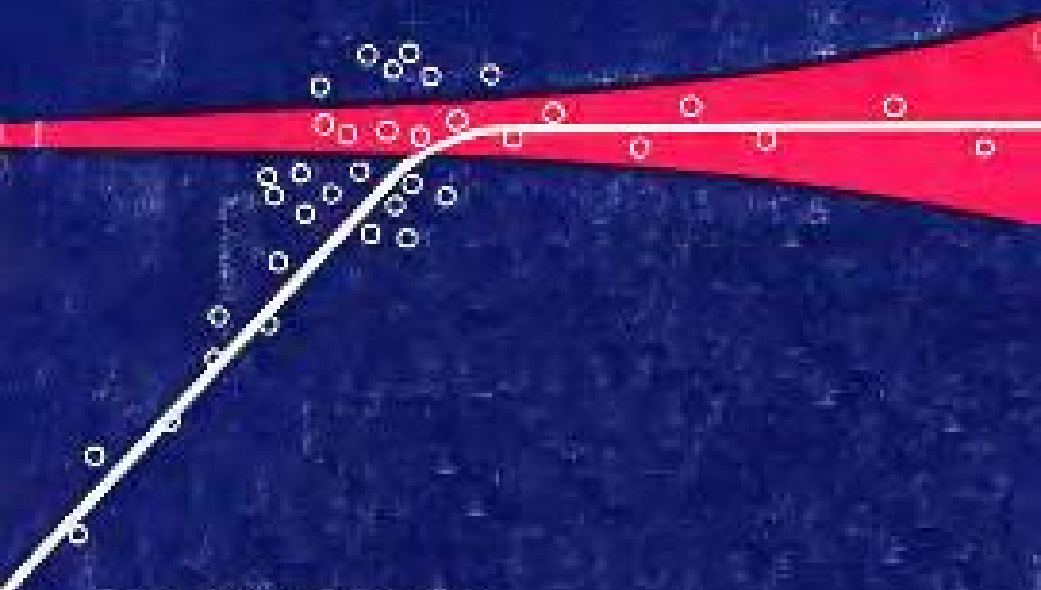


*ЛАЗЕРНОЕ
ИЗЛУЧЕНИЕ
В ТУРБУЛЕНТНОЙ
АТМОСФЕРЕ*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Институт физики атмосферы
Институт оптики атмосферы
Сибирского отделения

ЛАЗЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1976



Авторы:

А. С. ГУРВИЧ, А. И. КОН, В. Л. МИРОНОВ, С. С. ХМЕЛЕВЦОВ.

Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1976, 277 с.

В книге рассмотрены физические основы влияния атмосферной турбулентности на лазерное излучение. Основное внимание уделено решению задач, связанных с определением средней интенсивности и флуктуаций интенсивности в лазерных пучках. Рассмотрено влияние турбулентности на флуктуации фазы световых волн и искажение пространственной когерентности.

Изложены методы определения параметров турбулентности по флуктуациям лазерного излучения.

Наряду с теоретическими исследованиями распространения электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах, в книге приводятся сведения об атмосферной турбулентности и о методах описания турбулентных полей. Приводятся результаты, полученные приближенными численными методами. Широко представлены экспериментальные данные и их обобщения, необходимые для практических приложений при проектировании лазерных систем. Изложение в значительной степени опирается на оригинальные результаты, полученные авторами за последние десять лет.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — специалистов по распространению электромагнитных волн в атмосфере и случайных средах, геофизиков, проектировщиков лазерных систем. Она может представить интерес для преподавателей и аспирантов.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

В. И. ТАТАРСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследованиям распространения лазерного излучения в атмосфере в последнее время уделяется значительное внимание в связи с потенциально возможными применениями лазерной техники. Влияние случайных неоднородностей показателя преломления, вызываемых атмосферной турбулентностью, в ряде случаев может оказаться фактором, ограничивающим возможности систем, использующих лазерное излучение. Вызываемые турбулентностью неоднородности показателя преломления сказываются на параметрах лазерного излучения в тем большей степени, чем выше «качество» излучения, т. е. чем меньше его угловая расходимость, чем больше его пространственная и временная когерентность и т. д.

Вопросам распространения электромагнитных и звуковых волн в среде со случайными неоднородностями посвящен ряд монографий. Однако в них не нашли отражения результаты многочисленных исследований, выполненных в последние годы. В ряде этих работ получила дальнейшее развитие принципиальная сторона рассматриваемого вопроса, что позволило распространить теорию на важный для практики случай не малых флуктуаций поля излучения. Кроме того, выполнены экспериментальные исследования, результаты которых позволяют найти целый ряд универсальных зависимостей, которые пока не могут быть получены расчетным путем. Наконец, имеется большая группа работ, в которых рассчитываются различные параметры лазерных пучков, распространяющихся в турбулентной атмосфере. Наиболее существенные из перечисленных новых результатов вошли в предлагаемую монографию. Следует отметить, что многие из предлагаемых в книге результатов без особых затруднений могут быть использованы и для анализа распространения электромагнитных и звуковых волн в других случайно-неоднородных средах (например, звуковых волн в атмосфере и океане, радиоволн в ионосфере, межпланетной среде и т. д.).

В основном материал книги опирается на работы, выполненные в Институте физики атмосферы АН СССР и в Институте оптики атмосферы СО АН СССР.

Первая глава книги написана А. С. Гурвичем, вторая, пятая и седьмая — А. И. Коном, третья и четвертая — А. И. Коном и С. С. Хмелевцовым, шестая и восьмая — А. С. Гурвичем и В. Л. Мироновым. Параграфы 7 главы первой и 6 главы седьмой написаны В. Л. Мироновым.

В. И. Татарский

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентные флуктуации показателя преломления приводят к искажению световых волн, распространяющихся в атмосфере. Это явление давно известно астрономам, поскольку оно ограничивает возможности наблюдения астрономических объектов с помощью крупных оптических инструментов. Изучение флуктуационных помех, возникающих при распространении света в атмосфере, стало особенно актуальным в настоящее время в связи с широким использованием лазеров в оптических линиях связи, дальномерных и угломерных устройствах и в ряде других применений. Турбулентность нарушает когерентность лазерного излучения и в ряде случаев ограничивает возможности применения устройств, в которых используется когерентность (например, при формировании остронаправленных пучков света). Флуктуации интенсивности, возникающие при распространении света в атмосфере, вызывают глубокие замирания сигналов в линиях связи. Поскольку атмосфера практически всегда турбулизована, при проектировании оптических устройств необходимо учитывать возможность помех из-за оптической неоднородности атмосферы и подбирать параметры систем так, чтобы максимально ослабить эти помехи. В тех случаях, когда помехи ограничивают предельные возможности оптических систем (например, разрешающую способность), целесообразно сформулировать технические требования, исходя из реально достижимых характеристик систем при их работе в атмосферных условиях.

Исследование распространения волн в турбулизованной среде было начато в СССР А. М. Обуховым и В. А. Красильниковым. В дальнейшем работы этого направления продолжали активно развиваться в СССР, и их результаты изложены в двух монографиях: Л. А. Чернова (1958) и В. И. Татарского (1959), переведенных затем на английский язык. Ссылки на эти монографии содержатся почти во всех публикациях (как в СССР, так и за рубежом), посвященных распространению волн в среде со случайными неоднородностями показателя преломления. Вторая монография В. И. Татарского «Распространение волн в турбулентной атмосфере» (1967) также переведена в настоящее время на английский язык. Наряду с упомянутыми монографиями ежегодно, в особенности за рубежом, публикуется большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию флук-

туаций лазерного излучения при распространении в атмосфере, в частности в 1975 г. выпущен специальный выпуск журнала «Radio Science».

Опубликованные монографии имеют в основном теоретический характер, и их изложение ведется на уровне, не всегда доступном инженерам. Кроме того, в вышедших монографиях не обобщен экспериментальный материал по измерениям с лазерами, поскольку к моменту их написания подобных экспериментов просто не было проведено. В статьях, публикуемых в журналах, естественно, рассматриваются отдельные частные вопросы.

Несмотря на то, что предлагаемая монография посвящена описанию процессов распространения света в атмосфере, в ней не рассматриваются вопросы, связанные с молекулярным поглощением и рассеянием на аэрозоле. Эти вопросы составляют содержание вышедшей в 1966 г. монографии В. Е. Зуева «Прозрачность атмосферы для видимых и инфракрасных лучей», где они освещены достаточно полно. Кроме того, флуктуационные явления, обусловленные турбулентностью, можно рассматривать в большинстве случаев независимо, и они представляют самостоятельный интерес.

Предлагаемая монография обобщает и рассматривает с единой точки зрения имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные о флуктуациях параметров световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере. Книга адресована прежде всего радиоинженерам, радиофизикам и оптикам и должна давать возможность проводить расчеты флуктуационных помех при работе оптических систем с лазерным излучением в атмосфере.

Теоретической основой предлагаемой книги является общепринятая теория турбулентности Колмогорова — Обухова и развитая В. И. Татарским теория распространения света в турбулентной атмосфере. В книге излагаются основные результаты теории, необходимые как для понимания физической картины рассматриваемых процессов распространения, так и для проведения инженерных расчетов.

Наибольшее внимание в книге уделено экспериментальным результатам, полученным за последние годы с лазерными источниками света. Изложены основные данные, полученные в последние годы авторами и коллективами сотрудников Института физики атмосферы АН СССР и Института оптики атмосферы СО АН СССР, по исследованию явлений, связанных с «сильными флуктуациями». «Сильные флуктуации», возникающие на достаточно протяженных трассах, были впервые исследованы в работах, выполненных в ИФА АН СССР. Достаточно разработанной теории, описывающей «сильные флуктуации», в настоящее время еще нет. Однако соображения подобия и приближенные методы расчета позволили систематизировать многочисленные экспериментальные результаты для этого практически важного случая и получить достаточно простые эмпирические соотношения и графики, пригодные для инженерных расчетов.

Значительное внимание уделено расчету средней интенсивности в лазерных пучках и анализу дефокусировки, вызванной турбулентностью. Снижение когерентности за счет турбулентности достаточно надежно рассчитывается практически для любых возможных условий распространения в атмосфере, что подтверждается многочисленными экспериментами.

Важное значение для практических применений имеют задачи об определении случайных блужданий пучков за счет турбулентности, а также флуктуации светового потока через приемные апертуры конечных размеров.

Развитие теоретических и экспериментальных исследований по взаимодействию турбулентности и световых волн позволило решить задачу о дистанционном зондировании турбулентности с помощью когерентного излучения.

В книге широко использованы опубликованные в печати результаты исследований как советских, так и зарубежных специалистов по флуктуациям, возникающим при распространении света в турбулентной атмосфере. Изложение результатов экспериментов и теоретических расчетов направлено не только на то, чтобы создать представление о состоянии вопроса, но и дать возможность использовать эти данные для инженерной практики.

Ввиду того, что сведения о турбулентности и структуре поля показателя преломления в атмосфере содержатся в специальных работах, рассчитанных на гидромехаников и геофизиков, в данную монографию включена глава о структуре турбулентности, характерных значениях ее интенсивности и методах определения параметров, ответственных за возникновение флуктуаций в световой волне.

СТРУКТУРА ПОЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ
ПРЕЛОМЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

§ 1. СЛУЧАЙНЫЕ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ

Помехи, возникающие при распространении света в турбулентной атмосфере, имеют случайный характер. Изменения амплитуды или фазы световой волны, интенсивности света и т. д. описываются случайными функциями координат и времени.

На рис. 1.1 приведена осциллограмма интенсивности света $I(t)$, полученная на приземной трассе при расстоянии 1750 м между приемником и источником света. На этом рисунке хорошо видна сложная зависимость $I(t)$ от времени t . Однако для случайной функции характерна не сложная зависимость от аргумента (в приведенном примере — от времени), а то, что при заданном аргументе эта функция может принимать те или иные значения с определенной вероятностью. Поэтому для количественного описания случайных функций обычно пользуются распределением вероятностей.

Наиболее простым для рассмотрения является пример случайной функции f одного переменного, скажем времени t . Для каждого момента t можно указать вероятность $d\mathcal{P}_t$ того, что значение $f(t)$ заключено в пределах $f_1 \leq f(t) < f_1 + df_1$. Вероятность $d\mathcal{P}_t$ для рассматриваемых в данной книге случайных функций может быть записана в виде

$$d\mathcal{P}_t = P_t(f_1)df_1.$$

Функция $P_t(f)$ является детерминированной функцией двух переменных t и f_1 и называется плотностью вероятности. Плотность вероятности $P_t(f)$ дает исчерпывающее описание случайной функции $f(t)$ для произвольного одного момента времени t и удовлетворяет условиям нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} P_t(f)df = 1$ при всех t и $P_t(f_1) \geq 0$.

Если известна плотность вероятности, то может быть вычислено среднее значение функции от случайной функции по формуле

$$\langle F[f(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F[f(t)] P_t(f) df. \quad (1.1)$$

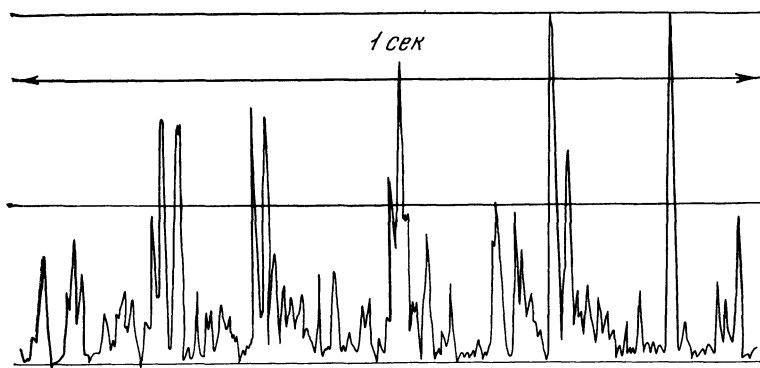


Рис. 1.1. Флуктуации интенсивности излучения в турбулентной атмосфере

Угловые скобки в (1.1) означают статистическое усреднение, определяемое формулой (1.1).

Нахождение плотности вероятности, как правило, представляет собой весьма сложную задачу, и поэтому для описания случайной функции обычно используют моменты распределения $M_i^{(n)}(f)$, которые определяются следующим образом:

$$M_i^{(n)}(f) = \langle (f(t))^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^n P_t(f_1) df_1. \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что первый момент есть среднее значение случайной функции

$$M_i^{(1)}(f) = \langle f(t) \rangle.$$

Дисперсия σ выражается через первый и второй моменты:

$$\sigma_f^2 = \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle = M_i^{(2)}(f) - (M_i^{(1)}(f))^2.$$

В большинстве случаев оказывается удобным изучать отклонения случайной функции от ее среднего значения. При этом целесообразно ввести новую случайную функцию $\xi(t)$, определяемую равенством

$$\xi(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle.$$

Случайную функцию $\xi(t)$ можно рассматривать как флуктуации $f(t)$ относительно среднего значения $\langle f(t) \rangle$. Из (1.2) следует, что

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \sigma_\xi^2 = M_i^{(2)}(\xi) = \langle [\xi(t)]^2 \rangle.$$

Плотность вероятностей $P_t(f_1)$ не позволяет ничего сказать о поведении функции в два разных момента времени t_1 и t_2 . Для ответа на этот более сложный вопрос необходимо указать вероятность $d\mathcal{P}_{t_1 t_2}$ того, что значения $f(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 заключены в пределах $f_1 \leq f(t_1) < f + df_1$ и $f_2 \leq f(t_2) < f_2 +$

+ df_2 . Вероятность $d\mathcal{P}_{t_1 t_2}$ может быть записана через плотность вероятностей $P_{t_1 t_2}$:

$$d\mathcal{P}_{t_1 t_2} = P_{t_1 t_2}(f_1, f_1) df_1 df_2.$$

Двухточечная плотность вероятностей $P_{t_1 t_2}(f_1, f_2)$ является функцией четырех переменных и является значительно более полной характеристикой случайной функции $f(t)$, чем одноточечная плотность вероятностей $P_t(f_1)$. При необходимости можно рассмотреть плотность вероятности для большого числа моментов времени. Многоточечные распределения также удовлетворяют условиям нормировки и $P_{t_1 \dots t_n} \geq 0$ для всех значений аргументов.

