}{n}\lambda^n - \frac{A_{n+1}}{n+1}\lambda^{n+1} - \ldots} = D(\lambda)\, e^{A_1\lambda + \ldots + A_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}}, \\ \mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) &= D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) e^{A_1\lambda + \ldots + \frac{A_{n-1}}{n-1}\lambda^{n-1}}; \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$\mathfrak{D}_n(\lambda)$ и $\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ суть две новые целые функции от λ, которые можно очень просто получить из функций $D(\lambda)$ и $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$. Действительно, ясно, что $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ выражается только с помощью следов $A_n, A_{n+1}, \ldots$; можно, следовательно, получить $\mathfrak{D}_n(\lambda)$, *если в коэфициентах функции* $D(\lambda)$ *отбросить все те члены, которые зависят от* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$; это сводится к тому, чтобы в первом из тождеств (38) заменить $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ нулями. С другой стороны, тождество

$$\mathfrak{D}_n(\lambda)\left\{K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots\right\} = \mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) \tag{38'}$$

показывает, что коэфициенты функции $\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ выражаются только с помощью следов $A_n, A_{n+1}, \ldots$ и ядер $K(x, y)$, $K^{(2)}(x, y), \ldots$ Можно, следовательно, также получить $\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ из разложения $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$, отбросив в коэфициентах члены, зависящие от $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

Выражение (37) *для резольвенты пригодно также и в том случае, если ядро* $K(x, y)$ *при* $y = x$ *обращается в бесконечность, если только все повторные ядра, начиная с* $K^{(n)}(x, y)$, *остаются ограниченными.* В этом случае все следы, начиная с A_n, имеют конечные значения, и тождество (38') остается с формальной точки зрения правильным, ибо оно может быть непосредственно проверено. Нам, следовательно, достаточно показать, что $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ есть целая функция от λ, нулями которой служат полюсы резольвенты, причем кратность каждого нуля по крайней мере равна кратности этого полюса. Если это так, то произведение $\mathfrak{D}_n(\lambda)\Gamma(x, y; \lambda)$, т. е. $\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$, будет также целой функцией от λ. Действительно, для достаточно малых по модулю значений λ мы имеем:

$$\frac{\mathfrak{D}_n'(\lambda)}{\mathfrak{D}_n(\lambda)} = -\lambda^{n-1}\int_a^b K^{(n)}(s, s)\,ds - \lambda^n\int_a^b K^{(n+1)}(s, s)\,ds - \ldots = -\int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\,ds, \tag{39}$$

если положить

$$\Gamma'(x, y, \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda) - K(x, y) - \ldots - \lambda^{n-2}K^{(n-1)}(x, y);$$

$\Gamma'(x, y; \lambda)$ есть мероморфная функция от λ, имеющая своими полюсами только полюсы резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$, главная часть которой относительно каждого из них совпадает с главною частью резольвенты. Позже (§ 579) мы покажем, что всякий полюс резольвенты есть *простой* корень интеграла $-\int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\,ds$, вычет которого есть целое число, равное или большее порядка полюса. Таким образом функция $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ есть целая функция от λ, удовлетворяющая указанным условиям, что и доказывает предложение Пуанкаре.

Примечание. В частном случае, когда повторные ядра при $y = x$ остаются конечными, начиная с $K^{(2)}(x, y)$ — это будет иметь место, если ядро $K(x, y)$ будет порядка $\alpha < \frac{1}{2}$, — можно взять $n = 2$, т. е. в разложениях функций $D(\lambda)$ и $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ отбросить A_1. Но все члены этих разложений, содержащие A_1, получаются только из элементов главной диагонали детерминантов Фредгольма. Поэтому можно сохранить выражения Фредгольма для $D(\lambda)$ и $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$, если только заменить все элементы главной диагонали в соответствующих определителях нулями. Это изящное замечание принадлежит Гильберту *.

Для некоторых неограниченных ядер пригодно и самое решение Фредгольма. Таково, например, ядро вида $\frac{H(x, y)}{|x-c|^\alpha}$, если $H(x, y)$ ограничено, α — положительный показатель, меньший единицы (§ 561). И в этом случае можно с помощью неравенства Адамара показать, что ряд (5) есть целая функция от λ.

Что касается разложения (9), то оно также равно частному от деления целой функции от λ на $\frac{1}{|x-c|^\alpha}$, и равенство

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = D(\lambda)\Gamma(x, y; \lambda),$$

где под $\Gamma(x, y; \lambda)$ мы понимаем разложение § 561, устанавливается так же, как и раньше.

* Goffingen Nachrich'en, 1904, стр. 81.

571. Ядра вида $\sum X_i Y_i$. Можно притти к решению Фредгольма и другим также индуктивным путем, основанным на изучении частного случая, при котором решение интегрального уравнения второго рода не представляет никаких трудностей. Это случай, когда ядро $K(x, y)$ имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i,$$

где X_i и Y_i зависят соответственно только от переменного x и переменного y. Можно предположить, что n функций X_i линейно независимы, так же как функции Y_i, ибо если бы это было не так, то можно было бы представить ядро в аналогичной форме, содержащей только меньшее, чем n, число функций от x. Интегральное уравнение принимает вид:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b [X_1(x) Y_1(s) + \ldots + X_n(x) Y_n(s)] \varphi(s)\, ds, \tag{40}$$

ясно, что всякое его решение $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x) = f(x) + H_1 X_1(x) + \ldots + H_n X_n(x), \tag{41}$$

где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ суть постоянные коэфициенты. Для определения этих коэфициентов достаточно в обе части уравнения (40) вместо $\varphi(x)$ и $\varphi(s)$ подставить соответствующие значения и записать, что коэфициенты при $X_i(x)$ равны в обеих частях. Мы получим, таким образом, n линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
(1_{11} - \lambda a_{11}) H_1 - \lambda a_{21} H_2 - \ldots - \lambda a_{n1} H_n &= \lambda \int_a^b y_1(s) f(s)\, ds,\\
-\lambda a_{12} H_1 + (1 - \lambda a_{22}) H_2 - \ldots - \lambda a_{n2} H_n &= \lambda \int_a^b y_2(s) f(s)\, ds,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\
-\lambda a_{1n} H_1 - \lambda a_{2n} H_2 - \ldots + (1 - \lambda a_{nn}) H_n &= \lambda \int_a^b y_n(s) f(s)\, ds,
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

где

$$a_{ik} = \int_a^b X_i(s) Y_k(s)\, ds.$$

Разрешая эти линейные уравнения, мы получим для $H_1, H_2, \ldots, H_n$, а следовательно, и для $\varphi(x)$, рациональную функцию от λ, которую, как это нетрудно видеть, можно записать в форме:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D_n(\lambda)} \int_a^b D_n\left(\begin{array}{c} x \\ s \end{array}\middle|\, \lambda\right) f(s)\, ds, \tag{43}$$

где $D_n(\lambda)$ и $D_n\left(\begin{array}{c} x \\ s \end{array}\middle|\, \lambda\right)$ — два детерминанта:

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{n1} \\ -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{44}$$

$$D_n\left(\begin{array}{c|c} x & \\ s & \lambda\end{array}\right)=\left|\begin{array}{ccccc} 0 & X_1(x) & X_2(x) & \ldots & X_n(x) \\ Y_1(s) & 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{n1} \\ Y_2(s) & -\lambda a_{12} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n(s) & -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \ldots & 1-\lambda a_{nn}\end{array}\right|. \tag{45}$$

С помощью довольно простых преобразований * можно показать, что детерминанты $D_n(\lambda)$ и $D_n\left(\begin{array}{c|c} x & \\ s & \lambda\end{array}\right)$ тождественны с функциями Фредгольма, соответствующими ядру $\sum X_i Y_i$, а это с помощью индукции приводит к общему решению уравнения (1) с ядром общего вида. Мы покажем только тождественность детерминанта $D_n(\lambda)$ с детерминантом Фредгольма. Заметим прежде всего, что ядро $R(x, y)$ можно представить в виде $\sum X_i Y_i$ бесчисленным множеством способов, ибо функции X_i можно всегда заменить n различными линейными комбинациями этих функций с постоянными коэфициентами; n функций Y_i должны в таком случае быть заменены n линейными комбинациями этих функций с коэфициентами, зависящими от первых коэфициентов. Ясно, что детерминант $D_n(\lambda)$ не зависит от частного выбора функций X_i, с помощью которых составлено ядро $\sum X_i Y_i$, и что этот детерминант зависит только от самого ядра $K(x, y)$. Покажем, как можно, пользуясь произволом выбора функций X_i, привести $D_n(\lambda)$ к произведению элементов его главной диагонали.

Пусть ядро $K(x, y)$ задано некоторым определенным образом в виде $\sum X_i Y_i$ и пусть требуется найти линейную комбинацию вида $X=\sum d_i X_i$ с постоянными коэфициентами так, чтобы было

$$\int_a^b K(x, s) X(s)\, ds = cX(x), \tag{46}$$

где c — постоянный множитель. Так как по предположению функции X_i линейно независимы, то n коэфициентов α_i должны удовлетворять системе n линейных однородных уравнений. Если приравнять определитель этой системы нулю, то получится уравнение n-й степени относительно c, которое есть не что иное, как уравнение $D_n(\lambda)=0$, в котором λ заменено на $\frac{1}{c}$. Каждому корню этого уравнения соответствует по крайней мере одна функция $X(x)$, удовлетворяющая условию вида (46), где постоянная c может быть и нулем. Если одну из этих функций принять за X_1, то ясно, что соотношение (46) может удовлетвориться только, если $a_{12}=\ldots=a_{1n}=0$. Выбрав X_1 таким образом, можно дальше применить те же соображения и операции к ядру $X_2Y_2+\ldots+X_nY_n$ и так далее. Мы придем, таким образом, к ядру, данному в такой форме, что $a_{ik}=0$ при $i<k$; для краткости мы будем говорить, что ядро представлено в *приведенной форме*. Таким образом детерминант $D_n(\lambda)$ обратится в произведение $(1-a_{11}\lambda)\ldots(1-a_{nn}\lambda)$. Остается только выразить суммы одинаковых степеней $S_p=\sum a_{ii}^p$ с помощью ядра $K(x, y)$. Соотношения

$$\int_a^b X_i(s) Y_i(s)\, ds = a_{ii}, \quad \int_a^b X_i(s) Y_k(s)\, ds = 0, \quad (i<k)$$

дают непосредственно:

$$S_1 = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{pp}=\int_a^b K(x_1, x_1)\, dx_1$$

* Goursat, *Bulletin de la Société mathématique*, т. 35, 1907, стр. 163; Lebesgue, *Ibid.*, т. 36, 1908, стр. 3.

и вообще

$$S_p = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x_1, x_2) K(x_2, x_3) \ldots K(x_p, x_1) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_p. \tag{47}$$

В самом деле, каждый член кратного интеграла представляет произведение p множителей вида a_{ik}. Если не все a имеют равные индексы, то среди множителей есть по крайней мере один, равный нулю, и интеграл, следовательно, равен $\sum a_{ii}^p$. Отсюда видно, что суммы S_p суть не что иное, как последовательные следы ядра $K(x, y)$. Следовательно, разложение логарифмической производной функции $D_n(\lambda)$ совпадает с разложением логарифмической производной детерминанта Фредгольма (§ 566), а так как $D_n(0) = D(0) = 1$, то эти две функции тождественны.

Примечание. Если ядро представлено в приведенной форме, то $D_n(\lambda)$ является многочленом n-й степени, если только ни одно из чисел $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ не равно нулю, в то время как степень $D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ не выше $n - 1$. Допустим теперь, что некоторые из чисел a_{ii} равны нулю, например $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}$, все же остальные отличны от нуля, тогда $D_n(\lambda)$ будет степени $n - p$, но и степень $D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ не может быть ниже, ибо коэфициент при $X_1(x)\,Y_1(s)$, например, будет по крайней мере степени $n - p$. Отсюда следует, что резольвента есть рациональная функция от λ, которая при бесконечном значении λ обращается в нуль в том случае, если ни одно из чисел a_{ii} не равно нулю, и только в этом случае. Но если ядро $K(x, y)$ каким-нибудь способом представлено в виде $\sum X_i Y_i$, то числа a_{ii}, входящие в приведенную форму, представляют собой корни уравнения $C^n D_n\left(\frac{1}{c}\right) = 0$.

Таким образом, *для того чтобы резольвента при бесконечном значении* λ *обращалась в нуль, необходимо и достаточно, чтобы определитель* $D_n(\lambda)$ *был степени* n.

572. Другой метод индукции. Если предположить, что решение Фредгольма установлено для ядра специального вида $\sum X_i Y_i$, то можно непосредственно перейти от этого элементарного случая к случаю любого непрерывного ядра с помощью перехода к пределу*. Пусть вообще

$$K_1(x, y), K_2(x, y), \ldots, K_n(x, y), \ldots$$

будет последовательность ограниченных ядер (к которым применим метод Фредгольма), которая сходится к некоторому ядру $K(x, y)$. Обозначим через $D_n(\lambda)$, $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$, $D(\lambda)$, $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ целые функции Фредгольма, составленные соответственно с помощью $K_n(x, y)$ и $K(x, y)$. Легко видеть, что при неограниченном возрастании n функция $D_n(\lambda)$ имеет пределом $D(\lambda)$ и что $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ равномерно стремится к $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$. Чтобы доказать первое, достаточно заметить, что $D_n(\lambda)$ и $D(\lambda)$ суть два ряда, относительно λ всегда сходящиеся, члены которых по абсолютной величине меньше (§ 565) соответствующих членов сходящегося ряда с положительными членами, не зависящими от n, и что каждый член ряда $D_n(\lambda)$ имеет своим пределом соответствующий член ряда $D(\lambda)$. Вторая часть этого предложения доказывается совершенно аналогично. Отсюда следует, что, если λ не есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$, то функция

$$\varphi_n(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D_n(\lambda)} \int_a^b D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) f(s) \, ds$$

* E. Goursat, loc. cit., стр. 172.

равномерно стремится к функции $\Phi(x)$, которая имеет вид:

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) f(s)\,ds.$$

С другой стороны, уравнение

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s)\,\varphi_n(s)\,ds + f(x) \tag{48}$$

может быть записано в виде:

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\Phi(s)\,ds + \lambda \int_a^b [K_n(x, s) - K(x, s)]\,\varphi_n(s)\,ds +$$
$$+ \lambda \int_a^b [\varphi_n(s) - \Phi(s)]\,K(x, s)\,ds + f(x); \tag{49}$$

при неограниченном возрастании n два последних интеграла правой части стремятся к нулю, и в пределе мы получаем:

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\Phi(s)\,ds + f(x), \tag{50}$$

т. е. решение Фредгольма применимо также к интегральному уравнению с ядром $K(x, y)$. Отсюда следует, что метод решения Фредгольма применим к уравнению с любым непрерывным ядром, ибо всегда можно указать последовательность многочленов $P_n(x, y)$, которая сходится равномерно к этому ядру (§ 531), а всякий многочлен, очевидно, есть функция вида $\sum X_i Y_i$.

Лебег (loc. cit., стр. 11 и след.) широко обобщил этот метод и показал, что решение Фредгольма применимо к широкому классу неограниченных ядер. К этому результату можно еще притти, если заметить, что в случае ядра вида $\sum X_i Y_i$ метод § 571 не предполагает, что функции X_i и Y_i ограничены, а только что произведения $X_i(s)\,Y_k(s)$, $f(s)\,Y_i(s)$ интегрируемы. Так дело обстоит в случае ядра вида $\sqrt{\frac{y}{x}}$ (§ 561), из которого процессом повторения нельзя получить ограниченного ядра. Большинство вопросов, которые можно поставить относительно интегральных уравнений второго рода, также легко разрешается для случая ядра вида $\sum X_i Y_i$, и это решение может дать полезные указания для общего случая.

II. ИЗУЧЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕГО ЯДРА.

573. Ортогональные и биортогональные системы. В этом и в следующих параграфах мы будем рассматривать функции, которые могут иметь в интервале (a, b) некоторое конечное число точек разрыва, но которые интегрируемы в этом интервале, равно как и их квадраты. Исключаются из рассмотрения только такие разрывные функции $f(x)$, для которых

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$$

(см. следующую главу). Пусть u и v будут две функции этого рода. Для краткости положим

$$(uv) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx;$$

согласно неравенству Шварца этот интеграл имеет конечное значение, ибо интегралы

$$\int_a^b u^2\, dx, \quad \int_a^b v^2\, dx$$

имеют конечные значения. Если имеет место равенство $(uv) = 0$, то функции u и v называются *ортогональными*. Последовательность конечного или бесконечного числа функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{51}$$

составляет *ортогональную систему*, если мы имеем $(\varphi_i \varphi_k) = 0$ при различных индексах i и k. Ясно, что всякая часть ортогональной системы функций представляет также ортогональную систему. *Если n функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ составляют ортогональную систему, то они линейно независимы.* В самом деле, если бы между ними существовала линейная однородная зависимость с постоянными коэфициентами, то, умножая левую часть на $\varphi_i(x)$ и интегрируя в пределах от a до b, мы получили бы, что коэфициент при $\varphi_i(x)$ равен нулю.

Ортогональная система (51) называется *нормальной*, если имеют место равенства $(\varphi_i \varphi_i) = 1$ для любого значения индекса i. Чтобы преобразовать произвольную ортогональную систему в нормальную, очевидно, достаточно разделить каждую функцию $\varphi_i(x)$ этой системы на $\sqrt{(\varphi_i \varphi_i)}$.

Пусть задана система n линейно независимых функций

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n;$$

можно составить n линейных комбинаций этих функций с постоянными коэфициентами, составляющих ортогональную систему. Возьмем, например, $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ и определим постоянное $c_i\ (i > 1)$ так, чтобы две функции $\varphi_1(x)$ и $\pi_i(x) = \varphi_i(x) - c_i \varphi_1(x)$ были ортогональны. В новой последовательности функций $\Phi_1(x),\ \pi_2(x),\ \ldots,\ \pi_n(x)$ первая функция $\Phi_1(x)$ ортогональна ко всем остальным и, следовательно, к любым их линейным комбинациям. Кроме того, эти $n-1$ функций $\pi_i(x)$ линейно независимы, и следовательно, можно с новой последовательностью поступить, как с первой. После n преобразований этого рода мы, очевидно, придем к системе n ортогональных функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, которую можно привести к нормальной системе указанным уже способом.

Ортогональная система, которую можно получить с помощью n функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, не единственная. Действительно, ясно, что из всякой ортогональной системы n функций можно составить новую ортогональную систему, если к функциям этой системы, рассматриваемым как независимые переменные, применить какую-нибудь ортогональную подстановку.

Точно так же говорят, что две последовательности конечного или бесконечного числа функций

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots,\end{array}\right\} \tag{52}$$

поставленных во взаимно однозначное соответствие, составляют *биортогональную систему*, если имеют место равенства $(\varphi_i \psi_k) = 0$ для $i \neq k$. Функции φ_i и ψ_i с одним и тем же индексом называются *союзными*.

Если, кроме того, $(\varphi_i \psi_i) \neq 0$ для всякого i, то можно положить $(\varphi_i \psi_i) = 1$, ибо достаточно разделить $\varphi_i(x)$ на $(\varphi_i \psi_i)$, чтобы это условие было выполнено. Система (52) тогда называется *нормальной системой*. Любое число функций, принадлежащих одной из последовательностей биортогональной системы, в которой $(\varphi_i \psi_i) \neq 0$ при любом i, линейно независима. В самом деле, если бы существовало линейное соотношение между n функциями, например $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, то, умножая левую часть этого соотношения на $\psi_k(x)$ $(k \leqslant n)$ и интегрируя в пределах от a до b, мы нашли бы, что коэфициент при $\varphi_k(x)$ в этом соотношении равен нулю.

Пусть $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ и $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$ будут две группы по p функций таких, что не существует ни одной линейной комбинации функций φ_i с постоянными коэфициентами (из которых по крайней мере один отличен от нуля), которая была бы ортогональна к функциям ψ_i, и наоборот, из этих двух групп можно построить две группы функций, составляющих биортогональную систему. Заметим, прежде всего, что из принятых допущений следует, что p функций φ_i линейно независимы, как и p функций ψ_i. В самом деле, если бы существовала линейная комбинация функций φ_i, которая была бы тождественно равна нулю, то эта линейная комбинация была бы ортогональна ко всем функциям ψ_i. Приняв это во внимание, примем $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$, и пусть $\Psi_1(x)$ будет такая линейная комбинация функций ψ, что $(\Phi_1 \Psi_1)$ отлично от нуля. Выберем затем $2p-2$ коэфициентов $c_2, c_3, \ldots, c_p, c'_2, \ldots, c'_p$ таких, чтобы было:

$$\left.\begin{array}{l}(\Phi_1, \psi_i - c'_i \Psi_1) = 0, \\ (\Psi_1, \varphi_i - c_i \Phi_1) = 0,\end{array}\right\} \quad (i = 2, \ldots, p).$$

Это сделать возможно, ибо (Φ_1, Ψ_1) не равно нулю. При этом $p-1$ функций $(\pi_2, \ldots, \pi_p)$, где $\pi_i = \varphi_i - c_i \Phi_1$ линейно независимы и ортогональны к функции Ψ_1; точно так же $p-1$ функций $(\chi_2, \ldots, \chi_p)$, где $\chi_i = \psi_i - c'_i \Psi_1$, линейно независимы и ортогональны к функции Φ_1. Кроме того, ясно, что никакая линейная комбинация функций π_i не будет ортогональна ко всем функциям χ_i, и наоборот. Повторяя ту же операцию над двумя группами функций $(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_p)$ и $(\chi_2, \ldots, \chi_p)$ и продолжая так далее, мы, очевидно, придем к двум группам по p функций $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ и $(\Psi_1, \ldots, \Psi_p)$, составляющим биортогональную систему, которую можно будет сделать нормальной указанным выше способом.

Примечание. В предыдущих рассуждениях мы неявно предполагали, что значения переменного и функций действительны. Все соображения, приведенные относительно биортогональной системы, остаются в силе, если переменное x по-прежнему является действительным, а функции φ_i и ψ_i принимают комплексные значения, ибо никакие предыдущие рассуждения не опирались на то, что эти значения действительны. Это, однако, не относится к ортогональной системе, и в случае, когда функции этой системы могут принимать комплексные значения, определение следует обобщить. Мы будем говорить, что система функций φ есть ортогональная система, если, отнеся каждой из этих функций сопряженную с ней функцию, мы получим биортогональную систему. Отсюда легко показать, что если n функций составляют ортогональную систему, то они линейно независимы, и, наоборот, если заданы n линейно независимых функций, то из них можно составить n линейных комбинаций с постоянными коэфициентами, составляющих ортогональную систему.

574. Ортогональные и полуортогональные ядра. Два ядра $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ — ограниченные или неограниченные — называются *ортогональными*, если они удовлетворяют двум условиям:

$$\int_a^b K_1(x, s) K_2(s, y)\,ds = 0, \qquad \int_a^b K_2(x, s) K_1(s, y)\,ds = 0 \tag{53}$$

при любых значениях переменных x и y. Они называются полуортогональными, если выполняется одно из этих условий *.

Теорема А. *Если $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ — два ортогональных ядра, то резольвента $\Gamma(x, y; \lambda)$, соответствующая ядру $S(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y)$, равна сумме резольвент $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ и $\Gamma_2(x, y; \lambda)$, соответствующих каждому из этих ядер.*

Достаточно показать, что если K_1 и K_2 ортогональны, то всякие два ядра, полученные из K_1 и K_2 некоторым числом повторений, также ортогональны. Например, если

$$K_1^{(n)}(x, y) = \int_a^b K_1(x, s) K_1^{(n-1)}(s, y)\,ds,$$

$$K_2^{(p)}(x, y) = \int_a^b K_2^{(p-1)}(x, t) K_2(t, y)\,dt,$$

то можно записать:

$$\int_a^b K_2^{(p)}(x, s) K_1^{(n)}(s, y)\,ds =$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int K_2^{(p-1)}(x, u) K_2(u, s) K_1(s, v) K_1^{(n-1)}(v, y)\,ds\,du\,dv =$$

$$= \int_a^b\!\!\int_a^b K_2^{(p-1)}(x, u) K_1^{(n-1)}(v, y)\,du\,dv \int_a^b K_2(u, s) K_1(s, v)\,ds = 0; \tag{54}$$

---

* E. Goursat, *Comptes rendus*, т. 145, стр. 667 и 752, 1907; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2-я серия, т. X, 1908; B. Heywood, *Comptes rendus*, т. 145, стр. 908; *Journal de Mathématiques*, 1908. Я доказал также теоремы А и В, опираясь на строение определителей Фредгольма.

точно так же можно доказать, что

$$\int_a^b K_1^{(n)}(x, s)\, K_2^{(p)}(s, y)\, ds = 0,$$

если повторные ядра записать по-другому. Из соотношений (54) непосредственно вытекает, что ядро $S^{(2)}(x, y)$, полученное из $K_1 + K_2$ первым повторением, равно $K_1^{(2)}(x, y) + K_2^{(2)}(x, y)$. Находя одно за другим все следующие ядра, мы покажем, что n-е повторное ядро $S^{(n)}(x, y)$ равно $K_1^{(n)}(x, y) + K_2^{(n)}(x, y)$. Складывая почленно разложения резольвент $\Gamma_1(x, y; \lambda)$, $\Gamma_2(x, y; \lambda)$ (§ 559), мы находим формулу, которую нужно было доказать:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \lambda) + \Gamma_2(x, y; \lambda). \tag{55}$$

Ясно, что ядро, ортогональное к нескольким другим ядрам, ортогонально также и к их сумме. Это позволяет распространить теорему на несколько ядер. *Если n ядер $K_1, K_2, \ldots, K_n$ попарно ортогональны, то резольвента, соответствующая их сумме $S(x, y) = K_1 + \ldots + K_n$, равна сумме резольвент, соответствующих каждому из этих ядер.*

Из доказательства вытекает, что из каждой пары ортогональных ядер K_1, K_2 можно получить бесчисленное множество других. В самом деле, сумма любого числа ядер, полученных из ядра $K_1(x, y)$ повторениями, ортогональна ко всякому другому ядру, полученному таким же путем из ядра $K_2(x, y)$. Сами разрешающие ядра $\Gamma_1(x, y; \lambda)$, $\Gamma_2(x, y; \mu)$ также ортогональны, каковы бы ни были значения λ и μ.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ будут два решения двух интегральных уравнений:

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_a^b K_1(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds + f(x),$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_a^b K_2(x, s)\, \varphi_2(s)\, ds + f(x),$$

где ядра K_1 и K_2 ортогональны. Если λ не есть особое значение для одного из ядер, то согласно предыдущей теореме о резольвентах, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) - f(x)$ будет решением интегрального уравнения:

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b \{K_1(x, s) + K_2(x, s)\}\, \Phi(s)\, ds + f(x).$$

Это свойство легко показать и непосредственно, так как предложение, которое нужно доказать, приводит к следующему:

$$\int_a^b K_1(x, s)\, [\varphi_2(s) - f(s)]\, ds + \int_a^b K_2(x, s)\, [\varphi_1(s) - f(s)]\, ds = 0.$$

Если теперь принять во внимание самые интегральные уравнения и ортогональность ядер, то ясно, что оба эти интеграла равны нулю. Заметим, что это доказательство остается в силе и для того случая, когда λ будет собственным значением для одного из ядер, и что это свойство распространяется на любое число попарно ортогональных ядер.

Рассмотрим теперь два полуортогональных ядра и положим, например, что эти ядра удовлетворяют второму из уравнений (53). Мы будем для краткости говорить, что ядро $K_2(x, y)$ *ортогонально справа* к ядру $K_1(x, y)$, а ядро $K_1(x, y)$ *ортогонально слева* к ядру $K_2(x, y)$. Ядра $K_2^{(p)}(x, y)$ и $K_1^{(n)}(x, y)$, полученные из первых некоторым числом повторений, удовлетворяют тому же соотношению, т. е *всякое ядро, полученное повторением из ядра $K_2(x, y)$, ортогонально справа ко всем ядрам, полученным повторением из ядра $K_1(x, y)$*. Предложение это доказывается с помощью формулы (54), правая часть которой равна нулю в силу второго из соотношений (53). После этих замечаний докажем, что если ядра $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ ограничены или, в более общем случае, если решение Фредгольма применимо к каждому из них, то имеет место следующая теорема:

Теорема В. *Если $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ — два ортогональных или полуортогональных ядра, $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ — определители Фредгольма для этих ядер, то определитель Фредгольма $\omega(\lambda)$ для ядра $S(x, y) = K_1 + K_2$ равен произведению $D_1(\lambda) D_2(\lambda)$.*

Принимая во внимание предыдущие соотношения и рассматривая последовательные повторные ядра, можно показать, что ядро $S^{(n)}(x, y)$ имеет вид:

$$S^{(n)}(x, y) = K_1^{(n)}(x, y) + K_2^{(n)}(x, y) + \sum C_{p,q} \int_a^b K_1^{(p)}(x, s) K_2^{(q)}(s, y)\, ds,$$

где $C_{p,q}$ — целые числа, таким образом имеем:

$$\int_a^b S^{(n)}(s, s)\, ds = \int_a^b K_1^{(n)}(s, s)\, ds + \int_a^b K_2^{(n)}(s, s)\, ds + \\ + \sum C_{p,q} \int_a^b \int_a^b K_1^{(p)}(t, s) K_2^{(q)}(s, t)\, ds\, dt.$$

Последний член равен нулю, как это можно видеть, интегрируя сначала по переменному t; отсюда следует, что n-й след ядра $S(x, y)$ равен сумме следов того же порядка ядер K_1 и K_2. Отсюда

$$\frac{\mathfrak{D}'(\lambda)}{\mathfrak{D}(\lambda)} = \frac{D_1'(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{D_2'(\lambda)}{D_2(\lambda)}, \tag{56}$$

и следовательно,

$$\mathfrak{D}(\lambda) = D_1(\lambda) D_2(\lambda).$$

Примечание. Если два ядра ортогональны, то соотношение (56) выводится непосредственно из формулы (55) и соотношения (15), которое дает логарифмическую производную функции $D(\lambda)$. В этом случае теорема справедлива для суммы любого числа ядер, попарно ортогональных, к которым применим метод решения Фредгольма.

575. Приложение к фундаментальным функциям. Всякая функция, не равная тождественно нулю и удовлетворяющая соотношению:

$$\varphi(x) = c \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,xs, \tag{57}$$

есть фундаментальная функция ядра $K(x, y)$. В силу общей формулы, которая дает решение уравнения второго рода, для того чтобы это уравнение имело отличное от нуля решение, число c должно быть полюсом резольвенты, и обратно, *всякому полюсу резольвенты соответствует по крайней мере одна фундаментальная функция.*

Предложение уже доказано для случая ограниченного ядра (§ 568). Следующее доказательство, основанное на функциональном уравнении резольвенты, является более общим. Пусть $\lambda = c$ будет полюс n-го порядка разрешающего ядра, и пусть

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{B_n(x, y)}{(\lambda - c)^n} + \frac{B_{n-1}(x, y)}{(\lambda - c)^{n-1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{B_1(x, y)}{\lambda - c} + A_0(x, y) + A_1(x, y)(\lambda - c) + \dots$$

будет разложением этого ядра в области полюса. Положим $\lambda = c + h$ и заменим в обеих частях функционального уравнения (60) § 559 резольвенты $\Gamma(x, y; c + h)$ ее разложением. Мы получим:

$$\frac{B_n(x, y)}{h^n} + \frac{B_{n-1}(x, y)}{h^{n-1}} + \dots + \frac{B_1(x, y)}{h} + A_0(x, y) + A_1(x, y)\,h + \dots =$$

$$= K(x, y) + (c + h)\int_a^b K(x, t)\left[\frac{B_n(t, y)}{h^n} + \dots\right] dt. \tag{58}$$

Приравнивая коэфициент при h^{-n} в обеих частях, мы получим соотношение:

$$B_n(x, y) = c\int_a^b K(x, t)\,B_n(t, y)\,dt, \tag{59}$$

которое показывает, что $B_n(x, y_1)$ есть фундаментальная функция ядра, соответствующая особому значению c, каково бы ни было постоянное значение y_1, приписанное переменному y. Аналогичным путем, пользуясь вторым функциональным уравнением (61), можно показать, что $B_n(x_1, y)$ представляет решение союзного однородного уравнения:

$$\psi(y) = c\int_a^b K(t, y)\,\psi(t)\,dt,$$

где переменному x приписано произвольное постоянное значение x_1.

Выше (§ 568) мы видели, что, если ядро ограничено, то полюсу c резольвенты соответствует только конечное число линейно независимых фундаментальных функций. Это свойство также легко получить из теоремы В. Пусть, в самом деле, $\lambda = c$ будет корнем кратности m уравнения $D(\lambda) = 0$, и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ будут линейно независимые фундаментальные функции, соответствующие этому полюсу. Мы покажем, что не может быть $p > m$. Пусть $\pi_1(x)$ есть такая функция, что $c(\varphi_1\pi_1) = 1$. Положим $K(x, y) = \varphi_1(x)\pi_1(y) + K_1$. Согласно условию, которому удовлетворяет функция π_1, два ядра $\varphi_1(x)\pi_1(y)$ и $K_1(x, y)$ полуортогональны. Но определитель Фредгольма для ядра $\varphi_1(x)\pi_1(y)$ равен $1 - \frac{\lambda}{c}$ (§ 571); отсюда следует, что уравнение $D_1(\lambda) = 0$, соответствующее ядру $K_1(x, y)$, имеет корень $\lambda = c$ кратности $m - 1$. Теперь легко для этого ядра $K_1(x, y)$ составить $p - 1$ линейно независимых фундаментальных функций. Действительно, если положить $\psi_2(x) = \varphi_2(x) + c_1\varphi_1(x)$, то, принимая во внимание, что φ_1 и φ_2 суть фундаментальные функции ядра $K(x, y)$, получим:

$$c\int_a^b \psi_r(s) K_1(x, s)\, ds = \psi_r(x) - \varphi_1(x)\left[c\int_a^b \pi_1(s)\varphi_r(s)\, ds + c_r\right];$$

выбирая c_r так, чтобы коэфициент при $\varphi_1(x)$ был равен нулю, и полагая последовательно $r = 2, 3, \ldots, p$, мы получим $p - 1$ различных фундаментальных функций для ядра $K_1(x, y)$. Если бы было $p > m$, то, продолжая таким же путем, мы пришли бы к ядру, для которого c не было бы особым значением и которое тем не менее имело бы фундаментальную функцию, соответствующую c.

Теорема распространяется на любое неограниченное ядро, если только из него *конечным* числом повторений можно получить ядро, к которому применимо решение Фредгольма. Пусть c есть особое значение для ядра $K(x, y)$, а $\varphi(x)$ — соответствующая фундаментальная функция. Умножая обе части соотношения

$$\varphi(s) = c\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt$$

на $cK(x, s)$ и интегрируя, получаем:

$$\varphi(x) = c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds = c^2\int_a^b\int_a^b K(x, s) K(s, t)\varphi(t)\, ds\, dt =$$
$$= c^2\int_a^b K^{(2)}(x, t)\varphi(t)\, dt,$$

а отсюда рекуррентным путем нетрудно получить соотношение:

$$\varphi(x) = c^p\int_a^b K^{(p)}(x, s)\varphi(s)\, ds,$$

справедливое для любого p.

Итак, *всякая фундаментальная функция ядра $K(x, y)$, соответствующая полюсу c резольвенты, является также фундаментальной функцией и для ядра $K^{(p)}(x, y)$, а соответствующий полюс новой резольвенты равен c^p* *.

Если решение Фредгольма применимо к повторному ядру $K^{(p)}(x, y)$, то существует только конечное число фундаментальных функций, соответствующих полюсу c разрешающего ядра.

Если дано несколько ядер $K_1(x, y), \ldots, K_p(x, y)$, попарно ортогональных, то сумму

$$S(x, y) = K_1(x, y) + \ldots + K_p(x, y)$$

мы будем называть *результирующим ядром*, а ядра $K_1, K_2, \ldots, K_p$ — *составляющими ядрами*. Всякий полюс c резольвенты результирующего ядра является полюсом по крайней мере одной из резольвент составляющих ядер. И, наоборот, всякий полюс резольвенты одного из составляющих ядер есть также полюс резольвенты результирующего ядра. Мы будем говорить, что функция $\varphi(x)$ ортогональна справа к ядру $K(x, y)$, если равенство $\int\limits_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0$ выполняется при всяком x. Если два ядра $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ ортогональны, то всякая функция

$$K_1(\varphi) = \int\limits_a^b K_1(x, t)\varphi(t)\,dt$$

---

* Обратное предложение не всегда имеет место. Пусть $\psi(x)$ будет решением уравнения:

$$\psi(x) = c^p \int\limits_a^b K^{(p)}(x, s)\psi(s)\,ds; \tag{E}$$

положим:

$$\pi_\nu(x) = \psi(x) + c\omega^\nu \int\limits_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds + \ldots + c^{p-1}\omega^{\nu(p-1)} \int\limits_a^b K^{(p-1)}(x, s)\psi(s)\,ds,$$

где ν — одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, p-1$, а ω — первообразный корень уравнения $\omega^p = 1$. Нетрудно показать, что $\pi_\nu(x)$ представляет решение уравнения

$$\pi_\nu(x) = c\omega^\nu \int\limits_a^b K(x, s)\pi_\nu(s)\,ds. \tag{e}$$

Кроме того, функции $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{p-1}$ не могут быть одновременно равны нулю, ибо их сумма $\pi^0 + \pi_1 + \ldots + \pi_{p-1}$ равна $p\psi(x)$. Всякое решение уравнения (E) дает решение по крайней мере для одного из уравнений (i_ν) но не обязательно представляет решение уравнения (i_0) (см. дальше § 579).

Если, однако, целое число p выбрано так, что ни одно из чисел $c\omega, c\omega^2, \ldots, c\omega^{p-1}$ не является полюсом резольвенты ядра $K(x, y)$ (это всегда можно сделать и притом бесконечным множеством способов), то уравнение, (1_ν), где $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, не имеет других решений, кроме $\pi_\nu = 0$; следовательно, $\pi_0(x)$ тождественно с $p\psi(x)$, и уравнения (E) и (1_0) имеют общие решения.

ортогональна справа к ядру $K_2(x, y)$. Действительно, можно записать:

$$\int_a^b K_2(x, s) K_1[\varphi(s)]\, ds = \int_a^b\int_a^b K_2(x, s) K_1(s, t)\varphi(t)\, ds\, dt,$$

а в силу ортогональности ядер правая часть равна нулю. Отсюда в частности следует, что *если два ядра K_1 и K_2 ортогональны, то всякая фундаментальная функция одного из ядер ортогональна к другому ядру*. В самом деле, пусть $\varphi(x)$ будет фундаментальная функция ядра $K_1(x, y)$; эта функция будет вида $cK_1(\varphi)$, и следовательно, согласно предыдущему замечанию, она ортогональна к ядру $K_2(x, y)$.

Пусть будут $K_1, K_2, \ldots, K_p$ попарно ортогональные ядра, $S(x, y)$ — их сумма, c — особое значение, например, для ядра $K_1(x, y)$, $\varphi(x)$ — соответствующая фундаментальная функция. Функция $\varphi(x)$ ортогональна ко всем другим ядрам $K_2, K_3, \ldots, K_p$, и следовательно,

$$\varphi(x) = c\int_a^b S(x, s)\varphi(s)\, ds.$$

Отсюда вытекает следующее предложение:

Всякий полюс резольвенты одного из составляющих ядер есть также полюс резольвенты результирующего ядра, а всякая фундаментальная функция одного из слагающих ядер есть фундаментальная функция результирующего ядра.

Чтобы выяснить, справедливо ли обратное предложение, положим $p=2$. Пусть $\varphi(x)$ будет фундаментальная функция для ядра

$$S(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y),$$

соответствующая полюсу c. Если через $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ обозначить выражения $cK_1(\varphi)$, $cK_2(\varphi)$, то согласно допущению имеем:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Но так как два ядра K_1 и K_2 ортогональны, то $\varphi_1(x)$ ортогональна к ядру $K_2(x, y)$, а $\varphi_2(x)$ ортогональна к ядру $K_1(x, y)$, и следовательно, если заменить $\varphi(x)$ на $\varphi_1 + \varphi_2$, можно записать предыдущее соотношение в виде:

$$\varphi_1(x) = cK_1(\varphi_1), \quad \varphi_2(x) = cK_2(\varphi_2).$$

Так как по крайней мере одна из функций φ_1, φ_2 отлична от нуля, то отсюда следует, что число c является полюсом по крайней мере для одной из резольвент ядер K_1 или K_2. Если c есть полюс только для одной из них, например для первой, то $\varphi_2 = 0$, $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi(x)$ есть фундаментальная функция ядра $K_1(x, y)$. Если c — полюс для резольвент обоих ядер, то $\varphi(x)$ есть сумма двух фундаментальных функций. Эти рассуждения без труда распространяются на любое число попарно ортогональных ядер, и следовательно, *всякая фундаментальная функция результирующего ядра есть фундаментальная функция одного из состав-*

ляющих ядер или является суммой фундаментальных функций тех составляющих ядер, которые соответствуют общему полюсу их резольвент.

Если, в частности, резольвенты составляющих ядер попарно не имеют общих полюсов, то мы получим все фундаментальные функции результирующего ядра, если возьмем все фундаментальные функции составляющих ядер.

576. Главные ядра *. Мы уже видели, какую важную роль играет функциональное уравнение (§ 560):

$$\Gamma(x, y; \lambda) - \Gamma(x, y; \mu) = (\lambda - \mu) \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda) \Gamma(t, y; \mu)\, dt, \tag{60}$$

которое характеризует разрешающие ядра. Применим его к изучению резольвенты в области полюса $\lambda = c$. Если записать разложение резольвенты в области полюса, как мы его приводим выше (§ 575), то уравнение (60) принимает вид:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} B_i(x, y) \left\{\left(\frac{1}{\lambda - c}\right)^i - \left(\frac{1}{\mu - c}\right)^i\right\} + \\ + \sum_{p=1}^{+\infty} A_p(x, y) \left\{(\lambda - c)^p - (\mu - c)^p\right\} = \\ = (\lambda - \mu) \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \left(\frac{1}{\lambda - c}\right)^i + \sum_{p=0}^{+\infty} A_p(x, t)(\lambda - c)^p\right] \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^{n} B_i(t, y) \left(\frac{1}{\mu - c}\right)^i + \sum_{p=0}^{+\infty} A_p(t, y)(\mu - c)^p\right] dt,\end{gathered} \tag{61}$$

или, полагая $\lambda - c = h$, $\mu - c = k$ и разделив на $h - k$:

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(x, y)}{hk} \left\{\frac{1}{h^{i-1}} + \frac{1}{h^{i-2}}\frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k^{i-1}}\right\} + \\ + \sum_{p=1}^{+\infty} A_p(x, y) \left\{h^{p-1} + h^{p-2}k + \ldots + k^{p-1}\right\} =\end{gathered}$$

* В моем мемуаре в *Annales de Toulouse* я вел исследования о главных ядрах, опираясь почти исключительно на теоремы A и B. Изложение сильно сокращается, как это показал уже Лалеско, если пользоваться еще функциональным уравнением разрешающего ядра. Метод, которого я буду придерживаться, несколько отличен от метода Лалеско и не предполагает известной теорию элементарных делителей

$$= \int_a^b \left[\sum_1^n \frac{1}{h^i} B_i(x, t) + \sum_0^{+\infty} A_p(x, t) h^p\right] \times$$
$$\times \left[\sum_1^n \frac{1}{k^i} B_i(t, y) + \sum_0^{+\infty} A_p(t, y) k^p\right] dt. \tag{61bis}$$

Предыдущее соотношение должно выполняться при любых h и k. Так как в левую часть не входят члены, содержащие $\frac{k^p}{h^i}$ и $\frac{h^p}{k^i}$, где p — положительное число или нуль, то коэфициенты при этих членах в правой части должны быть равны нулю, откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b B_i(x, t) A_p(t, y)\, dt = 0, \\ &\int_a^b B_i(t, y) A_p(x, t)\, dt = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ i = 1, 2, \quad \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Если обозначить через $\gamma(x, y; \lambda)$ главную часть разрешающего ядра и через $H(x, y; \lambda)$ — правильную часть его, то из соотношений (62) вытекает, что

$$\int_a^b \gamma(x, t; \lambda) H(t, y; \mu)\, dt = 0, \quad \int_a^b H(x, t; \mu) \gamma(t, y; \lambda)\, dt = 0, \tag{63}$$

при любых значениях λ и μ, если только разложение $H(x, y; \mu)$ по степеням $(\mu - c)$ сходится. Но функция

$$H(x, y; \mu) = \Gamma(x, y; \mu) - \gamma(x, y; \mu)$$

есть мероморфная функция от μ, и следовательно, соотношения (63) справедливы для любых значений λ и μ, в частности для $\lambda = \mu = 0$. Для краткости положим

$$k(x, y) = \gamma(x, y; 0) \quad \text{и} \quad H(x, y) = K(x, y) - k(x, y).$$

Тогда ядро $K(x, y)$ распадается на два ортогональных ядра $k(x, y)$ и $H(x, y)$, первое из которых $k(x, y)$ получится, если положить $\lambda = 0$ в главной части резольвенты, относящейся к полюсу $\lambda = c$.

Чтобы до конца использовать тождественность обеих частей формулы (61bis), необходимо, с одной стороны, приравнять коэфициенты при различных степенях $\frac{1}{h}$ и $\frac{1}{k}$, которые входят только в главную часть, и, с другой стороны, коэфициенты при положительных степенях h и k, которые входят только в правильную часть. Эти две группы формул можно получить независимо одну от другой, либо полагая правильную часть равной нулю, либо, наоборот, принимая во внимание только правильную часть Ясно, что эти две группы формул могут быть объединены в двух следующих формулах:

$$\gamma(x, y; \lambda) - \gamma(x, y; \mu) = (\lambda - \mu) \int_a^b \gamma(x, t; \lambda)\gamma(\ , y; \mu)\, dt, \tag{64}$$

$$H(x, y; \lambda) - H(x, y; \mu) = (\lambda - \mu) \int_a^b H(x, t; \lambda) H(t, y; \mu)\, dt. \tag{65}$$

Первая из них выражает, что резольвента ядра $k(x, y)$ есть не что иное, как главная часть $\gamma(x, y; \lambda)$ резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$ в области полюса c. Вторая выражает, что резольвента ядра $H(x, y)$ совпадает с правильной частью резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$ в области этого полюса. Ядро $k(x, y)$ носит название *главного ядра*, соответствующего полюсу c. Достаточно знать это главное ядро, чтобы определить фундаментальные функции, соответствующие значению c, так как c не есть особое значение ядра H.

Таким образом каждому полюсу резольвенты соответствует главное ядро. *Два главных ядра, соответствующие двум различным полюсам, ортогональны.*

Пусть будут $k_1(x, y)$ и $k_2(x, y)$ два главных ядра, соответствующие полюсам c_1 и c_2. Ядро $k_1(x, y)$ ортогонально к ядру

$$H_1(x, y) = K(x, y) - k_1(x, y).$$

Так как резольвента $\gamma_1(x, y; \lambda)$ правильна в области точки $\lambda = c_2$, то ясно, что $k_2(x, y)$ совпадает с главным ядром, которое может быть получено из ядра H_1. Положим $H_1(x, y) = H_2 + k_2$, и пусть

$$\Gamma_2(x, y; \lambda), \quad \gamma_2(x, y; \lambda)$$

будут резольвенты для этих ядер. Ядро $k_1(x, y)$ ортогонально к резольвенте $\Gamma_2(x, y; \lambda) + \gamma_2(x, y; \lambda)$ ядра $H_1(x, y)$, и следовательно,

$$\int_a^b k_1(x, t)\,[\Gamma_2(t, y; \lambda) + \gamma_2(t, y; \lambda)]\, dt = 0.$$

Но интеграл

$$\int_a^b k_1(x, t)\,\gamma_2(t, y; \lambda)\, dt$$

есть рациональная функция от λ, имеющая единственный полюс $\lambda = c_2$ и исчезающая в бесконечности, между тем как интеграл

$$\int_a^b k_1(x, t)\,\Gamma_2(t, y; \lambda)\, dt$$

есть голоморфная функция от λ в области $\lambda = c_2$. Таким образом оба эти интеграла должны быть равны нулю, и следовательно, ядро $k_1(x, y)$ ортогонально к обоим ядрам k_2 и H_2.

577. Строение главного ядра. Для того чтобы функция $K(x, y)$ была главным ядром, необходимо, чтобы резольвента относительно этого ядра была рациональною функцией от λ, имеющею один полюс и равною нулю в бесконечности. Определим сначала, в каком случае резольвента будет иметь один полюс первого порядка. Она должна быть вида:

$$\frac{K(x, y)}{1-\frac{\lambda}{c}} = K(x, y)\left(1+\frac{\lambda}{c}+\frac{\lambda^2}{c^2}+\ldots+\frac{\lambda^p}{c^p}+\ldots\right),$$

для чего необходимо, чтобы было вообще (§ 559)

$$c^{p-1} K^{(p)}(x, y) = K(x, y) \qquad (p=2, 3, \ldots)$$

Эти условия, как нетрудно видеть, сводятся к первому из них:

$$K(x, y) = c\int_a^b K(x, s) K(s, y)\, ds, \tag{66}$$

которое выражает, что $K(x, y_0)$ есть фундаментальная функция ядра $K(x, y)$, соответствующая полюсу c, какое бы постоянное значение y_1 мы ни дали переменному y. Так как существует только конечное число различных фундаментальных функций, то отсюда следует, что $K(x, y)$ есть линейная комбинация p линейно независимых функций $\varphi_i(x)$ с коэффициентами, зависящими от y:

$$K(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_p(x)\psi_p(y), \tag{67}$$

где функции $\psi_1(y), \ldots, \psi_p(y)$ также линейно независимы. Если в соотношении (66) заменить $K(x, y)$ его выражением (67), то мы увидим, что функции φ_i, ψ_k должны удовлетворять соотношениям:

$$(\varphi_i\psi_k) = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k,$$
$$c(\varphi_i\psi_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

так что функции $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$, $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$ составляют биортогональную систему. Наоборот, из каждой биортогональной системы можно получить ядро $K(x, y)$, отвечающее условию задачи. Заметим, что функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ представляют p решений однородного союзного уравнения:

$$\psi(y) = c\int_a^b K(t, y)\psi(t)\, dt$$

и что определитель Фредгольма $D(\lambda) = \left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^p$ (§ 571). Прежде чем рассмотреть общий случай, докажем одну лемму.

Лемма. *Всякое решение интегрального уравнения*

$$\varphi(x, y) - c\int_a^b K(x, s)\varphi(s, y)\, ds = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) Y_i(y) \tag{68}$$

имеет такой же вид, как правая часть этого уравнения.

В самом деле, пусть $\varphi(x, y)$ представляет некоторое решение этого уравнения. Предполагая, что n функций $Y_i(y)$ линейно независимы, дадим переменному $y n$ частных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ таких, чтобы детерминант, составленный из элементов $Y_i(y_k)$, был отличен от нуля. Из полученной системы n уравнений можно определить функции $X_1, \ldots, X_n$. Так, например, получим:

$$X_1(x) = \Phi_1(x) - c\int_a^b K(x, s)\,\Phi_1(s)\,ds,$$

где $\Phi_1(x)$ есть выражение вида $\sum a_i\,\varphi(x_i, y_i)$ с постоянными коэфициентами a_i. Точно так же мы с помощью функции $\varphi(x, y)$ получим решение $\Phi_i(x)$ уравнения:

$$\Phi_i(x) - c\int_a^b K(x, s)\,\Phi_i(s)\,ds = X_i(x),$$

а следовательно, и решение $\Phi(x, y) = \sum \Phi_i(x)\,Y_i(y)$ уравнения (68), которое действительно имеет требуемый вид. Всякое другое решение будет иметь вид $\Phi(x, y) + \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ есть решение однородного уравнения:

$$\psi(x, y) = c\int_a^b K(x, s)\,\psi(s, y)\,ds.$$

Но все решения этого уравнения, рассматриваемые как функции от x, представляют линейные комбинации конечного числа (оно может быть равно нулю) функций от x. Следовательно, всякое решение уравнения (68) имеет указанную форму.

Приняв это во внимание, вернемся к методу сравнения коэфициентов, примененному в § 575. Прежде всего мы видим, что функция $B_n(x, y)$, которая при любом заданном постоянном значении y представляет фундаментальную функцию ядра $K(x, y)$, имеет вид:

$$B_n(x, y) = \varphi_1(x)\,\psi_1(y) + \ldots + \varphi_r(x)\,\psi_r(y), \tag{69}$$

ибо существует только конечное число фундаментальных функций, соответствующих числу c. Приравнивая коэфициенты при h^{1-n} в обеих частях тождества (58), мы приходим к соотношению:

$$B_{n-1}(x, y) = c\int_a^b K(x, t)\,B_{n-1}(t, y)\,dt + \int_a^b K(x, t)\,B_n(t, y)\,dt.$$

Но так как $B_n(x, y)$ имеет вид (69), то из предыдущей леммы следует, что и $B_{n-1}(x, y)$ имеет тот же вид. Вообще имеет место такое рекуррентное соотношение:

$$B_{n-i}(x, y) = c\int_a^b K(x, t)\,B_{n-i}(t, y)\,dt + \int_a^b K(x, t)\,B_{n-i+1}(t, y)\,dt,$$

откуда последовательно убеждаемся в том, что все коэфициенты главной части имеют один и тот же вид, а следовательно, и само главное ядро будет того же вида $\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \ldots + \varphi_m\psi_m$, причем m функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ можно предположить линейно независимыми, как и m функций $\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_m(y)$. Выше (§ 571) мы видели, что соответствующее разрешающее ядро обращается в нуль при бесконечном значении λ только в том случае, если не существует никакой линейной комбинации φ_i, которая была бы ортогональна ко всем ψ_k. Определитель Фредгольма $D(\lambda)$, полученный из этого ядра, представляет многочлен m-й степени, все корни которого являются полюсами резольвенты (§ 565). Для того чтобы эта резольвента имела единственный полюс $\lambda = c$, необходимо, следовательно, чтобы было

$$D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^m.$$

Это условие и достаточно, ибо в таком случае резольвента есть не что иное, как частное от деления многочлена $(m-1)$-й степени относительно λ на $D(\lambda)$ (§ 571).

Всякая линейная комбинация m функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ с постоянными коэфициентами есть *главная функция* ядра $K(x, y)$, соответствующая полюсу c резольвенты.

Всякая группа m линейно независимых главных функций составляет *главную группу*. Функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ и все их линейные комбинации с постоянными коэфициентами представляют *союзные главные функции*. Если главное ядро представлено в форме

$$\varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(y),$$

то говорят, что две группы функций $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ и $(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ представляют *две главные союзные группы*.

Очевидно, существует бесчисленное множество систем главных союзных групп, ибо главное ядро может быть представлено бесчисленным количеством способов в указанном выше виде. Всякая система m линейно независимых комбинаций из m функций $\varphi_i(x)$ может быть принята за главную группу, и этим выбором определяется главная союзная группа (§ 571). Произволом этого выбора мы воспользуемся для того, чтобы представить главное ядро в таком виде, который делает очевидным свойства этого ядра.

578. Приведение к каноническому виду. Итак, всякое главное ядро $k(x, y)$, соответствующее полюсу c резольвенты, имеет вид:

$$k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(y), \tag{70}$$

где $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ суть m линейно независимых функций от x, а $\psi_1(y), \ldots, \psi_m(y)$ — m линейно независимых функций от y.

Более того, эти функции должны быть таковы, чтобы определитель

$$D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - a_{11}\lambda & -a_{12}\lambda & \dots & a_{1m}\lambda \\ -a_{21}\lambda & 1 - a_{22}\lambda & \dots & a_{2m}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1}\lambda & -a_{m2}\lambda & \dots & 1 - a_{mm}\lambda \end{vmatrix} \tag{71}$$

где $a_{ih} = \int\limits_a^b \varphi_i(x)\psi_h(x)\,dx$, был тождественно равен $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^m$. С другой стороны, мы приходим к уравнению, эквивалентному уравнению $D_m(\lambda) = 0$, при изучении следующего вопроса. Принимая во внимание значение коэфициентов a_{ih}, мы имеем:

$$k[\varphi_i(x)] = a_{i1}\varphi_1(x) + \dots + a_{im}\varphi_m(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m); \tag{72}$$

если теперь поставить задачу нахождения линейной комбинации

$$\Phi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x)$$

с постоянными коэфициентами, такой, чтобы было

$$k[\Phi(x)] = s\,\Phi(x), \tag{73}$$

где s — постоянная, то для определения множителя s, как это нетрудно видеть, мы придем к уравнению:

$$F(s) = (-1)^m s^m D_m\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{c} - s\right)^m = 0. \tag{74}$$

Следовательно, уравнения (72) определяют линейную подстановку с характеристическим уравнением $\left(\frac{1}{c} - s\right)^m = 0$, а к этой подстановке мы можем применить известные результаты о приведении линейной подстановки к каноническому виду (т. II, § 409—410). Мы видели, что существует m линейно независимых комбинаций функций φ_i, которые при применении к ним операции $k(\ )$ подвергаются линейной подстановке канонического вида. Чтобы не вводить лишних обозначений, мы предположим, что в качестве этих функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ взяты сами главные функции. Эти функции разделяются на несколько групп; функции $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, составляющие одну из этих групп, удовлетворяют условиям:

$$ck(\varphi_1) = \varphi_1, \quad ck(\varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2, \dots, ck(\varphi_p) = \varphi_{p-1} + \varphi_p, \tag{75}$$

и аналогичные формулы имеют место для каждой из групп. Мы будем говорить, что m функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ составляют *каноническую систему* главных функций и что ядро $k(x, y)$ представлено в каноническом виде. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ одной и той же группы составляют *каноническую группу*, а функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ — союзную каноническую группу.

Положим для примера, что мы имеем две канонические группы, содержащие соответственно p и q функций $(p+q=m)$; пусть

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$$

$$(\varphi'_1, \varphi_2, \ldots, \varphi'_q)$$

будут эти две группы функций. Если ядро представлено в виде:

$$k(x, y)=\varphi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+\varphi_p(x)\psi_p(y)+\varphi'_1(x)\psi'_1(y)+\ldots$$
$$\ldots+\varphi'_q(x)\psi'_q(y),$$

то функции $\varphi'_i(x)$, $\psi'_i(y)$ удовлетворяют соотношениям, вполне аналогичным предыдущим:

$$ck(\varphi'_1)=\varphi'_1, \quad ck(\varphi'_2)=\varphi'_1+\varphi'_2, \ldots, \quad ck(\varphi'_q)=\varphi'_{q-1}+\varphi'_q. \tag{75'}$$

Из соотношений (75) и (75') следует, что функции φ_i ортогональны к функциям ψ'_j и что функции ψ_i ортогональны к функциям φ'_i, так что два ядра

$$k_1(x, y)=\varphi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+\varphi_p(x)\varphi_p(y),$$
$$k_2(x, y)=\varphi'_1(x)\psi'_1(y)+\ldots+\varphi'_q(x)\psi'_q(y)$$

ортогональны друг другу. Каждое из этих ядер называется *каноническим ядром*. Этот метод является общим. Таким образом *всякое главное ядро есть сумма некоторого числа канонических попарно ортогональных ядер*. Каждое из этих канонических ядер составлено из главных функций одной из канонических групп.

В соотношениях (75) можно заменить ядро $k(x, y)$ ядром $k_1(x, y)$, ибо функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ ортогональны ко всем другим каноническим ядрам, из которых составлено $k(x, y)$. Заменяя $k_1(x, y)$ его выражением, мы видим, что соотношения (75) могут иметь место только при выполнении следующих условий: функция $\varphi_1(x)$ должна быть ортогональна ко всем функциям ψ_i, кроме ψ_1, φ_2 — ортогональна ко всем функциям ψ_i, кроме ψ_1 и $\psi_2, \ldots$, наконец, φ_p должна быть ортогональна к функциям ψ_i, кроме ψ_{p-1} и ψ_p. Кроме того, имеем соотношения:

$$c(\varphi_1\psi_1)=1, \quad c(\varphi_2\psi_1)=1, \quad c(\varphi_2\psi_2)=1, \ldots, c(\varphi_p\psi_{p-1})=c(\varphi_p\psi_p)=1.$$

Определитель Фредгольма $d_1(\lambda)$, соответствующий ядру $k_1(x, y)$, согласно формуле (71) равен $\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^p$, а это ядро имеет одну фундаментальную функцию $\varphi_1(x)$; в то же время функция $\psi_p(x)$ есть фундаментальная функция союзного ядра. Таким образом существует столько различных фундаментальных функций, сколько главное ядро содержит канонических ядер. Когда каноническое ядро состоит из одного члена $\varphi_1(x)\psi_1(y)$, то φ_1 и ψ_1 суть две союзные фундаментальные функции. В случае, когда $\lambda=c$ есть простой полюс резольвенты, главное ядро разбивается на m канонических ядер этого вида (§ 577). Если $\lambda=c$ есть кратный полюс, то среди канонических ядер существует по крайней мере одно, которое содержит несколько главных функций. В этом и только в этом случае фундаментальная функция $\varphi(x)$ этого ядра ортогональна ко всем фундаментальным функциям союзного уравнения, соответствующего этому полюсу. Итак, *для того чтобы полюс резольвенты был простым, необходимо и достаточно, чтобы каждой фундаментальной функции $\Phi(x)$, соответствующей этому полюсу, можно было поставить в соответствие фундаментальное решение $\psi(x)$ союзного уравнения, которое было бы не ортогонально к $\Phi(x)$.*

579. **Каноническая резольвента.** Чтобы найти главную часть резольвенты в области полюса c, достаточно составить сумму резольвент различных канонических ядер, которые составляют главное ядро. Чтобы образовать резольвенту для канонического ядра

$$k(x, y)=\varphi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+\varphi_p(x)\psi_p(y),$$

мы должны составить последовательные повторные ядра. Согласно определению интегралов $(\varphi_i\psi_j)$ мы непосредственно получаем:

$$ck^{(2)}(x, y)=\varphi_1(x)\{\psi_1(y)+\psi_2(y)\}+\varphi_2(x)\{\psi_2(y)+\psi_3(y)\}+\ldots$$
$$\ldots+\varphi_{p-1}(x)\{\psi_{p-1}(y)+\psi_p(y)\}+\varphi_p(x)\psi_p(y)$$

и затем устанавливаем рекуррентным способом, что

$$c^n k^{(n+1)}(x, y)=\varphi_1(x)\{\psi_1(y)+C_n^1\psi_2(y)+C_n^2\psi_3(y)+\ldots\}+\ldots$$
$$\ldots+\varphi_i(x)\{\psi_i(y)+C_n^1\psi_{i+1}(y)+C_n^2\psi_{i+2}(y)+\ldots\}+\ldots+\varphi_p(x)\psi_p(y),$$

если положить $C_n^h=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-h+1)}{1\cdot 2\ldots h}$. В коэфициент при $\varphi_i(x)$ входят члены с функциями $\psi_{i+h}(y)$ до тех пор, пока их индекс не превосходит p. Вставляя в разложение разрешающего ядра по степеням λ эти выражения повторных ядер, мы получим в качестве коэфициента при $\varphi_i(x)\psi_{i+h}(y)$ $(h>0)$:

$$\sum_{n=h}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n C_n^h,$$

т. е.

$$\left(\frac{\lambda}{c}\right)^h\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^{-(h+1)}$$

Резольвента $\gamma(x, y, \lambda)$ канонического ядра $k(x, y)$ имеет, следовательно, выражение:

$$\frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{c}}(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\ldots+\varphi_p\psi_p)+$$
$$+\frac{\lambda}{c\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right)^2}(\varphi_1\psi_2+\varphi_2\psi_3+\ldots+\varphi_{p-1}\psi_p)+\ldots+$$
$$+\frac{\lambda^h}{c^h\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right)^{h+1}}\{\varphi_1\psi_{h+1}+\ldots+\varphi_{p-h}\psi_p\}+\ldots+\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{p-1}\frac{\varphi_1\psi_p}{\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right)^p};$$

c для этой резольвенты есть полюс p-го порядка.

Если написать это разложение в обычной форме, полагая $\lambda = c + \rho$, то коэфициент при $\left(\frac{1}{\rho}\right)^p$ с точностью до постоянного множителя равен $\varphi_1(x)\psi_p(y)$ (ср. § 575). Пользуясь этим видом резольвенты, можно получить некоторые следствия.

Рассматривая полюс c резольвенты некоторого ядра $k(x, y)$, следует отличать: *ранг* r, т. е. число соответствующих ему различных фундаментальных функций, *порядок* p этого полюса и, наконец, *степень* m *кратности* корня $\lambda = c$ уравнения $D(\lambda) = 0$, если к этому ядру применимо решение Фредгольма.

Ранг r равен числу канонических ядер, которые составляют главное ядро, соответствующее этому полюсу; если эти канонические ядра содержат соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_r$ главных функций, то порядок p полюса равен наибольшему из этих чисел, а степень m равна сумме этих чисел $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Эти три числа r, m, p связаны следующими неравенствами, которые являются следствиями их взаимоотношений:

$$p + r - 1 \leqslant m \leqslant rp.$$

Если $p = 1$, то $m = r$; если существует только одно каноническое ядро, то $r = 1$, $p = m$. Во всех остальных случаях $p + r - 1 < rp$.

Примечание. 1. Вычет приведенной выше канонической резольвенты равен

$$\varphi_1(x)\{\psi_1(y) - \psi_2(y) + \psi_3(y) - \ldots \pm \psi_p(y)\} + \\ + \varphi_2(x)\{\psi_2(y) - \psi_3(y) + \ldots\} + \ldots + \varphi_p\psi_p;$$

две группы главных функций, которые сюда входят, составляют биортогональную систему. Так как всякое главное ядро представляет сумму канонических ядер, то вычет относительно полюса c произвольного порядка резольвенты состоит из главных функций, составляющих биортогональную систему. Если полюс простой, то эти главные функции совпадают с фундаментальными функциями (§ 577).

2. Выражение, полученное выше для резольвенты $\gamma(x, y; \lambda)$ канонического дра $k(x, y)$ в связи со значениями интегралов $(\varphi_i\psi_k)$, непосредетьенно дает, то

$$\int_a^b \gamma(s, s; \lambda)\, ds = \frac{p}{c - \lambda},$$

что дополняет доказательство теоремы Пуанкаре, приведенной выше (§ 570).

3. Выражение n-го повторного ядра $k^{(n)}(x, y)$ канонического ядра $k(x, y)$ показывает, что главные функции этого повторного ядра выражаются с помощью главных функций ядра $k(x, y)$, и наоборот.

С другой стороны, детерминант $D_n(\lambda)$ ядра $k^{(n)}(x, y)$ равен $\left(1 - \frac{\lambda}{c^n}\right)^p$ [§ 570, формула (6)], тогда как резольвента имеет c^n своим полюсом порядка p (§ 560). Так что в данном случае мы имеем $m = p$, и, следовательно, $r = 1$. n-е повторное ядро канонического ядра само содержит только одно каноническое ядро, и фундаментальная функция для обоих ядер одна и та же. Приняв это во внимание, допустим, что c есть полюс резольвенты ядра $K(x, y)$. Если не существует другого полюса c, такого, что $c_1^n = c^n$, то главное ядро ядра $K^{(n)}(x, y)$, соответствующее полюсу c^n, совпадает с n-м повторением главного ядра из $K(x, y)$, соответствующего полюсу c, и фундаментальные функции для обоих ядер совпадают. Наоборот, положим, что резольвента ядра $K^{(n)}(x, y)$ имеет несколько полюсов, например два, таких, что $c_1^n = c^n$. Тогда главное ядро, соответствующее полюсу c^n ядра $K^n(x, y)$, равно сумме n-х повторений главных ядер ядра $K(x, y)$ относительно обоих полюсов c и c_1. Фундаментальные функции ядра $K^{(n)}(x, y)$, соответствующие полюсу c^n, представляют линейные комбинации фундаментальных функций ядра $K(x, y)$ относительно полюсов c и c_1 (см. § 575).

580. Главные функции. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ будет группа m различных главных функций главного ядра $k(x, y)$, относящихся к полюсу c. Если положить $H(x, y) = K(x, y) - k(x, y)$, то два ядра $k(x, y)$ и $H(x, y)$ ортогональны, для чего необходимо, чтобы было

$$H(x, s)\varphi_i(s)\,ds = 0,$$

и, следовательно, m функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ удовлетворяют m соотношениям:

$$\int_a^b K(x, s)\varphi_i(s)\,ds = a_{i_1}\varphi_1(x) + \ldots + a_{im}\varphi_m(x), \tag{76}$$

причем характеристический определитель этой подстановки равен $(1 - cs)^m$. Наоборот, *если существует m линейно независимых функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ удовлетворяющих m соотношениям вида* (76) *с характеристическим определителем подстановки, равным $(1 - cs)^m$, то c есть полюс резольвенты, а функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ составляют часть главных функций относительно этого полюса.*

В самом деле, если мы приведем определенную формулами (76) линейную подстановку к каноническому виду, то мы можем заменить m функций $\varphi_i(x)$ через m различных линейных комбинаций, которые можно разбить на несколько групп так, чтобы p функций одной группы удовлетворяли соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &c\int_a^b K(x, s)\Phi_1(s)\,ds = \Phi_1(x), \\ &c\int_a^b K(x, s)\Phi_2(s)\,ds = \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Первое из этих соотношений показывает, что c есть полюс резольвенты, а $\Phi_1(x)$ — фундаментальная функция. Пусть $\kappa(x, y)$ будет главное ядро, соответствующее ядру $H(x, y) = K(x, y) - k(x, y)$. Так как ядра $k(x, y)$ и $H(x, y)$ ортогональны, то $\Phi_1(x)$ как фундаментальная функция для $k(x, y)$ ортогональна к ядру $H(x, y)$. То же можно сказать и о функции $\Phi_2(x)$; действительно, второе из соотношений (77) можно записать в виде:

$$\Phi_2(s) + \Phi_1(s) = c\int_a^b [H(s, t) + k(s, t)]\,\Phi_2(t)\,dt;$$

умножая его на $H(x, s)$ и интегрируя, мы находим:

$$\int_a^b H(x, s)\,\Phi_2(s)\,ds = c\int_a^b\int_a^b H(x, s)\,H(s, t)\,\Phi_2(t)\,dt\,ds. \tag{78}$$

Так как c не есть характеристическое число для ядра $H(x, y)$, то уравнение

$$c\int_a^b H(x, s)\,\psi(s)\,ds = \psi(x)$$

имеет единственное решение $\psi(x) = 0$, откуда следует, что левая часть соотношения (78) равна нулю. Точно так же шаг за шагом мы докажем, что функции $\Phi_3, \ldots, \Phi_p$ ортогональны к ядру $H(x, y)$, и, следовательно, в соотношениях (77) можно заменить $K(x, s)$ через $k(x, s)$, что и доказывает, что функции $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ выражаются через главные функции ядра $k(x, y)$.

Пусть вообще $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ суть m функций, удовлетворяющих соотношениям (76), где коэфициенты a_{ik} — некоторые постоянные, определитель из которых отличен от нуля. Приведя линейную подстановку, определяемую этими формулами, к каноническому виду, мы получим m линейно независимых комбинаций, которые можно разбить на несколько групп так, что функции одной группы удовлетворяют соотношениям (77), причем число c не обязательно одно и то же для всех групп. Все функции $\varphi_i(x)$ представляют, таким образом, линейные комбинации главных функций ядра, относящихся к некоторым из полюсов резольвенты. Для краткости мы будем говорить, что эти функции суть главные функции ядра $K(x, y)$. Заключения, сделанные выше (§ 575) относительно фундаментальных функций, распространяются на главные функции, т. е. имеет место следующее предложение: *все главные функции ядра $K(x, y)$ ортогональны ко всякому ядру, ортогональному первому.*

Пусть $k_1(x, y)$ и $k_2(x, y)$ будут два главных ядра, соответствующие двум полюсам c_1 и c_2 резольвенты; пусть будут, далее, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ и $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ две главные союзные группы ядра k_1, и $(\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n)$ и $(\psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_n)$ — две главные союзные группы ядра k_2. Так как ядра $k_1(x, y)$ и $k_2(x, y)$ ортогональны (§ 576), то любые две функции φ_i и ψ'_j, как и φ'_j и ψ_l, ортогональны. В частности, *всякая фундаментальная функция $\varphi(x)$, соответствующая характеристическому значению c_1, ортогональна всякому фундаментальному решению союзного уравнения, соответствующему другому характеристическому значению c_2, отличному от первого.* Это можно непосредственно установить с помощью двух уравнений:

$$\varphi(x) = c_1\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \quad \psi(x) = c_2\int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds,$$

из которых следует, что

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = c_1 \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,\psi(x)\,dx\,ds =$$
$$= c_2 \int_a^b\int_a^b K(s, x)\,\varphi(x)\,\psi(s)\,ds\,dx.$$

Так как в последнем двойном интеграле можно поменять местами буквы x и s, то это равенство может иметь место при различных значениях c_1 и c_2 только в том случае, если этот интеграл равен нулю, откуда и вытекает ортогональность.

Главное ядро само может быть разложено на несколько канонических ядер, попарно ортогональных, так что из каждого ядра $K(x, y)$ можно получить последовательность канонических попарно ортогональных ядер:

$$k_1(x, y),\quad k_2(x, y), \ldots, k_i(x, y) \ldots, \tag{79}$$

так что каждая фундаментальная функция ядра $K(x, y)$ принадлежит одному и только одному каноническому ядру. Если резольвента имеет только конечное число полюсов, то сама последовательность (79) ограничена. Если число полюсов резольвенты бесконечно, последовательность (79) не ограничена. Выше (§ 579) мы видели, как из двух групп главных функций ядра $k_i(x, y)$ можно получить биортогональную систему, если взять вычет относительно соответствующего полюса c_i.

Совокупность биортогональных систем, полученных из всех канонических ядер, составляет биортогональную систему:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots, \end{matrix}\right\} \tag{80}$$

которая будет ограничена или не ограничена в зависимости от того, имеет ли резольвента конечное или бесконечное число полюсов. Каждый из интегралов $(\varphi_i\psi_i)$ отличен от нуля, так что система (80) может быть преобразована в нормальную систему. При этом может случиться, что одна и та же функция φ участвует в обеих последовательностях, как мы это увидим при изучении симметрических ядер.

Итак, из всякого ядра $K(x, y)$ можно получить биортогональную и нормальную систему, состоящую из совокупности главных функций ядра и только из этих функций.

Если полюс c — мнимый, то и сами главные функции мнимы, и сопряженному полюсу соответствуют главные функции, сопряженные первым, если ядро $K(x, y)$ действительно.

Определение главного ядра, соответствующего данному полюсу резольвенты, требует только разложения в ряд. В самом деле, резольвента представляет частное от деления двух целых функций от λ; поэтому если известен корень знаменателя $\lambda = c$ порядка m, то произведение резольвенты на $(\lambda - c)^m$ уже не имеет полюса при $\lambda = c$.

Располагая числитель и знаменатель по степеням $\lambda - c$, мы можем простым алгебраическим делением выделить главную часть в области полюса $\lambda = c$, а следовательно и главное ядро. Если этот полюс первого порядка, то главные функции совпадают с фундаментальными, и достаточно будет в вычете вместо y или x подставлять постоянные значения, чтобы получить все фундаментальные функции обоих союзных уравнений. В случае полюса более высокого порядка требуются несколько более сложные выкладки *.

В случае непрерывного ядра $K(x, y)$ главное ядро, соответствующее какому-нибудь полюсу, как это ясно из самого способа получения этого ядра, также непрерывно; сами главные функции будут непрерывными функциями переменных x и y соответственно в интервале (a, b). То же можно сказать и о разрывном ядре, если получаемые из него повторные ядра непрерывны, начиная с некоторого порядка **.

Пусть, в самом деле, c есть полюс резольвенты. Выберем целое число n так, чтобы $K^{(n)}(x, y)$ было непрерывно, и чтобы не существовало никакого другого полюса c_1, удовлетворяющего условию $c_1^n = c^n$. Мы видели, что главные функции ядра $K(x, y)$, относящиеся к полюсу c, выражаются с помощью главных функций ядра $K^{(n)}(x, y)$, соответствующих полюсу c^n. Следовательно, они непрерывны.

Этот результат легко объяснить. Предположим, что все повторные ядра, начиная с $K^{(n)}(x, y)$, непрерывны. Тогда в разложении резольвенты коэфициенты при различных степенях λ, начиная с n-го, непрерывны. Ясно, что если отбросить n первых членов этого ряда, то полученная мероморфная функция будет иметь те же полюсы с теми же главными частями, что и резольвента. Если умножить это новое разложение в ряд на целую функцию от λ с постоянными коэфициентами, то получится снова целая функция от λ, коэфициенты которой будут непрерывными функциями от x и y. Отсюда мы заключаем, как и раньше, что коэфициенты главной части в области полюса непрерывны. Хотя разрешающее ядро может иметь точки разрыва, но они оказывают влияние только на первые коэфициенты разложения $\Gamma(x, y; \lambda)$ по степеням λ.

---

* См., например, мой мемуар в *Annales de Toulouse*, стр. 79 и след. В случае ограниченного ядра, как мы видели, фундаментальные функции выражаются через миноры Фредгольма. В своей работе (*Journal de Mathématiques*, 1913) Плятриэ (Platrier) дополнил этот результат.

** Заключение это не распространяется на такие ядра, из которых никаким конечным числом повторений нельзя получить непрерывного ядра. Рассмотрим, например, ядро $K(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$ и положим $a = 0$, $b = 1$. Резольвента имеет единственный полюс $\lambda = 1$, и существует единственная фундаментальная функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$, которая разрывна в точке $x = 0$. Рассмотрим теперь ядро $K(x, y)$, определенное условиями: $K(x, y) = 0$ при $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ и $K(x, y) = 1$ при $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, причем опять $a = 0$, $b = 1$. n-е повторное ядро $K^{(n)}(x, y)$ при $x < \frac{1}{2}$ равно нулю, а при $x \geqslant \frac{1}{2}$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$. Разрешающее ядро $\Gamma(x, y; \lambda)$ равно нулю при $x < \frac{1}{2}$ и равно $\frac{2}{2-\lambda}$ для $x \geqslant \frac{1}{2}$. Однородное уравнение

$$2\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = \varphi(x)$$

581. Теоремы Фредгольма. Теорема Фредгольма (§ 568) о фундаментальных функциях, соответствующих полюсу резольвенты, вытекает непосредственно из приведенных соображений. Точно так же можно легко доказать теорему об общем уравнении второго рода для случая, когда значение параметра служит полюсом резольвенты.

В § 569 было доказано, что уравнение допускает решения только в том случае, если функция $f(x)$ ортогональна ко всем фундаментальным функциям союзного уравнения, соответствующим полюсу c, и доказательство остается в силе в случае неограниченного ядра. Эти условия оказываются и достаточными.