В ряде приложений приходится иметь дело не с одной случайной функцией, а с несколькими: $f(t)$, $g(t)$ и т. д. Для описания совокупности этих функций приходится пользоваться совместным распределением вероятностей. Например, для двух функций $f(t)$ и $g(t)$ и для двух моментов времени t_1 и t_2 имеем:

$$d\mathcal{P}_{t_1 t_2} = P_{t_1 t_2}(f_1, g_1) df_1 dg_1. \quad (1.3)$$

Пользуясь (1.3), можно вычислить, например, моменты $\langle (f(t))^n \cdot (g(t))^m \rangle$:

$$\langle (f(t))^n (g(t))^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{t_1 t_2}(f_1, g_1) f_1^n g_1^m df_1 dg_1.$$

§ 2. СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СПЕКТРЫ

В радиофизике и радиотехнике для анализа собственных шумов аппаратуры (тепловые шумы, дробовой шум и т. д.) и некоторых видов помех широко применяется теория стационарных случайных функций [1]. Однако если попытаться применить результаты теории стационарных случайных функций к изучению помех атмосферного происхождения в оптическом диапазоне волн и тем более — к атмосферным процессам, вызывающим эти помехи, то мы столкнемся с существенными трудностями. Поясним это на примере реализации случайной функции времени — осциллографической записи температуры¹ воздуха (рис. 1.2). Эта запись, взятая на ограниченном интервале времени, показывает, что наряду с быстрыми изменениями температуры имеется некоторый «регулярный» ход. Однако если взять более длинную реализацию, то этот «регулярный» ход исчезнет, превратившись в беспорядочные флуктуации, и проявится более медленный, столь же «регулярный» ход. Опыт показывает, что определение средних значений по записям реализаций температуры — задача весьма сложная, поскольку результат усреднения сильно зависит от длительности используемой реализации. Поэтому для описания таких процес-

¹ Далее будет показано, что флуктуации температуры являются основной причиной оптической неоднородности атмосферы.

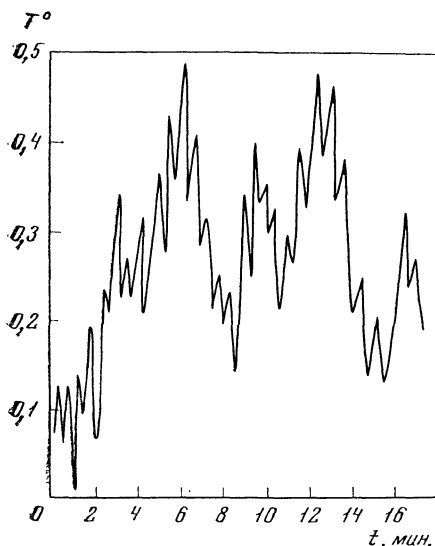


Рис. 1.2. Изменение температуры со временем

уже не является стационарной, так как уже ее среднее зависит от времени: $\langle f(t) \rangle = \langle a \rangle t$. Если даже $\langle a \rangle = 0$, то корреляционная функция $\langle [\xi(t) + at][\xi^*(t + \tau) + a^*(t + \tau)] \rangle = B_{\xi\xi}(\tau) + \langle |a|^2 \rangle t(t + \tau)$ зависит не только от τ , но и от времени t . Вместо случайной функции $f(t)$ (1.4) рассмотрим ее приращение за время T :

$$\Delta_T f(t) = f(t + T) - f(t). \quad (1.5)$$

Среднее значение $\langle \Delta_T f(t) \rangle$ зависит от времени T . Следуя А. Н. Колмогорову [2], можно обобщить понятие стационарных случайных функций, введя в рассмотрение случайные функции со стационарными приращениями. Таковыми являются случайные функции, для которых распределение вероятностей для разностей

$$f(t_1) - f(t_2), \quad f(t_3) - f(t_4) \quad \text{и т. д.} \quad (1.6)$$

не зависит от выбора начала отсчета времени.

Следовательно, разности (1.6) являются стационарными случайными функциями и к ним можно применять аппарат, развитый для стационарных случайных функций.

Однако как при теоретическом исследовании, так и в экспериментах для таких процессов удобнее пользоваться не корреляционными функциями, а структурными функциями

$$D_f(\tau) = \langle [f(t + \tau) - f(t)][f^*(t + \tau) - f^*(t)] \rangle \quad (1.7)$$

сов необходимо обобщить результаты, полученные для стационарных случайных функций, с учетом особенностей атмосферных процессов.

Введем в рассмотрение случайную функцию $f(t)$:

$$f(t) = \xi(t) + at, \quad (1.4)$$

где $\xi(t)$ — стационарная случайная функция, a — случайная величина, не зависящая от $\xi(t)$, т. е.

$$\langle a\xi(t) \rangle = 0.$$

Функция $f(t)$ (1.4) приближенно описывает (на ограниченном участке времени, разумеется) случайные флуктуации и «регулярный» ход, отмеченный выше, с учетом того, что и сам «регулярный» ход является случайным. Новая случайная функция

или для действительных случайных функций $f(t) = f^*(t)$, которые будут в основном рассматриваться в дальнейшем:

$$D_f(\tau) = \langle [f(t + \tau) - f(t)]^2 \rangle. \quad (1.8)$$

Структурные функции $D_f(\tau)$, как это видно из определения (1.8), являются средним квадратом приращения (1.6) и для случайных функций со стационарными приращениями играют ту же роль, что и корреляционные функции в теории стационарных случайных процессов. $D(\tau)$ — четная функция своего аргумента: $D(\tau) = D(-\tau)$.

Корреляционная функция $B_{\Delta f \Delta f} = \langle \Delta_{\tau} f(t) \Delta_{\tau} f(t + \tau) \rangle$ выражается через структурные функции. Преимущество использования структурных функций становится ясным из рассмотрения примера, в котором $f(t)$ — стационарная случайная функция, входящая, следовательно, в более широкий класс случайных функций со стационарными приращениями.

Из формулы (1.8) следует, что структурная функция в этом случае выражается через корреляционную

$$D_f(\tau) = 2 [B_{ff}(0) - B_{ff}(\tau)]. \quad (1.9)$$

Однако в отличие от вычисления корреляционных функций для вычисления структурной функции, как это видно из (1.8), нет необходимости вычислять среднее значение $\langle f \rangle$. Поэтому при обработке экспериментальных данных часто удобнее вычислять $D(\tau)$, чем $B(\tau)$, и переходить к $B(\tau)$ по формуле

$$\begin{aligned} B_{ff}(\tau) &= 1/2 [D_f(\infty) - D_f(\tau)], \quad D_f(\infty) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_f(\tau) = 2B_{ff}(0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В теории стационарных случайных процессов широко используются спектральные разложения корреляционных функций:

$$B_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{ff}(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$

где W_{ff} — спектральная плотность, или, короче говоря, спектр.

Для того чтобы построить спектры случайных функций со стационарными приращениями, перейдем в (1.9) к спектрам W_{ff} , воспользовавшись очевидным соотношением

$$D(\tau) = 4 \int_0^{\infty} (1 - \cos \omega \tau) W_{ff}(\omega) d\omega. \quad (1.11)$$

Формула (1.10) получена нами здесь из условия, что $f(t)$ является стационарной случайной функцией. Однако А. Н. Колмогоров показал, что соотношение (1.11) имеет более широкий смысл: его можно рассматривать как спектральное разложение структурной функции случайного процесса со стационарными приращениями. Спектр W_{ff} структурной функции $D_f(\tau)$ можно вычислить по

Формулам

$$W_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} D'(\tau) \sin \omega\tau d\tau, \quad (1.12)$$

$$W_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^{\infty} D''(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (1.13)$$

которые получаются из (1.11) однократным или двукратным дифференцированием с учетом четности $D(\tau)$. При вычислении спектров по (1.12) и (1.13) необходимо выбирать ту формулу, в которой интеграл сходится.

Формула (1.11) позволяет ввести в рассмотрение случайные функции, для которых спектры $W_{ff}(\omega)$ имеют неинтегрируемую особенность в нуле. Действительно, для сходимости в нуле интеграла $\sigma^2 = 2 \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega$, имеющего смысл полной мощности флуктуаций, было достаточно, чтобы $\omega W_{ff}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$. Для сходимости интеграла (1.11) в нуле достаточно, чтобы $\omega^3 W_{ff}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$. То обстоятельство, что для случайных функций со стационарными приращениями

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{ff}(\omega) d\omega$$

может расходиться, требует уточнения физического смысла $W_{ff}(\omega)$.

Для случайных процессов со стационарными приращениями на основе теории, развитой А. М. Ягломом [3], можно показать, что символическая запись

$$f(t) = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega t} - 1) \varphi_f(\omega) d\omega \quad (1.14)$$

имеет смысл, если считать, что $\langle \varphi(\omega) \rangle = 0$ и

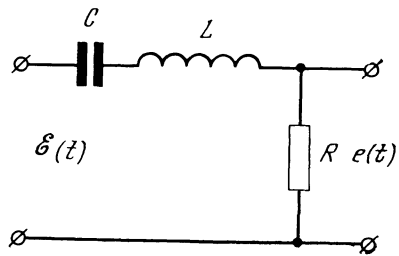
$$\langle \varphi_f(\omega) \varphi_f^*(\omega_1) \rangle d\omega d\omega_1 = \delta(\omega - \omega_1) W_{ff}(\omega) d\omega d\omega_1. \quad (1.15)$$

Со случайными спектрами $\varphi_f(\omega)$ можно обращаться как с обычными фурье-спектрами детерминированных функций, учитывая при усреднении формулы (1.15).

Подставляя (1.14) в (1.7) и принимая во внимание (1.15), получаем спектральное разложение (1.11) для случайных функций со стационарными приращениями.

Использование формул (1.11), (1.14), (1.15) дает возможность применять аппарат преобразований Фурье для анализа случайных функций со стационарными приращениями. Значение $W_{ff}(\omega)$ может быть получено из эксперимента. Для этого случайную функцию $f(t)$ необходимо пропустить через узкополосный фильтр

Рис. 1.3. Схема регистрации случайного напряжения



с центральной частотой ω и измерить среднюю мощность на выходе этого фильтра.

В качестве примера рассмотрим степенную структурную функцию

$$D(\tau) = C\tau^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (1.16)$$

Структурные функции типа (1.16) играют большую роль в описании турбулентности. Пользуясь формулой (1.12) для $0 < \alpha < 1$ и формулой (1.13) для $1 < \alpha < 2$, после замены переменной $\omega\tau = x$ получаем

$$W_{ff}(\omega) = \frac{C\alpha}{2\pi\omega^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \sin x \, dx, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$W_{ff}(\omega) = \frac{C\alpha(\alpha-1)}{2\pi\omega^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^{\alpha-2} \cos x \, dx, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Видно, что степенной структурной функции $D(\tau) = C\tau^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$) соответствует степенной спектр

$$W_{ff}(\omega) = A|\omega|^{-(\alpha+1)}; \quad A = \frac{\Gamma(1+\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{2\pi} C. \quad (1.17)$$

Определим теперь среднюю мощность на выходе узкополосного фильтра (рис. 1.3) с частотной характеристикой $h(\omega)$:

$$h(\omega) = \frac{i\omega/\omega_0}{Q\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + i\omega/\omega_0}, \quad \omega_0^2 = (LC)^{-1}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R},$$

на входе которого подается напряжение $\mathcal{E}(t)$, являющееся случайной функцией со стационарными приращениями со спектром вида

$$W_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\omega) = C\omega^{-(\alpha+1)}.$$

В силу (1.14) можно записать

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega t} - 1] \varphi_{\mathcal{E}}(\omega) d\omega.$$

Аналогично для выходного напряжения $e(t)$ имеем

$$e(t) = e(0) + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega t} - 1] \varphi_e(\omega) d\omega. \quad (1.18)$$

Случайный спектр $\varphi_e(\omega)$ связан со случайным спектром φ_g следующим соотношением:

$$\varphi_e(\omega) = \varphi_g(\omega) h(\omega). \quad (1.19)$$

Пользуясь (1.19) и (1.18) и учитывая соотношения (1.15) и (1.7), получаем выражение для структурной функции выходного напряжения $D_e(\tau) = \langle (e(t+\tau) - e(t))^2 \rangle$:

$$D_e(\tau) = 4 \int_0^{\infty} (1 - \cos \omega\tau) H(\omega) W_{gg}(\omega) d\omega, \quad (1.20)$$

где $H(\omega) = |h(\omega)|^2$.

Из (1.20) следует, что спектр $W_{ee}(\omega)$ равен

$$W_{ee}(\omega) = W_{gg}(\omega) H(\omega) = C |\omega|^{\alpha+1} \frac{\omega^2/\omega_0^2}{Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (1.21)$$

Формулы (1.20) и (1.21) дают решение задачи о прохождении случайной функции со стационарными приращениями $g(t)$ через линейный фильтр с частотной характеристикой по мощности $H(\omega) = |h(\omega)|^2$.

Для выяснения физического смысла $W_{gg}(\omega)$ рассчитаем $\langle (e(t))^2 \rangle$ при помощи формулы (1.21). Поскольку спектр W_{ee} не имеет неинтегрируемой особенности в нуле, $e(t)$ является стационарной случайной функцией и $\langle (e(t))^2 \rangle$ может быть вычислено по формуле

$$\langle (e(t))^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} W_{gg}(\omega) H(\omega) d\omega. \quad (1.22)$$

Проводя интегрирование в (1.22), получаем

$$\langle (e(t))^2 \rangle = \pi C \omega_0^2 \frac{\sin \left[\frac{\alpha}{2} \arccos \left(\frac{1-2Q^2}{2Q^2} \right) \right]}{\sin \left(\arccos \frac{1-2Q^2}{2Q^2} \right) \sin \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \pi \right]}. \quad (1.23)$$

Узкополосному фильтру соответствует $Q \gg 1$. Разлагая по малому параметру $1/2Q^2$ и отбрасывая члены порядка $1/Q^2$, находим

$$\langle (e(t))^2 \rangle = \pi C \omega_0^{-\alpha} Q^{-1}. \quad (1.24)$$

Введя полосу пропускания фильтра $\Delta\omega = \omega_0 Q^{-1}$, формуле (1.24) можно придать вид:

$$\langle (e(t))^2 \rangle = \pi C \omega_0^{-(\alpha+1)} \Delta\omega. \quad (1.25)$$

Из выражения (1.25) видно, что спектральную плотность $W_{ff}(\omega)$ можно рассматривать как мощность флуктуаций, приходящуюся на узкий интервал частот $\Delta\omega$ около частоты ω . В этом смысле спектры случайных функций как стационарных, так и со стационарными приращениями совпадает. Однако для случайных функций со стационарными приращениями интеграл по спектру уже не имеет смысла полной мощности флуктуаций. Расходимость этого интеграла вовсе не означает, что мощность флуктуаций бесконечна. Эта расходимость является следствием математической идеализации и связана с поведением структурной функции $D_f(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Вполне очевидно, что описание с помощью структурных функций и спектров тоже является приближенным и передает поведение физических объектов на не слишком больших интервалах времени τ . Для оценки верхней границы этого интервала необходимо привлекать дополнительные физические соображения. Большим интервалам времени τ для структурной функции соответствуют низкие частоты $\omega \sim 2\pi\tau^{-1}$ в ее спектре. Поэтому сказанное выше относительно больших интервалов времени τ в равной мере относится и к поведению спектров в области низких частот $\omega \sim 2\pi\tau^{-1}$.

Исключительным удобством использования спектрального анализа при экспериментальных исследованиях является то обстоятельство, что измерения спектра $W(\omega)$ с помощью набора узкополосных фильтров можно проводить одинаково как для стационарных случайных функций, так и для функций со стационарными приращениями, не прибегая, например, к вычислению средних значений, дисперсий, корреляционных функций. Напряжение на выходе правильно подобранного узкополосного фильтра является стационарной случайной функцией, и определение среднего квадрата ее не представляет затруднений.

Спектральный анализ позволяет установить характер случайной функции или, по крайней мере, основные ее особенности. Выбор параметров фильтра должен быть согласован с характером изучаемого процесса. В качестве примера неудачного выбора фильтра можно указать на фильтр, аналогичный изображенному на рис. 1.3, но в котором выходное напряжение снимается с конденсатора C . В этом случае определить средний квадрат напряжения на выходе фильтра для спектра (1.17) невозможно. Этот пример показывает, что при выборе параметров фильтров для анализа случайных процессов со стационарными приращениями необходимо уделять особое внимание их характеристикам в области низких частот. В частности, изложенный в этом параграфе аппарат позволяет довольно просто решить вопрос о выборе характеристик фильтров для анализа случайных функций.

В заключение этого параграфа вычислим связанную с конечным временем измерения T погрешность σ_T измерения $W_{ff}(\omega)$ с помощью узкополосного фильтра с полосой $\Delta\omega$, настроенного на частоту ω_0 . Напряжение на выходе такого фильтра $e(t)$ является

стационарной случайной функцией и может быть записано в виде

$$e(t) = \int \varphi_g(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Квадрат напряжения $\psi(t) = e(t)e^*(t)$ равен ¹

$$\psi(t) = \iint \varphi_g(\omega) \varphi_g^*(\omega_1) h(\omega) h^*(\omega_1) e^{i(\omega - \omega_1)t} d\omega d\omega_1.$$

Усредненное за интервал времени T значение $\psi_T(t)$ равно

$$\begin{aligned} \psi_T(t) &= \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} \psi(t) dt = \iint \varphi_g(\omega) \varphi_g^*(\omega_1) h(\omega) h^*(\omega) \times \\ &\times \frac{\sin \left[(\omega - \omega_1) \frac{T}{2} \right]}{(\omega - \omega_1) \frac{T}{2}} e^{i(\omega - \omega_1)t} d\omega d\omega_1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для вычисления $\langle \psi_T(t) \rangle$ можно воспользоваться (1.15), и тогда

$$\langle \psi_T(t) \rangle = \langle (e^2(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_g(\omega) H(\omega) d\omega.$$

В соответствии с определением ошибки σ_T вычислим

$$\sigma_T^2 = \langle (\psi_T)^2 \rangle - (\langle \psi_T \rangle)^2.$$

Для нахождения $\langle (\psi_T)^2 \rangle$ воспользуемся (1.26):

$$\begin{aligned} \langle (\psi_T(t))^2 \rangle &= \iiint \langle \varphi_g(\omega) \varphi_g^*(\omega_1) \varphi_g^*(\omega_2) \varphi_g(\omega_3) \rangle h(\omega) h^*(\omega_1) h^*(\omega_2) h(\omega_3) \times \\ &\times \frac{\sin [(\omega - \omega_1) T/2]}{(\omega - \omega_1) T/2} \frac{\sin [(\omega_2 - \omega_3) T/2]}{(\omega_2 - \omega_3) T/2} e^{i(\omega - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3)t} d\omega_3 d\omega_2 d\omega_1 d\omega. \end{aligned} \quad (1.27)$$

В (1.27) входит четвертый момент случайного спектра $\varphi_g(\omega)$. Если принять, что $\varphi_g d\omega$ является случайной функцией, распределенной по гауссовскому закону, с параметрами, даваемыми (1.15), то четвертый момент может быть выражен через вторые:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_g(\omega) \varphi_g^*(\omega_1) \varphi_g^*(\omega_2) \varphi_g(\omega_3) \rangle d\omega d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 &= \\ &= [\langle \varphi_g(\omega) \varphi_g^*(\omega_1) \rangle \langle \varphi_g^*(\omega_2) \varphi_g(\omega_3) \rangle + \langle \varphi_g(\omega) \varphi_g(\omega_3) \rangle \times \\ &\times \langle \varphi_g^*(\omega_1) \varphi_g^*(\omega_2) \rangle + \langle \varphi_g(\omega) \varphi_g^*(\omega_2) \rangle \times \\ &\times \langle \varphi_g^*(\omega_3) \varphi_g(\omega_3) \rangle] d\omega d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в (1.27) и выполняя интегрирование по двум

¹ $\varphi_g(t)$, $e(t)$ действительны, т. е. $e(t) = e^*(t)$, следовательно, $\varphi(\omega) = \varphi^*(-\omega)$, $h(\omega) = h^*(-\omega)$.

переменным, получаем

$$\langle \psi_T^2 \rangle - (\langle \psi_T \rangle)^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega_1 W_g(\omega) W_g(\omega_1) H(\omega) H(\omega_1) \times \\ \times \left[\left(\frac{\sin [(\omega + \omega_1) T/2]}{(\omega + \omega_1) T/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin [(\omega - \omega_1) T/2]}{(\omega - \omega_1) T/2} \right)^2 \right] d\omega d\omega_1. \quad (1.29)$$

В (1.29) можно вынести из-под знака интеграла значение $W_g(\omega)$, взяв его в точке $\omega = \omega_0$, так как фильтр $H(\omega)$ узкополосный. Для упрощения оценок примем, что

$$H(\omega) = 1 \quad |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2},$$

$$H(\omega) = 0 \quad |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2},$$

и введем новые переменные $\frac{\omega - \omega_0}{2} = z$, $\frac{\omega + \omega_0}{2} = y$. При этом вклад первого слагаемого в результат интегрирования (1.29) будет порядка $(\omega_0 T)^{-1}$ по отношению к вкладу второго слагаемого. Полагая, что не только $\omega_0 T \gg 1$, но и $T\Delta\omega \gg 1$, так что

$$\int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} \frac{\sin^2 zT}{z^2 T^2} dz \approx \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{T},$$

и отбрасывая первое слагаемое в квадратных скобках (1.29), получаем

$$\sigma_T^2 \approx \langle (\psi_T)^2 \rangle - (\langle \psi_T \rangle)^2 \approx 2\pi\Delta\omega \frac{W_{gg}^2(\omega)}{T},$$

что соответствует относительной ошибке δ , равной

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_T^2}{(\langle \psi_T \rangle)^2} \right)^{1/2}} \approx \left(\frac{2\pi}{T\Delta\omega} \right)^{1/2}. \quad (1.30)$$

Формула (1.30) дает возможность оценить ошибку экспериментального определения спектральной плотности $W_{gg}(\omega_0)$ при конечном времени измерения T с помощью фильтра с шириной полосы $\Delta\omega$. Из формулы (1.30) следует, что время спектрального анализа процесса со стационарными приращениями при заданной относительной ошибке δ определяется шириной полосы фильтра. Этот результат еще раз свидетельствует в пользу спектрального подхода при экспериментальном изучении случайных функций со стационарными приращениями.

Формула (1.30) имеет и более общий смысл.

Это можно пояснить, если учесть, что время $\tau_0 = 2\pi/\Delta\omega$ является характерным временем корреляции случайной функции

$\psi(t) = (e(t))^2$. Поэтому формулу (1.30) можно трактовать так, что ошибка, возникающая при замене статистического среднего (1.1) на среднее по времени (1.26), порядка $(\tau_0/T)^{1/2}$, где τ_0 — характерное время корреляции.

§ 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В предыдущем параграфе рассматривались случайные функции одной переменной. Однако в дальнейшем нам придется столкнуться также с изучением структуры оптических неоднородностей атмосферы, которые описываются случайными функциями трех координат и времени. В этом параграфе будет приведена сводка необходимых данных о методах описания таких случайных функций (случайных полей) с помощью пространственных корреляционных и структурных функций и спектров.

Для случайных полей можно обобщить понятие стационарных процессов. Рассмотрим сначала случайные поля $f(\mathbf{r}_1)$, не зависящие от времени, где \mathbf{r}_1 — радиус-вектор с координатами x_1, y_1, z_1 . Если распределения вероятностей для случайного поля $f(\mathbf{r}_1)$ не зависят от выбора начала координат, то такое поле называется однородным случайным полем. Аналогия между стационарными случайными функциями и однородными полями очевидна. Среднее значение однородного поля $\langle f(\mathbf{r}_1) \rangle$ — величина постоянная, и в дальнейшем будем рассматривать только флуктуации, т. е. отклонения от среднего значения, считая

$$\langle f(\mathbf{r}_1) \rangle = 0. \quad (1.31)$$

С учетом этого замечания корреляционная функция $B_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ выражается следующим образом:

$$B_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle f(\mathbf{r}_1) f^*(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (1.32)$$

Для однородного случайного поля корреляционная функция зависит только от вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, соединяющего точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Среди однородных полей можно выделить более узкий класс однородных и изотропных случайных полей, для которых корреляционная функция зависит только от расстояния между точками $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Для таких случайных полей корреляционная функция $B_{ff}(r)$ является функцией одной переменной и может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$B_{ff}(r) = 2 \int_0^{\infty} V_{ff}(\kappa) \cos \kappa r d\kappa. \quad (1.33)$$

$V_{ff}(\kappa)$ является одномерным спектром случайного поля $f(\mathbf{r})$. Однако более естественно пользоваться трехмерным разложением Фурье.

Случайная функция $f(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде спектрального разложения

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} d^3\mathbf{x} = f(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

которое имеет тот же смысл, что и (1.14), и корреляция $\Phi_f(\mathbf{x})$ определяется символическим равенством

$$d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}_1 \langle \varphi_f(\mathbf{x}) \varphi_f^*(\mathbf{x}_1) \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \Phi_{ff}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}_1, \quad (1.35)$$

где $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ — трехмерная дельта-функция Дирака, а $\Phi_{ff}(\mathbf{x})$ — трехмерный спектр случайного изотропного поля. Подставляя (1.34) в (1.32) и учитывая (1.35), получаем

$$B_{ff}(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} \Phi_{ff}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (1.36)$$

Учитывая, что $\Phi(\mathbf{x})$ зависит только от $|\mathbf{x}|$, в (1.36) можно, перейдя к сферическим координатам r, ϑ, φ , провести интегрирование по ϑ и φ и получить простое выражение:

$$B(r) = 4\pi \int_0^{\infty} \Phi_{ff}(x) \frac{\sin xr}{xr} x^2 dx. \quad (1.37)$$

Трехмерный спектр Φ_{ff} может быть вычислен обращением формулы (1.37) по Фурье. С учетом изотропности получаем

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin xr}{xr} B(r) r^2 dr. \quad (1.38)$$

Из (1.37) и (1.33) видно, что трехмерный и одномерный спектры связаны соотношением

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi x} \frac{dV(x)}{dx}. \quad (1.39)$$

Из (1.39) следует, что для изотропного случайного поля $f(\mathbf{r})$ одномерный $V_{ff}(x)$ спектр должен быть невозрастающей функцией волнового числа x , так как $\Phi_{ff}(x)$ неотрицательно. Для изотропного случайного поля можно ввести понятие внешнего масштаба L и внутреннего масштаба l_0 :

$$L = [B_{ff}(0)]^{-1} \int_0^{\infty} B_{ff}(r) dr, \\ l_0 = [-B_{ff}'(0)/2B''(0)]^{1/2}. \quad (1.40)$$

Масштаб L соответствует расстоянию, на котором сохраняется корреляция между флуктуациями. Масштаб l_0 характеризует изменчивость случайного поля на малых расстояниях и численно

равен длине отрезка, отсекаемого параболой, касающейся кривой $B(r)/B(0)$, на оси абсцисс.

Вычислим l_0 и L для корреляционной функции $B(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$, которая часто употребляется в различных модельных расчетах. Для этой корреляционной функции внешний и внутренний масштабы $L = a\sqrt{\pi/2}$ и $l_0 = a/\sqrt{2}$ очень близки, и поэтому она очень плоха для моделирования турбулентных полей в атмосфере, где, как правило, различие между внешним и внутренним масштабами очень велико.

Для случайных полей $f(\mathbf{r}, t)$, зависящих от времени, можно записать пространственно-временную корреляционную функцию:

$$B_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle f(\mathbf{r}_1, t_1) f^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (1.41)$$

Для изотропных в пространстве и стационарных по времени полей корреляционная функция (1.41) зависит только от расстояния между точками $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и временного сдвига $\tau = t_1 - t_2$:

$$B_{ff}(r, \tau) = \langle f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, t + \tau) f^*(\mathbf{r}_1, t) \rangle \quad (1.42)$$

и может быть представлена интегралом Фурье с неотрицательным четырехмерным спектром.

В исследованиях, связанных с влиянием турбулентности на распространение света, большую роль играют случайные поля, которые переносятся с постоянной скоростью \mathbf{u} , оставаясь пространственно неизменными — «замороженными» — в системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{u} . Это условие может быть количественно записано в следующем виде:

$$f(\mathbf{r}, t + t_1) = f(\mathbf{r} - \mathbf{u}t_1, t). \quad (1.43)$$

Для таких «замороженных» полей можно установить связь между пространственными и временными спектрами. В самом деле, воспользовавшись формулой (1.43), из (1.42) получим

$$\begin{aligned} B_{ff}(\mathbf{r}, \tau) &= \langle f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, t + \tau) f^*(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ &= \langle f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} - \mathbf{u}\tau, t) f^*(\mathbf{r}_1, t) \rangle = B_{ff}(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau, 0). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Но $B_{ff}(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau, 0)$ есть не что иное, как пространственная корреляционная функция (1.32). Поэтому можно записать

$$B_{ff}(\mathbf{r}, \tau) = B_{ff}(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau). \quad (1.45)$$

Корреляционная функция $B_{ff}(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau)$ может быть представлена разложением в интеграл Фурье (1.33)

$$B_{ff}(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau) = 2 \int_0^{\infty} V_{ff}(k) \cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau|) dk. \quad (1.46)$$

С другой стороны, при $r = 0$ корреляционная функция $B_{ff}(r, \tau)$, определенная в (1.42), совпадает с автокорреляционной функцией $B_{ff}(\tau)$. Сравнивая разложение Фурье для автокорреля-

ционной функции

$$B_{ff}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} W_{ff}(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

с разложением (1.46) при $r = 0$ и учитывая (1.45), получаем, что частотный спектр $W_{ff}(\omega)$ и одномерный пространственный $V_{ff}(\kappa)$ связаны между собой соотношением

$$W_{ff}(\omega) = \frac{1}{u} V_{ff}\left(\frac{\omega}{u}\right). \quad (1.47)$$

Пользуясь (1.39), можно выразить трехмерный спектр Φ_{ff} через частотный W_{ff} :

$$\Phi_{ff}\left(\frac{\omega}{u}\right) = -\frac{u^3}{2\pi\omega} \frac{dW_{ff}(\omega)}{d\omega}. \quad (1.48)$$

Формулы (1.47) и (1.48) имеют большое практическое значение, так как осуществить измерения частотных спектров значительно легче, чем пространственных, в то время как теоретически проще определить пространственную структуру случайного поля. Из (1.48) можно сделать вывод о том, что частотный спектр изотропного стационарного поля, для которого справедливо предположение о «замороженности» (1.43) и (1.45), является невозрастающей функцией частоты. Это следует из того, что функция $\Phi_{ff}(\omega/u)$ неотрицательна.

Естественным обобщением случайных функций со стационарными приращениями будут случайные локально однородные и локально изотропные поля. Для таких полей (в дальнейшем для краткости будем называть их локально изотропными) роль корреляционной функции выполняет структурная функция $D_f(\mathbf{r})$:

$$D_f(\mathbf{r}) = \langle (f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_1))^2 \rangle, \quad (1.49)$$

где $f(\mathbf{r})$ — действительно. Для локально изотропного поля $D_f(\mathbf{r})$ зависит только от расстояния между точками $r = |\mathbf{r}|$.

Для локально изотропного случайного поля можно написать разложение

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\mathbf{\kappa}\mathbf{r}} - 1) \Phi_f(\mathbf{\kappa}) d^3\mathbf{\kappa} + f(0), \quad (1.50)$$

которое имеет тот же смысл, что (1.14). Случайные спектры удовлетворяют условию (1.35). Подставляя (1.50) в (1.49), с учетом изотропности $\Phi(\mathbf{\kappa}) = \Phi(\kappa)$ получаем

$$D(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa. \quad (1.51)$$

Для структурной функции локально изотропного случайного поля может быть получено одномерное разложение

$$D(r) = 2\pi \int_0^{\infty} (1 - \cos \kappa r) V(\kappa) d\kappa. \quad (1.52)$$

Связь между спектрами $\Phi(\kappa)$ и $V(\kappa)$, даваемая формулой (1.39), справедлива и для локально изотропного поля. В качестве примера вычислим трехмерный спектр $\Phi_{ff}(\kappa)$ для структурной функции $D(r) = Ar^\alpha$. Пользуясь (1.17), для $V(\kappa)$ получаем

$$V(\kappa) = A \frac{\Gamma(1 + \alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{2\pi} \cdot \kappa^{-(\alpha+1)}.$$

Отсюда при помощи соотношения (1.39) находим трехмерный спектр

$$\Phi_{ff}(\kappa) = A \frac{\Gamma(2 + \alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{4\pi^2} \kappa^{-(\alpha+3)}. \quad (1.53)$$

Для пространственно-временных структурных функций в случае «замороженных» локально изотропных случайных полей из (1.43) и (1.39) получаем

$$D(\mathbf{r}, \tau) = D(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau). \quad (1.54)$$

Соотношения (1.47) и (1.48) остаются при этом в силе.