Пусть, в самом деле, $k(x, y)$ есть главное ядро, относящееся к полюсу c; это главное ядро есть сумма некоторого числа канонических ядер $k_1(x, y), \ldots, k_r(x, y)$ и ядра $k_1(x, y), \ldots, k_r(x, y)$, $K(x, y) - k(x, y)$ попарно ортогональны. Согласно общему свойству (§ 574) решение

имеет разрывное решение

$$\varphi(x) = 0 \left(x < \frac{1}{2}\right), \quad \varphi(x) = 1 \text{ при } x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Положим, вообще, что мы изменили значение ядра $K(x, y)$ вдоль конечного числа линий; это равносильно прибавлению к ядру $K(x, y)$ ядра $K_1(x, y)$, которое равно нулю всюду, кроме конечного числа линий. Если $K_1(x, y)$ имеет линии разрыва только первого вида, то в решении интегрального уравнения ничего не меняется, ибо повторение ядра суммы $K + K_1$ совпадают с повторными ядрами ядра $K(x, y)$. Нетрудно также видеть, что значение интеграла

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$$

не меняется от замены K на $K + K_1$. Дело будет обстоять несколько иначе, если к ядру $K(x, y)$ прибавить ядро $K_1(x, y)$, которое равно нулю всюду, кроме конечного числа прямых, параллельных осям координат. Положим, например, что $K_1(x, y) = 0$ при $x \neq x_0$, $K_1(x_0, y) = \zeta(y)$.

Пусть $\varphi(x)$ будет решением уравнения:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds + f(x);$$

решение нового уравнения:

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b [K(x, s) + K_1(x, s)]\,\Phi(s)\,ds + f(x)$$

получится, если положить $\Phi(x) = \varphi(x)$ при $x \neq x_0$ и $\Phi(x_0) = \varphi(x_0) + C$, где постоянное C определяется уравнением

$$C = \lambda \int_a^b K_1(x_0, s)\varphi(s)\,ds.$$

Рассуждения остаются в силе, если $f(x)$ равна нулю: характеристические значения для обоих ядер совпадают, а фундаментальные функции отличаются только для $x = x_0$.

уравнения (1), где $\lambda = c$, будет известно, если известны решения каждого из уравнений:

$$\varphi(x) = \int_a^b [K(x, y) - k(x, v)] \varphi(s)\, ds + f(x),$$

$$\pi(x) = c \int_a^b k_i(x, s) \pi(s)\, ds + f(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Первое из них имеет единственное решение, которое дается общей формулой Фредгольма, ибо c не есть характеристическое значение для ядра $K(x, y) - k(x, y)$. Заменим теперь во втором уравнении каноническое ядро $k_i(x, s)$ суммой

$$\varphi_1(x) \psi_1(s) + \ldots + \varphi_p(x) \psi_p(s),$$

оно примет вид:

$$\pi(x) = c \int_a^b [\varphi_1(x) \psi_1(s) + \ldots + \varphi_p(x) \psi_p(s)] \pi(s)\, ds + f(x).$$

Ясно, что всякое решение имеет вид:

$$f(x) + C_1 \varphi_1(x) + \ldots + C_p \varphi_p(x);$$

заменяя $\pi(x)$ этим выражением и принимая во внимание значение интегралов $(\varphi_i \psi_k)$, мы получим соотношение:

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_p\varphi_p = C_1\varphi_1 + C_2(\varphi_2 + \varphi_1) + \ldots + \\ + C_p(\varphi_p + \varphi_{p-1}) + c\varphi_1(x)(\psi_1 f) + \ldots + c\varphi_p(x)(\psi_p f)$$

для определения коэфициентов $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Так как по предположению $(\psi_p f) = 0$, то это соотношение обращается в

$$C_2\varphi_1 + C_3\varphi_2 + \ldots + C_p\varphi_{p-1} + c\varphi_1(x)(\psi_1 f) + \ldots + c\varphi_{p-1}(x)(\psi_{p-1} f) = 0;$$

отсюда коэфициенты $C_2, C_3, \ldots, C_p$ определяются, в то время как значение C_1 остается произвольным. Таким образом интегральное уравнение (1) в этом случае допускает бесчисленное множество решений, и ясно, что каждое из них может быть получено из одного какого-нибудь прибавлением к нему любой фундаментальной функции, соответствующей характеристическому значению c.

Примечание. Решение уравнения Фредгольма в этом особом случае не может быть получено переходом к пределу из пригодной в общем случае формулы (11). Пусть c есть полюс резольвенты; положим для простоты, что соответствующее главное ядро состоит из единственного канонического ядра $\varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)$. Функция от λ, изображаемая формулой (11), имеет в точке c полюс второго порядка, и главная часть ее равна

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c}} \int_a^b [\varphi_1(x)\psi_1(s) + \varphi_2(x)\psi_2(s)] f(s)\, ds + \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^2} \int_a^b \varphi_1(x)\psi_2(s) f(s)\, ds.$$

Точка $\lambda = c$ является полюсом второго порядка, если $f(x)$ не ортогональна функции $\psi_2(x)$. Если это условие имеет место, то точка c будет полюсом только первого порядка, если только $f(x)$ не ортогональна к ψ_1, и, однако, в этом случае уравнение Фредгольма всегда имеет бесчисленное множество решений.

582. Нахождение характеристических значений. Отыскание полюсов резольвенты представляет частный случай общей задачи нахождения полюсов мероморфной функции, если известны коэфициенты ее разложения в ряд Тейлора в области точки, где она правильна. Эта задача теоретически решена в известном мемуаре Адамара („*Journal de Mathématiques*“, 1892). Мы ограничимся только несколькими замечаниями очень элементарного характера, которых нам для последующего будет достаточно.

1. Пусть $f(\lambda)$ будет рациональная функция от λ, обращающаяся в нуль при λ бесконечном и имеющая единственный полюс $\lambda_1 \neq 0$ порядка p. Если разложить эту функцию в ряд по степеням λ, то коэфициент при λ^n будет иметь вид:

$$\lambda_1^{-n} P(n),$$

где $P(n)$ — целый многочлен $(p-1)$-й степени относительно n. Обратно, всякое разложение в ряд этого рода представляет рациональную функцию от λ, имеющую λ_1 полюсом p-го порядка, ибо всякий многочлен $P(n)$ степени $p-1$ представляет линейную комбинацию биномиальных коэфициентов

$$C_{n+1}^1, C_{n+2}^2, \ldots, C_{n+p-1}^{p-1}.$$

2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ будут полюсами, имеющими наименьший модуль некоторой мероморфной функции $F(\lambda)$, заданной в окрестности начала своим тейлоровским разложением:

$$F(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_n\lambda^n + \ldots$$

Согласно первому замечанию коэфициент A_n имеет вид:

$$A_n = \lambda_1^{-n}[P_1(n) + \varepsilon_n] + \lambda_2^{-n} P_2(n) + \ldots + \lambda_r^{-n} P_r(n),$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_r$ суть многочлены относительно n, степень которых равна порядку соответствующего полюса, уменьшенному на единицу, а ε_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю.

Из этого вида коэфициентов A_n, очевидно, вытекают следующие свойства, которые мы приводим без доказательств.

I. Для того чтобы произведение $c^n A_n$ при неограниченном возрастании n стремилось к пределу l, отличному от нуля, необходимо и достаточно, чтобы c было простым полюсом функции $F(\lambda)$, и чтобы не существовало никакого другого полюса, модуль которого был бы меньше или равен $|c|$; предел l равен частному от деления вычета на $-c$.

II. Для того чтобы отношение $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ при неограниченном возрастании n имело предел, отличный от нуля, необходимо и достаточно, чтобы среди полюсов минимального модуля существовал один, порядок которого был бы выше порядка всех других полюсов того же модуля; предел равен числу, обратному этому полюсу.

Приняв это во внимание, положим, что $K(x, y)$ — ограниченное ядро. Имеем (§ 566)

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=A_1+A_2\lambda+\ldots+A_n\lambda^{n-1}+\ldots, \tag{81}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть последовательные следы ядра*. Если ряд (81) расходится при $\lambda=\lambda_0$, то можно утверждать, что резольвента имеет по крайней мере один полюс, модуль которого меньше или по крайней мере равен $|\lambda_0|$. Если все полюсы мероморфной функции (81) простые, то для того чтобы отношение $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ имело предел, необходимо и достаточно, чтобы существовал единственный полюс минимального модуля, и тогда этот полюс есть величина обратная пределу.

Отсюда мы получаем метод, по крайней мере теоретический, для нахождения полюсов в случае, если эти полюсы все имеют разные модули. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ будут эти полюсы, расположенные в порядке возрастающих модулей. Отыскивая предел $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ при неограниченном возрастании n, мы найдем сперва λ_1, а соответствующий вычет m_1 найдется при отыскании предела $\lambda_1^n A^n$. Чтобы получить аффикс второго полюса, можно поступить точно так же с рядом, который получится, если выделить из ряда (81) разложение $\frac{m_1}{\lambda-\lambda_1}$ и так далее.

Если, кроме того, все полюсы резольвенты—первого порядка, то чтобы получить соответствующие главные ядра, а следовательно, фундаментальные функции, достаточно вычислить вычеты функции $\Gamma(x, y; \lambda)$. Чтобы получить вычет относительно первого полюса λ_1, достаточно найти предел произведения $\lambda_1^{n-1}K^{(n)}(x, y)$, ибо $K^{(n)}(x, y)$ является коэфициентом при при λ^{n-1} в разложении $\Gamma(x, y; \lambda)$ по степеням λ. Получив главное ядро $k_1(x, y)$, можно для получения главного ядра $k_2(x, y)$, соответствующего полюсу λ_2, применить тот же метод к разложению разности

$$\Gamma(x, y; \lambda)-k_1(x, y)\frac{\lambda}{\lambda_1-\lambda}$$

и так далее.

Можно также находить фундаментальные функции последовательными итерациями. Пусть

$$\left.\begin{aligned} u(x; \lambda)&=u_0(x)+\lambda u_1(x)+\ldots+\lambda^n u_n(x)+\ldots, \\ u_n&=\int_a^b K^{(n)}(x, s)\,u_0(s)\,ds, \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

---

* Для неограниченного ядра, но такого, у которого все повторные ядра, начиная с $K^{(n)}(x, y)$, ограничены, можно сохранить ряд (81) при условии, если отбросить $n-1$ первых его членов (см. § 570).

будет разложение по степеням λ решения уравнения (1), в котором $f(x)$ заменено на $u_0(x)$. Функция $u(x, \lambda)$, рассматриваемая как функция от λ, есть мероморфная функция, которая может иметь своими полюсами только полюсы резольвенты. В области полюса λ_i главная часть резольвенты равна

$$\int_a^b \gamma_i(x, s; \lambda)\, u_0(s)\, ds,$$

где $\gamma_i(x, y; \lambda)$ есть разрешающее ядро главного ядра $k_i(x, y)$ относительно полюса λ_i. Эта главная часть исчезает, если функция $u_0(x)$ ортогональна справа к ядру $k_i(x, y)$, так что функция $u(x; \lambda)$ не имеет обязательно своими полюсами все полюсы резольвенты. Если, например, $u_0(x)$ есть фундаментальная функция, соответствующая характеристическому значению c, то функция $u(x; \lambda)$ обращается в рациональную функцию $u_0(x)\dfrac{c}{c-\lambda}$ параметра λ. Если бы функция $u_0(x)$ была ортогональна ко всем главным ядрам, то $u(x, \lambda)$ была бы *целой* функцией от λ. Оставляя в стороне этот исключительный случай, положим, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — полюсы с наименьшим модулем, такие, что функция $u_0(x)$ не ортогональна соответствующим главным ядрам; $u(x; \lambda)$ есть мероморфная функция, для которой полюсами минимального модуля являются $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, и коэфициент $u_n(x)$ имеет вид:

$$u_n(x) = \lambda_1^{-n}\{P_1(n, x) + \varepsilon_n\} + \lambda_2^{-n} P_2(n, x) + \ldots + \lambda_r^{-n} P_r(n, x),$$

причем ε_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю, а $P_i(n, x)$ — многочлен относительно n, определяемый соотношением:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n P_i(n, x) = \int_a^b \gamma_i(x, s; \lambda)\, u_0(s)\, ds,$$

где $\gamma_i(x, y; \lambda)$ — уже выше определенная функция. Для того чтобы существовало число c такое, что произведение $c^n u_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу $U(x)$, отличному от нуля, необходимо согласно замечанию, сделанному вначале, чтобы c было простым полюсом функции $u(x; \lambda)$ и чтобы не было никакого другого полюса, модуль которого был бы меньше или равен $|c|$. Поэтому необходимо, чтобы было $r = 1$, $\lambda_1 = c$, и, кроме того, чтобы $P_1(n, x)$ не зависел от n. Обращаясь теперь к выражению канонического ядра (§ 579), легко видеть, что выражение

$$\lambda_n^1 \int_a K_1^n(x, s)\, u_0(s)\, ds$$

не зависит от n; оно равно фундаментальной функции относительно полюса λ_1.

Поэтому можно высказать следующее предложение:

Если произведение $c^n u_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу $U(x)$, отличному от нуля, то c есть полюс резольвенты, и $U(x)$ — фундаментальная функция, соответствующая этому полюсу.

Выбрав произвольно функцию $u_0(x)$, можно таким способом получить все фундаментальные функции, соответствующие этому полюсу c, но из самого доказательства следует, что, если произведение $c^n u_n(x)$ стремится к пределу $u(x)$, отличному от нуля (если только исходная функция $u_0(x)$ не выбрана специальным образом), то c есть полюс первого порядка резольвенты, которая не имеет никакого другого полюса, равного или меньшего по модулю $|c|$.

583. Метод Шварца. К изложенному можно применить изящный метод для некоторых важных частных случаев, о которых будет речь впереди, изложенный Шварцем, когда еще не существовало общей теории. Умножая обе части формулы (82) на ограниченную функцию $A(x)$ и интегрируя почленно, мы найдем, что

$$\int_a^b u(x;\lambda)\,A(x)\,dx = B_0 + B_1\lambda + \ldots B_n\lambda^n + \ldots, \tag{83}$$

если положить

$$B_n = \int_a^b A(x)\,u_n(x)\,dx.$$

Левая часть этого соотношения опять представляет мероморфную функцию параметра λ, полюсы которой находятся среди полюсов функции $u(x;\lambda)$, а, следовательно, и полюсов резольвенты. Если поэтому при соответствующем выборе функций $u_0(x)$ и $A(x)$ отношение $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ стремится к пределу l, отличному от нуля, то можно утверждать, что обратная величина $c = \frac{1}{l}$ есть полюс резольвенты; больше того, если произведение $c^n u_n(x)$ стремится к пределу $U(x)$, отличному от нуля, то $U(x)$ представляет фундаментальную функцию, соответствующую этому полюсу.

В частности, если можно выбрать функции $u_0(x)$ и $A(x)$ так, чтобы постоянные B_n были положительны и удовлетворяли условию:

$$B_n^2 \leqslant B_{n-1}\,B_{n+1},$$

то отношение $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ возрастает с возрастанием n. Это отношение не может расти неограниченно, так как в этом случае ряд (83) был бы расходящимся для всех значений, кроме $\lambda = 0$. Следовательно, это отношение стремится к пределу, а число, обратное этому пределу, является полюсом резольвенты.

584. Род функции $D(\lambda)$. Напомним сначала понятие рода целой функции $G(\lambda)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i \ldots$ будут нули этой функции, расположенные в таком порядке, что их модули не убывают и каждый нуль входит столько раз, какова степень его кратности. Если существуют числа μ такие, что ряд $\sum \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^\mu$ сходится, то обозначим через $k+1$ *наименьшее целое число*, удовлетворяющее этому условию. Мы видели (т. II, § 315), как можно построить целую функцию, имеющую те же нули, что и $G(\lambda)$, и той же степени кратности; при этом, если $G(0) \neq 0$, то $G(\lambda)$ имеет вид:

$$G(\lambda) = e^{g(\lambda)} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_i^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k\lambda_i^k}}, \tag{84}$$

где $g(\lambda)$ есть целая функция от λ. Если эта функция $g(\lambda)$ есть многочлен степени r, то наибольшее из двух чисел k и r называется *родом* целой функции $G(\lambda)$. Его обозначают буквой p. Заметим, что для определения рода функции недостаточно ее представить в виде (84). Если, например, ряд $\sum \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|$ сходящийся, то имеем тождественно:

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = e^{-\lambda \sum \frac{1}{\lambda_i}} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}}.$$

Судя по виду правой части, можно было бы думать, что род функции равен единице, а между тем эта функция нулевого рода. Чтобы представить функцию $G(\lambda)$ в характеристической форме (84), следовательно, недостаточно выбрать в качестве числа $k+1$ наименьшее целое число такое, чтобы ряд $\sum \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|^{k+1}$ сходился. Если не существует такого числа μ, при котором ряд $\sum \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|^\mu$ сходится, или если $g(\lambda)$ не есть многочлен, то говорят, что функция $G(\lambda)$ *бесконечного рода*.

Род целой функции связан с порядком величины коэфициента a_n при λ^n в функции $g(\lambda)$ очень важными неравенствами, установленными Пуанкаре и Адамаром: *если произведение $n^\alpha \sqrt[n]{|a_n|}$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю, то род функции $G(\lambda)$ не больше $\frac{1}{\alpha}$*. Мы видели (§ 565), что модуль коэфициента a_n функции $D(\lambda)$ относительно ограниченного ядра меньше, чем $\frac{M^n n^{\frac{n}{2}} (b-a)^n}{n!}$, если предположить $|K| \leqslant M$. Отсюда без труда можно заключить, заменяя $n!$ его приближенным значением, (т. I, § 117), что произведение $n^\alpha \sqrt[n]{|a_n|}$ стремится к нулю, если α меньше $\frac{1}{2}$, и, следовательно, *род функции $D(\lambda)$ не больше двух*. Опираясь только на общую теорию разрешающих ядер, Шур (Schur) (упражнение 3 следующей главы) показал, что ряд $\sum \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2$ сходится для случая ограниченного ядра. Отсюда следует, что так как род функции $D(\lambda)$ не больше двух, то она имеет вид:

$$D(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}}. \tag{85}$$

Карлеман (Carleman) показал*, что *для любого непрерывного ядра род функции $D(\lambda)$ не больше единицы*. Существуют ядра, для которых $D(\lambda)$ действительно первого рода, например ядро Вольтерра**.

Так как род функции $D(\lambda)$ не больше двух, то непосредственно получаем из соотношения (36) § 570:

$$D_p(\lambda) = D\left(\lambda^{\frac{1}{p}}\right) D\left(\omega\lambda^{\frac{1}{p}}\right) \ldots D\left(\omega^{p-1}\lambda^{\frac{1}{p}}\right), \tag{86}$$

что род функции $D_2(\lambda)$ не больше единицы, и что функции $D_3(\lambda)$, $D_4(\lambda)$, ... имеют род, равный нулю. Если $D(\lambda)$ имеет род, равный нулю или единице, то $D_2(\lambda)$, $D_3(\lambda)$, ... будут нулевого рода.

Приложения. 1°. Пусть $K(x, y)$ симметрическое ядро, т. е. такое, что $K(x, y) = K(y, x)$. Из формул, определяющих последовательные повторные ядра (§ 558), ясно, что все эти повторные ядра также симметричны. Последовательность этих ядер не ограничена, ибо согласно соотношению между $K^{(n)}(x, y)$ и $K^{(2n)}(x, y)$ имеем вообще:

$$K^{(2n)}(x, x) = \int_a^b [K^{(n)}(x, s)]^2 ds.$$

Если, взяв n достаточно большим, мы придем к ядру $K^{(2n)}(x, y)$, которое тождественно равно нулю, то мы сделаем вывод, что и $K^{(2n-1)}$ тоже нуль, и, возвращаясь таким образом шаг за шагом, мы найдем, что и само ядро $K(x, y)$ должно быть тождественно равно нулю. Если в результате конечного числа итераций мы приходим к ограниченному ядру, то после еще двух итераций мы придем, следовательно, к симметрическому ядру, отличному от нуля, для которого $D(\lambda)$ будет нулевого рода. Отсюда легко доказывается, что симметрическое ядро имеет по крайней мере одно особое значение. Действительно, пусть $K(x, y)$ будет симметрическое ядро, не имеющее особых значений. После некоторого конечного числа повторений мы получим из него другое ограниченное ядро $K^{(q)}(x, y)$, также не имеющее особых значений, и для которого род функции $D_q(\lambda)$ будет равен нулю. Мы имели бы, следовательно, $D_q(\lambda) = 1$, что невозможно, ибо тогда было бы:

$$A_q = \int_a^b K^{(q)}(x_1, x_1)\, dx_1 = 0,$$

$$A_{2q} = \int_a^b \int_a^b K^{(q)}(x_1, x_2) K^{(q)}(x_2, x_1)\, dx_1 dx_2 = 0,$$

или, так как ядро симметрично:

$$\int_a^b \int_a^b \left\{K^{(q)}(x_1, x_2)\right\}^2 dx_1 dx_2 = 0,$$

а следовательно, и $K^{(q)}(x, y) = 0$ (§ 587).

---

* Sur le genre du dénominateur $D(\lambda)$ de Fredholm (*Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, Bd. 12, n° 15, 1917).

** В случае, если ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию вида

$$|K(x, y) - K(x, z)| < A\,|y - z|^{\rho},$$

где A и ρ — два положительных определенных числа, Лалеско, пользуясь замечанием Фредгольма, показал, что род $D(\lambda)$ равен нулю (*Comptes rendus*, т. 145, 1907, стр. 906).

2°. Пусть $K(x, y)$ будет ограниченное ядро, имеющее только *конечное* число особых значений; так как род функции $D(\lambda)$ не больше двух, то она имеет вид:

$$e^{a\lambda+b\lambda^2}P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ есть многочлен. Следовательно, ее логарифмическая производная $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ есть рациональная функция от λ, целая часть которой равна $a+2b\lambda$. Обратно, если производная $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ есть рациональная функция, то полюсы на конечных расстояниях должны быть простыми, а вычеты — целыми положительными числами, в противном случае функция $D(\lambda)$ имела бы особые точки на конечном расстоянии. Если все эти условия выполнены, то уравнение $D(\lambda)=0$ имеет только конечное число корней. Поэтому, чтобы выразить, что ядро $K(x, y)$ имеет только конечное число особых точек, достаточно выразить, что производная $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ есть рациональная функция. Так как целая часть этой функции не выше первой степени относительно λ, то мы приходим к следующему условию.

Для того чтобы уравнение $D(\lambda)=0$ имело только конечное число корней, необходимо и достаточно, чтобы p любых последовательных следов ядра, начиная с A_3, удовлетворяли рекуррентному соотношению с постоянными коэфициентами (p есть некоторое неопределенное целое число) *.

В частности, для того чтобы это уравнение не имело никаких особых точек, необходимо и достаточно, чтобы все следы, начиная с A_3, были нулями.

585. Разложение разрешающего ядра. Первая теорема Фредгольма дает разрешающее ядро в форме частного целых функций. Но всякая мероморфная функция может быть выражена, и притом бесконечным множеством способов, как сумма некоторого ряда, каждый член которого представляет рациональную функцию, имеющую на конечном расстоянии только один полюс (т. II, § 342). Установленные нами свойства дают возможность в некоторых случаях получить для резольвенты разложения этого рода.

Пусть $K(x, y)$ — ограниченное ядро. Положим, что полюсы резольвенты расположены в порядке возрастания модулей **, и пусть $k_i(x, y)$ — главное ядро, соответствующее полюсу λ_i.

Если ряд $H(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} k_i(x, y)$ равномерно сходится, то можно написать, что

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{+\infty} k_i(x, y)+H_1(x, y), \tag{87}$$

причем два ядра $H(x, y)$ и $H_1(x, y)$ ортогональны. В самом деле, например, ядро $k_1(x, y)$ ортогонально разности $K(x, y)-k_2(x, y)$ и каждому из ядер $k_i(x, y)$ ($i>1$); оно поэтому ортогонально к их сумме, равной $H(x, y)-k_1(x, y)$, а следовательно, и к разности

$$K(x, y)-H(x, y)=H_1(x, y).$$

Обратно, если $H_1(x, y)$ ортогонально к каждому из ядер $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$, ..., то оно ортогонально к $H(x, y)$. Отсюда следует, что ядро $H_1(x, y)$ не имеет ни одного особого значения, а следовательно, его резольвента есть многочлен или целая функция от λ; обозначим ее через $E(x, y; \lambda)$. Так как ряд, изображающий ядро $H(x, y)$, равномерно сходится, то, как мы видели выше (§ 572), резольвента этого ядра может быть получена как сумма резольвент $\gamma_i(x, y; \lambda)$

* Л а л е с к о, *Comptes Rendus*, декабрь 1907.

** Можно предположить, что в этой последовательности каждый полюс взят либо один раз, либо столько раз, каков *порядок* этого полюса. В этом последнем случае $k_i(x, y)$ есть каноническое ядро.

ядер $k_i(x, y)$. Резольвента $\Gamma(x, y; \lambda)$ данного ядра $K(x, y)$ представится, следовательно, разложением:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i(x, y; \lambda) + E(x, y; \lambda), \tag{88}$$

которое можно также написать в виде:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)}[\Gamma(x, y; \lambda] + E(x, y; \lambda), \tag{89}$$

где $P^i[\Gamma(x, y; \lambda)]$ представляет главную часть резольвенты Γ в области полюса λ_i. Если заменить $E(x, y; \lambda)$ суммой целых многочленов от λ, то ясно, что можно будет преобразовать ряд (89) в ряд, члены которого рациональны, и каждый из которых имеет на конечном расстоянии только один полюс, и это преобразование можно выполнить бесчисленным множеством способов (II, § 319).

В случае произвольного ограниченного ядра $K(x, y)$ нельзя утверждать вообще, что ряд главных ядер равномерно сходится, и, следовательно, что резольвента может быть представлена в форме (88). Но не трудно построить любое количество примеров этого рода. Рассмотрим, например, два ортогональных ядра:

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix)\sin(iy),\ H_1(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_j \cos(jx)\cos[(j+1)y],$$

где ряды $\sum |a_i|$ и $\sum |b_i|$ сходятся, пределы a и b равны 0 и 2π, и рассмотрим сумму этих ядер: $K = H + H_1$. Разрешающее ядро для $H(x, y)$ равно:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i \sin(ix)\sin(iy)}{1 - \pi a_i \lambda}.$$

Что касается ядра $H_1(x, y)$, то разрешающее ядро представляет целую функцию от λ. Действительно, если взять сначала конечное число членов ряда $H_1(x, y)$, то можно доказать (§ 571), что соответствующая функция $D_n(\lambda)$ равна единице, ибо все члены, расположенные под главной диагональю в определителе (44), равны нулю, а члены главной диагонали равны единице. Следовательно, и для ядра $H_1(x_i, y)$ имеем также $D(\lambda) = 1$. Заметим еще, что если H_1 содержит только конечное число членов, то резольвента $E(x, y; \lambda)$ ядра $H_1(x, y)$ есть многочлен.

Рассмотрим еще произвольную биортогональную систему, составленную из двух последовательностей функций φ_i и ψ_i, таких, что $\varphi_i\psi_j) = 0$ для $i \neq j$. С помощью этих двух последовательностей функций составим равномерно сходящийся ряд:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \varphi_i(x)\psi_i(y),$$

где α_i — постоянные. Члены этого ряда можно разбить на две категории в зависимости от того, будет ли интеграл $(\varphi_i\psi_i)$ отличен от нуля или равен нулю. Введя для этих двух групп членов различные обозначения, мы напишем предыдущее ядро в виде:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i\varphi_i(x)\psi_i(y) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta'_j\varphi'_j(x)\psi'_j(y),$$

причем

$$(\varphi_i\psi_i) = \frac{1}{c_i},\quad (\varphi'_j\psi'_j) = 0.$$

Разрешающее ядро имеет вид:

$$\Gamma(x,y;\lambda)=\sum_{i=1}^{+\infty}\beta_i\frac{\varphi_i(x)\psi(y)}{1-\frac{\lambda}{c_i}}+\sum_{i=1}^{+\infty}\beta'_j\varphi'_j(x)\psi'_j(y),$$

и целая часть ядра представляет член, не зависящий от λ.

Примечание. В последнем примере функции φ'_j и ψ'_j удовлетворяют условиям:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi'_j(s)\,ds=0;\quad \int_a^b K(s,y)\psi'_j(s)\,ds=0.$$

Пусть вообще $K(x,y)$ будет ядро, которое может быть представлено в виде (87), и такое, что резольвента, соответствующая ядру $H_1(x,y)$, есть многочлен относитель о λ, который может состоять из одного первого члена. Если эта резольвента является многочленом $(n-1)$-й степени относительно λ, то, в силу функционального уравнения для разрешающих ядер (§ 559), будем иметь тождество:

$$\lambda H_1^{(2)}(x,y)+\ldots+\lambda^{n-1}H_1^{(n)}(x,y)=$$
$$=\lambda\int_a^b H_1(x,s)\left[\lambda^{n-1}H_1^{(n)}(s,y)+\ldots+H_1(s,y)\right]ds,$$

откуда, приравнивая нулю коэфициент при λ^n, имеем:

$$\int_a^b H_1(x,s)H_1^{(n)}(s,y)\,ds=0.$$

Это отношение можно было бы также получить непосредственно, если выразить, что $H_1^{(n+1)}$ равно нулю. Отсюда следует, что всякая функция $\varphi(x)$ вида $H_1^{(n)}(x,y)$ представляет решение уравнения $\int_a^b H_1(x,s)\varphi(s)\,ds=0$. Так как два ядра $H(x,y)$ и $H_1^{(n)}(x,y)$ ортогональны, то функция $\varphi(x)$ также представляет решение уравнения:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds=0, \tag{90}$$

которое может быть рассматриваемо как предельный случай однородного уравнения:

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds,$$

предполагая, что особое значение c равно бесконечности. Если $n>1$, то функции

$$H_1^{(n-1)}(x,y_1),\quad H_1^{(n-2)}(x,y_1),\ \ldots,$$

получаемые, если переменному y дать любое численное значение y_1, также представляют аналоги главных функций. Но в то время как полюсу резольвенты на конечном расстоянии соответствует только конечное число фундаментальных функций, предыдущий пример показывает, что уравнение (90) может иметь бесконечное множество различных решений.

Мы сделали наиболее простое предположение относительно ядра. Введем теперь более общее предположение, что ядро $K^{(p)}(x, y)$, полученное из $K(x, y)$ с помощью $p-1$ последовательных итераций, удовлетворяет требуемому условию, т. е. что ряд $\sum k_i^{(p)}(x, y)$ равномерно сходится. Согласно только что доказанному резольвента $\Gamma_p(x, y; \lambda)$ ядра $K^{(p)}(x, y)$ представляется разложением:

$$\Gamma_p(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda)] + E_p(x, y; \lambda), \tag{91}$$

где c_i есть полюс для $\Gamma(x, y; \lambda)$, c_i^p — полюс $\Gamma_p(x, y; \lambda)$, а $P^{(i)}(\Gamma_p)$ есть главная часть функции Γ_p в области этого полюса. Что касается функции $E_p(x, y; \lambda)$, то это целая функция от λ, которая служит резольвентой для ядра

$$K^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^{+\infty} k_i^{(p)}(x, y).$$

Мы можем выразить Γ с помощью Γ_p. В самом деле, согласно общей формуле (65) § 560, имеем:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = H(x, y; \lambda) + \lambda^{p-1}\Gamma_p(x, y; \lambda^p) + \lambda^p \int_a^b H(x, s; \lambda)\,\Gamma_p(s, y; \lambda^p)\,ds,$$

если положить

$$H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{p-2} K^{(p-1)}(x, y).$$

Разделив обе части на λ^{p-1} и заменяя $\Gamma_p(x, y, \lambda^p)$ его выражением из формулы (91), получим, что

$$\frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} = \frac{H(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} + \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda^p)] + E_p(x, y; \lambda^p) +$$
$$+ \lambda \int_a^b H(x, s, \lambda)\left\{\sum_i P^{(i)}[\Gamma_p(s, y; \lambda^p)] + E_p(s, y; \lambda^p)\right\} ds.$$

Положим для определенности, что полюсу c_i^p функции $\Gamma_p(x, y; \lambda)$ соответствует единственный полюс c_i функции $\Gamma(x, y; \lambda)$.

Бесконечная часть функции $\dfrac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}}$ в области точки $\lambda = c_i$ может происходить только от

$$P^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda^p)] + \lambda \int_a^b H(x, s; \lambda)\, P^{(i)}[\Gamma_p(s, y; \lambda^p)]\,ds,$$

и, следовательно, эта функция от λ обращается в бесконечность только при $\lambda = c_i$. С другой стороны, $P^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda^p)]$ есть рациональная функция от λ, в которой степень знаменателя на p единиц превосходит степень числителя. Так как степень $\lambda H(x, s; \lambda)$ относительно λ равна $p-1$, то рассматриваемое выражение для бесконечного значения λ обращается в нуль. Оно представляет, следовательно, главную часть функции $\dfrac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}}$ в области полюса $\lambda = c_i$, и предыдущая формула может быть записана в виде:

$$\frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} = \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)} \left[\frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}}\right] + \frac{H(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} + E_p(x, y; \lambda^p) +$$

$$+ \lambda \int_a^b H(x, s; \lambda) E_p(s, y; \lambda^p)\, ds$$

или же

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \lambda^{p-1} \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)} \left[\frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}}\right] + H(x, y; \lambda) +$$

$$+ \lambda^{p-1} E_p(x, y; \lambda^p) + \lambda^p \int_a^b H(x, s; \lambda) E_p(s, y; \lambda^p)\, ds. \qquad (92)$$

Рациональная дробь $\lambda^{p-1} P^{(i)} \left[\frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}}\right]$, соответствующая полюсу c_i, очевидно, зависит только от главного ядра $\bar{K}(x, y)$, относящегося к этому полюсу. Что касается целой части правой стороны, то она зависит от $K, K^{(2)}, \ldots, K^{(p-1)}$ и от $E_p(x, y; \lambda)$. Если функция E_p равна нулю, то эта целая часть обращается в многочлен. В частности, это имеет место в случае симметрического ядра (см. следующую главу).

Заметим еще, что, если разрешающее ядро $\Gamma(x, y; \lambda)$ может быть представлено в виде (92) для некоторого значения p, то его можно представить в этом виде бесчисленным множеством способов, ибо число p можно заменить любым целым числом, превосходящим p.

586. Особые ядра. Не возникает никаких новых трудностей, кроме сложности письма, при обобщении свойств разрешающего ядра на уравнение

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \int_{(D)} K(x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)\, \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n + f(x_1, \ldots, x_n),$$

где знак $\int$ означает кратный интеграл, распространенный на определенную n-мерную область D, в случае, если ядро K ограничено или в более общем случае ядра, из которого можно получить ограниченное ядро путем конечного числа итераций (§ 563, 570).

Но столь простые свойства решений уравнения Фредгольма глубоко меняются в случае, если ядро $K(x, y)$ обладает существенными особенностями или точками неопределенности. Эта глава теории интегральных уравнений не разработана еще до конца, и мы приведем только несколько простых примеров. В первом из этих примеров один из пределов равен бесконечности. Но всякое интегральное уравнение, например с пределами 0 и ∞, можно легко привести к другому интегральному уравнению, для которого пределами служат 0 и 1. Если, в самом деле, в уравнении

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x)$$

положить:

$$x = \frac{x'}{1 - x'}, \quad s = \frac{s'}{1 - s'}, \quad \Phi(x') = \varphi\left(\frac{x'}{1 - x'}\right), \quad F(x') = f\left(\frac{x'}{1 - x'}\right),$$

то это уравнение переходит в уравнение:

$$\Phi(x') = \lambda \int_0^1 K\left(\frac{x'}{1 - x'}, \frac{s'}{1 - s'}\right) \frac{1}{(s' - 1)^2}\, \Phi(s')\, ds' + F(x').$$

Точно так же, если пределы интеграла суть $-\infty$ и $+\infty$, то, полагая $x=\lg x'$, $s=\lg s'$, мы приведем этот случай к предыдущему. Обратно, всякое интегральное уравнение, в котором пределами интегрирования служат два конечных числа a и b, может быть приведено к интегральному уравнению с одним бесконечным пределом.

Интегральное уравнение *

$$\varphi(x)=\lambda\int_{x}^{+\infty}\frac{(s-x)^n}{n!}\varphi(s)\,ds+f(x) \tag{93}$$

можно рассматривать как уравнение второго рода, в котором верхний предел b бесконечен, тогда как нижний предел a представляет произвольное число, меньшее x, а ядро $K(x,s)$ равно нулю для $s<x$ и равно $\frac{(s-x)^n}{n!}$ для $s\geqslant x$. Пусть α будет число действительное и положительное или комплексное с положительною действительною частью. С помощью последовательных интегрирований по частям нетрудно показать, что

$$\int_{x}^{+\infty}\frac{(s-x)^n}{n!}e^{-\alpha s}\,ds=\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^{n+1}},$$

так, что $e^{-\alpha x}$ представляет решение однородного уравнения:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{x}^{+\infty}\frac{(s-x)^n}{n!}\varphi(s)\,ds, \tag{94}$$

где $\lambda=\alpha^{n+1}$. Если мы попрежнему будем называть характеристическим числом уравнения (93) всякое такое значение λ, при котором однородное уравнение (94) имеет решение, отличное от нуля, то мы можем сказать, что всякое значение λ, при котором одно из значений $\sqrt[n+1]{\lambda}$ имеет положительную действительную часть, является характеристическим числом для уравнения (93). Итак, при $n>1$ всякое действительное или комплексное число представляет характеристическое число. При $n=0$ всякое число, действительная часть которого положительна, есть характеристическое число. При $n=1$ всякое число, кроме нуля и действительных отрицательных чисел, является характеристическим значением.

Точно так же, если действительная часть α положительна, то

$$\int_{0}^{x}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{x}\right)s^{\alpha}\,ds=\frac{x^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)},$$

так что каждое числое λ, для которого уравнение $\alpha^2+\alpha=\lambda$ имеет корень с положительною действительною частью, является характеристическим значением для уравнения:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{\alpha}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{x}\right)\varphi(s)\,ds+f(x). \tag{95}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы, если $\lambda=\xi+\eta_i$, то точка (ξ,η) была вне параболы $\xi+\eta^2=0$.

---

* Я дал этот пример в заметке в *Comptes Rendus* (т. 157, 10 ноября 1913 г.). Первый пример этого рода дал Пикар (*Annales de l'Ecole Normale*, 1911, стр. 313).

Мы видим, таким образом, что с точки зрения характеристических значений имеется существенное различие между приведенными примерами и правильным уравнением Фредгольма. Это различие не менее велико, когда мы рассматриваем решение уравнения (93) как функцию от λ во всей плоскости изменения переменного λ. Положим, что функция $f(x)$ действительного переменного x удовлетворяет условию $|f(x)| < Le^{-lx}$, где L и l — два положительных числа. Применяя обычный метод последовательных приближений, легко видеть, что уравнение (93) имеет решение $\varphi(x, \lambda)$, которое изображается в виде ряда, целого относительно λ и сходящегося в круге C радиуса l^{n+1}. Но аналитическое продолжение этой функции может иметь вне круга C произвольно заданные естественные разрезы, если $n > 1$. Действительно, положим, что функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \sum A_i e^{-\alpha_i x}$, где действительные части всех чисел α_j положительны, и два ряда $\sum \left| A_i \alpha_i^{n+1} \right|$ и $\sum |A_i|$ сходятся. Соответствующее решение уравнения (93) имеет вид:

$$\varphi(x, \lambda) = \sum \frac{A_i \alpha_i^{n+1}}{\alpha_i^{n+1} - \lambda} e^{-\alpha_i x}.$$

Это решение, рассматриваемое как функция от λ, мероморфно во всякой области плоскости, содержащей только конечное число точек α_i^{n+1}. Но если числа α_i выбраны так, что на любой произвольно малой части дуги кривой Γ, не проходящей через начало, находится бесчисленное множество точек α_i^{n+1} (при $n > 1$ это всегда можно сделать бесчисленным множеством способов), то кривая Γ является естественным разрезом для функции $\varphi(x, \lambda)$ (II, § 345). Можно заметить далее, что в этом примере, как для правильного уравнения Фредгольма, особые точки функции $\varphi(x, \lambda)$ принадлежат к множеству характеристических значений λ интегрального уравнения.

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

1. *Прямое доказательство формулы (10) § 565.* Разложение детерминанта

$$K\begin{pmatrix} x\, x_1 \ldots x_n \\ y\, y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}$$

содержит в качестве первого члена произведение

$$K(x, y)\, K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}.$$

Совокупность остальных членов разложения может быть записана в виде:

$$\sum (-1)^p K(x, x_i)\, K(x_i, x_j) \ldots K(x_k, y)\, K\begin{pmatrix} x'_1 \ldots x'_{n-p} \\ x'_1 \ldots x'_{n-p} \end{pmatrix},$$

где $x_i, x_j, \ldots, x_k$ обозначают p каких-нибудь из переменных $x_1, \ldots, x_n$, а $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-p}$ — остальные $n-p$ переменных.

Следовательно, кратный интеграл от этого произведения равен:

$$(-1)^p K^{(p+1)}(x, y) \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_{n-p} \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-p} \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_{n-p},$$

и этот член входит $n(n-1) \ldots (n-p+1)$ раз в коэфициент при λ^n функции $D\left(\frac{x}{y} \middle| \lambda\right)$. Давая p значения от 1 до n, легко получить соотношение (10).

2. *Разложение функции* $D'(\lambda):D(\lambda)$ (§ 566). Запишем коэфициент при λ^n в функции $D(\lambda)$ в виде $(-1)^n \frac{U_n}{n!}$, что равносильно обозначениям:

$$U_n = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n, \quad U_0 = 1.$$

Эти числа U_n выражаются с помощью следов A_n ядра $K(x, y)$. Действительно разложение определителя $K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$ может быть записано в виде:

$$K(x_1, x_1) K\begin{pmatrix} x_2 \ldots x_n \\ x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} + \sum (-1)^p K(x_1, x_i) \ldots K(x_l, x_1) K\begin{pmatrix} x'_1 x'_2 \ldots x'_{n-p} \\ x'_1 x'_2 \ldots x'_{n-p} \end{pmatrix},$$

где $x_i, x_j, \ldots, x_e$ обозначают p из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-p}$ — остальные $n-p$ переменных. Из этого разложения получается с помощью интегрирования рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} U_n = A_1 U_{n-1} &- (n-1) A_2 U_{n-2} + (n-1)(n-2) A_3 U_{n-3} + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{p+1} (n-1)(n-2) \ldots (n-p+1) A_p U_{n-p} + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{p+1} (n-1)! \, A_n U_0, \end{aligned}$$

которое выражает тождество $D'(\lambda) = -D(\lambda) G(\lambda)$, если положить

$$G(\lambda) = A_1 + A_2 \lambda + \ldots + A_n \lambda^{n-1} + \ldots$$

3. *Метод Е. Шмидта для произвольного ядра* (*Math. Annalen*, т. 64, стр. 161). Пусть $K(x, y)$ - ограниченное ядро. Мы допустим, что параметр λ имеет определенное значение. Метод Шмидта решения уравнения второго рода (1) состоит в разбиении ядра $K(x, y)$ на две части:

$$K(x, y) = K_1(x, y) + \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(y),$$

где $2n$ функций $\alpha_p(x)$, $\beta_p(y)$ выбраны так, что значение двойного интеграла $\int_a^b \int_a^b [K_1(x, y)]^2 dx\, dy$ меньше, чем $\frac{1}{|\lambda|}$; это всегда возможно и притом бесконечным числом способов (см. § 601). Запишем затем уравнение (1) в виде:

$$\varphi(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, s) \varphi(s)\, ds, \tag{1}$$

полагая

$$f_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(s) \varphi(s)\, ds. \tag{2}$$

Согласно определению функции $K_1(x, y)$ ряд, изображающий резольвенту $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ ядра $K_1(x, y)$, сходится для рассматриваемого значения λ (замечание к стр. 31). Таким образом из уравнения (1) получаем:

$$\varphi(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_1(x, t; \lambda) f_1(t)\, dt, \tag{3}$$

а заменяя функцию $f_1(x)$ ее выражением (2), мы получаем соотношение:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{p=1}^n \alpha_p(x)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds+\lambda\int_a^b\Gamma_1(x,t,\lambda)f(t)\,dt+$$

$$+\lambda^2\int_a^b\int_a^b\Gamma_1(x,t;\lambda)\sum_{p=1}^n\alpha_p(t)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds\,dt,$$

которое представляет снова уравнение второго рода, имеющее вид:

$$\varphi(x)=F(x,\lambda)+\lambda\int_a^b\sum_{p=1}^n f_p(x,\lambda)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

причем его ядро имеет специальную форму (§ 571).

Пользуясь этим методом, можно легко показать аналитический характер резольвенты, как это сделано мною в статье в *Bulletin de la Sociéte mathématique*, т. 37, стр. 197 (1909).

4. *Особое ядро Вейля* (Weyl) (*Math. Annalen*, т. 66).

Из элементарных соображений следует, — что

$$\int_0^{+\infty}e^{-as}\sin(xs)\,ds=\frac{x}{a^2+x^2},\tag{1}$$

где a — число положительное.

С другой стороны, взяв интеграл от функции $\frac{z}{a^2+z^2}e^{izx}$ комплексного переменного z вдоль контура, указанного на стр. 134 ч. I т. II, и рассуждая, как в этом примере, мы легко получим соотношение:

$$\int_0^{+\infty}\frac{s}{a^2+s^2}\sin(xs)\,ds=\frac{\pi}{2}e^{-ax},\tag{2}$$

если x есть действительное и положительное число.

Из формул (1) и (2) мы получаем:

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-as}+\frac{s}{a^2+s^2}\right)\sin(xs)\,ds=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax}+\frac{x}{a^2+x^2}\right),$$

так что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ представляет особое значение для интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{+\infty}\sin(xs)\,\varphi(s)\,ds+f(x),$$

которому соответствует бесчисленное множество фундаментальных функций, зависящих от параметра a.

5. *Особое уравнение Пикара* (Picard). Однородное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-s|}\varphi(s)\,ds$$

имеет два решения вида $e^{\pm\alpha ix}$, где α — действительное число, если только λ — число вида $\frac{1+\alpha^2}{2}$. Всякое действительное значение λ, большее $\frac{1}{2}$, является следовательно, характеристическим значением. Эти решения можно получить, замечая, что, если рассматриваемое уравнение продиференцировать два раза, то мы приходим к линейному уравнению:

$$\varphi''+(2\lambda-1)\varphi=0.$$

С помощью этих простых функций можно составить подобно тому, как это указано выше, решение уравнения с правой частью $f(x)$, имеющее в качестве естественного разреза произвольный отрезок действительной оси, лежащий справа от точки $\lambda=\frac{1}{2}$.

Уравнение Лалеско получается из уравнения Пикара, если заменить $-\infty$ нулем. Характеристические значения суть те значения λ, для которых действительная часть $\sqrt{1-2\lambda}$ по абсолютной величине меньше единицы. Соответствующая фундаментальная функция есть

$$(\alpha+1)\,e^{\alpha x}+(\alpha-1)\,e^{-\alpha x},$$

где α равно $\sqrt{1-2\lambda}$.

ГЛАВА XXXII

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

537. Симметрические ядра. Свойства симметрических ядер были впервые изучены Гильбертом * и выведены им из свойств симметрических квадратичных форм с помощью перехода к пределу. Результаты Гильберта были несколько позже доказаны Шмидтом ** с помощью очень изящного прямого метода. Эти свойства легко выводятся из общей теории, изложенной в предыдущей главе.

Пусть $K(x, y)$ будет *действительное* симметрическое ядро. Тогда, как мы на это уже указывали (§ 584), все ядра, полученные из него последовательными итерациями, также симметричны. Мы докажем, что ряд

$$u(x, \lambda) = u(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, u(s)\, ds, \tag{1}$$

который представляет разложение по степеням λ, решения уравнения Фредгольма, где известная функция $f(x) = u(x)$, не может быть целой функцией от λ, если функция $u(x)$ не ортогональна справа к ядру $K(x, y)$. Мы предположим для определенности, что функция $u(x)$ ограничена и интегрируема.

Допустим, в самом деле, что ряд (1) представляет целую функцию от λ. Умножим все члены этого ряда на $u(x)$ и проинтегрируем затем в пределах от a до b. Полученный ряд $\sum \mathfrak{A}_n \lambda^n$, где $\mathfrak{A}_n$ имеет выражение

$$\mathfrak{A}_n = \int_a^b \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds,$$

будет также целой функцией от λ. Поэтому согласно свойствам повторных ядер (§ 558) можно записать, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{2n} &= \int_a^b \int_a^b K^{(2n)}(x, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds = \\ &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b K^{(n)}(x, t)\, K^{(n)}(t, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds\, dt = \\ &= \int_a^b dt \left[\int_a^b K^{(n)}(x, t)\, u(x)\, dx\right]^2,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathfrak{A}_{2n} \geqslant 0$, если $b > a$, как это и предполагалось,

---

* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen (*Göttingen Nachrichten*. 1904, 1905, 1906 и 1910).

** *Mathematische Annalen*, т. 63, 1907, стр. 433—476.

Имеем также:

$$\mathfrak{A}_{2n}=\int_a^b\int_a^b\int_a^b K^{(n+1)}(x, t)\,K^{(n-1)}(t, s)\,u(x)\,u(s)\,dx\,ds\,dt=$$

$$=\int_a^b dt\times\left\{\int_a^b K^{(n+1)}(x, t)\,u(x)\,dx\right\}\times\left\{\int_a^b K^{(n-1)}(x, t)\,u(x)\,dx\right\},$$

и, следовательно, согласно неравенству Шварца (§ 559)

$$\mathfrak{A}_{2n}^2\leqslant\int_a^b dt\left[\int_a^b K^{(n+1)}(x, t)\,u(x)\,dx\right]^2\times\int_a^b dt\left[\int_a^b K^{(n-1)}(x, t)\,u(x)\,dx\right]^2,$$

или, сравнивая с первым выражением для $\mathfrak{A}_{2n}$,

$$\mathfrak{A}_{2n}^2\leqslant\mathfrak{A}_{2n+2}\,\mathfrak{A}_{2n-2}. \tag{2}$$

Ряд $\sum\mathfrak{A}_n\lambda^n$ может быть сходящимся для любого значения λ только в том случае, если $\mathfrak{A}_4=0$. Действительно, если $\mathfrak{A}_4$ положительно, то согласно неравенству (2) то же можно сказать и об $\mathfrak{A}_6, \mathfrak{A}_8, \ldots$, и отношение $\dfrac{\mathfrak{A}_{2n}}{\mathfrak{A}_{2n-2}}$ возрастает вместе с n. Поэтому, если $\mathfrak{A}_4$ не равно нулю, то ряд, составленный из членов ряда $\sum\mathfrak{A}_n\lambda^n$, содержащих только четные степени λ, не может быть сходящимся для всякого значения λ. Но для того чтобы $\mathfrak{A}_4$ было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x)$ была ортогональна к ядру $K^{(2)}(x, y)$. А тогда, принимая во внимание выражение для ядра $K^{(2)}(x, y)$, можно написать:

$$\int_a^b\int_a^b K^{(2)}(x, y)\,u(x)\,u(y)\,dx\,dy=\int_a^b dt\left[\int_a^b K(x, t)\,u(x)\,dx\right]^2,$$

откуда следует, что, если функция $u(x)$ ортогональна к первому повторному ядру $K^{(2)}(x, y)$, то она ортогональна также к ядру $K(x, y)$. Итак, если в качестве функции $u(x)$ взять функцию не ортогональную к ядру $K(x, y)$, то не может быть $\mathfrak{A}_4=0$, и ряд (1) не может быть сходящимся для любого значения λ. Поэтому *всякое симметрическое ядро имеет по крайней мере одно особое значение* * (ср. § 584).

* Это рассуждение неприменимо к таким разрывным ядрам, для которых

$$\int_a^b K(x, t)\,u(t)\,dt$$

равен нулю для всех значений x, за исключением конечного числа, при любой интегрируемой функции $u(x)$. Таковы были бы симметрические ядра, равные нулю везде, кроме диагонали $y=x$ и конечного числа прямых параллельных осям, попарно симметричных относительно диагонали. В последующем изложении мы этих ядер рассматривать не будем.

Общие теоремы о фундаментальных функциях дают возможность легко дополнить этот результат.

1. *Все особые значения симметрического действительного ядра также действительны.* Положим, в самом деле, что существует особое значение $\alpha+\beta i$ $(\beta \gtrless 0)$; тогда $\alpha-\beta i$ будет также особым значением, и этим двум особым значениям будут соответствовать две комплексные сопряженные фундаментальные функции $u+iv$ и $u-iv$. А так как ядро симметрично, то эти две функции будут фундаментальными и для союзного ядра, и согласно общему условию ортогональности (§ 580), мы будем иметь:

$$\int_a^b (u+iv)(u-iv)\,dx=\int_a^b (u^2+v^2)\,dx=0,$$

откуда следует, что u и v равны нулю.

2. *Особые значения являются простыми полюсами резольвенты.* Пусть, в самом деле, $\varphi(x)$ будет фундаментальная функция, соответствующая полюсу c; она является также фундаментальной функцией для союзного уравнения; но эти две функции не могут быть ортогональны; следовательно, c есть простой полюс резольвенты (§ 578).

Можно еще рассуждать следующим образом. Предположим, что

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx=1,$$

это всегда можно сделать. Два ядра

$$\frac{\varphi(x)\,\varphi(y)}{c},\quad K(x, y)-\frac{\varphi(x\cdot\varphi(y)}{c}=K_1(x, y)$$

полуортогональны (§ 575), а так как они симметричны, то они ортогональны. Если c еще остается особым значением для $K_1(x, y)$, то можно повторить ту же операцию для этого ядра; после некоторого конечного числа преобразований этого рода можно представить $K(x, y)$ в виде:

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{c}+H(x, y),$$

где c уже не является особым значением для симметрического ядра $H(x, y)$. Сумма

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{c}$$

есть главное ядро, соответствующее полюсу c, и согласно самому способу построения функций $\varphi_i(x)$ составляет ортогональную и нормальную систему.

Из этого же доказательства вытекает, что всякое симметрическое ядро, имеющее конечное число особых значений, имеет вид:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}. \tag{3}$$

Действительно, если из ядра $K(x, y)$ вычесть сумму $S(x, y)$ главных ядер, соответствующих особым значениям, то разность

$$K(x, y) - S(x, y) = H(x, y)$$

представляет симметрическое ядро, ортогональное к сумме $S(x, y)$. Так как это ядро не имеет ни одного особого значения, то оно равно нулю. Для симметрического ядра, имеющего бесконечное множество особых значений, мы будем иметь:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}, \tag{4}$$

если только ряд, стоящий в правой части, равномерно сходится. Итак, фундаментальные функции симметрического действительного ядра составляют нормальную и ортогональную систему функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots$, каждая из которых соответствует некоторому полюсу разрешающего ядра. Предположим, что эти полюсы расположены в порядке неубывающих модулей, причем каждый из них входит в эту последовательность столько раз, сколько ему соответствует фундаментальных функций:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots \tag{5}$$

Каждому члену λ_i соответствует определенная функция $\varphi_i(x)$ ортогональной системы. Обратно, всякая ортогональная система может быть получена из симметрического ядра бесконечным числом способов. Действительно, если выбрать постоянные λ_i так, чтобы ряд (4) был абсолютно и равномерно сходящимся, то ясно, что функции $\varphi_i(x)$ представляют фундаментальные функции этого ядра*.

Примечание I. Если ядро $K(x, y)$ симметрическое, то все особые значения повторного ядра $K^{(2)}(x, y)$ действительны и *положительны*. Мероморфная функция $D_2'(\lambda):D_2(\lambda)$ имеет только простые положительные полюсы, и, следовательно, наименьший из этих полюсов равен пределу отношения $\frac{A_{2n-2}}{A_{2n}}$ при неограниченно возрастающем n (§ 582). Метод Кнезера (Kneser) для доказательства

* Все эти теоремы применимы только к симметрическому действительному ядру. Если, например, взять

$$K(x, y) = x(1 + iy\sqrt{3}) + y(1 + ix\sqrt{3}), \quad a = -1, \quad b = 1,$$

то нетрудно показать, что функции $1 + ix\sqrt{3}$ и x составляют систему главных функций, соответствующих особому значению $\frac{\sqrt{3}}{2i}$.

того, что симметрическое ядро имеет по крайней мере одно особое значение, состоит как раз в доказательстве существования предела этого отношения (см. упражнение 1).

Примечание II. Мы видели (§ 580), что при любом ядре $K(x, y)$ всякая функция $u(x)$, удовлетворяющая условию

$$\int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds = 0,$$

ортогональна ко всем фундаментальным функциям $\psi_i(x)$ союзного ядра. Обратное предложение не имеет места при любом ядре*, но справедливо для симметрического ядра. В самом деле, если функция $u(x)$ ортогональна ко всем фундаментальным функциям симметрического ядра, то функция $u(x, \lambda)$, представляющая решение уравнения Фредгольма, в котором $f(x) = u(x)$, есть целая функция параметра λ (§ 582), а мы доказали, что это не может иметь места, если

$$\int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds = 0;$$

следовательно, ряд $u(x, \lambda)$ сводится к своему первому члену.

588. Неравенство Бесселя. Пусть S будет нормальная система функций $\varphi_i(x)$, ортогональных в интервале (a, b). Если функция $f(x)$ представляется в этом интвервале равномерно сходящимся рядом вида

$$f(x) = f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{6}$$

с постоянными коэфициентами f_i, то эти коэфициенты могут быть определены как коэфициенты некоторого ряда Фурье. В самом деле, умножим обе части формулы (6) на $\varphi_i(x)$ и будем интегрировать правую часть почленно. Принимая во внимание условия ортогональности, мы получим:

$$f_i = \int_a^b f(x)\, \varphi_i(x)\, dx. \tag{7}$$

Какова бы ни была интегрируемая функция $f(x)$, ряд $\sum f_i\varphi_i(x)$ называется рядом Фурье для функции $f(x)$ по функциям рассматриваемой ортогональной системы S. Это, однако, не доказывает ни что этот ряд сходится, ни что его сумма равна $f(x)$. Мы рассмотрим только несколько частных случаев, которые связаны с теорией интегральных уравнений. Заметим только, что, если ряд Фурье для функции $f(x)$ равномерно сходится и имеет своей суммой $S(x)$, то разность $R(x) = f(x) - S(x)$ ортогональна к каждой функции $\varphi_i(x)$ (согласно самому способу вычисления f_i), а следовательно, и к функции $S(x)$.

---

* Пусть $K(x, y) = \sin y + \sin 2x \cos y$ $(a = 0,\ b = 2\pi)$. Функция $\cos x$ ортогональна к единственной фундаментальной функции $\sin x$, однако интеграл

$$\int_0^{2\pi} K(x, s) \cos s\, ds$$

не равен нулю.

Если квадрат функции $f(x)$ интегрируем в интервале (a, b), т. е., если $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ имеет конечное значение, то коэфициенты f_i удовлетворяют очень важному неравенству, установленному Бесселем, каково бы ни было число n:

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2<\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{8}$$

Это неравенство легко получить, если раскрыть очевидное неравенство:

$$\int\limits_a^b [f(x)-f_1\varphi_1(x)-f_2\varphi_2(x)-\ldots-f_n\varphi_n(x)]^2\,dx\geqslant 0$$

и принять во внимание формулы (7), которые дают значения коэфициентов f_i и соотношения которых выражают, что S есть ортогональная и нормальная система. Если система S состоит из бесчисленного множества функций, то число n можно предположить как угодно большим, и следовательно, ряд $\sum f_i^2$ из квадратов коэфициентов Фурье функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом всегда сходится.

Сумма членов этого ряда равна или меньше, чем $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, и различие в этих двух случаях приводит к очень важной классификации ортогональных систем. Ортогональная система S называется полной или замкнутой, если нельзя найти такой другой функции $\psi(x)$, которая присоединенная к функциям S, давала бы новую ортогональную нормальную* систему S'. В противном случае ортогональная система называется неполной или открытой. Ясно, что ортогональная система, содержащая только конечное число функций, не может быть замкнутой. Пусть S будет неполная система; существует по крайней мере одна функция $\psi(x)$, не входящая в S, ортогональная ко всем функциям $\varphi_i(x)$, для которой $\int\limits_a^b \psi^2=1$. Соответствующий этой функции ряд Фурье по системе S тождественно равен нулю, а следовательно, сумма ряда $\sum\psi_i^2$ меньше единицы. Следовательно, для того *чтобы ортогональная*

---

* Рассматривая только такие функции $\psi(x)$, для которых $\int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx=1$, мы исключаем разрывные функции $u(x)$, удовлетворяющие условию $\int\limits_a^b u^2(x)\,dx=0$. Ясно, что для функции этого рода мы всегда имеем $(\varphi_i u)=0$, согласно неравенству Шварца. Эти функции $u(x)$ могут быть отличны от нуля только в точках множества *меры нуль* (L e b e s g u e, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives).

система была замкнутой, достаточно, чтобы сумма ряда $\sum f_i^2$ *была всегда равна* $\int_a^b f^2(x)\,dx$, *какова бы ни была функция* $f(x)$ *с интегрируемым квадратом.*

Обратно, *если ортогональная система* S *замкнута, то для каждой функции* $f(x)$ *с интегрируемым квадратом имеет место равенство**:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i^2\,; \tag{9}$$

условие (9) поэтому называется *условием замкнутости* ортогональной системы.

Применим предыдущие определения к ортогональной системе S, образованной фундаментальными функциями $\varphi_i(x)$ симметрического ядра $K(x, y)$. Это ядро называется *замкнутым*, если не существует функции $\psi(x)$, такой, что $\int_a^b K(x, s)\,\psi(s)\,ds = 0$ тождественно, исключая, как всегда, те разрывные функции, которые равны нулю всюду, за исключением точек множества меры нуль. Согласно приведенному выше замечанию ядро $K(x, y)$ замкнуто, если система S замкнута, и наоборот.

Пример. Функции $1, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ образуют ортогональную систему в интервале $(0, 2\pi)$, Ляпунов и Гурвиц (Hurwitz, *Annales de l'Ecole Normale*, 1902) доказали, что *эта система замкнутая.*

589. Теорема Гильберта-Шмидта. Гильберт и после него Э. Шмидт доказали важную теорему относительно разложения некоторых функций в ряды фундаментальных функций. В этом параграфе мы будем предполагать, что $K(x, y)$ есть симметрическое непрерывное ядро или, по крайней мере, что оно может иметь точки разрыва только на прямой $y = x$, на такие, что произведение $|x - y|^{\alpha} K(x, y)$ остается ограниченным, причем показатель α меньше $\frac{1}{2}$, откуда следует, что интеграл

$$\int_a^b [K(x, y)]^2\,dy$$

имеет конечное значение. В этом случае первое повторное ядро $K^{(2)}(x, y)$ непрерывно точно так же, как фундаментальные функции $\varphi_i(x)$; и всякая функция вида

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds,$$

* Для доказательства см. Лауричелли (Lauricella, *Rendiconti di Palermo*, t. 29, 1910); Стеклов, *Mémoires de l'Académie de Saint — Pétersburg*, vol. 30, 1911. См. также дальше, § 599.

где $h(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, также является непрерывною функциею от x * (§ 556).

Всякая функция вида

$$f(x)=\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds, \tag{10}$$

где $h(x)$ — функция с интегрируемым квадратом, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд фундаментальных функций.

Положим, что особые значения λ_i ядра расположены в том порядке, какой указан в § 587, и пусть $\varphi_i(x)$ — фундаментальная функция, соответствующая значению λ_i. Коэфициент Фурье f_i функции $f(x)$ относительно $\varphi_i(x)$ равен:

$$f_i=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, \varphi_i(x)\, dx\, ds=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \varphi_i(s)\, h(s)\, ds=\frac{h_i}{\lambda_i},$$

где h_i — соответствующий коэфициент для $h(x)$. Полученный таким образом ряд

$$S(x)=\frac{h_1}{\lambda_1}\varphi_1(x)+\ldots+\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)+\ldots \tag{11}$$

абсолютно и равномерно сходится в интервале (a, b). Действительно, согласно обобщенному тождеству Лагранжа имеем:

$$\left\{\left|\frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|+\ldots+\left|\frac{h_m\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \{h_n^2+\ldots+h_m^2\}\left\{\left|\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|^2+\ldots+\left|\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|^2\right\}.$$

Так как ряд $\sum h_i^2$ сходится, то можно выбрать число N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство: $h_n^2+\ldots+h_m^2<\varepsilon$, каково бы ни было $m>n$, если только $n\geqslant N$; здесь ε означает произвольное положительное число. С другой стороны, сумма

$$\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right\}^2+\ldots+\left\{\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right\}^2,$$

каковы бы ни были n и m, остается при любом x меньше некоторого конечного числа M, ибо ряд с общим членом $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right\}^2$ сходится; действительно, $\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}$ представляет коэфициент Фурье для ядра $K(x, y)$, рас-

* Эти рассуждения легко распространяются на случаи с более широкими предположениями. Можно было бы, например, предположить, что ядро $K(x, y)$ имеет конечное число линий разрыва, параллельных осям, или что оно может обратиться в бесконечность, но так, что его квадрат остается интегрируемым.

сматриваемого как функция от y. Можно поэтому взять N настолько большим, что сумма абсолютных величин любого числа членов ряда (11), начиная с n-го, будет меньше всякого данного положительного числа, коль скоро $n \geqslant N$.

Сумма $S(x)$, таким образом, непрерывна в интервале (a, b). Чтобы доказать, что *эта сумма равна функции* $f(x)$, рассмотрим разность $R(x) = f(x) - S(x)$; согласно самому способу определения коэфициентов f_i функция $R(x)$ ортогональна по всем функциям $\varphi_i(x)$, а следовательно, и к $S(x)$. Будучи ортогональной ко всем фундаментальным функциям ядра $K(x, y)$, эта разность ортогональна к самому ядру (§ 587), а следовательно, и к функции $f(x)$, ибо можно написать:

$$\int_a^b f(x) R(x)\, dx = \int_a^b \int_a^b K(x, s) R(x) h(s)\, dx\, ds =$$
$$= \int_a^b h(s)\, ds \int_a^b K(x, s) R(x)\, dx = 0.$$

Поэтому имеем также:

$$\int_a^b R^2(x)\, dx = \int_a^b f(x) R(x)\, dx - \int_a^b S(x) R(x)\, dx = 0,$$

откуда следует, что $R(x)$ равно нулю, а следовательно, $S(x) = f(x)$.

Пользуясь этой теоремой, Э. Шмидт получил явное решение уравнения второго рода, выраженное только через особые значения и фундаментальные функции. Положим, что λ не есть особое значение для ядра; уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds + f(x), \tag{12}$$

где $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, имеет единственное решение и притом такое, что разность $\varphi(x) - f(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд вида:

$$\varphi(x) - f(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

Подставляя этот ряд в обе части уравнения (12), мы найдем:

$$\sum c_n\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds + \lambda \sum \frac{c_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) =$$
$$= \lambda \sum \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) + \lambda \sum \frac{c_n}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

а следовательно, $c_n = \dfrac{\lambda f_n}{\lambda_n - \lambda}$. Решение $\varphi(x)$, следовательно, может быть представлено рядом:

$$\varphi(x) = f(x) = \sum^{+\infty} \frac{\lambda f_n \varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda}; \tag{13}$$

рассуждая, как в случае ряда (11), мы легко докажем, что этот ряд абсолютно и равномерно сходится, если только λ не является особым значением.

Примечание. Формулу (13) можно применить и в том случае, когда λ равно особому значению λ_i ядра. Если число λ_i входит в последовательность только один раз, то уравнение (12), как известно, допускает решение только в том случае, если $f_i=0$, и поэтому достаточно заменить в ряду (13) коэфициент при $\varphi_i(x)$, который представляется в неопределенном виде произвольным постоянным c_i. Можно поступить совершенно так же и в том случае, если значению λ_i соответствует несколько различных фундаментальных функций (ср. § 568, 575).

590. Классификация симметрических ядер. Пусть будут $h(x)$ и $g(x)$ две функции с интегрируемым квадратом. С помощью теоремы Гильберта легко вычислить значение интеграла:

$$I=\int_a^b\int_a^b K(x, y)\, h(x)\, g(y)\, dx\, dy.$$

Действительно, мы находим последовательно:

$$I=\int_a^b g(y)\, dy\int_a^b K(x, y)\, h(x)\, dx=$$

$$=\int_a^b g(y)\, dy \sum \frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(y)=\sum \frac{g_n h_n}{\lambda_n},$$

ибо ряд $\sum \frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(y)$ равномерно сходится; числа h_n и g_n суть коэфициенты Фурье для функций h и g.

В частности, если положить $g(x)=h(x)$, то получится:

$$I=\int_a^b\int_a^b K(x, y)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h_n^2}{\lambda_n}, \tag{14}$$

соотношение, вполне аналогичное формуле, выражающей квадратичную форму в виде суммы квадратов, которое позволяет классифицировать эти ядра. Если все особые значения λ_i положительны, то всегда $I\geqslant 0$, какова бы ни была функция h, и ядро в этом случае называется положительным. Напротив того, если все особые значения отрицательны, то $I\leqslant 0$, и ядро отрицательное. Если среди особых значений есть числа разных знаков, то ядро знакопеременное; в таком случае интеграл I может иметь положительный или отрицательный знак в зависимости от выбора функции $h(x)$. Если, например, $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, то, взяв $h(x)=\varphi_1(x)$, мы получим положительное значение для I, а взяв $h(x)=\varphi_2(x)$, мы получим для этого интеграла отрицательное значение. В случае знакопеременного ядра интеграл I может быть нулем, в то время как $h(x)$ не равно нулю. Предположим опять, что $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$; если взять

$$h(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x),$$

то соответствующий интеграл имеет значение $\frac{a_1^2}{\lambda_1}+\frac{a_2^2}{\lambda_2}$, и при подходящем выборе отношения $\frac{a_1}{a_2}$ он будет равен нулю. Напротив того, если ядро $K(x, y)$ положительно, то интеграл I может быть нулем только в том случае, если существует функция $h(x)$, ортогональная ко всем фундаментальным функциям $\varphi_n(x)$, а следовательно, и к самому ядру. В случае *замкнутого и положительного* ядра имеем всегда $I>0$; это ядро называется *определенным*. Замкнутое и отрицательное ядро есть также *определенное ядро*. Из этого определения вытекает, что определенное ядро необходимо замкнутое, но это условие недостаточно: знакопеременное ядро может также быть замкнутым.

Фундаментальные функции положительного неопределенного ядра составляют неполную систему S. Если возможно к ним присоединить *конечное* число функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_p(x)$ так, чтобы полученная система S' была ортогональной и замкнутой, то ядро $K(x, y)$ называется *квазиопределенным*. Если к такому ядру прибавить ортогональное ядро вида:

$$C_1\psi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+C_p\psi_p(x)\psi_p(y),$$

зависящее от p произвольных постоянных, то оно преобразуется в замкнутое ядро.

Предположим, что некоторые из особых значений ядра $K(x,y)$ положительны, и пусть λ_1 будет наименьшее из них. Среди всех функций $h(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_a^b h^2(x)\,dx=1$, существует такая, при которой интеграл (14) имеет максимум. Действительно, согласно неравенству Бесселя ряд $\sum h_i^2$ сходится и имеет суммой $1-\alpha$, где $\alpha \geqslant 0$. Интеграл I может быть, следовательно, записан в виде:

$$I=\frac{1-\alpha}{\lambda_1}-\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_i}\right)h_i^2,$$

и его значение не может быть больше $\frac{1}{\lambda_1}$, т. е. того значения, которого он достигает, если взять $h(x)=\varphi_1(x)$. Если среди особых значений имеются отрицательные, то можно также показать, что интеграл I достигает отрицательного минимума, когда функция $h(x)$ равна фундаментальной функции, соответствующей отрицательному особому значению, наименьшему по абсолютной величине.

Гильберт показал, как, обратно, существование максимума или минимума интеграла I влечет за собой существование особых значений для ядра. Доказательство имеет много сходного с рассуждениями Римана при доказательстве принципа Дирихле (§ 512).

Если рассматривать интегрируемую функцию $h(x)$, удовлетворяющую условию $\int\limits_a^b h^2(x)\,dx=1$, то легко доказать, что интеграл I ограничен по абсолютной величине; это вытекает из неравенства Шварца:

$$I^2 \leqslant \iint [K(x, y)]^2\,dx\,dy \cdot \iint h^2(x)\,h^2(y)\,dx\,dy.$$

Допустим, что среди функций $h(x)$ существует одна, при которой I достигает своей верхней границы, и положим, например, что I достигает максимума при $h(x) = \varphi(x)$. Пусть будут $u(x)$ и $v(x)$ две какие-нибудь непрерывные функции, α и β — два переменных параметра, связанных соотношением:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_a^b [\varphi(x) + \alpha u(x) + \beta v(x)]^2 \, dx = 1.$$

Вспомогательная функция

$$I(\alpha, \beta) = \iint K(x, y) \{\varphi(x) + \alpha u(x) + \beta v(x)\} \{\varphi(y) + \alpha u(y) + \beta v(y)\} \, dx \, dy$$

должна достигать максимума при $\alpha = \beta = 0$, откуда согласно элементарной теории (т. I, § 27) имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\partial I}{\partial \beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$$

при $\alpha = \beta = 0$. Это соотношение можно записать в виде:

$$\frac{\iint K(x, y) \{\varphi(x) u(y) + \varphi(y) u(x)\} \, dx \, dy}{2\int_a^b \varphi(x) u(x) \, dx} = \frac{\iint K(x, y) \{\varphi(x) v(y) + \varphi(y) v(x)\} \, dx \, dy}{2\int_a^b \varphi(x) v(x) \, dx}, \tag{15}$$

и, следовательно, общее значение этих отношений должно быть равно постоянной величие C, не зависящей от вида функций $u(x)$ и $v(x)$. Принимая во внимание симметрию ядра $K(x, y)$, мы видим, что функция $u(x)$ должна удовлетворять условию:

$$\int_a^b u(x) \, dx \left\{\int_a^b K(x, y) \varphi(y) \, dy - C\varphi(x)\right\} = 0.$$

Но это соотношение, очевидно, может выполняться при любой непрерывной функции $u(x)$ только в том случае, если

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) \, dy = C\varphi(x).$$

Таким образом существование первой фундаментальной функции установлено; точно так же можно показать, что та из функций $h(x)$, ортогональных к функции $\varphi(x)$ и удовлетворяющих условию $\int_a^b h^2 \, dx = 1$, при которой интеграл I достигает максимума, дает новую фундаментальную функцию, и так далее.

591. Разложение повторных ядер. Возьмем в выражении (10) $h(x)$ равным самому ядру $K(x, y)$, причем y будем рассматривать как параметр. Тогда $f(x) = K^{(2)}(x, y)$, и теорема Гильберта дает разложение повторного ядра $K^{(2)}(x, y)$ по фундаментальным функциям. В этом случае коэфициент h_n равен $\frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n}$, и общая формула (6) переходит в следующую:

$$K^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n^2}. \tag{16}$$

Соображения § 589 показывают только, что при постоянном значении y ряд (16) равномерно сходится относительно x. Из соображений симметрии можно сказать, что при постоянном значении x этот ряд равномерно сходится относительно y, но отсюда нельзя сделать непосредственно вывода, что он равномерно сходится относительно совокупности обоих переменных. Чтобы это доказать, рассмотрим ряд, полученный при $y = x$:

$$K^{(2)}(x, x) = \frac{\varphi_1^2(x)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2(x)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \ldots \tag{17}$$

Члены этого ряда все непрерывны и положительны, следовательно, и сумма его представляет непрерывную функцию, т. е. этот ряд сходится равномерно *. А в таком случае неравенство

$$\left|\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_h^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\varphi_n^2(x) + \varphi_n^2(y)}{\lambda_n^2}$$

показывает, что и ряд (16) абсолютно и равномерно сходится. С помощью формулы (16) мы найдем одно за другим разложение последовательных повторных ядер $K^{(3)}(x, y)$, $K^{(4)}(x, y), \ldots$, пользуясь рекур-

---

* Доказательство этой теоремы, принадлежащей Дини (Dini), очевидно, равносильно доказательству следующего предложения.

Пусть будет $u_n(x)$ положительная непрерывная функция в интервале (a, b), которая стремится к нулю при неограниченном возрастании n; если $u_{n+1}(x) \leqslant \leqslant u_n(x)$, она стремится к нулю равномерно.

Обозначим через $M_n(a, b)$ максимум функции $u_n(x)$ в (замкнутом) интервале (a, b); по предположению мы имеем: $0 < M_{n+1}(a, b) \leqslant M_n(a, b)$; следовательно, $M_n(a, b)$ стремится при неограниченном возрастании n к пределу $L(a, b) \geqslant 0$. Достаточно доказать, что этот предел равен нулю. Допустим, что $L(a, b) > 0$; если разбить интервал (a, b) на два частичных интервала (a, c), (c, b), то по крайней мере одно из чисел $L(a, c)$, $L(c, b)$ окажется равным $L(a, b)$. Применяя последовательные разбиения, как это делалось уже несколько раз (I, § 8), мы докажем существование на интервале (a, b) такого числа x_0, что предел $L(x_0 - h, x_0 + h)$ равен положительному числу L' независимому от h, как бы мало ни было это число h. Но это заключение несовместимо с условиями теоремы. В самом деле, можно сначала найти такое целое число m, что $u_m(x_0) < \frac{L'}{2}$, далее достаточно малое число h, так что в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ абсолютная величина разности будет меньше $\frac{L'}{2}$. Следовательно, во всем этом интервале будем иметь: $u_m(x) < L'$, а значит, и $u_n(x) < L'$ при $n \geqslant m$. Следовательно, предел $L(x_0 - h, x_0 + h)$ не может быть равен L'.

рентной формулой, связывающей два последовательных ядра. Таким образом при $m \geqslant 2$ имеем:

$$K^{(m)}(x, y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^m} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^m} + \ldots \tag{18}$$

Все эти ряды сходятся равномерно и абсолютно, как это легко видеть, сравнивая их с рядом (16) *.

Заменяя в ряду (18) y на x и интегрируя, мы получим выражение для коэфициента A_m при $m \geqslant 2$:

$$A_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}. \tag{19}$$

Целая функция

$$F(\lambda) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}},$$

которую можно также записать в виде

$$F(\lambda) = e^{-\lambda^2 \sum \frac{1}{2\lambda_n^2} - \ldots - \lambda^m \sum \frac{1}{m\lambda_n^m} - \ldots},$$

отличается от функции $D(\lambda)$ только показательным множителем $e^{-A_1\lambda}$, а поэтому

$$D(\lambda) = e^{-A_1\lambda} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}; \tag{20}$$

Функция $D(\lambda)$, следовательно, не больше чем первого рода, но она может быть и *нулевого рода*, как мы это ниже покажем для частного случая положительных ядер.