При анализе случайных полей лазерного излучения в атмосфере особый интерес представляют характеристики этих полей на плоскости, перпендикулярной направлению распространения света. Для описания свойств флуктуаций в плоскости $x = \text{const}$ в ряде случаев удобно использовать двумерные фурье-спектры, которые определяются следующим образом. Для однородного изотропного случайного поля $f(x, y, z)$ можно записать разложение

$$f(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\kappa_2, \kappa_3, x) \exp[i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)] d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (1.55)$$

которое имеет тот же смысл, что и (1.35):

$$\begin{aligned} \langle U(\kappa_2, \kappa_3, x) U^*(\kappa'_2, \kappa'_3, x') \rangle &= \delta(\kappa_2 - \kappa'_2) \delta(\kappa_3 - \kappa'_3) \times \\ &\times F(\kappa_2, \kappa_3 | x - x'), \\ \langle U \rangle &= 0 \quad \text{и} \quad F(\kappa_2, \kappa_3, x) = F(\kappa_2, \kappa_3, -x). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Корреляционная функция $B_f(x - x', y - y', z - z')$ выражается через $F(\kappa_2, \kappa_3, x - x')$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B_f(x - x', y - y', z - z') &= \iint_{-\infty}^{\infty} \cos[\kappa_2(y - y') + \kappa_3(z - z')] \times \\ &\times F(\kappa_2, \kappa_3, |x - x'|) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Для точек, взятых в плоскости $x = x'$, получаем выражение

$$B_f(0, \eta, \zeta) = \iint_{-\infty}^{\infty} \cos[\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta] F_f(\kappa_2, \kappa_3, 0) d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (1.58)$$

из которого следует, что $F_f(\kappa_2, \kappa_3, 0)$ является двумерным спектральным разложением корреляционной функции в плоскости $x = \text{const}$. Для нахождения связи между трехмерным спектром $\Phi_f(\kappa)$ и двумерным спектром $F_f(\kappa, \xi)$ следует, пользуясь (1.57), выразить $F_f(\kappa_2, \kappa_3, \xi)$ через $B_f(\xi, \eta, \zeta)$ и в полученном выражении записать $B_f(\xi, \eta, \zeta)$ в спектральном виде:

$$B_f(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \cos(\kappa_1 \xi + \kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta) \times \\ \times d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3.$$

Вычисления приводят к формулам:

$$F_f(\kappa_2, \kappa_3, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \cos(\kappa_1 \xi) d\kappa_1, \\ \Phi_f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\kappa_1, \kappa_2, \xi) \cos(\kappa_1 \xi) d\xi. \quad (1.59)$$

Полученные выше формулы могут быть обобщены на случай локально однородного поля, для которого структурная функция $D_f(0, \eta, \zeta)$ в плоскости $x = \text{const}$ выражается через двумерный спектр следующим образом:

$$D_f(0, \eta, \zeta) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \{1 - \exp[i(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)]\} F_f(\kappa_2, \kappa_3, 0) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (1.60)$$

Для локально изотропного поля $F_f(\kappa_2, \kappa_3, 0) = F_f(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}, 0)$, что дает возможность перейти в (1.60) к полярным координатам и вычислить интеграл по углу. В результате получается формула:

$$D_f(\rho) = 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa \rho)] F_f(\kappa, 0) \kappa d\kappa, \quad (1.61)$$

$$\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2, \quad \kappa^2 = \kappa_2^2 + \kappa_3^2.$$

Соотношения (1.59) справедливы и для локально изотропного поля. Воспользуемся ими для того, чтобы вычислить двумерный спектр для степенной структурной функции $D_f(r) = Ar^\alpha$. Под-

ставляя (1.53) в (1.59) и выполняя интегрирование, получаем

$$F(\kappa, x) = \frac{A}{\pi} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) 2^{\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{(\kappa x)^{1+\frac{\alpha}{2}} K_{1+\frac{\alpha}{2}}(\kappa x)}{\kappa^{\alpha+2}}. \quad (1.62)$$

Входящая в (1.62) функция Макдональда $K_\nu(z)$ при $z \gg 1$ экспоненциально затухает:

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad z \gg 1.$$

При малых $z \ll 1$ функция $K_\nu(z)$ ведет себя как степенная:

$$K_\nu(z) \sim z^{-\nu+1}, \quad z \ll 1.$$

Поэтому можно считать, что двумерный спектр (1.62) степенной структурной функции отличен от нуля в области $\kappa \lesssim x^{-1}$ и быстро убывает при $\kappa > x^{-1}$. Это свойство «остроты» двумерных спектров

$$F(\kappa, |x|) \rightarrow 0 \text{ при } \kappa |x| \gtrsim 1 \quad (1.63)$$

присуще трехмерным локально изотропным случайным полям и будет широко использовано в дальнейшем.

Отметим в заключение этого параграфа, что использование локально изотропных полей, равно как и случайных функций со стационарными приращениями, особенно плодотворно при рассмотрении флуктуаций метеорологических элементов: температуры, скорости ветра и т. д. Эти элементы оказываются часто очень близкими к стационарным и изотропным, если брать малые отрезки времени или небольшие объемы, и поэтому применение структурных функций дает их адекватное описание.

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

Фазовая скорость света в воздухе несколько меньше скорости света в вакууме c_0 :

$$c = c_0/n_\lambda.$$

Показатель преломления n_λ отличается от единицы лишь в четвертом знаке, поэтому для характеристики преломляющих свойств более употребительным является индекс рефракции

$$N_\lambda = (n_\lambda - 1) \cdot 10^6.$$

Для диапазона длин волн λ от 0,2 до 20 мкм индекс рефракции N_λ может быть рассчитан по формуле [4]:

$$N_\lambda = \frac{77,6P}{T} + \frac{0,584P}{T\lambda^2} - 0,06P_{в.п.} \quad (1.64)$$

по известным температуре $T^\circ\text{К}$, атмосферному давлению P , $mб$ и парциальному давлению водяного пара $P_{в.п.}$. Формула (1.64) дает относительную погрешность не более 0,3% для определения N_λ . Значение $N_\infty = 77,6 P/T$ для сухого воздуха и стандарт-

ных условий $P = 1013$ мб,
 $T = 288^\circ \text{К}$ равно

$$N_{0,\infty} = 273.$$

Зависимость $K(\lambda) = N_\lambda / N_\infty$ от длины волны для сухого воздуха приведена на рис. 1.4. Из этого рисунка видно, что зависимость показателя преломления от длины волны очень слабая.

Если учесть, что в земной атмосфере давление водяного пара не превышает 40—50 мб, а в средних широтах редко достигает 15—20 мб, то вклад водяного пара в показатель преломления в оптическом диапазоне волн 0,2—20 мкм невелик.

Формула (1.64) справедлива в «окнах прозрачности» атмосферы. В полосах и линиях поглощения показатель преломления может заметно отличаться от (1.64). В этих участках спектра наблюдается очень сильная зависимость оптических параметров воздуха от длины волны [5]. Молекулярное поглощение при расчете флуктуационных помех можно учесть, добавляя к индексу рефракции чисто мнимое слагаемое. Влияние поглощения на величину флуктуационных помех будет рассмотрено особо.

Из уравнения состояния идеального газа

$$P = \rho R_0 T / \mu, \quad (1.65)$$

где μ — молекулярный вес, ρ — плотность, R_0 — универсальная газовая постоянная, следует, что отношение P/T , входящее в (1.64), пропорционально плотности газа ρ . Последняя в атмосфере меняется по высоте, и с этим связано, например, такое явление, как регулярная рефракция. Однако нас в дальнейшем будут интересовать только беспорядочные флуктуации показателя преломления на фоне регулярного изменения показателя преломления с высотой.

Поскольку причиной возникновения флуктуаций показателя преломления является беспорядочное турбулентное перемешивание воздуха, то необходимо в самых общих чертах рассмотреть кинематику атмосферной турбулентности. Само по себе движение воздуха со скоростью u при отсутствии флуктуаций плотности, вообще говоря, приводит к изменению показателя преломления (явление Физо), но этот эффект изменения показателя преломления

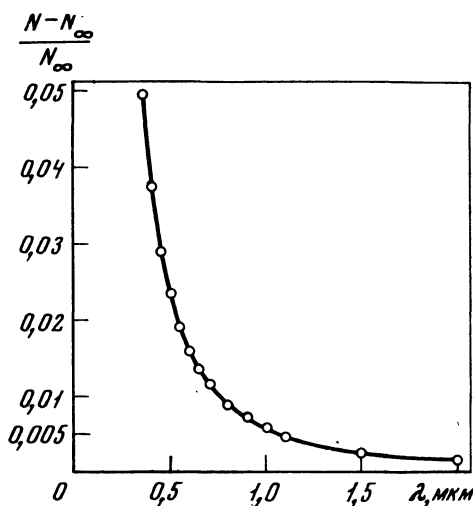


Рис. 1.4. Зависимость индекса рефракции от длины волны λ

имеет порядок $2uN \cdot 10^{-6}/c$, и для атмосферных скоростей он пренебрежимо мал.

В дальнейшем будет показано, что в атмосфере флуктуации индекса рефракции вызваны главным образом флуктуациями температуры; флуктуации давления практически можно не принимать во внимание. Пользуясь этим приближением, из (1.64) легко получить формулу, связывающую флуктуации показателя преломления (или индекса рефракции) $n' = n - \langle n \rangle$ с флуктуациями температуры $T' = T - \langle T' \rangle$. Для сухого воздуха из (1.64) следует:

$$N_\lambda - \langle N_\lambda \rangle = P (77,6 + 0,584\lambda^{-2}) [T^{-1} - \langle T^{-1} \rangle]. \quad (1.66)$$

В атмосфере относительные пульсации температуры T'/T очень малы ($T'/T \ll 1$). Это дает возможность пользоваться более простой, чем (1.66), приближенной формулой

$$n' \cdot 10^6 = N_\lambda - \langle N_\lambda \rangle = \frac{P}{\langle T \rangle} (77,6 - 0,584\lambda^{-2}) \frac{T'}{\langle T \rangle} = \langle N_\lambda \rangle \frac{T'}{\langle T \rangle}. \quad (1.67)$$

В оптике традиционным является использование показателя преломления. При исследовании распространения электромагнитных волн оказывается удобным электродинамический подход, для которого естественно описывать свойства среды диэлектрической проницаемостью ϵ . Поэтому в дальнейшем будут использоваться оба эти параметра. Связь между их флуктуациями очевидна и дается формулой (1.67a):

$$\epsilon' = 2 \cdot 10^{-6} (N_\lambda - \langle N_\lambda \rangle) = 2 \cdot 10^{-6} \langle N_\lambda \rangle \frac{T'}{\langle T \rangle}. \quad (1.67a)$$

§ 5. КИНЕМАТИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ И СТРУКТУРА ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Движение воздуха в атмосфере не похоже, скажем, на медленное течение вязкой жидкости в тонкой трубке. Течение в трубке можно представить как движение отдельных не смешивающихся струй. Эти струи можно сделать видимыми, если, например, ввести в жидкость окрашенные частицы. Такое движение жидкости, в котором не происходит перемешивание отдельных струй и скорость в выделенной точке постоянна или меняется регулярным образом, называется ламинарным. Для движения воздуха в атмосфере характерно то, что скорость в любой точке непрерывно меняется как по величине, так и по направлению. Эти изменения имеют беспорядочный, случайный характер. Кроме того, атмосферные движения приводят к интенсивному перемешиванию, что легко видеть, наблюдая, например, дымовые струи. Такое движение, в котором скорость беспорядочно изменяется и имеет место интенсивное перемешивание, называется турбулентным.

Хотя о наличии турбулентности и о резком различии турбулентного и ламинарного течений известно давно и уравнения движения, описывающие движение воздуха, входят во все учебники по гидроаэромеханике, полного решения задачи о возникновении и эволюции турбулентности нет и по сей день. Проблема турбулентности является одной из фундаментальных проблем физики, и наиболее подробное изложение ее можно найти в [6].

Тем не менее целый ряд особенностей турбулентного движения можно проанализировать, не решая уравнений движения. Прежде всего следует отметить, что движение воздуха в атмосфере происходит со скоростями u , значительно меньшими, чем скорость звука, и это дает возможность приближенно рассматривать это движение на основе уравнений движения несжимаемой жидкости. Физически это означает, что изменения давления, вызванные изменениями скорости, можно не учитывать.

Анализируя уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости, можно выделить члены, описывающие инерционные силы и силы, обусловленные вязкостью жидкости. Отношение этих сил для каждого типа течения характеризуется числом Рейнольдса:

$$Re = uL/\nu_m,$$

где u — характерная скорость, L — характерный размер потока, ν_m — кинематическая вязкость. Например, для течения в круглой трубе: L — ее радиус, u — скорость на оси; для приземного слоя атмосферы: L — высота над поверхностью земли, u — скорость ветра на этой высоте и т. д.

Многочисленные эксперименты показывают, что при малых числах Рейнольдса, когда вязкие силы играют определяющую роль, течение имеет ламинарный устойчивый характер. Однако при увеличении числа Рейнольдса до некоторого критического значения $Re_{кр}$ течение теряет устойчивый характер и переходит в турбулентное.

Так, например, для приземного слоя воздуха высотой $L = 2$ м характерные скорости порядка $1 \div 5$ м/сек, $\nu_m = 0,15$ см²/сек и числа Рейнольдса очень велики ($Re = 2,5 \div 7 \cdot 10^5$), так что движение сильно турбулизовано.

Турбулентное движение воздуха можно представить как совокупность большого числа переносимых ветром вихрей различного размера, начиная от самых больших, имеющих характерный масштаб L_0 , и кончая самыми мелкими, размером l_0 . Максимальный размер, или внешний масштаб L_0 , определяется потоком в целом. Например, для приземного слоя L_0 имеет порядок высоты наблюдения¹ z . Если число Рейнольдса $\Delta u_{L_0} L_0 / \nu_m$, где Δu_{L_0} — разница скоростей на расстоянии L_0 , велико, то такой вихрь оказы-

¹ В потоке могут присутствовать и более крупные вихри, однако при наблюдении на высоте z вихри с размерами, много большими z , будут восприниматься не как отдельные вихри, а как изменения потока в целом.

вается неустойчивым и под влиянием сил инерции распадается на более мелкие вихри, передав им свою кинетическую энергию. Этот каскадный процесс дробления будет продолжаться до тех пор, пока размер вихрей не приблизится к критическому l_0 , при котором дальнейшее дробление уже не будет происходить. Процесс каскадного дробления останавливается тогда, когда потери кинетической энергии, обусловленные наличием вязкости, начнут превалировать над передачей энергии еще более мелким вихрям. Естественно, что это будет происходить при числах Рейнольдса $\Delta u_0 l_0 / \nu_m$ порядка единицы, когда силы вязкости начнут играть определяющую роль. Масштаб l_0 называется внутренним масштабом.

Каскадный механизм передачи энергии не затухает потому, что существуют внешние источники энергии, поддерживающие средний поток, и энергия, почерпнутая крупными вихрями, после каскадного механизма передачи ее более и более мелким вихрям диссипирует в тепло в самых мелких вихрях. Скорость диссипации кинетической энергии, рассчитанная на единицу массы ϵ_K , является одной из важнейших характеристик незатухающего турбулентного потока. Размерность ϵ_K следует из определения

$$[\epsilon_K] = \text{см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}.$$

Следуя А. Н. Колмогорову, можно отметить, что в процессе дробления вихрей вследствие случайного его характера статистические свойства вихрей с масштабами $l \ll L_0$ после нескольких этапов дробления перестают зависеть от свойств потока в целом. Поэтому если число Рейнольдса потока велико, то, несмотря на анизотропию и неоднородность крупных вихрей, мелкие вихри будут статистически однородны и изотропны. Квазистационарный режим существования таких вихрей будет характеризоваться скоростью ϵ_K передачи энергии от более крупных вихрей к более мелким и для самых мелких вихрей кинематической вязкостью ν_m . Из параметров ϵ_K и ν_m можно единственным образом составить масштаб длины η_K :

$$\eta_K = \nu_m^{3/4} \epsilon_K^{-1/4}. \quad (1.68)$$

Величина η_K называется колмогоровским масштабом турбулентности. Если размеры или масштабы вихрей $l \gg \eta_K$, то для этих масштабов вязкость никакой роли не играет, и единственным параметром, определяющим статистическое описание вихрей с масштабами $l_0 \ll l \ll L_0$, будет скорость диссипации энергии ϵ_K . Внутренний масштаб l_0 совпадает по порядку величины с колмогоровским масштабом η_K .

Изложенное выше является содержанием двух гипотез А. Н. Колмогорова, которые позволяют сделать ряд конкретных заключений о структуре турбулентности. Отмеченные особенности турбулентного движения подготовили нас к мысли, что для описания турбулентного поля скорости необходим статистический

подход и что наиболее подходящим способом их описания является использование структурных функций и спектров.

А. Н. Колмогоров вывел формулу для структурной функции скорости:

$$D_v(r) = \langle (v_r(r_1 + r) - v_r(r))^2 \rangle = C (\varepsilon_K r)^{2/3}, \quad (1.69)$$

где v_r — проекция скорости ветра v на направление r . Формула (1.69) справедлива для $l_0 \ll r \ll L_0$ и выражает «закон двух третей».

А. М. Обухов, рассматривая независимо каскадную передачу энергии по спектру флуктуаций скорости, пришел к «закону пяти третей» для спектра

$$V_{vv}(k) = C_1 k^{-5/3} \quad (1.70)$$

для волновых чисел k , удовлетворяющих условию $L_0^{-1} \ll k \ll l_0^{-1}$. Из формулы (1.17) следует, что C и C_1 связаны простым соотношением. Интервал между внешним и внутренним масштабами турбулентности называется инерционным интервалом масштабов. Такое название ему дано потому, что поведение вихрей с размерами, лежащими внутри этого интервала, определяется в основном силами инерции. Самые мелкие вихри с масштабами $r \ll l_0$ относятся к вязкому интервалу диссипации.