Из формул разложения повторных ядер можно также получить разложение разрешающего ядра:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots \tag{21}$$

Если в этой формуле заменить повторные ядра $K^{(n)}(x, y)$ $(n \geqslant 2)$ их разложениями (18), то получится таблица с двойным входом, и если суммировать члены этой таблицы, соединяя в одну группу члены с $\varphi_n(x)\varphi_n(y)$, то мы получим формулу:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}; \tag{22}$$

сравнивая члены этого ряда с членами ряда (16), легко показать, что полученный таким образом ряд абсолютно и равномерно сходится, если только λ не есть особое значение, а этого достаточно, чтобы иметь

* Формула (18) была установлена Э. Шмидтом для $m \geqslant 3$, а затем Г. Ковалевским для $m = 2$.

право применить принятый нами способ суммирования. Но тогда как формула (21) применима только для таких значений λ, абсолютная величина которых меньше $|\lambda_1|$, формула (22) дает разложение мероморфной функции $\Gamma(x, y; \lambda)$ во всей плоскости переменного λ (ср. § 585).

592. Положительные ядра. Симметрические ядра, положительные и непрерывные, были изучены Мерсером (Mercer) в его интересном мемуаре *, из которого мы приведем основные результаты.

Для того чтобы симметрическое ядро $K(x, y)$ было положительным, необходимо и достаточно, чтобы все определители Фредгольма $K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ были больше или равны нулю для любой системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в интервале (a, b).

Мы докажем только неравенство $K(x, x) \geqslant 0$, которое нам понадобится впоследствии; остальные неравенства доказываются совершенно аналогично. Предположим, что $K(x_0, x_0) < 0$ для какого-нибудь значения x_0 из интервала (a, b). Так как для системы значений $x = x_0$, $y = x_0$ ядро непрерывно, то при достаточно малом положительном l ядро $K(x, y)$ будет оставаться отрицательным при значениях x и y, заключенных в интервале $(x_0 - l, x_0 + l)$. Если в качестве функции $h(x)$ взять функцию, положительную в этом интервале и равную нулю вне его, то ясно, что все элементы интеграла (14) будут либо равны нулю либо отрицательны, и сам интеграл будет иметь отрицательное значение, что невозможно, ибо ядро $K(x, y)$ по предположению положительно.

Обратное предложение почти очевидно. Если все детерминанты Фредгольма положительны или равны нулю, то все коэфициенты при четных степенях λ в функции $D(\lambda)$ положительны или равны нулю, а коэфициенты при нечетных степенях λ отрицательны или равны нулю. Поэтому уравнение $D(-\lambda) = 0$ не может иметь положительных корней, а следовательно, уравнение $D(\lambda) = 0$ не может иметь отрицательных корней.

Приняв это во внимание, мы можем записать разложение разрешающего ядра по формуле (22), полагая $y = x$:

$$\Gamma(x, x; \lambda) - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \lambda \frac{[\varphi_n(x)]^2}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = K(x, x) + \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n - \lambda} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}, \tag{23}$$

где m — любое целое положительное число. Если λ получает произвольное *отрицательное* значение, левая часть этого равенства положительна. В самом деле, с одной стороны, все члены ряда отрицательны, ибо $\lambda_n > 0$; с другой стороны, ядро $\Gamma(x, y; \lambda$ при отрицательном λ есть положительное ядро, ибо особые значения этого ядра можно получить, вычитая λ из особых значений ядра $K(x, y)$ (§ 560). Можно установить это и непосредственно, если заметить, что в силу формул (22) и (14) значение двойного интеграла $\iint \Gamma(x, y; \lambda) h(x) h(y) \, dx \, dy$ не может быть отрицательным при отрицательном λ. Отсюда в силу только что доказанного мы имеем также: $\Gamma(x, x; \lambda) \geqslant 0$; следовательно, правая часть формулы (23) также положительна.

Это заключение справедливо для всякого $\lambda < 0$; но когда λ стремится к $-\infty$, член, зависящий от λ, стремится к нулю. Следовательно, мы имеем также:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{[\varphi_n(x)]^2}{\lambda^n} \leqslant K(x, x);$$

так как m есть любое целое число, мы можем отсюда заключить, что ряд $\sum \frac{[\varphi_n(x)]^2}{\lambda}$ сходящийся и что его сумма меньше или равна $K(x, x)$.

---

* *Philosophical Transactions*, London, t. 209 A, 1909, p. 415.

При помощи рассуждения, аналогичного § 589, мы докажем далее, что ряд

$$S(x, y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n}=\sum_{1}^{+\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\,\frac{\varphi_n(y)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

сходится абсолютно и равномерно в интервале (a, b) по отношению к каждому переменному в отдельности.

Следовательно, симметрическая сумма $S(x, y)$ является непрерывною функцией каждого из переменных x, y, взятого отдельно; это же справедливо относительно разности $R(x, y)=K(x, y)-S(x, y)$.

Чтобы доказать, что эта разность $R(x, y)$ тождественно равна нулю, будем исходить из соотношения:

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds=\int_a^b S(x, s)\,h(s)\,ds+\int_a^b R(x, s)\,h(s)\,ds,$$

где $h(x)$ есть произвольная функция с интегрируемым квадратом. Так как ряд $S(x, s)$ равномерно сходится относительно s, то первый интеграл правой части равен сумме членов ряда $\sum\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)$; этой же сумме согласно теореме Гильберта равна левая часть. Отсюда

$$\int_a^b R(x, s)\,h(s)\,ds=0$$

при любой функции $h(x)$, откуда, очевидно, функция $R(x, y)$ тождественно равна нулю.

Таким образом ядро $K(x, y)$ равно сумме членов ряда

$$K(x, y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n};\tag{24}$$

для доказательства его абсолютной и равномерной сходимости относительно обоих переменных достаточно повторить рассуждение, приведенное для ряда (16).

С помощью этой формулы (24), полагая $y=x$ и интегрируя почленно, получим:

$$A_1=\int_a^b K(x, x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n}.\tag{25}$$

Отсюда следует, что род функций $D(\lambda)$ равен нулю:

$$D(\lambda)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right).\tag{26}$$

Ясно, что эти последние результаты можно также применить к отрицательным ядрам и вообще к ядрам, все особые значения которых одного знака, за исключением некоторого конечного числа из них. Действительно, всякое ядро этого вида представляет сумму двух симметрических ортогональных ядер, из которых одно положительно или отрицательно, а другое имеет только конечное число особых значений.

593. Ядра Шмидта. Э. Шмидт указал на то, что свойства симметрических ядер легко распространяются на ядра вида $A(x)S(x, y)$, где функция S симметрична, а $A(x)$ сохраняет постоянный знак в интервале (a, b). Или, в более общем случае, пусть $K(x, y)=A(x)B(y)S(x,y)$, где $S(x, y)$ — симметрическая функция, а произведение $A(x)B(x)$ в интервале (a, b) всегда положительно. Мы предположим, кроме того, что эти функции $A(x)$ и $B(x)$ ограничены. Мы можем написать:

$$K(x, y)=\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}}\cdot S(x,y)\sqrt{A(x)A(y)B(x)B(y)}=$$

$$=\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}}S_1(x, y). \tag{27}$$

Пусть теперь $\Gamma(x,y;\lambda)$ будет разрешающее ядро для вспомогательного симметрического ядра $S(x,y)$. Это разрешающее ядро удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\Gamma_1(x,y;\lambda)=S_1(x,y)+\lambda\int_a^b S_1(x,s)\Gamma_1(s,y;\lambda)\,ds. \tag{28}$$

Таким образом, если положить

$$\Gamma(x, y;\lambda)=\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}}\Gamma_1(x,y;\lambda),$$

то получаем также:

$$\Gamma(x,y;\lambda)=K(x,y)+\lambda\int_a^b K(x, s)\Gamma(s,y;\lambda)\,ds, \tag{29}$$

ибо, очевидно,

$$S_1(x,s)\Gamma_1(s,y;\lambda)\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}}=K(x,s)\Gamma(s,y;\lambda).$$

Последнее соотношение (29) характеризует разрешающее ядро, соответствующее ядру $K(x,y)$, и следовательно, *разрешающее ядро для ядра $K(x, y)$ равно произведению*

$$\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}}\Gamma_1(x,y;\lambda),$$

где $\Gamma_1(x,y;\lambda)$ есть разрешающее ядро для симметрического ядра $S_1(x, y)$ (*Comptes rendus*, т. 146, стр. 307).

Существенно заметить, что все ядра, полученные из ядра $S_1(x, y)$ последовательными повторениями, содержат в качестве множителя радикал $\sqrt{A(x)B(x)A(y)B(y)}$, так что и $\Gamma_1(x,y;\lambda)$ делится на этот радикал. Функция $\Gamma(x,y;\lambda)$ содержит, таким образом, множитель $A(x)B(y)$, и интеграл, который входит в формулу (29), имеет в самом деле конечное значение.

Полюсы резольвенты $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ — все действительные и простые. То же можно сказать и о полюсах $\Gamma(x, y; \lambda)$. Если каким-нибудь способом разложить ядро S_1 на два ортогональных ядра $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$, то непосредственно можно доказать, что два ядра

$$h_1(x, y)\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}} \quad \text{и} \quad h_2(x, y)\sqrt{\frac{A(x)B(y)}{A(y)B(x)}}$$

тоже ортогональны. Поэтому и главные части двух разрешающих ядер $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ и $\Gamma(x, y; \lambda)$ соответствуют друг другу. Пусть будет $\theta_i(x)$ фундаментальная функция ядра $S_1(x, y)$, соответствующая полюсу λ_i; она, очевидно, будет вида $\sqrt{A(x)B(y)}\,u_i(x)$. Выражение

$$\frac{\sqrt{A(x)B(x)A(y)B(y)}\,u_i(x)\,u_i(y)}{\lambda_i}$$

представляет каноническое ядро, соответствующее особому значению λ_i, если только

$$\int_a^b A(x)B(x)\,u_i^2(x)\,dx = 1.$$

Этому каноническому ядру соответствует для $K(x, y)$ каноническое ядро

$$\frac{A(x)B(y)\,u_i(x)\,u_i(y)}{\lambda_i},$$

так что

$$\varphi_i(x) = A(x)\,u_i(x)$$

и

$$\psi_i(x) = B(x)\,u_i(x)$$

суть две союзные фундаментальные функции двух ядер $K(x, y)$ и $K(y, x)$. Эти две функции связаны соотношением:

$$A(x)\,\psi_i(x) = B(x)\,\varphi_i(x),$$

откуда вытекает следующее свойство. *Если $\varphi(x)$ есть фундаментальная функция ядра $K(x, y)$, то $\psi(x) = \frac{B(x)}{A(x)}\varphi(x)$ есть фундаментальная функция союзного ядра, соответствующая тому же особому значению.*

Это свойство имеет место, каковы бы ни были знаки функций $A(x)$, $B(x)$, и оно доказывается непосредственно. Действительно, из формулы

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b A(x)B(s)\,S(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

вытекает:

$$\pi(x)=\lambda\int_a^b B(s)\,A(s)\,S(x,s)\,\pi(s)\,ds,$$

если положить $\varphi(x)=A(x)\pi(x)$. Точно так же, если бы заменить $\psi(x)$ на $B(x)\pi(x)$ в формуле

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b A(s)\,B(x)\,S(x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

мы бы пришли к тому же уравнению.

Из этого обстоятельства легко вытекает, что если произведение $A(x)B(x)$ положительно, то все полюсы функции $\Gamma(x,y;\lambda)$ — действительные и простые. В самом деле, положим, что $\alpha+i\beta$ и $\alpha-i\beta$ суть два комплексных сопряженных полюса. Если $u+iv$ есть фундаментальная функция ядра $K(x,y)$, соответствующая первому полюсу, то $\frac{B(x)}{A(x)}(u-iv)$ будет фундаментальной функцией союзного уравнения, соответствующей второму полюсу, и уравнение ортогональности не может быть выполнено, если A и B одного знака. Ни один полюс не может быть кратным, ибо по тем же соображениям две союзные фундаментальные функции $\varphi(x)$ и $\psi=\frac{B(x)\varphi(x)}{A(x)}$ не могут быть ортогональны (§ 578). Таким же образом каждому свойству симметрических ядер соответствует свойство ядер $A(x)B(y)S(x,y)$, где $A(x)B(x)\geqslant 0$. Можно, например, как в § 587, доказать, что если ядро $A(x)B(y)S(x,y)$ имеет только конечное число особых значений, то это ядро равно произведению $A(x)B(y)$ на ядро $S(x,y)$ вида (3), которое само имеет конечное число особых значений.

Рассмотрим, в частности, ядро вида $S(x,y)B(y)$, где B — ограниченная *положительная* функция. Фундаментальные функции этого ядра и союзного ядра составляют систему биортогональных функций (φ_i,ψ_i), которые мы можем считать приведенными к нормальному виду (§ 530). Согласно доказанному выше, соответствующие функции φ_i и ψ_i связаны соотношением $\psi_i(x)=B(x)\varphi_i(x)$, и условия ортогональности принимают вид:

$$\int_a^b B(x)\,\varphi_i^2(x)\,dx=1,\quad \int_a^b B(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0\ \ (i\neq k).\tag{30}$$

Если задана последовательность функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$, удовлетворяющих этим условиям, мы будем для краткости говорить, что они составляют ортогональную систему *относительно* $B(x)$*. Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям $\varphi_i(x)$

* В русской математической литературе чаще говорят, что эти функции образуют ортогональную систему *с весом* $B(x)$. *Ред.*

в интервале (a, b), то коэфициент f_i при $\varphi_i(x)$ в этом ряду получается подобно тому, как для ряда Фурье, и согласно соотношениям (30) имеем:

$$f_i = \int_a^b B(x) f(x) \varphi_i(x)\, dx; \tag{31}$$

какова бы ни была функция $f(x)$, мы будем говорить, что коэфициенты f_i, определенные для этой функции, суть коэфициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы функций $\varphi_i(x)$. Неравенство

$$\int_a^b B(x)\,[f(x) - f_1\varphi_1(x) - \ldots - f_n\varphi_n(x)]^2\, dx \geqslant 0,$$

которое совершенно очевидно дает возможность распространить на эти коэфициенты неравенство Бесселя *:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \leqslant \int_a^b B(x) f^2(x)\, dx.$$

Ряд $\sum f_i \varphi_i(x)$, составленный для произвольной функции $f(x)$, не изображает необходимо эту функцию. Это имеет место для функций вида:

$$f(x) = \int_a^b S(x, s) B(s) h(s) ds, \tag{32}$$

где $h(s)$ — функция с интегрируемым квадратом. Действительно, это равенство может быть записано в виде:

$$\sqrt{B(x)} f(x) = \int_a^b S(x, s) \sqrt{B(x) B(s)}\, \{\sqrt{B(s)}\, h(s)\}\, ds,$$

и, следовательно, произведение $f(x)\sqrt{B(x)}$ (§ 589) может быть разложено в равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям ядра $S(x, y)\sqrt{B(x) B(y)}$. Эти фундаментальные функции, как мы только что видели, получаются, если умножить фундаментальные функции ядра $S(x, y) B(y)$ на $\sqrt{B(x)}$. Таким образом функция $f(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд, расположенный по фундаментальным функциям $\varphi_i(x)$ ядра $S(x, y) B(y)$.

Для функции вида

$$f(x) = \int_a^b B(x) S(x, s) g(s)\, ds \tag{33}$$

---

* Можно, кроме того, заметить, что функция $\Phi_i(x) = \varphi_i(x)\sqrt{B(x)}$ составляют ортогональную систему, если функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют соотношениям (30), и что коэфициенты Фурье для функции $f(x)$ относительно системы функций $\varphi_i(x)$ совпадают с коэфициентами Фурье для функции $f(x)\sqrt{B(x)}$ относительно системы функций $\Phi_i(x)$.

мы также будем иметь:

$$\frac{f(x)}{\sqrt{B(x)}}=\int_a^b S(x,s)\sqrt{B(x)B(s)}\,\frac{g(s)}{\sqrt{B(s)}}\,ds,$$

и следовательно, функцию $f(x)$ можно также разложить в равномерно сходящийся ряд вида:

$$\sum f_i B(x)\varphi_i(x)=\sum f_i\psi_i(x).$$

594. Распространение неравенства Бесселя на биортогональные системы. Пусть будут $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ — две последовательности действительных функций, составляющих биортогональную и нормальную систему (§ 573), т. е. систему, удовлетворяющую условиям:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\psi_i(x)\,dx=1,\quad \int_a^b \varphi_i(x)\psi_k(x)\,dx=0\quad (i\neq k). \tag{34}$$

Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям $\varphi_i(x)$, то коэфициенты f_i при $\varphi_i(x)$ в ряде можно получить, если умножить обе части равенства

$$f(x)=f_1\varphi_1(x)+\ldots+f_i\varphi_i(x)+\ldots \tag{35}$$

на $\psi_i(x)$ и интегрировать его почленно в пределах от a до b. Мы придем, таким образом, к выражению:

$$f_i=\int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx; \tag{36}$$

какова бы ни была функция $f(x)$, мы будем говорить, что ряд $\sum f_i\varphi_i(x)$, где коэфициенты f_i имеют значения (36), представляет ряд Фурье функции $f(x)$ относительно системы функций φ_i.

Заметим, что всякая биортогональная система может быть приведена к нормальному виду бесчисленным множеством способов, ибо соотношения (34) не меняются, если заменить $\varphi_i(x)$ на $C_i\varphi_i(x)$, а $\psi_i(x)$ — на $\frac{1}{C_i}\psi_i(x)$, каково бы ни было постоянное C_i. Положим, например, что существует симметрическое *положительное* ядро $S(x, y)$ такое, что при любом i имеет место равенство:

$$\int_a^b S(x,y)\varphi_i(y)\,dy=C_i\psi_i(x),$$

где C_i — постоянное, отличное от нуля. Соотношения (34) переходят в следующие:

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)\,\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)\,dx\,dy = C_i,$$

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(y)\,dx\,dy = 0 \quad (i \neq k).$$

Так как ядро $S(x,y)$ положительно, то постоянные C_i необходимо также положительны, и, заменяя $\varphi_i(x)$ на $\varphi_i(x)\sqrt{C_i}$, мы вместо соотношений (34) получим следующие:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b\int_a^b S(x,\ y)\,\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)\,dx\,dy = 1,\\ &\int_a^b\int_a^b S(x,\ \ )\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(y)\,dx\,dy = 0\ (i \neq k), \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

причем в эти соотношения функции ψ_i явно совсем не входят. Точно так же формулы (36) переходят в такие:

$$f_i = \int_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b S(x,\ y)\,f(x)\,\varphi_i(y)\,dx\,dy. \tag{36'}$$

Мы будем говорить, что система функций $\varphi_i(x)$, удовлетворяющих соотношениям (34'), есть ортогональная нормальная система относительно ядра $S(x,y)$. Из всякой биортогональной системы, удовлетворяющей соотношениям (34), можно получить, и притом бесчисленным множеством способов, систему, ортогональную относительно симметрического положительного ядра. Можно, например, поступить следующим образом. Выберем последовательность положительных чисел μ_n таких, чтобы ряд

$$S(x,\ y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\mu_n} \tag{37}$$

был абсолютно и равномерно сходящимся — это можно сделать бесчисленным количеством способов. Ясно, что

$$\int_a^b S(x,\ y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

равен $\dfrac{\psi_n(x)}{\mu_n}$, а следовательно, соотношения ортогональности можно привести к виду (34'), если заменить $\varphi_i(x)$ на $\sqrt{\mu_i}\,\varphi_i(x)$. Ядро $S(x,y)$ положительно, ибо нетрудно видеть, что интеграл (14) § 590 положителен для $K(x,y) = S(x,y)$ при любой функции $h(x)$.

Если $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, а ядро $S(x,y)$ положительно, то имеем (§ 590):

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)\left[f(x)-\sum_{i=1}^n f_i\varphi_i(x)\right]\left[f(y)-\sum_{i=1}^n f_i\varphi_i(y)\right]dx\,dy \geqslant 0,$$

причем коэфициенты f_i даны формулой (36). Раскрывая это неравенство и принимая во внимание соотношения (34), мы получим эквивалентное ему неравенство:

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b S(x,y)f(x)f(y)\,dx\,dy, \tag{38}$$

вполне аналогичное неравенству Бесселя.

Если $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, то правая часть имеет конечную величину, и следовательно, *ряд из квадратов коэфициентов f_i сходится.*

595. Ядра вида $A(x)\,S(x,y)$. Столь простые свойства ядер вида $A(x)S(x,y)$ при $A(x)$ положительном не распространяются на ядра того же вида, если $A(x)$ меняет знак в интервале (a, b). Например, ядро $\cos x\sin x\sin y$, причем $a=0$, $b=\pi$, ортогонально самому себе. Однако в случае, когда $S(x,y)$ — *положительное* * ядро, многие наиболее важные свойства симметрических ядер, кроме только одного особого случая, могут быть распространены на ядра этого вида, каков бы ни был знак коэфициента $A(x)$ в интервале (a,b).

Согласно приведенному выше (§ 593) замечанию, если $\varphi(x)$ есть решение однородного уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b A(x)\,S(x,s)\,\varphi(s)\,ds,$$

то функция $\psi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{A(x)}$ представляет решение союзного уравнения

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b S(x,s)\,A(s)\,\psi(s)\,ds.$$

Эта функция $\psi(x)$ равна также $\lambda\int_a^b S(x,s)\,\varphi(s)\,ds$, и, отбрасывая постоянный множитель λ, можно формулировать следующий результат:

---

* Функция $A(x)$ предполагается ограниченной, но может иметь конечное число точек разрыва между a и b. Интегральные уравнения этого вида сначала были изучены Гильбертом (*Göttingen Nachrichten* 1906, стр. 462), который называет их *полярными уравнениями* или *уравнениями третьего рода.* Приведенные в тексте доказательства указаны Марти (Marty, *Comptes rendus*, 28 февраля и 25 апреля 1910). Ср. также Фубини (Fubini, *Annali di Matematica*, 3-я серия, т. 17).

Если $\varphi(x)$ есть фундаментальная функция ядра $K(x,y)=A(x)S(x,y)$ для особого значения λ, то функция

$$\psi(x)=\int_a^b S(x,s)\varphi(s)\,ds \tag{39}$$

представляет фундаментальную функцию союзного ядра для того же особого значения.

Из этого результата нетрудно вывести следующие свойства:

1. *Все особые значения действительны.* В самом деле, если бы существовали два сопряженных комплексных особых значения, то для двух ядер $K(x,y)$ и $K(y,x)$ мы имели бы две фундаментальные функции:

$$\varphi(x)=u(x)+iv(x)$$

$$\psi(x)=\int_a^b S(x,y)[u(y)-iv(y)]dy,$$

которые должны быть ортогональны, для чего необходимо, чтобы было

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)[u(x)+iv(x)][u(y)-iv(y)]\,dx\,dy=0,$$

а следовательно, приравнивая нулю действительную часть:

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)\{u(x)u(y)+v(x)v(y)\}\,dx\,dy=0.$$

Так как ядро $S(x,y)$ положительно, то два интеграла в левой части или положительны, или равны нулю. Для того чтобы каждый из этих интегралов был равен нулю, необходимо согласно формуле (14) § 590, чтобы $u(x)$ и $v(x)$ были ортогональны ко всем фундаментальным функциям ядра, а следовательно, и к самому ядру $S(x,y)$, т. е.: в этом случае мы имели бы:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds=0,$$

что противоречит условию.

2. *Все полюсы резольвенты простые.* Если $\varphi(x)$ — фундаментальная функция для полюса C, то функция $\psi(x)$, определенная формулой (39), представляет фундаментальную функцию для союзного ядра, а мы только что видели, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не могут быть ортогональны; из этого уже вытекает, что полюс c — простой (§ 578).

Можно еще рассуждать, как в случае симметрических ядер (§ 587). Пусть $\varphi(x)$ — фундаментальная функция, соответствующая особому значению c и притом такая, что

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy=1.$$

Исходя из приведенных выше свойств, нетрудно показать, что два ядра

$$\frac{1}{c}\varphi(x)\int_a^b S(y,s)\,\varphi(s)\,ds,\quad K_1=K(x,y)-\frac{1}{c}\varphi(x)\int_a^b S(y,s)\,\varphi(s)\,ds$$

ортогональны. Это новое ядро $K_1(x,y)$ также имеет вид $A(x)\,S_1(x,y)$. Если оно еще имеет c своим особым значением, то к нему можно снова применить то же разложение, и так далее до тех пор, пока мы не придем к ядру, не имеющему больше c особым значением. Из того же рассуждения вытекает, что для ядра $K(x,y)$ можно выбрать систему фундаментальных функций, удовлетворяющих условиям (34'), т. е. образующих ортогональную систему относительно ядра $S(x,y)$. Если существует только конечное число особых значений, то ядро имеет вид:

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{A(y)\,\lambda_i}+K_1(x,y),$$

где ядро $K_1(x,y)$ не имеет особых значений и опять равно произведению $A(x)$ на симметрическое ядро.

На примере ядра $\cos x\,(\sin x\,\sin y)$ видно, что полярное ядро не всегда имеет особые значения. Результат § 587 в этом случае заменяется следующим:

3. *Если первое повторное ядро $K^{(2)}(x,y)$ не равно тождественно нулю, то полярное ядро $A(x)\,S(x,y)$ имеет по крайней мере одно особое значение.* Доказательство вполне аналогично тому, которое было дано для симметрических ядер (§ 587). За развернутым доказательством этого предложения, а также за распространением теоремы Гильберта отсылаем читателя к заметкам Марти. В частном случае, когда $S(x,y)$ не только положительное, но *определенное*, а следовательно, *замкнутое*, ядро $K^{(2)}(x,y)$ не может быть тождественно равно нулю.

596. Симметризуемые ядра. Ядра Гильберта представляют частный случай симметризуемых ядер Марти (*Comptes rendus*, 6 июня 1910). Пусть $K(x,y)$ и $G(x,y)$ — два произвольных ядра. Мы говорим, что ядра

$$H_1(x,y)=\int_a^b G(x,s)\,K(s,y)\,ds,\quad H_2(x,y)=\int_a^b K(x,s)\,G(s,y)\,ds,$$

вообще говоря, различные, получаются композицией ядра $K(x,y)$ с ядром $G(x,y)$, слева для H_1, справа для H_2. Если можно в качестве функции $G(x,y)$ взять симметрическое ядро и притом такое, чтобы H_1 и H_2 сами были симметричны, то ядро $K(x, y)$ называется симметризуемым справа или слева. Ясно, что ядро $A(x)S(x, y)$ симметризуемо слева при помощи композиции с ядром $S(x, y)$.

Всякое ядро $K(x, y)$, резольвента которого имеет только действительные и простые полюсы, симметризуемо с двух сторон.

В самом деле, мы видели, что союзные фундаментальные функции $(\varphi_i\psi_i)$ составляют биортогональную систему, которую можно предположить нормальной. Если выбрать постоянные μ_n так, чтобы ряд

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\mu_i}$$

был абсолютно и равномерно сходящимся, — это можно сделать бесчисленным количеством способов, — то ядро $K(x, y)$ при помощи композиции слева с ядром $S(x, y)$ дает симметрическое ядро. В самом деле, имеем:

$$\int_a^b S(x, s)K(s, y)\,ds = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\psi_i(x)}{\mu_i}\int_a^b \psi_i(s)K(s, y)\,ds = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i\mu_i},$$

где λ_i — особое значение, соответствующее функции φ_i. Очевидно, что таким же путем можно было бы составить бесчисленное множество симметрических ядер, композиция которых с ядром $K(x, y)$ в обратном порядке дала бы новое симметрическое ядро.

Если взять постоянные μ_i положительными, то ядро $S(x, y)$ будет также положительным, а согласно самому способу его составления оно не ортогонально ни к одной из фундаментальных функций φ_i ядра $K(x, y)$.

Обратное предложение в таком общем виде не имеет места даже если предположить ядро $S(x, y)$ положительным. Если, например, составить композицию симметрического ядра $\varphi(x)\varphi(y)$ с ядром $K(x, y) + \varphi(x)\varphi(y)$, где ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b K(s, y)\varphi(s)\,ds = 0,$$

то получится симметрическое ядро $C\varphi(x)\varphi(y)$, но ядро $K(x, y)$ может, однако, иметь какие угодно особые значения.

Положим, что ядро $K(x, y)$ при композиции слева с симметрическим ядром $S(x, y)$ дает новое симметрическое ядро

$$S_1(x, y) = \int_a^b S(x, s)K(s, y)\,ds;$$

на ядро $K(x, y)$ можно распространить свойство, доказанное для полярного ядра: *если $\varphi(x)$ есть решение однородного уравнения*

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{40}$$

то

$$\psi(x) = \int_a^b S(x, t)\varphi(t)\,dt$$

представляет решение союзного однородного уравнения.

В самом деле, из соотношения (40) получаем:

$$\psi(x)=\int_a^b S(x, t)\varphi(t)\,dt=\lambda\iint S(x, t) K(t, s)\varphi(s)\,ds\,dt=\lambda\int_a^b S_1(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

что в силу симметрии S_1 можно записать также в виде

$$\psi(x)=\lambda\iint S(s, t) K(t, x)\varphi(s)\,ds\,dt=\lambda\int_a^b K(t, x)\psi(t)\,dt,$$

откуда и вытекает доказываемое предложение.

Приняв это во внимание, положим, что $\alpha+\beta i$ $(\beta\neq 0)$ есть особое значение, $u+iv$ — соответствующая фундаментальная функция, тогда

$$\psi(x)=\int_a^b S(x, t)\{u(t)-iv(t)\}\,dt$$

будет фундаментальная функция союзного уравнения, соответствующая особому значению $\alpha-i\beta$, и условие ортогональности дает:

$$\iint S(x, t)\{u(x)+iv(x)\}\{u(t)-iv(t)\}\,dx\,dt=0,$$

$$\iint S(x, t)u(x)u(t)\,dx\,dt+\iint S(x, t)v(x)v(t)\,dx\,dt=0.$$

Для того чтобы можно было утверждать без каких-нибудь дополнительных условий, налагаемых на $K(x, y)$, что такое соотношение невозможно, необходимо предположить, что ядро $S(x, y)$ определенное, — в этом случае недостаточно, чтобы это ядро было положительным, как в § 595. И действительно, может случиться, что функции u и v, а следовательно и $u+iv$, ортогональны к ядру $S(x, y)$ — этот случай может представиться, например, для фундаментальной функции ядра $K(x, y)$. Мы приходим, следовательно, к такому результату:

Если ядро $K(x, y)$ симметризуемо при помощи композиции с симметрическим определенным ядром, то все полюсы резольвенты — действительные и простые.

Это последнее свойство вытекает из того, что две фундаментальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)=\int S(x, s)\varphi(s)\,ds$, соответствующие одному особому значению, не могут быть ортогональны.

Всякое ядро $K(x, y)$, симметризуемое при помощи композиции с симметрическим определенным ядром, имеет по крайней мере одно особое значение.

За доказательством отсылаем к заметке Марти (упражнение 4).

597. Кососимметрические ядра. Если n-е повторное ядро $K^{(n)}(x, y)$ ядра $K(x, y)$ есть симметрическое ядро, то можно утверждать, что $K(x, y)$ имеет по крайней мере одно особое значение и что n-е степени всех особых значений — числа действительные. Рассмотрим, в частности, кососимметрическое ядро (Лалеско), т. е. такое, для которого

$$K(y, x)=-K(x, y).$$

Первое повторное ядро, очевидно, симметрично, а, следовательно, все полюсы разрешающего ядра для $K(x, y)$ — простые действительные или вида μi, где μ есть действительное число. Не существует действительных полюсов. В самом деле, если бы $\varphi(x)$ была фундаментальная функция для действительного полюса c, то из соотношений

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=-c\int_a^b K(s, x)\varphi(s)\,ds$$

следовало бы, что есть c — также полюс резольвенты, а $\varphi(x)$ — фундаментальная функция союзного уравнения, соответствующая этому полюсу. Так как эти две функции должны быть ортогональны, то мы имели бы $\varphi(x)=0$, следовательно, не может существовать действительного полюса, и все полюсы имеют вид μi.

Пусть μi — полюс, а $u(x)+iv(x)$ — соответствующая фундаментальная функция; $u(x)+iv(x)$ есть также фундаментальная функция союзного ядра, соответствующая полюсу — μi, и условие ортогональности дает:

$$\int_a^b u^2\,dx=\int_a^b v^2\,dx, \qquad \int_a^b uv\,dx=0.$$

Функция $u-iv$ есть фундаментальная функция ядра $K(x, y)$ для полюса $-\mu i$ и ядра $K(y, x)$ для полюса μi.

Если u и v выбраны так, что $\int_a^b u^2\,dx=1$, то нетрудно видеть, что ядро

$$k(x, y)=\frac{v(x)u(y)-u(x)v(y)}{\mu}$$

и ядро $K(x, y)-k(x, y)=K_1(x, y)$ ортогональны. Но $k(x, y)$ есть кососимметрическое ядро, которое имеет два простых полюса μi и $-\mu i$; следовательно, $K_1(x, y)$ есть также кососимметрическое ядро. Если μi является опять особым значением для этого ядра, то после конечного числа преобразований этого рода можно будет записать:

$$K(x, y)=\sum_{p=1}^{m}\frac{v_p(x)u_p(y)-u_p(x)v_p(y)}{\mu}+K_1(x, y),$$

где $K_1(x, y)$ — новое кососимметрическое ядро, для которого μi и $-\mu i$ не являются больше особыми значениями. Если $K(x, y)$ имеет только конечное число особых значений, то оно имеет вид:

$$K(x, y)=\sum_{h=1}^{n}\frac{v_h(x)u_h(y)-u_h(x)v_h(y)}{\mu_h}.$$

В случае, если число особых значений бесконечно велико и если ряд, общий член которого равен сумме двух главных сопряженных ядер, равномерно сходится, то сумма членов этого ряда равна ядру $K(x, y)$. Так как первое повторное ядро $K^{(2)}(x, y)$ отрицательно, то к нему можно применить результат Мерсера; если оно еще и непрерывно, то это ядро равно сумме равномерно сходящегося ряда:

$$K^{(2)}(x, y)=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{u_n(x)u_n(y)+v_n(x)v_n(y)}{\mu_n^2}.$$

Распространение теоремы Гильберта на кососимметрические ядра читатель найдет в сочинении Лалеско.

598. Фундаментальные функции Шмидта. Шмидт относит каждому несимметрическому ядру $K(x, y)$ две системы ортогональных функций, которые, вообще говоря, никак не связаны с фундаментальными функциями того же ядра, которые мы рассматривали до сих пор. По Шмидту, две функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ составляют пару союзных фундаментальных функций, если они удовлетворяют двум условиям:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds, \quad \psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)\varphi(s)\,ds; \tag{41}$$

где значение постоянного λ, отличное от нуля, есть особое значение ядра $K(x, y)$.

Всегда существуют пары фундаментальных функций. В самом деле, исключение $\psi(x)$, из двух уравнений (41) приводит к однородному интегральному уравнению с симметрическим ядром:

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K(x, s)}\,\varphi(s)\,ds, \tag{42}$$

где

$$\overline{K(x, s)} = \int_a^b K(x, t)K(s, t)\,dt.$$

Исключение функции $\varphi(x)$ точно так же приводит к другому интегральному уравнению того же вида с симметрическим ядром:

$$\psi(x) = \lambda^2 \int_a^b \underline{K(x, s)}\,\psi(s)\,ds, \tag{43}$$

где

$$\underline{K(x, s)} = \int_a^b K(t, x)K(t, s)\,dt.$$

Два ядра $\overline{K(x, y)}$ и $\underline{K(x, y)}$ положительны, если считать $b > a$. Имеем, например:

$$\int_a^b\int_a^b \overline{K(x, y)}\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_a^b\int_a^b K(x, t)K(y, t)\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_a^b dt\left[\int_a^b K(x, t)\,h(x)\,dx^2\right] \geqslant 0.$$

Из самого способа, каким получены уравнения (42) и (43) из системы (41), вытекает, что если эта система для значения параметра λ_i имеет решения $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, то λ_i^2 есть особое значение для каждого из ядер $\overline{K(x, y)}$, $\underline{K(x, y)}$, а φ_i и ψ_i — соответствующие фундаментальные функции для этих двух ядер. Обратно, пусть c будет особое значение для одного из этих ядер, например для $\overline{K_1(x, y)}$; это число c всегда положительно. Пусть $\varphi(x)$ — соответствующая фундаментальная функция. Если положить

$$\psi(x)=\sqrt{c}\int_a^b K(s, x)\,\varphi(s)\,ds,$$

то мы легко вернемся снова от двух уравнений

$$\varphi(x)=c\int_a^b \overline{K(x, t)}\,\psi(t)\,dt, \quad \psi(x)=\sqrt{c}\int_a^b K(t, x)\,\varphi(t)\,dt$$

к уравнениям (41), причем $\lambda=\sqrt{c}$. Мы приходим, таким образом, к тому, что задача отыскания всех систем решений уравнений (41) равносильна задаче отыскания всех особых значений и фундаментальных функций одного из симметрических ядер $\overline{K(x, y)}$ или $\underline{K(x, y)}$. Так как все эти особые значения одинаковы для обоих ядер и положительны, то мы их обозначим через $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$, считая $\lambda_i>0$. Это сделать возможно, так как система (41) не изменяется от замены λ на $-\lambda$, если при этом заменить φ на $-\varphi$. Положим теперь, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots$ есть ортогональная и нормальная система, образованная фундаментальными функциями ядра $\overline{K(x, y)}$. Вторая из формул (41), если в ней положить $\lambda=\lambda_i$, ставит функции $\varphi_i(x)$ в соответствие фундаментальную функцию $\psi_i(x)$ ядра $\underline{K(x, y)}$, соответствующую тому же особому значению λ_i^2. Эти функции $\psi_i(x)$ также составляют ортогональную и нормальную систему. В самом деле, из соотношений

$$\psi_i(x)=\lambda_i\int_a^b K(t, x)\,\varphi_i(t)\,dt, \quad \psi_k(x)=\lambda_k\int_a^b K(s, x)\,\varphi_k(s)\,ds$$

вытекает, что

$$\int_a^b \psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx=\lambda_i\lambda_k\iiint K(t, x)\,K(s, x)\,\varphi_i(t)\,\varphi_k(s)\,dx\,ds\,dt=$$

$$=\lambda_i\lambda_k\iint \overline{K(t, s)}\,\varphi_i(t)\,\varphi_k(s)\,dt\,ds=\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt,$$

интеграл этот, следовательно, равен нулю или единице, в зависимости от того, будет ли $i\neq k$ или $i=k$. Обозначим через f_i и $f_i^{(1)}$ коэфициенты двух рядов Фурье, полученных для функции $f(x)$ по этим двум ортогональным системам:

$$f_i=\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad f_i^{(1)}=\int_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx.$$

Теорема Гильберта также была распространена Шмидтом на функции вида

$$f(x)=\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds, \tag{44}$$

где $h(x)$ — функция с интегрируемым квадратом; $K(x, y)$ — несимметрическое ядро, либо непрерывное, либо имеющее только те разрывы, которые были указаны выше. В таком случае функция $f(x)$ непрерывна. *Всякая функция этого вида разлагается в равномерно сходящийся ряд функций* $\varphi_i(x)$.

Доказательство этого предложения состоит из двух частей. Коэфициент f_i имеет вид:

$$f_i=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, \varphi_i(x)\, h(s)\, ds\, dx=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \psi_i(s)\, h(s)\, ds=\frac{h_i^{(1)}}{\lambda_i};$$

с другой стороны, $\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$ является коэфициентом ряда Фурье, полученного для $K(x, y)$, если рассматривать x как постоянное, ибо

$$\int_a^b K(x, y)\, \psi_i(y)\, dy=\frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x).$$

Так как оба ряда $\sum (h_i^{(1)})^2, \sum\left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}^2$ сходятся, то (§ 589) ряд

$$S(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{h_i^{(1)}}{\lambda_i}\varphi_i(x) \tag{45}$$

сходится абсолютно и равномерно. Разность

$$R(x)=f(x)-S(x)$$

ортогональна ко всем функциям $\varphi_i(x)$, а следовательно, и к $S(x)$. Чтобы доказать, что $R(x)$ ортогональна к $f(x)$, рассмотрим соотношение:

$$\int_a^b K(x, t)\, F(x)\, dx=\int_a^b K(x, t)\, S(x)\, dx+\int_a^b K(x, t)\, R(x)\, dx,$$

которое, если заменить $f(x)$ его значением (44), можно записать в виде:

$$\int_a^b \underline{K(t, s)}\, h(s)\, ds=\int_a^b K(x, t)\, S(x)\, dx+\int_a^b K(x, t)\, R(x)\, dx.$$

Функция $\int_a^b \underline{K(t, s)}\, h(s)\, ds$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда функций $\psi_i(t)$, причем коэфициент при $\psi_i(t)$

равен $\frac{h_i^{(1)}}{\lambda_i^2}$. С другой стороны, произведение $K(x, t)\,S(x)$ можно интегрировать почленно, откуда получаем:

$$\int_a^b K(x, t)\,S(x)\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h_i^{(1)}}{\lambda_i^2}\,\psi_i(t)$$

Таким образом

$$\int_a^b K(x, t)\,R(x)\,dx = 0,$$

а следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,R(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,R(x)\,h(s)\,dx\,ds = 0;$$

отсюда получаем, как и в § 589, что остаток $R(x)$ равен нулю, и функция $f(x)$ равна сумме $S(x)$ ряда (45). Из этой формулы, предполагая, что $h(x)$ и $g(x)$ — функции с интегрируемым квадратом, получаем:

$$\int_a^b\int_a^b K(x, y)\,g(x)\,h(y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{g_i h_i^{(1)}}{\lambda_i}. \tag{46}$$

Точно так же можно показать, что всякая функция вида

$$f(x) = \int_a^b K(s, x)\,g(s)\,ds$$

разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям $\psi_i(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{g_i}{\lambda_i}\,\psi_i(x). \tag{47}$$

Применим, в частности, формулу (45) к симметрическому ядру

$$\overline{K(x, y)} = \int_a^b K(x, s)\,K(y, s)\,ds;$$

достаточно положить $h(s) = K(y, s)$, где y рассматривается как постоянное и мы найдем разложение:

$$\overline{K(x, y)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{\lambda_i^2}, \tag{48}$$

которое представляет равномерно сходящийся ряд относительно каждого из двух переменных. Можно также воспользоваться рассуждениями § 591 из которых вытекает, что этот ряд равномерно сходится относительно обоих переменных, ибо ядро $\overline{K(x, y)}$ непрерывно. Таким же путем найдем разложение для $\underline{K(x, y)}$:

$$\underline{K(x, y)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i} . \tag{49}$$

Примечание. Несимметрическое ядро $K(x, y)$ вполне определено, если известны числа λ_i и два ряда ортогональных функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$. В самом деле, если бы существовало два ядра K и H этого вида, то для всякой функции $h(x)$ с интегрируемым квадратом мы имели бы:

$$\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = \int_a^b H(x, s)\, h(s)\, ds = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h_i^{(1)}\varphi_i(x)}{\lambda_i},$$

т. е.

$$\int_a^b [K(x, s) - H(x, s)]\, h(s)\, ds = 0$$

для любой функции $h(x)$, откуда следует, что $K = H$. Ядро $K(x, y)$ изображается, следовательно, рядом

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i}, \tag{50}$$

если этот ряд равномерно сходится.

Мы видим, что две системы ортогональных функций φ_i и ψ_i, совершенно не зависят одна от другой; одна из них может быть полной, а другая неполной. Они могут иметь некоторое количество общих функций, соответствующих друг другу или нет. Если ядро $K(x, y)$ имеет вид: $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$, то оба ядра $\overline{K(x, y)}$ и $\underline{K(x, y)}$ имеют тот же вид; существует лишь конечное число особых значений, и три ряда (48), (49) и (50) состоят из сумм конечного числа членов.

599. Теорема Фишера-Риса. Пусть задана ортогональная и нормальная система S, состоящая из бесконечного множества функций $\varphi_i(x)$, каждой из которых поставлено в соответствие число f_i. Для того чтобы эти числа f_i являлись коэфициентами ряда Фурье некоторой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом, необходимо согласно неравенству Бесселя, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$ был сходящимся.

Обратно, *если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$ сходится, то существует функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом, для которой коэфициентами Фурье относительно системы S будут числа f_i.*

Мы укажем только на главную идею доказательства этой важной теоремы, установленной одновременно Э. Фишером и Ф. Рисом*.

---

* E. Fischer, *Comptes rendus*, т. 144, 1907, стр. 1022. F. Riesz, *Göttinge Nachrichten*. 1907; *Comptes rendus*, т. 144, 1907, стр. 615.

Доказательство это основано на вспомогательном предложении, имеющем, однако, и самостоятельное значение, относительно *сходимости в среднем*.

Говорят, что последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{51}$$

сходится в среднем к предельной функции $f(x)$ в интервале (a, b), если

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx = 0. \tag{52}$$

Ясно, что условие (52) выполнено, если $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, но оно может иметь место также и тогда, когда $f_n(x)$ не имеет предела в обычном смысле этого слова. Для сходимости последовательности в среднем существует критерий, аналогичный критерию Коши (т. I, § 8) для обычной сходимости. *Для того чтобы ряд* (51) *сходился в среднем, необходимо и достаточно, чтобы было:*

$$\lim \int_a^b [f_{n+p} - f_n]^2 dx = 0 \tag{53}$$

при неограниченном возрастании чисел n и $n+p$.

1. Условие *необходимо*. Это получается непосредственно из неравенства:

$$\int_a^b [A-B]^2 dx \leqslant 2\int_a^b A^2 dx + 2\int_a^b B^2 dx.$$

2. Условие *достаточно*. Этот существенный пункт мы примем без доказательства*. Заметим только, что предельная функция $f(x)$ не вполне определяется условием (52). Если какая-нибудь функция $f(x)$ удовлетворяет этому условию, то тому же условию удовлетворяет всякая другая функция, полученная прибавлением к ней другой функции $u(x)$ такой, что $\int_a^b u^2(x)\,dx = 0$. Обратно, если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию (52), то интеграл $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$, очевидно, равен нулю, ибо он меньше всякого данного положительного числа.

Таким образом, чтобы получить все функции, удовлетворяющие условию (52), достаточно к одной из них прибавить функцию, равную нулю во всех точках (a, b), кроме точек множества меры нуль.

Приняв это положение, рассмотрим ортогональную и нормальную систему S функций $\varphi_i(x)$ и отнесем каждой из этих функций число h_i такое, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ был сходящимся. Положим

$$\Phi_n = h_1\varphi_1(x) + \ldots + h_n\varphi_n(x).$$

---

* Литература на эту тему: H. Weyl, *Mathematische Annalen*, т. 67, 1909, стр. 225. M. Plancherel, *Rendiconti di Palermo*, 1910, стр. 292; Riesz, *Comptes Rendus*, т. 150, 1910, стр. 1304; Lalesko, стр. 91—94. Доказательство требует введения понятия меры множества и интеграла Лебега, которые до этого места не являлись необходимыми в нашем курсе.

Последовательность функций $\Phi_n(x)$ сходится в среднем. В самом деле, из условий ортогональности следует:

$$\int_a^b [\Phi_{n+p} - \Phi_n]^2\, dx = h_{n+1}^2 + h_{n+2}^2 + \ldots + h_{n+p}^2,$$

это выражение стремится к нулю при неограниченном возрастании чисел n и $n+p$. Пусть $f(x)$ будет предел этой последовательности функций $\Phi_n(x)$, а f_i — коэфициент

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx.$$

Имеем:

$$\int_a^q [f(x) - \Phi_n(x)]^2\, dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{i=1}^n h_i f_i + \sum_{i=1}^n h_i^2 =$$

$$= \left[\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f_i^2\right] + \sum_{i=1}^n [h_i - f_i]^2. \tag{54}$$

Правая часть представляет сумму положительных величин. Так как левая часть при неограниченном возрастании n стремится к нулю, то необходимо, чтобы при любых значениях индекса i и при любом положительном числе ε имело место неравенство: $(h_i - f_i)^2 < \varepsilon$, следовательно, $h_i = f_i$. Таким образом коэфициентами ряда Фурье, полученного для функции $f(x)$, являются данные числа h_i. Всякая другая функция, имеющая те же коэфициенты Фурье, получится прибавлением к $f(x)$ любой функции, ортогональной ко всем функциям системы S. В частности, если эта система полная, то всякая функция, имеющая те же коэфициенты Фурье, что и $f(x)$, может отличаться от $f(x)$ только в точках множества меры нуль.

Условие замкнутости ортогональной системы (§ 588) легко получается из теоремы о сходимости в среднем. Предполагая систему S полной, допустим, что $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом, f_i — соответствующие коэфициенты Фурье. Последовательность функций

$$\Phi_n = f_1\varphi_1(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x)$$

сходится в среднем к некоторой предельной функции $\Phi(x)$, которая отличается от $f(x)$ только в точках множества меры нуль, ибо функции f и Φ имеют одинаковые коэфициенты Фурье, и система S — полная. Следовательно, интеграл $\int_a^b [f(x) - \Phi_n]\,dx$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю. А так как он равен $\int_a^b f^2\,dx - \sum f_i^2$, то, увеличивая n неограниченно, мы придем к уравнению замкнутости (9). Отсюда же можно сделать следующее заключение. Если задана полная ортогональная система, то функция $f(x)$ не обязательно представляется рядом Фурье, но сумма S_n первых n членов сходится в среднем к функции $f(x)$, когда n неограниченно возрастает.

600. Интегральное уравнение первого рода. Фундаментальные функции Шмидта входят в решение уравнения первого рода:

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds = f(x), \tag{55}$$

где $f(x)$ — данная функция, а $h(x)$ — искомая. Пусть (φ_i, ψ_i) будет пара каких-нибудь фундаментальных функций Шмидта, соответствующих особому значению λ_i. Если коэфициенты f_i, h_i имеют то же значение, что и в § 598, то $h_i^{(1)} = f\lambda_i$. Для того чтобы уравнение (55) имело решение $h(x)$ с интегрируемым квадратом, *необходимо, чтобы ряд* $\sum \lambda_i^2 f_i^2$ *был сходящимся.*

Пикар доказал, что *это условие является также достаточным, если функции* $\varphi_i(x)$ *составляют полную систему.* В самом деле, согласно теореме Фишера-Риса в этом случае существует функция $h(x)$ для которой коэфициенты Фурье относительно системы функций $\psi_i(x)$ как раз равны $\lambda_i f_i$. Две функции $f(x)$ и $\int\limits_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds$ имеют, следовательно, одинаковые коэфициенты Фурье относительно ортогональной системы функций $\varphi_i(x)$. Если эта система замкнута, то они тождественны или, во всяком случае, могут отличаться только в точках множества меры нуль. Если функция $f(x)$, как и функции $\varphi_i(x)$, непрерывна, то разность между этими функциями равна нулю во всем интервале (a, b).

Если система функций $\psi_i(x)$ не полная, то можно к функции $h(x)$ прибавить любую функцию, ортогональную ко всем ψ_i. Но согласно формуле (45) это не изменит значения интеграла

$$\int\limits_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds.$$

Если последовательность функций $\varphi_i(x)$ не замкнута, то можно опять определить функцию $h(x)$, для которой коэфициенты Фурье $h_i^{(1)}$ имеют значения $f_i \lambda_i$, но из доказательства только вытекает, что

$$\int\limits_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = f(x) + R(x), \tag{56}$$

где $R(x)$ — функция, ортогональная ко всем функциям $\varphi_i(x)$. Заметим, при этом, что, если к функции $f(x)$ прибавить какую-нибудь функцию, ортогональную ко всем функциям $\varphi_i(x)$, то коэфициенты f_i, а следовательно, и $h_i^{(1)}$ не меняются, т. е. интеграл

$$\int\limits_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds$$

сохраняет одно и то же значение.

Отсюда следует, что среди всех уравнений вида (56), где $R(x)$ — какая-нибудь функция, ортогональная ко всем функциям $\varphi_i(x)$, существует *одно и только одно,* которое имеет решение относительно $h(x)$.

Примечание I. Все эти выводы справедливы также для симметрических ядер. В этом случае две ортогональные системы (φ_i, ψ_i) совпадают и являются полными, если ядро замкнуто.

Примечание II. Положим, что система функций $\varphi_i(x)$ — полная. Если ряд $\sum \lambda_i^2 f_i^2$ расходится, то уравнение (55) неразрешимо, но всегда можно найти такую функцию $h(x)$, что

$$\int\limits_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds$$

отличается в среднем от $f(x)$ как угодно мало.

В самом деле, положим

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \psi_i(x);$$

функция

$$f_n(x) = \int_a^b K(x, s) h_n(s)\, ds$$

совпадает с суммой n первых членов ряда Фурье для функции $f(x)$ относительно системы $\varphi_i(x)$. Можно, следовательно, выбрать n настолько большим, чтобы интеграл

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, ds$$

был меньше положительного числа ε.

III. Итак, интегральное уравнение первого рода с постоянными пределами не всегда имеет решение при произвольной функции $f(x)$ в правой части. Этим объясняется тот факт, что нельзя решить задачу Дирихле с помощью потенциала простого слоя, ибо тогда плотность определяется уравнением первого рода. Впрочем, свойства потенциала простого слоя также объясняют этот результат. В самом деле, известно (§ 538), что производная по нормали $\frac{dV}{dn}$ от потенциала простого слоя имеет на контуре конечное значение, в то время как частные производные гармонической функции, которая дает решение проблемы Дирихле, могут быть и бесконечными на этом контуре.

601. Приближение в среднем. Определение сходимости в среднем в некоторой области может быть распространено на функции многих переменных. Пусть $K(x, y)$ будет несимметрическое ядро. Расположим особые значения λ_i, определенные в § 598, в порядке возрастающих величин, и пусть будет φ_i, ψ_i пара фундаментальных функций Шмидта, соответствующих значению λ_i. Принимая во внимание условия ортогональности и формулы (41), которые определяют функции $\varphi_i(x), \psi_i(x)$, мы легко найдем:

$$I_n = \int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i} \right]^2 dx\, dy = \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}.$$

С другой стороны, полагая в соотношении (48) $y = x$ и интегрируя почленно мы находим:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_a^b \overline{K(x, x)}\, dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) K(x, t)\, dx\, dt = \int_a^b \int_a^b K^2\, dx\, dy.$$

Следовательно, интеграл I_n при неограниченном возрастании стремится к нулю.

Этот результат дает возможность получить приближение в среднем ядра $K(x, y)$ с желаемою степенью точности с помощью суммы конечного числа членов, каждый из которых представляет произведение функции от x на функцию от y. Шмидт показал, что предыдущее решение дает наилучшее приближение для данного значения числа n. Точнее, если X_i и Y_i означают функции соответственно от x и от y, то мы имеем всегда:

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i} \right]^2 dx\, dy \leqslant \int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \right]^2 dx\, dy,$$

каковы бы ни были функции X_i и Y_i, если только $m \leqslant n$ (*Mathematische Annalen*, т. 63).

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. *Метод Кнезера для симметрических ядер.* Пусть $K(x, y)$ — симметрическое ограниченное ядро; следовательно, след A_{2n} этого ядра может быть представлен в одном из двух видов:

$$A_{2n}=\int_a^b\int_a^b \left[K^{(n)}(x, t)^2\,dx\,dt=\int_a^b\int_a^b K^{(n+1)}(x, t)\,K^{(n+1)}\,K^{(n-1)}(x, t)\,dx\,dt,\right.$$

и из неравенства Шварца мы получаем новое неравенство:

$$A_{2n}^2 \leqslant A_{2n+2}\,A_{2n-2},$$

откуда вытекает, что ряд $\sum A_n \lambda^n$ не может сходиться для любого значения λ, если только A_4 не равно нулю. Для этого необходимо, чтобы было $K^{(2)}(x, t)=0$, а следовательно, $K(x, t)=0$ (§ 587).

2 *Обобщение неравенства Бесселя.* Последовательность n функции $\varphi_i(x)$ действительного переменного x, которые могут принимать и комплексные значения, составляет ортогональную и нормальную систему, если интеграл

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\overline{\varphi}_k(x)\,dx=(\varphi_i\overline{\varphi}_k)$$

равен нулю для $i \neq k$ и единице при $i=k$ (a и $\overline{a}$ обозначают вообще две сопряженных комплексных величины). На эту систему можно распространить неравенство Бесселя. Пусть $f(x)$ — некоторая действительная или комплексная функция действительного переменного x, такая, что квадрат ее модуля интегрируем. Положим:

$$f_i=\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_i(x)\,dx,\quad \overline{f}_i=\int_a^b \overline{f(x)}\,\varphi_i(x)\,dx.$$

Очевидно, мы имеем:

$$\int_a^b [f(x)-f_1\varphi_1(x)-\ldots-f_n\varphi_n(x)]\,[\overline{f(x)}=\overline{f}_1\overline{\varphi}_1(x)-\ldots-\overline{f}_n\overline{\varphi}_n(x)]\,dx \geqslant 0,$$

или, раскрывая произведение

$$\int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,dx-\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_i\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_i(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n} f_i\int_a^b \overline{f(x)}\,\varphi_i(x)\,dx+$$

$$+\sum_i\sum_k f_i f_k\int_a^b \varphi_i(x)\,\overline{\varphi}_k(x)\,dx \geqslant 0.$$

Принимая во внимание соотношения ортогональности, находим:

$$\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{1}$$

Приложение. Положим, что n функций $\varphi_1, \varphi_2\ldots, \varphi_n$ ортогональной системы удовлетворяют n условиям вида:

$$K(\varphi_\alpha)=\int_a^b K(x, s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds=\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\,\varphi_\beta(x), \tag{2}$$

где $K(x, y)$ — такое ядро, что $|K(x,y)|^2$ интегрируемо, а коэфициенты $a_{\alpha\beta}$ постоянны. Тогда справедливы соотношения:

$$\overline{K}(\overline{\varphi_\alpha}) = \int_a^b \overline{K(x,s)}\,\overline{\varphi_\alpha}(s)\,ds = \sum_{\beta=1}^{n} \overline{a_{\alpha\beta}}\,\overline{\varphi_\beta}(x). \tag{3}$$

Применим неравенство (1) к функции $K(x,t)$, в которой x рассматривается как параметр, а t как независимое переменное, и заменим $\varphi_i(t)$ на $\overline{\varphi_i}(t)$. Для этого положим:

$$A_\alpha = \int_a^b K(x,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\,\varphi_\beta(x),$$

$$\overline{A_\alpha} = \int_a^b \overline{K(x,t)\,\varphi_\alpha}(t)\,dt = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\,\overline{\varphi_\gamma}(x).$$

Согласно неравенству Бесселя имеем:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \overline{A_\alpha} = \int_a^b [K(x,t)]^2\,dt,$$

а следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_a^b A_\alpha \overline{A_\alpha}\,dx \leqslant \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt.$$

Если теперь заменить A_α и $\overline{A_\alpha}$ их значениями, то левая часть этого неравенства согласно условиям ортогональности будет равна

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} |a_{\alpha\beta}|^2.$$

Таким образом получаем:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} |a_{\alpha\beta}|^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt. \tag{4}$$

3. *Теорема Шура* (Schur *Math. Annalen*, т. 66, стр. 508). Пусть $K(x,y)$ будет ограниченное ядро, или в более общем случае такое ядро, что $|K(x,y)|^2$ интегрируемо. Рассмотрим систему S из n главных функций, принадлежащих этому ядру (§ 580), т. е. систему n линейно независимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, удовлетворяющих соотношениям (2) предыдущего упражнения. Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ n корней уравнения

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Из системы S можно всегда взять такую функцию $\Phi(x)$, которая бы удовлетворяла соотношениям:

$$K(\Phi_1) = \omega_1\,\Phi_1(x), \quad (\Phi_1\overline{\Phi_1}) = 1,$$

и предположить, что n функций $\Phi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы. Выберем затем $n-1$ коэфициентов $c_i\,(i > 1)$ так, чтобы было $(\Phi_1, \overline{\varphi_i} - \overline{c_i}\,\overline{\Phi_1}) = 0$, и положим $\pi_i(x) = \varphi_i - c_i\,\Phi_1$. Ясно, что $n-1$ функций $\pi_2, \ldots, \pi_n$ независимы и ортогональны к функции $\Phi_1(x)$, а следовательно, функция $\Phi_1(x)$ ортогональна ко всякой линейной комбинации этих $n-1$ функций. Мы можем далее найти линейную комбинацию Φ_2 функций $\pi_2, \ldots, \pi_n$, удовлетворяющих двум условиям:

$$K(\Phi_2) = b_{21}\Phi_1 + \omega_2\Phi_2, \quad (\Phi_2\overline{\Phi}_2) = 1$$

и та́к далее. Продолжая таким образом, мы, очевидно, придем к ортогональной и нормальной системе n главных функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, эквивалентной данной системе S и удовлетворяющей n соотношениям вида:

$$\begin{aligned}
&K(\Phi_1) = \omega_1\Phi_1,\\
&K(\Phi_2) = b_{21}\Phi_1 + \omega_2\Phi_2,\\
&K(\Phi_3) = b_{31}\Phi_1 + b_{32}\Phi_2 + \omega_3\Phi_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&K(\Phi_n) = b_{n1}\Phi_1 + b_{n2}\Phi_2 + \cdots + \omega_n\Phi_n.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство (4) предыдущего упражнения к этой ортогональной системе, приходим к неравенству:

$$\sum|\omega_i|^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt$$

откуда без труда получается теорема Шура (см. § 584).

4. *Симметризуемые ядра* (§ 596). Пусть будет $K(x,y)$ симметризуемое ядро такое, что ядро

$$G(x,y) = \int_a^b S(x,t)\,K(t,y)\,dt$$

симметрическое, причем функция $S(x,y)$ сама симметрична и *положительна*. Обозначая n-е повторное ядро ядра $K(x,y)$ через $K^{(n)}(x,y)$, положим:

$$K_n(x,y) = \int_a^b S(x,t)\,K^{(n)}(t,y)\,dt, \quad K_1(x,y) = G(x,y).$$

Покажем сначала, что $K_n(x,y)$ *само симметрично*. В самом деле, можно написать:

$$K_n(x,y) = \iiint\ldots\int S(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n,$$

где пределы у всех интегралов предполагаются a и b, или еще:

$$\begin{aligned}
K_n(x,y) &= \iint\ldots\int G(x,t_2)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_2\,dt_3\ldots dt_n =\\
&= \iint\ldots\int G(t_2,x)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_2\,dt_3\ldots dt_n =\\
&= \iint\ldots\int S(t_2,t_1)\,K(t_1,x)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\ldots dt_n =\\
&= \iint\ldots\int K(t_1,x)\,S(t_1,t_2)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\ldots dt_n.
\end{aligned}$$

Проделав ту же последовательность преобразований над произведением

$$S(t_1,t_2)\,K(t_2,t_3)$$

и так далее, мы видим, что вообще имеем:

$$\begin{aligned}
K_n(x,y) = \iint\ldots\int K(t_1,x)\,K(t_2,t_1)\ldots\times\\
\times K(t_p,t_{p-1})\,S(t_p,t_{p+1})\,K(t_{p+1},t_{p+2})\ldots K(t_n,y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n
\end{aligned}$$

что можно еще написать так:

$$K_n(x,y) = \iint S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,K^{(q)}(v,y)\,du\,dv \quad (p+q=n).$$

Меняя местами p и q, мы видим, что $K_n(x,y) = K_n(y,x)$.

5. *Последовательность ядер* $K_n(x,y)$ *неограничена, если только* $G(x,y)$ *не равно нулю.* В частности, имеем:

$$K_{2p}(x,y) = \iint S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,K^{(p)}(v,y)\,du\,dv =$$

$$= \iint S(u,v)\,K^{(p+1)}(u,x)\,K^{(p-1)}(v,y)\,du\,dv,$$

и следовательно,

$$K_{2p}(x,x) = \iint S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,K^{(p)}(v,x)\,du\,dv.$$

Если бы ядро $K_{2p}(x,x)$ было тождественно равно нулю, то же было бы справедливо и для интеграла

$$\iint S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,\psi(v)\,du\,dv = \int_a^b \psi(v)\,dv \int_a^b S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,du,$$

какова бы ни была функция $\psi(v)$, в силу обобщенного неравенства Шварца*

$$\left[\iint S(u,v)\,\varphi(u)\,\psi(v)\,du\,dv\right]^2 \leqslant \left[\iint S(u,v)\,\varphi(u)\,\varphi(v)\,du\,dv\right] \times$$

$$\times \left[\iint S(u,v)\,\psi(u)\,\psi(v)\,du\,dv\right],$$

а следовательно, ядро

$$_p(v,x) = \int_a^b S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,du$$

было бы также тождественно равно нулю. С другой стороны, согласно самому определению ядра $K_n(x,y)$ мы, очевидно, имеем:

$$K_{n+1}(x,y) = \int_a^b K_n(x,u)\,K(u,y)\,du,$$

так что, если $K_n(x,y)$ тождественно равно нулю, то равны нулю и $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ Следовательно, если $K_{2p}(x,y)$ или $K_{2p-1}(x,y)$ тождественно равны нулю, то рав о нулю и ядро $K_p(x,y)$. Если в последовательности ядер $K_n(x,y)$ нашлось бы одно, равное нулю, то переходя последовательно от одного к другому, мы получили бы, что $K_1(x,y) = 0$. Из этого доказательства вытекает, что $K_{2p}(x,x)$ не может быть тождественно равно нулю.

Ряд

$$\Gamma(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda K^{(2)}(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1}K^{(n)}(x,y) + \ldots$$

не может быть сходящимся для любого значения λ.

---

* Оно получается, если написать, что двойной интеграл

$$\iint S(u,v)\,[\alpha\varphi(u) + \beta\psi(u)]\,[\alpha\varphi(v) + \beta\psi(v)]\,du\,dv$$

есть квадратичная положительная функция от α и β.

В самом деле, в этом случае был бы сходящимся и ряд

$$\int_a^b S(x, t)\,\Gamma(t, y;\, \lambda)\,dt = K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x, y) + \ldots$$

а следовательно, ряд

$$K_1(x, x) + \lambda K_2(x, x) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x, x) + \ldots$$

Т ким образом согласно обобщенному неравенству Шварца мы имели бы:

$$\left[\iint S(u, v)\, K^{(p+1)}(u, x)\, K^{(p-1)}(v, x)\, du\, dv\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\iint S(u, v)\, K^{(p+1)}(u, x)\, K^{(p+1)}(v, x)\right] du\, dv \times$$
$$\times \left\{\iint S(u, v)\, K^{(p-1)}(u, x)\, K^{(p-1)}(v, x)\, du\, dv\right\},$$

т. е.

$$[K_{2p}(x, x)]^2 \leqslant K_{2p+2}(x, x) \cdot K_{2p-2}(x, x),$$

и рассуждение заканчивается так же, как и для симметрического ядра (§ 587) Следовательно, *всякое симметризуемое ядро имеет по крайней мере одно особое значение.*

6. *Минимум интег.ала* $\int_a^b\int_a^b [K(x, y) - \varphi(x)\,\psi(y)]^2\,dx\,dy$ (§ 601). Предположим, что этот интеграл достигает минимума при некоторой системе функций $\varphi(x), \psi(y)$. Заменяя $\varphi(x)$ через $\varphi(x) + \alpha\varphi_1(x)$, а $\psi(y)$ через $\psi(y) + \beta\psi_1(y)$, получим функцию $S(\alpha, \beta)$ двух параметров α и β, которая должна иметь минимум при $\alpha = \beta = 0$, каковы бы ни были функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$.

Условие $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0$ при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ дает:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,dx \int_a^b [K(x, y)\,\psi(y) - \varphi(x)\,\psi^2(y)]\,dy = 0,$$

а из этого равенства в силу произвольности функции $\varphi_1(x)$ необходимо следует:

$$\int_a^b K(x, y)\,\psi(y)\,dy = \varphi(x)\int_a^b \psi^2(y)\,dy = C\varphi(x).$$

Условие $\frac{\partial I}{\partial \beta} = 0$ дает втор е уравнение того же вида:

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(x)\,dx = C'\psi(y),$$

где C и C' — постоянные. Так как эти постоянные заведомо положительны, то полученную систему можно привести к виду (41), § 598, заменяя функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ соответственно через $h\varphi$ и $\frac{\varphi}{h}$ и подбирая должным образом постоянное h.

ГЛАВА XXXIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теория интегральных уравнений имеет многочисленные и важные приложения. Мы рассмотрим некоторые из них, относящиеся к интегральному исчислению и математической физике.

I. ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

602. О некоторых свойствах линейных уравнений. Мы установим сперва несколько очень простых свойств интегралов линейного уравнения, относящихся к нулям этих интегралов. Пусть будет

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{1}$$

линейное уравнение, коэфициенты которого p и q — непрерывные функции в интервале (a, b), где $a < b$. Известно, что все интегралы этого уравнения непрерывны в том же интервале, и интеграл, принимающий значение y_0 для значения $x = x_0$, заключенного между a и b, имеет вид (II, § 365):

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p\,dx} \left\{ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q\,dx\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p\,dx} \right\}. \tag{2}$$

Из этой формулы видно, что если $y_0 \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, то при $x > x_0$ значения y положительны. Следовательно, если функция $q(x)$ не отрицательна в интервале (a, b), то интеграл уравнения (1) при возрастании x от a до b не может переходить от положительных значений к отрицательным. Выводы были бы обратные, если бы было $q \leqslant 0$.

Рассмотрим далее уравнение Риккати:

$$\frac{du}{dx} = Pu^2 + Qu + R, \tag{3}$$

коэфициенты которого непрерывны в интервале (a, b). Всякий интеграл $u(x)$, непрерывный в этом интервале, удовлетворяет также линейному уравнению вида (1), коэфициенты которого имеют значения: $p = Pu + Q$, $q = R$. Следовательно, если R во всем интервале (a, b) не отрицательно, то при возрастании x от a до b непрерывный в этом интервале интеграл не может переходить от положительного значения к отрицательному.

В более общем случае пусть $y(x)$ — непрерывный в интервале (a, b) интеграл уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = yP(x, y) + R(x),$$

где функции $P(x, y)$ и $R(x)$ непрерывны и где $R(x)$ не отрицательна во всем интервале от a до b. Этот интеграл не может переходить от положительных значений к отрицательным при возрастании x от a до b.

Возьмем теперь линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{4}$$

коэфициенты которого непрерывны в промежутке от a до b. Мы уже видели (т. II, ч. 2, сноска на стр. 116), что между двумя последовательными корнями любого интеграла $y_1(x)$ содержится один и только один корень всякого другого интеграла $y_2(x)$. Интеграл $y_1(x)$ вполне определен с точностью до постоянного множителя, если известен один корень x_0 этого интеграла, ибо значением этого постоянного C можно так распорядиться, чтобы при $x = x_0$ производная $Cy'_1(x)$ принимала любое данное значение. Отсюда следует, что корни всякого интеграла известны, если известен один из них, а из упомянутой теоремы Штурма вытекает, что все эти корни движутся в одинаковом направлении, если мы изменяем положение одного из них.

Если $Q(x) \leqslant 0$ в интервале (a, b), *то в этом интервале интеграл не может иметь более одного корня.* Положим, в самом деле, что x_0 и x_1 суть два последовательных корня какого-нибудь интеграла $y(x)$, заключенные между a и b. Логарифмическая производная $u = \frac{y'}{y}$ этого интеграла должна быть непрерывна в интервале от $x_0 + \varepsilon$ до $x_1 - \varepsilon'$, и когда x возрастает от $x_0 + \varepsilon$ до $x_1 - \varepsilon'$, ее значения должны изменяться от $+\infty$ до $-\infty$. Но это невозможно, ибо u удовлетворяет уравнению Риккати вида (3), в котором свободный член равен $-Q(x)$ (§ 402). Если при $x = a$, кроме того, $\frac{y'}{y} > 0$, то мы видим, что интеграл вовсе не может иметь корня между a и b.

Если $Q(x)$ имеет произвольный знак, то число корней интеграла, заключенных между a и b, определяется с помощью другой теоремы, также принадлежащей Штурму. Чтобы высказать эту теорему, мы предположим, что линейное уравнение представлено в следующей канонической форме:

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\} + gy = 0, \tag{5}$$

где k и g — непрерывные функции, первую из которых можно предположить *положительной.* Чтобы уравнение (4) привести к этому виду, достаточно умножить все его члены на положительный множитель $e^{\int P dx}$

Далее рассмотрим второе уравнение того же вида:

$$\frac{d}{dx}\left\{k_1\frac{dz}{dx}\right\}+g_1 z=0, \tag{6}$$

и пусть будут x_0 и x_1 два последовательных корня интеграла $y(x)$ уравнения (5), заключающиеся между a и b. *Если между* x_0 *и* x_1 *все время имеют место неравенства* $k_1 \leqslant k, g_1 \geqslant g$, *то всякий интеграл* $z(x)$ *уравнения* (6) *имеет по крайней мере один корень, заключенный между* x_0 и x_1.

Очевидно, достаточно показать, что не существует такого интеграла $z(x)$ уравнения (6), который оставался бы положительным между x_0 и x_1, включая концы. Предположим, что такой интеграл существует, и положим:

$$\omega=\frac{k}{y}\frac{dy}{dx}, \quad \omega_1=\frac{k_1}{z}\frac{dz}{dx}, \quad u=\omega-\omega_1;$$

эта функция u должна быть непрерывною в интервале $(x_0+\varepsilon, x_1-\varepsilon)$ и изменяться в этом интервале от $+\infty$ до $-\infty$, ибо функция ω_1 остается конечной при $x=x_0$ и $x=x_1$. Но мы имеем:

$$\frac{du}{dx}=\frac{d\omega}{dx}-\frac{d\omega_1}{dx}=-g-\frac{1}{k}\omega^2+g_1+\frac{1}{k}\omega_1^2,$$

что можно еще записать в виде:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k}\right\}(\omega+\omega_1)u+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k}\right\}(\omega^2+\omega_1^2)+g_1-g.$$

Это — линейное уравнение относительно u, коэфициенты которого непрерывны в интервале $(x_0+\varepsilon, x_1-\varepsilon')$, а свободный член *положителен* в этом интервале. Согласно доказанному в начале настоящего параграфа это уравнение не может иметь интеграла, который при возрастании x от $x_0+\varepsilon$ до $x_1-\varepsilon$ измерялся бы от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому всякий интеграл уравнения (6) имеет между x_0 и x_1 по крайней мере один корень *.

---

* Можно распространить эту теорему на такие интегралы уравнения (6), которые имеют корень x_0. В самом деле, пусть такой интеграл, для которого $z(x_0)=0$; мы докажем, что этот интеграл имеет по крайней мере еще один корень между x_0 и x_1. Действительно, выберем число c между x_0 и x_1 достаточно близко к x_0 так, чтобы оба отношения

$$\xi(x)\frac{y(x)}{ky'(x)}=\frac{1}{\omega}, \quad \xi_1(x)=\frac{z(x)}{k_1 z'(x)}=\frac{1}{\omega_1}$$

были непрерывны и положительны между x_0 и c. Полагая $v=\xi-\xi_1$, мы получаем, в силу уравнений (5) и (6):

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\xi_1}{dx}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k_1}+g\xi^2-g_1\xi_1^2,$$

Приложения. 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}\frac{dy}{dx}\right)+x^{\gamma-1}y=0,$$

которое отличается от уравнения Бесселя только заменой x на $-x$. Если изменить x от положительного числа l до некоторого значения, большего l, то коэфициент $x^{\gamma-1}$ будет в этом интервале больше, чем $lx^{\gamma-2}$. Следовательно, между двумя произвольными корнями интеграла вспомогательного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}\frac{dy}{dx}\right)+lx^{\gamma-2}y=0,$$

или

$$x^2y''+\gamma xy'+ly=0,$$

превосходящими l, содержится по крайней мере один корень рассматриваемого уравнения. Так, если мы возьмем $4l>(\gamma-1)^2$, то вспомогательное уравнение будет иметь интеграл вида $x^{\alpha}\sin\{b\lg x\}$, нулями которого служат числа $e^{\frac{k\pi}{b}}$, среди которых есть бесчисленное множество таких, которые превосходят l. Следовательно, всякий интеграл рассматриваемого уравнения имеет бесчисленное множество положительных корней.

2. Предположим, что g положительно и заключается между a и b, и пусть будут l и L нижняя и верхняя граница для g, причем l — число положительное. Пусть будут, далее, m и M числа, играющие ту же роль по отношению к функции k. Сравнение уравнения (5) с двумя вспомогательными уравнениями

$$\frac{d}{dx}\left(m\frac{dY}{dx}\right)+LY=0, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\left(M\frac{dZ}{dx}\right)+lZ=0, \tag{8}$$

дает возможность определить число и расположение корней интеграла $y(x)$, заключающихся между a и b.

или

$$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{2}(g-g_1)\left(\xi^2+\xi_1^2\right)+\frac{1}{2}(g+g_1)(\xi+\xi_1)v;$$

не зависящий от v член в правой части отрицателен или равен нулю между x_0 и c, и мы имеем $v(x_0)=0$. Отсюда следует, что $v(x)$ отрицательно, следовательно

$$\omega(x)-\omega_1(c)=u(c)$$

положительно. Отсюда следует, что если бы интеграл $z(x)$ не обращался в нуль ни между x_0 и x_1 и при значении x_1, то функция $u(x)$ изменилась бы от положительного значения до $-\infty$ при возрастании x от c до x_1, невозможность чего уже доказана. Если бы было одновременно

$$z(x_0)=z(x_1)=0,$$

то мы также показали бы, что $\omega(c')-\omega_1(c')$ отрицательно для значения c', заключенного между x_0 и x_1 и весьма близкого к x_1; разность $\omega(x)-\omega_1(x)$ переходила бы от отрицательного значения к положительному при возрастании x от c до c' (см. Bôcher, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1902, стр. 196).

С одной стороны, между двумя последовательными нулями интеграла $Z(x)$ существует по крайней мере один корень интеграла $y(x)$. С другой стороны, между двумя последовательными корнями $y(x)$ находится по крайней мере один корень интеграла $Y(x)$. Но вспомогательные уравнения (7) и (8) суть уравнения с постоянными коэфициентами, и нули интегралов $Y(x)$ и $Z(x)$ равны соответственно

$$\alpha + K\pi\sqrt{\frac{m}{L}}, \quad \beta + K'\pi\sqrt{\frac{M}{l}},$$

где α и β — любые числа, K и K' — произвольные целые числа. Отсюда следует, что разность $x_1 - x_0$ двух последовательных корней интеграла $y(x)$ не может быть меньше $\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$ и не может быть больше $\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$. Другими словами, всякий интервал длины $\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$, заключенный в интервале (a, b), содержит по крайней мере один корень интеграла $y(x)$, и интервал длиной $\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$ не может содержать более одного корня. Если уравнение $y(x) = 0$ имеет n корней $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, заключенных между a и b, то эти n корней вместе с a и b определяют $n+1$ интервалов, длины которых меньше, чем $\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$. Таким образом имеем:

$$(n+1)\pi\sqrt{\frac{M}{l}} > b - a, \quad \text{или} \quad n+1 > \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{l}{M}}.$$

С другой стороны, длина каждого из $n-1$ интервалов, заключенных между двумя последовательными корнями, больше, чем $\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$. Следовательно, мы имеем:

$$(n-1)\pi\sqrt{\frac{m}{L}} < b - a, \quad \text{или} \quad n-1 < \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{L}{m}}.$$

Если g отрицательно между a и b, то, как мы видели, интеграл уравнения (5) имеет не больше одного корня в этом интервале. Если g в интервале (a, b) меняет знак, то для разности двух корней можно дать только нижнюю границу.

603. Новые задачи для линейных уравнений. Мы видели выше (§ 551), как решение задачи Коши для линейного диференциального уравнения привело к интегральному уравнению типа Вольтерра. Изучение некоторых граничных задач, в которых интеграл должен удовлетворять условиям, где участвуют оба предела одновременно, приводит аналогичным образом к интегральным уравнениям Фредгольма. Мы ограничимся случаем уравнения второго порядка. Фундаментальные функции этих уравнений Фредгольма содержат в качестве частных случаев большое число семейств ортогональных функций, которые уже раньше встретились в различных вопросах анализа или математической физики. Отыскание этих фундаментальных функций приводится вообще, как мы это несколько дальше увидим, к следующей задаче. Пусть задано линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\}+(\lambda r-g)\,y=0, \tag{9}$$

где λ — параметр, k, r и g — функции от x, первая из которых положительна в интервале (a, b). Найти такие значения λ, для которых существует интеграл $y(x)$, отличный от нуля, непрерывный между a и b и удовлетворяющий граничным условиям следующего вида:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)_a+By(a)=0,\quad A_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_b+B_1y(b)=0, \tag{10}$$

где A, B, A_1 и B_1 суть данные постоянные. В случае, который мы буден рассматривать, существование бесконечного множества таких значений λ является непосредственным следствием теории интегральных уравнений. Свойства ортогональности выводятся весьма просто из рассмотрения самого диференциального уравнения. Пусть, в самом деле, λ_1 и λ_2 — два значения параметра λ, каждому из которых соответствует интеграл уравнения (9), удовлетворяющий предельным условиям (10). Эти два интеграла $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют также следующему соотношению, которое получается из двух диференциальных уравнений исключением коэфициента g:

$$y_2\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy_1}{dx}\right\}-y_1\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy_2}{dx}\right\}+(\lambda_1-\lambda_2)\,ry_2y_2=$$
$$=\frac{d}{dx}\left\{k\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right\}+(\lambda_1-\lambda_2)\,ry_1y_2=0,$$

откуда получаем:

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_a^b r(x)\,y_1(x)\,y_2(x)\,dx=\left[k\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right]_a^b.$$

Но из граничных условий (10), которым, по предположению, удовлетворяют обе функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, вытекает, что разность $y_2\dfrac{dy_1}{dx}-y_1\dfrac{dy_2}{dx}$ при $x=a$ и при $x=b$ равна нулю. Поэтому, полагая $\lambda_1\neq\lambda_2$, имеем:

$$\int_a^b r(x)\,y_1(x)\,y_2(x)\,dx=0. \tag{11}$$

Изучен также случай, когда функция $k(x)$ обращается в нуль при $x=a$ или при $x=b$. Если $k(a)=0$, то первое граничное условие должно быть заменено условием, что интеграл остается конечным при $x=a$. Если также и $k(b)=0$, то второе граничное условие заменяется аналогичным.

604. Определения интеграла по его значениям $y(a)$ и $y(b)$. Мы подробно изучим наиболее простую из упомянутых задач, а именно нахождение интеграла, принимающего данные значения на концах интервала.

Можно, очевидно, предположить, что эти значения равны нулю, так как достаточно сделать простую замену искомой функции, чтобы притти к этому случаю; в дальнейшем мы будем предполагать, что это приведение выполнено. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda A(x)y+f(x), \tag{12}$$

где $A(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Чтобы к этой новой задаче применить метод последовательных приближений, мы приходим, как мы это уже неоднократно видели, к разысканию разложения искомого решения по целым степеням λ, формально удовлетворяющего уравнению (12); это разложение имеет вид:

$$y=y_0(x)+\lambda y_1(x)+\ldots+\lambda^n y_n(x)+\ldots, \tag{13}$$

причем каждый коэфициент обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$.

Первый член $y_0(x)$ получится как решение граничной задачи для простейшего уравнения, получаемого при $\lambda=0$. Но общий интеграл уравнения $y_0''(x)=f(x)$ имеет вид:

$$y_0(x)=\int_a^x (x-s)f(s)\,ds+C_1x+C_2;$$

определяя постоянные C_1 и C_2 так, чтобы было $y_0(a)=y_0(b)=0$, мы найдем, что искомый интеграл есть

$$y_0(x)=\int_a^x (x-s)f(s)\,ds-\frac{x-a}{b-a}\int_a^b (b-s)f(s)\,ds,$$

его можно написать в виде:

$$y_0(x)=\int_a^b K(x, s)f(s)\,ds, \tag{14}$$

если положить

$$\left.\begin{aligned} K(x, s)&=\frac{(x-b)(s-a)}{b-a} \quad \text{при } s\leqslant x,\\ K(x, s)&=\frac{(x-a)(s-b)}{b-a} \quad \text{при } a\geqslant x.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Эта функция $K(x, s)$, которая в последующем будет играть существенную роль, очевидно, непрерывна и симметрична относительно x и s. Рассматриваемая как функция от x, она представляет интеграл уравнения $\frac{d^2K}{dx^2}$, первая производная которого разрывна при $x=s$. Эта производная при изменении x от $s-\varepsilon$ до $s+\varepsilon$ увеличивается скачком на единицу; но вторая производная непрерывна. Изображающая эту функцию кривая состоит из двух сторон треугольника, имеющего вершины в точках

$$(x=a,\ y=0),\quad (x=b,\ y=0)\quad \left[x=s,\quad y=\frac{(s-b)(s-a)}{b-a}\right]$$

Все остальные члены ряда (13) легко найдутся рекуррентным путем; вообще $y_n(x)$ представляет интеграл уравнения

$$\frac{d^2y_n}{dx^2}=A(x)\,y_{n-1}(x),$$

который обращается в нуль при $x=a$ и при $x=b$. Таким образом согласно только что проведенным вычислениям

$$y_n(x)=\int_a^b K(x, s)\,A(s)\,y_{n-1}(s)\,ds,$$

но это как раз те выкладки, какие нужно было произвести для решения методом последовательных приближений уравнения Фредгольма:

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\,A(s)\,y(s)\,ds+\int_a^b K(x, s)\,f(s)\,ds. \tag{16}$$

Этот факт легко объясняется самим способом введения функции $K(x, s)$. В самом деле, если интеграл $y(x)$ уравнения (12) равен нулю при $x=a$ и при $a=b$, то вычисления, проведенные для уравнения $y''=f(x)$, доказывают, что $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (16). Обратное предложение доказывается непосредственно. Итак, *нахождение интеграла уравнения* (12), *обращающегося в нуль при $x=a$ и $x=b$, приводит к решению уравнения Фредгольма* (16). Отсюда видна существенная разница между задачей Коши и этой новой граничной задачей. В то время как метод последовательных приближений при решении задачи Коши приводит к всегда сходящемуся ряду, ряд (13) сходится только при достаточно малых значениях $|\lambda|$. Кроме того, как мы это сейчас увидим, существует бесчисленное множество значений λ, для которых новая задача возможна только в том случае, если $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию.

Положим сначала, что данное значение параметра λ не представляет особого значения ядра $K(x, s)\,A(s)$. Согласно общей теории, уравнения (16) имеет в этом случае единственное решение, которое можно представить в виде:

$$y(x)=\int_a^b f(s)\,H(x, s; \lambda)\,ds, \tag{17}$$

где $H(x, s; \lambda)$ есть мероморфная функция от λ, которая не тождественна с резольвентой, но может быть из нее легко получена. Кроме того, подставив в соотношение (16) вместо $y(x)$ его выражение (17) и записав, что получится тождество, мы придем к функциональному уравнению, определяющему функцию $H(x, s; \lambda)$:

$$H(x, s; \lambda)=K(x, s)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,A(t)\,H(t, s; \lambda)\,dt. \tag{18}$$

Мы видим, что функция $H(x, s; \lambda)$ представляет сумму двух членов, из которых второй член H_1 в интервале (a, b) представляет непрерывную функцию, так же как и его производная $\frac{dH_1}{dx}$. Согласно свойствам ядра $K(x, s)$ имеем:

$$\frac{d^2H}{dx^2}=\frac{d^2H_1}{dx^2}=\lambda A(x)\,H(x, s; \lambda),$$

следовательно, производная $\frac{dH}{dx}$ имеет при $x=s$ тот же разрыв, что $K(x, s)$, а H обращается в нуль для произвольного s при $x=a$ и при $x=b$. Эти свойства определяют функцию $H(x, s; \lambda)$. Пусть, в самом деле, $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ будут два интеграла уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda A(x)\,y, \tag{19}$$

непрерывные вместе со своими производными $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ в интервале (a, b) и удовлетворяющие условиям Коши: $y_1(a)=0$, $y_1'(a)=1$, $y_2(b)=0$, $y_2'(b)=1$. Всякий интеграл уравнения (19), который при $x=a$ обращается в нуль и который непрерывен вместе со своею производною в интервале (a, s), имеет в этом интервале вид $C_1y_1(x, \lambda)$. Точно так же, если он вместе со своей производной непрерывен в интервале (s, b) и обращается в нуль при $x=b$, то он в этом интервале имеет вид $C_2y_2(x, \lambda)$

Для того чтобы функция была непрерывна при $x=s$, а ее производная имела тот же скачок, что и производная от $K(x, s)$, необходимо чтобы было:

$$\left.\begin{aligned} C_2y_2(s, \lambda)-C_1y_1(s, \lambda)&=0,\\ C_2y_2'(s, \lambda)-C_1y_1'(s, \lambda)&=1.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Эти уравнения вообще дают конечные значения для C_1 и C_2. Случай, когда детерминант $y_2y_1'-y_1y_2'$ равен нулю, будет рассмотрен в следующем параграфе.

Если мы умеем интегрировать однородное уравнение (19), то для всех случаев, кроме этого исключительного, можно составить функцию $H(x, s; \lambda)$, которая играет ту же роль в решении этой проблемы, что и функция $\varphi(x, \alpha)$ в решении задачи Коши (т. II, § 401). Легко показать, что функция $y(x)$, данная формулой (17), дает решение задачи. Действительно, эту формулу можно написать в виде:

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds + \int_a^b H_1(x, s; \lambda) f(s)\, ds, \qquad (17')$$

где функция $H_1(x, s; \lambda)$ вместе со своими производными непрерывна между a и b. Диференцируя это соотношение дважды и принимая во внимание характеристическое свойство $K(x, s)$, получаем:

$$y''(x) = f(x) + \int_a^b \frac{d^2H_1}{dx^2} f(s)\, ds = f(x) + \lambda \int_a^b A(x) H(x, s; \lambda) f(s)\, ds,$$

т. е.

$$y''(x) = f(x) + \lambda A(x) y.$$

605. Изучение особых значений. Если λ есть особое значение для ядра $K(x, s) A(s)$, то однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) A(s) \varphi(s)\, ds$$

имеет отличное от нуля решение, а следовательно, уравнение (19) имеет интеграл $\varphi(x)$, который обращается в нуль на концах интервала (a, b); отсюда следует, что каждому особому значению соответствует только одна фундаментальная функция. *Этих особых значений имеется бесконечное множество.* Мы сначала докажем, что $K(x, s)$ есть определенное ядро. С одной стороны, это ядро *замкнутое*. Если, в самом деле,

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds = 0$$

при любом x, то $\psi''(x) = \varphi(x) = 0$. Кроме того, все особые значения ядра $K(x, s)$ *отрицательны*, ибо чтобы найти эти особые значения, нужно найти такие значения λ, при которых уравнение $y'' = \lambda y(x)$ имеет интеграл, который в точках a и b обращается в нуль. Эти значения, очевидно, имеют вид $-\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$, где n — целое число, а фундаментальные функции суть

$$\sin\left\{\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right\}.$$

Отсюда следует, что ядро $K(x, s) A(s)$ принадлежит к классу ядер, рассмотренному в § 595. Следовательно, резольвента имеет бесконечное множество полюсов, которые все являются действительными и простыми, и каждому из них соответствует единственная фундаментальная функция. В частном случае, когда функция $A(x)$ между a и b сохраняет знак, ядро $K(x, s) A(s)$ есть ядро Шмидта, и приложенные свойства доказываются еще проще (§ 593). Если, например, $A(x)$ отрицательно, то все особые значения положительны. Применение метода Шварца дает возможность определить один за другим полюсы резольвенты и фундаментальные функции *.

Уравнение $D(\lambda)=0$, которое дает особые значения, может быть получено непосредственно из диференциального уравнения. Пусть, в самом деле, $y_1(x, \lambda)$ будет интегралом уравнения (19), который удовлетворяет начальным условиям $y_1(a, \lambda)=0$, $y_1'(a, \lambda)=1$. Этот интеграл есть целая функция параметра λ, которую можно разложить в ряд по степеням λ, вычисляя коэфициенты методом последовательных приближений (т. II, § 390). Если записать, что этот интеграл обращается в нуль и при $x=b$, мы получим уравнение $y_1(b, \lambda)=0$, целое относительно λ, корни которого и будут искомыми особыми значениями. Можно заметить, что то же уравнение получится, если мы приравняем нулю детерминант $y_2(s, \lambda)\,y_1'(s, \lambda)-y_1(s, \lambda)\,y_2'(s, \lambda)$ уравнений (20); так как уравнение (19) не содержит члена, содержащего y', то этот детерминант не зависит от s (т. II, § 400) и совпадает с $-y_1(b, \lambda)$.

606. Охлаждение неоднородного бруса. Метод, изложенный для простого случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, без труда может быть распространен на уравнения второго порядка более общего вида с несколько менее простыми предельными условиями. Пусть задано линейное уравнение второго порядка:

$$y''+p(x)y'+\{q(x)+\lambda r(x)\}y=f(x),$$

где коэфициент при y представляет линейную функцию параметра λ, и пусть требуется разложить в ряд по степеням λ его интеграл, удовлетворяющий начальным условиям вида (10). Первый член разложения мы получим, если разрешим ту же задачу для уравнения

$$y''+p(x)y+q(x)y=f(x); \tag{21}$$

применяя метод вариации произвольных постоянных, мы можем представить этот интеграл в виде $\int_a^b K(x, s)f(s)\,ds$, где $K(x, s)$ есть функция, зависящая одновременно и от граничных условий и от коэфициентов $p(x)$ и $q(x)$. Если эта функция $K(x, s)$ определена, то решение поставленной задачи общего вида с помощью вида (20) приводится к решению интегрального уравнения:

$$y(x)+\lambda\int_a^b K(x, s)\,r(s)\,y(s)\,ds=\int_a^b K(x, s)f(s)\,ds, \tag{22}$$

ядро которого равно $-K(x, s)\,r(s)$. Применим этот метод к задаче об охлаждении неоднородного бруса.

---

* E. Picard, Traité d'Analyse, т. III, гл. VI. В случае, когда $A(x)$ имеет произвольный знак, см. также диссертацию Sanielevici (*Annales de l'Ecole Normale*, 1909).

С аналитической точки зрения задача сводится к следующему: *Найти интеграл уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{dx}\right)-lU=g\frac{\partial U}{\partial t},$$

обращающийся при $t=0$ в данную функцию $U_0(x)$ $(0<x<X)$ и удовлетворяющий, кроме того, граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial x}-hU=0 \quad \text{при } x=0,\\ &\frac{\partial U}{\partial x}+HU=0 \quad \text{при } x=X;\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где h и H — положительные постоянные, а $k(x)$, $l(x)$, $g(x)$ — функции от x, которые по их физическому значению существенно положительные.

Мы начнем с нахождения простых решений вида:

$$U=ve^{-\lambda t},$$

где λ — постоянное, а v — функция от x, удовлетворяющая граничным условиям (23). Заменяя в уравнении (22) U через $ve^{-\lambda t}$, мы видим, что функция v должна быть интегралом линейного уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dv}{dx}\right\}+(g\lambda-l)v=0, \tag{24}$$

и вопрос сводится прежде всего к нахождению таких значений λ, для которых уравнение (24) имеет отличный от нуля интеграл, удовлетворяющий граничным условиям (23). Эти значения λ представляют собой корни трансцендентного уравнения, которое нетрудно составить. В самом деле, пусть $V(x, \lambda)$ будет интеграл уравнения (24), удовлетворяющий начальным условиям:

$$V(x,\lambda)=1, \quad \frac{dV}{dx}=h \quad \text{при } x=0.$$

Этот интеграл представляет целую функцию параметра λ. Если теперь записать еще, что при $x=X$ должно быть $\frac{dV}{dx}+HV=0$, то мы получим уравнение, целое относительно λ, $D(\lambda)=0$. Корни этого уравнения как раз и будут искомые значения параметра.

Опираясь на теоремы Штурма о колебаниях, можно доказать, что это уравнение имеет бесчисленное множество действительных и различных корней *. Мы покажем, что эти корни представляют собой особые

* Jordan. Cours d'Analyse, t. III. Определенные таким образом функции суть *функции Штурма-Лиувиля* (*Journal de Liouville*, t. I).

значения некоторого ядра Шмидта. Для этого прежде всего решим следующую задачу: найти интеграл линейного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dv}{dx}\right\} - lv = f(x), \tag{25}$$

удовлетворяющий граничным условиям (23).

Пусть будут $v_1(x)$, $v_2(x)$ — два различных интеграла уравнения без правой части. Метод Коши (т. II, § 401) легко дает общий интеграл уравнения с правой частью:

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + \int_0^x \{v_1(s)\, v_2(x) - v_2(s)\, v_1(x)\} f(s)\, ds; \tag{26}$$

мы предположим для простоты, что

$$k(0) = 1, \quad v_1(0) = 1, \quad v_1'(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 1.$$

Если теперь записать, что функция $v(x)$ удовлетворяет двум условиям (23), то для постоянных C_1 и C_2 найдем значения:

$$C_1 = \int_0^x \frac{Av_2(s) - Bv_1(s)}{A + hB} f(s)\, ds, \quad C_2 = h\int_0^x \frac{Av_2(s) - Bv_1(s)}{A + hB} f(s)\, ds,$$

причем мы положили:

$$A = v_1'(X) + Hv_1(X), \quad B = v_2'(X) + Hv_2(X).$$

Искомый интеграл, следовательно, имеет вид:

$$v(x) = \int_0^X K(x, s) f(s)\, ds, \tag{27}$$

если положить

$$K(x, s) = \frac{v_1(x) + hv_2(x)}{A + hB}[Av_2(s) - Bv_1(s)] \quad \text{при } x \leqslant s,$$

$$K(x, s) = \frac{v_1(s) + hv_2(s)}{A + hB}[Av_2(x) - Bv_1(x)] \quad \text{при } s \leqslant x.$$

Доказательство предполагает, что $A + hB$ отлично от нуля. Если бы эта сумма была равна нулю, то интеграл $v = v_1(x) + hv_2(x)$ однородного уравнения удовлетворял бы граничным условиям (23). Но отношение $\frac{v'}{v}$ при $x = 0$ положительно, а коэфициент l при v по предположению отрицателен. Следовательно, это отношение при возрастании x от 0 до X не может перейти от положительного значения h к отрицательному значению $-H$ (§ 602).

Всякий интеграл уравнения (24), удовлетворяющий граничным условиям (23), представляет, следовательно, решение однородного интегрального уравнения

$$y(x)+\lambda\int_0^x K(x, s)\, g(s)\, y(s)\, ds=0, \tag{28}$$

которое получается из уравнений (25) и (27) заменой $f(x)$ на $\lambda g(x) y(x)$; обратное предложение также справедливо. Ядро $K(x, s)$, кроме того, замкнутое, ибо если бы существовала такая непрерывная функция $\varphi(x)$, что интеграл

$$\int_0^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

был бы равен нулю при любом x, то уравнение (25), в котором $f(x)$ заменена на $\varphi(x)$, имело бы частный интеграл $v=0$, а следовательно, функция $\varphi(x)$ была бы равна нулю. Так как $g(x)$ положительно, то ядро $K(x, s) g(s)$ есть ядро Шмидта, и существует бесчисленное множество особых значений, которые все действительны и которые являются простыми полюсами резольвенты. Каждому из этих особых значений соответствует единственная фундаментальная функция, ибо два интеграла уравнения (28), удовлетворяющие граничным условиям (23), могут отличаться только постоянным множителем.

По соображениям, аналогичным вышеприведенным, ни одно из этих особых значений не может быть отрицательным. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ будут эти особые значения, расположенные в порядке возрастания, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ — соответствующие фундаментальные функции. Если функция $U_0(x)$ может быть представлена равномерно сходящимся рядом вида:

$$U_0(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)+\ldots, \tag{29}$$

с постоянными коэфициентами $a_1; a_2, \ldots$, то функция

$$U(x, t)=a_1 e^{-\lambda_1 t}\varphi_1(x)+a_2 e^{-\lambda_2 t}\varphi_2(x)+\ldots \tag{30}$$

удовлетворяет всем условиям задачи. Мы оставим в стороне рассмотрение условий, достаточных для того; чтобы функцию $U_0(x)$ можно было разложить в равномерно сходящийся ряд вида (29).

607. Изучение особого случая. Может случиться; что применение метода последовательных приближений будет невозможно уже вначале из-за того, что первое подлежащее решению уравнение не будет иметь интеграла, удовлетворяющего данным граничным условиям. Пусть, например, требуется найти интеграл линейного уравнения

$$y''=A(x)\, y+f(x) \tag{31}$$

такой; что $y'(a)=y'(b)=0$. Чтобы применить обычный метод; нужно сначала найти интеграл уравнения $y''=f(x)$, удовлетворяющий этим условиям. Но такой интеграл существует только, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0, \tag{32}$$

и в этом случае существует бесчисленное множество интегралов, представляющих решение задачи; все они даются формулой:

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + C; \tag{33}$$

где C — произвольное постоянное, а ядро $K(x, y)$ равно $x - s$ для $s \leqslant x$ и нулю для $s \geqslant x$.

Если же функция $f(x)$ не удовлетворяет условию (32), то обычный метод последовательных приближений к уравнению (31) неприменим. Чтобы обойти эту трудность, необходим новый прием. Всякий интеграл уравнения (31), для которого

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

удовлетворяет также условию

$$\lambda \int_a^b A(x) y(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = 0, \tag{34}$$

которое аналогично условию (32). Кроме того, этот интеграл представляет также решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) A(s)\, y(s)\,ds + \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + C, \tag{35}$$

которое получается из уравнения (33) заменой $f(x)$ на $f(x) + \lambda A(x) y(x)$. Мы имеем, таким образом, систему двух уравнений (34) и (35) для определения неизвестной функции $y(x)$ и постоянного C. Постоянное C можно исключить, если в уравнение (34) подставить значение $y(x)$, полученное из формулы (35). Мы получим тогда соотношение:

$$\lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, s) A(x) A(s) y(s)\,dx\,ds +$$
$$+ \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) A(x) f(s)\,dx\,ds + \lambda C \int_a^b A(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

из которого находим значение C, если только $\int_a^b A(x)\,dx$ не равен нулю. Ограничимся этим случаем и подставим полученное значение C в соотношение (35). Мы получим для определения $y(x)$ уравнение Фредгольма:

$$y(x)=\lambda\int_a^b K_1(x,s)A(s)y(s)\,ds+\int_a^b K_1(x,s)f(s)\,ds-\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\lambda\int_a^b A(x)\,dx}, \tag{36}$$

где мы полагаем:

$$K_1(x,s)=K(x,s)-\frac{\int_a^b K(x,s)A(x)\,dx}{\int_a^b A(x)\,dx}=K(x,s)-\Phi(s).$$

Новое ядро $K_1(x,s)$ получается из ядра $K(x,s)$ вычитанием функции от s, выбранной так, что

$$\int_a^b K_1(x,s)A(x)\,dx=0.$$

Всякое решение интегрального уравнения (36) действительно удовлетворяет требуемым условиям. С одной стороны, это решение представляет интеграл уравнения (31), ибо оно удовлетворяет также интегральному уравнению (35). С другой стороны, достаточно проделать процесс, обратный только что приведенному, чтобы видеть, что эта функция удовлетворяет также условию (34). Так что в этом случае решение задачи дается интегральным уравнением (36). Полученный результат дает простое объяснение тому, что метод последовательных приближений неприменим в общем случае. В самом деле, если $\int_a^b f(x)\,dx$ не равен нулю, то искомый интеграл $y(x,\lambda)$, рассматриваемый как функция параметра λ, имеет, кроме полюсов резольвенты, еще полюс $\lambda=0$, происходящий от свободного члена интегрального уравнения.

Примечание. Если λ есть особое значение ядра $K_1(x,s)A(s)$, то однородное уравнение $y''=\lambda A(x)y$ имеет интеграл, который не равен тождественно нулю, и производная которого равна нулю в крайних точках a и b. Эти особые значения представляют также особые значения бесчисленного множества других ядер того же вида. Рассмотрим вообще однородное интегральное уравнение:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K_1(x,s)A(s)\varphi(s)\,ds, \tag{37}$$

для которого

$$\int_a^b K_1(x,s)A(s)\,dx=0.$$

Отсюда непосредственно следует, что и

$$\int_a^b A(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

для всякой фундаментальной функции $\varphi(x)$ этого ядра, и следовательно, $\varphi(x)$ удовлетворяет также новому уравнению:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b [K_1(x, s) + X]\,A(s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (38)$$

при любой функции X переменного x. Всякая фундаментальная функция ядра $K_1(x, s)\,A(s)$ есть также фундаментальная функция ядра $\{K_1(x, s) + X\}\,A(s)$, соответствующая тому же особому значению. Обратно, если функция $\varphi(x)$ представляет решение уравнения (38), то она удовлетворяет также соотношению:

$$\int_a^b A(x)\,\varphi(x)\,dx = \lambda \int_a^b A(s)\,\varphi(s)\,ds \cdot \int_a^b XA(x)\,dx.$$

Следовательно, мы имеем:

$$\int_a^b A(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

если только произведение

$$\lambda \int_a^b XA(x)\,dx$$

отлично от единицы.

В первом случае $\varphi(x)$ представляет также решение уравнения (37); при втором предположении λ получает определенное значение, которому может соответствовать только *конечное* число различных решений уравнения (38).

608. Периодические решения. Аналогичный прием дает возможность привести к решению уравнения Фредгольма нахождение периодических решений линейного уравнения:

$$y''(x) = \lambda A(x)\,y + f(x), \qquad (39)$$

где $A(x)$ и $f(x)$ суть периодические функции с периодом ω. Интеграл этого уравнения будет периодическим, если

$$y(\omega) = y(0), \quad y'(\omega) = y'(0).$$

Рассмотрим сперва уравнение, полученное в предположении $\lambda = 0$. Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, очевидно, необходимо, чтобы было:

$$\int_0^\omega f(x)\,dx = 0;$$

это условие выражает, что $y'(\omega)=y'(0)$, и если это условие выполнено, то существует бесчисленное множество интегралов, выражающих решение задачи:

$$y=\int_0^x (x-s)f(s)\,ds-\frac{x}{\omega}\int_0^\omega (\omega-s)f(s)\,ds+C,$$

где C — произвольное постоянное. Можно также написать этот интеграл в виде:

$$y=\int_0^\omega K(x, s)f(s)\,ds+C,$$

где $K(x, s)$ равно $\frac{s}{\omega}(x-\omega)$ для $s<x$ и равно $\frac{x}{\omega}(s-\omega)$ для $x<s$.

Положим теперь, что уравнение (39) имеет периодический интеграл. Этот интеграл удовлетворяет двум условиям:

$$\lambda\int_0^\omega A(x)\,y(x)\,dx+\int_0^\omega f(x)\,dx=0,$$

$$y(x)=\int_0^\omega K(x, s)\,[\lambda A(s)\,y(s)+f(s)]\,ds+C.$$

Предполагая, что $\int_0^\omega A(x)\,dx$ отличен от нуля и исключая C, мы придем, как и в предыдущем параграфе, к интегральному уравнению, ядро которого имеет вид $K_1(x, s)\,A(s)$, где $K_1(x, s)$ отличается от $K(x, s)$ только на функцию $\Phi(s)$, выбранную так, чтобы $\int_0^\omega K_1(x, s)\,A(x)\,dx$ был равен нулю. Все соображения, которые были приведены по поводу уравнения (36), применимы также к этому уравнению. Предполагая $f(x)=0$, мы получим однородное интегральное уравнение, решения которого представляют периодические интегралы уравнения $y''=\lambda A(x)\,y$, если соответствующие значения λ представляют особые значения ядра. Эти особые значения представляют также особые значения для ядра вида:

$$[K(x, s)-\Phi(x)-\Phi(s)]\,A(s),$$

где $\Phi(s)$ определена так, как это указано выше (§ 607, примечание).

I. ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

609. Задачи, относящиеся к гармоническим функциям. Одно из первых и наиболее изящных приложений теории Фредгольма представляет задача Дирихле. Мы рассмотрим эту задачу в пространстве для замкнутой поверхности Σ, имеющей в каждой точке единственную касательную плоскость, положение которой непрерывно меняется с точкой касания. В согласии с уже введенными обозначениями, символы $f(M)$, $\varphi(M)$,

$f(M, P)$ будут изображать функции координат точки M или координат двух точек M и P, изменяющихся на поверхности Σ, а знаком $\int$ мы будем выражать кратный интеграл, поскольку нет оснований опасаться неправильного толкования. Метод Неймана (§ 533) для нахождения гармонической функции в области D, заключающейся внутри поверхности Σ, которая принимает на этой поверхности значения, равные данной непрерывной функции $g(M)$, состоит в том, что мы представляем эту гармоническую функцию как потенциал двойного слоя, производимый двойным слоем, расположенным на поверхности Σ. Если в качестве неизвестной функции взять плотность $\rho(M)$ этого слоя, то эта плотность должна удовлетворять интегральному уравнению:

$$2\pi\rho(M) + \int\limits_{(\Sigma)} \rho(P) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma_P = g(M), \tag{40}$$

где r есть расстояние между двумя точками M и P, φ — угол между внутренней нормалью в точке P и направлением PM; M и P суть две точки поверхности Σ, из которых одна точка M неподвижна, а другая точка P описывает поверхность Σ. Решение внешней задачи Дирихле методом Неймана привело бы к уравнению того же вида, которое получается из первого заменой $\rho(M)$ на $-\rho(M)$. Эти два интегральных уравнения представляют частные случаи уравнения Фредгольма:

$$\rho(M) = \lambda \int\limits_{(\Sigma)} K(M, P)\rho(P)\,d\sigma_P + f(M), \quad f(M) = \frac{1}{2\pi}g(M), \tag{41}$$

для которого

$$K(M, P) = -\frac{\cos\varphi}{2\pi r^2};$$

при $\lambda = 1$ имеем внутреннюю задачу Дирихле, при $\lambda = -1$ — внешнюю задачу. При произвольном значении λ уравнение (41) дает решение следующей задачи: найти плотность ρ двойного слоя, расположенного на поверхности Σ, так чтобы соответствующий потенциал двойного слоя W удовлетворял в каждой точке M поверхности Σ соотношению:

$$W_i(M) - W_e(M) + \lambda[W_i(M) + W_e(M)] = 4\pi f(M); \tag{42}$$

здесь $W_i(M)$ и $W_e(M)$ обозначают пределы, к которым стремится потенциал $W(M')$, когда точка M' приближается к точке M, оставаясь соответственно внутри или вне поверхности Σ (§ 527). Когда две точки M и P совпадают, ядро $K(M, P)$ стремится к бесконечности как $\frac{1}{r}$, но нетрудно видеть, что достаточно двух итераций, чтобы из него получить ограниченное ядро (§ 563). Следовательно, к уравнению (41) можно применить теорию Фредгольма.

Союзное интегральное уравнение получится, если мы в ядре поменяем роли двух точек M и P; мы запишем его так:

$$\rho(M)=\lambda\int_{(\Sigma)} K(P, M)\rho(P)\,d\sigma_P+f(M), \tag{43}$$

где $K(P, M)$ равно $-\frac{\cos\psi}{2\pi r^2}$, а ψ означает угол внутренней нормали в точке M с направлением MP. С такого рода уравнением мы встречаемся в одной важной задаче, касающейся потенциала простого слоя. Пусть V есть потенциал, производимый простым слоем плотности ρ, т. е. расположенным на поверхности Σ. Производные по нормали* этого потенциала в каждой точке поверхности удовлетворяют соотношениям § 538.

$$\frac{dV}{dn_e}-\frac{dV}{dn_i}=4\pi\rho(M), \tag{44}$$

$$\frac{dV}{dn_e}+\frac{dV}{dn_i}=2\int_{(\Sigma)}\frac{\cos\psi}{r^2}\rho(P)\,d\sigma_P. \tag{45}$$

Если плотность $\rho(M)$ удовлетворяет уравнению (43), то производные по нормали соответствующего потенциала V удовлетворяют соотношению, аналогичному уравнению (42):

$$\frac{dV}{dn_e}(1+\lambda)=\frac{dV}{dn_i}(1-\lambda)+4\pi f(M), \tag{46}$$

и обратно. Решение интегрального уравнения (43) дало бы, следовательно, решение следующей задачи: *Найти плотность простого слоя, расположенного на поверхности Σ, так чтобы производные по нормали соответствующего потенциала в каждой точке поверхности Σ удовлетворяли соотношению* (46). Значения $\lambda=1$ и $\lambda=-1$ параметра соответствуют тому случаю, когда даны $\frac{dV}{dn_e}$ или $\frac{dV}{dn_i}$, т. е. внешней задаче Неймана или внутренней задаче Неймана (§ 524). Отсюда видно, что две задачи — Дирихле и Неймана — для одной и той же поверхности приводятся к двум союзным интегральным уравнениям, причем внутренней задаче Дирихле соответствует внешняя задача Неймана, и наоборот.

Напомним сперва некоторые свойства потенциала простого слоя. Пусть V_1 и V_2 — два потенциала, получаемые от простых слоев плотностей ρ_1 и ρ_2, расположенных по поверхности Σ; V_1 и V_2 представляют две гармонические функции в области D, заключенной внутри Σ,

---

* Мы будем впредь писать $\frac{dV}{dn_i}$ и $\frac{dV}{dn_e}$ вместо $\frac{dV_i}{dn_i}$ и $\frac{dV_e}{dn_e}$, но необходимо всегда помнить, что эти производные берутся по направлению внутренней нормали. Плотности мы будем обозначать через ρ, ρ_1, ρ_2, ...

для которых производные по нормали на поверхности Σ имеют конечные значения и, следовательно, удовлетворяют общему соотношению (§ 528):

$$\int\limits_{(\Sigma)}\left(V_1\frac{dV_2}{dn_i}-V_2\frac{dV_1}{dn_i}\right)d\sigma=0; \tag{47}$$

каждая из этих потенциалов удовлетворяет также условию:

$$\int\limits_{(\Sigma)}V\frac{dV}{dn_i}d\sigma+\int\limits_{(D)}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv=0. \tag{48}$$

С другой стороны, V_1 и V_2 в бесконечности обращаются в нуль, как $\frac{1}{R}$, а их частные производные имеют порядок $\frac{1}{R^2}$ (§ 526), где R есть расстояние точки (x, y, z) от постоянной точки O. Следовательно, интегралы $\int V_1\frac{dV_2}{dn_i}d\sigma$, распространенные на поверхности сферы с центром в точке O, стремятся к нулю при неограниченном возрастании радиуса этой сферы. Если к двум потенциалам V_1 и V_2 применить формулы (11) и (13) § 528, где интеграция распространяется на область, ограниченную поверхностью Σ и поверхностью сферы с центром в точке O, радиус которой неограниченно возрастает, то мы видим, что эти два потенциала удовлетворяют также соотношению:

$$\int\limits_{(\Sigma)}\left(V_1\frac{dV_2}{dn_e}-V_2\frac{dV_1}{dn_e}\right)d\sigma=0, \tag{47'}$$

и, кроме того, каждый из этих потенциалов удовлетворяет уравнению:

$$\int\limits_{(\Sigma)}V\frac{dV}{dn_e}d\sigma=\int\limits_{(D')}\left[\left(\frac{\partial V}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv, \tag{48'}$$

где D' есть бесконечная область, лежащая вне поверхности Σ.

Если производная $\frac{dV}{dn_e}$ в каждой точке поверхности Σ равна нулю, то формула (48') показывает, что V остается в области D' постоянным, ибо $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ должны быть равны нулю в каждой точке области D'. Так как V в бесконечности равно нулю, то оно равно нулю во всей этой области, а следовательно, и на поверхности Σ. А если потенциал V равен нулю на поверхности Σ, то он равен нулю и внутри, ибо он представляет в области D гармоническую функцию. Согласно соотношению (44) соответствующая плотность будет также равна нулю. Напротив того, если производная $\frac{dV}{dn_i}$ равна нулю в каждой точке поверхности Σ, то из формулы (48) вытекает, что V остается постоянным в области D, а следовательно, и на поверхности Σ; но этот потенциал не остается постоянным в D', если только он не равен тождественно нулю. Если исключить два предыдущих случая, то интеграл $\int\limits_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_i} d\sigma$ отрицателен, а интеграл $\int\limits_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_e} d\sigma$ положителен. Этот последний интеграл может быть равен нулю только в том случае, если V, а следовательно, и плотность ρ тождественно равны нулю. Из этих свойств потенциала легко получаются свойства резольвенты* уравнений (41) и (43).

1. *Все полюсы резольвенты действительны.* В самом деле, предположим, что существует комплексный полюс $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Тогда однородное уравнение, полученное из уравнения (43) заменою λ на λ_0 и функции $f(M)$ нулем будет иметь решение $\rho_1(M) + i\rho_2(M)$, и гармоническая комплексная функция $V_1 + iV_2$, где V_1 и V_2 — потенциалы простого слоя, соответствующие плотностям ρ_1 и ρ_2, будет удовлетворять соотношению:

$$\frac{dV_1}{dn_e} + i\frac{dV_2}{dn_e} = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}\left(\frac{dV_1}{dn_i} + i\frac{dV_2}{dn_i}\right).$$

Умножая обе части этого равенства на $V_1 - iV_2$ и интегрируя по поверхности Σ, мы получим, принимая во внимание формулы (47) и (47'):

$$\int\limits_{(\Sigma)} \left(V_1 \frac{dV_1}{dn_e} + V_2 \frac{dV_2}{dn_e}\right) d\sigma = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0} \int\limits_{(\Sigma)} \left(V_1 \frac{dV_1}{dn_i} + V_2 \frac{dV_2}{dn_i}\right) d\sigma.$$

Двойной интеграл в левой части, как мы это видели, может быть равен нулю только в том случае, если V_1 и V_2, а следовательно ρ_1 и ρ_2, тождественно равны нулю. Следовательно, отношение $\frac{1-\lambda_0}{2+\lambda_0}$ должно быть действительным, а для этого необходимо, чтобы было $\beta = 0$.

2. *Все эти полюсы простые.* Пусть, в самом деле, λ будет кратный полюс. В таком случае существовали бы (§ 578—580) две функции $\rho_1(M)$ и $\rho_2(M)$, отличные от нуля и удовлетворяющие соотношениям:

$$\rho_1(M) = \lambda \int\limits_{(\Sigma)} K(P, M)\, \rho_1(P)\, d\sigma_P,$$

$$\rho_1(M) + \rho_2(M) = \lambda \int\limits_{(\Sigma)} K(P, M)\, \rho_2(P)\, d\sigma_P.$$

---

* Plemelj, *Monatshefte fur Math. und Physik*, т. XV и XVIII.

Соответствующие потенциалы V_1 и V_2 удовлетворяли бы также соотношениям:

$$\frac{dV_1}{dn_e}-\frac{dV_1}{dn_i}+\lambda\left(\frac{dV_1}{dn_e}+\frac{dV_1}{dn_i}\right)=0;$$

$$\frac{dV_1}{dn_e}-\frac{dV_1}{dn_i}+\frac{dV_2}{dn_e}-\frac{dV_2}{dn_i}+\lambda\left(\frac{dV_2}{dn_e}+\frac{dV_2}{dn_i}\right)=0.$$

Умножим теперь первое из этих соотношений на V_2, второе — на $-V_1$, сложим и проинтегрируем по поверхности Σ. В силу формул (47) и (47′) получим:

$$\int\limits_{(\Sigma)} V_1\frac{dV_1}{dn_e}\,d\sigma=\int\limits_{(\Sigma)} V_1\frac{dV_1}{dn_i}\,d\sigma.$$

Но так как эти два интеграла имеют противоположные знаки, то каждый из них должен быть равен нулю, а первый интеграл может быть нулем только в том случае, если $\rho_1=0$.

3. *Нет ни одного полюса между* -1 *и* $+1$. Пусть, в самом деле, $\rho(M)$ будет фундаментальная функция, соответствующая полюсу λ, V — потенциал, полученный из слоя плотности ρ. Полагая в соотношении (46) $f(M)=0$, умножая его на V и интегрируя, получим:

$$\int\limits_{(\Sigma)} V\frac{dV}{dn_e}\,d\sigma=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\int\limits_{(\Sigma)} V\frac{dV}{dn_i}\,d\sigma.$$

Но такое соотношение невозможно, если λ заключено между -1 и $+1$, ибо в этом случае множитель $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ положителен, а между тем эти два интеграла имеют противоположные знаки. Следовательно, необходимо, чтобы оба интеграла были равны нулю, а тогда $\rho(M)=0$.

4. $\lambda=1$ *не есть особое значение*. В самом деле, если бы $\lambda=1$ было особым значением, то согласно предыдущей формуле мы имели бы потенциал V простого слоя, для которого $\int\limits_{(\Sigma)} V\frac{dV}{dn_e}\,d\sigma$ был бы равен нулю, а следовательно, и ρ тоже было бы равно нулю.

5. $\lambda=-1$ *есть полюс резольвенты*. В самом деле, если в уравнении (41) положить $\lambda=-1$, $f(M)=0$, то полученное однородное уравнение имеет решение $\rho(M)=1$ согласно свойствам интеграла Гаусса (§ 527). Союзное однородное уравнение

$$\rho(M)=\int\limits_{(\Sigma)}\rho(P)\frac{\cos\psi}{2\pi r^2}\,d\sigma_P. \qquad (49)$$

имеет отличное от нуля решение ρ, для которого соответствующий потенциал V простого слоя удовлетворяет соотношению $\frac{dV}{dn_i}=0$ в каждой точке поверхности Σ. Следовательно, этот потенциал остается в области D постоянным, и решение уравнения (49) дает плотность электрического слоя, распространенного по поверхности и не действующего на внутренние точки. *Этому полюсу* $\lambda = -1$ *соответствует только по одной независимой фундаментальной функции для каждого из уравнений* (41) *и* (43), ибо очевидно, что данная масса электричества, помещенная на изолированном проводнике, может на нем распределиться только единственным образом. Это легко доказать и аналитически. Пусть будут в самом деле ρ_1 и ρ_2 два решения уравнения (49). Им соответствуют два потенциала V_1 и V_2, каждый из которых сохраняет постоянное значение в области D. Тогда можно найти два отличных от нуля постоянных a_1 и a_2 таких, что $a_1 V_1 + a_2 V_2$ будет равно нулю в области D; но этот потенциал порождается слоем плотности $a_1\rho_1 + a_2\rho_2$; мы имеем, следовательно, $a_1\rho_1 + a_2\rho_2 = 0$, и два решения ρ_1 и ρ_2 оказываются зависимыми. Тем особым значениям, абсолютная величина которых больше единицы, может соответствовать несколько независимых фундаментальных функций. Это имеет место, например, для сферы. В этом случае ядро $K(M, P)$ равно $-\dfrac{1}{4\pi r}$, если радиус сферы принять за единицу. Это ядро симметрично, а для него мы нашли особые значения и фундаментальные функции в § 532 Особыми значениями здесь служат отрицательные нечетные числа $-(2m+1)$, а каждому такому значению $-(2m+1)$ соответствует $2m+1$ различных функций Лапласа $Y_m(\theta, \psi)$ *.

Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана, которые соответствуют неособому значению $\lambda = 1$, имеют всегда единственное решение, которое получается методом Фредгольма. Наоборот, оба уравнения (41) и (43), если в них положить $\lambda = -1$, имеют решения только в том случае, если $f(M)$ удовлетворяет добавочному условию, которое получится, если мы напишем, что эта функция ортогональна к фундаментальной функции союзного однородного уравнения, соответствующей значению $\lambda = -1$. Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Неймана. Для того чтобы существовал потенциал простого слоя, удовлетворяющий условию $\dfrac{dV}{dn_i} = f(M)$ во всех точках поверхности Σ, функция $f(M)$ должна быть ортогональна к соответствующей фундаментальной функции $\rho = 1$ уравнения (41), т. е. она должна удовлетворять соотношению:

$$\int\limits_{(\Sigma)} f(M)\, d\sigma_M = 0. \tag{50}$$

Это условие легко истолковать, ибо оно является простым следствием общего соотношения (12) § 528, которое применимо ко всякой гармонической функции в области D, производные которой остаются конечными на поверхности Σ. Если условие (50) выполнено, то задача

* В общем случае решения уравнений (41) и (43) выражаются рядами фундаментальных функций, как в случае симметрического ядра (Poincaré, *Acta mathematica*, т. XX, 1897).

Неймана допускает бесчисленное множество решений, которые отличаются друг от друга только на произвольное постоянное. Все эти решения можно также получить решением однородного уравнения Фредгольма.

Точно так же, для того чтобы уравнение (41) при $\lambda=-1$ имело решение, необходимо, чтобы данная функция $f(M)$ была ортогональна к функции $\rho_1(M)$, которая представляет плотность простого слоя на поверхности Σ, не действующего на внутренние точки. Но мы знаем, однако, a priori, что внешняя задача Дирихле допускает решение, ибо с помощью преобразования лорда Кельвина ее можно свести к внутренней задаче. Это кажущееся противоречие легко объяснить, если заметить, что гармоническая функция, обращающаяся в бесконечности в нуль, не всегда может быть представлена потенциалом двойного слоя, ибо этот потенциал обращается в бесконечности в нуль, как $\frac{1}{R^2}$. Когда условие возможности осуществлено, плотность $\rho(M)$ определяется только с точностью до постоянного, ибо если увеличить $\rho(M)$ на произвольное постоянное, то потенциал двойного слоя во внешней точке не изменится.

610. Различные замечания. *Метод Неймана.* Келлог (Kellog) указал на то, что метод Неймана для решения задачи Дирихле в случае выпуклой поверхности легко приводится к общей теории Фредгольма. Интегральное уравнение, которое при этом методе приходится решать (§ 533), имеет вид:

$$\rho(M)=\lambda'\int\limits_{(\Sigma)}[\rho(M)-\rho(P)]\frac{\cos\varphi}{4\pi r^2}d\sigma_P+\frac{1}{4\pi}U(M),$$

затем разлагают $\rho(M)$ по степеням λ и в полученном ряду полагают $\lambda'=1$. Чтобы оправдать этот процесс, достаточно показать, что искомое решение, рассматриваемое как функция от λ', голоморфно внутри области, содержащей круг $|\lambda'|\leqslant 1$. В самом деле, предыдущее уравнение можно переписать в виде:

$$\rho(M)=\frac{\lambda'}{2}\int\limits_{(\Sigma)}K(M,P)\rho(P)d\sigma_P+\frac{\lambda'}{2}\rho(M)+\frac{1}{4\pi}U(M),$$

или

$$\rho(M)=\frac{\lambda'}{2-\lambda'}\int\limits_{(\Sigma)}K(M,P)\rho(P)\,d\sigma_P+\frac{U(M)}{2\pi(2-\lambda')}.$$

Когда λ' описывает круг Γ' радиуса 1 с центром в точке $\lambda'=0$, то параметр $\lambda=\frac{\lambda'}{2-\lambda'}$ описывает круг Γ, имеющий своим диаметром часть действительной оси, ограниченную двумя точками с абсциссами $\lambda=1$ и $\lambda=-\frac{1}{3}$. Согласно свойствам резольвенты решение $\rho(M)$, рассматриваемое как функция от λ, голоморфно в области, содержащей круг Γ, следовательно, рассматриваемое как функция от λ' это решение голоморфно также в области, содержащей круг Γ', и поэтому его разложение по степеням λ' сходится при $\lambda'=1$. Таким образом метод Неймана по существу сводится к гомографическому преобразованию над параметром, который входит в уравнение (41); при этом ясно, что можно себе представить бесчисленное множество других, ведущих к той же цели.

Метод Робэна (Roben). Полюс $\lambda = -1$ резольвенты есть полюс наименьшего модуля, и этому полюсу соответствует единственное решение уравнения (49). Чтобы получить это решение, можно, следовательно, применить общий метод последовательных приближений, изложенный в § 582. Пусть $u_0(M)$ есть некоторая непрерывная функция на поверхности Σ, такая, что интеграл $\int u_0(M)\,d\sigma_M$ не равен нулю, например, пусть это положительная функция. Если составить бесконечную последовательность функций $u_0(M)$, $u_1(M), \ldots$, определенную рекуррентным законом:

$$u_n(M) = \int\limits_{(\Sigma)} u_{n-1}(P) \frac{\cos\psi}{2\pi r^2}\,d\sigma_P,$$

то мы увидим, что при неограниченном возрастании n функция $u_n(M)$ имеет своим пределом решение уравнения (49). Это есть как раз метод, примененный Робэном для решения задачи о распределении электричества на проводнике, ограниченном выпуклой поверхностью.

Исследование внешней задачи Дирихле. Какова бы ни была данная непрерывная функция $f(M)$ на поверхности Σ, всякая гармоническая функция, обращающаяся в бесконечности в нуль и принимающая данные значения на поверхности Σ, может быть выражена как сумма потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя. Положим, что электрическая положительная масса, равная *единице*, находится в равновесии на поверхности Σ, и пусть будет $\rho_1(M)$ плотность соответствующего слоя. Мы имеем:

$$\int\limits_{(\Sigma)} \rho_1(M)\,d\sigma_M = 1,$$

и потенциал V_1 этого слоя имеет постоянное отличное от нуля значение $V_1(M$ в каждой точке поверхности Σ. Кроме того, V_1 в бесконечности равно нулю, и) его главная часть равна $\frac{1}{R}$. Пусть C будет такое постоянное, что

$$\int\limits_{(\Sigma)} \rho_1(M)\,[f(M) - CV_1(M)]\,d\sigma_M = 0.$$

Тогда существует такой потенциал W двойного слоя, что в каждой точке M поверхности Σ имеет место соотношение $W_e(M) = f(M) - CV_1(M)$, и гармоническая функция

$$W(x, y, z) + CV_1(x, y, z)$$

дает решение внешней задачи Дирихле. Главная часть в бесконечности равна $\frac{C}{R}$; следовательно, для того чтобы эта функция могла быть выражена потенциалом двойного слоя, достаточно, чтобы $C = 0$ или чтобы она в бесконечности обращалась в нуль, как $\frac{1}{R^2}$.

611. Плоские задачи. Приведенное исследование задач Дирихле и Неймана в пространстве может быть без существенных изменений повторено для тех же задач на плоскости, если заменить поверхность Σ замкнутою кривою C без угловых точек, положить ядро $K(M_1P) = -\frac{\cos\varphi}{\pi r}$, где r — расстояние двух точек M и P кривой C, φ — угол между PM и внутреннею нормалью в точке P. Ядром союзного уравнения также будет $\frac{-\cos\psi}{\pi r}$, где ψ есть угол между нормалью в точке M и направлением MP. Доказательства, которые были изложены в § 609, основаны целиком на свойствах потенциалов простого слоя, выраженных формулами (47), (48), (47') и (48'). Два первые непосредственно распространяются на потенциалы в плоскости, если заменить Σ на C, а область D пространства —

частью плоскости, лежащею внутри кривой C. Но это не имеет места в отношении формул (47') и (48'). В самом деле, для простого слоя потенциал $V = \int\limits_C \rho \log \frac{1}{r}\, ds$ обращается в бесконечность как $Q \log \frac{1}{R}$ во всякой точке окружности Γ, имеющей очень большой радиус R и центр в определенной точке O плоскости, причем $Q = \int\limits_C \rho\, ds$; разность $V - Q \log \frac{1}{R}$ имеет порядок $\frac{1}{R}$. Производная $\frac{dV}{dn}$, взятая по внутренней нормали окружности Γ, имеет вид $-\frac{Q}{R} + \varepsilon$, где ε — член порядка $\frac{1}{R^2}$. Пусть V_1 и V_2 будут два потенциала, производимых простыми слоями плотностей ρ_1 и ρ_2, расположенными на кривой C. Легко видеть, что интеграл $\int\limits_\Gamma \left(V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right) ds$, взятый вдоль Γ, стремится к нулю при неограниченном возрастании R, так что формула, аналогичная формуле (47), применима также к двум логарифмическим потенциалам простого слоя. Но интеграл $\int\limits_\Gamma V \frac{dV}{dn}\, ds$ при неограниченном возрастании R стремится к нулю только если $Q = \int\limits_{(C)} \rho\, ds$. Только в этом случае можно применить к логарифмическому потенциалу V формулу, аналогичную (48'), где D' будет означать неограниченную область, лежащую вне C. После этих замечаний ясно, что для того чтобы результаты, установленные в пространстве, имели место и в случае плоскости, достаточно показать, что соотношение $\int\limits_{(C)} \rho\, ds = 0$ выполняется для всякого решения однородного уравнения:

$$\rho(M) = \lambda \int\limits_{(C)} \frac{\cos\varphi}{-2\pi r} \rho(P)\, ds_P. \tag{51}$$

Это наверно имеет место, если особое значение λ отлично от -1, ибо фундаментальная функция $\rho(M)$ должна быть ортогональна к фундаментальному решению $\rho = 1$ однородного союзного уравнения, соответствующему значению $\lambda = -1$. Все результаты, которые были получены из формул (47), (48), (47') и (48') для случая пространства, оказываются, таким образом, справедливыми и для задач на плоскости.

Тем не менее необходимо специальное исследование в случае особого значения $\lambda = -1$, к которому предыдущее рассуждение неприменимо. Этот полюс не может быть кратным, ибо в таком случае существовало бы два потенциала V_1, V_2, которые удовлетворяли бы соотношениям:

$$\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_1}{dn_i} = \frac{dV_1}{dn_e} + \frac{dV_1}{dn_i},$$

$$\frac{dV_2}{dn_e} - \frac{dV_2}{dn_i} = \frac{dV_2}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} - \frac{dV_1}{dn_e} - \frac{dV_1}{dn_i}.$$

Из второго мы получаем:

$$\int\limits_C \frac{dV_1}{dn_e}\, ds = 0;$$

а так как и

$$\int\limits_C \frac{dV_1}{dn_i}\,ds = 0,$$

то получаем, что также

$$\int\limits_C \rho\,ds = 0,$$

где ρ есть соответствующая плотность; рассуждение заканчивается так же, как и выше.

Значению $\lambda = -1$ соответствует только одна независимая фундаментальная функция. Если бы, в самом деле, ρ_1 и ρ_2 были два решения уравнения (51), то соответствующие потенциалы V_1 и V_2 были бы в области D постоянными. Возьмем два отличных от нуля постоянных α_1 и α_2 таких, что

$$\int\limits_{(C)} (\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2)\,ds = 0.$$

Потенциал $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$ равен нулю в бесконечности и сохраняет постоянное значение в области D. Так как он сохраняет постоянное значение на кривой C и является гармонической функцией во внешней области D', то он сохраняет в D' постоянное значение, а следовательно, во всей плоскости равен нулю. Имеем, таким образом, также: $\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 = 0$.

Следовательно, выводы относительно интегральных уравнений остаются те же, что и в случае пространства. Следует только сделать несколько замечаний, касающихся истолкования. Внутренняя задача Дирихле имеет единственное решение, которое может быть представлено потенциалом двойного слоя. Напротив того, решением внешней задачи Дирихле может быть потенциал двойного слоя только в том случае, если выполняется еще добавочное условие; это понятно, ибо этот потенциал в бесконечности обращается в нуль. Но легко доказать, что всякая функция, гармоническая вне кривой C, равна сумме некоторого постоянного и потенциала двойного слоя. Для внутренней задачи Неймана метод Фредгольма дает решение только в том случае, если данная функция $f(M)$, в которую обращается на контуре $\frac{dV}{dn_i}$, удовлетворяет соотношению $\int\limits_{(C)} f(M)\,ds = 0$, — условие, которое лежит в существе самой задачи (§ 506). Казалось бы, наоборот, что внешняя задача Неймана имеет решение всегда, какова бы ни была функция $f(M)$, которая на контуре равна $\frac{dV}{dn_e}$. Но так как это решение представлено потенциалом простого слоя, то оно в бесконечности вообще не является правильным.

Пусть будет $\rho(M)$ решение уравнения

$$\rho(M) = -\int\limits_C \rho(P)\frac{\cos\psi}{\pi\rho}\,ds_P + f(M).$$

Умножая обе части на ds_M и интегрируя вдоль C, получим:

$$\int\limits_C \rho(M)\,ds_M = -\int\limits_C\int\limits_C \rho(P)\frac{\cos\psi}{\pi r}\,ds_P\,ds_M + \int\limits_C f(M)\,ds_M.$$

Это соотношение можно написать еще, если в двойном интеграле произвести сначала интеграцию по M, в следующем виде:

$$2\int\limits_C \rho(M)\,ds_M = \int\limits_C f(M)\,ds_M.$$

Таким образом, для того чтобы потенциал V, полученный от слоя плотности $\rho(M)$, был правильным в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\int\limits_C f(M)\,d\sigma_M = 0.$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы внешняя задача Неймана имела решение.

612. Задача распределения тепла. К задачам Дирихле и Неймана можно присоединить еще одну задачу, которая носит название *задачи распределения тепла*, где ищется температура тела, если температура уравновешивается лучеиспусканием. Температура U каждой точки тела представляет гармоническую функцию координат этой точки, которая, кроме того, удовлетворяет еще следующему условию. В каждой точке M граничной поверхности Σ имеет место соотношение:

$$\frac{dU}{dn_i} - h(M)\,U = f(M), \tag{52}$$

где h и f — две непрерывные функции, заданные на поверхности Σ. Если мы хотим эту гармоническую функцию представить как потенциал простого слоя, расположенного на поверхности Σ, то плотность $\rho(M)$ этого слоя должна удовлетворять интегральному уравнению:

$$\rho(M) = \lambda \int\limits_{(\Sigma)} \rho(P)\left[\frac{\cos\psi}{2\pi r^2} - \frac{h(M)}{2\pi r}\right] d\sigma_P - \frac{f(M)}{2\pi}, \tag{53}$$

где λ надо положить равным единице. Оставляя в стороне общее изучение этого уравнения Фредгольма, мы покажем только, что в случае, если $h(M)$ положительно, значение $\lambda = 1$ не является особым значением. Это условие выполняется в случае задачи о лучеиспускании, и мы будем его в дальнейшем предполагать выполненным. В самом деле, пусть однородное уравнение, полученное при $\lambda = 1$, $f(M) = 0$, имеет решение $\rho(M)$, отличное от нуля. Соответствующий потенциал V простого слоя удовлетворяет соотношению $\frac{dV}{dn_i} = h(M)\,V$ в каждой точке поверхности Σ, и следовательно, мы имеем:

$$\int\limits_{(\Sigma)} V\frac{dV}{dn_i}\,d\sigma = \int\limits_{(\Sigma)} hV^2\,d\sigma.$$

Но первый интеграл не может быть положительным. Равенство это, следовательно, может иметь место, только если V равно нулю в каждой точке поверхности Σ, а следовательно, тождественно равно нулю. Имеем, таким образом, $\rho = 0$.

613. Функции, аналогичные функции Грина. Мы здесь ограничимся только внутренними задачами* и проведем рассуждения для пространства трех измерений с единственной граничной поверхностью.

* О внешних задачах см. Heywood Fréchet, гл. III.

Распространение на плоские задачи здесь не представляет никаких трудностей. Задача Дирихле и задача распространения тепла имеют всегда единственное решение, не требующее никаких добавочных условий, между тем как задача Неймана имеет решение только в том случае, если данные значения производной $\frac{dU}{dn_i}$ на поверхности Σ удовлетворяют определенным условиям. Мы уже указывали бегло (§ 524 и 434), как решение этих различных задач приводится к определению некоторой гармонической функции частного вида, удовлетворяющей на поверхности Σ определенным гармоническим условиям. Эти функции, которые играют ту же роль, что и функция Грина в задаче Дирихле, получаются путем решения некоторых специальных интегральных уравнений. Пусть вообще $U(M)$ представляет функцию, правильную в области D, ограниченной замкнутою поверхностью Σ, удовлетворяющую в этой области уравнению

$$\Delta U = F(x, y, z) \tag{54}$$

и имеющей на поверхности Σ конечное значение, как и ее производная по нормали. Пусть, с другой стороны, $G(M, P)$ будет функция координат точки P, гармоническая в области D, кроме точки M, в которой она обращается в бесконечность как $\frac{1}{r}$. Мы предположим, кроме того, что и эта функция, а также и ее нормальная производная $\frac{dG}{dn_i}$ имеют конечные значения на поверхности Σ. При этих условиях мы доказали (§ 534), что значение функции U в точке M выражается формулой:

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\left[U\frac{dG}{dn} - G\frac{dU}{dn}\right]d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)} GF(x, y, z)\,dv. \tag{55}$$

Мы предположим сначала, что $F(x, y, z) = 0$. Мы получим функцию Грина в узком смысле, если выберем $G(M, P)$ так, чтобы G равнялось нулю в любой точке P поверхности Σ; она, очевидно, получится, если мы к $\frac{1}{r} = \frac{1}{MP}$ прибавим гармоническую в области D функцию, которая на поверхности Σ принимает те же значения, что $-\frac{1}{r}$.

В задаче распространения тепла функция $G(M, P)$ получится, если к $\frac{1}{r}$ прибавить функцию G_1, гармоническую в области D и удовлетворяющую в каждой точке P поверхности Σ условию:

$$\frac{dG_1}{dn} - h(P)\,G_1(M, P) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - h(P)\frac{1}{r} = 0;$$

эта задача, как мы видели, имеет единственное решение. Если искомая гармоническая функция U в каждой точке поверхности Σ удовлетворяет условию

$$\frac{dU}{dn} - h(P)\,U(P) = f(P),$$

то, выбрав функцию $G(M, P)$, как указано выше, мы легко убедимся, что соотношение (55) принимает вид:

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} G(M, P) f(P)\, d\sigma_P. \tag{56}$$

Эта функция $G(M, P)$ есть также симметрическая функция координат двух точек M и P. В самом деле, пусть D' будет область, ограниченная поверхностью Σ и двумя сферами очень малых радиусов ρ и ρ', имеющими центры в двух произвольных точках M и M' внутри D. Две функции $G(M, P)$ и $G(M', P)$ суть две гармонические функции координат точки P в этой области. К ним можно, следовательно, применить общую формулу (11) § 528. Следовательно, что разность

$$G(M, P)\frac{dG(M', P)}{dn} - G(M', P)\frac{dG(M, P)}{dn}$$

равна нулю в каждой точке поверхности Σ; когда радиусы ρ и ρ' стремятся к нулю, мы в пределе получаем:

$$G(M, M') = G(M', M).$$

В случае внутренней задачи Неймана приходится прибегнуть к несколько иному приему. Пусть M будет любая точка внутри области D, r — расстояние MP. Известно, что

$$\int\limits_{(\Sigma)} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, d\sigma = 4\pi$$

(§ 527).

Пусть, с другой стороны, $\psi(P)$ будет любая непрерывная функция на поверхности Σ, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_{(\Sigma)} \psi(P)\, d\sigma_P = 4\pi.$$

Определим гармоническую функцию в области D так, чтобы ее производная по нормали в каждой точке поверхности Σ принимала значение

$$\psi(P) - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn};$$

это возможно, так как условие (50) выполнено. Прибавляя к этой гармонической функции $\frac{1}{r}$, мы получили функцию $G(M, P)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Она является гармоническою во всей области D, кроме точки M, в которой она обращается в бесконечность, как $\frac{1}{r}$.

2. В каждой точке поверхности Σ мы имеем:

$$\frac{dG}{dn_i} = \psi(P)$$

Эта функция $G(M, P)$ не определена однозначно, так как зависит еще от непрерывной функции $\psi(P)$, удовлетворяющей единственному условию:

$$\int_{(\Sigma)} \psi(P)\, d\sigma_P = 4\pi.$$

Кроме того, к ней можно прибавить произвольное постоянное, не зависящее от P, но которое может быть произвольною функциею от M. Когда мы меняем $\psi(P)$, то к функции $G(M, P)$ прибавляется гармоническая функция координат точки P.

Каждая из этих функций может играть роль функции Грина в решении задачи Неймана. В самом деле, пусть U будет гармоническая функция в области D, нормальная производная которой $\frac{dU}{dn}$ равна $f(P)$ в каждой точке P поверхности Σ. Если функция $G(M, P)$ определена, как это указано выше, то общая формула (55) дает:

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P) f(P)\, d\sigma_P + \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} \psi(P)\, U(P)\, d\sigma_P.$$

Правая часть содержит неизвестный член, который зависит от значений U на поверхности Σ, но этот член не зависит от M, а мы знаем, что функция $U(M)$ определена только с точностью до постоянного. Общее решение задачи Неймана, следовательно, имеет вид:

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P) f(P)\, d\sigma_P + C \tag{57}$$

где C — произвольное постоянное *. Заметим, что с изменением $\psi(P)$ функция $U(M)$ изменяется на постоянную.

* Если в задаче Дирихле точно так же в качестве функции $G(M, P)$ взять функцию гармоническую всюду в области D кроме точки M, в которой она становится бесконечною, как $\frac{1}{r}$, и которая принимает на поверхности Σ любую непрерывную последовательность значений, *не зависящую от* M, то формула (37) § 534 дает для $U(M)$ значение, которое будет отличаться от искомой функции только на постоянное.

Мы получим *функцию Франца Неймана*, если в качестве функции $\psi(P)$ возьмем постоянное значение, равное $\frac{4\pi}{S}$, где S есть площадь поверхности Σ. Так как функция $G(M, P)$ определена только с точностью до постоянного относительно точки P, то к ней можно прибавить постоянное $C(M)$, зависящее только от координат точки M и которое выбрано так, что

$$\int_{(\Sigma)} G(M, P)\, d\sigma_P = 0.$$

Полученная таким образом функция симметрична относительно M и P. Действительно, достаточно применить здесь те же рассуждения, какие были приведены в задаче о распространении тепла к двум функциям Ф. Неймана $G(M, P)$ и $G(M', P)$, соответствующим двум произвольным точкам области D, если принять еще во внимание, что согласно самому способу определения этих функций мы имеем также:

$$\int_{(\Sigma)} G(M, P)\frac{dG(M', P)}{dn}\, d\sigma_P - \int_{(\Sigma)} G(M', P)\frac{dG(M, P)}{dn}\, d\sigma_P = 0,$$

и следовательно $G(M, M') = G(M', M)$. Прибавляя к функции $G(M, P)$ сумму $U(M) + U(P)$, где U есть гармоническая функция в области D, мы получим бесчисленное множество функций, симметричных относительно M и P, которые могут заменить функцию Франца Неймана. Клейн пользовался для той же цели функцией, которая обращается в области D в бесконечность в двух точках*.

Примечание. В задаче Неймана и в задаче распространения тепла искомая функция U и вспомогательная функция $G(M, P)$ представляются потенциалами простого слоя. Производные по нормали $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dG}{dn}$ имеют, следовательно, на поверхности Σ конечные значения, и общая формула Грина применима в области D. Но это не относится к задаче Дирихле, где U и G суть потенциалы двойного слоя. Но предыдущие рассуждения существенно предполагают существование нормальных производных и на поверхности Σ. Однако можно притти к формуле (37) § 534 при помощи метода, который не требует этого предположения. Действительно, из самого метода Фредгольма вытекает, что решение задачи Дирихле дается выражением вида:

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} U(P)\, R(M, P)\, d\sigma_P, \tag{58}$$

где $U(P)$ — данное значение искомой гармонической функции в точке P поверхности Σ, а $R(M, P)$ — функция, не зависящая от $U(P)$ и играющая роль резольвенты. Если в частности положить $U(P) = 1$ на поверхности Σ, то будем иметь также $U(M) = 1$, и следовательно, функция $R(M, P)$ удовлетворяет условию:

$$\int_{(\Sigma)} R(M, P)\, d\sigma_P = 4\pi.$$

---

* Über die partiellen Differentialgleichungen $\Delta u + K^2 u = 0$ u. deren Auftreten in der mathematischen Physik (Лейпциг 1891). Для изучения задачи Неймана в случае сферы см. J. Hadamard, Leçon sur la propagation des ondes, гл. I.

Можно, следовательно, составить функцию $g(M, P)$, гармоническую в области D и такую, что в каждой точке поверхности Σ имеет место соотношение:

$$\frac{dg(M,P)}{dn} = R(M,P) - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn},$$

где r есть расстояние переменной точки P от точки M внутри D, и формула (58) может быть записана в виде:

$$(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} U(P)\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} + \frac{dg(M,P)}{dn}\right] d\sigma_P. \tag{59}$$

Эта формула, в частности, применима к любой гармонической функции U, для которой $\frac{dU}{dn}$ имеет на поверхности Σ конечное значение. Преобразовывая предыдущую формулу с помощью общих соотношений (11) и (14) § 528, мы заключаем, что условие

$$\int\limits_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn}\left\{\frac{1}{r} + g(M,P)\right\} d\sigma_P = 0$$

должно быть следствием соотношения

$$\int\limits_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn} d\sigma_P = 0,$$

откуда следует, что функция $\frac{1}{r} + g(M,P)$ равна на поверхности Σ постоянному *; это постоянное можно предположить равным нулю, ибо функция $g(M,P)$ определена только с точностью до постоянного. Таким образом функция $\frac{1}{r} + g(M,P)$ удовлетворяет условиям, которые определяют функцию Грина. Отсюда видно, что эта функция очень естественно связана с самым методом Фредгольма.

---

* Вообще, если условие

$$\int Vf\,d\sigma = 0$$

является следствием соотношения

$$\int f\,d\sigma = 0,$$

то же имеет место и для

$$\int (V - C) f\,d\sigma = 0,$$

каково бы ни было постоянное C. Если выбрать C так, чтобы было:

$$\int (V - C)\,d\sigma = 0,$$

то можно положить $f = V - C$, и следовательно, необходимо

$$\int (V - C)^2 d\sigma = 0 \quad \text{и} \quad V = C.$$

614. Задачи, связанные с уравнением $\Delta U = F(x, y, z)$. Рассмотрим теперь случай, когда правая часть $F(x, y, z)$ уравнения (54) отлична от нуля. Мы предположим, что эта функция непрерывна и допускает непрерывные производные первого порядка в области D. Выше (§ 535 и 536) мы видели, как с помощью теории потенциала можно получить интеграл $U_1(x, y, z)$, который непрерывен вместе со своими производными первого порядка во всем пространстве.

Полагая $U = U_1 + V$, мы видим, что новая неизвестная функция $V(x, y, z)$ есть гармоническая функция в области D, которая на поверхности Σ удовлетворяет одному из трех условий, которые мы только что рассмотрели.

Если на поверхности Σ задать $U(P) = f(P)$ или же $\frac{dU}{dn} - h(P)U(P)$, то для возможности решения задачи не требуется никаких добавочных условий. Она в этом случае всегда имеет единственное решение, которое можно получить из общей формулы (55), если заменить $G(M, P)$ соответствующей функцией Грина.

В первом случае функция $U(M)$ дается формулою:

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} f(P)\frac{dG}{dn}\,d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)\,F(P)\,dv_P; \tag{60}$$

в задаче распространения тепла мы имеем:

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} G(M, P) f(P)\,d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)\,F(P)\,dv_P. \tag{61}$$

Остается внутренняя задача Неймана. Для того чтобы уравнение (54) имело интеграл, правильный в области D и удовлетворяющий на поверхности Σ условию $\frac{dU}{dn} = f(P)$, необходимо согласно общей формуле Грина (§ 528), в которой положено $\varphi = 1$, $\psi = U$, чтобы

$$\int\limits_{(\Sigma)} f(P)\,d\sigma_P + \int\limits_{(D)} F(P)\,dv_P = 0. \tag{62}$$

Это условие также и достаточно, ибо, если положить $U = U_1 + V$, то новая неизвестная функция V должна быть гармоническою в области D и удовлетворять в каждой точке поверхности Σ условию

$$\frac{dV}{dn} = f(P) - \frac{dU_1}{dn}.$$

Эта новая задача имеет бесчисленное множество решений, зависящих от произвольного постоянного, так как согласно предыдущему соотношению

$$\int\limits_{(\Sigma)} f(P)\,d\sigma_P - \int\limits_{(\Sigma)} \frac{dU_1}{dn}\,d\sigma_P = 0.$$

Все эти решения могут быть также получены непосредственно из общего соотношения (55) и содержатся в формуле:

$$U(M)=C-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} G(M, P)f(P)\,d\sigma_P-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)f(P)\,dv_P, \quad (63)$$

где C есть произвольное постоянное, $G(M, P)$ — функция Франца Неймана или любая другая функция, которая может играть ту же роль.

Все эти задачи совершенно так же решаются и на плоскости, если только внести несколько очень легких изменений в формулы.

615. Задачи, связанные с уравнением $\Delta U=\lambda R U+R_1$. Решение тех же задач с граничными условиями для уравнения

$$\Delta U=\lambda R(x, y, z)U+R_1(x, y, z) \quad (64)$$

приводит к новым интегральным уравнениям, ядра которых выражаются с помощью функции Грина и функций, играющих ту же роль. Мы ограничимся пока только внутренними задачами, и наши рассуждения будут предполагать пространство трех измерений; переход к плоскости не представляет никаких трудностей. Предполагается, что области, о которых идет речь, ограничены замкнутыми поверхностями Σ, такими, что существует функция Грина или функция $G(M, P)$, играющая в соответствующей задаче ту же роль, но нет необходимости предполагать, что поверхность имеет единственную касательную плоскость в каждой точке. Наконец, мы предположим, что функции R и R_1 непрерывны и допускают непрерывные частные производные в рассматриваемой области.

1. *Задача Дирихле.* Пусть требуется найти интеграл уравнения (64) правильный в области D, внутренней и некоторой замкнутой поверхности Σ, и принимающий на границе поверхности Σ данные значения, образующие непрерывную последовательность $f(M)$. Мы легко приведем общий случай к случаю, когда $f(M)=0$. Пусть, в самом деле, $U_1(x, y, z)$ будет функция, правильная в области (D) и принимающая данные значения на границе, например гармоническая функция. Если положить $U=U_1+V$, то новая неизвестная функция V должна удовлетворять уравнению того же вида и обращаться в нуль на границе поверхности Σ.

Всякий интеграл уравнения (64), правильный в области D и обращающийся в нуль на границе, должен удовлетворять (§ 534) интегральному уравнению

$$U(M)=\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)R(P)U(P)\,dv_P-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)R_1(P)\,dv_P, \quad (65)$$

ядро которого равно $-\frac{1}{4\pi}G(M, P)R(P)$, где $G(M, P)$ есть функция Грина для внутренней задачи Дирихле. Это ядро обращается в бесконечность, как $\frac{1}{r}$, когда точка P неограниченно приближается к точке M, но с помощью некоторого конечного числа итераций (§ 563) из него можно получить ограниченное ядро, и теория Фредгольма применима к этому уравнению.

Если λ не есть особое значение ядра, то уравнение (65) имеет решение; непрерывное в области D и обращающееся в нуль на поверхности Σ. Отсюда еще непосредственно не вытекает, что эта функция $U(M)$ представляет интеграл уравнения (64). В самом деле, для того чтобы можно было из уравнения (65) получить уравнение (64) необходимо быть уверенным в том, что его правая часть $\lambda RU + R_1$ такова, что к ней можно применить формулу Пуассона (§ 521 и 536). Поэтому достаточно показать, что решение $U(M)$ интегрального уравнения (65) имеет непрерывные производные первого порядка. Но так как функция $U(P)$ непрерывна, то из свойств функции Грина вытекает, что правая часть формулы (65) представляет сумму объемного потенциала и интеграла вида:

$$\int\limits_{(D)} G_1(M, P)\, dv_P,$$

где функция $G_1(M, P)$ имеет непрерывные производные по координатам точки M. Следовательно, вся правая часть имеет непрерывные производные первого порядка, и решение $U(M)$ уравнения (65) является интегралом уравнения (64).

При положительном R ядро $-\frac{1}{4\pi} G(M, P) R(P)$ есть ядро Шмидта. Но очевидно, что симметрическое ядро $G(M, P)$ имеет бечисленное множество характеристических значений, ибо если бы таких значений было конечное число, то ядро было бы вида $\sum_i \varphi_i(M) \varphi_i(P)$, где функции φ_i непрерывны (§ 587). Следовательно, и ядро $-\frac{1}{4\pi} G(M, P) R(P)$ имеет бесчисленное множество характеристических значений. *Все эти характеристические значения отрицательны.* В самом деле, характеристическому значению λ_i соответствует фундаментальная функция $U_i(x, y, z,)$ которая представляет интеграл уравнения $\Delta U = \lambda_i RU$, правильный в области D и равный нулю на поверхности Σ. Но такого интеграла, который был бы отличен от нуля и удовлетворял бы этим двум условиям, существовать не может, если произведение $\lambda_i R$ положительно (см. § 520)*.

2. *Задача о распространении тепла.* Пусть требуется найти интеграл уравнения (64), правильный в области D и такой, чтобы в каждой точке поверхности Σ он удовлетворял условию:

$$\frac{dU}{dn} - h(M) U = f(M),$$

---

* Если $R(x, y, z)$ не имеет постоянного знака в области D, то ядро $G(M, P) R(P)$ — полярное ядро, которое также имеет бесчисленное множество характеристических значений (§ 595); см. уже приведенную диссертацию Sanielevici.

где h и f — данные функции на поверхности Σ. Этот общий случай можно опять привести к частному случаю, когда $f(M) = 0$, если положить $U = U_1 + V$, где U_1 — некоторая правильная в области D функция, удовлетворяющая этим граничным условиям. Определение функции U приводит опять к решению интегрального уравнения (65), где $G(M, P)$ означает теперь симметрическую функцию от M и P, которая в этой новой задаче играет роль функции Грина. Можно, как и раньше, показать, что всякое решение уравнения (65) удовлетворяет уравнению (64) и граничным условиям.

Каждому характеристическому значению λ_i ядра $-\frac{1}{4\pi} G(M, P) R(P)$ соответствует решение U_i однородного интегрального уравнения

$$U(M) = \frac{\lambda_i}{4\pi} \int_{(D)} G(M, P) R(P) U(P) dv_P, \tag{66}$$

т. е. отличный от нуля интеграл уравнения

$$\Delta U_i = \lambda_i R U_i,$$

правильный в области D и в каждой точке поверхности Σ удовлетворяющий условию:

$$\frac{dU_i}{dn} - hU_i = 0.$$

Если R положительно, то мы снова имеем ядро Шмидта и, следовательно, бесчисленное множество характеристических значений. *Если h положительно, то все значения λ_i отрицательны.* В самом деле, если в общей формуле (10) Грина (§ 528) мы положим $\psi = U_i$, $\varphi = 1$, то, принимая во внимание условия, которым удовлетворяет функция U_i, мы получим:

$$\int_{(D)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2 \right] dv + \int_{(D)} \lambda_i R U_i^2 dv + \int_{(\Sigma)} h\, U_i^2\, d\sigma = 0.$$

Такое тождество явно невозможно, если λ_i, R и h положительны, если только U_i отлично от нуля.