Гипотезы, высказанные А. Н. Колмогоровым, позволяют сделать некоторые дополнительные заключения о виде структурных функций. Наравне с масштабом длины η_K можно ввести масштаб скорости

$$v_K = (v_m \varepsilon_K)^{1/4}. \quad (1.71)$$

В силу гипотезы подобия структурная функция $D_v(r)$ для $r = L_0$ и очень больших чисел Рейнольдса Re_{L_0} должна иметь вид

$$D_v(r) = v_K^2 \beta(r/\eta_K), \quad (1.72)$$

где $\beta(x)$ — универсальная функция своего аргумента, не зависящая от типа течения. Если принять, что при $r/\eta_K \gg 1$ $D_v(r)$ не должно зависеть от v_m , то из (1.69), (1.71) и (1.72) получается «закон двух третей» (1.69). Если рассматривать очень малые расстояния $r/\eta_K \ll 1$, то изменения скорости из-за наличия вязкости будут плавными и скорость $v_r(r + r_1)$ можно представить рядом Тейлора, ограничившись первыми членами,

$$v_r(r + r_1) \simeq v_r(r_1) + r \text{ grad } v_r. \quad \text{[(1.73)]}$$

Из (1.73) следует, что $D_v(r)$ при $r/\eta_K \ll 1$ будет пропорциональна r^2 . Более тонкие расчеты позволяют установить, что

$$D_v(r) = \varepsilon_K r^2 / 15 v_m (r \ll l_0). \quad (1.74)$$

Гипотезы о локальной структуре турбулентности были высказаны в 1941 г. В настоящее время накопился большой экспериментальный материал, надежно подтвердивший теоретические результаты А. Н. Колмогорова и А. М. Обухова. Следует подчерк-

нуть, что эксперименты проводились как в атмосфере на различных высотах (в приземном слое и на самолетах), так и в других типах течений — в океане, в трубах, за решеткой, в различных каналах и т. д. Подробная сводка и анализ экспериментальных данных, относящихся к проверке гипотез А. Н. Колмогорова для поля скоростей, содержится в [6]. Беспорядочное движение, присущее турбулентному потоку, приводит, как было отмечено выше, к интенсивному перемешиванию. Наиболее важные теоретические результаты в теоретическом исследовании турбулентных флуктуаций температуры были получены А. М. Обуховым [7] и А. М. Ягломом [8]. Рассмотрим здесь качественно механизм турбулентного перемешивания примеси, распределение которой является случайной функцией $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Примесь будем считать пассивной, т. е. ее присутствие никак не влияет на движение воздуха. Если в начальный момент $t = t_0$ создано начальное распределение $\Phi(\mathbf{r}, t_0)$ с резкими границами, то наряду с молекулярной диффузией на границе будет иметь место распыление созданного пятна за счет турбулентного перемешивания. Если начальные размеры пятна больше внутреннего масштаба турбулентности, то увеличение размеров пятна за счет турбулентности будет идти со скоростью, на несколько порядков большей, чем за счет диффузии. Однако для молекулярной диффузии и турбулентного перемешивания имеет место не только различие в скорости. В процессе каскадного дробления крупных вихрей первоначальное компактное пятно деформируется все сильнее и сильнее, и в результате создается сложная структура весьма запутанных слоев с сильно отличающимися значениями концентрации в соседних слоях. Молекулярная диффузия приводит к выравниванию концентрации и проявляется в основном на границах этих слоев. Эти два процесса можно представить себе как взаимно дополняющие. Турбулентный механизм перемешивания дробит крупные неоднородности распределения примеси на все более и более мелкие, как бы подготавливая их для диффузионного выравнивания концентрации. Диффузионное выравнивание концентрации происходит лишь в самых мелкомасштабных неоднородностях, которые из-за наличия вязкости выпадают из каскадного разрушения вихрей.

Температуру $T(\mathbf{r}, t)$ можно приближенно рассматривать как пассивную примесь; необходимые уточнения будут сделаны в следующем параграфе. Для температуры роль молекулярной диффузии выполняет молекулярная теплопроводность χ_m . Следуя А. М. Обухову [7], введем меру температурной неоднородности ¹

¹ В ряде зарубежных исследований меру температурных неоднородностей определяют величиной, вдвое большей, чем (1.75). Это приводит к тому, что значение ϵ_T оказывается вдвое больше, чем следует из определения, данного А. М. Обуховым [7]. При сравнении публикуемых в литературе данных следует обращать внимание на возможную разницу в два раза, возникающую из-за различия в определениях.

H объема V следующим образом:

$$H = \frac{\rho}{2} \int_V \langle (T(\mathbf{r}, t) - \langle T(\mathbf{r}, t) \rangle)^2 \rangle d^3 \mathbf{r}. \quad (1.75)$$

В процессе каскадного дробления вихрей при турбулентном движении внутри этого объема поле температур будет становиться все более и более пестрым, однако в отсутствие молекулярной теплопроводности величина H будет сохранять свое значение, так как отклонение температуры $T' = T - \langle T \rangle$ любой выделенной малой (т. е. малой по сравнению с внутренним масштабом) «жидкой частицы» будет сохранять свое значение при любых перемещениях. Иначе говоря, величина H в отсутствие молекулярной теплопроводности и внешних источников тепла обладает свойством консервативности и для поля температур может рассматриваться как аналог кинетической энергии для поля скорости. Молекулярная теплопроводность приводит к тому, что температура в объеме выравнивается и H убывает. Обозначим через ε_T скорость выравнивания температурных неоднородностей, отнесенных к единице массы. Из этого определения и (1.75) следует, что размерность ε_T следующая:

$$[\varepsilon_T] = \text{град}^2 \cdot \text{сек}^{-1}.$$

В случае, когда имеет место непрерывная генерация крупных неоднородностей температуры за счет внешних источников тепла, в среднем имеет место равновесие между увеличением меры неоднородности H и ее уменьшением за счет молекулярной теплопроводности, так что средняя скорость выравнивания температурных неоднородностей остается постоянной. При этом вследствие совокупного действия турбулентного перемешивания и молекулярной теплопроводности в вихрях с размерами больше внутреннего масштаба турбулентности происходит дробление температурных неоднородностей, а выравнивание температурных неоднородностей за счет молекулярной диффузии превалирует в самых мелких вихрях. Учитывая, что в потоке с большими числами Рейнольдса статистические свойства вихрей с размерами $l \ll L_0$ не зависят от свойств возбуждающего их потока, А. М. Обухов выдвинул гипотезу [7], что в турбулентном потоке параметры ε_T и χ_m , наряду с ε_k и ν_m , однозначно определяют статистические свойства разности температур. Следуя гипотезе А. М. Обухова, можно составить температурный масштаб:

$$T_0 = (\chi_m \varepsilon_T^2 \varepsilon^{-1})^{1/4} \quad (1.76)$$

и утверждать, что структурная функция поля температур $D_T(\mathbf{r}) = \langle (T(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) - T(\mathbf{r}_0))^2 \rangle$ с учетом локальной изотропности может быть записана в следующем виде:

$$D_T = T_0^2 f(r/\eta_k, Pr), \quad (1.77)$$

где f — универсальная функция, Pr — число Прандтля $Pr = \chi_m/\nu_m$ (для воздуха $Pr = 0,7$). Для масштабов $r \gg \eta_k$ (и числа Pr порядка единицы) молекулярные константы χ_m, ν_m не должны входить в структурную функцию (1.77). Следовательно, для $L_0 \gg r \gg \eta_k$ из (1.76) и (1.77) следует, что

$$D_T(r) = C_a^2 \epsilon_k^{-1/2} \epsilon_T r^{1/2}, \quad \eta_k \ll r \ll L_0, \quad (1.78)$$

где C_a — число, которое может быть определено из экспериментальных данных. Формула (1.78) является выражением «закона 2/3» Обухова для поля температур.

В области малых расстояний $r \ll \eta_k$, где определяющими являются молекулярная вязкость и температуропроводность, разность температур, пропорциональная расстоянию между точками. Из этого условия следует, что $D_T(r)$ пропорционально r^2 при $r \ll \eta_k$. Более тонкие расчеты [8] позволяют получить

$$D_T(r) = \frac{\epsilon_T}{3\chi_m} r^2, \quad r \ll \eta_k. \quad (1.79)$$

В дальнейшем изложении будет широко использоваться структурная характеристика поля температур C_T , определяемая следующим образом: $C_T^2 = C_a^2 \epsilon_T \epsilon_k^{-1/2}$. Из (1.78) следует

$$D_T(r) = C_T^2 r^{1/2}, \quad l_0 \ll r < L_0. \quad (1.80)$$

Из (1.36), (1.47) и (1.53) получаем выражение для спектра флуктуаций температуры в инерционном интервале при $\eta_k \ll l$:

$$V_{TT}(\kappa) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{2\pi} C_T^2 \kappa^{-5/3} \approx 0,125 C_T^2 \kappa^{-5/3}, \quad (1.81)$$

$$\Phi_{TT} = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{4\pi^2} C_T^2 \kappa^{-11/3} \approx 0,033 C_T^2 \kappa^{-11/3}. \quad (1.82)$$

Формула (1.81) является выражением «закона 5/3» для температуры. Пользуясь формулой (1.63), можно записать выражение для структурной функции поля показателя преломления:

$$D_n(r) = \langle (n(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) - n(\mathbf{r}_0))^2 \rangle = D_T(r) \cdot 10^{-12} \frac{\langle N \rangle^2}{\langle T \rangle^2}. \quad (1.83)$$

Из (1.80) и (1.83) следует, что $D_n(r)$ в инерционном интервале выражается следующим образом:

$$D_n(r) = C_n^2 r^{1/2}, \quad l_0 \ll r \ll L_0, \quad (1.84)$$

и структурная характеристика поля показателя преломления C_n «сухого воздуха» связана с C_T следующим соотношением:

$$C_n = \frac{10^{-6}}{T} \left(\frac{77,6 P}{T} + \frac{0,584 P}{T \lambda^2} \right) C_T = 10^{-6} N_{0,\infty} \frac{P}{1013} \frac{288}{T} K(\lambda) C_T, \quad (1.85)$$

где $N_{0,\infty} = 273$ — индекс рефракции сухого воздуха для радиоволн для стандартных условий $P = 1013$ мб и температуры 288° К. Зависимость $K(\lambda)$ задана графиком рис. 1.4.

Оценка влияния пульсаций влажности и давления на показатель преломления в оптическом диапазоне показывает, что они не играют существенной роли.

Теория, развитая А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуховым, позволила определить вид спектра турбулентности в инерционном интервале. Справедливость этой теории подтверждена многочисленными экспериментами, примеры которых будут приведены в следующем параграфе. Для описания спектра вне инерционного интервала в настоящее время достаточно разработанной теории нет. Отметим, что асимптотическая формула (1.78) для малых r/η_K не определяет вида спектра при больших κ . Действительно, при малых r в формуле

$$B(r) = \int_0^{\infty} V(\kappa) \cos \kappa r d\kappa$$

косинус можно представить разложением в ряд. Для $B(r)$ при $r \rightarrow 0$ получаем выражение:

$$B(r) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\kappa) \left[1 - \frac{(\kappa r)^2}{2} + \dots \right] d\kappa = \sigma^2 - \frac{r^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 V(\kappa) d\kappa + \dots,$$

из которого следует, что при $r \rightarrow 0$ структурная функция $D(r) = 2[B(0) - B(r)]$ имеет квадратичный характер при условии сходимости соответствующих интегралов.

Из формул (1.77), (1.82) следует, что в широком диапазоне волновых чисел, включающем инерционный и вязкий интервалы, спектр может быть представлен в виде

$$\Phi_{TT}(\kappa) = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{4\pi^2} C_{\Phi}^2 \varepsilon_K^{-1/3} \varepsilon_T \kappa^{-11/3} \varphi_3(\kappa \eta_K, Pr), \quad (1.86)$$

где φ_3 — универсальная функция, причем $\varphi_3(\kappa \eta_K, Pr) \rightarrow 1$ при $\kappa \eta_K \rightarrow 0$ и $\varphi_3(\kappa \eta_K, Pr) \rightarrow 0$ при $\kappa \eta_K \rightarrow \infty$. Из формул (1.86) и (1.48) следует, что одномерный спектр $V_{TT}(\kappa)$ может быть записан в виде

$$V_{TT}(\kappa) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{2\pi} C_{\Phi}^2 \varepsilon_T \varepsilon_K^{-3/4} \nu_M^{5/4} (\kappa \eta_K)^{-5/3} \varphi_1(\kappa \eta_K, Pr). \quad (1.86a)$$

В теории турбулентности сформулировано несколько различных гипотез [6, т. 2, § 22], на основании которых выведены асимптотические формулы, применимые при $\kappa \eta_K \gg 1$. Однако полученные асимптотические формулы сильно отличаются друг от друга, и пока ни одна из них не нашла достаточного экспериментального подтверждения.

Тем не менее для оценочных расчетов часто пользуются аппроксимациями спектра в высокочастотной области функциями

$$\varphi_3(x, 1) = \exp(-\gamma x^2) \quad (1.87)$$

и

$$\varphi_3(x, 1) = \frac{2 \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^{11/6} K_{11/6}(\gamma x)}{\Gamma(11/6)}, \quad (1.87a)$$

где $K_{11/6}(z)$ — функция Макдональда. Постоянная γ связана с универсальной постоянной C_a уравнением

$$\gamma^{1/3} = \text{const } C_a,$$

которое является следствием (1.79). Значение const зависит от выбора вида функции $\varphi_3(x)$. Для аппроксимации $\varphi_3(x)$ формулой (1.87) const = 0,281, а для (1.87a) — const \approx 1. Аппроксимация φ_3 какой-либо формулой определяет связь между произведением $\gamma \eta_k$ и внутренним масштабом l_0 , определяемым как точка пересечения асимптотик (1.78) и (1.79):

$$\gamma \eta_k = \kappa_m^{-1} = l_0/5,92$$

для (1.87) и

$$\gamma \eta_k = \kappa_m^{-1} = l_0/2,35$$

для (1.87a). Общепринятым значением C_a является $C_a = 2,8$.

В заключение этого параграфа упомянем, что для чисел Прандтля, сильно отличающихся от 1, в работах [9, 10] исследованы особенности поведения функции $\varphi_3(\kappa \eta_k, Pr)$ в вязком интервале.

Для проведения оценочных расчетов, в которых необходимо учитывать влияние внешнего масштаба, можно воспользоваться кармановским спектром турбулентности

$$\Phi_{TT} = 0,033 C_T^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad (1.88)$$

который переходит в колмогоровский (1.82) при $\kappa \gg \kappa_0$ и ограничен при $\kappa \rightarrow 0$. С волновым числом κ_0 может быть ассоциирован внешний масштаб турбулентности $L_0 = 2\pi/\kappa_0$, который по порядку величины близок к высоте над поверхностью земли для не слишком больших высот [11].

Наряду со спектром (1.88) можно ввести другую аппроксимацию спектра в области малых волновых чисел:

$$\Phi_{TT} = 0,033 C_T^2 \kappa^{-11/6} [1 - \exp(-\kappa/\kappa_0)^2], \quad (1.89)$$

которая оказывается удобной для выполнения аналитических расчетов флуктуаций в световых пучках. Несмотря на различие в поведении спектров (1.88) и (1.89) в области низких частот, им соответствуют сходные корреляционные функции. Необходимо, однако, помнить, что предположение о локальной изотропности и

даже о локальной однородности для масштабов, близких к внешнему, является чрезвычайно натянутым. Поэтому при расчетах, в которых существенную роль играет внешний масштаб, необходимо проявлять известную осторожность.

§ 6. МИКРОМЕТЕОРОЛОГИЯ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

В настоящее время достаточно полно разработана теория, описывающая микрометеорологию приземного слоя воздуха¹. Эта теория связывает микрометеорологические параметры — вертикальные профили температуры воздуха и скорости ветра — с параметрами, определяющими турбулентные флуктуации температуры и, следовательно, флуктуации показателя преломления. В этом параграфе будут изложены результаты, относящиеся к случаю, когда подстилающая поверхность достаточно однородная и ровная, например степь или пашня.

Теория термически расслоенной атмосферы наиболее полно была развита А. С. Монинным и А. М. Обуховым в [11, 12], и при изложении мы будем следовать этим работам.

Прежде всего сформулируем условия, при которых турбулентное перемешивание приводит к появлению флуктуаций температуры в некоторой точке на высоте z (высота отсчитывается от подстилающей поверхности) в термически расслоенной атмосфере в поле тяжести.

При анализе условий возникновения пульсаций температуры в термически расслоенной атмосфере необходимо учитывать, что статическое давление P зависит от высоты по закону

$$dP = -\rho g dz, \quad (1.90)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Как уже отмечалось в § 5, движение атмосферного воздуха можно рассматривать как движение несжимаемой жидкости. При наличии поля тяжести и изменении давления с высотой условие несжимаемости означает, что при малых скоростях, характерных для атмосферных движений, давление внутри выделенного движущегося объема выравнивается с окружающим и, следовательно, давление равно статическому и при наличии турбулентности. Отмеченное выше обстоятельство свидетельствует, что процессы, обусловленные молекулярной вязкостью и молекулярной теплопроводностью, идут гораздо медленнее, чем процессы, свя-

¹ Приземным называется слой, в котором при описании движения воздуха можно не учитывать влияния силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и считать, что касательное напряжение в слое постоянно и равно напряжению трения о подстилающую поверхность. Определенный таким образом слой имеет толщину от 20 до 200 м [13].