3. *Задача Неймана.* Поставим себе задачу найти интеграл уравнения (64), правильный в области D и такой, чтобы его нормальная производная $\frac{dU}{dn}$ в каждой точке на границе поверхности Σ была равна нулю.

Этот интеграл, с одной стороны, должен удовлетворять условию разрешимости (§ 614):

$$\int_{(D)} \left[\lambda R(P) U(P) + R_1(P) \right] dv_P = 0, \tag{67}$$

с другой стороны, он удовлетворяет также интегральному уравнению:

$$U(M) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)\,[\lambda R(P)\,U(P) + R_1(P)]\,dv_P + C, \tag{68}$$

где C — постоянное, а функция $G(M, P)$ играет роль функции Грина для внутренней задачи Неймана. Так как к ней можно прибавить произвольную функцию от P, то мы предположим, что функция $G(M, P)$ выбрана так, что

$$\int\limits_{(D)} G(M, P)\,R(M)\,dv_M = 0. \tag{69}$$

Такое предположение всегда возможно, если интеграл $\int\limits_{(D)} R(M)\,dv_M$ отличен от нуля, что в частности имеет место, когда R положительно.

Когда функция $G(M, P)$ так выбрана, то система уравнений (67) и (68) аналогична системе, составленной из уравнений (34) и (35) в § 607. Подставляя в условие (67), в котором P заменено на M, вместо $U(M)$ его значение, полученное из уравнения (68), и принимая во внимание соотношение (69), мы получим значение постоянного C, и для определения U остается интегральное уравнение:

$$U(M) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{(D)} G(M, P)\,[\lambda R(P)U(P) + R_1(P)]\,dv_P - \frac{\int\limits_{(D)} R_1(P)\,dv_P}{\lambda\int\limits_{(D)} R(P)\,dv_P}. \tag{70}$$

Чтобы получить интеграл уравнения (64), удовлетворяющий граничному условию $\frac{dU}{dn} = f(M)$, мы начнем с определения функции U_1, правильной в области D и удовлетворяющей этому условию, затем мы положим $U = U_1 + V$ и тогда придем к предыдущей задаче. Но, если f — произвольная функция, то в качестве U_1 нельзя взять функцию, гармоническую в области D. Чтобы получить решение, можно поступить следующим образом. Рассмотрим объемный потенциал:

$$u_1(M) - \frac{H}{4\pi\Omega}\int\limits_{(D)} \frac{dv_P}{r},$$

где r — расстояние между двумя точками M и P, Ω — объем области D, а H означает интеграл $\int\limits_{(\Sigma)} f(M)\,d\sigma_M$. Это — функция, правильная в области D, и согласно формуле Гаусса (§ 537) имеем:

$$\int\limits_{(\Sigma)} \frac{du_1}{dn_i}\,d\sigma = H,$$

Отсюда следует, что можно найти другую функцию u_2, гармоническую в области D и в каждой точке границы удовлетворяющую условию.

$$\frac{du_2}{dn}=f(M)-\frac{du_1}{dn}.$$

Ясно, что сумма $U=u_1+u_2$ представляет правильную в области D функцию, которая удовлетворяет поставленному условию.

616. Колебание упругой мембраны. Фундаментальные функции интегральных уравнений, рассмотренные в предыдущем параграфе, встречаются при решении большого количества задач математической физики, которые приводят к уравнениям гиперболического или параболического типа. Мы рассмотрим из них для примера только две. Изучение колебаний упругой плоской мембраны приводит к определению решения уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=R(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{71}$$

При этом решение это должно быть правильным для любого значения t внутри области D, ограниченной замкнутою кривою C, на самом контуре C должно быть равно нулю и при $t=0$ обращаться в данную функцию $\alpha(x,y)$, непрерывную в этой области, которая на контуре C сама обращается в нуль, в то время как $\frac{\partial U}{\partial t}$ обращается в другую функцию $\beta(x,y)$, равную нулю на контуре C. Разыскивая частные периодические решения вида:

$$V(x,y)\cos\lambda t \quad \text{или} \quad V(x,y)\sin\lambda t,$$

мы приходим к нахождению решений уравнения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\lambda^2 R(x,y)\,V, \tag{72}$$

правильных в области D и обращающихся на контуре в нуль. Это уравнение было рассмотрено в предыдущем параграфе для случая области трех измерений, но все рассуждения и выводы без труда распространяются на нашу задачу. Заменяя λ^2 на $-\mu$, мы видим, что интегральное уравнение, к которому приводится задача, допускает бесчисленное множество отрицательных характеристических значений, если коэфициент R положителен, что здесь как раз и имеет место в силу физического значения этого коэфициента. Существует, таким образом, бесконечное множество чисел λ_i (которые можно предполагать положительными): каждому из которых соответствуют два частных интеграла уравнения (71) вида,

$$\varphi_i(x,y)\cos(\lambda_i t), \quad \varphi_i(x,y)\sin(\lambda_i t),$$

где функции φ_i на контуре C обращаются в нуль, а внутри этого контура являются правильными. Если обе функции $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды по функциям $\varphi_i(x,y)$,

$$\alpha(x,y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i\varphi_i(x,y), \quad \beta(x,y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\beta_i\varphi_i(x,y), \tag{73}$$

то функция $U(x,y,t)$, определяемая разложением

$$U=\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i\varphi_i(x,y)\cos(\lambda_i t)+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\beta_i}{\lambda_i}\varphi_i(x,y)\sin(\lambda_i t), \tag{74}$$

дает решение поставленной задачи (ср. § 493).

617. Задача об охлаждении. Задача об охлаждении твердого тела с лучеиспусканием приводится к следующей задаче анализа. Определить интеграл уравнения в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=R(x, y, z)\frac{\partial U}{\partial t}; \tag{75}$$

правильный для всякого положительного значения t в области D, ограниченной замкнутою поверхностью Σ, обращающийся при $t=0$ в данную непрерывную в области D функцию $\alpha(x, y, z)$ и удовлетворяющий, кроме того, в каждой точке поверхности Σ граничному условию

$$\frac{dU}{dn}-hU=0,$$

где R и h суть согласно их физическому значению существенно *положительные* функции. Если искать решения вида $U=e^{-\lambda t}V$, то мы видим, что функция V должна быть интегралом уравнения

$$\Delta V+\lambda R(x, y, z) V=0, \tag{76}$$

правильным в области D и удовлетворяющим на границе поверхности Σ граничному условию:

$$\frac{dV}{dn}-hV=0.$$

Выше (§ 615) мы видели, что существует бесчисленное множество значений λ которые *все положительны* и для которых задача имеет решение. Мы получим таким образом, бесчисленное множество простых решений вида:

$$e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x, y, z),$$

удовлетворяющих граничному условию. Если функция $\alpha(x, y, z)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям вида $\sum\alpha_i\varphi_i(x, y, z)$, то ряд $\sum\alpha_i e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x, y, z)$ дает решение задачи. Мы покажем, как можно определить эти фундаментальные функции в случае однородной сферы и однородного цилиндра вращения

I. *Сфера.* В случае однородной сферы, радиус которой мы положим равным единице, мы можем в уравнениях (75) и (76), в которых h — положительная постоянная, предположить $R(x, y, z)=1$. Будем искать интеграл уравнения $\Delta V+\lambda V=0$ в виде $V=Y_n(\theta, \varphi)f(\rho)$, где $Y_n(\theta, \varphi)$ есть функция Лапласа (§ 531) Заметив, что $\rho^n Y_n(\theta, \varphi)$, есть гармоническая функция, и принимая во внимание выражение для ΔV в полярных координатах (т. I), мы найдем, что функция $f(\rho)$ должна быть интегралом линейного уравнения:

$$\rho^2 f''(\rho)+2\rho f'(\rho)=[n(n+1)-\lambda\rho^2]f(\rho); \tag{77}$$

далее, этот интеграл должен оставаться конечным при $\rho=0$ и удовлетворять граничному условию $f'(1)+hf(1)=0$, ибо производная $\frac{dV}{dn}$ берется по внутренней нормали. Это уравнение (77) приводится к уравнению Бесселя (т. II, § 414)

$$t\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{2n+3}{2}\frac{dz}{dt}-z=0, \tag{78}$$

если положить $f(\rho)=\rho^n z$, $t=-\frac{\lambda}{4}\rho^2$. Таким образом интеграл уравнения (77) который остается конечным при $\rho=0$, с точностью до постоянного множителя, равен

$$\rho^n I\left(\frac{2n+3}{2}, \frac{-\lambda\rho^2}{4}\right)$$

Что касается граничного условия, то оно принимает вид:

$$xI'\left(\frac{2n+3}{2}, x\right) + HI\left(\frac{2n+3}{2}, x\right) = 0,$$

если положить $x = -\frac{\lambda}{4}$, где H — постоянный множитель, который нетрудно подсчитать. Но выше мы видели, что уравнение $I\left(\frac{2n+3}{2}, x\right) = 0$ имеет бесчисленное множество отрицательных корней. Между двумя последовательными корнями этого уравнения есть по крайней мере один корень уравнения

$$x'I\left(\frac{2n+3}{2}, x\right) + HI\left(\frac{2n+3}{2}, x\right) = 0,$$

ибо отношение $\frac{xI'}{y}$ в этом интервале изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. В конце концов для всякого целого числа n существует бесчисленное множество положительных значений λ, таких, что уравнение $\Delta V + \lambda V = 0$ имеет правильный интеграл вида $V = Y_n(\theta, \varphi) f(\rho)$, удовлетворяющий граничному условию. Изменяя n от 0 до ∞, мы получим все фундаментальные функции *.

В частности, при $n = 0$ интеграл уравнения (77), который для $\rho = 0$ остается конечным, имеет вид $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\rho}{\rho}$, и мы снова приходим к уже полученному результату (§ 488), только несколько изменив обозначения. Мы видели (т. II, § 414), что для n, равного произвольному целому числу, общий интеграл уравнения Бесселя (78) выражается с помощью только одной трансцендентной функции e^x.

2. *Цилиндр вращения*. Рассмотрим еще однородный цилиндр вращения, в котором мы для простоты положим радиус равным единице, а высоту равной $2l$. Приняв центр основания за начало, а ось цилиндра за ось z, применим полуполярную систему координат (r, ω, z) и будем искать интегралы уравнения $\Delta V + \lambda V$ вида ZW, удовлетворяющие граничному условию; причем Z зависит только от z, а W — от r и ω. Уравнение $\Delta V + \lambda V = 0$ переходит в уравнение

$$W\Delta Z + Z\Delta W + \lambda ZW = 0$$

или

$$\frac{\Delta Z}{Z} + \frac{\Delta W}{W} + \lambda = 0. \tag{79}$$

Отношение $\frac{\Delta Z}{Z}$ зависит только от z, а отношение $\frac{\Delta W}{W}$ зависит только от r и ω. Отсюда следует, что

$$\Delta Z + kZ = 0, \quad \Delta W + k_1 W = 0, \tag{80}$$

где k и k_1 — такие постоянные, что $k + k_1 = \lambda$.

Граничные условия, относящиеся к двум основаниям цилиндра, дают для функции Z:

$$\frac{dZ}{dz} + hZ = 0 \text{ при } z = l, \quad \frac{dZ}{dz} - hZ = 0 \text{ при } z = -l. \tag{81}$$

Следующее тождество, являющееся следствием первого из уравнений (80):

$$\left(Z\frac{dZ}{dz}\right)_{-l}^{l} = \int_{-l}^{+l}\left[\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 - kZ^2\right] dz,$$

* Очевидно, достаточно показать, что всякая функция от ρ, θ, φ может быть разложена в ряд фундаментальных функций при довольно общих условиях (см., например, Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, глава XVII).

показывает, что k необходимо положительно, и функция Z имеет вид:

$$Z = A\cos(z\sqrt{k}) + B\sin(z\sqrt{k})$$

Если записать, что функция удовлетворяет двум условиям (81), то мы видим, что один из коэфициентов A или B должен быть равен нулю, а это дает два типа решений: $Z = \sin\mu z$, $Z = \cos\mu z$, где μ есть корень уравнения $\mu + h\operatorname{tg}\mu l = 0$ для первого решения и уравнения $\mu = h\operatorname{ctg}\mu l$ для второго. Каждое из этих уравнений имеет бесчисленное множество корней (§ 488), и каждому из них соответствует положительное значение k.

Остается найти решение W второго из уравнений (80), правильное внутри круга C радиуса единица с центром в начале, причем это решение должно при $r = 1$ удовлетворять условию $\frac{dW}{dr} + hW = 0$. Ищем решения вида $W = r^n\cos n\omega f(r)$ или вида $r^n\sin n\omega f(r)$, где n — целое положительное число. Замечая, что $r^n\cos n\omega$ и $r^n\sin n\omega$ представляют решения уравнения Лапласа, мы находим (т. I, § 63), что значение $f(r)$ должно удовлетворять уравнению:

$$rf''(r) + (2n+1)f'(r) + k_1 rf(r) = 0; \tag{82}$$

если положить в нем $t = -\frac{k_1 r^2}{4}$, то оно переходит в следующее:

$$t\frac{d^2 f}{dt^2} + (n+1)\frac{df}{dt} - f = 0. \tag{83}$$

Мы снова приходим к уравнению Бесселя, но в то время как в случае сферы параметр γ равен половине нечетного числа, здесь он равен целому числу. Так как функция W должна оставаться конечной при $r = 0$, то в качестве функции f мы должны взять функцию $I\left(n+1, -\frac{k_1 r^2}{4}\right)$, и мы покажем, как и в случае сферы, что граничные условия удовлетворяются для бесчисленного множества положительных значений k_1. Итак, существует бесчисленное множество фундаментальных функций одного из видов:

$$\cos(\mu' z)\, r^n \sin n\omega\, I\left(n+1, -\frac{k_1}{4}r^2\right),$$
$$\sin(\mu z)\, r^n \cos n\omega\, I\left(n+1, -\frac{k_1}{4}r^2\right),$$

где μ, μ', k_1 — корни трансцендентных уравнений, не зависящих одно от другого и допускающих бесконечное множество решений. Можно доказать, как для сферы, что все они могут быть получены таким путем.

618. Общее уравнение эллиптического типа. Рассмотрим линейное уравнение от двух независимых переменных эллиптического типа, приведенное к каноническому виду (§ 473). Введя параметр λ, мы его запишем в виде:

$$\Delta u = \lambda\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) + f \tag{84}$$

и положим, что a, b, c, f — непрерывные функции переменных x, y, имеющие непрерывные частные производные в области D, ограниченной замкнутым контуром C. Общая задача Дирихле для уравнений этого типа приводится к отысканию интеграла уравнения этого вида, непрерывного в области D вместе со своими частными производными двух первых порядков и равного нулю на контуре C. Гильберт и Пикар привели эту задачу к функциональному уравнению Фредгольма двумя различными путями. Мы вкратце укажем принцип метода Пикара. Если уравнение (84) имеет интеграл $u(x, y)$, удовлетворяющий поставленным условиям, то этот интеграл удовлетворяет также интегро-диференциальному уравнению (§ 521):

$$u(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\,u\right]\times$$
$$\times\, G(x, y;\ \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \psi(x, y), \tag{85}$$

где введено обозначение:

$$\psi(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\iint\limits_{(D)} f(\xi, \eta)\,G(x, y;\ \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

$G(x, y;\ \xi, \eta)$ есть функция Грина в узком смысле для контура C. Обратно, всякое решение $u(x, y)$ уравнения (85) будет также интегралом уравнения (84), если только к правой части можно применить формулу Пуассона, что будет иметь место, если функция $u(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Уравнение (85) в свою очередь может быть заменено уравнением Фредгольма:

$$u(x, y) = \psi(x, y) - \frac{\lambda}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\left[c(\xi, \eta)\,G - \frac{\partial(aG)}{\partial \xi} - \frac{\partial(bG)}{\partial \eta}\right]u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{86}$$

с помощью двух интегрирований по частям (т. I, § 123), если принять во внимание, что функция $u(\xi, \eta)$ на контуре C обращается в нуль. Ядро этого уравнения Фредгольма при $\xi = x$, $\eta = y$ обращается в бесконечность как $\frac{1}{r}$. Следовательно, из него можно с помощью конечного числа итераций (§ 563) получить ограниченное ядро, таким образом к уравнению (86) можно применить общие результаты главы XXXI.

Для того чтобы можно было от интегрального уравнения (86) перейти к уравнению в частных производных (84), необходимо, чтобы решение $u(x, y)$ было таким, чтобы к нему можно было применить преобразования, с помощью которых мы перешли от уравнения (84) к уравнениям (85) и (86). Для этого достаточно показать, что эта функция $u(x, y)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядков. За доказательством отсылаем к мемуару Пикара (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, т. 22, 1906).

Из этого метода ясно, почему решение обобщенной задачи Дирихле, разложенное по степеням λ, вообще говоря, не представляет сходящегося ряда, как в случае задачи Коши для уравнения гиперболического типа. Полученный ряд сходится только, если λ меньше наименьшего из модулей особых значений ядра. Мы видим, кроме того, что обобщенная задача Дирихле имеет вообще решение и притом единственное. *Исключение может быть только в том случае, если λ есть одно из особых значений ядра уравнения* (86).

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

1. *Разложен е ядра частного вида.* Пусть $y(x)$ будет функция, имеющая в интервале $(0, \omega > 0)$ непрерывную вторую производную $f(x)$ и удовлетворяющая двум условиям:

$$\int_0^\omega y\,dx = 0, \quad y(\omega) = y(0).$$

Если определить постоянные C_1 и C_2, входящие в общий интеграл уравнения $y'' = f(x)$ (стр. 156), так, чтобы удовлетворить этим двум условиям, то для $y(x)$ мы найдем:

$$y(x) = \int_0^\omega K(x, t) f(t)\,dt,$$

где ядро $K(x, t)$ равно $\dfrac{t(x-\omega)}{\omega} + \dfrac{t(\omega - t)}{2\omega}$ при $x > t$ а при $t > x$ равно $\dfrac{x(t-\omega)}{\omega} + \dfrac{t(\omega - t)}{2\omega}$. Фундаментальные функции этого ядра, т. е. решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\omega K(x, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{E}$$

представляют интеграл линейного уравнения $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$, которые удовлетворяют двум условиям:

$$\varphi(\omega) = \varphi(0), \quad \int_0^\omega \varphi(x)\,dx = 0.$$

Эти интегралы необходимо периодичны, ибо из последнего условия вытекает равенство $\varphi'(\omega) = \varphi'(0)$. Особые значения суть, следовательно, числа $-\dfrac{4\pi^2 n}{\omega^2}$, где n — целое положительное число, и каждому особому значению соответствуют две независимые фундаментальные функции $\cos\dfrac{2n\pi x}{\omega}$ и $\sin\dfrac{2n\pi x}{\omega}$.

Уравнение (E) можно заменить уравнением с симметрическим ядром:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\omega \left[K(x, t) + \frac{x(\omega - x)}{2\omega}\right] \varphi(t)\,dt. \tag{E'}$$

В самом деле, ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условию:

$$\int_0^\omega K(x, t)\,dx = 0,$$

а следовательно, также и

$$\int_0^\omega \varphi(x)\,dx = 0,$$

и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (E'). Обратно, всякое решение интегрального уравнения (E') удовлетворяет условию:

$$\int_0^\omega \varphi(x)\,dx = \lambda\int_0^\omega\int_0^\omega K(x, t)\,\varphi(t)\,dx\,dt - \lambda\int_0^\omega \frac{x(x-\omega)}{2\omega}\,dx \cdot \int_0^\omega \varphi(t)\,dt,$$

или

$$\int_0^\omega \varphi(t)\,dt\left[1 + \lambda\int_0^\omega \frac{x(x-\omega)}{2\omega}\,dx\right] = 0.$$

Поэтому имеем также:

$$\int_0^\omega \varphi(t)\,dt = 0,$$

а следовательно, $\varphi(x)$ будет также решением уравнения (E), если только λ не равно $\frac{12}{\omega^2}$. Для этого значения λ решение уравнения (E') должно удовлетворять диференциальному уравнению:

$$\varphi''(x) = \frac{12}{\omega^2}\varphi(x) - \frac{12}{\omega^3}\int_0^\omega \varphi(t)\,dt$$

и условию $\varphi'(\omega) = \varphi(0)$. Легко видеть, что существует только одна независимая функция $\varphi = 1$, удовлетворяющая этим условиям.

Итак, ядро $K_1(x, y) = K(x, y) - \frac{x(x-\omega)}{2\omega}$ имеет те же особые значения с теми же фундаментальными функциями, что и ядро $K(x, y)$, а кроме того, еще особое значение $\frac{12}{\omega^2}$, которому соответствует фундаментальная функция $\varphi = 1$. И это ядро $K_1(x, y)$ также симметрическое, ибо можно записать, что

$$K_1(x, y) = \frac{(x-y)(\omega - x + y)}{2\omega} \quad \text{для } y < x,$$

$$K_1(x, y) = \frac{(y-x)(\omega - y + x)}{2\omega} \quad \text{для } y > x.$$

Так как это ядро $K_1(x, y)$ симметрическое, и все его особые значения, кроме первого, отрицательны, то оно может быть представлено равномерно сходящимся рядом, составленным из главных ядер (§ 592). Мы получаем такое разложение:

$$K_1(x, y) = \frac{\omega^2}{12} - \frac{\omega}{2\pi^2}\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\cos\left(\frac{2n\pi x}{\omega}\right)\cos\left(\frac{2n\pi y}{\omega}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi x}{\omega}\right)\sin\left(\frac{2n\pi y}{\omega}\right)\right\},$$

которое пригодно для всех значений x и y, заключенных между 0 и ω, что легко доказывается непосредственно с помощью теории рядов Фурье (т. I, § 201—204). В частности, если положить $y = 0$, то для значений x, заключенных между 0 и ω, получим разложение:

$$\frac{x(\omega - x)}{2\omega} = \frac{\omega^2}{12} - \frac{\omega}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{\omega}\right).$$

Приложение. Пусть будет $F(x)$ — функция, имеющая вторую производную, непрерывную в интервале $(0, \omega)$, и удовлетворяющая условию $F(\omega) = F(0)$. Прибавляя к ней постоянное — C, мы можем, очевидно, предположить, что

$$\int_0^\omega F(x)\,dx = 0,$$

а следовательно, функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = C + \int_0^\omega K(x, t)\,F''(t)\,dt =$$

$$= C + \int_0^\omega K_1(x, t)\,F''(t)\,dt + \frac{x(x-\omega)}{2\omega}\int_0^\omega F''(\ )\,dt.$$

По теореме Гильберта-Шмидта интеграл

$$\int_0^\omega K_1(x, t)\,F''(t)\,dt$$

может быть разложен в равномерно сходящийся ряд Фурье, и то же можно сказать, как мы это видели, и о выражении $x(x-\omega)$.

2. *Полиномы Лежандра.* Рассмотрим ядро $K(x, s)$, определенное следующим образом:

$$K(x, s) = \log(1-s) + \log(1+x) + 1 - 2\log 2$$

для $-1 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$,

$$K(x, s) = \log(1-x) + \log(1+s) + 1 - 2\log 2$$

для $-1 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1$.

Это ядро симметрическое, и нетрудно показать, что

$$\int_{-1}^{+1} K(x, s)\,ds = \int_{-1}^{+1} K(x, s)\,dx = 0.$$

Следовательно, всякая функция вида

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{+1} K(x, s)\,f(s)\,ds$$

удовлетворяет условию:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} K(x, s)\,f(s)\,dx\,ds = 0.$$

Приняв это во внимание, рассмотрим однородное интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Если в этом уравнении заменить $K(x, s)$ его выражением, то его можно будет записать в виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{x} \log(1-s)\,\varphi(s)\,ds + \lambda \log(1+x) \int_{-1}^{x} \varphi(s)\,ds + \lambda \int_{x}^{1} \log(1+s)\,\varphi(s)\,ds +$$

$$+ \lambda \log(1-x) \int_{x}^{1} \varphi(s)\,ds + (1 - 2\log 2) \int_{-1}^{+1} \varphi(s)\,ds.$$

Диференцируя его, получим:

$$\varphi'(x) = \lambda\varphi(x)\log(1-x) + \frac{\lambda}{1+x}\int_{-1}^{x} \varphi(s)\,ds + \lambda\varphi(x)\log(1+x) - \lambda\varphi(x)\log(1+x) +$$

$$+ \frac{\lambda}{x-1}\int_{x}^{1} \varphi(s)\,ds - \lambda\varphi(x)\log(1-x) = \frac{\lambda}{1+x}\int_{-1}^{x} \varphi(s)\,ds + \frac{\lambda}{x-1}\int_{x}^{1} \varphi(s)\,ds,$$

или

$$(x^2 - 1)\,\varphi'(x) = \lambda(x-1)\int_{0}^{x} \varphi(s)\,ds + \lambda(x+1)\int_{x}^{1} \varphi(s)\,ds,$$

Принимая во внимание условие

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(s)\,ds - 0,$$

мы можем правую часть заменить через

$$-2\lambda \int_{-1}^{x} \varphi(s)\,ds,$$

и новое диференцирование дает:

$$(x^2 - 1)\,\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) + 2\lambda\varphi(x) = 0. \tag{E}$$

Уравнение (E) только в том случае имеет интеграл, который при $x = \pm 1$ остается конечным, если 2λ имеет вид $-n(n+1)$, где n — целое *положительное* число, и соответствующий интеграл представляет полином Лежандра $P_n(x)$. Обратно, пусть

$$y(x) = \frac{-n(n+1)}{2}\int_{-1}^{1} K(x, s)\,P_n(s)\,ds;$$

приведенные вычисления показывают, что $y(x)$ представляет интеграл линейного диференциального уравнения

$$(x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - n(n+1)\,P_n(x) = 0.$$

Так как этот интеграл для $x = \pm 1$ остается конечным, то он может отличаться от $P_n(x)$ только на постоянное C, и это постоянное равно нулю, так как

$$\int_{-1}^{+1} y(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\,dx = 0.$$

Итак, особые значения ядра $K(x, s)$ суть числа

$$-\frac{n(n+1)}{2}$$

где n — целое положительное число. Каждому из этих значений соответствует единственная фундаментальная функция $P_n(x)$.

Главное ядро, соответствующее полюсу $-\frac{n(n+1)}{2}$, имеет вид: $C_n P_n(x) P_n(s)$.

Для определения константы C_n достаточно воспользоваться условием:

$$1 = -\frac{n(n+1)}{2} \int_{-1}^{+1} C_n P_n^2(s)\,ds,$$

которое дает (т. I, § 205)

$$C_n = -\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Следует заметить, что ряд, составленный из главных ядер, не сходится равномерно, ибо $P_n(1) = 1$.

Приложение. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция, допускающая в интервале $(-1, +1)$ непрерывные производные $F'(x)$, $F''(x)$ и удовлетворяющая условию

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 0.$$

Положим

$$f(x) = (x^2-1) F''(x) + 2xF'(x) = \frac{d}{dx}\left\{(x^2-1) F'(x)\right\},$$

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} K(x, s) f(s)\,ds.$$

Принимая во внимание изложенные выше соображения, а также то обстоятельство, что

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 0,$$

мы получим, что

$$(x^2-1)\Phi''(x) + 2x\Phi'(x) = f(x) = (x^2-1) F''(x) + 2xF'(x),$$

Так как функция $\Phi(x)$ при $x = \pm 1$ остается конечной, то она отличается от $F(x)$ только на постоянное слагаемое, а так как

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx = 0,$$

то эта постоянная равна нулю. Таким образом

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} K(x, s) f(s)\,ds,$$

и, следовательно, функция $F(x)$ в интервале $(-1, +1)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд полиномов Лежандра. Теорема остается справедливой для любой непрерывной функции и ее двух первых производных, если рассмотреть разность

$$F(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx.$$

3. *Охлаждение сферы.* Мы видели (§ 488), что в случае, когда температура зависит только от расстояния до центра, мы получаем простые решения с помощью нахождения интегралов уравнения $\frac{d^2v}{dr^2} = \lambda v(r)$, удовлетворяющих начальным условиям

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dr} + hv = 0 \text{ для } r = R.$$

Можно также легко показать, что интеграл уравнения $\frac{d^2v}{dr^2} = f(r)$, удовлетворяющий этим начальным условиям, имеет вид:

$$v(r) = \int_0^R K(r, t) f(t)\,dt,$$

где $K(r, t)$ есть симметрическое ядро, определенное равенствами:

$$K(r, t) = \frac{hrt}{1+hR} - t \quad \text{для } t < r,$$

$$K(r, t) = \frac{hrt}{1+hR} - r \quad \text{для } t > r.$$

Таким образом искомые функции $v(r)$ представляют собой фундаментальные функции этого симметрического ядра.

Всякая функция $V(r)$, удовлетворяющая начальным условиям и имеющая непрерывные производные первого и второго порядков в интервале $(0, R)$, может быть представлена интегралом

$$\int_0^R K(r, t)\, V''(t)\,dt$$

и, следовательно, может быть разложена в равномерно сходящийся ряд Фурье, членами которого являются фундаментальные функции этого ядра.

4. *Уравнение Бесселя.* Общий интеграл уравнения

$$y'' + \frac{\alpha}{x} y' = f(x),$$

в котором предполагается, что $\alpha > 1$, равен

$$y = \frac{1}{1-\alpha} \int_1^x (x^{1-\alpha} s^\alpha - s) f(s)\, ds + A x^{1-\alpha} + B.$$

Для того чтобы интеграл при $x = 0$ оставался конечным и, кроме того, удовлетворял условию $y'(1) + hy(1) = 0$ $(h \neq 0)$, необходимо, чтобы было

$$A = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x s^\alpha f(s)\, ds,$$

$$(1-\alpha) A + h(A+B) = 0.$$

Отсюда легко получается, что искомый интеграл имеет вид:

$$y = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 s^\alpha H(x, s) f(s)\, ds,$$

где

$$H(x, s) = x^{1-\alpha} + \mu \quad (0 < s \leqslant x),$$

$$H(x, s) = s^{1+\alpha} + \mu \quad (x \leqslant s < 1),$$

а $\mu = \dfrac{\alpha - 1 - h}{h}$. Интегралы уравнения Бесселя

$$xy'' + \alpha y' = \lambda xy,$$

которые удовлетворяют предыдущим условиям, являются, таким образом, решениями интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{1-\alpha} \int_0^1 s^\alpha H(x, s) \varphi(s)\, ds,$$

у которого ядро имеет вид ядра Шмидта (§ 593).

Примечание. В частном случае, когда $\alpha = 1$, мы таким же образом приходим к интегральному уравнению:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 sH(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

где

$$H(x, s) = \log x + \mu \quad \text{для} \quad s < x$$

и

$$H(x, s) = \log s + \mu \quad \text{для} \quad s > x,$$

5. *Задача Дирихле для контура с угловыми точками.* Для простоты рассмотрим замкнутый контур C, имеющий одну угловую точку M_0 с криволинейной абсциссой x_0, в которой касательные составляют угол $\alpha \gtrless \pi$. Интегральное уравнение, к которому приводится задача, имеет вид:

$$\beta\rho(x) + \lambda \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r} \rho(s)\, ds = f(x), \tag{E}$$

где r и φ имеют обычные значения, а β равно π для $x \gtrless x_0$ и равно $2\pi - \alpha$ для $x = x_0$ (§ 505).

Заменим уравнение (E) уравнением:

$$\pi\rho(x) + \lambda \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r} \rho(s)\, ds = f(x), \tag{E'}$$

которое отличается от первого только для $x = x_0$. Применяя к этому уравнению метод последовательных приближений, мы приходим к формальному решению:

$$\rho(x, \lambda) = \rho_0(x) + \lambda\rho_1(x) + \ldots + \lambda^n\rho_n(x) + \ldots,$$

где различные члены $\rho_n(x)$ разрывны при $x = x_0$ и непрерывны для всех других значений x. Это легко показать с помощью свойств потенциала двойного слоя.

Положим, что $|\lambda|$ настолько мало, что ряд равномерно сходится. Тогда это решение $\rho(x, \lambda)$ уравнения (E') претерпевает разрыв при $x = x_0$, и мы имеем

$$\rho(x_0, \lambda) \neq \rho(x_0 + 0, \lambda) = \rho(x_0 - 0, \lambda).$$

Вычислим этот разрыв. Для этого обозначим через $R(x, \lambda)$ непрерывную функцию, равную

$$\rho(x, \lambda) \quad \text{для} \quad x \neq x_0$$

и

$$\rho(x \pm 0, \lambda) \quad \text{для} \quad x = x_0.$$

Уравнение (E') можно записать в виде:

$$\pi\rho(x, \lambda) = \lambda \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r} [R(x, \lambda) - R(s, \lambda)]\, ds - \lambda R(x, \lambda) \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r} ds + f(x),$$

и так как первый интеграл есть непрерывная функция (§ 513), то функция $\pi\rho(x, \lambda)$ имеет тот же разрыв, что и функция

$$-\lambda R(x, \lambda) \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r} ds.$$

Таким образом имеем:

$$\pi[\rho(x_0 \pm 0, \lambda) - \rho(x_0, \lambda)] = -\lambda\pi R(x_0, \lambda) + \lambda\alpha R(x_0, \lambda) = \lambda(\alpha - \pi) R(x_0, \lambda)$$

или, принимая во внимание определение функции $R(x, \lambda)$:

$$R(x_0, \lambda) = \frac{\pi\rho(x_0, \lambda)}{\pi + \lambda(\pi - \alpha)}.$$

Таким образом непрерывная функция $R(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\gamma R(x, \lambda) + \lambda \int \frac{\cos \varphi}{r} R(s, \lambda)\, ds = f(x), \tag{E''}$$

где $\gamma = \pi$ для $x = x_0$ и $\gamma = \pi + \lambda(\pi - \alpha)$ для $x = x_0$.

Принимая это во внимание, можно сказать, что если функция $\rho(x, \lambda)$, которая является аналитической функцией от λ, голоморфна в окрестности точки $\lambda = 1$, то, очевидно, то же имеет место и для функции $R(x, \lambda)$, а последнее уравнение (E'') доказывает, что $R(x, 1)$ представляет непрерывное решение уравнения (E). Это замечание без труда распространяется на контур, имеющий любое число угловых точек, и на задачу Дирихле в пространстве для поверхности, имеющей любое число ребер.

Вопрос сводится к доказательству того, что $\lambda = 1$ не есть особое значение для уравнения (E'). Этот вопрос является предметом важных исследований Карлемана (T. Carleman), изложенных в прекрасном мемуаре „Über Neumann Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken“ (Upsala, 1916), в которых он изучает особенности функции $R(x, \lambda)$ комплексного переменного λ во всей плоскости.

ГЛАВА XXXIV

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задачи, которые составляют предмет вариационного исчисления, представляют собой задачи на максимум и минимум самого различного характера, в которых требуется определить вид одной или нескольких неизвестных функций. Мы рассмотрим только наиболее простые из этих задач, чтобы обратить внимание на специфические трудности, возникающие в вопросах этого рода, и чтобы попытаться в то же время дать некоторое представление об успехах, достигнутых в последнее время в этой области. В этой главе будут рассматриваться только действительные переменные *.

I. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ. ЭКСТРЕМАЛИ

619. Предварительные леммы. Прежде всего мы установим несколько очень простых лемм, частными случаями которых мы уже пользовались и на которых основано все вариационное исчисление.

Л е м м а I. *Пусть $F(x)$ — некоторая непрерывная функция, определенная в интервале (x_0, x_1); если интеграл $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) F(x)\, dx$ равен нулю для всех возможных видов функции $\eta(x)$, непрерывной вместе со своею производною $\eta'(x)$ в интервале (x_0, x_1) и обращающейся в нуль при $x = x_0$ и $x = x_1$, то функция $F(x)$ равна нулю во всем интервале (x_0, x_1).*

В самом деле, допустим, например, что функция $F(x)$ положительна для некоторого значения x_2, заключенного между x_0 и x_1; тогда можно указать такой интервал (ξ_0, ξ_1), содержащий x_2 $(x_0 < \xi_0 < x_2 < \xi_1 < x_1)$, что функция $F(x)$ будет положительна во всем этом интервале (ξ_0, ξ_1).

Рассмотрим теперь функцию $\eta(x)$, определенную следующим образом:

1. $\eta(x) = 0$ при $x_0 \leqslant x \leqslant \xi_0$;

2. $\eta(x) = (x - \xi_0)^m (\xi_1 - x)^m$ при $\xi_0 \leqslant x \leqslant \xi_1$, где m — целое положительное число, не меньшее 2.

3. $\eta(x) = 0$ при $\xi_1 \leqslant x \leqslant x_1$.

---

* Более полное изложение общей теории, а также исторические указания читатель найдет в статье „Вариационное исчисление“ во французском издании „*Encyclopédie des Sciences mathématiques*“ Кнезера, Цермелло и Лека (Kneser, Zermello, Lecat), а также в следующих произведениях: K n e s e r, Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig 1900). — O. B o l z a, Lectures on the calculus of variations (Chicago 1904). — J. H a d a m a r d, Leçons sur le calcul des variations (Paris 1910). В этой главе я во многом использовал последние две книги.

Эта функция непрерывна и допускает непрерывную производную между x_0 и x, и, кроме того, ясно, что соответствующее значение рассматриваемого интеграла положительно.

Эти рассуждения, очевидно, останутся в силе, если отбросить некоторые из условий, налагаемых на функцию $\eta(x)$. Можно также подчинить эту функцию $\eta(x)$ новым требованиям, например чтобы она допускала непрерывные производные до определенного порядка, которые бы обращались в нуль при $x=x_0$ и при $x=x_1$. Достаточно взять целое число m достаточно большим, чтобы этим условиям удовлетворяла рассмотренная выше функция $\eta(x)$.

И, наконец, очевидно, что предложение распространяется на интегралы вида:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\eta_1 F_1 + \eta_2 F_2 + \eta_3 F_3]\,dx,$$

где F_1, F_2, F_3 — непрерывные функции в интервале (x_0, x_1), а η_1, η_2, η_3 — функции, удовлетворяющие тем же условиям, что и $\eta(x)$. Для того чтобы этот интеграл был равен нулю для всех возможных видов функций η_1, η_2, η_3, удовлетворяющих этим условиям, необходимо, чтобы функции F_1, F_2, F_3 были тождественно равны нулю. Позже (§ 627, замечание) мы встретимся с новыми обобщениями.

Лемма II. *Пусть $F(x)$ и $\eta(x)$ — две функции, непрерывные в интервале (x_0, x_1), из которых первая $F(x)$ предполагается определенной. Если определенный интеграл $\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)F(x)\,dx$ равен нулю для всех возможных видов функции $\eta(x)$, для которых интеграл $\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\,dx$ равен нулю, то функция $F(x)$ равна постоянной.*

В самом деле, если эти условия выполнены, то мы будем также иметь:

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-C]\,\eta(x)\,dx=0,$$

каково бы ни было постоянное C, ибо интеграл $\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\,dx$ равен нулю. Выберем в частности постоянное C так, чтобы было

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-C]\,dx=0.$$

Если теперь выбрать $\eta(x)=F(x)-C$, то мы будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-C]^2\,dx=0,$$

откуда мы получаем $F(x)=C$ (ср. стр. 183, сноска).

620. Определения. Содержание первой задачи. Пусть $F(x, y, y')$ будет функция трех переменных x, y, y', которая непрерывна вместе со своими частными производными до третьего порядка для всех точек с координатами (x, y), принадлежащих односвязной области $\mathfrak{R}$ на плоскости, и для всех конечных значений y'. Во всех примерах, которые мы будем рассматривать, эта функция F аналитическая. Область $\mathfrak{R}$, которая в каждом отдельном случае определяется условиями задачи, может охватывать всю плоскость или быть ограниченной одной или несколькими *граничными кривыми.*

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, допускающая непрерывную производную в интервале (x_0, x_1); мы будем говорить, что эта функция принадлежит к классу (I) в интервале (x_0, x_1). Уравнение $y=f(x)$ для всех значений x, изменяющихся от x_0 до x_1, изображает дугу кривой Γ, имеющую в каждой точке касательную, угловой коэфициент которой изменяется непрерывно; говорят также, что эта кривая Γ принадлежит к классу (I). Если она расположена в области $\mathfrak{R}$, то функция $F[x, f(x), f'(x)]$, полученная из функции $F(x, y, y')$ заменой y на $f(x)$ и y' на $f'(x)$, непрерывна в интервале (x_0, x_1), и интеграл

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

имеет конечное значение. Мы будем также писать этот интеграл в виде:

$$J=\int_{\Gamma} F(x, y, y')\, dx,$$

указывая кривую Γ, вдоль которой он взят. Пусть A и B — две какие-нибудь точки области $\mathfrak{R}$ с координатами (x_0, y_0) и (x_1, y_1); мы будем всегда предполагать, что $x_0 < x_1$. Две точки A и B можно соединить бесчисленным множеством кривых Γ класса (I), расположенных целиком в области $\mathfrak{R}$. Любая из этих кривых Γ определяется уравнением вида $y=f(x)$, где функция $f(x)$ есть функция класса (I), определенная в интервале (x_0, x_1), удовлетворяющая условиям:

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f(x_1)$$

и, кроме того, такая, что точка с координатами $[x, f(x)]$ остается в области $\mathfrak{R}$, когда x изменяется от x_0 до x_1. Каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей этим условиям, соответствует определенное значение интеграла J. Задача, которую мы себе ставим, может быть формулирована так:

Существует ли среди кривых Γ класса (I), соединяющих две точки A и B и расположенных внутри области $\mathfrak{R}$, такая, что соответствующее этой кривой значение интеграла J будет больше или меньше, чем для всякой другой кривой, удовлетворяющей тем же условиям?

Нельзя быть уверенным a priori, что существует кривая Γ, отвечающая поставленным требованиям. Предположим, например, что функция $F(x, y, y')$ будет всегда положительна для всех конечных значений y' и для любой точки (x, y) в области $\mathfrak{R}$. Интеграл J имеет, очевидно, положительное значение для всякой кривой Γ, соединяющей две точки A и B; значение этого интеграла имеет, следовательно, верхнюю границу $m \geqslant 0$, но отсюда нельзя заключить, что существует кривая Γ рассматриваемого вида, для которой J имеет это значение m: мы приведем примеры, в которых это будет не так.

Здесь есть существенная разница между задачами вариационного исчисления и задачами на максимум и минимум, рассматриваемыми в диференциальном исчислении; и в самом деле, мы знаем, что, например, функция одного переменного x, которая непрерывна в *замкнутом* интервале (a, b), достигает в этом интервале своего наибольшего и наименьшего значения (т. I, § 8).

Прежде всего мы будем заниматься только нахождением *относительных* максимумов и минимумов, т. е. мы будем сравнивать значение интеграла J вдоль кривой Γ, соединяющей две точки A и B, только со значениями того же интеграла, взятого вдоль близких кривых, удовлетворяющих тем же условиям. Для определенности мы чаще всего будем искать минимальные значения, приводя случаи максимальных значений к первому заменой F на $-F$.

Задача, которую мы себе ставим, может быть вполне точно формулирована аналитически. Пусть $y = f(x)$ будет функция класса (I) в интервале (x_0, x_1), принимающая значение y_0 при $x = x_0$ и значение y_1 при $x = x_1$ и притом такая, что кривая Γ, изображаемая уравнением $y = f(x)$, находится *внутри* области $\mathfrak{R}$. Пусть ε — положительное число, через $\mathfrak{R}_\varepsilon$ обозначим замкнутую область на плоскости, ограниченную двумя прямыми $x = x_0$, $x = x_1$, параллельными оси Oy, и двумя кривыми

$$Y_1 = f(x) + \varepsilon, \quad Y_2 = f(x) - \varepsilon;$$

при этом мы предполагаем число ε настолько малым, что вся область $\mathfrak{R}_\varepsilon$ находится внутри $\mathfrak{R}$. Всякая кривая класса (I), соединяющая две точки A и B и находящаяся в области $\mathfrak{R}_\varepsilon$, может быть представлена уравнением вида $y = f(x) + \omega(x)$, где функция $\omega(x)$ непрерывна, допускает непрерывную производную в интервале (x_0, x_1) и, кроме того, удовлетворяет условиям:

$$\omega(x_0) = 0, \quad \omega(x_1) = 0, \quad |\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad x_0 < x < x_1. \qquad (1)$$

Мы будем говорить, *что функция $f(x)$ дает экстремум для интеграла J, если можно указать такое положительное число ε, что значение интеграла*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

меньше или больше значения интеграла

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx,$$

где $\omega(x)$ есть произвольная функция класса (I) *в интервале* (x_0, x_1), *удовлетворяющая условиям* (1) *и не обращающаяся тождественно в нуль* *.

Ясно, что можно найти бесчисленным множеством способов функции $\omega(x)$, удовлетворяющие поставленным условиям и зависящие от любого числа произвольных параметров. Мы рассмотрим сначала функции $\omega(x)$, зависящие только от одного параметра, и в очень простой форме. Обозначим вообще через $\eta(x)$ непрерывную функцию, допускающую непрерывную производную в интервале (x_0, x_1) и обращающуюся в нуль на концах интервала x_0 и x_1. Ясно, что при достаточно малых значениях $|\alpha|$ можно сделать значение функции $\alpha\eta(x)$ по абсолютной величине меньше ε во всем интервале (x_0, x_1). Если в функции $F[x, f(x), f'(x)]$ заменить $f(x)$ на $f(x)+\alpha\eta(x)$, то интеграл J сделается функцией параметра α:

$$J(\alpha)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F[x, f(x)+\alpha\eta(x), f'(x)+\alpha\eta'(x)]\,dx, \tag{2}$$

и эта функция должна достигать минимума для значения $\alpha=0$, какова бы ни была функция $\eta(x)$.

Если разложить эту функцию $J(\alpha)$ в строку Тейлора по степеням α, то мы получим:

$$J(\alpha)=J(0)+\frac{\alpha}{1}J_1+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}J_2+\ldots+\frac{\alpha^n}{1\cdot 2\ldots n}J_n+\alpha^n h(\alpha),$$

где $h(\alpha)$ стремится к нулю вместе с α. Величины αJ_1, $\alpha^2 J_2, \ldots$ называются *первой*, *второй* и т. д. вариациями интеграла J. Согласно обозначениям, установленным Лагранжем, их обозначают через $\delta J, \delta^2 J, \ldots, \delta^n J$. Заметим, что вариация $\delta^n J$ равна произведению α^n на значение n-й производной $\frac{d^n J}{d\alpha^n}$, взятой для значения $\alpha=0$. Мы видим, таким образом, что, *для того чтобы функция $f(x)$ давала интегралу J минимум, необходимо должно быть* (пользуясь обозначениями Лагранжа):

$$\delta J=0, \quad \delta^2 J\geqslant 0;$$

эти условия должны выполняться, какова бы ни была функция $\eta(x)$, если только эта функция непрерывна вместе со своею производною в интервале (x_0, x_1) и равна нулю на концах этого интервала. Для случая максимума знак $>$ должен быть заменен знаком $<$.

---

* Здесь может быть экстремум в *узком* или в *широком* смысле. Мы имеем, например, минимум в узком смысле, если $Y<Y'$ для всех возможных видов функции $\omega(x)$; минимум в широком смысле будет, если для некоторых видов функции $\omega(x)$ будет иметь место равенство $Y=Y'$.

621. Первая вариация. Уравнение Эйлера. Применяя обычную формулу диференцирования под знаком интеграла, мы получим из формулы (2) выражение для первой вариации:

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx, \tag{3}$$

где в выражениях $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ значения y и y' заменены функциями $f(x)$ и $f'(x)$. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка $f''(x)$, то к интегралу

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta'(x)\, dx$$

можно применить интегрирование по частям, что дает:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x)\, dx = \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx. \tag{3'}$$

Первый член правой части равен нулю, ибо функция $\eta(x)$ на концах интервала обращается в нуль, и мы получаем вариацию δJ в новой форме:

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx. \tag{4}$$

Согласно лемме I (§ 619), для того чтобы иметь $\delta J = 0$ для всех возможных видов функции $\eta(x)$, необходимо, чтобы коэфициент при $\eta(x)$ под знаком интеграла был равен нулю во всем интервале (x_0, x_1). Отсюда мы получаем первое условие, которому должна удовлетворять функция $f(x)$:

Для того чтобы функция $f(x)$ доставляла относительный экстремум определенному интегралу J, необходимо, чтобы эта функция $f(x)$ удовлетворяла диференциальному уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \tag{5}$$

Это уравнение было получено впервые Эйлером *. Развернув выражение производной $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$, равенство (5) можно написать в виде:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

---

*) Institutiones Calculi integralis, т. III. Лагранж первый рассмотрел общие вариации (Oeuvres, т. I).

Если функция F содержит y' (а это и будет в общем случае), то уравнение (6) представляет уравнение второго порядка, и общий интеграл $f(x, a, b)$ зависит от двух произвольных постоянных a и b. Если потребовать, чтобы интегральная кривая проходила через две данные точки A и B области $\mathfrak{R}$, то нужно выбрать эти две постоянные так, чтобы удовлетворялись два условия $y_0=f(x_0, a, b)$, $y_1=f(x_1, a, b)$. Задача, вообще говоря, определенная, ибо число произвольных параметров, которыми можно располагать, равно числу уравнений. Следовательно, всякая функция $f(x)$ класса (I), дающая экстремум интегралу J, представляет интегральную кривую уравнения (5), проходящую через две точки A и B. Позже мы исследуем, всякая ли интегральная кривая, удовлетворяющая этим условиям, дает экстремум. Мы будем говорить вместе с Кнезером, что всякая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению Эйлера, есть *экстремальная* функция, а также соответствующая кривая Γ есть *экстремальная* кривая, или *экстремаль*. Через каждую точку (x_0, y_0) области $\mathfrak{R}$ проходит бесконечное множество экстремальных кривых, но среди них существует только одна, касательная к которой имеет угловой коэфициент y'_0, если только $F''_{y'^2}(x_0, y_0, y'_0)$ не равна нулю. Если вторая производная $F''_{y'^2}$ отлична от нуля в любой точке области $\mathfrak{R}$ и для любого значения y', то соответствующая задача вариационного исчисления называется *правильной*.

Замечание Дю-буа-Реймона (Du Bois-Reymond). Чтобы перейти от формулы (3) к формуле (4), мы предположили, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка; остается показать, что интегралы уравнения Эйлера представляют единственные функции $f(x)$ класса (I), для которых первая вариация равна нулю при любой функции $\eta(x)$.

Дю-Буа-Реймон первый это показал, но при доказательстве он вместо первой леммы пользовался второй и применял интегрирование по частям не ко второму члену интеграла (3), а к первому.

Если в выражении $\frac{\partial F}{\partial y}$ заменить y функцией $f(x)$ класса (I) и y' функцией $f'(x)$, то в результате этой подстановки получится непрерывная функция от x, которую можно представить в виде $\Phi'(x)$, где $\Phi(x)$ есть также непрерывная функция в интервале (x_0, x_1). Принимая это во внимание, применим формулу интегрирования по частям к интегралу $\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{\partial F}{\partial y}dx$; получим:

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{\partial F}{\partial y}dx=\int_{x_0}^{x_1}\Phi'(x)\eta(x)\,dx=[\Phi(x)\eta(x)]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta'(x)\,dx,$$

и мы приходим к новому выражению для δJ:

$$\delta J=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\eta'(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y'}-\Phi(x)\right]dx.$$

Этот интеграл должен быть равен нулю всякий раз, как

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta'(x)\,dx=0,$$

ибо если взять $\eta(x_0)=0$, то будет также и $\eta(x_1)=0$, а в таком случае коэфициент при $\eta'(x)$ под знаком интеграла должен быть равен постоянной величине, и функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению вида:

$$F_1[x, f(x), f'(x)] = \Phi(x) + C,$$

где функция $F_1(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Это уравнение, разрешенное относительно $f'(x)$, дает решение в виде: $f'(x)=\psi[x, f(x)]$, где функция ψ также имеет непрерывные производные первого порядка (т. I, § 66). Отсюда следует, что $f'(x)$ также имеет непрерывную производную $f''(x)$, и, следовательно, $f(x)$ представляет интеграл уравнения Эйлера.

Различные примечания. 1. Так как общий интеграл уравнения Эйлера содержит только две произвольные постоянные, то экстремаль, вообще говоря, определена, если заданы две ее точки. Но нельзя задать произвольно две точки экстремали и касательную в одной из этих точек, а отсюда следует, что соответствующая задача вариационного исчисления, вообще говоря, не имеет решения. Нельзя, например, поставить такую задачу: среди всех кривых класса (I), соединяющих две точки A и B и имеющих в точке A касательную, отличную от прямой AB, найти такую, длина которой была бы наименьшей. В самом деле, в этом случае экстремали суть прямые, и среди них нет ни одной, удовлетворяющей поставленным требованиям. Ясно, что в этом случае задача не имеет решения. С одной стороны, все кривые, удовлетворяющие этим условиям, имеют длину, превосходящую расстояние AB, а с другой стороны, среди них можно найти такую, длина которой отличается от длины AB как угодно мало.

2. В случае, если функция $F(x, y, y')$ зависит только от y', уравнение (6) приводится к виду $y''=0$, и все экстремали суть прямые.

Если функция $F(x, y, y')$ не зависит от y, то мы непосредственно получаем первый интеграл уравнения Эйлера. В самом деле, если исходить из первоначальной формы (5), в которой это уравнение было получено, то мы видим, что в этом случае оно равносильно уравнению первого порядка $\frac{\partial F}{\partial y'}=C$, откуда мы получаем $y'=\varphi(x, C)$, и интегрирование приводится к одной квадратуре.

Равносильное упрощение мы получаем в том случае, когда функция F не содержит x. В самом деле, в этом случае мы можем рассматривать уравнение первого порядка между y и $y'=p$ (т. II, ч. 2, § 380):

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial p}\,p+\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,p\,\frac{dp}{dy}=\frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy},$$

или

$$d\left(F-p\frac{\partial F}{\partial p}\right)=0.$$

Мы получаем, следовательно, первый интеграл, содержащий только y и y':

$$F(y, y')-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C, \tag{7}$$

а теперь достаточно одной квадратуры, чтобы интегрирование уравнения Эйлера было закончено.

Если функция F не содержит y', уравнение (5) обращается в $\frac{\partial F}{\partial y}=0$; единственные функции $f(x)$, для которых первая вариация δJ равна нулю, будут, следовательно, решениями этого уравнения. Экстремали в этом случае не зависят ни от какой произвольной постоянной.

3. Рассмотрим, как нужно выбрать функцию $F(x, y, y')$, чтобы интеграл J не зависел от кривой Γ. Для этого необходимо, чтобы первая вариация δJ была равна нулю, какова бы ни была эта кривая, и, следовательно, чтобы уравнение Эйлера привелось к тождеству. Мы должны, следовательно, иметь $F''_{y'^2}=0$, т. е. F есть линейная функция от y':

$$F=P(x, y)+y'Q(x, y).$$

Если функция F этого вида, то интеграл J есть криволинейный интеграл

$$J=\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

между тем как уравнение (6) принимает вид $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$. Найденное таким образом условие является необходимым и достаточным для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования (т. I, § 152) даже для кривых более общей формы, чем те, которые рассматриваются в этой главе, например для путей, имеющих конечное число угловых точек.

4. Заметим еще, что если заменить функцию F через

$$F+\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial \theta}{\partial y}y',$$

то уравнение (6) не изменится, и оба интеграла, очевидно, одновременно достигают максимума или минимума, какова бы ни была функция $\theta(x, y)$, ибо они отличаются только на постоянное

$$\theta(x_1 y_1)-\theta(x_0, y_0).$$

622. Примеры. Пусть $F=y^{\alpha}\sqrt{1+y'^2}$, где α — произвольный показатель, а область $\mathfrak{R}$ — часть плоскости над осью Ox. Уравнение Эйлера здесь имеет вид: $yy''-\alpha(1+y'^2)=0$, и первый интеграл (7) может быть записан в виде:

$$1+y'^2=\left(\frac{y}{c}\right)^{2\alpha}.$$

Это диференциальное уравнение уже было рассмотрено (т. I, § 281), и мы видели, что интегральные кривые получаются все из кривой γ, заданной уравнением:

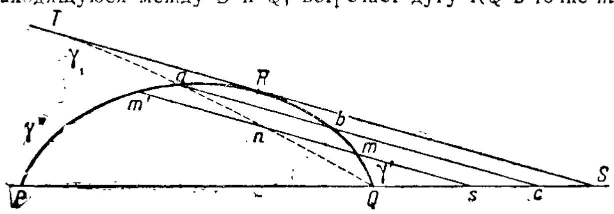
$$x=\mu\int_0^t \cos^{\mu} t\,dt, \quad y=\cos^{\mu} t, \tag{8}$$

где $\mu=-\frac{1}{\alpha}$, переносом, параллельным оси Ox и гомотетическим преобразованием относительно начала. Кривая γ имеет две совершенно различные формы в зависимости от знака показателя α. Так как мы рассматриваем только часть кривой над осью Ox, то достаточно при любом μ изменять t от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Если α положительно, то μ отрицательно, и кривая γ симметрична относительно оси Oy, которая проходит через самую низкую точку кривой. Кривая имеет две бесконечные ветви, для которых ось y является асимптотическим направлением, и она обращена выпуклостью в сторону отрицательных y. Общий вид ее напоминает параболу, если μ по абсолютной величине больше или равно единице; если значение μ содержится между -1 и 0, то кривая имеет две асимптоты параллельные оси Oy. Наоборот, если α отрицательно, то μ положительно, и кривая γ имеет форму, аналогичную ветви циклоиды, имеющей ось Oy осью симметрии и ограниченной двумя точками оси x, где касательная параллельна Oy. Выпуклость обращена в сторону положительных y.

Так как все экстремали подобны кривой γ, то, для того чтобы найти экстремаль, проходящую через две точки A и B, находящиеся над осью Ox, достаточно на кривой γ найти две точки a и b такие, чтобы хорда ab была параллельна прямой AB и чтобы было $\frac{AC}{BC}=\frac{ac}{bc}$, где C и c суть точки пересечения оси Ox с прямыми AB и ab соответственно. Так как точки A и B даны, то направление хорды ab известно, а также известно отношение k двух отрезков ac и bc. Определив таким путем эти точки a и b, достаточно одного подобного преобразования, чтобы получить экстремаль, проходящую через точки A и B. Вопрос легко решается с помощью геометрических соображений.

Первый случай. Пусть $\alpha<0$. Кривая γ, аналогичная циклоиде, разбивается на две части PR и QR в точке прикосновения касательной RS, параллельной ab (черт. 99а).

Всякая прямая, параллельная этой касательной и проходящая через точку s, находящуюся между S и Q, встречает дугу RQ в точке m и дугу RP в точке m'.



Черт. 99а.

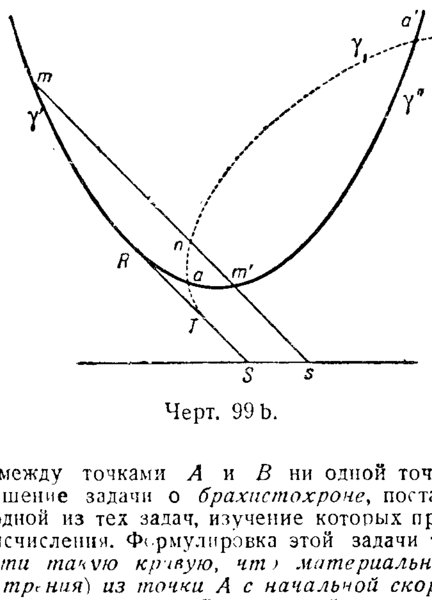
Отложим на этой прямой от точки s' длину $s'n=k\cdot s'm$. Геометрическим местом точек n будет дуга кривой γ_1, обращенная выпуклостью в ту же сторону, что и дуга QR и идущая от точки Q к точке T, расположенной на продолжении SR, так что $S'T=k\cdot S'R$. Пересечение этой дуги γ_1 с дугой PR даст искомую точку α. *Эти две дуги всегда имеют общую точку, и притом единственную.* Положим, в самом деле, $Ss=t$, $sm'=u$, $s'n=v$; u и v будут функциями от t, причем когда t изменяется от очень малого положительного значения до значения SQ, вторые производные u'' и v'' этих функций имеют противоположные знаки. Так как разность $u''-v''$ имеет постоянный знак, то $u-v$ может изменить знак не больше двух раз, а так как эта разность имеет противоположные знаки на концах, то она проходит через нуль и притом только один раз. Следовательно, ***всегда существует экстремаль, и притом единственная, проходящая через две данные точки** A и B **в области** $\mathfrak{R}$.*

Второй случай. Пусть $\alpha>0$. В этом случае точка прикосновения R касательной RS (черт. 99б) делит также кривую γ на две бесконечные ветви γ' и γ''. Всякая прямая, параллельная этой касательной и расположенная выше ее, встречает дуги γ' и γ'' в точках m и m' соответственно, и если мы на sm отложим отрезок sn, пропорциональный sm (чтобы отношение было больше единицы), то геометрическим местом точек n будет бесконечная ветвь γ_1, исходящая из точки T на RS и имеющая асимптотическое направление, угловой коэфициент которого конечен. Две дуги γ_1 и γ'', обращенные выпуклостью в противоположные стороны, могут встретиться не больше чем в двух точках.

В данном случае они не имеют ни одной или имеют две общие точки. *Через две точки области $\mathfrak{R}$ проходят, следовательно, либо две экстремальные кривые (которые могут в частном случае совпасть), либо не проходит ни одна.*

В частном случае, когда прямая AB параллельна Ox, построение упрощается. Эти две точки можно, очевидно, предположить симметричными относительно оси Oy, и искомая экстремаль должна быть гомотетична с γ относительно начала. Чтобы получить коэфициент гомотетии, достаточно взять пересечение прямой OA с дугою γ. Если $\alpha < 0$, точка пересечения существует и притом единственная, а следовательно, существует *единственное решение*. Если $\alpha > 0$, то прямая OA встречает γ в двух точках, если прямые OA и OB расположены в углу, образованном касательными, проведенными из точки O к дуге γ, и не встречает дуги γ в противном случае. Следовательно, либо существует *два решения, либо ни одного.*

Дадим теперь α несколько частных значений.



Черт. 99 b.

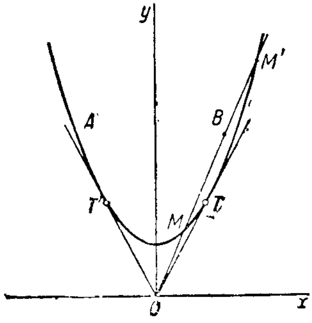
1. Пусть $\alpha = -1$. Формулы (8) представляют окружность, имеющую центр в начале координат. Экстремалями служат полуокружности, имеющие центр на оси Ox. Ясно, что через две точки A и B, расположенные над осью Ox, проходит экстремаль и притом единственная.

2. Пусть $\alpha = -\frac{1}{2}$. Имеем в этом случае $\mu = 2$, и формулы (8) дают циклоиду, имеющую основанием ось Ox. Экстремальными кривыми, следовательно, будут циклоиды, имеющие свои точки возврата на оси Ox. Мы видели, что через две точки A и B, расположенные по одну сторону оси Ox, проходит одна и только одна такая циклоида, не имеющая между точками A и B ни одной точки возврата. Этот частный случай дает решение задачи о *брахистохроне*, поставленной Иваном Бернулли в 1696 г. — одной из тех задач, изучение которых привело к общей теории вариационного исчисления. Формулировка этой задачи такова: *через две точки A и B провести такую кривую, что материальная точка, начавшая свое движение (без трения) из точки A с начальной скоростью v_0, двигаясь по этой кривой, приходит в точку B в кратчайшее время.* Предположим, что почти очевидно, что искомая кривая должна находиться в вертикальной плоскости, содержащей данные две точки (ср. § 623). Приняв эту вертикальную плоскость за плоскость xy, выберем в качестве оси x горизонталь, проходящую на высоте h над точкой A, где начальная скорость v_0 равна $\sqrt{2gh}$; ось y будем считать направленною вниз. Скорость движущейся точки, вышедшей из точки A с начальною скоростью $\sqrt{2gh}$, в каждый данный момент равна $\sqrt{2gy}$, и ясно, что эта движущаяся точка может достигнуть точки B только в том случае, если и эта последняя точка тоже находится под осью Ox. Время, которое движущаяся точка употребила на переход из точки A в точку B, дается криволинейным интегралом $\int\limits_{AB} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. Имеем, таким образом, с точностью до постоянного множителя:

$$F = \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1 + y'^2},$$

и, следовательно, искомая кривая есть дуга циклоиды, имеющей своим основанием ось Ox и проходящая через точки A и B так, что между точками A и B нет ни одной точки возврата.

3. Пусть $\alpha=1$. Здесь первый интеграл есть $y=C\sqrt{1+y'^2}$, а общий интеграл состоит из цепных линий, имеющих Ox своим основанием. Мы видели, что через две точки A и B, находящиеся над осью Ox, проходит 0 или 2 таких кривых. В частности, если прямая AB параллельна оси Ox, то задача сводится к проведению через данные две точки цепной линии, гомотетичной относительно начала цепной линии γ, которая имеет ось Oy осью симметрии. Если OT и OT'— две касательные, проведенные из начала к дуге γ, то все гомотетичные цепные линии находятся внутри угла TOT' (черт. 100).



Черт. 100.

Если угловой коэфициент прямой OB больше углового коэфициента касательной OT, равного 1,5088 ..., то прямая OB встречает цепную линию в двух точках A и B. Мы имеем две экстремали, проходящие через две точки A и B; чтобы их получить, достаточно взять за отношение гомотетии отношение $\frac{OB}{OM}$ или $\frac{OB}{OM'}$. Если угловой коэфициент прямой OB меньше 1,5088..., то прямая OB не встречает γ, и не существует экстремали, проходящей через точки A и B.

Этот случай соответствует следующей геометрической задаче. Заданы две точки в полуплоскости, находящейся над осью Ox, требуется провести кривую, соединяющую эти две точки (и расположенную над осью Ox), которая при вращении вокруг оси Ox давала бы поверхность вращения наименьшей площади. Если предположить, что кривая класса (I), дающая этот минимум, существует, то нужно взять $F=y\sqrt{1+y'^2}$, а областью $\mathfrak{R}$ будет всегда полуплоскость, расположенная над осью Ox.

Позже мы увидим, что в случае, если экстремали, проходящей через точки A и B, не существует, минимум не достигается на кривой класса (I).

4. Пусть $\alpha=-\frac{1}{2}$. Уравнение Эйлера допускает первый интеграл

$$y=c\,(1+y'^2),$$

и экстремальными кривыми являются параболы $(x-c)^2+(y-c')^2=y^2$, для которых ось Ox служит директрисой. Фокус экстремали, проходящей через две точки A и B, находится в точке пересечения двух окружностей, касающихся оси Ox и имеющих центры соответственно в точках A и B. Для того чтобы эти окружности пересекались, необходимо и достаточно, чтобы точка B находилась внутри параболы P с фокусом в точке A, для которой ось x является касательною в вершине. Различные экстремали, проходящие через точку A, суть траектории тяжелой материальной точки, брошенной из точки A в различных направлениях с одною и тою же начальною скоростью, а парабола P есть не что иное, как *парабола безопасности*. Этот результат легко получается как приложение *принципа наименьшего действия* (см. курсы механики).

623. Случай нескольких неизвестных функций. Метод, изложенный в § 621, распространяется без труда на случай, когда функция F зависит от нескольких функций переменной x и от их производных первого порядка. Рассмотрим для определенности функцию $F(x, y, z, y', z')$, непрерывную и допускающую непрерывные частные производные по крайней мере до третьего порядка для значений (x, y, z), взятых в области $\mathfrak{R}$ пространства, и для всех конечных значений y' и z'. Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ будут две произвольные точки области $\mathfrak{R}$, и Γ — кривая, соединяющая эти две точки, находящаяся *внутри* $\mathfrak{R}$ и заданная двумя уравнениями $y=f(x)$, $z=f_1(x)$, где f и f_1—две функции класса (I) в интервале (x_0, x_1). Каждой кривой Г этого вида соответствует конечное значение интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f_1(x), f'(x), f_1'(x)]\,dx = \int_{\Gamma} F(x, y, z, y', z')\,dx,$$

и можно поставить задачу — определить кривую Г так, чтобы значение интеграла J (вдоль этой кривой) было больше или меньше, чем его значение вдоль любой другой кривой того же вида, близкой к первой, расположенной в области $\mathfrak{R}$ и соединяющей две точки A и B. Чтобы формулировать задачу в более точной аналитической форме, достаточно распространить на пространство все, что было сказано выше (§ 620) для задачи на плоскости; мы не будем к этому возвращаться. Пусть $y=f(x)$, $z=f_1(x)$ будет система функций класса (I), дающая экстремум интегралу J; пусть, кроме того, $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ — две произвольные функции класса (I), обращающиеся в нуль при $x=x_0$ и $x=x_1$.

Ясно, что если в интеграле J заменить y через $f(x)+\alpha\eta(x)$ и z через $f_1(x)+\alpha\eta_1(x)$, то полученный интеграл будет функцией от α,

$$J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x)+\alpha\eta(x), \ldots, f_1'(x)+\alpha\eta_1'(x)]\,dx,$$

которая при $\alpha=0$ достигает максимума или минимума, каковы бы ни были функции $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, лишь бы только удовлетворялись указанные условия. Классическая формула диференцирования дает:

$$\alpha \int_{x}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial z}\eta_1(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\eta_1'(x)\right] dx.$$

Интегрируя по частям два последних члена и принимая во внимание граничные условия для η и η_1, получим:

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left\{\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] + \eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\right\} dx.$$

Согласно основной лемме § 619 δJ может быть нулем для всех возможных видов функций η и η_1 в том и только в том случае, если f и f_1 суть интегралы системы двух уравнений, аналогичных уравнению Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Мы будем говорить, что всякая система решений этих двух уравнений определяет экстремальную кривую в пространстве. В развернутом виде их можно записать так:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y'} z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z'} z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Если определитель

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z'}\right)^2$$

не равен тождественно нулю, то эта система может быть разрешена относительно y'' и z'', что приводит к системе уравнений второго порядка в нормальной форме:

$$y'' = \varphi(x, y, z, y', z'); \quad z'' = \varphi_1(x, y, z, y', z'). \quad (12)$$

Отсюда следует, что через каждую точку области $\mathfrak{R}$ проходит бесчисленное множество экстремальных кривых, но среди них существует, вообще говоря, только одна, имеющая в этой точке данную касательную, если только соответствующее значение Δ отлично от нуля. Если Δ не обращается в нуль во всей области $\mathfrak{R}$ для конечных значений y' и z', задача называется *правильной*.

Общий интеграл системы (12) зависит от четырех произвольных постоянных, которыми можно распорядиться так, чтобы, по крайней мере, если точки A и B не слишком удалены одна от другой, экстремаль проходила через эти две точки, но нельзя ставить требование — найти экстремаль, проходящую через эти точки и касающуюся в точке A прямой заданного направления.

Относительно системы (9) можно сделать замечания, аналогичные тем, какие были сделаны по поводу уравнения Эйлера.

Если в функцию F не входит одно из переменных x, y или z, то система допускает, в зависимости от того, какой именно случай имеет место, один из первых интегралов:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} - z' \frac{\partial F}{\partial z'} = C; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = C; \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = C. \quad (13)$$

Для того чтобы уравнения (10) и (11) обратились в тождества, F должно быть вида $P + Qy' + Rz'$, где P, Q и R — функции от x, y, z, удовлетворяющие условиям интегрируемости (т. I, § 155).

Пример. Пусть $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z}}$. Если осью z считать вертикаль, направленную вниз, то это выражение для F соответствует общей проблеме о брахистохроне. Так как функция F не содержит ни x, ни y, то система (9) в этом случае допускает два первых интеграла:

$$y' = C_1 \sqrt{z} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad 1 = C_2 \sqrt{z} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

откуда получаем:

$$y' = \frac{C_1}{C_2}, \qquad y = \frac{C_1}{C_2}x + C_3.$$

Экстремальные кривые, следовательно, расположены в вертикальных плоскостях. Выше мы видели, что эти кривые бы и циклоиды.

Мы не будем рассматривать случая, когда детерминант тождественно равен нулю. Позже (§ 645 и след.) мы рассмотрим один важный случай, когда два уравнения (10) и (11) совпадают.

624. Случай, когда функция F содержит производные высших порядков. Точно таким же путем можно вычислить первую вариацию интегралов, в которых подинтегральная функция содержит производные неизвестных функций до какого-нибудь определенного порядка. Пусть для определенности

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]$$

будет непрерывная функция, допускающая непрерывные частные производные до $n+2$-го порядка для всех конечных значений $y'\, y'', \ldots, y^{(n)}$ и для всех возможных положений точки (x, y) в области $\mathfrak{R}$ на плоскости. Мы будем для краткости говорить, что функция $f(x)$, непрерывная и допускающая непрерывные производные до n-го порядка в интервале (x_0, x_1), есть функция класса $(\mathrm{I})^{(n)}$ в этом интервале. Если соответствующая кривая Γ расположена в области $\mathfrak{R}$, то определенный интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f'(x), f(x), \ldots, f^{(n)}(x)]\,dx = \int_{\Gamma} F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx$$

имеет конечное значение, и можно поставить задачу: среди всех кривых этого вида, расположенных внутри $\mathfrak{R}$ и соединяющих две точки A и B этой области, найти такие, вдоль которых интеграл J имеет значение, большее или меньшее по сравнению с тем же интегралом, взятым по любой кривой того же класса, достаточно близкой к первой. Пусть $y = f(x)$ будет функция класса $(\mathrm{I})^n$, удовлетворяющая этому условию. Определенный интеграл

$$J(a) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + a\eta(x), \ldots, f^{(n)}(x) + a\eta^{(n)}(x)]\,dx$$

должен при $a=0$ достигать максимума или минимума, какова бы ни была функция $\eta(x)$ класса $(\mathrm{I})^n$, лишь бы только было $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Но мы имеем:

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)}(x)\right]dx,$$

где значения $y, y', \ldots, y^{(n)}$ поставлены вместо $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Допустим, что искомая функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2n$. Тогда можно применить обобщенную формулу интегрирования по частям (I, § 87) к каждому члену вида $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p)}(x)$, что дает:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p)}(x)\,dx =$$

$$= \left\{\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p-1)}(x) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta^{(p-2)}(x) + \ldots \pm \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta(x)\right\}_{x_0}^{x_1} \mp$$

$$\mp \int_{x_0}^{x_1}\frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta(x)\,dx$$

и мы получаем окончательно для $J'(0)$ выражение вида:

$$J'(0)=[F_0(x)\eta(x)+F_1\eta'(x)+\ldots+F_{n-1}\eta^{(n-1)}(x)]_{x_0}^{x_1}+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right]\right\}dx, \tag{14}$$

где $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ содержат x, y и производные от y не выше $(2n-1)$-го порядка.

Если в качестве $\eta(x)$ взять выражение, рассмотренное в § 619 и обращающееся в нуль вне интервала (ξ_0, ξ_1), находящегося внутри (x_0, x_1), то член, не содержащий интеграла, обращается в нуль на концах, и отсюда следует, что искомая функция $f(x)$ должна быть интегралом диференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right]=0. \tag{15}$$

Мы будем называть также *экстремальною функцией* всякий интеграл этого уравнения и *экстремальною кривою* соответствующую кривую. Так как уравнение (15) есть вообще уравнение $2n$-го порядка, то экстремали зависят от $2n$ произвольных постоянных. Экстремаль, следовательно, не определяется двумя точками A и B, и так как значения $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ не подчинены никаким условиям в точках $x=x_0$ и $x=x_1$, то значения $\eta'(x), \eta''(x), \ldots, \eta^{(n-1)}(x)$ на двух концах могут быть выбраны произвольно. Для того чтобы $J'(0)$ было равно нулю при любом выборе этих значений, необходимо, в силу общего выражения для $J'(0)$, чтобы значения функции $f(x)$ и ее $2n-1$ первых производных при $x=x_0$ и $x=x_1$ удовлетворяли соотношениям:

$$F_1=0, \quad F_2=0, \ldots, F_{n-1}=0.$$

Присоединив эти $2n-2$ соотношения к тем, которые выражают, что экстремаль проходит через две точки A и B, мы получим все $2n$ соотношений для определения $2n$ постоянных, от которых зависит экстремаль.

Можно было бы также поставить несколько иную задачу: найти функции класса $(1)^n$, которые дают экстремум интегралу J среди тех, которые при $x=x_0$ и при $x=x_1$ принимают наперед заданные значения, как и $n-1$ их первых производных. Тогда функция $\eta(x)$ должна вместе со своими $n-1$ производными на концах обращаться в нуль, и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была экстремалью, для того чтобы значение $J'(0)$ было равно нулю. $2n$ постоянных от которых зависит экстремаль, определены $2n$ граничными условиями, которым должна удовлетворять функция $f(x)$.

Можно было бы поставить много других задач того же рода, задавшись, кроме $f(x_0)$ и $f(x_1)$, еще значениями нескольких производных порядка ниже n при $x=x_0$ и $x=x_1$. Для того чтобы $J'(0)$ было равно нулю, функция $f(x)$ должна быть экстремалью, и число условий, которым должна удовлетворять экстремаль, всегда равно $2n$. В самом деле, если задать, например, значение $f^{(p)}(x_0)$, то это даст соотношение, связывающее $2n$ постоянных, от которых эта экстремаль зависит. Если значение $f^{(p)}(x_0)$ неопределенно, то $\eta^{(p)}(x_0)$ может иметь произвольное значение, и коэфициент F_p при $\eta^{(p)}(x)$ в выражении для $J'(0)$ должен при $x=x_0$ равняться нулю, а это опять дает условие, налагаемое на $2n$ постоянных.

Пример. Пусть требуется найти минимум интеграла $J=\int_0^1 y''^2\,dx$, причем функция $y(x)$ обращается в нуль при $x=0$ и при $x=1$. Имеем:

$$J'(0)=2\left[y''(x)\eta'(x)\right]_0^1+2\int_0^1 y^{(IV)}(x)\eta(x)\,dx.$$

Экстремалями являются кубические параболы $y=P_3(x)=px^3+qx^2+rx+s$. Если функция $y(x)$ не подчинена никакому другому условию, то необходимо, чтобы было $y''(0)=0$, $y''(1)=0$. Две точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ суть точки перегиба, и экстремалью служит прямая линия $y=0$. Если задать значения $y'(0)$ и $y'(1)$, то уравнение экстремали будет вида:

$$y=x(x-1)\left[\left(y_0'+y_1'\right)x-y_0'\right],$$

и, наконец, если задать только значение $y'(1)$, то экстремаль имеет точку перегиба в начале координат, и уравнение ее будет, следовательно:

$$y=\frac{y'(1)}{2}(x^3-x)$$

В каждом из этих случаев функция $P_3(x)$ дает абсолютный минимум интегралу, ибо, если заменить y на $P_3(x)+d\eta(x)$, то найдем, что

$$J(a)-J(0)=a^2\int_0^1 \eta''^2(x)\,dx.$$

625. Общее выражение для первой вариации. Займемся теперь вычислением первой вариации интеграла при наиболее общих предположениях. Положим, что в интеграле

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

вместо y подставлена функция от x и от некоторого числа параметров a_i, непрерывная и допускающая непрерывные производные по x и по этим параметрам; при этом x_0 и x_1 также предполагаются функциями этих параметров. Значение интеграла J представляет также функцию от a_i, для которой требуется найти полный диференциал первого порядка. Этот полный диференциал называется *первой вариацией интеграла* J, и его обозначают еще через δJ. Для вычисления δJ требуется только применение обычных правил диференцирования под знаком интеграла. Для определенности положим сперва, что у нас только один переменный параметр a. Пусть $x_0=\varphi_0(a)$, $x_1=\varphi_1(a)$ будут выражения пределов x_0 и x_1 как функций a, причем φ_0 и φ_1 суть непрерывные функции, имеющие непрерывные производные в некотором интервале, например $(0, h)$. Одна из этих функций или обе могут в частности обращаться в постоянные; это будет тот случай, рассмотрением которого мы ограничивались до сих пор. Пусть, с другой стороны, $y=f(x, a)$ есть непрерывная функция, как и все ее частные производные, которые будут входить в дальнейшие исследования, в области, заданной неравенствами: $0\leqslant a\leqslant h$, $\varphi_0(a)\leqslant x\leqslant\varphi_1(a)$. Мы предположим еще, что при вычислении производных второго порядка мы имеем право изменять порядок диференцирования и что всякая точка с координатами $[x, f(x, a)]$ остается в области $\mathfrak{R}$. И, наконец, положим $f(x)=f(x, 0)$. Если вместо y

подставить значение $f(x, \alpha)$, то значение J будет функцией $J(\alpha)$ параметра α, производная которой имеет выражение:

$$J'(\alpha) = \left[F(x, y, y')\frac{dx}{d\alpha}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}\right) dx.$$

Если функция $f(x, \alpha)$ имеет непрерывную вторую производную по x, то можно и здесь ко второму члену под знаком интеграла применить формулу интегрирования по частям, и мы получаем:

$$J'(\alpha) = \left[F(x, y, y')\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx. \quad (16)$$

Член правой части, не содержащий интеграла, может быть преобразован следующим образом Пусть (x_0, y_0) и (x_1, y_1) будут координаты переменных концов кривой интегрирования. Эти координаты являются функциями параметра α, а именно:

$$x_0 = \varphi_0(\alpha), \quad y_0 = f(x_0, \alpha), \quad x_1 = \varphi_1(\alpha), \quad y_1 = f(x_1, \alpha).$$

Имеем, следовательно:

$$\frac{dy_0}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = y_0'\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha},$$

где y_0' есть угловой коэфициент касательной в точке A к кривой интеграции. Аналогичную формулу получаем для $\frac{dy_1}{d\alpha}$ и отсюда

$$\frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{dy_0}{d\alpha} - y_0'\frac{dx_0}{d\alpha}, \quad \frac{\partial f(x_1, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{dy_1}{d\alpha} - y_1'\frac{dx_1}{d\alpha},$$

где y_1' есть угловой коэфициент касательной в точке B к кривой интегрирования. Таким образом проинтегрированный член в выражении для $J'(\alpha)$ равен:

$$F(x_1, y_1, y_1')\frac{dx_1}{d\alpha} + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\left(\frac{dy_1}{d\alpha} - y_1'\frac{dx_1}{d\alpha}\right) -$$
$$- F(x_0, y_0, y_0')\frac{dx_0}{d\alpha} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\left(\frac{dy_0}{d\alpha} - y_0'\frac{dx_0}{d\alpha}\right);$$

умножая обе части формулы (16) на $\delta\alpha$, мы получаем общее выражение для первой вариации:

$$\delta J = \left[F(x_1, y_1, y_1') - y_1'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\right]\delta x_1 - \left[F(x_0, y_0, y_0') - y_0'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\right]\delta x_0 +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\delta y_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx. \quad (17)$$

В этой формуле δy есть диференциал $\frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha$ самой функции $f(x, \alpha)$, а $\delta x_0, \delta y_0, \delta x_1, \delta y_1$ означают диференциалы координат концов A и B пути интегрирования; обозначения $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1$ не требуют пояснений. Можно также формулу (17) записать в более сжатой форме:

$$\delta J = \left[\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx. \qquad (18)$$

Чтобы получить $J'(0)$, достаточно разделить обе части этого равенства на α и приближать α к нулю. Но, если $f(x, \alpha)$ определена только для положительных значений α, то $J'(0)$ есть предел частного $\frac{J(\alpha) - J(0)}{\alpha}$ в предположении, что α стремится к нулю, принимая при этом только *положительные значения.*

Так как левая часть формулы (18) линейна относительно $\delta y, \delta x_0, \delta y_0, \delta x_1, \delta y_1$, то ясно, что эта формула легко распространяется на случай, когда x_0, x_1 и y зависят от любого числа параметров. Нетрудно видеть, что члены, не входящие под знак интеграла, зависят только от бесконечно малых перемещений концов дуги интегрирования и от углового коэфициента касательной к кривой интегрирования в этих точках.

Совершенно аналогичным путем мы получим для первой вариации интеграла $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ формулу:

$$\delta J = \left[\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1} +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta z\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right] dx, \qquad (19)$$

где (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) суть координаты концов дуги интегрирования. Если функция F допускает производные высших порядков, то с помощью интегрирования по частям можно представить δJ в виде суммы проинтегрированного члена и определенного интеграла. Мы ограничимся только предыдущим частным случаем.

Выражение для δJ, вообще говоря, содержит определенный интеграл. Для того чтобы этот интеграл обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы кривая, которая получится при рассматриваемых частных значениях параметров, от которых зависит кривая интегрирования, была экстремальной кривой. Это обращение в нуль будет наверно иметь место, если мы будем вычислять вариацию интеграла J, взятого вдоль дуги экстремальной кривой, которая перемещается непрерывно. *Следовательно, первая вариация δJ интеграла, взятого вдоль дуги экстремали, выражается только через бесконечно малые перемещения концов дуги.*

Из этой теоремы, основной в вариационном исчислении, вытекает как частный случай большое количество известных результатов. Например, если $F=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$, то экстремалями являются прямые линии, и формула (19) совпадает с той, которая выражает диференциал отрезка прямой (т. I, § 84).

Примечание. Если функция F имеет вид: $P(x, y)+Q(x, y)y'$, то формула (18) принимает вид:

$$\delta J=(P\,\delta x+Q\,\delta y)_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\delta y\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx, \tag{20}$$

и проинтегрированный член не зависит от направления касательной к дуге интегрирования в точках A и B. Отсюда следует, что формула (20) применима к такому пути интегрирования, который допускает конечное число угловых точек. В этом случае достаточно разбить путь интегрирования на несколько дуг, не имеющих угловых точек, применить формулу (20) к каждой из них и результаты сложить.

Если выполняется условие интегрируемости $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то формула еще упрощается и дает: $\delta J=\left(P\delta x+Q\delta y\right)_{x_0}^{x_1}$, что в точности совпадает с известными результатами (I, § 152). Эти замечания распространяются и на формулу (19), если F имеет вид: $P(x, y, z)+Q(x, y, z)y'+R(x, y, z)z'$.

626. Случай переменных пределов. Трансверсали. Обратимся снова к задаче, изложенной в § 621, в предположении, что концы кривой интегрирования переменные. Пусть C_0 и C_1 будут две кривые, расположенные внутри области $\mathfrak{R}$, а Γ — кривая класса (I), находящаяся также в области $\mathfrak{R}$ и соединяющая точку A кривой C_0 с точкою B кривой C_1. Требуется определить эту кривую Γ так, чтобы значение интеграла

$$J=\int_{\Gamma}F(x, y, y')\,dx$$

было больше или меньше значения того же интеграла, взятого для любой другой кривой того же вида, достаточно близкой к данной и соединяющей точку кривой C_0 с точкой кривой C_1. Прежде всего очевидно, что кривая Γ должна быть экстремалью, ибо вариация δJ интеграла должна быть равна нулю, если мы изменяем путь интегрирования, оставляя концы неподвижными. Предполагая, что это условие выполнено, представим себе, что дуга интегрирования непрерывно изменяется от начального положения AB, причем начальная точка A остается неподвижной, а другой конец B перемещается вдоль кривой C_1. Согласно общей формуле (18), которая дает δJ, мы для этого бесконечно малого перемещения найдем:

$$\delta J=\left[F(x_1, y_1, y_1')-y_1'F'_{y'}(x_1, y_1, y_1')\right]\delta x_1+F'_{y'}(x_1, y_1, y_1')\,\delta y_1,$$

где (x_1, y_1) суть координаты точки B, y_1' — угловой коэфициент касательной в точке B к экстремали, δx_1, δy_1 — диференциалы перемещения точки B по кривой C_1. Для того чтобы дуга AB давала экстремум интегралу, вариация δJ должна быть равна нулю, и мы получаем новое необходимое условие для экстремума

$$[F(x_1, y_1, y_1') - y_1' F'_{y'}(x_1, y_1, y_1')]\,\delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y_1')\,\delta y_1 = 0. \quad (21)$$

Точно так же, оставляя точку B неподвижной, а перемещая точку A вдоль кривой C_0, мы получим еще одно необходимое условие:

$$[F(x_0, y_0, y_0') - y_0' F'_{y'}(x_0, y_0, y_0')]\,\delta x_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y_0')\,\delta y_0 = 0, \quad (22)$$

где x_0, y_0 суть координаты точки A, y_1' — угловой коэффициент касательной в точке A к экстремали, δx_0, δy_0 — направляющие параметры касательной в точке A к кривой C_0.

Итак, для того чтобы интеграл J достигал экстремума вдоль кривой AB, необходимо, чтобы: 1) *эта кривая была экстремалью и* 2) *в точках A и B удовлетворялись условия* (21) *и* (22).

Эта задача определенная, ибо два произвольные постоянные, от которых зависят экстремали, связаны двумя соотношениями.

Если одна из точек A и B остается неподвижной, то соответствующее соотношение (21) или (22) должно быть заменено тем, которое выражает, что экстремаль проходит через данную точку. Например, если кривая C_0 есть прямая, параллельная оси y, то мы имеем $\delta x_0 = 0$, и условие (22) принимает вид: $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') = 0$; это условие можно также получить из формулы (3') § 621, если обратить внимание на то, что так как для $x = x_0$ значение y не определено, то значение $\eta(x_0)$ произвольно.

Пусть вообще (x, y) будут координаты точки M экстремали Γ, y' — угловой коэффициент касательной к ней в этой точке; δx, δy — направляющие параметры касательной к некоторой другой кривой C, проходящей через ту же точку. Вместе с Кнезером мы будем говорить, что экстремаль *пересекает трансверсально* кривую C в точке M, если величины $x, y, y', \delta x, \delta y$ удовлетворяют соотношению:

$$[F(x, y, y') - y'F'_{y'}(x, y, y')]\,\delta x + F'_{y'}(x, y, y')\,\delta y = 0. \quad (23)$$

Пользуясь этим термином, мы можем сказать, что соотношения (21) и (22) выражают, что для того чтобы *экстремаль AB давала экстремум, она должна пересекать трансверсально кривые C_0 и C_1 соответственно в точках A и B.*

В частном случае, когда функция F имеет вид: $g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$, условие (23) переходит в $g(\delta x + y'\delta y) = 0$; оно выражает, что касательные к кривым C и Γ ортогональны в любой точке, в которой $g(x, y)$ отлично от нуля, и это условие ортогональности имеет место только в этом единственном случае. Если $g(x, y) = 0$, то экстремали суть прямые, и мы приходим к известному уже результату, что линии, дающие экстремум для расстояния между двумя точками, взятыми соответственно на кривых C_0 и C_1, представляют общие нормали к этим двум кривым. Известно, кроме того, что не все эти нормали дают решение задачи, и это показывает, что полученные условия не достаточны и в общем случае для того, чтобы дуга AB давала экстремум интегралу J.

Так как соотношение (23) линейно относительно δx и δy, то кривые C, которые пересекаются трансверсально данною экстремалью в данной точке, имеют одну и ту же касательную в этой точке. Если задано семейство экстремалей Γ, зависящее от произвольного параметра a, так что через каждую точку области $\mathfrak{R}$ на плоскости проходит одна из них, то существует семейство кривых C, которые пересекаются трансверсально в каждой точке той экстремалью рассматриваемого семейства, которая проходит через эту точку. В самом деле, угловой коэфициент y' касательной к экстремали, которая проходит через точку (x, y), является в этом случае функцией от x, y, и условие (23) дает диференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ для определения кривых C. Мы будем говорить, что эти кривые C образуют *семейство трансверсальных кривых*.

Обратно, всякая кривая C, которая не есть экстремаль, принадлежит к некоторому семейству трансверсалей. В самом деле, через каждую точку M кривой C проходит экстремаль Γ, которая пересекает трансверсально кривую C в этой точке. (Таких экстремалей может быть и несколько, если уравнение (23) имеет несколько решений относительно y', но мы будем рассматривать только те решения, которые изменяются непрерывно, когда точка M перемещается по кривой C.) Экстремали, полученные таким путем, действительно зависят от одного параметра и являются трансверсалями кривой C. Другие трансверсали того же семейства получаются из кривой C с помощью следующего построения. Возьмем на экстремали, проходящей через точку M и трансверсальной к кривой C, точку M' такую, чтобы интеграл

$$J = \int\limits_{MM'} F(x, y, y')\, dx$$

имел данное значение K. Когда точка M описывает кривую C, точка M' описывает кривую C', причем одна или обе кривые могут обращаться в точку. Согласно самому построению первая вариация δJ интеграла вдоль MM' равна нулю, и эта дуга MM' трансверсальна к кривой C в точке M. Согласно общей формуле (18), которая дает значение δJ, она должна быть также трансверсальна и к C'. Изменяя значение постоянного K, мы получим семейство трансверсалей, в которое входит кривая C. Мы пока только отмечаем это важное предложение, которое является обобщением хорошо известных свойств параллельных. Позже мы к нему еще вернемся.

Будем теперь искать пространственные кривые Γ, которые дают экстремум интегралу $J = \int\limits_{(\Gamma)} F(x, y, z, y', z')\, dx$, причем концы A и B кривой Γ остаются на двух данных поверхностях Σ_0 и Σ_1. Прежде всего очевидно, что кривая Γ должна быть экстремалью. Оставляя неподвижным один из концов A или B и перемещая другой по соответствующей поверхности, мы найдем, что диференциалы бесконечно малых перемещений по этой поверхности должны удовлетворять соотношению, которое получится, если мы приравняем нулю вариацию δJ, данную формулой (19). Пусть вообще (x, y, z) будут координаты точки M экстремали Γ, y' и z' — значения производных в этой точке, Σ — некоторая поверхность, проходящая через точку M, и

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$$

есть уравнение касательной плоскости к поверхности Σ в точке M. Мы будем говорить, что экстремаль Γ пересекает трансверсально поверхность Σ в точке M, если имеют место соотношения:

$$\frac{F(x, y, z, y', z')-y'F'_{y'}-z'F'_{z'}}{P}=\frac{F'_{y'}}{Q}=\frac{F'_{z'}}{R}. \tag{24}$$

Если записать, что $\delta J=0$ тождественно, в предположении, что точка A остается неподвижной, а точка B перемещается по поверхности Σ_1 в произвольном направлении, то получатся условия, которые выражают, что экстремаль AB трансверсальна к поверхности Σ_1 в точке B, и совершенно аналогично получится условие для точки A. Таким образом экстремаль AB должна пересекать трансверсально поверхности Σ_0 и Σ_1 в точках A и B соответственно.

Остается еще четыре условия для определения четырех постоянных, от которых зависят экстремали. Если функция F имеет вид:

$$g(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

то условия (24) выражают, что экстремаль Γ ортогональна к поверхности Σ.

Так как условия (24) линейны относительно P, Q и R, то направление касательной к экстремали в точке M определяет положение касательной плоскости к Σ, так что все поверхности, которые пересекаются трансверсально одной экстремалью в одной и той же точке, имеют в этой точке общую касательную плоскость. Отсюда следует, что если задана конгруэнция экстремальных кривых такая, что через каждую точку области R пространства проходит одна из них, то не всегда существует семейство поверхностей Σ, которые пересекались бы трансверсально этими экстремалями (т. II, § 440), точно так же, как не всегда конгруэнция прямых может быть составлена из нормалей к поверхности. Но любая поверхность Σ входит всегда в семейство трансверсальных поверхностей, которые получаются из поверхности Σ таким же построением, как и в случае плоскости. Через каждую точку M поверхности Σ проходит экстремаль Γ, которая трансверсальна к этой поверхности. Возьмем на этой экстремали точку M' такую, чтобы интеграл

$$\int\limits_{MM'} F(x, y, z, y', z')\,dx$$

имел постоянное значение K. Когда точка M описывает поверхность Σ, то экстремали Γ образуют конгруэнцию, и точка M' описывает поверхность Σ', которая пересекается трансверсально всеми этими экстремалями.

Примечание. Каждая из поверхностей Σ_0 и Σ_1 может выродиться в кривую или в точку. Если, например, Σ_0 вырождается в кривую C_0, то два условия трансверсальности должны быть заменены двумя другими условиями, из которых одно выражает, что искомая экстремаль встречает кривую C_0, а другое выражается соотношением:

$$[F(x_0, y_0, z_0; y'_0, z'_0) - y'_0 F'_{y'} - z'_0 F'_{z'}]\,\delta x_0 + F'_{y'}\,\delta y_0 + F'_{z'}\,\delta z_0 = 0,$$

где δx_0, δy_0, δz_0 — направляющие параметры касательной к кривой C_0 в точке A. Когда поверхность Σ_0 обращается в точку, то экстремаль должна проходить через эту точку.

627. Задачи условного экстремума. Во всех предыдущих задачах неизвестные функции должны удовлетворять некоторым условиям, в которых участвуют только граничные значения. В других задачах, которые называются *задачами условного (или связанного) экстремума*, напротив того, искомые функции должны удовлетворять условиям, в которых участвуют все значения этих функций в интервале интеграции. Некоторые из этих задач приводятся к рассмотренным уже задачам *безусловного* или *свободного экстремума*. Положим, например, что среди кривых, расположенных на поверхности S и соединяющих две данные точки этой поверхности, требуется найти такую кривую Γ, чтобы интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx,$$

взятый вдоль этой кривой, достигал экстремума. Если предположить, что из уравнения поверхности координата z выражена как функция от x и y, то задача приводится к первой из задач, рассмотренных в § 621. Таким образом вопросы этого рода не существенно отличаются от задач свободного экстремума, но иногда бывает удобнее рассматривать эти вопросы, непосредственно используя метод, аналогичный методу множителей Лагранжа в обычных задачах максимума и минимума.

Рассмотрим в качестве примера задачу о проведении кратчайшей линии между двумя данными точками поверхности. Пусть будут A и B две данные точки поверхности S. Всякая кривая Γ, лежащая на поверхности S, соединяющая эти две точки и не имеющая угловых точек, может быть представлена системой трех уравнений:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

где f_1, f_2, f_3 — функции класса (I), которые удовлетворяют уравнению поверхности $G(x, y, z) = 0$, а параметр t можно всегда выбрать так, чтобы концам A и B соответствовали значения параметра 0 и 1. Кроме того, эти функции при $t = 0$ и $t = 1$ должны принимать заданные значения. Среди всех систем функций, удовлетворяющих этим условиям, требуется найти такую, для которой интеграл

$$J = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

достигает минимума; здесь x', y', z' означают производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Заменим в интеграле J переменные x, y, z функциями $\varphi_1(t, \alpha)$, $\varphi_2(t, \alpha)$, $\varphi_3(t, \alpha)$, которые при любом значении параметра α удовлетворяли бы тем же условиям, что и функции f_1, f_2, f_3, и при $\alpha = 0$ обращались бы в функции f_1, f_2, f_3. После этой подстановки интеграл J становится функцией $J(\alpha)$ параметра α производная которой J' при $\alpha=0$ после преобразований, аналогичных приведенным в § 625 принимает вид:

$$J'(0) = -\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)\eta_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)\eta_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)\eta_3 \right\} dt,$$

где η_1, η_2, η_3 — функции от t класса (I), равные соответственно значениям $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha}$ при $\alpha=0$. Эти функции при $t=0$ и $t=1$ обращаются в нуль, но они не независимы в этом интервале, ибо должны для каждой точки кривой Γ удовлетворять соотношению:

$$\frac{\partial G}{\partial x}\eta_1 + \frac{\partial G}{\partial y}\eta_2 + \frac{\partial G}{\partial z}\eta_3 = 0, \tag{25}$$

значение которого очевидно. Для того чтобы соотношение $J'(0)=0$ было следствием условия (25), необходимо и достаточно *, чтобы было

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)}{\frac{\partial G}{\partial x}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}}. \tag{26}$$

---

* Пусть вообще F_1, F_2, F_3 — непрерывные функции от t, данные в интервале (t_0, t_1), η_1, η_2, η_3 — функции класса (I) в этом интервале, которые обращаются в нуль при $t=t_0$ и $t=t_1$ и удовлетворяют линейному соотношению

$$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3 = 0, \tag{A}$$

где f_1, f_2, f_3 суть непрерывные функции от t. Если эта система функций η_i удовлетворяет еще условию $\int_{t_0}^{t_1}(\eta_1 F_1 + \eta_2 F_2 + \eta_3 F_3)\,dt = 0$, то отсюда следует, что соотношения

$$\frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2} = \frac{F_3}{f_3} \tag{B}$$

имеют место для всякого значения t в интервале (t_0, t_1). В самом деле, условия (A) будут удовлетворены, если положить

$$\eta_1 = \lambda_3 f_2 - \lambda_2 f_3, \quad \eta_2 = \lambda_1 f_3 + \lambda_3 f_1, \quad \eta_3 = \lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные функции класса (I), обращающиеся в нуль при $t=0$ и $t=1$.

А так как интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} [\lambda_1(F_2 f_3 - f_2 F_3) + \lambda_2(F_3 f_1 - f_3 F_1) + \lambda_3(F_1 f_2 - f_1 F_2)]\,dt$$

должен быть равен нулю для всех возможных видов функций λ_i, то отсюда следует, что условия (B) выполнены.

Эти условия выражают, что *нормаль к поверхности S совпадает с главною нормалью к кривой* Γ (т. I, § 225), ибо отношения

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

как раз равны направляющим косинусам касательной. Искомая кривая есть *геодезическая линия* (см. дальше, § 651).

628. Изопериметрические задачи. Задачи, которые мы сейчас рассмотрим и которые называются *изопериметрическими задачами*, не могут быть разрешены тем же путем. Пусть требуется среди кривых Γ класса (I), расположенных в области $\Re$ и соединяющих две точки A (x_0, y_0) и B (x_1, y_1) этой области, найти такие, для которых интеграл

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$$

имеет данное значение C и для которых интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

имеет относительный экстремум.

Рассуждая, как в § 621, положим, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет всем этим условиям; пусть, с другой стороны, $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ — две функции класса (I) в интервале (x_0, x_1), обращающиеся в нуль на концах этого интервала. Если в функции $F(x, y, y')$ заменить y на $f(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x)$, где α_1 и α_2 — два произвольных параметра, то интеграл J делается функцией этих параметров:

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x),\ f'(x) + \alpha_1\eta_1'(x) + \alpha_2\eta_2'(x)]\,dx. \tag{27}$$

Выполнив ту же подстановку в функции $G(x, y, y')$, мы заменим и интеграл J_1 функцией от α_1 и α_2. Если записать, что эта функция равна постоянному C, то получится соотношение, связывающее два параметра α_1 и α_2:

$$J_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x_1} G[x, f(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x),\ f'(x) + \ldots]\,dx = C. \tag{28}$$

Функция $J(\alpha_1, \alpha_2)$ от двух параметров α_1, α_2, связанных соотношением (28), должна достигать максимума или минимума для значений $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Для этого необходимо, чтобы было (т. I, § 52):

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right)_0 \left(\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\right)_0 = 0.$$

Преобразуя выражения для производных $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right)_0, \ldots$ подобно тому, как это сделано в § 621, можно это соотношение записать в виде:

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]dx} = \frac{\displaystyle\int_{x^0}^{x_1} \eta_2(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]dx}.$$

Так как функции η_1 и η_2 независимы друг от друга, то общее значение этих отношений должно быть равно постоянной величине K, не зависящей от вида функций $\eta(x)$, и, следовательно, для всех возможных видов функции $\eta(x)$ класса (I) в интервале (x_0, x_1) и обращающейся в нуль при $x = x_0$ и $x = x_1$ имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left\{ \frac{\partial (F - KG)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial (F - KG)}{\partial y'} \right] \right\} dx = 0. \tag{29}$$

Таким образом искомая функция $f(x)$ представляет собой интеграл диференциального уравнения:

$$\frac{\partial (F - KG)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial (F - KG)}{\partial y'} \right] = 0, \tag{30}$$

в которое входит неизвестное постоянное K. Следовательно, экстремали для данной задачи, т. е. интегралы этого уравнения, зависят от трех постоянных: K и двух постоянных, введенных интегрированием. Это есть необходимое число постоянных, при котором можно ставить задачу о нахождении экстремали, проходящей через две точки A и B, вдоль которой интеграл J_1 принимает данное значение C. Задача, следовательно, вообще говоря, определенная. Следует заметить, что, если поменять местами функции F и G, то диференциальное уравнение задачи от этого не изменится, ибо это приведется к замене постоянного K на $\frac{1}{K}$. Это есть обобщение хорошо известного факта в обычных задачах максимума и минимума.

Рассмотрим для примера изопериметрическую задачу в узком смысле, ту, по которой и названы все задачи этой категории. Пусть требуется найти дугу кривой данной длины S, соединяющую две точки A и B и образующую с отрезком AB сегмент наибольшей площади. Примем за ось x прямую AB и допустим, что существует кривая Γ, соответствующая условиям задачи и заданная уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ есть функция класса (I). В этом случае имеем:

$$F = y, \quad G = \sqrt{1 + y'^2}, \quad F - KG = y - K\sqrt{1 + y'^2}.$$

Диференциальное уравнение (30) допускает первый интеграл (§ 621):

$$y - K\sqrt{1 + y'^2} + \frac{Ky'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y\sqrt{1 + y'^2} - K}{\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

из которого легко получается общий интеграл:

$$(x - C')^2 + (y - C)^2 = K^2.$$

Таким образом экстремалями являются окружности, и задача приводится к проведению дуги окружности длины S, проходящей через две точки A и B. Эта задача имеет решение и притом единственное, если только S больше расстояния l между данными точками A и B и меньше πl, по крайней мере, если ограничиться кривыми класса (I) (ср. § 645, 651).

629. Первая вариация двойного интеграла. Пусть будет $F(x, y, z, p, q)$ функция пяти независимых переменных x, y, z, p, q, непрерывная вместе со своими частными производными до третьего порядка для значений x, y, z в области $\mathfrak{R}$ пространства и для любой системы конечных значений p и q. Рассмотрим замкнутую кривую Γ, расположенную в области $\mathfrak{R}$, проекция которой на плоскость xy представляет замкнутую кривую C без двойных точек. Пусть, далее, $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности S, расположенной в области $\mathfrak{R}$. Для того чтобы эта поверхность S проходила через кривую Γ, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ принимала данную последовательность значений, когда точка (x, y) описывает кривую C. Если, кроме того, эта функция, как и ее частные производные первого порядка, непрерывна во всех точках (x, y) области A плоскости xy, ограниченной кривою C, а также и на самой кривой, мы будем говорить, что функция $f(x, y)$ и поверхность S принадлежат к классу (I) в области A. Заменим в функции F переменные z, p, q соответственно через $f(x, y)$, f'_x и f'_y. В результате такой подстановки получится функция, непрерывная в области A, и двойной интеграл

$$J = \iint\limits_A F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \tag{31}$$

имеет конечное значение для всякой поверхности S класса (I). Можно для этого двойного интеграла поставить задачу, совершенно аналогичную той, которую мы ставили для кривых, а именно: найти, если она существует, среди поверхностей S класса (I), проходящих через кривую Γ и расположенных в области $\mathfrak{R}$, такую поверхность, для которой интеграл (31) имеет значение меньшее, чем для любой другой поверхности, удовлетворяющей тем же условиям.

Обозначим вообще через $\eta(x, y)$ функцию класса (I) в области A, обращающуюся в нуль вдоль кривой C. Если $z = f(x, y)$ есть уравнение поверхности класса (I), проходящей через Γ, то уравнение

$$z = f(x, y) + \alpha\eta(x, y)$$

представляет пучок поверхностей, проходящих через Γ, и функция параметра α

$$J(\alpha) = \iint\limits_A F[x, y, f(x, y) + \alpha\eta(x, y), f'_x + \alpha\eta'_x, f'_y + \alpha\eta'_y]\, dx\, dy$$

должна иметь минимум при $\alpha = 0$, каков бы ни был вид функции $\eta(x, y)$. А для этого необходимо, чтобы первая вариация δJ была равна нулю. Обычная формула диференцирования под знаком интеграла, которая без труда распространяется на двойные интегралы, дает:

$$\delta J = \alpha \iint\limits_A \left[\frac{\partial F}{\partial z}\eta(x, y) + \frac{\partial F}{\partial p}\eta'_x + \frac{\partial F}{\partial q}\eta'_y\right] dx\, dy, \tag{32}$$

где после диференцирования z, p и q должны быть заменены на $f(x, y)$, f'_x, f'_y соответственно. Положим, что функция $f(x, y)$ допускает частные производные второго порядка, непрерывные внутри C. Тогда формула Грина дает (I, § 126):

$$\int\limits_C \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial p}\, dy = \iint\limits_A \left[\eta'_x\frac{\partial F}{\partial p} + \eta(x, y)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right] dx\, dy,$$

а так как функция $\eta(x, y)$ равна нулю вдоль всей кривой C, то двойной интеграл от $\eta'_x\dfrac{\partial F}{\partial p}$ можно заменить двойным интегралом от произведения

$$\eta(x, y)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)$$

с обратным знаком. Поступив точно так же с последним двойным интегралом формулы (32), мы получаем:

$$\delta J = \alpha \iint\limits_A \eta(x, y)\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dx\, dy. \tag{33}$$

Для того чтобы вариация δJ была равна нулю при всех возможных видах функции $\eta(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы коэфициент при $\eta(x, y)$ под знаком интеграла был равен нулю. В самом деле, положим, например, что этот коэфициент в окрестности точки (a, b) внутри контура C положителен; пусть ρ — положительное число, настолько малое, что окружность C_ρ, описанная из центра (a, b) радиусом ρ, вся находится внутри C и что коэфициент при $\eta(x, y)$ внутри C_ρ положителен. Если теперь функцию $\eta(x, y)$ определить так, чтобы было: 1) $\eta = 0$ вне круга C_ρ и 2) внутри круга C_ρ

$$\eta(x, y) = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - \rho^2]^4,$$

то очевидно, что δJ будет положительно. Следовательно, для того чтобы функция $f(x, y)$ давала интегралу J минимальное значение, необходимо, чтобы эта функция $f(x, y)$ была интегралом диференциального уравнения в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0, \tag{34}$$

аналогичного уравнению Эйлера (5).

Мы приходим, таким образом, к решению задачи Дирихле для уравнения (34) и контура C, т. е. к нахождению интеграла этого уравнения, непрерывного вместе со своими частными производными первого порядка и принимающего на этом контуре последовательность данных значений. Метод, с помощью которого получено уравнение (34), есть в конце концов не что иное, как распространение метода Римана, устанавливающего принцип Дирихле (§ 512).

Пример. Нахождение поверхности минимальной площади, проходящей через данный контур, приводит к нахождению минимума двойного интеграла

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Соответствующее уравнение в частных производных имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) = 0,$$

или в раскрытом виде

$$r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs = 0. \tag{35}$$

Это уравнение выражает, что сумма главных радиусов кривизны равна нулю. Интегральными поверхностями служат поверхности средней кривизны, равной нулю, или *минимальные поверхности*.

Примечание. Для перехода от уравнения (32) к уравнению (33) мы предположим, что неизвестная функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Соображения Дю-Буа-Реймона, аналогичные изложенным в § 621, здесь не имеют места (см. упражнения, стр. 294).

II. ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Не всякая экстремаль необходимо дает максимум или минимум интегралу J, как мы в этом уже неоднократно убеждались. Эта экстремаль должна удовлетворять еще другим условиям, наиболее простое из которых получится, если выразить, что вторая вариация имеет постоянный знак. Мы рассмотрим эти условия для первой из задач, приведенных в § 621, а чтобы не прерывать ход рассуждений, мы предпошлем замечание, которым позже придется воспользоваться.

630. Предварительное замечание. Пусть $y = \varphi(x)$ будет функция, непрерывная в интервале (x_0, x_1), производная которой $\varphi'(x)$ имеет в этом интервале *конечное* число точек разрыва первого рода (т. I, § 9). Кривая Γ', изображаемая уравнением $y = \varphi(x)$, имеет некоторое число угловых точек, но ни одна из касательных к этой кривой не параллельна оси y. Мы будем для краткости говорить, что такая функция $\varphi(x)$ и кривая Γ' принадлежат к классу (II). Если кривая Γ' находится в области $\mathfrak{R}$, определенной выше (§ 620), то интеграл

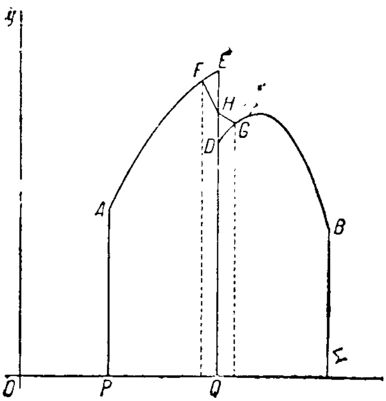
$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} F[x, \varphi(x), \varphi'(x)]\,dx = \int_{\Gamma'} F(x, y, y')\,dx,$$

т. е. сумма интегралов, распространенных на промежутки, в которых $\varphi'(x)$ непрерывна, имеет конечное значение. При этих условиях мы покажем, что *всегда можно найти такую функцию $f(x)$ класса* (I), *которая при $x = x_0$ и $x = x_1$ принимает те же значения, что и функция $\varphi(x)$, и для которой значение интеграла*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x_1 f(x), f'(x)]\,dx$$

отличается от значения J_1 как угодно мало.

Иными словами, всегда можно найти другую кривую Γ без угловых точек, имеющую те же концы, что Γ', расположенную внутри области $\mathfrak{R}$ и такую, что разность значений интегралов вдоль кривых Γ и Γ' по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительногно числа ε.



Черт. 101.

Положим для определености, что производная $\varphi'(x)$ имеет между x_0 и x_1 единственную точку разрыва c.

Кривая, которая изображает изменение производной $\varphi'(x)$, состоит из двух дуг AE и DB, которые не связаны. Пусть h — положительное число такое, что $c - h$ и $c + h$ заключены между x_0 и x_1, F и G — две точки этой кривой с абсциссами $c - h$ и $c + h$.

Соединим их ломаною линией FHG, имеющей вершину H на прямой ED, причем точка H выбрана на ней так, что, если $\pi(x)$ выражает ординаты точек этой ломаной, то

$$\int_{c-h}^{c+h} \pi(x)\,dx = \int_{c-h}^{c} \varphi'(x)\,dx + \int_{c}^{c+h} \varphi'(x)\,dx.$$

Для этого достаточно выбрать на DE точку H с ординатой

$$\xi = \frac{1}{h}\left[\int_{c-h}^{c} \varphi'(x)\,dx + \int_{c}^{c+h} \varphi'(x)\,dx\right] - \frac{\varphi'(c-h) + \varphi'(c+h)}{2}. \qquad (36)$$

Допустим, что точка H выбрана именно так, и пусть $\psi(x)$ будет вспомогательная функция, которая совпадает с $\varphi'(x)$ в интервалах $(x_0, c-h)$ и $(c+h, x_1)$ и с функцией $\pi(x)$ в интервале $(c-h, c+h)$. Эта функция непрерывна, а функция

$$f(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx,$$

которая также непрерывна и допускает непрерывную производную между x_0 и x_1, совпадает с функцией $\varphi(x)$ в интервалах $(x_0, c-h)$, $(c+h, x_1)$.

Кривая Γ, изображаемая уравнением $y=f(x)$, получается из кривой Γ' заменою той части, которая заключена между двумя точками с абсциссами $c-h$ и $c+h$ и которая содержит угловую точку, двумя дугами параболы, которые имеют общую касательную в точке с абсциссой C и каждая из которых касательна к кривой Γ' в другом конце. Для достаточно малых значений h *ординаты двух кривых Γ и Γ' в интервале $(c-h, c+h)$ отличаются как угодно мало.* В самом деле, при приближении h к нулю ξ стремится к $\frac{\varphi'(c-0)+\varphi'(c+0)}{2}$.

Если при изменении x от x_0 до x_1 производная $\varphi'(x)$ заключена между двумя числами P и Q, то при достаточно малом h число ξ также заключается между этими же числами, и то же можно сказать о функции $\pi(x)$ в интервале $(c-h, c+h)$. Но в этом интервале мы имеем:

$$f(x)-\varphi(x)=\int_{c-h}^{c}\pi(x)\,dx-[\varphi(x)-\varphi(c-h)],$$

и каждый член этой разности может быть сделан меньше любого данного числа. Отсюда следует, что можно также предположить кривую Γ расположенной в области $\Re$. Принимая это во внимание, положим, что M есть верхняя граница выражения $|F(x, y, y')|$ для всех значений (x, y) в области $\Re$ и для значений y', заключенных между P и Q. Ясно, что разность между значениями интеграла $\int F(x, y, y')\,dx$, взятыми вдоль кривых Γ и Γ', по абсолютной величине меньше, чем $4Mh$, и достаточно выбрать h так, что $4Mh<\varepsilon$, для того чтобы эта разность была меньше ε. Рассуждения останутся такими же для кривой, имеющей p угловых точек. В частности, если интеграл J_1 не равен нулю для функции $\varphi'(x)$ класса (II), то всегда можно найти функцию $\varphi(x)$ класса (I), которая на концах интервала принимает те же значения, что и функция $\varphi(x)$, и для которой интеграл J имеет тот же знак, что и J_1.

Другое следствие заключается в следующем. Пусть Γ и Γ' — две кривые с общими концами, расположенные в $\Re$ соответственно классов (I) и (II). Если интеграл J_1, взятый вдоль Γ', меньше, чем интеграл J, взятый вдоль Γ, то кривая Γ не может давать *абсолютного минимума* интегралу $\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx$, даже если ограничиться кривыми класса (I).

А если в любой окрестности кривой Г можно указать кривую Г' класса (II) такую, что интеграл J_1, взятый вдоль Г', меньше J, то кривая Г не может давать и *относительного минимума.*

631. Условие Лежандра. Пусть $y=f(x)$ будет решение уравнения Эйлера, принадлежащее в интервале (x_0, x_1) к классу (I). Если в интеграле $J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ заменить y через $f(x)+\alpha\eta(x)$, то, как мы видели, первая вариация δJ обращается в нуль для всех возможных видов функции $\eta(x)$ класса (I), равной нулю при двух значениях x_0 и x_1. Для того чтобы эта экстремаль давала экстремум интегралу J, необходимо, кроме того, чтобы вторая вариация $\delta^2 J$ имела один и тот же знак для всех возможных видов функции $\eta(x)$. Установим теперь необходимые и достаточные условия того, чтобы $\delta^2 J$ было положительным, что соответствует минимуму.

Применяя к интегралу (3) формулу диференцирования под знаком интеграла, получим:

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}[P\eta^2(x)+2Q\eta(x)\eta'(x)+R\eta'^2(x)]\,dx, \tag{37}$$

где P, Q и R означают те функции от x, которые получаются, если в частных производных F''_{y^2}, $F''_{yy'}$, $F''_{y'^2}$ заменить y через $f(x)$ и y' через $f'(x)$. Согласно предположениям, которые были сделаны, три функции P, Q и R непрерывны в интервале (x_0, x_1). Лежандр преобразовывает это выражение для $\delta^2 J$ следующим образом. Пусть $\omega(x)$ — некоторая функция класса (I) в интервале (x_0, x_1). Какова бы ни была эта функция, имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1}(2\eta\eta'\omega+\eta^2\omega')\,dx=[\eta^2\omega]_{x_0}^{x_1}=0,$$

ибо $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, и выражение для $\delta^2 J$ можно записать в таком виде:

$$\delta^2 J=\alpha^2\int_{x_0}^{x_1}[(P+\omega')\eta^2+2(Q+\omega)\eta\eta'+R\eta'^2]\,dx. \tag{38}$$

Выберем теперь функцию ω так, чтобы коэфициент при dx был точным квадратом, т. е. так, чтобы было:

$$(Q+\omega)^2-R(P+\omega')=0. \tag{39}$$

Тогда

$$\delta^2 J=\alpha^2\int_{x_0}^{x_1}R\left(\eta'+\frac{Q+\omega}{R}\eta\right)^2 dx. \tag{40}$$

Отсюда видно, что знак числа R должен в этом вопросе играть решающую роль. С помощью этого выражения для $\delta^2 J$ мы прежде всего выведем необходимое условие, полученное Лежандром. Для того чтобы вторая вариация $\delta^2 J$ была положительна или равна нулю для всех возможных видов функции $\eta(x)$, необходимо, чтобы функция $R(x)$ не была отрицательна ни при одном значении x из интервала (x_0, x_1).

Положим, в самом деле, что $R(c) < 0$, где c заключено между x_0 и x_1; при этом можно указать положительное число h, настолько малое, чтобы $R(x)$ оставалось отрицательным для всех x, удовлетворяющих неравенствам $c - h \leqslant x \leqslant c + h$. Уравнение (6) показывает, что вторая производная $f''(x)$ непрерывна в интервале $(c - h, c + h)$, и, следовательно, функции P, Q, R также допускают непрерывные производные в том же интервале. Следовательно, к диференциальному уравнению (39) можно применить общую теорему Коши (т. II, § 388, 391), а отсюда вытекает, что оно имеет бесчисленное множество непрерывных интегралов в окрестности точки $x = c$. Пусть $\omega(x)$ — один из этих интегралов, и пусть (ξ_0, ξ_1) — интервал, содержащий c и настолько малый, что функция $R(x)$ в нем отрицательна, а $\omega(x)$ — непрерывна во всем этом интервале $(x_0 < \xi_0 < c < \xi_1 < x_1)$. Рассмотрим функцию $\eta(x)$, определенную следующим образом:

$$1)\quad \eta(x) = 0 \qquad \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant \xi_0;$$

$$2)\quad \eta(x) = (x - \xi_0)^2 (x - \xi_1)^2 e^{-\int\limits_c^x \frac{Q+\omega}{R} dx} \qquad \text{при } \xi_0 \leqslant x \leqslant \xi_1;$$

$$3)\quad \eta(x) = 0 \qquad \text{при } \xi_1 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Легко видеть, что соответствующее значение $\delta^2 J$ имеет знак функции $R(x)$ в интервале (ξ_0, ξ_1), т. е. отрицательный. Таким образом условие Лежандра необходимо, и, следовательно, во всем интервале (x_0, x_1) должно быть $R(x) \geqslant 0$. Оставляя в стороне случай, когда уравнение $R(x) = 0$ имеет корни в этом интервале*, будем впредь считать, что

$$R(x) > 0 \quad \text{для} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \tag{41}$$

Согласно формуле (40) казалось бы очевидным, что если выполняется условие Лежандра, то $\delta^2 J$ должно быть положительно или равно нулю для всех возможных видов функции $\eta(x)$. Но следует заметить, что преобразование, которое мы проделали над $\delta^2 J$, применимо только в том случае, если функция $\omega(x)$ непрерывна в интервале (x_0, x_1). Следовательно, это заключение законно только в том случае, если есть уверенность, что диференциальное уравнение (39) имеет непрерывное решение.

---

* Если $R(x)$ равно нулю во всем интервале (x_0, x_1), то из уравнения (39) следует, что $\omega = -Q$, и вторая вариация принимает вид:

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int\limits_{x_0}^{x_1} (P - Q') \eta^2 dx.$$

Для того чтобы вариация $\delta^2 J$ имела постоянный знак, необходимо и достаточно, чтобы разность $P - Q'$ сохраняла тот же знак во всем интервале. Это имеет место, например когда функция F имеет вид $F = ay^2 + 2byy'$; в этом случае существует только одна экстремаль $y = 0$.

Заметим, что так как $R(x_0)$ не равно нулю, то интеграл $f(x)$ может быть продолжен в интервале (X_0, x_0), где $X_0 < x_0$. Этот интеграл может быть также продолжен в интервале (x_1, X_1), где $X_1 > x_1$. Функции P, Q, R непрерывны и допускают непрерывные производные в интервале (X_0, X_1), и можно также допустить, что в этом интервале $R(x) > 0$.

632. Условие Якоби. Уравнение (39) есть уравнение Риккати. Его, следовательно, можно привести к линейному уравнению второго порядка (т. II § 402). Положим сначала $Q + \omega = -Rz$; уравнение (39) заменяется уравнением того же вида:

$$z' + z^2 + \frac{R'}{R} z + \frac{Q' - P}{R} = 0, \tag{42}$$

общий интеграл которого, как мы видели (т. II, ч. II, стр. 116), имеет вид: $z = \frac{u'}{u}$, где u есть общий интеграл линейного уравнения, введенного Якоби, которое представляет собой не что иное, как уравнение Эйлера, составленное для функции $F = Pu^2 + 2Quu' + Ru'^2$, и имеет вид:

$$\Psi(u) = u'' + \frac{R'}{R} u' + \frac{Q' - P}{R} u = 0. \tag{43}$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (39) будет:

$$\omega = -Q - R \frac{u'}{u}. \tag{44}$$

Все интегралы уравнения Якоби непрерывны в интервале (x_0, x_1), и для того чтобы уравнение (39) допускало интеграл ω, непрерывный в этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (43) допускало интеграл $u(x)$, не обращающийся в нуль в этом же интервале.

Это условие достаточно для того, чтобы вторая вариация $\delta^2 J$ была положительна для всех возможных видов функции $\eta(x)$.

В самом деле, пусть $u(x)$ будет частным интегралом уравнения Якоби, который не обращается в нуль для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$. Возьмем в качестве $\omega(x)$ соответствующую функцию (44). Выражение (40) для $\delta^2 J$ принимает вид*:

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{R(\eta' u - \eta u')^2}{u^2} dx. \tag{45}$$

* Этот результат легко объяснить, исходя из следующих соображений. Если ω — интеграл уравнения (39), то мы имеем тождественно:

$$\int_{x_0}^{x_1} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2) dx = \int_{x_0}^{x_1} R(\eta' - \varphi\eta)^2 dx,$$

Ясно, что $\delta^2 J$ не может быть отрицательным. Для того чтобы $\delta^2 J$ было равно нулю, необходимо, чтобы было $\eta' u - u'\eta = 0$ во всех точках интервала (x_0, x_1), или $\eta = Cu$, но это невозможно, ибо $\eta(x)$ равно нулю на обоих концах интервала, между тем как $u(x)$ отлично от нуля. Итак, *вторая вариация $\delta^2 J$ положительна для всех возможных видов функции $\eta(x)$, если уравнение Якоби* (43) *имеет интеграл, который не обращается в нуль в интервале (x_0, x_1), включая и концы.*

Это условие может быть преобразовано с помощью теорем Штурма о линейных уравнениях (т. II, ч. II, стр. 116, сноска). Пусть $u_1(x)$ будет интеграл уравнения Якоби, обращающийся в нуль при $x = x_0$. Этот интеграл может иметь другие нули в интервале (x_0, X_1), пусть x_0' будет корень, наиболее близкий к x_0 и содержащийся между x_0 и X_1; если же $u_1(x)$ не обращается в нуль между x_0 и X_1, то мы положим, что $x_0' = X_1$. При этих условиях *для того, чтобы уравнение Якоби имело частный интеграл, не обращающийся в нуль при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, необходимо и достаточно, чтобы было $x_1 < x_0'$.*

Условие *необходимо*. В самом деле, если $x_0' < x_1$, то всякий интеграл уравнения (43) имеет корень, заключенный между x_0 и x_0' и, следовательно, заключенный между x_0 и x_1.

Условие также *достаточно**. В самом деле, положим, $x_1 < x_0'$, и пусть x_2 — число, заключенное между x_1 и x_0' $(x_1 < x_2 < x_0')$. Интеграл $u_2(x)$, который обращается в нуль при $x = x_2$, не может обратиться в нуль между x_0 и x_1, ибо в этом случае он обратился бы в нуль также между x_0 и x_0'. Он не равен нулю и при $x = x_0$, ибо он отличен от интеграла $u_1(x)$. Мы оставляем в стороне случай, когда $x_1 = x_0'$, который требует несколько более тонкого исследования.

Итак, *когда выполняются оба условия Лежандра и Якоби одновременно, т. е.* 1) *$R(x) > 0$ для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ и* 2) *$x_1 < x_0'$, то вторая вариация $\delta^2 J$ положительна для всех возможных видов функции $\eta(x)$.*

Выше было указано, что условие Лежандра является необходимым условием того, чтобы $\delta^2 J$ было всегда положительно. Остается доказать, что условие Якоби также *необходимо*. Для этого достаточно показать, что если $x_0' < x_1$, то можно указать такую функцию $\eta(x)$ класса (II) в интервале (x_0, x_1), которая обращается в нуль при $x = x_0$ и при $x = x_1$ и для которой выражение (37) отрицательно (§ 630). Такую функцию можно получить методом Дарбу-Эрдмана. Будем обозначать

где φ — непрерывная функция. Отсюда следует, что всякое решение линейного уравнения $\eta' = \varphi\eta$ должно обращать в нуль первую вариацию интеграла, стоящего в левой части, т. е. быть решением уравнения Якоби. Таким образом, φ представляет логарифмическую производную интеграла этого уравнения (ср. § 40 .).

* Можно было бы также в рассуждениях опираться на непрерывность, не предполагая известной теорему Штурма. Если первый корень функции u (x), больший x_0, превосходит также и x_1, то мы возьмем интеграл, который обращается в нуль в близкой точке $x_0 - h$ $(h > 0)$. Если h достаточно мало, то первый корень, больший чем x_0, будет также больше чем x_1.

через $u_1(x)$ интеграл уравнения (43), имеющий своими нулями x_0 и x_0', и пусть будет $v(x)$ другой интеграл, обращающийся в нуль при значении x_2, заключенном между x_0' и x_1 и не являющемся нулем для $u_1(x)$. Разность $u_1 - v$ имеет нуль в точке c, лежащей между x_0 и x_0'. Принимая это во внимание, определим непрерывную функцию $\eta(x)$ следующим образом: 1) $\eta(x) = u_1(x)$ для $x_0 \leqslant x \leqslant c$; 2) $\eta(x) = v(x)$ для $c \leqslant x \leqslant x_2$; 3) $\eta(x) = 0$ для $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$. Эта функция принадлежит к классу (II), ибо ее производная $\eta'(x)$ претерпевает разрыв в двух точках $x = c$, $x = x_2$.

Во всяком интервале (ξ_1, ξ_2), в котором $\eta(x)$ непрерывна вместе со своей производной, получаем без труда интегрированием по частям:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx = [\eta(Q\eta + R\eta')]_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} R\eta\Psi(\eta)\,dx,$$

и если $\eta(x)$ есть интеграл уравнения Якоби, то в правой части остается только проинтегрированный член. Выбирая в качестве функции $\eta(x)$ функцию, которая была выше определена, применим предыдущую формулу к каждому из интервалов (x_0, c), (c, x_2), (x_2, x_1). Получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx = [u_1(x)(Qu_1 + Ru_1')]_{x_0}^{c} + [v(Qv + Rv')]_{c}^{x_1}, \qquad (46)$$

и так как $u_1(c) = v(c)$, то правая часть равна

$$R(c)\,[u_1'(c)\,v(c) - v'(c)\,u_1(c)].$$

Но из самого уравнения (43) мы получаем:

$$u_1'(x)\,v(x) - v'(x)\,u_1(x) = \frac{K}{R(x)},$$

где множитель K есть постоянное, и, следовательно интеграл, определенный равенством (46), имеет знак числа K.

Но этот множитель K равен $-u_1(x_2)\,v'(x_2)\,R(x_2)$, и так как $v(x)$ есть любой из интегралов, имеющих x_2 своим нулем, то знак $v'(x_2)$ можно выбрать произвольно. Следовательно, при подходящем выборе функции $\eta(x)$ можно сделать вторую вариацию $\delta^2 J$ отрицательной.

Итак, условия Лежандра и Якоби являются одновременно необходимыми и достаточными, чтобы обеспечить знак второй вариации в интервале (x_0, x_1).

Мы будем рассматривать эти условия в узком смысле и оставим в стороне изучение случая, когда $R(x)$ переходит через нуль без изменения знака в промежутке (x_0, x_1), а также того случая, когда $x_0' = x_1$.

633. Геометрическая интерпретация. Сопряженные фокусы. Можно притти также к линейному уравнению (43) при нахождении решений уравнения Эйлера (6), бесконечно близких к рассматриваемой экстремали $y = f(x)$. Если условие Лежандра удовлетворяется, т. е. если $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$ остается между x_0 и x_1 положительным, то можно все члены уравнения разделить на коэфициент при y'', и уравнение Эйлера примет вид:

$$y'' = \Phi(x, y, y'), \tag{47}$$

где функция Φ непрерывна и допускает непрерывные частные производные (согласно предположениям относительно функции $F(x, y, y')$, указанным в § 620), если x изменяется от x_0 до x_1, а разности $y - f(x)$, $y' - f(x)$ по абсолютной величине остаются достаточно малыми. Мы видели (§ 461), что в этом случае уравнение (47) допускает бесчисленное множество семейств интегралов, зависящих от произвольного параметра λ, $y = \varphi(x, \lambda)$, где функция $\varphi(x, \lambda)$ при $\lambda = 0$ обращается в функцию $f(x)$. Больше того, при изменении x от x_0 до x_1 эта функция непрерывна и имеет непрерывные частные производные φ'_x, φ'_λ, $\varphi''_{x\lambda}$, φ''_{x^2}, если только $|\lambda|$ меньше некоторого достаточно малого положительного числа λ_0*. Производная $\varphi'_\lambda(x, 0)$ удовлетворяет линейному уравнению второго порядка, которое получается диференцированием по λ обеих частей уравнения (47), в котором y заменено функцией $\varphi(x, \lambda)$, а затем положено $\lambda = 0$. Это линейное уравнение представляет *уравнение в вариациях* относительно частного решения $y = f(x)$. Применяя этот метод к уравнению Эйлера (6), в котором y заменено функцией $\varphi(x, \lambda)$, мы в качестве уравнения в вариациях получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\lambda} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\lambda}\right\}.$$

Положим в этом уравнении $\lambda = 0$. Если обозначить через u значение $\varphi'_\lambda(x, 0)$, то оно принимает вид:

$$P(x)\,u(x) + Q(x)\,u'(x) = \frac{d}{dx}\{Q(x)\,u(x) + R(x)\,u'(x)\},$$

и мы снова приходим к уравнению (43). Эта связь между уравнениями (6) и (43) дает нам простую геометрическую интерпретацию условия Якоби.

Рассмотрим, в самом деле, семейство экстремалей, исходящих из точки A и близких к первой. Во всем интервале (x_0, x_1) они могут быть представлены уравнением $y = \varphi(x, \lambda)$, где функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям, о которых мы упоминали и для которой, кроме того, имеем:

$$\varphi(x_0, \lambda) = f(x_0), \quad \varphi'_x(x_0, \lambda) = \lambda + f'(x_0).$$

---

* Рассуждения, приведенные в главе XXIII (§ 462), относились к системе двух уравнений первого порядка, но ясно, что они относятся и к уравнению (47), которое может быть приведено к системе этого вида, если положить $y' = z$. Если F — функция аналитическая относительно y и y', как это имеет место в большинстве приложений, то в качестве функции $\varphi(x, \lambda)$ можно взять также аналитическую функцию от λ.

Первое из этих соотношений показывает, что значение $x = x_0$ есть корень уравнения

$$\varphi'_\lambda(x, 0) = 0. \tag{48}$$

Но корни этого уравнения являются абсциссами точек пересечения экстремали $y = f(x)$, соответствующей значению $\lambda = 0$ параметра с бесконечно близкою экстремалью, выходящею из точки A, т. е. являются абсциссами точек касания этой экстремали Γ с кривою, огибающею это семейство экстремалей. Часть этой огибающей вырождается в самую точку A. Другие точки касания называются *сопряженными фокусами точки* A. Так как $\varphi'_\lambda(x, 0)$ есть как раз интеграл $u_1(x)$ уравнения Якоби, который обращается в нуль при $x = x_0$, то ближайший больший корень x'_0 представляет абсциссу первого фокуса A', сопряженного с A и находящегося справа от этой точки, и условие Якоби выражает, что *конец B дуги экстремали AB должен находиться между точкой A и первым сопряженным фокусом справа.*

Между сопряженными фокусами существует взаимность, ибо абсциссы этих точек суть корни одного и того же интеграла уравнения в вариациях.

634. Примеры. Рассмотрим снова примеры § 622, где функция F имела вид $y^\alpha\sqrt{1+y'^2}$. Условие Лежандра для минимума всегда выполнено. Если $y = f(x)$ представляет уравнение дуги экстремали, проходящей через две точки A и B с абсциссами x_0 и x_1, то уравнение $y = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ представляет также экстремальную функцию при любом значении постоянного λ. Мы получим, таким образом, решение уравнения в вариациях (§ 462), если возьмем производную по λ от этого интеграла* и положим затем $\lambda = 1$; таким образом найдем: $u = f(x) - xf'(x)$. Для того чтобы этот интеграл не обращался в нуль между пределами x_0 и x_1, необходимо и достаточно, чтобы ни одна касательная к дуге экстремали AB не проходила через начало. Так как за начало можно принять любую

* Если, вообще, уравнение Эйлера допускает бесконечно малое преобразование (т. II, § 390—391), то из всякого интеграла $f(x)$ можно получить бесконечно близкий интеграл, а следовательно, соответствующее решение уравнения в вариациях. Следующие примеры связаны с классическими случаями понижения порядка дифференциального уравнения.

1. F не содержит y. Если $f(x)$ — экстремаль, то $f(x) + \lambda$ есть также интеграл уравнения Эйлера, каково бы ни было значение λ, и, следовательно, $u = 1$ представляет решение уравнения в вариациях. *Условие Якоби всегда удовлетворяется.*

2. F не содержит x. Если $f(x)$ есть экстремаль, то $f(x + \lambda)$ также есть экстремаль и, следовательно, $f'(x)$ есть решение уравнения в вариациях. Условие Якоби выполнено, *если ни в одной точке дуги AB касательная не параллельна оси Ox.*

3. Если F — функция однородная относительно y и y', то левая часть уравнения Эйлера однородна относительно y, y', y'' и, следовательно, всякий интеграл $f(x)$ представляет решение соответствующего уравнения в вариациях. Условие Якоби удовлетворяется, *если дуга экстремали не пересекает оси Ox.*

4. Если F однородна относительно x и y, то из рассуждений, приведенных в тексте, следует, что условие Якоби удовлетворяется на дуге экстремали AB, если ни одна касательная к этой дуге не проходит через начало.

В каждом из этих случаев указанное условие является только *достаточным*, но не *необходимым.*

точку на оси Ox, то отсюда следует, что *условие Якоби выполнено, если на оси Ox существуют такие точки, через которые не проходит ни одна касательная к дуге экстремали AB.* Но согласно форме кривой это всегда имеет место, если α отрицательно, как в задаче о брахистохроне.

Если $\alpha > 0$, то дуга AB обращена выпуклостью к оси Ox, и условие можно изменить следующим образом. Пусть A' и B' суть точки пересечения с осью Ox касательных в точках A и B к экстремали, а T — точка пересечения этих касательных. Если точка T находится над осью Ox, то в силу выпуклости AB ясно, что через точку отрезка $A'B'$ нельзя провести ни одной касательной к этой дуге. Напротив того, если точка T находится под осью x, то через каждую точку отрезка $A'B'$ проходят две касательные к дуге AB. Если одну из этих точек принять за начало, то уравнение Якоби допускает частное решение $f(x) - xf'(x)$, которое имеет два нуля между x_0 и x_1. Всякое другое решение имеет, следовательно, по крайней мере один нуль в этом интервале. Следовательно, *для того чтобы условие Якоби было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы касательные к дуге экстремали, проведенные в точках A и B, пересекались над осью Ox.* Это есть обобщение хорошо известного свойства цепной линии (Lindelöf-Moigno, Calcul des variations). Это условие всегда выполнено, если точки A и B расположены по одну сторону самой низкой точки экстремали.

Геометрическая интерпретация предыдущего параграфа дает возможность легко проверить этот результат. Мы видели, что в случае, когда функция F имеет вид $y^\alpha\sqrt{1+y'^2}$ (§ 622), общий интеграл уравнения Эйлера имеет вид:

$$\alpha y = f(\alpha x + \beta),$$

где α и β — произвольные постоянные. Если между параметрами α и β установить какое-нибудь соотношение, то получится семейство экстремалей, зависящее от одного параметра. Координаты общей точки двух бесконечно близких кривых этого семейства удовлетворяют также уравнению:

$$y = f'(\alpha x + \beta)\left(x + \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = y'\left(x + \frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

откуда

$$\frac{y}{y'} - x = \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Отсюда следует, что касательные к экстремали, проведенные в точках пересечения с бесконечно близкою экстремалью того же семейства, встречают ось Ox в одной и той же точке с абсциссой $-\frac{d\beta}{d\alpha}$. В частности, если семейство экстремалей состоит из экстремалей, выходящих из одной точки A, то мы отсюда заключаем, что *касательные к экстремали в двух сопряженных фокусах встречаются* в точке, лежащей на оси Ox (Bozla).

Если $\alpha < 0$, то через точку T оси Ox нельзя провести больше одной касательной к дуге экстремали, расположенной целиком над осью Ox. На этой дуге, следовательно, никогда не существует двух сопряженных фокусов, и условие Якоби всегда удовлетворено.

Если $\alpha > 0$, то экстремали обращены выпуклостью к оси Ox, и из любой точки этой оси можно провести две и только две касательные к любой экстремали. Точки этой экстремали попарно сопряжены, причем каждая пара сопряженных фокусов разделена самой низкой точкой экстремали. Ясно также в силу выпуклости кривой, что если касательные в точках A и B пересекаются над осью Ox, то фокус, сопряженный с A, находится не на дуге AB, между тем как он находится на этой дуге, если эти касательные пересекаются под осью Ox. Если через две точки A и B проходят две экстремали, то одна из них касается огибающей семейства экстремалей, выходящих из точки A, между точками A и B, между тем как другая касается этой огибающей либо за точкой B, либо до точки A. Условие Якоби выполняется только для этой последней экстремали. Например, в случае цепной линии (фиг. 100) условию Якоби удовлетворяет дуга цепной линии, гомотетичная дуге, кончающейся в точке M.

635. Недостаточность предыдущих условий. Условия Лежандра и Якоби не являются достаточными для того, чтобы интеграл J достигал минимума. В самом деле, мы сравниваем значение интеграла, соответствующее функции $y=f(x)$ только со значениями того же интеграла, соответствующими функциям вида:

$$y=f(x)+\alpha\eta(x),$$

зависящим только от одного произвольного параметра, между тем как по условию поставленной задачи (§ 620) требуется сравнивать значение интеграла J_1, взятого для $y=f(x)$, со значениями этого интеграла, взятыми для всех функций вида:

$$y=f(x)+\omega(x),$$

где $\omega(x)$ — произвольная функция класса (I), подчиненная только условиям (1). Единственный вывод, к которому приводят предыдущие рассуждения, заключается в следующем. Пусть $\omega(x)$ — произвольная функция класса (I), удовлетворяющая условиям (1). Уравнение

$$y=f(x)+a\omega(x)$$

изображает пучок кривых Γ, которые при изменении a от 0 до 1 остаются в области $\mathfrak{R}_\varepsilon$. При $a=0$ мы получаем кривую Γ_0, уравнение которой есть $y=f(x)$, а при $a=1$ — кривую Γ_1, уравнение которой есть $y=f(x)+\omega(x)$. Значение $J(a)$ интеграла J, соответствующее функции $f(x)+a\omega(x)$, является функцией от a, которая начинает возрастать, когда a возрастает от нуля, но нет никаких оснований думать, что эта функция $J(a)$ будет возрастать все время при возрастании a от 0 до 1 для любого малого числа ε, определяющего область $\mathfrak{R}_\varepsilon$.

Вот пример, который очень четко показывает недостаточность условий $\delta J=0$, $\delta^2 J>0$ для обеспечения минимума. Пусть $F=y'^2+y'^3$. Примем $x_0=y_0=0$, $x_1=1$, $y_1=0$. Экстремальные кривые суть прямые, и экстремальная функция, удовлетворяющая условиям на концах, есть $f(x)=0$. Можно непосредственно убедиться в том, что вторая вариация положительна, ибо в этом случае

$$\delta^2 J=\alpha^2\int_0^1 2\eta'^2 dx.$$

Для того чтобы было $\delta^2 J=0$, необходимо выполнение равенства $\eta'(x)=0$, а следовательно, $\eta(x)=0$. Для функции $f(x)=0$ значение интеграла $J=0$; покажем, что можно найти функцию $\omega(x)$ класса (1), удовлетворяющую условиям:

$$\omega(0)=\omega(1)=0,\quad |\omega(x)|<\varepsilon$$

для $0<x<1$, такую, для которой интеграл

$$J_1=\int_0^1(\omega'^2+\omega'^3)\,dx$$

имеет отрицательное значение. Пусть, в самом деле, α — положительное постоянное, меньшее единицы. Функция $\omega(x, \alpha)$, определенная следующими условиями:

1) $\omega(x, \alpha) = \alpha x$ для $0 \leqslant x < 1 - \dfrac{2\alpha}{\alpha + 2}$,

2) $\omega(x, \alpha) = 2(1 - x) - \dfrac{(\alpha + 2)^2}{4\alpha}(1 - x)^2$ для $1 - \dfrac{2\alpha}{\alpha + 2} < x \leqslant 1$,

есть функция класса (I) в интервале (0,1). Уравнение

$$y = \omega(x, \alpha)$$

изображает кривую APB, состоящую из отрезка прямой AP, проходящей через начало, и дуги параболы PB, для которой эта прямая служит касательною в точке P, а касательная в точке B имеет угловой коэфициент, равный — 2. Эта функция $\omega(x, \alpha)$ непрерывна и стремится к нулю вместе с α, но ее производная $\omega'_x(x, \alpha)$ разрывна при $x = 1$, $\alpha = 0$. Интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^1 (\omega'^2 + \omega'^3)\, dx$$

также стремится к нулю вместе с α. Но так как производная $\omega'_x(x, \alpha)$ разрывна, то мы не можем применить обычную формулу диференцирования и, следовательно, не можем утверждать, что $J'(0) = 0$. Напротив того, мы покажем, что $J(\alpha)$ есть бесконечно малая *первого порядка*. С одной стороны, интеграл вдоль AP есть бесконечно малая второго порядка $(\alpha^2 + \alpha^3)\left(1 - \dfrac{2\alpha}{\alpha + 2}\right)$. Что же касается интеграла, взятого вдоль PB, то полагая $x = 1 - \dfrac{2\alpha}{\alpha + 2} z$, его можно записать в виде:

Черт. 102.

$$\frac{2\alpha}{\alpha + 2} \int_0^1 \left\{ [(\alpha + 2)z - 2]^2 + [(\alpha + 2)z - 2]^3 \right\} dz,$$

и главная часть есть $-\dfrac{2\alpha}{3}$. Таким образом

$$J'(0) = -\frac{2}{3},$$

и для значений α в окрестности нуля значение интеграла $J(\alpha)$ отрицательно. Этот пример действительно показывает необходимость рассматривать вариации более общей формы, чем те, которые рассматривались нами до сих пор*.

---

* Чтобы убедиться в недостаточности условий Лежандра и Якоби, достаточно показать, что интеграл

$$\int_0^1 (y'^2 + y'^3)\, dx$$

вдоль ломаной AQB имеет отрицательное значение для достаточно малых значений α (§ 630). Действительно, этот интеграл имеет значение $\dfrac{-4\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3}{\alpha + 2}$.

Первый пример этого рода принадлежит Шефферу (Hadamard, стр. 44—46).

Примечание. В некоторых простых случаях условия Лежандра и Якоби являются достаточными для того, чтобы обеспечить экстремум. Положим, например, $F = ay^2 + 2byy' + cy'^2$. Уравнение Эйлера в этом случае линейно относительно y, y', y'':

$$c(x)\,y'' + c'y' + (b' - a)\,y = 0, \tag{49}$$

и уравнение Якоби, которое не зависит от рассматриваемой экстремали $f(x)$, тождественно с предыдущим уравнением. Условие Лежандра для минимума будет выполнено, если $c(x)$ имеет положительное значение для всех значений x от x_0 до x_1. Условие Якоби также будет выполнено, если уравнение (49) допускает интеграл $u(x)$, не обращающийся в нуль в этом интервале. Эти условия также и достаточны, ибо если положить

$$y = f(x) + \alpha\eta(x),$$

то мы получим (§ 632):

$$J(\alpha) - J(0) = \frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1} c(x)\left(\frac{\eta' u - \eta u'}{u}\right)^2 dx,$$

выражение существенно положительное, даже если условие Лежандра выполняется только в широком смысле. Полагая $a = b = 0$, $c = 1$, мы приходим к результату, уже установленному непосредственно (т. I, § 120).

Рассмотрим еще следующий пример Вейерштрасса. Пусть требуется найти минимум интеграла

$$J = \int_{-1}^{+1} (x^2 + \lambda^2)\,y'^2\,dx,$$

взятого вдоль кривой Γ класса (I), соединяющей две точки A и B с координатами $(-1, a)$ и $(1, b)$. Уравнение Эйлера допускает первый интеграл

$$(x^2 + \lambda^2)\,y' = C,$$

и общий интеграл, в предположении, что $\lambda \neq 0$, есть:

$$y = C_1 + C_2 \operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}.$$

Определяя постоянные C_1 и C_2 из граничных условий, находим для искомой функции $f(x)$ выражение:

$$f(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}}.$$

Легко видеть, что условия Лежандра и Якоби удовлетворены. В самом деле, $R = 2(x^2 + \lambda^2)$, и уравнение Якоби допускает интеграл $u = 1$ (§ 634, сноска), следовательно, функция $f(x)$ дает интегралу *абсолютный минимум*.

Дело обстоит совершенно иначе, если $\lambda = 0$. В этом случае общий интеграл уравнения Эйлера есть $y = \frac{C_1}{x} + C_2$, и следовательно, не существует ни одной экстремали класса (I), соединяющей две точки A и B, кроме только тривиального случая $b = a$. В случае, который нас интересует, нижняя граница интеграла

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\,dx$$

равна нулю. В самом деле, если мы вместо y возьмем предыдущую функцию, при которой интеграл достигает минимума, когда λ отлично от нуля, то получим:

$$J = \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{x^2\,dx}{(x^2+\lambda^2)^2}.$$

Интеграл в правой части меньше, чем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} \operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda},$$

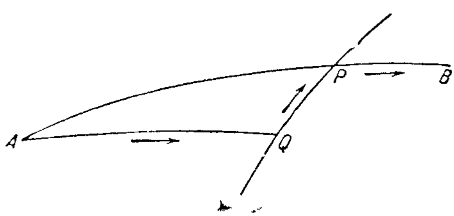
и, следовательно,

$$J < \frac{\lambda (b-a)^2}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}},$$

а это выражение стремится к нулю вместе с λ.

С другой стороны, очевидно, что какова бы ни была кривая Γ класса (I), соединяющая две точки A и B, значение интеграла J, взятого вдоль этой кривой, не может быть равно нулю. Этот пример ясно показывает, как может случиться, что интеграл не имеет минимального значения, хотя он действительно ограничен, а также показывает недостаточность рассуждений Римана и аналогичных рассуждений (§ 512).

636. Условие Вейерштрасса. Функция E. Новое необходимое условие для экстремума было установлено Вейерштрассом путем сравнения значения интеграла, взятого вдоль дуги экстремали AB, со значением интеграла вдоль пути, достаточно близкого, но пересекающего дугу AB под углом, отличным от нуля. Сохраним те же обозначения и предположения, что и в предыдущих параграфах. Возьмем точку P на дуге AB с координатами (x_2, y_2), и пусть $y = f_1(x)$ будет уравнение кривой C_1, проходящей через точку P, причем функция f_1 непрерывна и допускает производные первого и второго порядка, непрерывные в интервале $(x_2 - k, x_2 + k)$; пусть Q — точка кривой C_1 с абсциссой $x_2 - h$, где h — положительное число, меньшее k $(x_0 < x_2 - h < x_2 < x_1)$. Положим:



Черт. 103.

$$\omega(x, h) = (x - x_0)\frac{f_1(x_2 - h) - f(x_2 - h)}{x_2 - h - x_0}$$

и рассмотрим дугу кривой AQ (черт. 103), которая имеет уравнение:

$$y = f(x) + \omega(x, h), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_2 - h.$$

Ясно, что, когда h стремится к нулю, линия AQ имеет пределом дугу AP, и интеграл $\int\limits_{(AQ)} F(x, y, y')\,dx$ представляет функцию $I(h)$ от h, производная которой при $h=0$ имеет значение:

$$I'(0) = [y'_2 - f'_1(x_2)]\,F'_{y'}(x_2, y_2, y'_2) - F(x_2, y_2, y'_2).$$

Это следует из общей формулы (18) § 625, ибо дуга AP есть дуга экстремали, а координаты переменного конца Q суть

$$x = x_2 - h, \quad y = f_1(x_2 - h);$$

отсюда получаем:

$$\delta x = -\delta h, \quad \delta y = -f'_1(x_2)\,\delta h;$$

y'_2 представляет угловой коэфициент касательной к экстремали AP в точке P. Пусть точно так же $I_1(h)$ будет интеграл, взятый вдоль дуги QP:

$$I_1 = \int\limits_{x_2-h}^{x_2} F[x, f_1(x), f'_1(x)]\,dx.$$

Производная $I'_1(0)$, очевидно, равна $F[x_2, y_2, f'_1(x_2)]$, и следовательно, обозначая интеграл $\int\limits_{(AQP)} F(x, y, y')\,dx$ через $J(h)$, мы можем записать, что

$$\left(\frac{dJ}{dh}\right)_0 = F(x_2, y_2, p_2) - F(x_2, y_2, y'_2) - (p_2 - y'_2)\,F'_{y'}(x_2, y_2, y'_2),$$

где p_2 — угловой коэфициент касательной к кривой C_1. Правая часть этой формулы представляет функцию четырех переменных x, y, y', p, которая играет очень существенную роль в теории Вейерштрасса. Ее обозначают букв й E:

$$E(x, y; y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y')\,F'_{y'}(x, y, y'), \qquad (50)$$

и предыдущая формула принимает вид:

$$\left(\frac{dJ}{dh}\right)_0 = E(x_2, y_2, y'_2; p_2). \qquad (51)$$

Из этого соотношения мы легко получаем новое необходимое условие для минимума. Мы его будем называть условием Вейерштрасса. *Для того чтобы рассматриваемая кривая AB доставляла интегралу J минимум, необходимо, чтобы функция*

$$E[x, f(x);\ f'(x), p]$$

при изменении x от x_0 до x_1 была не отрицательна ни для какого конечного значения p. Мы будем также выражать это условие, говоря, что функция $E(x, y; y', p)$ не может принимать отрицательного значения ни в одной точке дуги AB ни для какого конечного значения p.

В самом деле, допустим, что в точке P дуги AB с координатами (x_2, y_2) и для конечного значения m величины p мы будем иметь:

$$E(x_2 y_2; y'_2, m) < 0.$$

Возьмем в качестве кривой C_1 кривую, данную уравнением:

$$y = f(x) + (m - y'_2)(x - x_2),$$

касательная к которой в точке P имеет угловой коэфициент m. Введенная выше функция $J(h)$, соответствующая функции $f_1(x)$, этого вида имеет при $h = 0$ отрицательную производную. Можно, следовательно, найти достаточно малое положительное число l такое, что $J(l) < J(0)$, и, следовательно, можно найти такой путь $AQPB$ (черт. 103), что сумма интегралов

$$\int\limits_{(AQ)} F(x, y, y')\,dx + \int\limits_{(QP)} F(x, y, y')\,dx + \int\limits_{(PB)} F(x, y, y')\,dx$$

будет меньше значения интеграла J вдоль дуги AB экстремальной кривой. Как уже было замечено (§ 630), этого достаточно, чтобы доказать, что кривая AB не доставляет минимума интегралу J, даже если рассматривать только кривые класса (1), соединяющие две точки A и B и близкие к дуге AB.

Мы можем, следовательно, к полученным уже условиям присоединить следующее: *необходимо, чтобы было*

$$E(x, y; y', p) \geqslant 0 \tag{52}$$

для всякого конечного значения p вдоль всей дуги AB.

Для максимума знак неравенства будет обратный.

Примечание. Согласно формуле Тейлора имеем:

$$E(x, y; y, p) = \frac{(p - y)'}{1 \cdot 2} F''_{y'^2}[x, y, y' + \theta(p - y')] \qquad (0 < \theta < 1; \tag{53}$$

отсюда ясно, что условие Вейерштрасса будет наверно выполнено, если вторая производная $F''_{y'^2}(x, y, u)$ не отрицательна ни в одной точке дуги AB и для всякого конечного значения u. Но последнее условие не необходимо для того, чтобы выполнялось условие (52).

Нетрудно видеть, что из условия Вейерштрасса условие Лежандра получается так частный случай. В самом деле согласно формуле (53) отношение $\frac{2E(x, y; y, p)}{(y' - p)}$ имеет своим пределом $F''_{y'^2}(x, y, y')$, когда p стремится к y'. Если условие (52) выполнено для всякого конечного значения p, то мы имеем также $F''_{y'^2} \geqslant 0$ вдоль всей дуги AB.

Для $F = y'^2 + y'^3$ и для частной экстремали $y = 0$ имеем:

$$E = p^2 + p^3 = p^2(p + 1),$$

и если взять $p = -2$, то E отрицательно, что совпадает с результатом, полученным непосредственно (§ 635).

Но и условия Вейерштрасса недостаточны для минимума, как это видно из следующего примера Больца. Пусть

$$F = ay'^2 + 4byy'^3 + 2bxy'^4,$$

где a и b — положительные постоянные. Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид:

$$y''(2a - 24byy' + 24bxy'^2) = 0,$$

и экстремалями будут прямые линии. Рассмотрим две точки $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, прямая линия $y = 0$, которая соединяет эти две точки, есть экстремаль, для которой выполняются условия Лежандра и Якоби. То же относится и к условию Вейерштрасса, ибо функция $E(x, y; y', p)$, которая имеет значение

$$E(x, y; y', p) = (y' - p)^2 [a - 8byy' + 6bxy'^2 + 4b(xy' - y)p + 2bxp^2],$$

обращается при $y = 0$ в $p^2(a + 2bxp^2)$ и остается положительною, когда x изменяется от 0 до 1. Однако эта прямая не дает минимума для J. В самом деле, если взять интеграл вдоль ломаной APB, и если координаты точки P будут положительные числа h и k, то нетрудно видеть, что можно выбрать настолько малое положительное число h, что значение интеграла вдоль ломаной будет отрицательным, каково бы ни было малое значение k. Отсюда мы заключаем, что прямая AB не может давать минимум (§ 630).