занные с турбулентностью, а это означает, что выделенный объем газа переходит с высоты z на высоту $z + dz$ адиабатически, без обмена теплом с окружающей средой. Уравнение адиабатического изменения температуры dT при таком переходе можно записать в следующей форме:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{P}, \quad (1.91)$$

где $\gamma = c_P/c_v$ — постоянная Пуассона, c_P и c_v — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и объеме. Подставляя в (1.91) dP из (1.90), учитывая уравнение состояния (1.65) и то, что для идеального газа $c_P - c_v = R/\mu$, получаем

$$dT = -\frac{g}{c_P} dz = \gamma_a dz. \quad (1.92)$$

Величина $\gamma_a = -g/c_P = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{K м}^{-1}$ называется адиабатическим градиентом. Это название дано потому, что если в термически расслоенной атмосфере средняя температура убывает с высотой с градиентом $d\langle T \rangle/dz = -\gamma_a$, то при вертикальном адиабатическом перемещении выделенного объема воздуха его температура не отличается от окружающей и флуктуаций температуры при вертикальном перемешивании не происходит. Таким образом, условием возбуждения флуктуаций температуры за счет турбулентного перемешивания в термически расслоенной атмосфере является неравенство

$$\frac{d\langle T \rangle}{dz} \neq -\gamma_a. \quad (1.93)$$

В приземном слое воздуха из-за нагрева солнцем днем и радиационного выхолаживания ночью практически всегда имеют место условия, при которых

$$\left| \frac{dT}{dz} \right| \gg \gamma_a. \quad (1.94)$$

Условие (1.94) дает возможность считать температуру консервативной примесью, т. е. не изменяющейся при перемещениях и диссипирующей только за счет молекулярной теплопроводности. Более строго следует считать консервативной примесью величину $\theta = T - \gamma_a z$, которая, как это видно из (1.92), не меняется при перемещении по вертикали.

Рассмотренный механизм возникновения турбулентных флуктуаций температуры за счет того, что крупные вихри в термически расслоенной среде генерируют крупномасштабные пульсации температуры, является основным в случае плоской однородной подстилающей поверхности, когда можно считать, что средняя температура зависит только от высоты. В случае неоднородностей рельефа, растительности и т. п. могут возникать местные перегревы или выхолаживания в горизонтальном направлении, которые

также приведут к появлению крупномасштабных неоднородностей и в результате каскадного дробления вихрей к дополнительным флуктуациям температуры. Однако теоретическое рассмотрение такой сложной картины в общем виде оказывается невозможным.

Приведенное качественное рассмотрение адиабатического перемещения воздуха позволяет сделать еще одно заключение о физических процессах при турбулентном перемешивании. При условии $d\langle T \rangle/dz = -\gamma_a$ не только не возникает пульсаций температуры, но и не происходит переноса тепла за счет турбулентного движения воздуха. Такие условия турбулентного обмена называются равновесными, и чуть ниже будет пояснен смысл этого определения. Если же вертикальный градиент температуры отличен от адиабатического, т. е. $dT_0/dz \neq \gamma_a$, то вертикальные перемещения воздуха приводят к переносу тепла, и, следовательно, для непрерывного поддержания потока тепла и существования пульсаций температуры необходимы источники тепла, например нагрет подстилающей поверхности солнечным теплом¹.

Турбулентное движение в приземном слое при равновесных условиях является наиболее простым для теоретического описания. Влияние термической стратификации на турбулентность будет в дальнейшем введено как дополнительная поправка. Определим наиболее существенные внешние параметры, определяющие распределение средней скорости $u(z)$ по высоте z в равновесных условиях. Если имеется стационарный, не зависящий в среднем от времени поток над ровной поверхностью, то внешним параметром, описывающим средние характеристики потока, будет напряжение трения τ_d , которое связано с торможением воздуха о подстилающую поверхность. Значение τ_d постоянно по высоте и численно равно силе, приложенной в горизонтальном направлении к единичной площадке подстилающей поверхности. Вертикальное распределение средней скорости ветра по высоте (в дальнейшем называемое профилем скорости ветра) будет зависеть как от высоты z над поверхностью, так и от эффективной шероховатости поверхности z_0 . Из параметров, характеризующих свойства воздуха, рассматриваемого здесь как несжимаемая жидкость, войдут плотность ρ_0 и кинематическая вязкость ν_m . При больших числах $Re = uz/\nu_m$ и $z \gg z_0$ движение будет чисто турбулентным и влиянием молекулярной вязкости и шероховатости можно пренебречь. При этом остаются только параметры ρ_0 , τ_d и z . Поскольку значение касательного напряжения зависит только от вертикального градиента средней скорости, а не от самого значения ее, то при развитаемом подходе следует рассматривать не среднюю скорость $u(z)$, а $du(z)/dz$. Из параметров ρ , τ_d и z можно составить единственную комбинацию $z^{-1}\sqrt{\tau_d/\rho}$, имеющую размерность градиента

¹ Поглощение солнечной радиации в воздухе настолько мало, что оно не играет существенной роли в тепловом балансе приземного слоя воздуха, начиная с высоты в несколько метров.

скорости. Следовательно, из соображений размерности

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{1}{\kappa_K z} \sqrt{\frac{\tau_d}{\rho}}, \quad (1.95)$$

где κ_K — постоянная Кармана, значение которой может быть получено из эксперимента. Формула (1.95) проверялась на экспериментах [14], которые дали хорошее согласие между независимыми измерениями $du(z)/dz$ и τ_d . Принятое сейчас значение постоянной Кармана $\kappa_K = 0,4$.

Интегрируя (1.95), получаем, что разность скоростей на двух высотах z_2 и z_1 равна

$$u(z_2) - u(z_1) = \frac{v_*}{\kappa_K} \ln(z_2/z_1), \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_d}{\rho}}. \quad (1.96)$$

Формулы (1.95) и (1.96) пригодны для высот, много больших высоты шероховатости z_0 . Из (1.96) видно, что v_* является характерным масштабом скорости. Величину шероховатости z_0 можно определить из свойств самого потока, если учесть, что

$$u(z) \gg u(z_0), \quad z \gg z_0. \quad (1.97)$$

Тогда, пользуясь (1.96) и (1.97), можно записать уравнение

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa_K} \ln \frac{z}{z_0}, \quad z \gg z_0, \quad (1.98)$$

которое позволяет определить значение z_0 .

Ниже приведены значения \bar{z}_0 для различных типов подстилающих поверхностей (см. [11]).

Тип поверхности	Стень	Море	Поле	Лес
z_0 , см	1—3	0,1—3	2—5	10—50

Для условий термического равновесия в приземном слое скорость диссипации энергии ϵ_K может быть вычислена по формуле

$$\epsilon_K = \frac{v_*^3}{\kappa_K z}, \quad z \gg z_0. \quad (1.99)$$

Таким образом, пользуясь (1.98), (1.96) и результатами измерений разности скоростей на двух высотах, можно определить интенсивность турбулентных пульсаций скорости ветра, характеризуемую структурной функцией (1.69), и оценить внутренний масштаб турбулентности по формуле (1.68).

В случае отсутствия термического равновесия необходимо учитывать влияние вертикальной температурной стратификации на турбулентное движение. Действительно, если $d\langle T \rangle/dz \neq \gamma_a$, то плотность выделенного объема воздуха ρ , перешедшего с высоты z на высоту $z + dz$, будет отличаться от плотности на этой высоте ρ_0 и, следовательно, дополнительно к силам вязкости и инер-

ции возникнут архимедовы силы плавучести, действующие на этот объем. Архимедова сила плавучести, действующая на единичный объем, равна

$$-g(\rho - \rho_0) = -g \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P (T - \langle T(z + dz) \rangle). \quad (1.100)$$

Знак в (1.100) взят с учетом того, что ускорение силы тяжести g направлено вниз. Используя уравнение состояния (1.65), из (1.100) получаем

$$-g(\rho - \langle \rho \rangle) = + \frac{g\rho}{T} (T - \langle T(z + dz) \rangle). \quad (1.101)$$

Отсюда следует, что для учета архимедовых сил плавучести нужно ввести параметр $g/\langle T \rangle$.

Температура T при адиабатическом перемещении с уровня z на уровень $z + dz$ равна $T = T(z) - \gamma_a dz$, и, следовательно, разность температур, входящая в (1.100), равна

$$T - T(z + dz) = - \left(\gamma_a + \frac{dT}{dz} \right) dz. \quad (1.102)$$

Из (1.102) и (1.100) видно, что если $d\langle T \rangle/dz < -\gamma_a$, то при перемещении объема вверх на dz возникает сила плавучести, действующая вверх в направлении смещения. Это означает, что термическая стратификация при $d\langle T \rangle/dz < -\gamma_a$ неустойчива и силы плавучести способствуют развитию турбулентности. При этом потенциальная энергия неустойчивой стратификации переходит в кинетическую энергию турбулентности.

Если имеет место условие $d\langle T \rangle/dz > -\gamma_a$, то силы плавучести, возникающие при вертикальных смещениях, препятствуют этим смещениям. Такая термическая стратификация называется устойчивой, она препятствует развитию турбулентности. При устойчивой стратификации часть кинетической энергии затрачивается на работу против сил плавучести.

Из изложенного становится очевидным, что для описания турбулентности в термически стратифицированном слое к параметрам τ_d , ρ , ν , z_0 необходимо добавить турбулентный поток тепла q_T , коэффициент температуропроводности χ_m , теплоемкость c_p и параметр g/T_0 , характеризующий силы плавучести.

В стационарных условиях, когда температура T_0 в приземном слое изменяется со временем незначительно, можно считать q_T постоянным в пределах приземного слоя. Молекулярная теплопроводность χ_m , равно как и кинематическая вязкость ν_m , существенно влияют на профили температуры и скорости ветра только в нижнем, тонком слое $z \lesssim z_0$. Таким образом, турбулентность на высоте $z \gg z_0$ будет зависеть от следующих параметров: ρ_0 , g/T_0 , τ_d и q_T . Из них единственным образом можно составить параметры: \mathcal{L} , имеющий размерность длины, и T_* , имеющий

размерность температуры:

$$\mathcal{L} = \frac{v_*^2}{\kappa_K^2 \frac{g T_*}{T_0}}, \quad T_* = -\frac{1}{\kappa_K v_*} \frac{q_T}{c_p \rho_0}. \quad (1.103)$$

В качестве параметра характерной скорости естественно взять $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. Постоянная Кармана κ_K введена в (1.103) по традиции, а знаки выбраны условно так, чтобы при неустойчивой термической стратификации, когда поток тепла q_T направлен вверх ($q_T > 0$), $T_* < 0$. Знак \mathcal{L} совпадает со знаком T_* . Естественно считать \mathcal{L} и T_* характерными масштабами длины и температуры.

Поскольку напряжение трения и поток тепла определяются градиентами скорости и температуры, то, исходя из соображений размерности, можно предположить, что вертикальные градиенты средней температуры $\partial T_0/\partial z$ и скорости $\partial u/\partial z$ выражаются как функции высоты z следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*}{\kappa_d \mathcal{L}} G\left(\frac{z}{\mathcal{L}}\right), \quad \frac{\partial T_0}{\partial z} = \frac{T_*}{\mathcal{L}} G_1\left(\frac{z}{\mathcal{L}}\right), \quad (1.104)$$

где $G(z)$ и $G_1(z)$ — универсальные функции. Для дальнейшего анализа удобнее ввести универсальные функции

$$\Phi_v(\zeta) = \zeta G(\zeta), \quad \Phi_T = \zeta G_1(\zeta). \quad (1.105)$$

Из (1.104) и (1.105) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*}{\kappa_d z} \Phi_v(\zeta), \quad \frac{\partial T_0}{\partial z} = \frac{T_*}{z} \Phi_T(\zeta). \quad (1.106)$$

Установим смысл введенного масштаба длины \mathcal{L} . Для этого рассмотрим случай, когда $q_T \rightarrow 0$. При этом условия стратификации стремятся к равновесным и $\mathcal{L} \rightarrow \infty$, а при фиксированном z $\zeta = z/\mathcal{L} \rightarrow 0$. Отсюда можно заключить, во-первых, что при $\zeta \rightarrow 0$ $\Phi_v(\zeta) \rightarrow 1$ — это следует из (1.106) и (1.95), а во-вторых, что безразмерный параметр $\zeta = z/\mathcal{L}$ характеризует отклонения от равновесной стратификации и влияние сил плавучести. Следовательно, $|\mathcal{L}|$ есть масштаб высоты, характеризующий толщину слоя (считая от подстилающей поверхности), в котором при рассмотрении турбулентного режима можно не учитывать силы плавучести и считать турбулентность чисто динамической. На высотах $z \gtrsim |\mathcal{L}|$ силы плавучести оказывают существенное влияние на турбулентное движение.

Помимо динамической турбулентности, в приземном слое довольно часто реализуются условия, близкие к свободной конвекции: $z/\mathcal{L} \rightarrow -\infty$, при которых кинетическая энергия турбулентности непрерывно генерируется за счет работы сил плавучести. Такой режим практически имеет место при слабом ветре и интенсивном прогреве земной поверхности солнечной радиацией. В этих условиях параметр v_* , связанный со средним течением, оказывается

несущественным, турбулентность определяется термическим расслоением, и для вертикального профиля температур справедлива формула

$$\frac{\partial T_0(z)}{\partial z} = -C \left(\frac{q_T}{c_p \rho_0} \right)^{1/3} \left(\frac{g}{T_0} \right)^{-1/3} z^{-1/3}, \quad (1.107)$$

в которой C — численная константа порядка единицы. Для условий свободной конвекции характерны большие флуктуации температуры.

Противоположный случай сильно устойчивой стратификации, который наблюдается, например, при слабом ветре и сильном выхолаживании подстилающей поверхности в ясные ночи, изучен теоретически и экспериментально значительно меньше. При умеренных значениях $z/L > 0$ вертикальный профиль температур приближенно описывается линейной функцией z/L . При наблюдении турбулентных пульсаций в приземном слое при устойчивой стратификации характерна заметная перемежаемость: чередование заметных пульсаций температуры с довольно продолжительными, весьма спокойными интервалами.

Изложенные выше основы теории турбулентного режима в термически расслоенном приземном слое дают представление о физических процессах турбулентного перемешивания. Помимо этого, изложенное позволяет наметить путь к получению результата, представляющего для нас основной интерес, т. е. к получению связи между сравнительно легко измеримыми средними $u(z)$ и $T_0(z)$ с характеристиками ϵ_T и ϵ_K , определяющими турбулентные пульсации. Для простейшего случая чисто динамической турбулентности связь между ϵ_K и вертикальным профилем ветра может быть получена из (1.99) и (1.96):

$$\epsilon_K = \frac{\kappa_K^2}{z} \left[\frac{u(z_2) - u(z_1)}{\ln z_2 - \ln z_1} \right]^3, \quad (1.108)$$

$$z_1 < z < z_2.$$

При наличии термической¹ стратификации ϵ_K и ϵ_T будут зависеть от внешних параметров: напряжения трения τ_d и турбулентного потока тепла q_T . Поскольку единственным масштабом длины является L , то естественно считать, что зависимость ϵ_K и ϵ_T от высоты над поверхностью характеризуется безразмерным параметром $\zeta = z/L$ [12]. Такой подход оказывается плодотворным, и на основе обработки данных независимых измерений q_T , τ_d , ϵ_K , ϵ_T удастся выяснить вид универсальных функций, с помощью которых можно определить характеристики пульсаций.

Для структурной постоянной C_T , представляющей наибольший интерес для дальнейшего, имеет место формула

$$C_T^2 = C_{\theta}^2 \epsilon_T \epsilon_K^{-1/3} = C_{\theta}^2 \kappa_K^4 T_*^2 z^{-2/3} \varphi_1 \left(\frac{z}{L} \right) \left[\varphi_2 \left(\frac{z}{L} \right) - z/L \right]^{-1/3}. \quad (1.109)$$

Несмотря на то что вид универсальных функций $\varphi_v(\zeta)$ и $\varphi_T(\zeta)$ установлен в настоящее время достаточно хорошо [6], пользоваться формулой (1.109) для расчетов C_T^2 неудобно, так как измерения турбулентного потока тепла q_T и напряжения трения τ_d очень сложны. Однако из формул (1.106) и (1.103) можно вывести соотношения, связывающие характеристики турбулентных пульсаций с легко измеримыми вертикальными профилями температуры и скорости ветра. Действительно, исходя из (1.103), (1.95), (1.96) и (1.106), можно получить уравнение, связывающее характеристику стратификации $\zeta = z/\mathcal{L}$ с вертикальными профилями:

$$\zeta \frac{\varphi_v(\zeta)}{\varphi_T(\zeta)} = \frac{g}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2}. \quad (1.110)$$

Справа в формуле (1.110) стоит число Ричардсона ¹

$$Ri = \frac{g}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2}, \quad (1.111)$$

характеризующее относительную роль термических и динамических факторов генерации кинетической энергии турбулентности. Число Ричардсона является мерой устойчивости и, как это следует из (1.110), выражается через ζ . Связь Ri и ζ установлена на основе обработки экспериментальных данных и приведена на рис. 1.5. Переход от ζ к Ri означает, таким образом, лишь замену универсальных функций в (1.109). Кроме того, если для вычисления T_* воспользоваться (1.106) с соответствующей заменой универсальной функции, то можно прийти к простой формуле

$$C_T^2 = C^2 a^2 (Ri) (\kappa_{Rz})^4 \left(\frac{\partial T_0(z)}{\partial z} \right)^2. \quad (1.112)$$

Входящие в формулу (1.112) постоянная C^2 и универсальная функция $a^2(Ri)$ были вычислены на основе независимых измерений C_T^2 и вертикальных профилей температуры и скорости ветра [6]. Значение постоянной $C^2 = 2,8$, а график функции $a^2(Ri)$ представлен на рис. 1.6.