Пусть еще $F = \frac{1}{1 + y'^2}$. Экстремалями служат прямые линии, а функция

$$E(x, y; y', p) = \frac{(y' - p)^2 (y'^2 - 1 + 2py')}{(1 + p^2)(1 + y'^2)^2}.$$

Мы видим, что при изменении p функция E может изменять знак, если только y' не обращается в нуль вдоль всей экстремали, которая в этом случае переходит в отрезок прямой, параллельной Ox. Очевидно, что эта экстремаль дает интегралу максимум; всякая другая экстремаль не может дать ни максимума, ни минимума.

Когда функция $F(x, y, y')$ умножается на какой-нибудь множитель $g(x, y)$, то функция $E(x, y; y', p)$ умножается на тот же множитель. Следовательно, если для некоторой системы данных значений x, y, y' функция E меняет знак, то то же свойство сохранится и после умножения на g, если только функция g в этой точке не обращается в нуль. Если, например, $F = \frac{g(x, y)}{1 + y'^2}$, то единственные экстремали, которые могут удовлетворять условию Вейерштрасса, суть прямые, параллельные оси Ox или кривые, удовлетворяющие уравнению $g = 0$. В частном случае, когда $g(x, y) = x$, а область $\mathfrak{R}$ есть часть плоскости справа от оси Oy, очевидно, что интеграл J имеет вдоль всякого отрезка, параллельного Ox, значение большее, чем вдоль всякой другой кривой класса (I), имеющей те же концы. Это единственные экстремали, которые могут удовлетворять условию Вейерштрасса, и, следовательно, единственные, которые дают экстремум.

637. Теория Клебша. Метод Якоби был распространен Клебшем на случай любого числа неизвестных функций. Мы изложим вкратце ход рассуждений для случая $n = 2$, указывая каждый раз на те особенности, которые отличают этот случай от случая уже рассмотренного.

Пусть будут $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ уравнения экстремали Γ для определенного интеграла $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$; $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции класса (I) в интервале (X_0, X_1), включающем интервал (x_0, x_1). Пусть $\eta(x)$, $\zeta(x)$, будут две функции этого класса в том же интервале, обращающиеся в нуль при $x = x_0$, $x = x_1$.

Если заменить под знаком интеграла функции y и z соответственно через

$$f(x) + \alpha\eta(x), \quad z(x) + \alpha\zeta(x),$$

то J сделается функцией $J(\alpha)$, первая вариация которой равна нулю для всех возможных видов функций η и ζ рассматриваемого класса, между тем как вторая вариация имеет вид:

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} G(\eta, \zeta, \eta', \zeta')\, dx = \int_{x_0}^{x_1} (A\eta'^2 + 2B\eta'\zeta' + C\zeta'^2 + \ldots)\, dx, \tag{54}$$

где $G(\eta, \zeta, \eta', \zeta')$ — квадратичная форма относительно $\eta, \zeta, \eta', \zeta'$, коэфициенты которой суть функции от x; они получатся из вторых производных функции F заменой y, z, y', z' на $f(x)$, $\varphi(x)$, $f'(x)$, $\varphi'(x)$. Обобщая прием Лежандра, мы можем записать $\delta^2 J$ бесчисленным множеством способов в виде:

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} [G(\eta, \zeta, \eta', \zeta') + g(\eta, \zeta, \eta', \zeta')]\, dx, \tag{55}$$

прибавляя к G другую форму

$$g = \frac{d}{dx}(\lambda\eta^2 + 2\mu\eta\zeta + \nu\zeta^2),$$

где λ, μ, ν — произвольные функции класса (I) в интервале (x_0, x_1). Мы постараемся определить эти функции λ, μ, ν так, чтобы новая квадратичная форма $G+g$ обратилась в сумму квадратов двух линейных функций от $\eta, \zeta, \eta', \zeta'$, умноженных на выражения, зависящие только от x. Предположим, что $B^2 - AC \neq 0$. Так как в g не входят члены, содержащие η'^2, $\eta'\zeta'$, ζ'^2, то, заменяя буквы η и ζ буквами u и v соответственно, мы должны получить тождество вида:

$$\begin{gathered} G(u, v, u', v') + g(u, v, u', v') = \\ = A(u' - p_1 u - q_1 v)^2 + 2B(u' - p_1 u - q_1 v)(v' - p_2 u - q_2 v) + \\ + C(v' - p_2 u - q_2 v)^2, \end{gathered} \tag{56}$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 суть функции от x. Согласно общей теории квадратичных форм, для того чтобы $G+g$ могла быть разложена так, как это указано в формуле (56), необходимо и достаточно, чтобы четыре соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(G+g)}{\partial u} = 0, \quad & \frac{\partial(G+g)}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial(G+g)}{\partial u'} = 0, \quad & \frac{\partial(G+g)}{\partial v'} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

выполнялись тождественно при замене u' и v' выражениями

$$u' = p_1 u + q_1 v, \quad v' = p_2 u + q_2 v. \tag{58}$$

Если u и v рассматривать как неизвестные функции, то можно также сказать, что уравнения (57) должны допускать все решения системы (58), и так как эти уравнения линейные, то необходимо и достаточно, чтобы они допускали две системы частных интегралов, отличных от интегралов уравнений (58).

Очевидно, можно заменить систему (57) эквивалентной ей системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(G+g)}{\partial u'} = 0, \quad & \frac{\partial(G+g)}{\partial v'} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial u'}\right) = 0, \quad & \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial v'}\right) = 0, \end{aligned}\right\}, \tag{57'}$$

ибо согласно самому определению вспомогательная форма g удовлетворяет двум условиям:

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial u'}\right) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial v'}\right) = 0.$$

Два последние уравнения новой системы (57') представляют два линейных уравнения второго порядка, которые получались бы также, если бы мы искали экстремали, бесконечно близкие к рассматриваемой экстремали. Положим, в самом деле, что функции $y=f(x, t)$, $z=\varphi(x, t)$ представляют систему интегралов уравнений (9) § 623, зависящую от произвольного параметра t и обращающуюся при $t=0$ соответственно в функции $f(x)$ и $\varphi(x)$; функции $f'_t(x, 0)$, $\varphi'_t(x, 0)$ удовлетворяют двум линейным уравнениям, которые получаются из уравнений (9) общим методом, указанным в § 462. Выполнив все преобразования, мы непосредственно убедимся, что эти два уравнения в вариациях совпадают с двумя последними уравнениями (57').

Коэфициенты p_1, q_1, p_2, q_2 определяются таким образом из соотношений:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= p_1u_1 + q_1v_1, & v_1' &= p_2u_1 + q_2v_1, \\ u_2' &= p_1u_2 + q_1v_2, & v_2' &= p_2u_2 + q_2v_2, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

где (u_1, v_1), (u_2, v_2) представляет две системы частных интегралов уравнений в вариациях:

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial u'}\right) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial v'}\right) = 0. \tag{60}$$

Выбрав таким образом p_1, q_1, p_2, q_2, мы должны еще для определения коэфициентов λ, μ, ν формы g записать, что две системы решений (u_1v_1) и (u_2v_2) удовлетворяют четырем соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial u_1'} + \frac{\partial g_1}{\partial u_1'} &= 0, & \frac{\partial G_1}{\partial v_1'} + \frac{\partial g_1}{\partial v_1'} &= 0, \\ \frac{\partial G_2}{\partial u_2'} + \frac{\partial g_2}{\partial u_2'} &= 0, & \frac{\partial G_2}{\partial v_2'} + \frac{\partial g_2}{\partial v_2'} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

в которых G_i и g_i означают результат замены в формах G и g букв u и v на u_i и v_i. Кроме того, мы имеем четыре линейных уравнения для определения λ, μ, ν, и, следовательно, должно выполняться условие совместности. Это условие, которое легко получить, развернув $\frac{\partial g_1}{\partial u_1}, \frac{\partial g_1}{\partial v_1'}, \ldots$, примет вид:

$$u_2 \frac{\partial G_1}{\partial u_1'} + v_2 \frac{\partial G_1}{\partial v_1'} - u_1 \frac{\partial G_2}{\partial u_2'} - v_1 \frac{\partial G_2}{\partial u_2'} = 0.$$

Мы можем, таким образом, получить все тождества вида (56), *взяв две системы частных интегралов* (u_1, v_1), (u_2, v_2) *уравнений в вариациях* (60), *удовлетворяющих условию* (62) *и таких, чтобы*

$$D(x) = u_1v_2 - u_2v_1$$

не было тождественно равно нулю, и определив p_1, q_1, p_2, q_2 *из соотношений* (59).

Заниматься подсчетом λ, μ, ν бесполезно, ибо в окончательном результате они исчезают.

Две системы интегралов (u_1, v_1), (u_2, v_2), удовлетворяющие условию (62), называются *союзными*. Существует бесконечное множество союзных систем. В самом деле, из уравнений (60) мы получаем:

$$u_2 \frac{\partial G_1}{\partial u_1} + u_2' \frac{\partial G_1}{\partial u_1'} = \frac{d}{dx}\left(u_2 \frac{\partial G_1}{\partial u_1'}\right), \quad v_2 \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + v_2' \frac{\partial G_1}{\partial v_1'} = \frac{d}{dx}\left(v_2 \frac{\partial G_1}{\partial v_1'}\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dx}\left\{u_2\frac{\partial G_1}{\partial u_1'}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v_1'}\right\}=u_2\frac{\partial G_1}{\partial u_1}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v_1}+u_2'\frac{\partial G_1}{\partial u_1'}+v_2'\frac{\partial G_1}{\partial v_1'}.$$

Так как правая часть согласно свойствам квадратичных форм не изменяется от перемещения индексов 1 и 2, то мы имеем:

$$\frac{d}{dx}\left\{u_2\frac{\partial G_1}{\partial u_1'}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v_1'}-u_1\frac{\partial G_2}{\partial u_2'}-v_1\frac{\partial G_2}{\partial v_2'}\right\}=0,$$

откуда непосредственно получается первый интеграл системы (60). Таким образом, чтобы получить две союзные системы, достаточно выбрать начальные значения интегралов u_1, v_1, u_2, v_2 и их первых производных так, чтобы соотношение (62) выполнялось для некоторого частного значения x. Этому условию всего проще удовлетворить, если взять две различные системы интегралов (u_1, v_1), (u_2, v_2), которые бы обращались в нуль при частном значении c переменного. Детерминант

$$D_c(x)=u_1v_2-u_2v_1$$

не может обращаться тождественно в нуль, каковы бы ни были эти две системы, ибо вторая производная $D_c''(x)$ при $x=c$ равна $2(u_1'v_2'-v_1'u_2')$, и достаточно выбрать начальные значения производных для $x=c$ так, чтобы для этого значения x разность $u_1'v_2'-v_1'u_2'$ была отлична от нуля. Пусть (u_1, v_1), (u_2, v_2) — две союзные системы этого рода, тогда другие союзные системы, образованные из интегралов, обращающихся при $x=c$ в нуль, представляют линейные комбинации этих двух систем, а детерминант $D_c(x)$ для всех этих систем один и тот же, с точностью до постоянного множителя. Отсюда следует, что корни уравнения $D_c(x)=0$ определены, если задано число c, которое является двойным корнем этого уравнения. Когда c изменяется в интервале (X_0, X_1), корни уравнения $D_c(x)=0$, находящиеся в том же интервале, также изменяются непрерывно.

Если M есть точка экстремали Γ с абсциссой c, то точки той же экстремали, абсциссы которых равны другим корням уравнения $D_c(x)=0$, называются *сопряженными фокусами* точки M.

Геометрическая интерпретация аналогична той, которая была дана в § 633. Пусть $y=f(x, \lambda, \mu)$, $z=\varphi(x, \lambda, \mu)$ будут интегралы системы (9), которые при $x=c$ принимают значения $f(c)$, $\varphi(c)$, между тем как их производные имеют начальные значения $f'(c)+\lambda$, $\varphi'(c)+\mu$. Эти функции непрерывны и допускают непрерывные частные производные, когда x изменяется от X_0 и X_1, коль скоро $|\lambda|$ и $|\mu|$ остаются меньше некоторой границы (§ 461). Предыдущие уравнения представляют пучок экстремалей, выходящих из точки M кривой Γ с абсциссою c. Эти экстремали образуют *конгруэнцию*, и каждая экстремаль касается фокальной поверхности этой конгруэнции (II, § 436) в некотором числе точек, абсциссы которых суть корни уравнения $\frac{D(f, \varphi)}{D(\lambda, \mu)}=0$. В частности, экстремаль Γ касается фокальной поверхности в точках, абсциссы которых даны уравнением:

$$f_\lambda'(x, 0, 0)\,\varphi_\mu'(x, 0, 0)-f_\mu'(x, 0, 0)\,\varphi_\lambda'(x, 0, 0)=0. \qquad (63)$$

Но

$$\left\{f_\lambda'(x, 0, 0)\,\varphi_\lambda'(x, 0, 0)\right\}$$

$$\left\{f_\mu'(x, 0, 0),\quad \varphi_\mu'(x, 0, 0)\right\}$$

представляют две системы решений уравнений в вариациях, которые при $x=c$ обращаются в нуль. Таким образом уравнение (63) тождественно с уравнением

$D_c(x)=0$, и, следовательно, *сопряженные фокусы точки M представляют собой точки касания экстремали Γ с фокальною поверхностью конгруэнции, образованной экстремалями, выходящими из точки M.*

Принимая во внимание все эти предварительные замечания, можно обобщить условия Лежандра и Якоби следующим образом.

Для того чтобы вторая вариация $\delta^2 J$ была положительна для всех возможных видов функций $\eta(x)$, $\zeta(x)$, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $Az^2+2Bzt+Ct^2$ была определенная и положительная для всякого значения x, заключенного между x_0 и x_1, и чтобы все сопряженные фокусы точки A находились вне интервала (x_0, x_1).

Легко видеть, что эти условия *достаточны*. В самом деле, допустим, что уравнение $D_{x_0}(x)=0$ не имеет ни одного корня $>x_0$ и $\leqslant x_1$. Всегда можно указать достаточно малое положительное число h такое, что уравнение $D_{x_0-h}(x)=0$ не имеет ни одного корня $>x_0-h$ и $\leqslant x_1$. Можно также предположить, что $x_0-h>X_0$. Пусть (u_1, v_1), (u_2, v_2) — две союзные системы решений уравнений в вариациях, образованные интегралами, которые все равны нулю при $x=x_0-h$. Детерминант $u_1v_2-u_2v_1$ не обращается в нуль в интервале (x_0, x_1) (включая концы), и коэфициенты p_1, q_1, p_2, q_2, полученные из соотношений (59), непрерывны в этом интервале. Тогда формула (55) дает нам выражение для $\delta^2 J$ в виде интеграла, элементом которого является форма, определенная и положительная во всем интервале интегрирования. Таким образом $\delta^2 J>0$. Для того чтобы было $\delta^2 J=0$, нужно взять в качестве η и ζ систему решений уравнений (58), обращающихся в нуль на концах x_0 и x_1. В рассматриваемых предположениях единственной системой, удовлетворяющей этим условиям, будет $\eta=\zeta=0$ *.

Предыдущие условия являются *необходимыми*. Докажем, например, что A не может быть отрицательным ни для одной точки интервала (x_0, x_1). В самом деле, положим, что $A(c)<0$, где c заключено между x_0 и x_1. Тогда можно указать интервал (ξ_0, ξ_1), содержащий c и настолько малый, чтобы во всем этом интервале было $A(x)<0$, и чтобы существовали две союзные системы (u_1, v_1), (u_2, v_2) интегралов уравнений (60) такие, для которых $u_1v_2-u_2v_1$ во всем этом интервале не обращается в нуль. Коэфициенты p_1, q_1, p_2, q_2 будут тогда в этом интервале непрерывны, и в качестве функций η и ζ достаточно будет взять функции класса (I) между x_0 и x_1, обращающиеся в нуль вне интервала (ξ_0, ξ_1) и удовлетворяющие соотношению $\zeta'-p_2\eta-q_2\zeta=0$. Ясно, что мы будем иметь $\delta^2 J=0$. Можно было бы также доказать, что не может быть $C<0$ или $AC-B^2<0$ ни в одной точке интервала (x_0, x_2). Так как согласно предположению B^2-AC не обращается в нуль между X_0 и X_1, то мы должны иметь во всем интервале (x_0, x_1): $A>0$, $C>0$, $AC-B^2>0$.

Необходимость условия Якоби доказывается точно так же, если показать, что если между A и B находится фокус, сопряженный с A, то можно найти линию класса (I), содержащую эти две точки и дающую интегралу J значение, меньшее, чем дает Γ (см. Hadamard, стр. 355 и след.).

Этих условий еще недостаточно для экстремума. В самом деле, рассуждения § 636 могут быть воспроизведены дословно. Сравнивая значение интеграла, взятого вдоль дуги экстремали AC, взятой на кривой Γ, со значением интеграла J, взятого вдоль бесконечно близкого пути, пересекающего дугу AC под постоянным углом, *отличным от нуля*, мы получим новое необходимое условие для минимума. *Функция*

$$E(x, y, z;\ y', z';\ u, v)=$$
$$=F(x, y, z, u, v)-F(x, y, z, y', z')-(u-y')F'_{y'}-(v-z')F'_{z'} \tag{64}$$

не может принимать отрицательных значений вдоль Γ для конечных значений u и также v.

---

* Из этих соображений вытекает вообще, что $\delta^2 J>0$, если выполняются условия Лежандра, и если существуют две союзные системы интегралов уравнений (60) такие, что разность $u_1v_2-u_2v_1$ не обращается в нуль ни внутри интервала (x_0, x_1) ни на его концах.

III. ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Установим теперь систему достаточных условий для минимума. Эти условия основаны на рассмотрении *поля экстремалей* (Вейерштрасс) или *специальных пучков* (Адамар).

638. Определение поля экстремальных кривых. Мы будем для краткости обозначать всякую экстремальную кривую через G и будем говорить, что всякая система кривых G, зависящая от произвольного параметра, составляет *пучок*. Всякая связная и конечная часть плоскости $\mathfrak{D}$, находящаяся в области $\mathfrak{R}$, образует *поле экстремальных кривых*, или просто *поле*, если существует такой пучок экстремальных кривых, что через каждую точку $\mathfrak{D}$ проходит одна и только одна кривая пучка, причем угловой коэфициент $u(x, y)$ касательной в точке (x, y) к кривой G пучка, проходящей через эту точку, представляет непрерывную функцию, допускающую непрерывные частные производные u'_x и u'_y в области $\mathfrak{D}$. Кривые пучка представляют тогда интегральные кривые диференциального уравнения первого порядка $y' = u(x, y)$. Из этого уравнения получаем:

$$y'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u(x, y).$$

Введя эти значения y' и y'' в уравнение Эйлера, мы получим соотношение:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial u} u + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \tag{65}$$

при этом y' в функции $F(x, y, y')$ заменен через u. Это условие должно выполняться для координат любой точки поля $\mathfrak{D}$. Функция $u(x, y)$ должна, следовательно, быть интегралом уравнения в частных производных (65), непрерывным вместе со своими частными производными в $\mathfrak{D}$. Обратно, если уравнение (65) допускает интеграл, непрерывный вместе со своими частными производными первого порядка u'_x и u'_y в области $\mathfrak{D}$, то эта область представляет поле, ибо диференциальное уравнение $y' = u(x, y)$ определяет такой пучок экстремальных кривых, что через каждую точку области $\mathfrak{D}$ проходит одна и только одна из этих кривых.

Пусть $\mathfrak{G}_0$ — дуга экстремальной кривой, соединяющая точку $A(x_0, y_0)$ с точкою $B(x_1, y_1)$ и изображаемая уравнением $y = f(x)$, причем функция $f(x)$ принадлежит к классу (I) в интервале (x_0, x_1). Рассмотрим, как выше, область $\mathfrak{R}_\varepsilon$, заключенную между двумя прямыми $x = x_0$, $x = x_1$ и двумя кривыми $J_1 = f(x) + \varepsilon$, $J_2 = f(x) - \varepsilon$. Мы будем говорить, что *дуга* $\mathfrak{G}_0$ *принадлежит полю*, если можно указать достаточно малое число ε, для которого область $\mathfrak{R}_\varepsilon$ была бы полем, причем одною из экстремалей пучка была бы сама кривая $\mathfrak{G}_0$. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы линейное уравнение (65) допускало интеграл, непрерывный вместе со своими частными производ ными первого порядка в $\mathfrak{R}_{\epsilon}$ и обращающийся в $f'(x)$, если заменить y через $f(x)$*.

Всякая дуга экстремали, на которой выполняются условия Лежандра и Якоби в интервале (x_0, x_1), *принадлежит некоторому полю.* В самом деле, мы видели, изучая геометрическое значение условия Якоби (§ 633), что в этом случае уравнение Эйлера имеет бесчисленное количество интегралов $\varphi(x_1\lambda)$, зависящих от произвольного параметра λ, обращающихся при $\lambda=0$ в $f(x)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi(x, \lambda)$ непрерывна и допускает непрерывные частные производные первого и второго порядка, когда x изменяется от x_0 до x_1, а λ от $-k$ до $+k$, где k — некоторое положительное число.

2. Производная $\varphi'_{\lambda}(x, 0)$ отлична от нуля при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$. Покажем, что эта функция $\varphi(x, \lambda)$ определяет поле, которому принадлежит экстремальная кривая AB.

В самом деле, так как $\varphi'_{\lambda}(x, 0)$ не обращается в нуль при изменении x от x_0 до x_1, а производная $\varphi'_{\lambda}(x, \lambda)$ есть непрерывная функция двух переменных x и λ, то можно указать такое положительное число ρ, что $\varphi'_{\lambda}(x, \lambda)$ не обращается в нуль в целой области Δ, определенной неравенствами $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\rho \leqslant \lambda \leqslant \rho$. Когда x изменяется от x_0 до x_1, а λ от $-\rho$ до ρ, точка m с координатами $[x, y=\varphi(x, \lambda)]$ описывает некоторую область $\mathfrak{R}'$, заключающую $\mathfrak{G}_0$ и ограниченную прямыми $x=x_0$, $x=x_1$ и двумя кривыми $y=\varphi(x, -\rho)$, $y=\varphi(x, +\rho)$. Мы покажем, что через каждую точку этой области $\mathfrak{R}'$ проходит одна и только одна кривая рассматриваемого семейства. В самом деле, положим для определенности, что $\varphi'_{\lambda}(x, \lambda)>0$ в области $\mathfrak{R}'$. Если переменному x дать определенное значение x_2, заключенное между x_0 и x_1, то при изменении λ от $-\rho$ до $+\rho$ функция $\varphi(x_2, \lambda)$ возрастает от $\varphi(x_2, -\rho)$ до $\varphi(x_2, \rho)$, и точка с координатами $[x_2, \varphi(x_2, \lambda)]$ описывает отрезок прямой P_1P_2, параллельной Oy. Таким образом каждому значению x_2, заключенному между x_0 и x_1, соответствует отрезок прямой P_1P_2, и когда x_2 возрастает от x_0 до x_1, отрезок P_1P_2 описывает некоторую область плоскости, которая и есть область $\mathfrak{R}'$. Таким образом из самого способа построения мы видим, что каждой точке (x, y) области $\mathfrak{R}'$ соответствует определенное значение λ, заключенное между $-\rho$ и $+\rho$. Пусть $\lambda=\psi(x, y)$ будет этот корень. Так как производная $\varphi'_{\lambda}(x, \lambda)$ не равна нулю для значения $\lambda=\psi(x, y)$, то из общей теории

---

* Эта задача неопределенная, ибо уравнения $y=f(x)$ и $u=f'(x)$ представляют, как в этом нетрудно убедиться, характеристику линейного уравнения (65). Пусть (x_2, y_2) — координаты точки на дуге $\mathfrak{G}_0$. Если F — функция аналитическая относительно x, y, y', как это обычно имеет место, то функция $f(x)$ есть также аналитическая функция, и линейное уравнение (65) допускает бесчисленное множество интегралов, голоморфных в области, содержащей точку (x_2, y_2) и равных $f'(x)$ при $y=f(x)$. Для того чтобы эта область была полем, необходимо еще, чтобы один из этих интегралов был правильным во всей области $\mathfrak{R}_{\epsilon}$. Методы исчисления пределов Коши позволяют доказать, что если выполняются условия Лежандра и Якоби, то таких интегралов существует бесчисленное множество (см. *Anales de Toulouse*, 2-я серия, т. VIII, стр. 458).

неявных функций (т. I, § 36) и из предположений, которые были сделаны о функции $\varphi(x, \lambda)$, следует, что эта функция $\psi(x, y)$ непрерывна и допускает непрерывные частные производные в области $\mathfrak{R}'$. С другой стороны, угловой коэфициент $u(x, y)$ касательной к кривой рассматриваемого пучка, которая проходит через точку (x, y) области $\mathfrak{R}'$, равен $\varphi'_x(x, \lambda) = \varphi'_x[x, \psi(x, y)]$. Так как производные второго порядка от φ непрерывны, а функция ψ допускает производные первого порядка, которые также непрерывны, то отсюда следует, что функция $u(x, y)$ также допускает частные производные u'_x и u'_y, непрерывные в $\mathfrak{R}'$. Следовательно, область $\mathfrak{R}'$ есть поле.

Пусть теперь ε будет нижняя граница двух функций

$$\varphi(x, \rho) - \varphi(x, 0), \quad \varphi(x, 0) - \varphi(x, -\rho)$$

при изменении x от x_0 до x_1. Это число ε положительно, ибо две предыдущие функции непрерывны и в интервале (x_0, x_1) не могут обратиться в нуль. Следовательно, область $\mathfrak{R}_\varepsilon$, определенная неравенствами $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $f(x) - \varepsilon \leqslant y \leqslant f(x) + \varepsilon$, целиком заключена в области $\mathfrak{R}'$, т. е. $\mathfrak{R}_\varepsilon$ есть поле, окружающее дугу $\mathfrak{G}_0$.

Обратно, существование поля, окружающего $\mathfrak{G}_0$, влечет за собой условие Якоби. В самом деле, пусть $u(x, y)$ интеграл уравнения (65), непрерывный в этом поле так же, как его производные u'_x, u'_y, и такой, что

$$f'(x) = u[x, f(x)].$$

Интеграл $y = \varphi(x, \lambda)$ диференциального уравнения $y' = u(x, y)$, который при $x = x_0$ принимает значение $y_0 + \lambda$, представляет для значений x от x_0 до x_1 непрерывную функцию переменных x и λ и допускает в этом интервале непрерывные производные, коль скоро $|\lambda|$ остается меньше положительного числа k. Функция $\xi = \varphi'_\lambda(x, 0)$, которая при $x = x_0$ принимает значение $\xi = 1$, есть решение уравнения в вариациях $\xi'(x) = u'_y[x_1 f(x)]\xi(x)$. Эта функция $\xi(x)$ в интервале (x_0, x_1) не обращается в нуль, и ясно, что она также является решением уравнения в вариациях (43), так как $\varphi(x, \lambda)$ есть интеграл уравнения Эйлера.

Но следует заметить, что дуга $\mathfrak{G}_0$ может принадлежать полю, а условие Лежандра не быть выполненным. Положим, например, что $F = xy'^2$. Прямые, параллельные оси x, в самом деле образуют пучок экстремалей, между тем условие Лежандра на отрезке $(-1, +1)$ оси x не выполняется.

Для образования поля можно взять, например, пучок экстремалей, соседних с $\mathfrak{G}_0$ и выходящих из точки A с абсциссою X_0, расположенной на продолжении экстремали слева от A и настолько близкой к A, что первый фокус, сопряженный с A находится справа от B. Если $y = \varphi(x, \lambda)$ представляет уравнение пучка, то, как мы видели (§ 633), функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет предыдущим условиям. Иногда берут также особый пучок, состоящий из экстремалей, соседних с $\mathfrak{G}_0$ и выходящих из самой точки A, но тогда через эту точку A проходит бесчисленное множество экстремалей, а это вводит ограничения в некоторые из наших положений.

В примерах, изложенных выше (§ 634), мы легко найдем поле экстремалей, которому принадлежит дуга AB. Предполагая, что условие Якоби выполнено, положим, что O есть точка оси x, через которую нельзя провести ни одной касательной к дуге AB. Тогда можно на продолжении экстремали найти такие две точки A' и B', соответственно слева от A и справа от B, что всякая полупрямая OL, расположенная внутри угла $A_0'B'$, встречает дугу $A'B'$ в одной и только в одной точке. Дуги, гомотетичные с $A'B'$ относительно точки O, очевидно, составляют поле экстремалей, окружающих дугу AB.

639. Теорема Вейерштрасса. Если предположить, что условия Лежандра и Якоби выполняются на дуге экстремали $\mathfrak{G}_0$, то область $\mathfrak{R}_\varepsilon$ есть поле, окружающее дугу $\mathfrak{G}_0$, если только положительное число ε взято достаточно малым. Всякая кривая Γ класса (I), расположенная в поле $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и соединяющая две точки A и B, изображается уравнением:

$$y = f(x) + \omega(x),$$

где функция $\omega(x)$ принадлежит к классу (I) в интервале (x_0, x_1) и удовлетворяет условиям:

$$\omega(x_0) = 0, \quad \omega(x_1) = 0, \quad |\omega(x)| < \varepsilon$$

для $x_0 < x < x_1$.

Для того чтобы экстремаль $\mathfrak{G}_0$ давала минимум, интеграл $J_{\mathfrak{G}_0}$ должен быть меньше, чем интеграл J_Γ, какова бы ни была форма этой кривой Γ, лишь бы только она удовлетворяла поставленным условиям. Как это легко усмотреть, трудность задачи заключается в том, что приходится сравнивать значения двух определенных интегралов, взятых по двум различным путям. Вейерштрассу удалось выразить разность между этими двумя интегралами при помощи одного определенного интеграла, взятого вдоль пути Γ. Мы сперва приведем очень простой метод Гильберта, приводящий к формуле Вейерштрасса *. Он основан на следующей лемме:

Пусть $\mathfrak{D}$ — поле экстремалей. Если $u(x, y)$ есть функция, соответствующая этому полю (§ 638), то криволинейный интеграл

$$I = \int [F(x, y, u) - uF'_u(x, y, u)]\,dx + F'_u(x, y, u)\,dy, \tag{66}$$

взятый вдоль произвольной замкнутой кривой, расположенной в поле, равен нулю.

В самом деле, условие, при котором этот интеграл равен нулю, выражается следующим соотношением:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - u\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u} - u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

которое тождественно с уравнением (65), которому удовлетворяет функция $u(x, y)$.

Применим формулу Гильберта к замкнутому контуру, составленному из дуги экстремали $\mathfrak{G}_0$ и из кривой Γ, причем под $u(x, y)$ будем

* В. Ермаков (*Journal des Mathématiques*, 6-я серия, т. I, 1905) утверждает, что этот метод применялся также Вейерштрассом в его лекциях.

понимать функцию, соответствующую полю $\mathfrak{R}_\varepsilon$. Вдоль дуги $\mathfrak{G}_0$ имеем: $u[x, f(x)] = f'(x)$, и, следовательно, эта формула нам дает:

$$\int_{\mathfrak{G}_0} F(x, y, y')\,dx = \int_\Gamma [F(x, y, u) + (y' - u) F'_u(x, y, u)]\,dx,$$

причем оба интеграла взяты в должном направлении — в направлении возрастания x от x_0 до x_1. Отсюда получаем:

$$J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}_0} = \int_\Gamma [F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u) F'_u(x, y, u)]\,dx,$$

или согласно определению функции E (§ 636):

$$J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}_0} = \int_\Gamma E(x, y;\, u, y')\,dx. \tag{67}$$

Это и есть формула Вейерштрасса, которую мы хотели получить. В этой формуле y' означает угловой коэфициент касательной к Γ, а функция $n(x, y)$ — угловой коэфициент касательной к кривой $\mathfrak{G}$ поля, которая проходит через точку (x, y).

640. Достаточные условия. Если функция $E(x, y;\, u, p)$ трех независимых переменных x, y, p сохраняет постоянный знак для координат любой точки области $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и для всякого конечного значения p, то это обеспечивает знак разности $J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}_0}$; под u в функции E при этом мы понимаем функцию $u(x, y)$, соответствующую рассматриваемому полю. В частности, если функция E в этой области все время положительна, то $J_\Gamma > J_{\mathfrak{G}_0}$, и мы можем утверждать следующее: *экстремальная кривая $\mathfrak{G}_0$ дает минимум интегралу J, если функция $E(x, y;\, u, p)$ положительна для любой точки (x, y) области $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и при всяком конечном значении p.*

Чтобы узнать, выполняется ли это условие, необходимо сначала найти функцию $u(x, y)$, которая соответствует какому-нибудь частному полю экстремалей, содержащему $\mathfrak{G}_0$. Это условие можно заменить другим, менее общим, но более удобным для применения, ибо оно не требует вычисления функции $u(x, y)$. В самом деле, по формуле Тейлора имеем:

$$E(x, y;\, u, p) = \frac{(p-u)^2}{1\cdot 2} F''_{y'^2}[x, y, u + \theta(p-u)] = (p-u)^2 G(x, y; p), \tag{68}$$

и функция $E(x, y;\, u, p)$ будет наверно положительной, если вторая производная $F''_{y'^2}(x, y, p)$ положительна для любой точки (x, y) области $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и для всякого конечного значения p. Отсюда легко получить систему *достаточных условий* для того, чтобы экстремальная кривая $\mathfrak{G}_0$ давала минимум интегралу J.

Пусть C есть некоторая замкнутая кривая, внутри которой находится $\mathfrak{G}_0$ и которая не имеет с $\mathfrak{G}$ ни одной общей точки. Часть плоскости, ограниченная контуром C, составляет окрестность дуги $\mathfrak{G}_0$, и ясно, что если выбрать ε достаточно малым, то область $\mathfrak{R}_\varepsilon$ вся будет находиться внутри нее. И если какое-нибудь условие выполняется для области внутри C, то оно подавно будет иметь место для области $\mathfrak{R}_\varepsilon$.

Приняв это во внимание, мы можем сказать, что *кривая* $\mathfrak{G}_0$ *доставляет интегралу* J *минимум, если вторая производная* $F''_{y'^2}(x, y, p)$ *положительна в некоторой окрестности дуги* $\mathfrak{G}_0$ *для всякого конечного значения* p *и если* $x_1 < x'_0$.

В самом деле, функция $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)] = R(x)$ положительна при изменении x от x_0 до x_1. Условие Лежандра, следовательно, выполнено. Условие Якоби также выполнено по предположению, и согласно формуле (68) можно найти поле $\mathfrak{R}_\varepsilon$, окружающее $\mathfrak{G}_0$, где функция E положительна для всякого конечного значения p. Таким образом всегда будет $J_{\mathfrak{G}_0} < J_\Gamma$.

Заметим, что предыдущие условия не представляют системы необходимых условий. В самом деле, может случиться, что функция $G(x, y; p)$ будет положительна во всяком поле $\mathfrak{R}_\varepsilon$ для всякого конечного значения p, тогда как это не имеет места для функции $F''_{y'^2}(x, y, p)$ (§ 641).

Примечания. Пусть $\mathfrak{G}$ — любая экстремаль выбранного нами пучка; $u(x, y)$ — угловой коэфициент касательной к этой экстремали в точке (x, y) поля. Если функция $E(x, y; u, p)$ положительна во всем поле при всяком конечном значении p, то необходимое условие минимума, указанное в § 636, выполняется также для экстремали $\mathfrak{G}$. Мы получим, таким образом, *достаточное* условие Вейерштрасса, если выразим, что *необходимое* условие выполняется для всех экстремалей рассматриваемого пучка в поле. Ясно, что это необходимое условие может быть выполнено на экстремали $\mathfrak{G}_0$ и не выполняться на бесконечно близких экстремалях. Из этого замечания мы также заключаем, что всякая дуга экстремали $\mathfrak{G}$ данного пучка, расположенная внутри поля, также дает минимум интегралу, ибо достаточное условие Вейерштрасса выполняется также для этой дуги экстремали, которая принадлежит тому же пучку, что и $\mathfrak{G}_0$.

Ясно, что достаточное условие Вейерштрасса влечет за собой условие Лежандра по крайней мере в широком смысле (§ 636). Так как, с другой стороны, существование поля предполагает условие Якоби (§ 638), то можно сказать, что *дуга экстремали* $\mathfrak{G}_0$ *дает минимум, если эта дуга принадлежит полю, в котором выполняются достаточные условия Вейерштрасса.* Если функция F не содержит y, то два условия Вейерштрасса (*необходимое* условие и *достаточное* условие) сводятся к одному. В самом деле, можно в качестве $u(x, y)$ взять значение $f'(x)$ в точке дуги $\mathfrak{G}_0$, а это равносильно введению специального пучка, состоящего из экстремалей, которые получаются из $\mathfrak{G}_0$ перенесением, параллельным оси Oy.

Примеры. 1. В примере Больца (§ 636), где

$$F = y'^2(a - 4byy' + 2bxy'^2),$$

можно взять $u = 0$. Специальный пучок состоит из прямых, параллельных Ox, и функция $E(x, y; u, p)$ равна $p^2(a - 4byp + bxp^2)$. На дуге экстремали, состоящей из отрезка $(0,1)$ оси Ox, имеем $E \geqslant 0$, но это неверно для бесконечно близких экстремалей пучка. В самом деле, если взять $y = \frac{\varepsilon}{2}$, $p = \frac{y}{x}$, где x имеет положительное значение, меньшее единицы и числа $\frac{b\varepsilon^2}{2a}$, то функция E отрицательна.

2. Рассмотрим еще $F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$. Здесь

$$F''_{y'^2} = g(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

и эта производная имеет знак функции $g(x, y)$. Если выполняются условия Лежандра и Якоби, то $g(x, y)$ положительна вдоль всей дуги $\mathfrak{G}_0$. Имеем, следовательно, также $g(x, y) > 0$ в области, окружающей $\mathfrak{G}_0$, а следовательно, $F''_{y'^2}$ положительна во всей этой области для всякого конечного значения y'. Таким образом кривая $\mathfrak{G}_0$ дает интегралу минимум. Этот вывод применим в частности к примерам § 622.

641. Сильный минимум и слабый минимум. Если в какой-нибудь точке кривой Γ с абсциссою x значение y' очень мало отличается от значения $f'(x)$, то, так как и $u(x, y)$ мало отличается от $f'(x)$, можно сказать, что разность $u + \theta(y' - u) - f'(x)$ также очень мала, а следовательно, согласно формуле (68), функция $E(x, y; u, y')$ имеет тот же знак, что и $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$. Это замечание естественно приводит к введению нового понятия.

Пусть вообще $\omega(x, \alpha)$ есть непрерывная функция в интервале (x_0, x_1), имеющая в этом интервале непрерывную производную первого порядка $\omega'_x(x, \alpha)$, обращающаяся в нуль при $x = x_0$ и при $x = x_1$ для любого значения α, а при $\alpha = 0$ обращающаяся тождественно в нуль.

Мы будем говорить, что $\omega(x, \alpha)$ есть *слабая вариация*, если всякому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число δ такое, что для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ имеют место неравенства:

$$|\omega(x, \alpha)| < \varepsilon, \quad |\omega'_x(x, \alpha)| < \varepsilon, \tag{69}$$

если только значение $|\alpha|$ меньше δ. В противоположность этому, говорят, что функция $\omega(x, \alpha)$ есть *сильная вариация*, если выполняется только первое условие, т. е. если всякому положительному числу ε можно поставить в соответствие другое положительное число δ, так что для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ выполняется неравенство

$$|\omega(x, \alpha)| < \varepsilon,$$

коль скоро $|\alpha| < \delta$, между тем как значение $|\omega'_x(x, \alpha)|$ при приближении α к нулю не подчинено никакому условию.

Рассмотренные выше вариации, которые имеют форму $\alpha\eta(x)$, суть слабые вариации, какова бы ни была функция $\eta(x)$; в самом деле, достаточно, чтобы было $M|\alpha| < \varepsilon$, где M означает наибольшее значение $|\eta(x)|$ и $|\eta'(x)|$ в интервале (x_0, x_1), и оба неравенства (69) будут выполнены.

Напротив того, вариация

$$\omega(x, \alpha) = \alpha \sin\left[\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{\alpha^n}\right],$$

где $n > 1$, есть сильная вариация, ибо

$$\omega'_x(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cos\left[\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{\alpha^n}\right](2x - x_0 - x_1),$$

и всегда можно указать значения α, по абсолютной величине меньшие любого положительного числа ρ, для которых $|\omega'_x(x, \alpha)|$ больше любого наперед данного числа.

Это различие легко усматривается на самих кривых. В самом деле, рассмотрим две кривые $\mathfrak{G}$ и Γ, изображенные двумя уравнениями:

$$y = f(x), \tag{G}$$
$$y = f(x) + \omega(x, a), \tag{Γ}$$

и поставим в соответствие друг другу точки этих двух кривых, имеющие одну и ту же абсциссу. Расстояние между двумя соответствующими точками двух кривых меньше ε, коль скоро $|a| < \varepsilon$, независимо от того, будет ли вариация слабая или сильная. Но если вариация $\omega(x, a)$ *слабая*, то не только две соответствующие точки на двух кривых бесконечно близки, но и угол между касательными к этим кривым в этих точках бесконечно мал. Это не имеет места, если вариация $\omega(x, a)$ сильная; в этом случае угол между касательными к двум кривым в соответствующих точках, вообще говоря, не стремится к нулю, как в этом можно убедиться на предыдущем примере.

Аналогичное различие можно сделать для минимума. Мы будем говорить, что экстремальная кривая $\mathfrak{G}_0$ дает *слабый минимум* интегралу J, *если существует положительное число ε такое, что интеграл*

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

меньше, чем интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx$$

для всех возможных видов функций $\omega(x)$ класса (I), *удовлетворяющих условиям:*

$$\omega(x_0) = 0, \quad \omega(x_1) = 0, \quad |\omega(x)| < \varepsilon, \quad |\omega'(x)| < \varepsilon$$

для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$.

В противоположность этому, говорят, что экстремальная кривая $y = f(x)$ дает *сильный минимум*, если она удовлетворяет условиям, приведенным в начале этой главы (§ 620). Отсюда легко объяснить, почему условия Лежандра и Якоби недостаточны для сильного минимума, ибо эти условия получаются при рассмотрении только слабых вариаций. Наоборот, условие Вейерштрасса (§ 636) было получено при рассмотрении сильной вариации.

Теорема. *Дуга экстремали $\mathfrak{G}_0$, для которой выполняются условия Лежандра и Якоби, дает по крайней мере слабый минимум интегралу J.*

В самом деле, по предположению, функция

$$R(x) = F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$$

имеет положительное значение, когда x возрастает от x_0 до x_1. Так как функция $F''_{y'^2}(x, y, y')$ непрерывна, то можно указать такое положительное число δ, что

$$F''_{y'^2}[x, f(x) + h, f'(x) + k] > 0 \text{ для } x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

если только $|h|$ и $|k|$ не превосходят δ. Пусть Γ — кривая соседняя с $\mathfrak{G}_0$ и изображаемая уравнением $y=f(x)+\omega(x)$. Заменяя в формуле (68) p на y', мы в ней должны взять

$$u+\theta(y'-u)=u[x, f(x)+\omega(x)]+ \\ +\theta\{f'(x)+\omega'(x)-u[x, f(x)+\omega(x)]\},$$

или, заметив, что $u[x, f(x)]=f'(x)$ и обозначая через θ число, заключенное между нулем и единицей, это выражение можно записать еще так:

$$f'(x)+\theta\omega'(x)+(1-\theta)\{u[x, f(x)+\omega(x)]-u[x, f(x)]\}= \\ =f'(x)+\theta\omega'(x)+(1-\theta)\,\omega(x)\,u'_y[x, f(x)+\theta_1\omega(x)].$$

Пусть μ — верхняя граница для $|u'_y|$ в некоторой окрестности $\mathfrak{G}_0$. Возьмем положительное число ε такое, чтобы было $\varepsilon(1+\mu)<\delta$; если для значений x между x_0 и x_1 значения $|\omega(x)|$ и $|\omega'(x)|$ меньше ε, то

$$|y-f(x)|<\delta, \quad |u+\theta(y'-u)-f'(x)|<\delta$$

вдоль всей кривой Γ, и, следовательно, функция

$$E(x, y; y', u)$$

положительна вдоль всей этой кривой. Следовательно, разность $J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}_0}$ согласно формуле (67) положительна.

Предположение, приведенное в конце предыдущего параграфа, может быть также формулировано следующим образом:

Теорема. *Дуга экстремали $\mathfrak{G}_0$, для которой выполняются условия Лежандра и Якоби, дает* **сильный минимум** *интегралу J, если вторая производная $F''_{y'^2}(x, y, p)$ остается положительной для всякого конечного значения p в некоторой области, окружающей $\mathfrak{G}_0$.*

Примеры. 1. Пусть $F=y'^2(y'-1)^2$. Имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=4y'^3-6y'^2+2y'=2y'(y'-1)(2y'-1),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=12y'^2-12y'+2=12(y'-m')(y'-m''),$$

где m' заключается между 0 и $\frac{1}{2}$, а m'' — между $\frac{1}{2}$ и 1. Экстремальными кривыми служат прямые линии, и каждая прямая с угловым коэфициентом m принадлежит полю, составленному из параллельных прямых. Соответствующее значение функции $u(x, y)$ есть $u(x, y)=m$.

Если заданы две точки A и B в плоскости xy, то прямая AB есть единственная экстремальная кривая, соединяющая эти две точки. Эта кривая всегда удовлетворяет условию Якоби, а условие Лежандра выполняется только в том случае, если угловой коэфициент m прямой AB меньше m' или больше m''.

Пусть $\mathfrak{R}_\varepsilon$ — область, определенная, как выше было указано, для экстремальной кривой AB; эта область представляет поле, в котором $u(x, y)=m$. Функция $E(x, y; m, p)$ Вейерштрасса имеет значение:

$$E(x, y; m, p)=(p-m)^2[p^2+2p(m-1)+(m-1)(3m-1)]= \\ =(p-m)^2[(p+m-1)^2+2m(m-1)].$$

Эта функция положительна для всякого конечного значения p, если m отрицательно или больше единицы, и только в этих двух случаях. Мы приходим, таким образом, к следующим результатам:

1) Если $m<0$ или $m>1$, то прямая AB дает сильный минимум интегралу $J=\int\limits_{x_0}^{x_1} y'^2(y'-1)^2\,dx$. То же будет, если $m=0$ или $m=1$, ибо в этих двух случаях значение интеграла J вдоль прямой AB равно нулю, между тем как для всякой другой кривой класса (I), соединяющей точки A и B, это значение положительно.

2) Если $0<m<m'$ или $m''<m<1$, то прямая AB дает интегралу J слабый минимум.

3) Наконец, если $m'\leqslant m\leqslant m''$, прямая AB не дает ни сильного, ни слабого минимума, ибо условие Лежандра не выполняется.

Этот пример, принадлежащий также Больца, приводит к одному интересному замечанию: мы видим, что функция $E(x, y; m, p)$ остается положительной для всякого конечного значения y', когда m отрицательно или больше единицы, хотя вторая производная $F''_{y'^2}=12(y'-m')(y'-m'')$ не остается положительною для всякого конечного значения y'. Следовательно, условие $F''_{y'^2}>0$ не есть *необходимое* условие для того, чтобы имел место сильный минимум (§ 640).

2. Пусть $F=\dfrac{x}{1+y'^2}$. Выше мы видели, что условие Вейерштрасса выполняется только для прямых, параллельных оси x. Следовательно, всякая другая экстремаль не может давать сильного минимума. Так как условие Якоби всегда выполняется, ибо $u=1$ есть решение уравнения в вариациях (§ 634, сноска), то мы будем иметь слабый экстремум, если выполняется условие Лежандра, т. е. если $(3y'^2-1)x$ сохраняет вдоль рассматриваемой экстремали постоянный знак.

642. Интерпретация метода Вейерштрасса. Каждому решению $u(x, y)$ уравнения (65) соответствует функция $\theta(x, y)$, удовлетворяющая двум соотношениям:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=F''(x, y, u)-uF'_u(x, y, u),\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=F'_u(x, y, u); \tag{70}$$

Вейерштрасс представил свой метод в несколько иной форме, из которой делается очевидным значение этой функции $\theta(x, y)$. Уравнение $\theta(x, y)=c$ представляет общий интеграл диференциального уравнения

$$[F(x, y, u)-uF'_u(x, y, u)]\,dx+F'_u(x, y, u)\,dy=0, \tag{71}$$

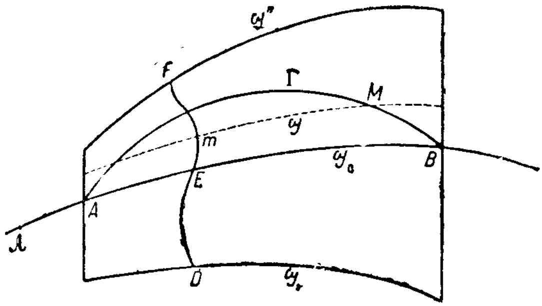
которое как раз определяет трансверсальные кривые (§ 626) рассматриваемого пучка экстремалей, для которого $y'=u(x, y)$.

Пусть γ — трансверсаль, которая проходит через точку E, взятую на дуге AB или на ее продолжении. Возьмем на этой трансверсали дугу DF, концы которой расположены по разные стороны точки E, настолько малую, что $F(x, y, u)$ вдоль DF не обращается в нуль, и что экстремали, которые пересекают трансверсально DF, находятся в поле*. В таком случае мы можем ограничить поле двумя экстремалями $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$,

---

* Мы не рассматриваем исключительного случая, когда функция $F(x, y, u)$ равна нулю вдоль всей кривой $\mathfrak{G}_0$. В этом случае трансверсаль, выходящая из точки E, совпадает с $\mathfrak{G}_0$. Этот случай всегда можно исключить из рассмотрения, ибо можно, не меняя содержания задачи (§ 621), прибавить к функции F любое выражение вида $\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}y'$ и так распорядиться функцией v, чтобы этот особый случай не имел места. Можно даже подобрать функцию v так, чтобы трансверсалью была произвольная кривая, например, прямая $x=x_0$.

выходящими из точек D и F, и двумя отрезками прямых $x = x_1$, $x = x^1$ (черт. 104). Через каждую точку M поля проходит экстремаль $\mathfrak{E}$ пучка, которая пересекает трансверсально γ в определенной точке m дуги DF. Может, в частности, случиться, что кривая γ вырождается в точку $\mathfrak{A}$, лежащую на продолжении AB; тогда пучок состоит из экстремалей, выходящих из этой точки. Принимая это во внимание, положим, что $U(x, y)$ есть определенный интеграл $\int F(x, y, y')\,dx$ вдоль дуги mM экстремали $\mathfrak{E}$, проходящей через точку M, взятый начиная от точки m, в которой экстремаль пересекает γ трансверсально. $U(x, y)$ есть функция, определенная в каждой точке поля, и согласно общей формуле (18'), которая дает первую вариацию (§ 625), ее полный диференциал dU тождествен с $d\theta$. Так как функция $\theta(x, y)$ определена только с точностью до постоянной, то мы можем взять $\theta = U(x, y)$.



Черт. 104.

Пусть Γ — любая кривая класса (I), находящаяся в поле и соединяющая две точки A и B. Имеем последовательность очевидных равенств:

$$J_\Gamma - J_{\mathfrak{E}_0} = \int\limits_\Gamma F(x, y, y')\,dx - \int\limits_{\mathfrak{E}_0} d\theta = \int\limits_\Gamma \{F(x, y, y')\,dx - d\theta\},$$

и, заменяя $d\theta$ его значением, мы приходим снова к формуле Вейерштрасса. Рассуждения эти не очень существенно отличаются от предыдущих, но здесь ясно видна роль вспомогательной функции $\theta(x, y)$, которая появляется при преобразовании разности $J_\Gamma - J_{\mathfrak{E}_0}$.

Зная систему решений двух уравнений (70), можно представить функцию $F(x, y, y')$ в виде:

$$F(x, y, y') = \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} y' + G(x, y, y'), \tag{72}$$

где функция $G(x, y, y')$ и ее производная $G'_{y'}$ обращаются в нуль при замене y' на $u(x, y)$. Обратно, если можно каким-нибудь способом представить функцию F в виде (72), где θ зависит только от x и от y, а функция $G(x, y, y')$ и ее производная $G'_{y'}(x, y, y')$ обращаются в нуль при $y' = u(x, y)$, то интегральные кривые уравнения $y' = u(x, y)$ образуют пучок экстремалей, и кривые $\theta(x, y) = c$ представляют трансверсали этого пучка. В самом деле, если продиференцировать обе части тождества (72) по y' и затем в обоих соотношениях заменить y' на u, то получатся как раз формулы (70). Функция $E(x, y; u, y')$ для этого пучка экстремалей совпадает с самой функцией $G(x, y, y')$.

Заметим, что, если θ обращается в постоянную, то функция F обращается в G, и диференциальное уравнение (71) трансверсальных кривых удовлетворяется тождественно.

643. Уравнение семейства трансверсалей. Исключая u из двух уравнений (70), мы получаем уравнение в частных производных:

$$\Phi\left(x, y, \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) = 0, \tag{73}$$

интегрирование которого дает все семейства трансверсальных кривых. В самом деле, всякому решению $\Theta(x, y)$ этого уравнения соответствует функция $u(x, y)$, удовлетворяющая двум соотношениям (70), а следовательно, уравнению (65).

Таким образом интегральные кривые уравнения $y' = u(x, y)$ образуют семейство экстремалей, для которых кривые $\Theta(x, y) = c$ служат трансверсальными кривыми. Обратное предложение, очевидно, и мы получаем следующую теорему:

Если $\Theta(x, y)$ есть интеграл уравнения (73), то кривые $\Theta(x, y) = c$ образуют семейство трансверсалей, и все они могут быть получены этим способом.

Как мы уже видели (§ 626), семейство трансверсалей определено, если задана одна кривая этого семейства. Это вполне согласуется с общей теоремой существования, ибо интеграл уравнения (73) определен, если задано его значение (которое здесь есть любое постоянное) вдоль некоторой кривой на плоскости xy.

Интегрирование уравнения (73) приводится к интегрированию уравнения Эйлера, (§ 621) и обратно. Действительно, мы покажем, что *экстремальные кривые представляют проекции на плоскость xy характеристик уравнения* (73).

Пусть $y = f(x)$ — уравнение экстремали $\mathfrak{C}$. Мы уже заметили (стр. 254, сноска), что пространственная кривая $\Gamma \{y = f(x), u = f'(x)\}$ является характеристической кривою для уравнения относительно u. Другими словами, существует бесчисленное множество интегралов $u = F(x, y)$, обращающихся в $f'(x)$ при замене y через $f(x)$. Каждой из этих функций u соответствует интеграл уравнения относительно Θ, который будет вполне определен, если будет задано значение Θ_0 в точке M_0 кривой $\mathfrak{C}$; следовательно, в силу формулы (70) значения Θ, $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\Theta}{\partial y}$ остаются одинаковыми для всех этих интегралов вдоль кривой $\mathfrak{C}$. Отсюда следует, что все они соприкасаются вдоль некоторой кривой Γ' пространства (x, y, Θ), проекцией которой на плоскость (x, y) служит кривая $\mathfrak{C}$. Эта кривая Γ' таким образом, представляет характеристику уравнения (73), и точно таким же образом можно доказать, что, обратно, всякая характеристика уравнения относительно Θ проектируется на плоскость xy в характеристику уравнения относительно u, и, следовательно, в экстремальную кривую.

Положим для краткости $q = \frac{\partial\Theta}{\partial x}$, $p = \frac{\partial\Theta}{\partial y}$. Диференциальные уравнения характеристик уравнения (73) будут:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{74}$$

где t означает вспомогательную переменную. Интегрирование этой *канонической системы* при условии $\Phi = 0$ эквивалентно интегрированию уравнения Эйлера. Если известен интеграл $\Theta(x, y, a)$ уравнения (73), зависящий от произвольного постоянного a, отличного от того, которое всегда можно прибавить к решению, то $\Theta(x, y, a) + b$ представляет полный интеграл, а *уравнение $\frac{\partial\Theta}{\partial a} + c = 0$, где a и c — два произвольных постоянных, есть общее уравнение экстремальных кривых* (т. II, § 448).

Если $F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$, то уравнением относительно Θ будет

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = [g(x, y)]^2.$$

На всякой интегральной поверхности вида $z = \Theta(x, y)$ характеристики суть линии наибольшего ската. Сеть, образованная из линии уровня $z = \text{const}$ и из кривых наибольшего ската, проектируется на плоскость xy в сеть, состоящую из пучка экстремалей и их ортогональных траекторий.

644. Случаи двух неизвестных функций. Предыдущая интерпретация метода Вейерштрасса позволяет легко его обобщить на случай n неизвестных функций; мы рассмотрим только случай $n = 2$. Определение поля экстремалей вполне аналогично тому, которое было дано для $n = 1$. Область $\mathfrak{D}$ пространства представляет поле, если существует семейство экстремалей, зависящее от двух параметров (или *конгруэнция* экстремалей), такое, что через каждую точку $\mathfrak{D}$ проходит одна и только одна экстремаль этой конгруэнции, причем угловые коэфициенты $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ касательной к экстремали, проходящей через точку (x, y, z), представляют непрерывные функции, которые допускают непрерывные частные производные в области $\mathfrak{D}$. Если условия Лежандра и Якоби удовлетворены на дуге экстремали $\mathfrak{G}_0$, то рассуждения, приведенные для $n = 1$, доказывают, что можно бесчисленным количеством способов найти поле экстремалей в окрестности $\mathfrak{G}_0$ так, чтобы $\mathfrak{G}_0$ была экстремалью конгруэнции. Рассмотрим для определенности конгруэнцию, образованную из экстремалей, соседних с $\mathfrak{G}_0$ и исходящих из точки $\mathfrak{A}$ с абсциссой $x_0 - h$, взятой на продолжении дуги $\mathfrak{G}_0$, где h настолько мало, что точка $\mathfrak{A}$ не имеет сопряженного фокуса на AB (§ 637). Эти экстремали изображаются двумя уравнениями вида:

$$y = f(x, \lambda, \mu), \quad z = \varphi(x, \lambda, \mu), \tag{75}$$

где функции $f(x, \lambda, \mu)$, $\varphi(x, \lambda, \mu)$, которые при $\lambda = \mu = 0$ обращаются соответственно в $f(x)$ и $\varphi(x)$, непрерывны и допускают непрерывные частные производные, когда x изменяется от $x_0 - h$ до x_1, коль скоро $|\lambda|$ и $|\mu|$ остаются меньше некоторого положительного числа ρ. Кроме того, детерминант $\frac{D(f, \varphi)}{D(\lambda, \mu)}$ при значениях $\lambda = \mu = 0$ не обращается в нуль при изменении x от x_0 до x_1 (§ 637). Из этого вытекает, что, и обратно, можно всегда определить такое положительное число ε, чтобы для всякой системы значений x, y, z, удовлетворяющей неравенствам

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad |y - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |z - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{76}$$

уравнения (75) допускали систему решений относительно λ и μ и притом единственную,

$$\lambda = \pi(x, y, z), \quad \mu = \pi_1(x, y, z),$$

где π и π_1 суть непрерывные функции, которые обращаются в нуль, когда точка (x, y, z) попадает на кривую $\mathfrak{G}_0$*. Таким образом область $\mathfrak{D}$, определенная неравенствами (76), представляет поле экстремалей. Через каждую точку этого поля проходит одна и только одна экстремаль, выходящая из точки $\mathfrak{A}$ в окрестности $\mathfrak{G}_0$. Ясно, что мы можем заменить это поле $\mathfrak{D}$ полем $\mathfrak{D}'$, которое состоит из той части пространства, которая покрыта экстремалями $\mathfrak{D}$, выходящими из точки $\mathfrak{A}$, когда точка (λ, μ) изменяется в некоторой окрестности начала координат. Пусть $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ — угловые коэфициенты касательной к экстремали, которая проходит через точку (x, y, z) области $\mathfrak{D}'$, а $\Theta(x, y, z)$ — значение определенного интеграла $\int F(x, y, z, y', z')\, dx$, взятого от точки $\mathfrak{A}$ до точки M вдоль экстремали пучка, соединяющей эти две точки. Согласно общей формуле, которая дает первую вариацию (§ 625), полный диференциал $d\Theta$ имеет выражение:

$$d\Theta = [F(x, y, z, u, v) - u F'_u(x, y, z, u, v) - v F'_v(x, y, z, u, v)\, dx + F'_u\, dy + F'_v\, dz.$$

---

* Это можно доказать, применяя, например, метод последовательных приближений к решению системы (75), рассматриваемой как система двух уравнений с двумя неизвестными λ, μ (*Annalés de l'Ecole Normale*, 3-я серия, т. XXIII, 1906, стр. 430 и след.).

Если Г есть кривая класса (I) поля $\mathfrak{D}'$, соединяющая две точки A и B, то опять имеем:

$$J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}} = \int\limits_\Gamma F(x, y, z, y', z')\,dx - \int\limits_{\mathfrak{G}} d\Theta = \int\limits_\Gamma \{F(x, y, z, y', z')\,dx - d\Theta\},$$

$$J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}} = \int\limits_\Gamma F(x, y, z; u, v, y', z')\,dx; \tag{77}$$

эта формула вполне аналогична формуле (67), и из нее можно получить те же следствия. *Экстремальная кривая $\mathfrak{G}_0$ дает минимум, если функция $E(x, y, z; u, v, p, q)$ положительна для всех систем конечных значений p и q в области $\mathfrak{D}$, окружающей $\mathfrak{G}_0$ и определенной неравенствами вида* (76).

Формула Тейлора, если в ней ограничиться только членами второго порядка дает:

$$E(x, y, z; u, v, y', z') = \frac{1}{2}\{(y'-u)^2 F''_{y'^2}[x, y, z, u + \Theta(y'+u),\ v + \Theta(z'-v)] +$$

$$+ 2(y'-u)(z'-v)F''_{y'z'}(\ldots) + (z'-v)^2 F''_{z'^2}(\ldots)\};$$

отсюда следует, что $\mathfrak{G}_0$ *дает минимум интегралу J, если квадратичная форма*

$$F''_{y'^2}(x, y, z, y', z')\,t^2 + 2F''_{y'z'}(\ldots)\,tw + F''_{z'^2}(\ldots)\,w^2$$

есть определенная положительная форма для всех конечных значений y' z', когда точка (x, y, z) остается в области $\mathfrak{D}$.

Предыдущие условия достаточны для того чтобы кривая $\mathfrak{G}_0$ давала *сильный минимум. Для слабого минимума* можно показать, аналогично § 641, что условия Лежандра и Якоби являются достаточными. Другими словами, достаточно, чтобы предыдущая квадратичная форма была определенною положительною формою вдоль кривой $\mathfrak{G}_0$, причем y' и z' выражают угловые коэфициенты касательной к этой кривой, и чтобы выполнялось условие Якоби.

Ясно, что способ, каким мы определили ко груэнцию экстремалей, не играет никакой роли, и метод Вейерштрасса приводит к функции $F(x, y, z, y', z')$ вида

$$F = \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}y' + \frac{\partial\Theta}{\partial z}z' + (y'-u)^2 G(x, y, z, y', z') +$$

$$+ 2H(y'-u)(z'-v) + K(z'-v)^2, \tag{78}$$

где Θ, u, v — функции от x, y, z, а G, H, K — функции от $x, y, z, y' z'$, и все эти функции непрерывны, так же как и их производные в некоторой области. Обратно, всякий раз как функция F представлена в этой форме, интегральные кривые системы дифференциальных уравнений $y' = u(x, y, z)$, $z' = v(x, y, z)$ суть экстремали. Это можно было бы обнаружить непосредственным вычислением, но достаточно заметить, что первая вариация интеграла J вдоль дуги одной из этих кривых при закрепленных концах очевидно равна нулю. *Поверхности $\Theta(x, y, z) = \mathrm{const}$ пересекаются этими экстремалями трансверсально.* В самом деле, если в уравнении (78) и в тех, которые получаются диференцированием его по y' и z', заменить y' и z' соответственно на u и v, то мы получим:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = F - uF'_u - vF'_v,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = F'_u,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = F'_v, \tag{79}$$

и условие трансверсальности действительно удовлетворяется (§ 626).

Исключая из двух уравнений (79) u и v, мы получим уравнение в частных производных, которое определяет семейства трансверсальных поверхностей.

IV. ТЕОРИЯ ВЕЙЕРШТРАССА. РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

645. Параметрическая форма интеграла. В задачах, изложенных до сих пор, рассматриваемые кривые могут встретить всякую прямую, параллельную оси Oy, или всякую плоскость, параллельную yz, не больше, чем в одной точке. Но во многих задачах геометрии это ограничение является искусственным, и определенный интеграл, экстремум которого ищется, имеет смысл для всякой кривой, имеющей касательную, направление которой изменяется непрерывно. Положим, например, что ищется экстремум интеграла

$$J=\int_{x_0}^{x_1}(y+a\sqrt{1+y'^2})\,dx;$$

выше мы видели, что экстремалями служат окружности радиуса a. Если расстояние между двумя данными точками A и B равно $2a$, то полуокружность, описанная на AB, как на диаметре, представляет экстремальную кривую, соединяющую эти точки. Но, если прямая AB не параллельна оси Ox, то существуют прямые, параллельные оси Oy, которые встречают эту экстремаль в двух точках. Таким образом задача, как она поставлена в § 621, в этом случае не имеет решения. Если, однако, написать интеграл в виде:

$$J=\int y\,dx+a\,ds,$$

то этот интеграл, взятый вдоль полуокружности, имеет смысл, и мы несколько позднее (§ 647) покажем, что первая вариация интеграла J равна нулю, если сравнивать его значение вдоль полуокружности со значением, взятым вдоль бесконечно близкой кривой, имеющей те же концы.

Мы будем излагать теорию Вейерштрасса, ограничиваясь рассмотрением плоских кривых и обращая особенное внимание на различия между новой теорией и ранее изложенными.

Мы будем говорить, что кривая Γ принадлежит к классу C^1, если координаты любой точки M этой кривой можно представить двумя функциями:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{80}$$

вспомогательного параметра t, которые непрерывны и допускают непрерывные первые производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, *не обращающиеся одновременно в нуль* ни при одном значении t, заключенном между значениями t_0 и t_1, соответствующими концам A и B дуги Γ. Всегда можно предположить, что $t_0<t_1$, мы это впредь и будем делать. Мы будем обозначать через A точку, соответствующую значению параметра t_0, и через B — точку, соответствующую значению t_1, и будем считать *положительным направлением* на дуге AB то направление, в котором перемещается движущаяся точка, передвигаясь по дуге A к B. При возрастании t от t_0 до t_1 точка с координатами $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описывает дугу AB в положительном направлении, так как обе производные $\varphi'(t)$

и $\psi'(t)$ не могут обратиться в нуль при одном и том же значении t. Если эта дуга не имеет двойных точек, то каждой точке M этой дуги соответствует одно и только одно значение t, заключенное между t_0 и t_1. Мы будем обозначать через θ угол, составленный положительным направлением касательной с осью Ox, причем этот угол отсчитывается, как в тригонометрии и только с точностью до числа, кратного 2π. Направляющие косинусы этого положительного направления касательной, т. е. косинусы углов (считая от 0 до π), которые она составляет с осями Ox и Oy, будут $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Всякая пара чисел $K\cos\theta$, $K\sin\theta$, где K — любое положительное число, дает систему направляющих параметров для этой касательной. Можно в качестве направляющих параметров взять производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, ибо

$$\varphi' = \cos\theta\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}, \quad \psi' = \sin\theta\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Всякая кривая Γ класса C^1 допускает бесчисленное множество параметрических изображений этого рода. В самом деле, если формулы (80) дают такое изображение, то из него можно получить новое, заменяя в этих формулах t функциею $\pi(\tau)$ переменного τ, непрерывною и возрастающею от t_0 до t_1 при возрастании τ от τ_0 до τ_1 и имеющею непрерывную производную $\pi'(\tau)$, которая не обращается в нуль между τ_0 и τ_1. От этого представления можно перейти к первоначальному, заменяя τ на обратную функцию $\pi^{-1}(t)$. В частности, всегда можно предполагать, что выполнена такая линейная подстановка $t = \alpha\tau + \beta$, что концам соответствуют наперед данные числа, например 0 и 1.

Принимая все это во внимание, положим, что $F(x, y; x', y')$ — функция четырех переменных x, y, x', y', непрерывная и допускающая непрерывные частные производные до третьего порядка при перемещении точки (x, y) в некоторой области $\mathfrak{R}$ плоскости и при любой системе конечных значений x', y', для которых $x'^2 + y'^2$ отлично от нуля. Пусть Γ — кривая класса C^1, расположенная в области $\mathfrak{R}$. Если формулы (80) дают параметрическое представление этой кривой, удовлетворяющее поставленным условиям, то определенный интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t)]\,dt \tag{81}$$

имеет определенное значение, которое зависит не только от самой кривой Γ, но также от принятого способа ее изображения, если функция F произвольна. Мы прежде всего найдем, каким условиям должна удовлетворять функция F для того, чтобы значение интеграла J зависело только от самой кривой Γ и от принятого направления на ней и не зависело от способа, каким эта кривая задана. Для этого необходимо и достаточно, чтобы интеграл того же вида, что и J, но полученный при другом способе изображения кривой, имел то же значение, что и первый. Заменяя в формулах (80) t на функцию $\pi(\tau)$, удовлетворяющую только что поставленным требованиям, мы получим новое параметрическое изображение кривой Γ, причем φ, ψ, φ', ψ' заменены соответственно через $\varphi[\pi(\tau)]$, $\psi[\pi(\tau)]$, $\varphi'(\pi)\pi'$, $\psi'(\pi)\pi'$, и значение интеграла (81) при таком новом изображении будет:

$$J' = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\{\varphi[\pi(\tau)], \psi[\pi(\tau)]; \varphi'[\pi(\tau)], \psi'[\pi(\tau)]\pi'(\tau)\}\, d\tau. \tag{82}$$

Если в этом интеграле произвести подстановку $\pi(\tau) = u$, то он переходит в

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u)\pi'(\tau)\pi'(\tau), \psi'(u)\pi'(\tau)] \frac{du}{\pi'(\tau)}. \tag{82'}$$

Для того чтобы интегралы (81) и (82') были равны для любой кривой Γ и для любого ее параметрического изображения, необходимо и достаточно, чтобы элементы были равны, т. е. чтобы выполнялось тождественно:

$$F[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u)\pi'(\tau), \psi'(u)\pi'(\tau)] = \pi'(\tau) F[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u), \psi'(u)],$$

где функция $\pi'(\tau)$ имеет какое угодно положительное значение. Мы будем вместе с Больца говорить, что функция $F(x, y; x', y')$ *положительно однородна* относительно x' и y' и степени m, если *для всякого положительного числа* K имеет место равенство:

$$F(x, y; Kx', Ky') = K^m F(x, y, x', y'). \tag{83}$$

Тогда только что полученный результат может быть формулирован так: *для того чтобы интеграл* (81) *зависел только от дуги* AB *класса* C^1 *и от принятого на ней направления обхода, необходимо и достаточно, чтобы функция* $F(x, y; x', y')$ *была положительно однородна и первой степени относительно* x', y'.

Этот интеграл можно представить в одном из двух видов:

$$J_\Gamma = \int_{\breve{AB}} F[x, y; x'(t), y'(t)]\, dt = \int_{\breve{AB}} F(x, y; dx, dy),$$

где переменное t ближе не определено.

Примечание 1. Рациональная функция от x' и y', которая удовлетворяет этому условию, однородна в обычном смысле слова, ибо она представляет частное от деления двух многочленов, однородных относительно x' и y' степени m и $m-1$, соответственно. Это не имеет места для иррациональной функции; например, радикал $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, взятый с положительным знаком, будет положительно однороден, но если заменить x' на Kx' и y' на Ky', *где K отрицательно*, то

$$\sqrt{K^2 x'^2 + K^2 y'^2} = -K\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Выражение $ax' + by' + \sqrt{x'^2 + y'^2}$ представляет сумму двух членов, положительно однородных, один из которых при замене x' на $-x'$ и y' на $-y'$ меняет знак, а другой не меняет знака.

Примечание 2. Если изменить направление обхода по кривой Γ, то интеграл вдоль BA получает значение:

$$J_{BA} = \int_{-t_1}^{-t_0} F[\varphi(-t), \psi(-t); \quad \varphi'(-t), -\psi'(-t)]\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(u), \psi(u); -\varphi'(u), -\psi'(u)]\, du.$$

Если функция f однородна относительно x' и y' в абсолютном смысле слова, то $J_{BA} = -J_{AB}$. Напротив того, если

$$F(x, y, -x', -y') = F(x, y, x', y'),$$

то $J_{BA} = J_{AB}$, и значение интеграла не зависит от направления обхода. Наиболее простой пример этого рода дает интеграл $\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

Примечание 3. В частном случае, когда кривая Γ есть кривая класса (I), и если, кроме того, $x_0 < x_1$, то можно в качестве параметрического изображения взять $x = t$, $y = (t)$, и интеграл принимает вид интеграла, который мы до сих пор рассматривали

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y'_x)\, dx.$$

Обратно, всякий интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx,$$

взятый вдоль кривой Γ класса (I), может быть представлен бесчисленным множеством способов в параметрической форме. Если, например, $x_0 < x_1$, то достаточно положить $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — такая функция класса (I), что x растет от x_0 до x_1 при возрастании t от t_0 до t_1, а затем положить $\psi(t) = f[\varphi(t)]$, и интеграл принимает параметрическую форму:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} G\left[\varphi(t), \psi(t); \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \varphi'(t)\, dt,$$

функция

$$F[x, y; x'(t), y'(t)] = G\left(x, y; y'_x\right) x'$$

действительно удовлетворяет условию однородности. Но для того чтобы это преобразование представляло некоторый интерес, необходимо, чтобы параметрическая форма интеграла была применима ко всем кривым класса C^1, по крайней мере в некоторой области. Например, интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_1} y'^2\, dx$ может быть записан в параметрической форме: $\int \frac{y'^2(t)}{x'(t)}\, dt$, но этот интеграл не будет иметь конечного значения для кривой класса C^1, которая имеет касательную, параллельную Oy.

646. Новая задача. Пусть будет $F(x, y; x', y')$ функция, удовлетворяющая условиям непрерывности и условию однородности, которые были изложены; каждой кривой класса C^1, расположенной в области $\mathfrak{R}$ и описанной в определенном направлении, соответствует определенное значение интеграла J. Можно относительно этих интегралов поставить те же задачи экстремума, какие были поставлены в § 621, 631 и следующих, но только необходимо точно определить, что следует понимать под *окрестностью* кривой этого рода. Эта окрестность уже не может быть ограничена отрезками двух прямых, параллельных оси Oy и проходящих через точки A и B, она должна содержать эти две точки внутри. Мы будем в дальнейшем называть *окрестностью дуги AB класса C^1* часть плоскости, покрываемую переменным кругом радиуса ρ, центр которого описывает дугу AB, и будем ее обозначать через $\mathfrak{D}_\rho$ или $\mathfrak{D}$; можно при этом ρ считать настолько малым, что область $\mathfrak{D}_\rho$ целиком находится внутри $\mathfrak{R}$. Приняв это определение, мы будем говорить, что кривая Γ дает относительный минимум интегралу J, если существует такое малое положительное число ρ, что значение интеграла J_Γ меньше или равно значению этого интеграла, взятому вдоль всякой другой кривой класса C^1, находящейся в области $\mathfrak{D}_\rho$ и имеющей те же концы, что и кривая Γ. Относительный максимум определяется точно так же.

Положим, что кривая Γ_1, заданная формулами:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где $x(t)$, $y(t)$ — функции класса (I) в интервале (t_0, t_1) причем $t_0 < t_1$, дает экстремум интегралу J. Пусть будут $\xi(t)$, $\eta(t)$ две функции класса (I) в том же интервале, обращающиеся на концах в нуль. Очевидно, что кривая, изображаемая уравнениями: $x = x(t) + a\xi(t)$, $y = y(t) + a\eta(t)$, расположена в области $\mathfrak{D}_\rho$, если $|a|$ достаточно мало, и интеграл

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t) + a\xi(t), y(t) + a\eta(t), x'(t) + a\xi'(t), y'(t) + a\eta'(t)]\, dt \qquad (84)$$

должен достигать максимума или минимума при $a = 0$. Можно вычислить первую и вторую вариации по общим формулам § 621 и 631, но в силу свойства однородности функции F между частными производными этой функции существуют соотношения, которые позволяют упростить общие выражения, полученные выше для δJ и $\delta^2 J$. Из соотношения

$$F = x' F'_{x'} + y' F'_{y'},$$

которое является следствием однородности, мы получаем следующие соотношения:

$$F'_x = x' F''_{xx'} + y' F''_{xy'}; \qquad x' F''_{x'^2} + y' F''_{x'y'} = 0;$$
$$F'_y = x' F''_{x'y} + y' F''_{y'y}; \qquad x' F''_{x'y'} + y' F''_{y'^2} = 0.$$

Последние два из них показывают, что производные второго порядка $F''_{x'^2}$, $F''_{x'y'}$, $F''_{y'^2}$ пропорциональны соответственно y'^2, $-x'y'$, x'^2. Положим

$$F''_{x'^2} = y'^2 F_1(x, y; x', y'), \quad F''_{x'y'} = -x'y'F_1, \quad F''_{y'^2} = x'^2 F_1, \qquad (85)$$

где определенная таким образом функция $F_1(x, y; x', y')$ непрерывна и допускает непрерывные производные в области $\mathfrak{R}$, если только $x'^2 + y'^2$ отлично от нуля. Но может случиться, что функция F_1 обращается в бесконечность при $x' = y' = 0$, даже если F остается конечной. Например, если $F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, то

$$F_1 = -\frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Примечание. Если интеграл J достигает относительного экстремума на кривой Г класса C^1, то ясно, что эта кривая Г подавно дает относительный экстремум при сравнении с кривыми класса (I), имеющими те же концы. Но обратное заключение будет неверно. Может случиться, что кривая Г класса (I) дает интегралу экстремум по сравнению со значениями этого интеграла, взятыми для кривых того же класса (I), и не дает экстремума, если сравнить значение интеграла $J_Г$ со значениями интеграла J, взятыми по кривым более общего класса C^1, имеющим те же концы, что и Г. Например, очевидно, что интеграл $J=\int\limits_0^2 \frac{d}{1+y'^2}$, взятый вдоль отрезка $(0, 2)$ оси x, будет больше, чем значение того же интеграла, взятое вдоль любой другой кривой класса (I), имеющей те же концы. Но если написать этот интеграл в параметрической форме: $\int \frac{x'^3 d}{x'^2+y'^2}$, то можно найти кривые классы C^1, бесконечно близкие к отрезку $(0, 2)$, дающие интегралу значение, большее 2.