Полученные формулы (1.109) и (1.112) позволяют установить общий характер зависимости C_T^2 от высоты и стратификации в приземном слое. Для условий, близких к равновесным ($|Ri| \ll 1$, $\left| \zeta = \frac{z}{\mathcal{L}} \right| \ll 1$), удобнее воспользоваться формулой (1.109). Как было отмечено выше, при $\zeta \rightarrow 0$ $\varphi_v(\zeta) \rightarrow 1$. Если учесть, что от

¹ Точнее говоря, число Ричардсона для термически расслоненной атмосферы определяется следующим образом:

$$Ri = \frac{g}{T_0} [\partial T / \partial z - \gamma_a] / (\partial u / \partial z)^2.$$

Но в приземном слое, как правило, $|\partial T / \partial z| \gg \gamma_a$, и формула (1.111) дает достаточно хорошее приближение.

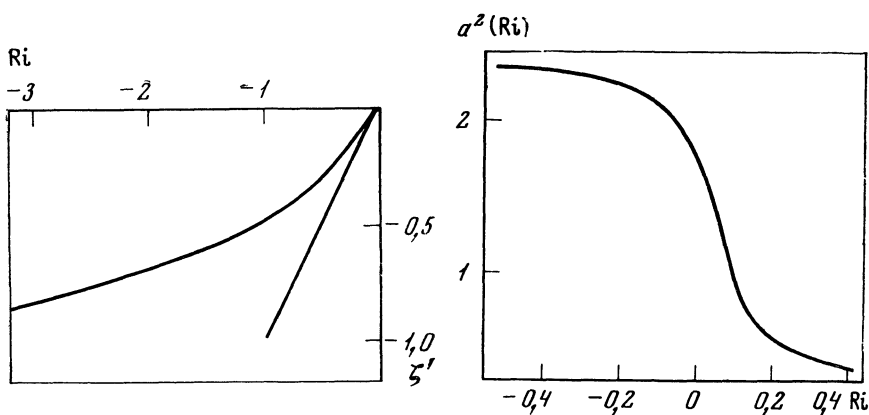


Рис. 1.5. Связь числа Ричардсона с параметром ζ'

Рис. 1.6. Универсальная функция $a^2(Ri)$

ношение $\varphi_v(\zeta)/\varphi_T(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow 0$ близко к единице, то из (1.109) следует, что при условиях, близких к равновесным, в приземном слое C_T^2 убывает с высотой, как $z^{-2/3}$. В случае свободной конвекции, практически начиная с $-Ri > 0, 1$, можно считать $a^2(Ri)$ постоянным. Тогда из (1.112) и (1.107) следует, что C_T^2 убывает с высотой быстрее — как $z^{-1/3}$.

Здесь необходимо отметить, что в предыдущем параграфе структурная характеристика поля температур C_T^2 считалась постоянной величиной. Это было следствием того, что скорость диссипации энергии ε и скорость выравнивания температурных неоднородностей ε_T , определяющие C_T^2 , полагались постоянными. В приземном слое, как и вообще в атмосфере, значения ε и ε_T являются медленно меняющимися функциями координат и времени. Простейшим примером, иллюстрирующим это обстоятельство, является хорошо проверенная на экспериментальных данных формула (1.99). Поэтому при исследовании распространения световых волн в атмосфере в условиях, когда основную роль играют малые неоднородности, следует описывать турбулентность атмосферы структурными функциями вида

$$D_f(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = \langle (f(\mathbf{r}_0) - f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}))^2 \rangle = C_f^2 \left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{r}}{2} \right) r^{2/3}, \quad r \gg l_0. \quad (1.113)$$

В формуле (1.113) значения структурной характеристики $C_f^2(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}/2)$ берутся в середине отрезка, соединяющего точки наблюдения. Формулы вида (1.113) будут достаточно хорошо описывать структуру турбулентности, если r удовлетворяет не только условию $r \ll \mathcal{L}_0$, но и $r \ll r_0$. Физический смысл такого подхода состоит в том, что внутри объема с характерным размером порядка

r и с центром в точке $r_0 + r/2$ значения ε и ε_T можно считать постоянными. Для временных структурных функций формулы, аналогичные (1.113), могут быть получены без труда.

Проведенный выше анализ влияния сил плавучести на турбулентные флуктуации ограничен, по существу, лишь рассмотрением изменений ε_T и ε . При таком подходе силы плавучести приводят лишь к изменению интенсивности пульсаций. Однако из-за термического расслоения в поле тяжести появляется выделенное направление вдоль ускорения силы тяжести. Поэтому гипотеза об изотропности и, следовательно, структура турбулентности требуют дополнительного уточнения. Вопрос о структуре турбулентности при наличии термического расслоения был рассмотрен А. М. Обуховым [15] и Больджано [16]. Результаты их анализа сводятся к тому, что влияние сил плавучести проявляется в изменении структуры турбулентных флуктуаций для масштабов $r > L_*$, где масштаб L_* определяется следующим образом:

$$L_* = \varepsilon^{3/4} (g/T_0)^{-1/2} \varepsilon_T^{-1/4}.$$

Оценка масштаба L_* для приземного слоя приведена ниже [15] (ξ — безразмерная высота). Из оценок видно, что влиянию сил плавучести подвержены крупномасштабные вихри, размер которых сравним с высотой.

$L_*, \text{ м}$	∞	3	1
ξ	0	1	5

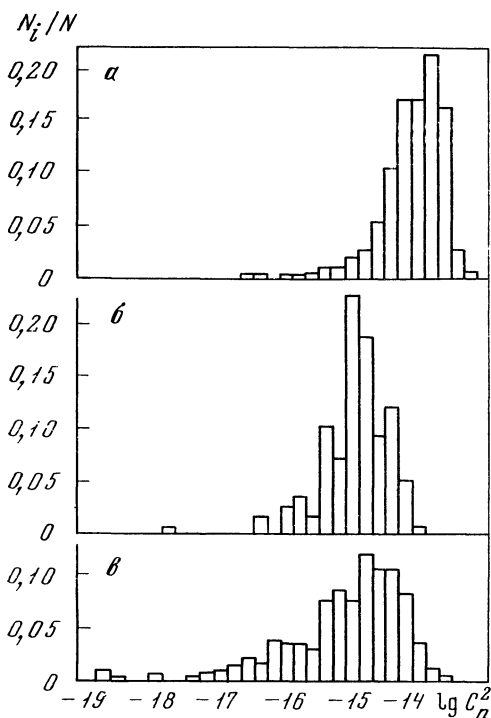
Для турбулентности свободной атмосферы, лежащей выше приземного слоя, удовлетворительной теории, связывающей характеристики пульсаций со средними параметрами течения, в настоящее время нет. Для свободной атмосферы характерны значительно меньшие вертикальные градиенты температуры и скорости ветра и большие значения внешних масштабов. Одной из характеристик турбулентного режима в свободной атмосфере является число Ричардсона. Учет влияния сил плавучести приводит к теории [17], позволяющей описывать структуру флуктуаций для масштабов $r \gg L_*$. Для описания мелкомасштабной турбулентности ($r \ll L_*$) в свободной атмосфере можно пользоваться формулами типа (1.113).

Отметим еще, что в условиях устойчивой стратификации причиной флуктуаций температуры могут быть внутренние волны [18].

Обычно экспериментальное определение C_T^2 проводится из измерения вертикальных профилей температуры и скорости ветра на основе формулы (1.112). При этом измерения температуры и скорости ветра проводят на нескольких уровнях, высоты которых обычно составляют геометрическую прогрессию. Такой выбор уровней обусловлен тем, что при условиях, близких к равновесным, вертикальные профили близки к логарифмическим (1.96). Для измерений средних значений скорости ветра используют, как

Рис. 1.7. Гистограмма $C_n^2 [см^{-2}]^2$ на высоте $z = 2,5 м$

- а — $Ri < 0$, 11 час 15 мин — 15 час 15 мин, $N = 596$ точек;
 б — $Ri > 0$, 19 час 15 мин — 23 час 45 мин, $N = 105$ точек;
 в — $Ri \approx 0$, 16 час 15 мин — 18 час 45 мин, $N = 262$ точки



правило, чашечные анемометры с дистанционными устройствами для отсчета числа оборотов вертушки; для измерений температуры — термометры сопротивления, причем обычно измеряются не значения температур на каждом уровне, а их разности по отношению к одному из уровней. Так как перепады температур по высоте невелики (они могут составлять несколько десятых или даже сотых на метр) по сравнению с изменением температуры воздуха в течение суток, необходимо обращать особое внимание на исключение возможных ошибок, обусловленных суточным ходом, радиационным нагревом от солнца и другими подобными причинами. Постоянная времени термометров для профильных термометров должна лежать в пределах 10—100 сек. Эмпирически установленное оптимальное время наблюдений заключено в пределах от 15 мин до 1 часа. Описание полуавтоматической установки для измерения вертикальных профилей температуры приведено в [19].

Для определения C_T^2 и измерений $T_0(z)$ и $u_0(z)$ необходимо вычислить по экспериментальным данным $dT_0(z)/dz$ и $du(z)/dz$. Операция дифференцирования экспериментальных данных может привести к значительным ошибкам. Для уменьшения ошибок, возникающих за счет дифференцирования, приходится использовать измерения на нескольких уровнях (от 5 и более), что позволяет аппроксимировать профиль плавной кривой. По вычислен-

ным вертикальным градиентам $dT_v(z)/dz$ и $du(z)/dz$ вычисляется число Ричардсона (1.111), а затем по формуле (1.112) и графику рис. 1.6 вычисляется значение C_T^2 . Метод определения C_T^2 из вертикальных профилей температуры и скорости ветра, предложенный в [20], несущественно отличается от изложенного выше.

Методика определения структурных характеристик C_T^2 из измерений вертикальных профилей температуры и скорости ветра достаточно проста, но применимость ее ограничена прежде всего требованием достаточной однородности подстилающей поверхности и отсутствия препятствий, которые могут существенно исказить характеристики турбулентности.

В работе [21] приведена гистограмма (рис. 1.7) значений C_n^2 , полученная в результате обработки измерений вертикальных профилей температуры и скорости ветра в Цимлянске в июле — августе с 1964 по 1969 г. Обработка велась с помощью формул (1.112) и (1.117) для длины волны $\lambda = 0,5$ мкм и высоты 2,5 м над поверхностью.

Таблица 1.1

Распределение значений структурной характеристики C_n^2 по времени суток

	$C_n^2, \text{см}^{-2/3}$				
	$0,2 \cdot 10^{-16}$	$0,25 \div 2,5 \cdot 10^{-16}$	$0,25 \div 2,5 \cdot 10^{-16}$	$0,25 \div 2,5 \cdot 10^{-16}$	$2,5 \cdot 10^{-16}$
День (11 ч 15 м — 15 ч 15 м)	0,2	0,8	12,2	83,5	3,4
Вечер (16 ч 15 м — 18 ч 45 м)	8,4	16,8	48,8	26,0	—
Ночь (19 ч 15 м — 23 ч 45 м)	1,0	10,5	69,6	19,0	—

В табл. 1.1 приведены значения C_n^2 , разбитые на группы по порядку величины и по времени суток. В таблице указан процент попадания значений C_n^2 в указанный интервал для каждого из отрезков времени.

Данные рис. 1.7 и табл. 1.1 позволяют оценить возможные значения C_n^2 для условий открытой и достаточно равной местности в летние месяцы в средних широтах. Оценка значений C_n^2 в приземном слое на высотах z , отличающихся от высоты измерений $z = 2,5$ м, может быть получена на основе указанных в § 7 асимптотических зависимостей: для $Ri < -0,1$ $C_n^2(z) \sim z^{-4/3}$, для $Ri \rightarrow 0$ $C_n^2(z) \sim z^{-1/3}$.

На рис. 1.8 приведены значения C_T , полученные из измерений флуктуаций температур над поверхностью океана [22]. Измерения

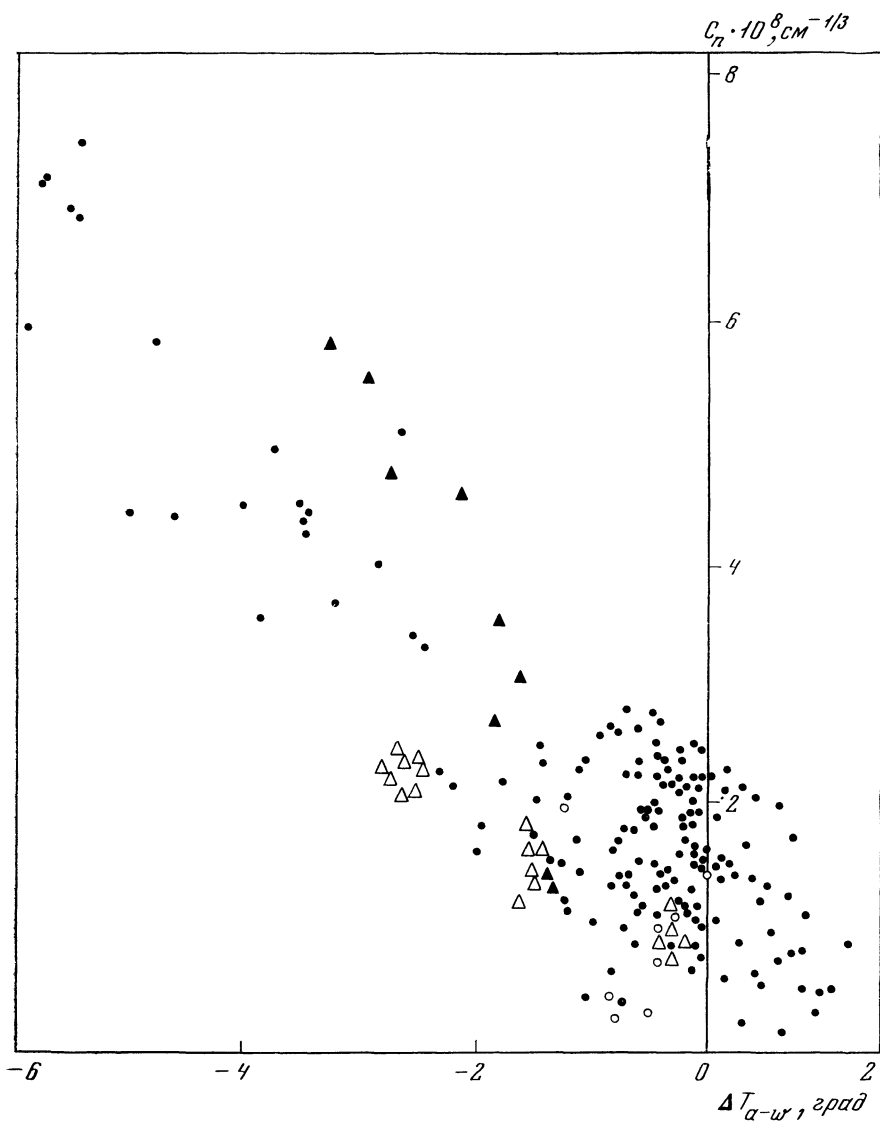


Рис. 1.8. Структурная характеристика флуктуаций температуры над морем как функция разности температур воды и воздуха ΔT_{a-w}

C_T^2 проводились на высотах 2 — 10 м над поверхностью. Результаты этих измерений представлены на графике в виде функции разности температур воздуха на высоте наблюдения и поверхности воды.

§ 7. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ;

В отличие от хорошо изученного (теоретически и экспериментально) приземного слоя (§ 1.6) сведения о турбулентности в свободной атмосфере (до высоты тропопаузы) в настоящее время представлены сравнительно немногочисленными экспериментальными данными. Известно [23—26], что спектр температурных микропульсаций, а следовательно, и флуктуаций показателя преломления в области масштабов волновых чисел ($10^{-5} \text{ см}^{-1} \lesssim \kappa \lesssim 10^{-1} \text{ см}^{-1}$) хорошо аппроксимируется в среднем степенным законом. Степенной характер спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости подтверждается экспериментальными зависимостями дисперсии флуктуаций интенсивности и дрожания изображений от зенитного угла [23], а также измерениями [27] спектров флуктуаций интенсивности лазерного излучения в высоких (до 10 км) слоях атмосферы.

Вертикальная и горизонтальная структура турбулентности в свободной атмосфере неоднородна. В частности, здесь существуют [18, 28—32] слои, которые характеризуются резкими градиентами скорости ветра и температуры, а в ряде случаев — наличием регулярных внутренних гидродинамических волн, являющихся источником энергии турбулентного перемешивания. Исследования спектров в таких слоях [33] показывают, что они также близки к степенным. Другой причиной вертикальной и горизонтальной неоднородности турбулентности в свободной атмосфере могут быть макромасштабные метеорологические явления.

Достаточно полные сведения о вариациях спектра флуктуаций температуры и показателя преломления атмосферы, учитывающие ее слоистую структуру и особенности, связанные с макромасштабными явлениями, в настоящее время отсутствуют. Поэтому будем считать, что в существенной для явлений распространения оптических волн области волновых чисел ($\kappa \gtrsim 10^{-5} \text{ см}^{-1}$) спектры флуктуаций показателя преломления описываются в инерционном интервале степенной зависимостью: $V(\kappa) \sim C_n^2 \kappa^{-3/2}$. Тогда единственным параметром, характеризующим турбулентные флуктуации показателя преломления, является структурная характеристика C_n .