В самом деле, рассмотрим ломаную линию, состоящую из трех отрезков, первый из которых соединяет начало с точкой $x=1+h$, $y=h$, второй — эту точку с точкой $x=1$, $y=0$ и, наконец, третий — есть отрезок $(1,2)$. Значение интеграла, взятое вдоль этой линии, равно $2+\frac{h}{2(1+2h+2h^2)}$ и, следовательно, больше 2, если $h>0$. Легко показать, как в § 630, что эту ломаную линию можно заменить такою бесконечно близкою кривою класса C^1, чтобы интеграл вдоль C^1 отличался от интеграла, взятого вдоль ломаной, как угодно мало. Это замечание вместе с замечаниями, приведенными в конце предыдущего параграфа, показывает, что новая задача экстремума и та, которая была изложена выше, — существенно различные задачи.

647. Общая форма уравнения Эйлера. Для того чтобы первая вариация интеграла (84) была равна нулю для всех возможных функций $\xi(x)$, $\eta(x)$, функции $x(t)$, $y(t)$ должны удовлетворять двум соотношениям (§ 623):

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \tag{86}$$

Эти два соотношения не независимы, ибо, принимая во внимание соотношения между производными функции F, можно представить левые части этих равенств в виде $x'T$, $y'T$. А так как x' и y' не обращаются одновременно в нуль, то два соотношения (86) могут быть заменены одним уравнением:

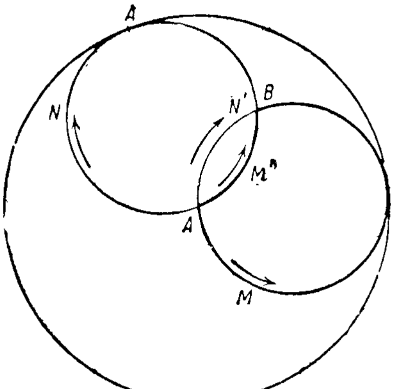
$$T=F_1(x'y''-y'x'')+F''_{xy'}-F''_{yx'}=0. \tag{87}$$

Мы получаем, таким образом, только одно уравнение для определения двух неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$; этого соотношения достаточно для определения самих экстремальных кривых, если не ставить вопроса о форме их параметрического изображения. В самом деле, это уравнение имеет вид: $x'y''-y'x''=x'^3\Phi$, где Φ — положительно однородная функция нулевого измерения относительно x', y'. Оно, следовательно, не меняет своего вида, как этого следовало бы ожидать, если заменить t произвольною функцией $\pi(\tau)$ другого переменного τ, производная которого положительна. Отсюда следует, что для того чтобы получить все решения уравнения (87), можно произвольно выбрать переменный параметр t, подчинив его единственному требованию — возрастать при передвижении точки (x, y) по кривой в положительном направлении. В частности, если предположить, что искомая кривая принадлежит классу I), и что $x_0 < x_1$, то можно взять $x = t$, и уравнение (87) перейдет в уравнение Эйлера, которое получается, если приравнять нулю первую вариацию интеграла

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y;\, 1,\, y'_x)\, dx.$$

Так что по существу уравнение (87) есть не что иное, как уравнение Эйлера, записанное в симметричной форме, в которой независимое переменное остается неопределённым. С точки зрения формального интегрирования обе задачи представляют одни и те же трудности, но уравнение (87) может допускать решения, образованные прямыми $x = c$, которые невозможны, если x есть независимое переменное. Так будет в случае, когда функция F имеет вид: $g(y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Уравнение (87) здесь удовлетворяется при $x' = 0$, и прямые, параллельные оси, являются экстремалями для обобщенной задачи.

Чтобы закончить определение экстремальной кривой, когда задана точка A и направление касательной в этой точке, необходимо ввести еще одно какое-нибудь соотношение между $x(t)$ и $y(t)$. Если в качестве переменного t взять дугу экстремали, отсчитываемую от точки A, то можно будет к уравнению (87) присоединить еще соотношение $x'x'' + y'y'' = 0$, а в качестве начальных значений взять $x = x_0$, $y = y_0$, $x' = \cos\theta_0$, $y' = \sin\theta_0$, где θ_0 — угол между положительным направлением касательной в точке A с осью Ox. Два уравнения: $T = 0$, $x'x'' + y'y'' = 0$ дают для x'', y'' непрерывные функции от x, y, x', y' в окрестности начальных значений, если только значение $F_1(x_0, y_0;\, \cos\theta_0,\, \sin\theta_0)$ отлично от нуля, а, следовательно, в этом случае существует единственная экстремаль, отвечающая этим начальным условиям. Если функция $F(x, y, \cos\theta, \sin\theta)$ не обращается в нуль ни при одном значении θ области $\mathfrak{R}$, то через каждую точку этой области в каждом направлении проходит одна и только одна экстремаль. Задача называется *правильной*.



Черт. 105.

Пример. Пусть $F = yx' + a\sqrt{x'^2 + y'^2}$ (ср. § 628). Система, которую надлежит интегрировать, имеет вид:

$$x'y'' = y'x'' = \frac{1}{a}\,(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}},\quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

Полагая $x' = \cos\theta$, $y' = \sin\theta$, мы получаем $\theta' = \dfrac{1}{a}$, и искомая экстремаль является дугой окружности радиуса a, представляемой двумя уравнениями:

$$x = x_0 + a\sin\left(\theta_0 + \frac{s}{a}\right) - a\sin\theta_0,\quad y = y_0 - a\cos\left(\theta_0 + \frac{s}{a}\right) + a\cos\theta_0.$$

Через две точки A и B, расстояние между которыми меньше $2a$, проходят две таких дуги окружности, изображенные на чертеже жирными линиями; для этих дуг θ возрастает вместе с s. Дуги, изображенные на чертеже тонкими линиями, для которых значения θ с возрастанием s убывают, представляют также экстремали для интеграла, полученного изменением знака радикала в выражении для F.

Примечание. Когда концы A и B сами переменные, общая формула (19), которая дает первую вариацию δI, упрощается и не содержит члена с δt в силу соотношения однородности. В нашем случае эта вариация равна:

$$\delta J = \left(F'_{x'}\delta x + F'_{y'}dy\right)_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta x \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta y \left[\frac{\partial F}{dy} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dt. \quad (83)$$

Этот результат можно было предвидеть, ибо всегда можно выбрать переменное t так, чтобы пределы интеграции были одинаковые для дуги AB и для бесконечно близкой дуги $A'B'$. Условие трансверсальности здесь принимает вид:

$$F'_{x'}(x, y, x', y')\,\delta x + F'_{y'}(x, y\; x', y')\,\delta y = 0, \quad (89)$$

где x', y' — направляющие параметры касательной к экстремали в точке (x, y), а $\delta x, \delta y$ — направляющие параметры касательной к кривой, которую эта экстремаль пересекает трансверсально.

648. Условия Лежандра и Якоби. Пусть будет $x(t)$, $y(t)$ система решений уравнения (87), непрерывных вместе со своими производными x', x'', y', y'' в интервале (t_0, t_1). В выражении для второй вариации $\delta^2 J$ интеграла (87) под знаком интеграла входит квадратичная форма относительно ξ, η, ξ', η':

$$G(\xi, \eta; \xi', \eta') = F''_{x'^2}\xi'^2 + 2F''_{x'y'}\xi'\eta' + F''_{y'^2}\eta'^2 + 2F''_{xx'}\xi\xi' + 2F''_{xy'}\xi\eta' +$$
$$+ 2F''_{yx'}\eta\xi' + 2F''_{yy'}\eta\eta' + F''_{x^2}\xi^2 + 2F''_{xy}\xi\eta + F''_{y^2}\eta^2, \quad (90)$$

которую Вейерштрасс преобразует следующим образом. Коэфициенты при ξ'^2, $\xi'\eta'$, η'^2 суть соответственно $y'^2 F_1$, $-x'y' F_1$, $x'^2 F_1$. Коэфициенты при $\xi\eta'$ и $\eta\xi'$ связаны соотношением (87). Если для большей симметрии ввести три вспомогательные функции L, M, N, определенные равенствами:

$$L = F''_{xx'} - y'y''F_1,\quad M = F''_{xy'} + x'y''F_1 = F''_{yx} + y'x''F_1,\quad N = F''_{yy'} - x'x''F_1, \quad (91)$$

то можно написать:

$$G(\xi, \eta; \xi', \eta') = F_1(\xi'y' - \eta'x' + \xi y'' - \eta x'')^2 - F_1(\xi y'' - \eta x'')^2 + 2L\xi\xi' +$$
$$+ 2M(\xi\eta' + \xi'\eta) + 2N\eta\eta' + F''_{x^2}\xi^2 + 2F''_{xy}\xi\eta + F''_{y^2}\eta^2;$$

следовательно, с помощью очевидного интегрирования по частям получаем:

$$\delta^2 J = a^2 \int_{t_0}^{t_1} \left\{F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + L_1\xi^2 + 2M_1\xi\eta + N_1\eta^2\right\} dt,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &w = \xi y' - \eta x', && L_1 = F''_{x^2} - F_1 y''^2 - \frac{dL}{dt}, \\ &M_1 = F''_{xy} + F_1 x''y'' - \frac{dM}{dt}, && N_1 = F''_{y^2} - F_1 x''^2 - \frac{dN}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Форма $L_1\xi^2 + 2M_1\xi\eta + N_1\eta^2$ сама представляет точный квадрат. Действительно, легко, например, проверить, что

$$L_1 x' + M_1 y' = 0,$$

стоит только принять во внимание тождество

$$Lx' + My' = F'_x$$

и то, которое получается из него диференцированием по t, а также само уравнение (87). Точно так же можно было бы показать, что и $M_1 x' + N_1 y' = 0$. Функции L_1, M_1, N_1, следовательно, пропорциональны y'', $-x'y'$, x'', и мы получаем:

$$L_1 = y''F_2, \quad M_1 = -x'y'F_2, \quad N_1 = x''F_2;$$

функция F_2 есть непрерывная функция от t, так как x' и y' не могут одновременно обратиться в нуль при изменении t от t_0 до t_1. Итак, вторая вариация $\delta^2 J$ принимает очень простой вид:

$$\delta^2 J = a^2 \int_{t_0}^{t_1} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 \right] dt \tag{93}$$

и зависит только от одной линейной функции $w = \xi y' - \eta x'$, которая принадлежит к классу (I) в интервале (t_0, t_1) и на концах обращается в нуль. Мы можем к этому интегралу применить результаты, полученные в § 631 – 632. Для того чтобы вариация $\delta^2 J$ имела постоянный знак, например была положительна, необходимо и достаточно: 1) чтобы функция $F_1[x(t), y(t); x'(t), y'(t)]$ была положительна в интервале (t_0, t_1) (*условие Лежандра*); 2) чтобы линейное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2 u = 0 \tag{94}$$

допускало интеграл, который в этом интервале не обращается в нуль (*условие Якоби*).

Это последнее условие может быть выражено иначе (§ 632). Пусть $u_1(t)$ — интеграл уравнения (94), который обращается в нуль при $t = t_0$, а t'_0 — ближайший корень этой функции, больший t_0. Тогда *необходимо должно быть* $t_1 < t'_0$.

Кнезер показал, что условие Якоби может быть интерпретировано геометрически, подобно тому, как это сделано в § 633. Пусть

$$x = \varphi(t, \lambda), \quad y = \psi(t, \lambda)$$

будут уравнения пучка экстремалей, близких к рассматриваемой экстремали. Функции φ и ψ при $\lambda = 0$ обращаются соответственно в $x(t)$, $y(t)$. Их производные

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}, \quad \psi_1(t) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}$$

удовлетворяют диференциальному уравнению, которое получается, если продиференцировать уравнение Эйлера по параметру λ и затем положить в результате $\lambda = 0$. Если уравнение взять в форме

$$F'_x - \frac{d}{dt}(F'_{x'}) = 0,$$

то после диференцирования получится линейное уравнение:

$$F''_{xx}\varphi_1 + F''_{xy}\psi_1 + F''_{xx'}\frac{d\varphi_1}{dt} + F''_{xy'}\frac{d\psi_1}{dt} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(F''_{xx'}\varphi_1 + F''_{yx'}\psi_1 + F''_{x'^2}\frac{d\varphi_1}{dt} + F''_{x'y'}\frac{d\psi_1}{dt}\right),$$

где во вторых производных положено $\lambda = 0$. Выражая все вторые производные от F через F_1, F_2, L, M, N, можно после некоторых преобразований записать результат в виде:

$$y'\left[F_2\omega - \frac{d}{dt}\left(F_1\frac{d\omega}{dt}\right)\right] = 0, \tag{95}$$

где

$$\omega = y'\varphi_1(t) - x'\psi_1(t).$$

Написав уравнение Эйлера в виде:

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0,$$

мы получим то же уравнение (95), в котором только y' будет заменено через x'. Таким образом функция $y'\varphi_1(t) - x'\psi_1(t)$ представляет интеграл уравнения Якоби (91), который связан таким образом с изучением экстремалей, бесконечно близких к экстремали, представленной уравнениями $x = x(t)$, $y = \ (t)$.

Рассмотрим в частности пучок экстремалей, выходящих из точки A и бесконечно близких к первой. Ясно, что функции $\varphi_1(\ )$ и $\psi_1(t)$ при $t = t_0$ обращаются в нуль, ибо $\varphi(t_0, \lambda)$ и $\psi(t_0, \lambda)$ не зависят от λ. Следовательно, детерминант $y'\varphi_1 - x'\psi_1$ представляет интеграл уравнения Якоби, обращающийся в нуль при $t = t_0$. Другие корни этого якобиана соответствуют точкам пересечения экстремали с бесконечно близкой экстремалью того же пучка *. Поэтому, если назвать *сопряженными фокусами* точки A все другие точки, в которых эта экстремаль касается огибающей экстремалей, выходящих из точки A, то условие Якоби выражает, что *все сопряженные фокусы точки A расположены вне дуги AB*.

---

* Если вообще семейство плоских кривых, зависящее от постоянного λ, задается параметрически уравнениями $x = \varphi(t, \lambda)$, $y = \psi(t, \lambda)$, то огибающая этого семейства кривых получится, если к предыдущим уравнениям присоединить соотношение $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \lambda)} = 0$, корни которого для каждого данного значения λ дают точки касания кривой семейства, соответствующей этому значению λ, с огибающею этого семейства.

Когда условие Якоби выполнено, то можно показать, как в § 638, что дуга экстремали AB может быть окружена полем. Чтобы образовать такое поле, можно, например, взять пучок экстремалей, близких к первой, выходящих из точки $\mathfrak{A}$, взятой на продолжении AB по другую сторону от точки A и настолько близкой к $\mathfrak{A}$, что все сопряженные фокусы находятся вне дуги AB.

В примере, приведенном выше (§ 647), огибающая экстремалей, выходящих из точки A, представляет окружность с центром в точке A радиуса $2a$. Условие Якоби выполняется только для меньшей из дуг экстремалей $AM'B$; напротив, дуга AMB содержит фокус A', сопряженный с A.

649. Условие Вейерштрасса. Соображения, которые приводят к условию Вейерштрасса (§ 636), распространяются без существенных изменений на новую задачу. Пусть AB будет дуга экстремали, P — точка на этой дуге и Γ — кривая класса C^1, проходящая через эту точку. Можно, как и выше, представить себе пучок кривых класса C^1, соединяющих точку A с точкою Q, соседнею с P на кривой Γ, и обращающихся в дугу экстремали AP, когда точка Q переходит в P (черт. 103). Если $x(t)$, $y(t)$ — координаты какой-нибудь точки дуги AP, (x_2, y_2) — координаты точки Q, то можно, например, взять дугу AQ, определенную формулами:

$$x = x(t) + (t - t_0)\frac{x_2 - x(\tau)}{\tau - t_0}, \quad y = y(t) + (t - t_0)\frac{y_1 - y(\tau)}{\tau - t_0},$$

где τ есть значение параметра t, соответствующее точке P.

Интеграл

$$J_1 = \int\limits_{AQ} F(x, y, x', y')\, dt$$

представляет собою функцию от дуги $PQ = s$, производная которой при $s = 0$, согласно общей формуле (19), дающей значение первой вариации, имеет выражение:

$$\left(\frac{dJ_1}{ds}\right)_0 = \cos\theta_1 F'_{x'}(x, y;\ \cos\theta,\ \sin\theta) + \sin\theta_1 F'_{y'}(x, y;\ \cos\theta,\ \sin\theta),$$

где $\cos\theta$ и $\sin\theta$ суть направляющие косинусы положительного направления касательной к экстремали в точке P, а $\cos\theta_1$, $\sin\theta_1$ — направляющие косинусы касательной в точке P к кривой Γ, взятой в направлении PQ. Точно так же интеграл J_2, взятый вдоль QP, есть функция от s, производная которой при $s = 0$ равна $F(x, y;\ -\cos\theta_1,\ -\sin\theta_1)$, как в этом можно убедиться, заменяя интеграл его первым элементом. Поэтому производная суммы $J_1 + J_2$, представляющей интеграл

$$\int F(x, y;\ x', y')\, dx,$$

взятый вдоль пути AQP, при $s = 0$ равна выражению:

$$F(x, y;\ -\cos\theta_1, -\sin\theta_1) + \cos\theta_1 F'_{x'}(x, y;\ \cos\theta,\ \sin\theta) + \\ + \sin\theta_1 F'_{y'}(x, y;\ \cos\theta,\ \sin\theta).$$

Это выражение можно представить в более коротком обозначении, если положить

$$E(x,\ y;\ p,\ q;\ p',\ q')=$$
$$=F(x,\ y;\ p',\ q')-p'F'_{x'}(x,\ y;\ p,\ q)-q'F_{y'}(x,\ y;\ p,\ q), \tag{96}$$

что в силу однородности F можно еще записать в одном из двух видов (ср. § 646):

$$F(x,\ y;\ p',\ q')-F(x,\ y,\ p,\ q)-(p'-p)\,F'_{x'}(x,\ y;\ p,\ q)-$$
$$-(q'-q)\,F'_{y'}(x,\ y;\ p,\ q), \tag{96'}$$

$$p'\,\{F'_{x'}(x,\ y;\ p',\ q')-F'_{x'}(x,\ y;\ p,\ q\}+$$
$$+q'\,\{F'_{y'}(x,\ y;\ p',\ q')-F'_{y'}(x,\ y;\ p,\ q)\}. \tag{96''}$$

Рассуждение заканчивается так же, как и в § 636. Заменяя θ_1 на $\pi-\theta'$, мы приходим к новому необходимому условию: *для того чтобы дуга экстремали AB давала интегралу минимум, необходимо, чтобы функция*

$$E(x,\ y;\ \cos\theta,\ \sin\theta;\ \cos\theta',\ \sin\theta')$$

никогда не принимала отрицательных значений вдоль дуги AB, каков бы ни был угол θ'.

Можно также формулировать это условие следующим образом: если x, y — координаты любой точки экстремали, x', y' — система направляющих параметров для положительного направления касательной в этой точке, то *в каждой точке дуги экстремали должно выполняться неравенство*:

$$E(x,\ y;\ x',\ y';\ x_1',\ y_1')\geqslant 0 \tag{97}$$

для всякой системы значений x_1', y_1'. Вейерштрасс показал также, что функция E выражается очень просто с помощью функции F_1. Взяв для E выражение (96'), получим:

$$E(x,\ y;\ \cos\theta,\ \sin\theta;\ \cos\theta',\ \sin\theta')=$$
$$=\cos\theta'\,[F'_{x'}(x,\ y;\ \cos\theta',\ \sin\theta')-F'_{x'}(x,\ y;\ \cos\theta,\ \sin\theta)]+$$
$$+\sin\theta'\,[F'_{y'}(x,\ y;\ \cos\theta',\ \sin\theta')-F'_{y'}(x,\ y;\ \cos\theta,\ \sin\theta)],$$

что можно также написать в виде:

$$\int_{\theta}^{\theta'}\left\{\cos\theta'\,\frac{d}{dt}\,[F'_{x'}(x,\ y;\ \cos t,\ \sin t)]+\sin\theta'\,\frac{d}{dt}[F'_{y'}(x,y;\ \cos t,\ \sin t)]\right\}dt.$$

Заменяя вторые производные $F''_{x'^2}$, $F''_{x'y'}$, $F''_{y'^2}$ их выражениями через F_1, мы получим далее:

$$E=\int_{\theta}^{\theta'}\sin(\theta'-t)\,F_1(x,\ y;\ \cos t,\ \sin t)\,dt=$$
$$=\int_{0}^{\theta'-\theta}\sin(\theta'-\theta-\tau)\,F_1(x,\ y;\ \cos(\theta-\tau),\ \sin(\theta+\tau)]\,d\tau.$$

Так как углы θ и θ' определены только с точностью до кратного 2π, то можно предположить, что разность $\theta'-\theta$ заключается между $-\pi$ и $+\pi$, так что $\sin(\theta'-\theta-\tau)$ не меняет знака в интервале $(0, \theta'-\theta)$. Поэтому можно к последнему интегралу применить первую формулу о среднем значении (т. I, § 76), что дает:

$$E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta') = \\ = [1-\cos(\theta'-\theta)]\, F_1(x, y; \cos\theta_1, \sin\theta_1), \qquad (98)$$

где θ_1 содержится между θ и θ'.

Отсюда следует, что *условие Вейерштрасса необходимо будет выполнено, если функция* $F_1(x, y; \cos\theta_1, \sin\theta_1)$ *не принимает отрицательных значений вдоль всей дуги экстремали* AB, *каков бы ни был угол* θ_1.

С другой стороны, отношение

$$\frac{E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')}{1-\cos(\theta'-\theta)}$$

при приближении θ' к θ стремится к значению $F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$, и, следовательно, условие Лежандра вытекает также из условия Вейерштрасса в первой форме.

Примечание. Если функция $F(x, y; x', y')$ однородна в абсолютном смысле слова, функция $E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')$ меняет знак при замене θ на $\pi+\theta'$, и так как условие (97) должно выполняться для любого угла θ', то функция $E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')$ должна быть равна нулю вдоль всей дуги экстремали AB, каков бы ни был угол θ'. В частности, отсюда вытекает в силу соотношения (98), что функция $F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$ равна нулю вдоль всей дуги AB.

Следовательно, дуга экстремали может давать экстремум только в том исключительном случае, когда функция F имеет этот вид. Это, например, имеет место, когда F есть рациональная функция от x', y' (ср. § 645).

650. Система достаточных условий. Обратно, предыдущие условия являются достаточными для минимума, по крайней мере, если эти условия взять *в узком смысле*, исключая знаки равенства. Более точно можно сказать, что дуга экстремали $\mathfrak{G}_0$, соединяющая две точки A и B области $\mathfrak{R}$, дает интегралу минимум, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. *Вдоль всей дуги* $\mathfrak{G}_0$ *выполняется неравенство*

$$F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta) > 0,$$

где θ *имеет то же значение, что и выше.*

2. *Условие Якоби выполняется, и, следовательно, можно окружить* $\mathfrak{G}_0$ *полем экстремалей, через каждую точку которого проходит экстремаль некоторого пучка, к которому принадлежит* $\mathfrak{G}_0$.

3. *Вдоль всей дуги* $\mathfrak{G}_0$ *для всякого значения* $\theta' \neq \theta + 2k\pi$ *имеет место неравенство*

$$E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta') > 0.$$

В этих условиях * мы установим, что можно указать такое достаточно малое положительное число ρ, что всякая кривая класса C^1, находящаяся в области $\mathfrak{D}_\rho$ и соединяющая две точки A и B, дает интегралу J значение большее, чем дуга экстремали $\mathfrak{G}_0$. Рассмотрим для этого какой-нибудь пучок экстремалей, в который входит $\mathfrak{G}_0$, и пусть $\mathfrak{D}$ — соответствующее поле. Через каждую точку (x, y) этого поля проходит экстремаль этого пучка, и направляющие косинусы положительного направления касательной в этой точке $(\cos u, \sin u)$ суть непрерывные функции переменных (x, y), которые переходят в $\cos\theta$ и $\sin\theta$, когда точка (x, y) приходит на дугу $\mathfrak{G}_0$. Мы сперва покажем, *что можно взять число ρ настолько малым, чтобы в поле $\mathfrak{D}_\rho$ функция $E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta)$ была положительна для всех значений θ', не имеющих формы $u + 2k\pi$.* Рассмотрим для этого вспомогательную функцию E_1, определенную следующим образом:

$$E_1(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta') = \frac{E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta')}{1-\cos(u-\theta')},$$
$$(\theta' - u \neq 2k\pi);$$

$$E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta') = F_1(x, y; \cos u, \sin u),$$
$$\theta' - u = 2k\pi.$$

В силу соотношения (98) эта функция непрерывна также при $\theta' = u$, и согласно предположениям она положительна в каждой точке дуги AB для каждого значения θ'. Так как она непрерывна в окрестности дуги AB и имеет относительно θ' период 2π, то из свойств непрерывных функций вытекает, что можно поместить $\mathfrak{G}_0$ в область $\mathfrak{D}_\rho$ достаточно узкую, так что функция E будет оставаться положительной, когда точка (x, y) описывает область $\mathfrak{D}_\rho$, каков бы ни был угол θ'. Следовательно, мы имеем также:

$$E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta') > 0$$

в этой области $\mathfrak{D}_\rho$, кроме случая, когда $\cos(\theta' - u) = 1$, т. е. $\theta' = u + 2k\pi$.

Приняв это во внимание, положим, что

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = q(x, y)$$

суть два диференциальных уравнения, определяющих специальный пучок экстремалей, который составляет рассматриваемое поле. Можно, например, взять $p = \cos u$, $q = \sin u$, и переменное t тогда представляет дугу экстремали, отсчитываемую в положительном направлении. Для того чтобы

* Условия (1) и (3) заведомо выполняются, если функция

$$F_1(x, y; x' y')$$

положительна в области $\mathfrak{R}_x$ при любых значениях x', y', т. е. если задача правильная (§ 647). В этом случае для того чтобы экстремаль давала минимум, достаточно, таким образом, чтобы она удовлетворяла условиям Якоби.

эта система диференциальных уравнений определяла пучок экстремалей, необходимо, чтобы значения x', y', x'', y'', которые из них получаются, удовлетворяли уравнению (87). Отсюда имеем условие:

$$F_1(x, y;\ p, q)\left[p^2\frac{\partial p}{\partial x}+pq\left(\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial x}\right)-q^2\frac{\partial p}{\partial y}\right]+$$
$$+F''_{xq}(x, y;\ p, q)-F''_{yp}(x, y;\ p, q)=0.$$

Можно получить то же соотношение, если записать, что выражение

$$F'_p(x, y;\ p, q)\,dx+F_q(x, y;\ p, q)\,dy \tag{99}$$

представляет полный диференциал $d\Phi$, так что рассматриваемому пучку экстремалей можно поставить в соответствие функцию $\Phi(x, y)$, непрерывную в поле и такую, что ее полный диференциал равен предыдущему выражению.

Теперь легко распространить конец рассуждения § 639. В самом деле, имеем:

$$F(x, y;\ x', y')=F(x, y;\ p, q;\ x', y')+F'_p(x, y;\ p, q)\,x'+F'_q(x, y;\ p, q)\,y',$$

откуда мы получаем, при прежних значениях p и q:

$$\int_\Gamma F(x, y;\ x'y')\,dt=\int_\Gamma E(x, y;\ p, q;\ x', y')\,dt+\int_\Gamma d\Phi.$$

Если кривая Γ есть кривая класса C^1 поля $\mathfrak{D}_\rho$, соединяющая две точки A и B, то имеем также:

$$I_\Gamma-I_{\mathfrak{G}_0}=\int_\Gamma E(x, y;\ p, q;\ x', y')\,dt, \tag{100}$$

ибо вдоль дуги $\mathfrak{G}_0$ интеграл $\int_{\mathfrak{G}_0} d\Phi$ равен интегралу $\int_{\mathfrak{G}_0} F(x, y;\ x', y')\,dt$.

Поэтому, какова бы ни была кривая Γ, разность $I_\Gamma-I_{\mathfrak{G}_0}$ положительна, ибо все ее элементы положительны или равны нулю. Для того чтобы разность была равна нулю, необходимо, чтобы функция $E(x, y;\ p, q;\ x', y')$ или

$$E(x, y;\ \cos u,\ \sin u;\ \cos\theta', \sin\theta')$$

была равна нулю в каждой точке кривой Γ, что может иметь место только, если $\theta'=u+2k\pi$. Поэтому было бы необходимо, чтобы касательная в каждой точке кривой Γ совпадала с касательною к экстремали пучка, проходящей через эту точку, т. е. эта кривая Γ сама должна быть экстремалью пучка, и так как она проходит через точки A и B, то она должна совпадать с $\mathfrak{G}_0$.

В противоположность тому, что мы имеем для интеграла, взятого в форме $\int F(x, y, y')\,dx$, мы видим, что *необходимое* условие Вейерштрасса, присоединенное к условиям Лежандра и Якоби, является в то -

же время и *достаточным* для минимума. Это объясняется тем, что в первом случае мы предполагали, что y' имеет *конечное* значение, так что мы рассматриваем только такие кривые, касательные к которым не параллельны оси Oy. Если же интеграл взят в параметрической форме, то угол θ' может принимать всевозможные значения, и касательные ко второй кривой могут иметь любые направления.

Заметим, что условие Якоби участвует только в самом выводе, но чтобы знать, выполнены ли другие условия, нет необходимости знать угол u, т. е. направление касательной к экстремали пучка, проходящей через данную точку поля.

Изложенные условия являются достаточными для *сильного минимума*. Как и в § 641, можно показать, что условия Лежандра и Якоби являются достаточными для *слабого минимума*. О дуге экстремали $\mathfrak{G}_0$, заданной уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

говорят, что она доставляет слабый минимум интегралу, если можно указать такое положительное число ε, что всякая кривая Γ, изображенная уравнениями:

$$x = x(t) + \xi(t), \quad y = y(t) + \eta(t),$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — функции класса (I) в интервале (t_0, t_1), обращающиеся на концах этого интервала в нуль и для которых $\xi'^2 + \eta'^2$ внутри интервала в нуль не обращается, дает этому интегралу значение большее, чем $\mathfrak{G}_0$, если только $|\xi(t)|$, $|\eta(t)|$, $|\xi'(t)|$, $|\eta'(t)|$ в этом интервале меньше ε. Не только сама кривая Γ весьма близка к кривой $\mathfrak{G}_0$, но и касательные в тех точках этих двух кривых, которые соответствуют одним и тем же значениям t, образуют друг с другом весьма малый угол.

Интерпретация этого метода вполне аналогична той, которая была дана для интегралов вида $\int F(x, y, y')\,dx$ в § 642. Пусть γ — дуга кривой, которая пересекает трансверсально в некоторой точке каждую экстремаль пучка. Функция $\Phi(x, y)$ с точностью до постоянного представляет значение интеграла

$$\int F(x, y, x', y')\,dt,$$

взятого вдоль дуги mM экстремали $\mathfrak{G}$ пучка, которая проходит через точку $M(x, y)$, и которая пересекает дугу γ трансверсально в точке m *.

---

* Однако, необходимо ввести условие о знаке для этого интеграла Будем на каждой экстремали пучка считать *положительным* то направление. для которого направляющими параметрами являются p и q. Тогда функция $\Phi(x, y)$ равна интегралу

$$\int F(x, y, x', y')\,dt,$$

взятому в положительном направлении вдоль дуги экстремали, заключенной между точками M и m и умноженному на $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли направление от точки m к точке M положительным или противоположным. Благодаря этому условию, полный диференциал $d\Phi$ всегда равен

$$F'_p(x, y; p, q)\,dx + F'_q(x, y; p, q)\,dy$$

в силу общей формулы (88), которая дает первую вариацию (§ 647).

Следовательно, кривые $\Phi(x, y) = C$ представляют трансверсальные кривые пучка. Можно опять получить уравнение в частных производных семейства трансверсальных кривых, исключая отношение $\frac{p}{q}$ из двух уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F'_p(x, y;\ p, q), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F'_q(x, y;\ p, q) \tag{101}$$

и можно убедиться, что экстремали служат проекциями на плоскость xy характеристик полученного таким образом уравнения в частных производных.

Положим, что функция F представлена в форме:

$$F = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + G(x, y;\ x'y'), \tag{102}$$

где Φ зависит только от переменных x и y, а G — положительно однородная функция относительно x' и y' первой степени, для которой частные производные $\frac{\partial G}{\partial x'}$, $\frac{\partial G}{\partial y'}$ равны нулю при $x' = p(x, y)$, $y' = q(x, y)$. Мы обозначаем через p и q непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные в некоторой области $\mathfrak{D}$. Интегральные кривые системы $\frac{dx}{dt} = p(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = q(x, y)$ образуют пучок экстремалей, для которого кривые

$$\Phi(x, y) = \text{const}$$

представляют трансверсали, ибо соотношения (101) можно получить, диференцируя уравнение (102) по x' и y' и заменяя затем x' на $p(x, y)$ и y' на $q(x, y)$. Функция $E(x, y;\ p, q;\ x', y')$, соответствующая этому полю экстремалей, есть как раз $G(x, y;\ x', y')$.

651. Примеры. Геодезические линии. 1. Рассмотрим снова случай, когда

$$F = yx' + \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Имеем для функции Вейерштрасса выражение:

$$E(x, y;\ p, q;\ x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{px' + qy'}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

которое в силу тождества

$$(p^2 + q^2)(x'^2 + y'^2) = (px' + qy')^2 + (py' - qx')^2$$

всегда положительно. Дуга AMB, которая удовлетворяет условиям Лежандра и Якоби (черт 105, дает, следовательно, интегралу минимум

2. Пусть требуется найти кратчайший путь между двумя точками на поверхности Σ. Положим, что координаты точек поверхности выражены функциями двух параметров u и v, так что каждой точке области $\mathfrak{R}$, рассматриваемой на этой поверхности, соответствует точка некоторой области R плоскости (u, v). Тогда для квадрата линейного элемента получаем:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \tag{103}$$

где e, f, g — непрерывные функции, допускающие непрерывные производные в R, если рассматриваемая часть поверхности не содержит особых точек. Кроме того, функции e, g, $eg - f^2$ существенно положительны. Задача сводится к тому, чтобы найти кривые, соединяющие две точки (u_0, v_0), (u, v) области R, для которых интеграл

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{eu'^2 + 2fu'v' + gu'^2}\, d \tag{104}$$

достигает минимума. Эти кривые должны прежде всего удовлетворять уравнению (87), которое выражает, что первая вариация равна нулю. В этом случае, производя вычисления, получим:

$$(eg-f^2)(u'v''-u''v')+(eu'+fv')\left[\left(f'_u-\frac{1}{2}e'_v\right)u'^2+g'_uu'v'+\frac{1}{2}g'_vv'^2\right]-$$
$$-(fu'+gv')\left[\frac{1}{2}e'_uu'^2+e'_vu'v'+\left(f'_v-\frac{1}{2}g'_u\right)v'^2\right]=0. \qquad (105)$$

Кривые, расположенные на поверхности Σ и соответствующие кривым плоскости (u, v), удовлетворяющим этому уравнению, называются *геодезическими линиями*. В силу самого способа их определения первая вариация интеграла $\int ds$ равна нулю при замене дуги геодезической бесконечно близкою кривою на поверхности, имеющею те же концы. Отсюда следует, что соприкасающаяся плоскость должна проходить через нормаль к поверхности Σ — свойство, которое может быть обнаружено непосредственно с помощью уравнения (105) (см. упражнение 10).

Пусть AB — дуга геодезической, расположенная в области $\mathfrak{R}$; условия Лежандра и Вейерштрасса выполняются, ибо функция F_1, которая имеет вид:

$$F_1=(eg-f^2)(eu'^2+2fu'v'+gv'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

всегда положительна. Поэтому для того чтобы дуга AB геодезической давала минимум, достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям Якоби, т. е. чтобы на этой геодезической фокусы, сопряженные с A, лежали вне дуги AB.

Заметим, что условие трансверсальности здесь принимает вид:

$$(eu'+fv')\,\delta u+(fu'+gv')\,\delta v=0.$$

Оно выражает (т. I, § 278), что геодезическая и вторая кривая на Σ *ортогональны*. Следовательно, уравнение в частных производных семейств параллельных кривых получится, если исключить p и q из двух соотношений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{ep+fq}{\sqrt{ep^2+2fpq+gq^2}};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{fp+gq}{\sqrt{ep^2+2fpq+gq^2}}.$$

Таким образом получается хорошо известное уравнение:

$$g\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2-2f\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+e\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2=eg-f^2. \qquad (106)$$

652. Метод Дарбу-Кнезера. В частном случае геодезических линий свойство минимума очевидно благодаря форме, которую принимает квадрат линейного элемента, если отнести поверхность к криволинейной системе координат, образованной семейством геодезических линий и их ортогональными траекториями. Для изучения свойств геодезических, основанных на этой приведенной форме линейного элемента, и для распространения этой теории на любой случай применения принципа наименьшего действия Мопертюи (Maupertuis), мы снова отсылаем читателя к книге Дарбу „Théorie des surfaces". Кнезер распространил этот метод также на случай интеграла в параметрической форме. Это обобщение, основную идею которого мы вкратце изложим, основано на свойствах инвариантности дифференциальных уравнений вариационного исчисления по отношению к замене переменных. Пусть $x=\varphi(u, v)$, $y=\chi(u, v)$ будут формулы преобразования, которые ставят каждой точке области R на плоскости (u, v) во взаимно однозначное соответствие точку области $\mathfrak{R}$ плоскости (x, y). Всякий интеграл вида

$$J=\int F(x, y, x', y')\,dt,$$

взятый вдоль кривой Г области $\mathfrak{R}$, где F — положительно однородная функция от x', y', переходит в интеграл того же вида

$$J' = \int G(u, v; u', v')\,dt,$$

взятый вдоль соответствующей кривой Г' плоскости (u, v). Легко показать, что диференциальному уравнению (87) соответствует преобразованное диференциальное уравнение, которое получается таким же образом из функции $G(u, v; u', v')$. Это легко объясняется тем, что если первая вариация интеграла J равна нулю при замене кривой Г бесконечно близкою кривою, то то же справедливо для первой вариации интеграла J' при замене кривой Г' бесконечно близкою кривою, и наоборот. Точно так же можно показать, что условие трансверсальности $F'_{x'}\,\delta x + F'_{y'}\,\delta y = 0$ после преобразования переходит в $G'_{u'}\delta u + G'_{v'}\delta v = 0$.

Приняв это во внимание, рассмотрим поле $\mathfrak{D}$, через каждую точку которого проходит экстремаль $\mathfrak{G}$ специального пучка, образованного из экстремалей, которые пересекают трансверсально дугу DF кривой γ, и, кроме того, положим, что функция $F(x, y; p, q)$ в этом поле не меняет знака, например $F(x, y; p, q) > 0$ *, p и q при этом имеют то же значение, что и в предыдущих параграфах, и экстремали специального пучка удовлетворяют двум диференциальным уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = q(x, y).$$

Тогда можно определить положение точки M на экстремали $\mathfrak{G}$, пересекающей трансверсально γ в точке m, значением криволинейного интеграла:

$$u = \int\limits_{mM} F'_p(x, y; p, q)\,dx + F'_q(x, y; p, q)\,dy,$$

взятого вдоль дуги экстремали mM. В самом деле, если направление от точки m к точке M на этой дуге есть положительное направление (определенное направляющими параметрами p и q), то этот интеграл тождествен с интегралом

$$J' = \int\limits_{mM} F(x, y; x'\, y')\,dt,$$

ибо dx можно заменить на $p\,dt$ и dy на $q\,dt$, и этот интеграл возрастает при увеличении длины дуги mM. Если же направление от m к M противоположно положительному, то (см. сноску на стр. 282)

$$u = -\int\limits_{Mm} F'_p\,dx + F'_q\,dy = -\int\limits_{Mm} F(x, y; p, q)\,dt;$$

---

* Всегда можно предположить, что это условие выполнено, если к функции $F(x, y; x', y')$ прибавить выражение вида $\frac{\partial U}{\partial x}x' + \frac{\partial U}{\partial y}y'$; это слагаемое, не изменяя экстремалей, увеличивает значение интеграла J, взятого в постоянных пределах, на некоторую постоянную величину, каков бы ни был путь интегрирования (ср. § 621, примечание). Если в качестве функции $U(x, y)$ выбрать такую, которая возрастает при перемещении вдоль экстремали пучка в положительном направлении, то выражение $\frac{\partial U}{\partial x}p + \frac{\partial U}{\partial y}q$ положительно, и достаточно его умножить на подходяще выбранный множитель, чтобы сумма

$$F(x, y; p, q) + \frac{\partial U}{\partial x}p + \frac{\partial U}{\partial y}q$$

была положительна.

этот интеграл отрицателен, и его абсолютная величина уменьшается с уменьшением длины дуги Mm. Во всяком случае u постоянно растет при перемещении точки M по кривой G в положительном направлении. Пусть, с другой стороны, v есть параметр, значение которого определяет положение точки m на кривой γ. Значения u и v можно рассматривать как координаты точки M поля *. Кривые $v = \text{const}$ суть экстремали пучка, а кривые $u = \text{const}$ — трансверсальные кривые. Мы предположим, что поле ограничено экстремалями $v = v_0$, $v = v_1$ и трансверсалями $u = u_0$, $u = u_1$. Если каждой точке M поля поставить в соответствие точку M' с координатами (u, v), то мы получим однозначное отображение этого поля на прямоугольник, ограниченный прямыми $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$, $v = v_1$.

С другой стороны, известно, что функция $F(x, y; x', y')$ имеет вид (§ 650):

$$F = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + F_1(x, y; x', y'), \tag{107}$$

причем частные производные $\frac{\partial F_1}{\partial x'}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y'}$ обращаются в нуль при $x' = p$, $y' = q$.

Если принять u и v за новые переменные, то предыдущее тождество принимает вид:

$$G(u, v; u', v') = u' + G_1(u, v; u', v'), \tag{108}$$

где $G_1(u, v; u', v')$ — функция положительно однородная первой степени относительно u' и v', частные производные которой $\frac{\partial G_1}{\partial u'}$, $\frac{\partial G_1}{\partial v'}$ обращаются в нуль при $u = 1$, $v = 0$, ибо прямые, параллельные оси u, суть экстремали преобразованного пучка, причем положительным направлением является направление возрастания u. Функция G уже представлена в виде (102), притом с особенно простыми выражениями для Φ, p и q. Если, например,

$$G = \sqrt{u'^2 + g(u, v)\, v'^2},$$

то

$$G_1 = \sqrt{u'^2 + gv'^2} - u' = \frac{gv'^2}{\sqrt{u'^2 + gv'^2} + u'};$$

производные $\frac{\partial G_1}{\partial u'}$, $\frac{\partial G_1}{\partial v'}$ обращаются в нуль при $u' = 1$, $v' = 0$, и функция G_1 положительна, если $g(u, v)$ положительна.

Для дальнейших исследований, а также для распространения свойств геодезических линий на экстремали, отсылаем читателя к названным выше трудам.

653. Разрывные (угловые) решения. Если не существует экстремалей, соединяющих две точки A и B, или если среди этих экстремалей нет ни одной, удовлетворяющей условиям экстремума, то поставленная задача не имеет решения. Но иногда достаточно несколько расширить условия задачи, и решения будут существовать. Положим, например, $F = y^2 (y' - 1)^2$; диференциальное уравнение экстремалей $y(yy'' + y'^2 - 1) = 0$ распадается на два множителя. Общий интеграл представляет семейство равносторонних гипербол

$$y^2 = x^2 + 2Cx + C',$$

которые имеют ось Ox осью симметрии, и кроме того, имеется еще особая экстремаль $y = 0$. Примем за точку A начало ($x_0 = y_0 = 0$), и пусть $x_1 = 2$,

---

* Это не будет иметь места, если F меняет знак в поле. Положим, например, $F = xx' + yy' + y'^2 (x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$; прямые $y = C$ образуют пучок экстремалей, для которых трансверсалями служат круги $x^2 + y^2 = C'$. В прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, положение точки M не определится, если будут известны y и $x^2 + y^2$.

$y_1=1$ будут координаты точки B. Эти две точки не расположены на одной ветви экстремали, и, следовательно, не существует кривой класса (I), соединяющей эти две точки и дающей минимум интегралу $J=\int\limits_0^2 y^2(y'-1)^2\,dx$. Этот результат легко объяснить, если заметить, что интеграл, взятый вдоль ломаной AEB, составленной из отрезка (0,1) оси Ox и отрезка EB, соединяющего точку $E(x=1\ y=0)$ с точкою B, равен нулю, и следовательно, всегда можно найти кривую класса (I), соединяющую точки A и B, для который интеграл J будет иметь значение, как угодно близкое к нулю (§ 630) Таким образом нижняя граница этого интеграла равна нулю, и ясно, что интеграл J не может достигнуть этой нижней границы на кривой класса (I). Но если в условии задачи, как она была поставлена в § 620, заменить кривые класса (I) кривыми класса (II), сохраняя все остальные условия и определение близости, то мы увидим, что решением новой задачи будет ломаная AEB. Эти решения называются *разрывными (угловыми) решениями*. Это расширение тем более естественно, что всякое решение первоначальной задачи является также решением расширенной задачи. Если, например, кривая Γ класса (I) дает интегралу J значение, меньшее, чем все соседние кривые того же класса, имеющие те же концы, то интеграл, взятый вдоль кривой класса (II), соединяющий те же точки, не может иметь значение меньшее, чем интеграл вдоль кривой Γ. В самом деле, в противном случае ее можно было бы (§ 630) заменить соседнею кривою Γ' класса (I), которая также давала бы этому интегралу значение, меньшее значения, полученного вдоль Γ. Между тем из предыдущего примера видно, что расширенная задача может иметь решения и тогда, когда первоначальная задача их не имеет.

Рассмотрим еще раз пример Больца (§ 641), в котором $F=y'^2(y'-1)^2$, в предположении, что угловой коэфициент прямой AB заключается между 0 и 1. Ясно, что в этом случае задача имеет бесчисленное множество разрывных (угловых) решений, изображаемых ломаными линиями, соединяющими две точки A и B, звенья которых поочередно параллельны прямой $y=0$ и прямой $y=x$. Нижняя граница интеграла, взятого вдоль кривой Γ класса (I), соединяющей две точки A и B, равна нулю, и ясно, что эта нижняя граница не достижима ни для какой кривой этого рода.

Ясно, что всякое разрывное решение может состоять только из некоторого числа дуг экстремальных кривых, соединенных концами Кроме того, необходимо, чтобы в угловых точках выполнялись некоторые условия. Чтобы их получить, положим, что некоторое разрывное решение изображается дугами двух экстремалей AE и EB, образующих в точке E угловую точку Пусть, далее, J_1 и J_2 будут значения интеграла $\int F(x,y,y')\,dx$, взятые соответственно вдоль этих двух дуг. Если, заменяя дуги экстремалей AE, EB двумя бесконечно близкими дугами AE', $E'B$ класса (I), мы заставим точку $E(x_2, y_2)$ описать бесконечно малую дугу EE', то для того чтобы путь AEB давал экстремум интегралу, первая вариация $\delta(J_1+J_2)$ должна быть равна нулю, каково бы ни было направление EE'. Но в силу § 625 имеем:

$$\delta J_1=[F(x_2, y_2;\, p_1)-p_1F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1)]\,\delta x_2+F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1)\,\delta y_2,$$

$$\delta J_2=[F(x_2, y_2;\, p_2)-p_2F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2)]\,\delta x_2-F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2)\,\delta y_2,$$

где p_1 и p_2 — угловые коэфициенты касательных к дугам экстремалей AE, EB. Для того чтобы $\delta J_1+\delta J_2$ было равно нулю при любых значениях δx_2, δy_2, необходимо и достаточно, чтобы было:

$$F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1)=F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2), \tag{109}$$

$$F(x_2, y_2;\, p_1)-p_1F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2)=F(x_2, y_2;\, p_2)-p_2F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2). \tag{110}$$

Для того чтобы точка E с координатами (x_2, y_2) могла быть угловой точкой разрывного решения, необходимо, чтобы функция $F'_{y'}(x_2, y_2;\, p)$ принимала одно и то же значение для двух различных значений p_1 и p_2 аргумента p. Тогда вторая производная $F''_{y'^2}(x_2, y_2; p)$ должна иметь по крайней мере один корень между p_1 и p_2, и, следовательно, *правильная задача не может иметь разрывных решений* (§ 621).

При определении разрывных решений, имеющих единственную угловую точку и соединяющих данные две точки A и B, неизвестными являются координаты x_2, y_2 точки E и угловые коэфициенты p_1, p_2. Если записать, что экстремали, выходящие из точки E, касательные к которым имеют угловые коэфициенты p_1 и p_2, проходят соответственно через точки A и B, то получается два новых условия, которые, будучи присоединены к условиям (109) и (110), составляют систему как раз четырех уравнений. Для разрывного решения с любым числом угловых точек координаты каждой вершины и угловые коэфициенты касательных к двум экстремалям, выходящим из этой вершины, должны удовлетворять соотношениям (109) и (110). Кроме того, две последовательные вершины принадлежат одной экстремали; каково бы ни было число вершин, число условий всегда равно числу параметров, которыми можно располагать. В примере Больца уравнения (109) и (110) не имеют других систем действительных решений, кроме $p_1=0$, $p_2=1$ или $p_1=1$, $p_2=0$. Существуют только два разрывных решения, имеющих единственную угловую точку, но существует бесчисленное множество таких решений, которые имеют больше двух угловых точек, как это ясно a priori.

Если интеграл задан в параметрической форме, то разрывное решение состоит из конечного числа дуг кривых класса C^1, соединенных концами. Очевидно, каждая из этих дуг должна быть дугою экстремали, и направления касательных в угловых точках должны удовлетворять двум соотношениям, которые можно получить тем же путем:

$$\left.\begin{aligned} F'_{x'}(x_2, y_2; \cos\theta_1, \sin\theta_1) &= F'_{x'}(x_2, y_2; \cos\theta_2, \sin\theta_2), \\ F'_{y'}(x_2, y_2; \cos\theta_1, \sin\theta_1) &= F'_{y'}(x_2, y_2; \cos\theta_2, \sin\theta_2); \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

здесь θ_1 и θ_2 суть углы, образуемые с осью Ox положительными направлениями касательных к двум дугам экстремалей в точке (x_2, y_2), где эти дуги соединяются. Отсюда следует также, что

$$E(x_2, y_2; \cos\theta_1, \sin\theta_1; \cos\theta_2, \sin\theta_2) = 0,$$

а, следовательно, в силу соотношения (98) уравнение $F_1(x_2, y_2; \cos u, \sin u) = 0$ имеет по крайней мере один корень, заключенный между θ_1 и θ_2, т. е. правильная задача не может иметь разрывных решений*.

Примечание. Не всегда бывает возможно ввести разрывные решения. Мы видели, например, что значение определенного интеграла

$$\int_{-1}^{+1} x^2 y'^3\,dx,$$

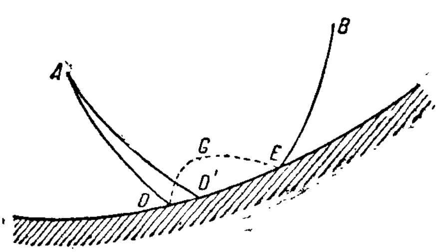
взятого вдоль кривой Г, уравнение которой есть

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\lambda}}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\lambda}},$$

стремится к нулю вместе с λ. Кривая Г неограниченно приближается при этом к ломаной $APQB$, которая состоит из двух отрезков AP, QB прямых, параллельных оси Ox, и из отрезка PQ оси Oy. Но эту ломаную нельзя рассматривать как разрывное решение, ибо интеграл взятый вдоль PQ, не имеет смысла.

* Полученные условия являются только *необходимыми* для экстремума. Более подробное изложение разрывных решений читатель найдет в диссертации Каратеодори (Carathéodory, Göttingen, 1904).

654. Односторонние вариации. Введение разрывных решений представляет в некотором смысле обобщение первоначальной задачи. В некоторых вопросах приходится, наоборот, уменьшать общность задачи, подчиняя искомые функции некоторым ограничениям. Положим, например, что требуется найти кривую класса (I), которая соединяет две точки A и B, находящиеся на параллели к прямой $y=x$, и которая дает интегралу $\int y'(y'-1)^2 dx$ минимум. Прямая AB есть экстремаль, и можно непосредственно показать, что условия Лежандра и Якоби выполняются; но это не имеет места относительно необходимого условия Вейерштрасса (§ 336), ибо функция $E(x, y; p, q)$ вдоль AB равна $p(p-1)^2$ и меняет знак вместе с p. Следовательно, экстремаль AB не дает сильного минимума. Но если среди кривых, которые соединяют точки A и B и у которых *ординаты все время возрастают от A к B*, искать такую, которая дает интегралу минимальное значение, то ясно, что прямая AB является решением, ибо вдоль всякой другой кривой этого вида интеграл будет иметь положительное значение. В некоторых вопросах вариационного исчисления, имеющих физическое значение, этого рода ограничения определяются самим характером задачи (см. упражнение 11).



Черт. 106.

В предыдущем примере неизвестная функция y должна удовлетворять неравенству $y'>0$. Можно было бы сильно обобщить задачу, предполагая, что неизвестные функции и их производные должны удовлетворять неравенствам любого вида. Мы рассмотрим только один простой случай, изучение которого необходимо, чтобы дополнить решение задачи, поставленной в начале этой главы (§ 620). В самом деле, мы предполагали, что кривая, которая дает интегралу экстремум, находится вся внутри области $\mathfrak{R}$, и этим самым исключаем из рассмотрения случай, когда существует кривая, дающая экстремум и расположенная отчасти на границе области. Положим для определенности, что область $\mathfrak{R}$ ограничена снизу, по крайней мере отчасти, кривою Γ_1, изображаемою уравнением $y=\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — функция класса (I). Кривая $ADEB$, состоящая из двух дуг AD и EB, расположенных в области $\mathfrak{R}$, и из дуги DE пограничной кривой, может дать интегралу $\int F(x, y, y')\,dx$ значение меньшее, чем все соседние кривые класса (II), имеющие те же концы и расположенные в области $\mathfrak{R}$. Для этого прежде всего необходимо, чтобы AD и EB были экстремалями или состояли из дуг экстремалей, если эти кривые имеют угловые точки. Но вовсе не необходимо, чтобы функция $\Phi(x)$ была интегралом уравнения Эйлера. В самом деле, если мы заменим дугу DE, расположенною выше ее близкою дугою DGE, то функция $\Phi(x)$ заменится на $\Phi(x)+\eta(x)$, где $\eta(x)$ не может принимать отрицательных значений между абсциссами x_2 и x_3 точек D и E. Значение $J_2'(0)$ производной интеграла

$$J_2(\alpha)=\int_{x_2}^{x_3} F[x, \Phi(x)+\alpha\eta(x), \Phi'(x)+\alpha\eta'(x)]\,dx,$$

взятое при $\alpha=0$, должно быть больше или равно нулю, какова бы ни была функция $\eta(x)$ класса (I), удовлетворяющая в интервале (x_2, x_3) неравенству $\eta\geqslant 0$ и равная нулю на концах. Если опять вычислить эту производную, то из соображений, приведенных в § 621, следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\geqslant 0 \qquad (112)$$

вдоль всей дуги DE. Таким образом уравнение Эйлера заменяется неравенством (112).

В точках D и E должны выполняться новые условия. Вообразим, что мы заменяем дугу AD близкою дугою AD', которая имеет конец в точке D' дуги DE. Первая вариация интеграла $J_1=\int\limits_{AD} F\,dx$ имеет вид (§ 625):

$$\delta J_1=[F(x_2, y_2; y_2')-y_2'F'_{y'}(x_2, y_2; y_2')]\,\delta x_2+F'_{y'}(x_2, y_2; y_2')\,\delta y_2,$$

где x_2, y_2 — координаты точки D, y_2' — угловой коэфициент касательной в точке D к экстремали J_2. Первая вариация интеграла J_2, взятого вдоль DE, очевидно, равна $-F(x_2, y_2; p_2)\,\delta x_2$, где p_2 есть угловой коэфициент касательной к DE в точке D. Замечая, что $y_2=p_2\,\delta x_2$, мы преобразуем условие $\delta(J_1+J_2)=0$ в следующее: $F(x_2, y_2; y_2', p_2)=0$. Оно, очевидно, выполняется, если $y_2'=p_2$, т. е. если дуги AD, DE касаются друг друга в точке E. Совершенно аналогичное условие мы получаем для точки E, и к неравенству (112) следует присоединить еще два соотношения:

$$E(x_2, y_2; y_2', p_2)=0, \quad E(x_3, y_3; y_3', p_3)=0. \tag{113}$$

В случае интеграла в параметрической форме:

$$\int F(x, y; x', y')\,dt$$

мы предположим, что координаты точек граничной дуги DE суть функции $x(s)$, $y(s)$ длины дуги, отсчитываемой в положительном направлении. Пусть θ будет угол, который положительное направление касательной образует с осью Ox. Формулы

$$x=x(s)-\eta(s)\sin\theta, \quad y=y(s)+\eta(s)\cos\theta,$$

в которых $\eta(s)$ есть функция класса (I), равная нулю в точках D и E и положительная или равная нулю в промежутке, представляют кривую вида DGE, расположенную в области $\mathfrak{R}$, если только $|\eta|$ не превосходит некоторого предела. Если в функции F переменные x и y заменить через

$$x(s)-\alpha\eta(s)\sin\theta \quad \text{и} \quad y(s)+\alpha\eta(s)\cos\theta,$$

то интеграл сделается функцией от α, производная которой при $\alpha=0$ должна быть больше или равна нулю, каков бы ни был вид функции $\eta(s)$. Повторяя вычисления этой производной, мы находим, что для этого необходимо и достаточно, чтобы вдоль всей дуги DE выполнялось неравенство:

$$T=F_1(x'y''-x''y')+F''_{xy'}-F''_{yx'}\leqslant 0. \tag{114}$$

Как и выше, можно показать, что в точках D и E должны иметь место соотношения:

$$E(x_2, y_2; p_2, q_2; x_2', y_2')=0, \quad F(x_3, y_3; p_3, q_3; x_3', y_3')=0, \tag{115}$$

где p_i, q_i суть направляющие параметры положительного направления касательной к дуге DE, а x_i', y_i' — направляющие параметры касательной к экстремали. Таковы необходимые условия для того, чтобы путь $ADEB$ давал относительный минимум, но эти условия вообще не являются достаточными *.

---

* Условия (115) всегда выполнены, если экстремаль и граничный контур в общей точке касаются друг друга, причем положительное направление касательной для обеих кривых совпадает. Если $F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$ не может обратиться в нуль на границе, то условия (115) могут быть выполнены только в этом случае. Аналогичное замечание можно сделать относительно условий (113).

Пример. Пусть $F=y^{\alpha}\sqrt{x'^2+y'^2}$, где α — положительное число, а область $\mathfrak{R}$ есть часть плоскости над осью Ox. Здесь не может быть разрывных решений, имеющих угловые точки над осью Ox, так как F_1 не может обратиться в нуль при положительном значении y. С другой стороны, единственные экстремали, встречающие ось Ox, суть прямые, параллельные Oy. Следовательно, единственно возможные разрывные решения состоят из двух отрезков AP, BQ, параллельных Oy, и части PQ оси Ox. Непосредственно убеждаемся в том, что условия (114) и (115) удовлетворяются. В настоящем случае легко показать, что эти условия достаточны и что путь $APQB$ действительно дает интегралу $\int y^{\alpha}\,ds$ относительный минимум. Это непосредственно ясно для пути, который имеет по крайней мере одну точку на отрезке PQ *. Пусть задан путь AEB над осью Ox, и пусть E — самая низкая точка с ординатою, равною h, а P' и Q' — точки на отрезках AP и BQ, имеющие также ординаты h. Сравнивая элементы интеграла, соответствующие одной и той же ординате, вдоль AE и AP', а также вдоль EB и $Q'B$, легко видеть, что разность двух интегралов, взятых вдоль кривой AEB и вдоль ломаной $APQB$, не меньше, чем $h^{\alpha}(AE+EB-AP-BQ)$, а это выражение при достаточно малом значении h положительно. Таким образом в случае, если через точки A и B проходят две экстремали, всегда существует один относительный минимум, который дается разрывным решением, и другой относительный минимум вдоль экстремали.

655. Замечания об абсолютном экстремуме. В предыдущем примере всегда существует одна или две кривые, дающие интегралу $\int y^{\alpha}\,ds$ относительный минимум; одна из них есть ломаная, а другая, если она существует, есть кривая класса (I). Если существует только один относительный минимум, то он является также *абсолютным минимумом*. В случае, когда есть две кривые, дающие относительный минимум, одна из них дает также абсолютный минимум, но это не есть необходимо кривая класса (I) **. В этом случае существование абсолютного минимума доказывается непосредственно.

Но обычные методы вариационного исчисления, вообще говоря, недостаточны для доказательства существования абсолютного экстремума. В одной очень важной заметке *** Гильберт (Hilbert) применил совершенно иной метод для прямого доказательства существования абсолютного экстремума в некоторых частных случаях; это дало ему возможность дополнить доказательство Римана для принципа Дирихле. Мы не можем здесь за недостатком места развернуть эти глубокие исследования и ограничимся только несколькими краткими указаниями.

Пусть для определенности $F(x, y, y')$ будет функция положительная в области $\mathfrak{R}$ для всякого конечного значения y'. Интеграл

$$J=\int F(x, y, y')\,dx,$$

взятый вдоль кривой класса (I), находящейся в области $\mathfrak{R}$ и соединяющей две данные точки A и B этой области, очевидно, имеет нижнюю границу $J_0 \geqslant 0$

* Пусть читатель сам сделает чертеж.

** Доказательство можно найти у Адамара, стр. 414 и след. Доказательство, которое у него приводится для $\alpha=\frac{1}{2}$, распространяется на случай любого положительного числа.

*** Deutsche Mathematiker-Vereinigung (*Jahresberichte*, т. VIII, 1899, стр. 184) перевед. на французский Ложелем (Laugel) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1900, стр. 377; *Mathematische Annalen*, т. LIX, 1904, стр. 161. См. также Lebesgue, *Annali di Matematica*, 3-я серия, т. VII, 1902, стр. 342—359; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, т. XXIV, 1907; Адамар (стр. 484—490); Больца (глава VII); Zaremba, *Bulletin de l'Academie des Science de Cracovie*, 1909, стр. 197—264. Первая часть доказательства Гильберта, устанавливающая принцип Дирихле, была применена Arzelà (*Rendiconti della R. Academia di Bologna*, 1897). Это указание дал мне Лебег.

Можно, вообще говоря, бесчисленным множеством способов составить последовательность кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ класса (I), расположенных в области $\mathfrak{R}$, соединяющих A и B и таких, что интеграл J_n, взятый вдоль C_n, стремится к J_0 при неограниченном возрастании n. Достаточно взять последовательность положительных чисел ε_n, которые стремятся к нулю при неограниченном возрастании n, и выбрать кривую C_n так, чтобы было $|J_n - J_0| < \varepsilon_n$. Пусть $y = f_n(x)$ будет уравнение кривой C_n. Если J действительно достигает своей нижней границы J_0 для кривой Γ класса (I), изображаемой уравнением $y = \Phi(x)$, то ясно, что кривые C_n можно выбрать так, чтобы функция $f_n(x)$ при неограниченном возрастании n имела своим пределом $\Phi(x)$. Обратно, для того чтобы можно было утверждать, что J достигает своей нижней границы для кривой класса (I), необходимо доказать, что можно выбрать кривые C_n так, чтобы они удовлетворяли трем следующим условиям:

1. $f_n(x)$ стремится к $\Phi(x)$ при неограниченном возрастании n.

2. Функция $\Phi(x)$, а следовательно, соответствующая кривая принадлежат к классу (I).

3. Интеграл J_n, взятый вдоль C_n, имеет своим пределом интеграл, взятый вдоль Γ.

Эти три части должны быть доказаны последовательно. Например, верхняя граница интеграла $J = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+y'^2}$, взятого вдоль кривой класса (I) или (II), соединяющей точки (0,0) и (1,0), равна нулю. В самом деле, если взять

$$y = h \sin(n\pi x),$$

то соответствующее значение интеграла будет $J_n = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2\pi^2h^2}}$; при неограниченном возрастании n оно стремится к нулю, хотя функция $f_n(x)$ не стремится ни к какому пределу. С другой стороны, может случиться, что $f_n(x)$ стремится к функции $f(x)$, не принадлежащей к тому же классу, что и $f_n(x)$. Так, в примере Вейерштрасса (§ 635) функция $\frac{\operatorname{arc\,tg}(nx)}{\operatorname{arc\,tg} n}$ при неограниченном возрастании n имеет своим пределом разрывную функцию.

Может, наконец, случиться, что функция $f_n(x)$ равномерно стремится к функции $f(x)$ того же класса, между тем как интеграл J_n, соответствующий функции $f'_n(x)$, не имеет своим пределом интеграл J, соответствующий функции $f(x)$. Положим, например, $F = (y'^2 - 1)^2 + y^2$. Интеграл $\int\limits_0^1 F\,dx$, взятый вдоль кривой класса (II), соединяющий точки (0,0) и (1,0), имеет нижнюю границу, равную нулю. В самом деле, рассмотрим кривую C_n, состоящую из отрезков прямых, попеременно параллельных двум биссектрисам углов, образованных осями, и проходящих через точки оси Ox с абсциссами $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$; соответствующий интеграл имеет значение $\frac{1}{12n^2}$. При неограниченном возрастании n ордината точки C_n, соответствующей произвольному значению x, заключенному между 0 и 1, равномерно стремится к нулю; интеграл J_n также стремится к нулю, между тем, как интеграл, взятый вдоль предельной кривой, каковою здесь является ось Ox, равен единице.

Все эти трудности были преодолены в некоторых частных случаях, изученных в вышеприведенных работах*.

* В последних мемуарах, опубликованных в *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Тонелли доказал прямым методом при очень широких предположениях существование решения первой задачи вариационного исчисления и, следовательно, существование решения уравнения Эйлера — проходящего через две данные точки. Метод Тонелли использует понятия, введенные Лебегом в теорию функций действительного переменного.

ДОПОЛНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Изучить задачу § 620, полагая, что F имеет одну из следующих форм:

$$x^n \sqrt{1+y'^2}, \quad (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1+y'^2}.$$

2. Если функция F не зависит от x, то уравнение Эйлера имеет множитель $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ (Якоби).

3. Всякому диференциальному уравнению второго порядка вида:

$$y'' = G(x, y, y') \tag{E}$$

соответствует бесчисленное множество задач вариационного исчисления, которые приводят к этому уравнению. Показать, что если проинтегрировано уравнение (E), то можно получить все соответствующие виды функции $F(x, y, y')$ с помощью квадратур. (Дарбу, Théorie des surfaces, т. III, § 604—605.)

Указание. Функция $F(x, y, y')$ должна удовлетворять условию:

$$G\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

откуда получается линейное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + y'\frac{\partial M}{\partial y} + G\frac{\partial M}{\partial y'} + M\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

для определения $M = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Это последнее уравнение интегрируется с помощью одной квадратуры, если известно решение уравнения (E).

4. Вывести из результатов предыдущего упражнения, что все задачи вариационного исчисления, для которых экстремалями служат прямые линии, получатся, если в качестве функции F взять следующую функцию:

$$F = \int_0^{y'} (y'-t)\,\Phi(t, y-xt)\,dt + y'\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где Ψ есть произвольная функция от x и y, а Φ есть произвольная функция от t и от $y - xt$.

5. Найти экстремальные кривые для интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} g(y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

Из диференциальных уравнений (10) и (11) мы получаем:

$$gy'' = \frac{\partial g}{\partial y}(1+y'^2+z'^2), \quad gz'' = \frac{\partial g}{\partial z}(1+y'^2+z'^2),$$

Отсюда получается первый интеграл $g = C\sqrt{1+y'^2+z'^2}$. Полагая $x = \frac{t}{c}$ и заменяя $1+y'^2+z'^2$ на $\frac{g^2}{c^2}$, мы получаем диференциальные уравнения экстремалей:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^2}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^2}{\partial z}.$$

6. *Пример Шеффера* (ср. § 635). Пусть $F = x^2y'^2 + xy'^3$. Отрезок $(-1, +1)$ оси Ox представляет экстремаль, удовлетворяющую условиям минимума Лежандра и Якоби. Этот путь не дает, однако, минимума интегралу

$$\int_{-1}^{+1} (x^2y'^2 + xy'^3)\,dx,$$

ибо этот интеграл имеет отрицательное значение, если его взять вдоль ломаной, определенной формулами:

1) $y = x + h$ от $-h$ до 0; 2) $y = -x + h$ от 0 до h; 3) $y = 0$ от -1 до $-h$ и от h до 1, где h — очень малое положительное число. Это значение равно $h^2\left(\frac{2}{3}h - 1\right)$.

7. Для того чтобы уравнение (34) § 629 удовлетворялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция F была вида: $Ap + Bq + C$, где A, B и C суть функции от x, y, z, удовлетворяющие условию $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial z}$. Истолковать результат с помощью формул § 155 (т. I).

8. *Замечание Дю-Буа-Реймона в применении к двойным интегралам.* Следующий пример Адамара показывает, что первая вариация двойного интеграла

$$\iint\limits_{(A)} F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$$

может быть равна нулю для функции $z = f(x, y)$, тогда как функция f не имеет вторых производных. Пусть

$$F = p^2 - q^2, \quad z = f(x + y),$$

где f имеет непрерывную первую производную. Тогда

$$\delta J = 2\iint\limits_{(A)} f'(x+y)\,[\eta'_x - \eta'_y]\,dx\,dy.$$

Положим:

$$x + y = u, \quad x - y = v, \quad \eta(x, y) = \varphi(u, v).$$

Предыдущий двойной интеграл принимает вид:

$$\iint\limits_{(A)} f'(x-y)\,[\eta'_x - \eta'_y]\,dx\,dy = -\iint\limits_{(A')} f'(u)\,\varphi'_v(u, v)\,du\,dv,$$

где функция $\varphi(u, v)$ равна нулю на всей границе поля A', соответствующего полю A плоскости xy. Двойной интеграл равен нулю в силу первой формулы Грина, причем нет необходимости предполагать, что $f'(u)$ имеет производную.

9. Если, приравнивая нулю первую вариацию двойного интеграла, мы получим уравнение Монжа-Ампера, для которого две системы характеристик совпадают, то это уравнение допускает два различных промежуточных интеграла (Josef Kurschák, *Mathematische Annalen*, т. 56, стр. 164).

10. *Геодезические линии.* Если в качестве независимого переменного взять длину дуги s геодезической линии, то диференциальные уравнения, определяющие u и v, будут следующие:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d}{ds}\{eu'+fv'\} &= e'_u u'^2 + 2f'_u u'v' + g'_u v'^2, \\ 2\frac{d}{ds}\{fu'+gv'\} &= e'_v u'^2 + 2f'_v u'v' + g'_v v'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

вместе с соотношением: $eu'^2+2fu'v'+gv'^2=1$. Из формул, определяющих e, f, g (I, § 131), получаем:

$$eu'+fv' = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dx}{ds}.$$

Диференцируя по s, находим:

$$\frac{d}{ds}\{eu'+fv'\} = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} + S(x'_u u' + x'_v v')(x''_{uu}u' + x''_{uv}v') =$$

$$= S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}e'_u u'^2 + f'_u u'v' + \frac{1}{2}g'_u v'^2.$$

Принимая во внимание первое из уравнений (E), получаем.

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Точно так же можно показать, что

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Таким образом главная нормаль к геодезической, направляющими параметрами которой служат $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$, является также нормалью к поверхности (ср. § 627).

11. *Тело наименьшего сопротивления (Ньютон).* Пусть некоторое твердое тело вращения перемещается параллельно оси, и пусть каждый элемент поверхности испытывает нормальное сопротивление среды, пропорциональное квадрату нормальной составляющей скорости. Требуется найти форму меридиана так, чтобы сопротивление среды, которое, очевидно, параллельно оси вращения, было минимум. Если ось вращения принять за ось Oy, то задача приводится к нахождению минимума интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{1+y'^2} \quad (0 < x_0 < x_1). \qquad (\alpha)$$

Диференциальное уравнение Эйлера интегрируется легко, и все экстремали, кроме прямых $y = C$, получаются из частной экстремали

$$x = \frac{(1+y'^2)^2}{y'},$$

$$y = \frac{3y'^4}{4} + y'^2 - \log|y'| \qquad (\beta)$$

переносом, параллельным Oy, или гомотетичным преобразованием с центром в начале.

Когда y' изменяется от 0 до $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x и y все время убывают, и точка (x, y) описывает бесконечную ветвь Γ'' кривой класса (I), имеющую асимптотическое направление, параллельное Ox, и заканчивающуюся в точке возврата P. Когда y' возрастает от $\frac{1}{\sqrt{3}}$ до ∞, x и y возрастают, и точка (x, y) описывает бесконечную ветвь Γ' класса (I), выходящую из точки P и имеющую ось Oy асимптотическим направлением.

Вторая производная y'' положительна в каждой точке кривой Γ' и отрицательна в каждой точке кривой Γ''. Для любой дуги AB ветви Γ' выполняется условие минимума Лежандра, ибо

$$F''_{y'^2} = \frac{2x(3y'^2 - 1)}{(1 + y'^2)^3}.$$

Эта дуга удовлетворяет также условию Якоби (§ 634), но не удовлетворяет условию Вейерштрасса, ибо функция E имеет вид:

$$E(x, y; y', p) = x\,\frac{(y' - p)^2\,[2py' + y'^2 - 1]}{(1 + y'^2)^2\,(1 + p^2)}. \qquad (\gamma)$$

Таким образом с изменением p функция E может менять знак, если только экстремалью не будет отрезок, параллельный Ox. Эта экстремаль, очевидно, дает интегралу J максимум. Оставляя в стороне этот частный случай, мы видим, что никакая экстремаль не может дать сильного экстремума интегралу J. Этот результат легко объяснить, если заметить, что значение интеграла J заключено между 0 и $\frac{x_1^2 - x_0^2}{2}$, и это значение можно выбрать как угодно близко к одной из этих двух границ. С одной стороны, если в качестве Γ выбрать ломаную, стороны которой составляют очень малый угол с осью Oy, значение J будет очень мало. С другой стороны, если за Γ выбрать ломаную ACB, составленную из отрезка AC, параллельного Ox и кончающегося в точке C с абсциссой $x_1 - h$, и отрезка CB, то значение J вдоль этого пути при приближении h к нулю стремится к $\frac{x_1^2 - x_0^2}{2}$. Интеграл J не имеет также сильного экстремума, если его взять в параметрической форме:

$$\int \frac{xx'^3}{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

так как F есть рациональная функция от x', y' (§ 649). Казалось бы, что задача Ньютона не имеет решений. Но можно подчинить искомую кривую вполне естественному дополнительному условию, по которому ординаты в этом интервале все время изменяются в одном направлении. В противном случае физическая гипотеза, из которой мы исходили, была бы, очевидно, неприемлема. Среди всех кривых класса (I), соединяющих две точки A и B *и ординаты которых при перемещении по дуге AB все время меняются в одном направлении*, требуется, следовательно, найти такую, вдоль которой J принимает минимальное значение. Можно получить дугу экстремали, удовлетворяющую этому условию, если взять на дуге Γ' дугу AB, полученную изменением y' между двумя пределами y'_0 и y'_1, большими единицы. Пусть $\mathfrak{G}_0$ будет полученная таким образом дуга экстремали; она принадлежит полю экстремалей, для которого можно взять $u(x, y) = p(x)$, где p — угловой коэфициент касательной к $\mathfrak{G}_0$ в точке с абсциссой x, и $E(x, y; u, y')$ имеет вид:

$$E(x, y; u, y') = x \frac{(y'-p)^2 \{2py' + p^2 - 1\}}{(1+y'^2)(1+p^2)^3}.$$

Из формулы (67) § 639 следует, что разность $J_\Gamma - J_{\mathfrak{G}_0}$ положительна вдоль любой кривой Г, соединяющей две точки A и B, для которой $y' > 0$.

12. *Задача Виейля* (Vieille). Требуется соединить данные две точки A и B линией данной длины так, чтобы ортогональная проекция этой линии на данную плоскость была максимальной.

Задача приводится к нахождению максимума интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ при условии, что интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx$ имеет данное значение l. Согласно методу, изложенному в § 628, диференциальные уравнения экстремалей получатся если приравнять нулю первую вариацию интеграла

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left\{ \sqrt{1+y'^2} + K\sqrt{1+y'^2+z'^2} \right\} dx,$$

где K есть постоянный множитель. Эти уравнения суть:

$$\left[\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{K(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] y'' - \frac{Ky'z'z''}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$y'z'z'' - (1+y'^2)\, z'' = 0.$$

Отсюда получаем $y'' = z'' = 0$, если только коэфициенты при y'' и z'' не пропорциональны; в этом случае было бы

$$z' = \sqrt{1+y'^2}\sqrt{K^2-1},$$

а из этого соотношения вытекают первые два. Таким образом экстремалями служат прямые линии и спирали на цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz. Ясно, что эти спирали и дают решение задачи, как это можно было предвидеть геометрически. При этом существует бесчисленное множество решений, ибо форма плоского сечения цилиндра остается неопределенной.

13. Всякое уравнение в частных производных первого порядка

$$\Phi\left(x, y; \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) = 0$$

определяет семейство трансверсальных кривых для некоторой задачи вариационного исчисления. Соответствующая этой задаче функция F получится, если взять особый интеграл диференциального уравнения

$$\Phi(x, y; F - y'F'_{y'}, F'_{y'}) = 0,$$

где y' — независимое переменное, F — не звестная функция, а x и y рассматриваются как параметры (см. § 642—643).

14. Тот же вопрос для уравнения в ч стных производных

$$\Phi\left(x, y, z; \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = 0.$$

Среди полученных функций $F(x, y, z; y', z')$ есть только одна, которая приво-ит к *правильной* задаче.

УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы настоящего полутома)

ОБЩИЙ УКАЗАТЕЛЬ К КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА Э. ГУРСА

(Римские цифры обозначают том, курсивные цифры часть тома, прямые цифры страницы)

РАНЕЕ ВЫШЛИ:

Э. ГУРСА — КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I, часть 1.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФЕРЕНЦИАЛЫ. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

I. Введение.
II. Производные и диференциалы.
III. Неявные функции. Максимум и минимум. Замена переменных.
IV. Определенные интегралы.
V. Вычисление определенных интегралов.
VI. Двойные интегралы.
VII. Кратные интегралы. Интегрирование полных диференциалов.

Том I, часть 2.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

VIII. Ряды и бесконечные произведения.
IX. Целые ряды. Тригонометрические ряды.
X. Теория огибающих. Прикосновение.
XI. Кривые двойной кривизны.
XII Поверхности.

Том II, часть 1.

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

XIII. Простейшие функции комплексного переменного.
XIV. Общая теория аналитических функций по Коши.
XV. Однозначные функции.
XVI. Аналитическое продолжение.
XVII. Аналитические функции многих переменных.

Том II, часть 2.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Том III, часть 1.

БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.