Мы рассмотрим осредненные высотные зависимости $C_n^2(z)$ и попытаемся построить феноменологическую модель атмосферы относительно этого параметра. Основные экспериментальные дан-

ные, имеющиеся в настоящее время, относятся к структурной характеристике микропульсаций температуры C_T^2 . Для нахождения величины C_n^2 воспользуемся формулой (1.85) при $\lambda = 0,47$ мкм, подставив в нее значения температуры и давления, соответствующие стандартной атмосфере [4].

Наиболее полные статистически обоснованные данные о C_T^2 на высотах от 50 м до 5 км получены с помощью самолетных измерений [26, 34—37]. Здесь определялась спектральная плотность флуктуаций температуры $V_{TT}(\kappa)$ на фиксированной частоте $\kappa = 2\pi f_0/\bar{u}$, где f_0 — резонансная частота фильтра, подключенного к выходу термометра сопротивлений, \bar{u} — средняя скорость полета самолета. Величина $C_T^2(z)$ находилась по формуле (1.81). Данные измерений [26, 34—37] профилей структурных характеристик $C_T^2(z)$ приведены в [37]. Указанные в табл. 1.2 значения $C_T^2(50\text{ м})$ являются средними для высоты $z = 50\text{ м}$. Осредненные и нормированные на значение $C_T^2(50)$ профили представлены на рис. 1.9.

Все профили разделены на три группы: к первой группе отнесены случаи, когда C_T^2 почти не меняется с высотой, к третьей группе — случаи наиболее резкого падения $C_T^2(z)$ с ростом высоты и ко второй группе — промежуточные случаи. Здесь же изображены зависимости $C_T^2(z) \sim z^{-1/3}$ и $C_T^2(z) \sim z^{-2/3}$, соответствующие (§ 1.6) предельным режимам свободной конвекции и равновесной стратификации атмосферы. Оказалось, что форма вертикальных профилей $C_T^2(z)$ в большей степени определяется значениями $C_T^2(50)$, нежели градиентами температуры, временем года, типом подстилающей поверхности или наличием облачности. Это означает, что влияние приземного слоя атмосферы на форму вертикальных профилей $C_T^2(z)$ является превалирующим вплоть до высот в несколько километров. Влияние же других факторов, очевидно, проявляется через их воздействие на режим приземного слоя атмосферы. Полученные с использованием табл. 1.4 профили $C_n^2(z)$, соответствующие крайним кривым для каждой из групп рис. 1.9, показаны на рис. 1.10.

Результаты измерений структурной характеристики флуктуаций температуры в приземном слое (до высоты $z = 200\text{ м}$) с помощью микротермометров, подвешенных на тросе привязного аэростата, приведены в работе [38]. Осредненные данные этих измерений, полученные в Австралии в условиях безлесной равнины, приведены на рис. 1.10. Верхняя кривая относится к полуденным часам безоблачных летних дней. Средняя кривая соответствует вечерним часам (около 1 часа до заката солнца) ясных летних дней. Нижняя кривая описывает условия, наблюдающиеся в интервалах спокойного состояния атмосферы.

Данные хорошо обоснованных статистически измерений высотных профилей $C_T^2(z)$ с помощью микротермометров, помещенных

Таблица 1.2

Значение C_T^2 в атмосфере на высоте 50 м в зависимости от погодных условий

№ профиля	Время измерений (год, сезон, часы)	Тип подстилающей поверхности	Облачность	$\frac{\partial T}{\partial z} - \gamma_a$, °C/100 м	Число осредненных индивидуальных профилей	$C_T^2(50) \times 10^6$, °C ² см ⁻² /s
1	1966 — лето 01—04	Равнина	Безоблачно	0,2	2	1
2	1970—71 — зима 10—17	»	—	0,5	4	2,0
3	1970—71 — зима, весна, осень 18—06	»	—	0,25	8	1,7
4	1966 — лето 12—19	Море	—	0,7	8	7,0
5	1970—71 — лето 11—21	»	—	0,4	10	12,7
6	1966 — лето 11—16	Равнина	4—8 баллов	—0,2	10	15,5
7	1970—71 — осень 11—18	»	—	0,23	10	22
8	1970—71 — лето 06—18	Пересеченная местность	—	0,02	23	38
9	1964 — лето 10—14	Равнина	—	—0,15	8	77
10	1970—71 — лето 06—18	»	4—6 баллов	0,25	11	106
11	1970—71 — лето 06—18	»	0—3 балла	0,2	19	116
12	1970—71 — весна 10—18	»	—	0,20	16	132
13	1961 — лето 10—14	»	—	0,3	6	280

на метеорологической мачте, в условиях равнинной местности Подмосковья приведены в работе [39]. Представленные на рис. 1.10 результаты этой работы являются средними по 14 сериям измерений, относящихся главным образом к условиям неустойчивой температурной стратификации. Из результатов [39] следует, что в нижнем слое атмосферы ($z \lesssim 50$ м) даже при неустойчивой темпера-

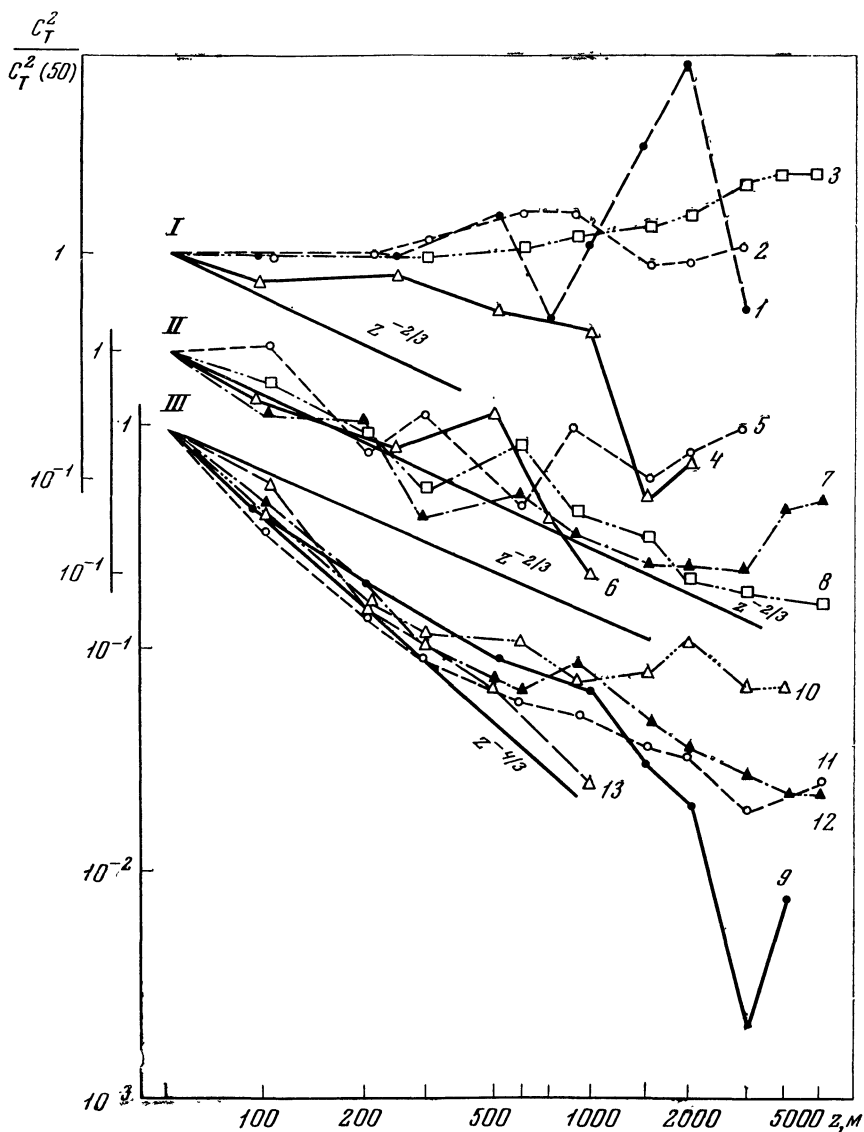


Рис. 1.9. Высотные профили структурной характеристики флуктуаций температуры по данным самолетных измерений

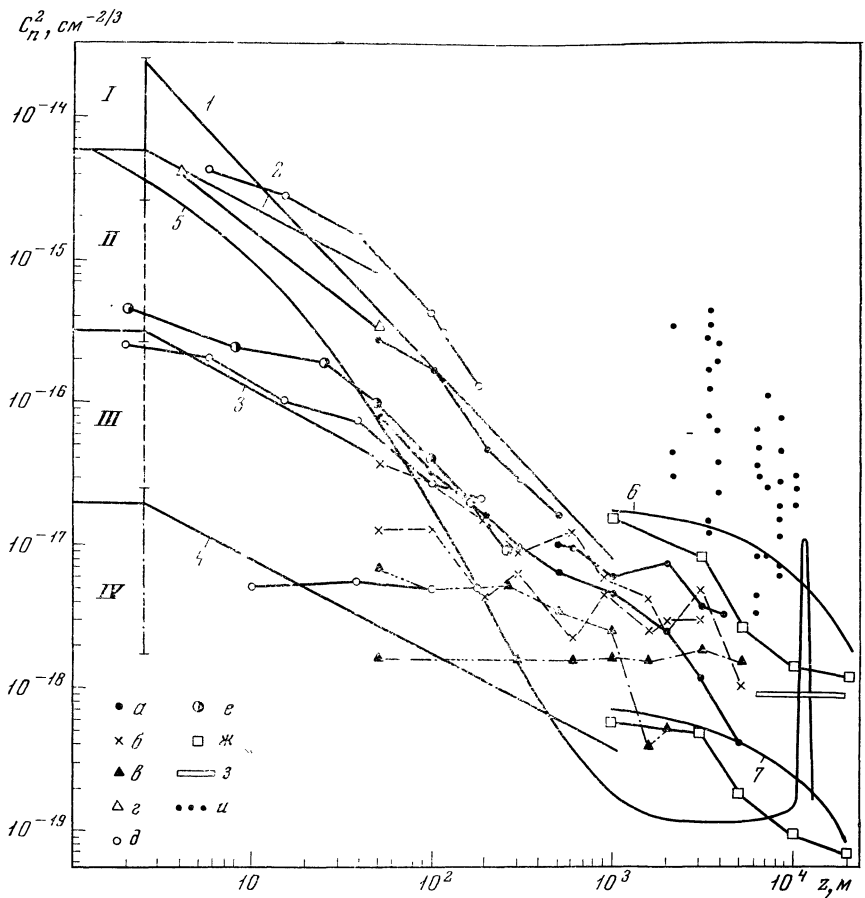


Рис. 1.10. Экспериментальные данные о высотном профиле структурной характеристики флуктуаций показателя преломления в атмосфере

α , β и ϵ — крайние кривые соответственно I, II и III групп данных [37] (рис. 1,9);
 γ — усредненные данные [40], полученные из одновременных наземных ($z = 4$ м) и самолетных ($z = 50$ м) измерений;

δ — измерения с помощью микротермометров сопротивлений, подвешенных на привязном аэростате [38];
 ϵ — данные, полученные на метеорологической вышке [39] из микропульсационных измерений температуры;

ζ — данные [29], полученные из измерений микропульсаций температуры на аэростате в свободном полете;

η — оценка C_n^2 из астрономических наблюдений [23];
 θ — самолетные оптические измерения [27];

1 — $C_n^2(z) \sim z^{-4/3}$;

2, 3, 4 — $C_n^2(z) \sim z^{-2/3}$;

5 — расчет [41] по данным о диссипации кинетической энергии;

6, 7 — $C_n^2 \sim \exp[-(z - z_2)/z_3]$

турной стратификации реализуется высотный профиль $C_n^2(z)$, близкий к закону $C_n^2(z) \sim z^{-2/3}$. Зависимость $C_n^2(z) \sim z^{-4/3}$ характерна для больших высот ($z > 50$ м).

Измерения, проведенные на земле ($z = 4$ м) [40] и с помощью самолета ($z = 50$ м) [36] над ровной степью на юге Европейской территории СССР, в условиях неустойчивой температурной стратификации дают зависимость (рис. 1.10) $C_T^2(z)$, близкую к закону $z^{-4/3}$.

Данные высотного зондирования $C_n^2(z)$, полученные с помощью микротермометров, поднимаемых аэростатом в свободном полете [29—31], показаны на рис. 1.10 в виде верхней и нижней границ разброса измеряемой величины. В области высот $1 \text{ км} \leq z \leq \leq 5 \text{ км}$ они удовлетворительно согласуются по порядку величины с результатами самолетных измерений [37]. Измерения [29—31] проводились над ровной полупустынной поверхностью в штате Нью-Мексико США.

Значения структурной характеристики на высотах $2 \text{ км} \leq \leq z \leq \leq 10 \text{ км}$, полученные из измерений [27] дисперсии флуктуаций интенсивности лазерного излучения, передаваемого с борта одного самолета на другой во время их совместного полета, оказываются, как видно из рис. 1.10, завышенными на один-два порядка по сравнению с данными зондирования микротемпературных пульсаций. Полеты реактивных самолетов [27] проводились в США над территориями штатов Техас, Луизиана, над Мексиканским и Зеленым заливами. Принимая во внимание, что оценки C_n^2 на этих высотах, полученные из наблюдений индекса мерцания звезд [23], по порядку величины согласуются с данными температурных микропульсаций [29, 37], последним, по-видимому, следует отдать предпочтение, как более надежным.

Из данных, приведенных на рис. 1.9, 1.10, видно, что значения C_n^2 убывают, как правило, с высотой, причем наиболее быстрое убывание наблюдается в нижнем слое толщиной 1 км.

Кривая δ на рис. 1.10 соответствует предложенной в [41] модели высотной зависимости структурной характеристики, которая основывается на расчетах $C_T^2(z)$ по градиентам средней температуры и скорости ветра в стандартной атмосфере и учитывает наличие высокотурбулизованного слоя в области тропопаузы ($z \sim \sim 10 \text{ км}$). Так как эта модель получила широкое распространение в работах зарубежных авторов по оптике атмосферной турбулентности, мы сочли необходимым показать ее соответствие реальным экспериментальным данным.

Вертикальными сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями, проведенными на уровне $z = 2,5$ м, на рис. 1.10 выделены взятые из табл. 1.3 интервалы значений C_n^2 у поверхности земли. Здесь же для сравнения экспериментальных данных с предельными профилями $C_n^2(z)$, наблюдаемыми в приземном слое, приведены зависимости $C_n^2(z) \sim z^{-2/3}$ и $C_n^2(z) \sim z^{-4/3}$.

Рассмотренные эмпирические результаты позволяют построить феноменологическую модель высотного профиля $C_n^2(z)$, взяв за основу предельные зависимости, характерные для приземного слоя (§ 1.6). Разобьем значения, наблюдаемые в приземном слое ($z_0 = 2,5$ м), на четыре группы:

- I. $C_{\epsilon_0}^2 > 5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^{-2/3}$;
- II. $5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^{-2/3} \geq C_{n_0}^2 > 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$;
- III. $3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2/3} \geq C_{n_0}^2 > 2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^{-2/3}$;
- IV. $2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^{-2/3} \geq C_{n_0}^2$.

Всю толщу атмосферы разобьем на три характерных слоя: 1) $z \leq z_1 = 50$ м; 2) $50 \text{ м} < z \leq z_2 = 10^3$ м; 3) $z > 10^3$ м. Тогда экспериментальные данные, представленные на рис. 1.10, удастся аппроксимировать следующими зависимостями:

$$\text{I. } C_n^2(z) = C_{n_0}^2 (z/z_0)^{-4/3}, \quad z_0 \leq z \leq z_2;$$

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_2) \exp [-(z - z_2)/z_3], \quad z > z_2. \quad (1.114)$$

$$\text{II. } C_n^2(z) = C_{n_0}^2 (z/z_0)^{-2/3}, \quad z_0 \leq z \leq z_1;$$

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_1)(z/z_1)^{-4/3}, \quad z_1 < z \leq z_2;$$

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_2) \exp [-(z - z_2)/z_3], \quad z > z_2. \quad (1.115)$$

$$\text{III. } C_n^2(z) = C_{n_0}^2 (z/z_0)^{-2/3}, \quad z_0 \leq z \leq z_2;$$

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_2) \exp [-(z - z_2)/z_3], \quad z > z_2. \quad (1.116)$$

$$\text{IV. } C_n^2(z) = C_{n_0}^2, \quad z_0 \leq z \leq z_2;$$

$$C_n^2(z) = C_{n_0}^2 \exp [-(z - z_2)/z_3], \quad z > z_2. \quad (1.117)$$

В формулах (1.114) — (1.117) в качестве эквивалентной высоты атмосферы взято значение $z = z_3 = 9$ км. Как видно из рис. 1.10, предлагаемое экспоненциальное убывание $C_n^2(z)$ в области $z > > 1$ км неплохо соответствует имеющимся опытным данным. В ряде случаев в практических расчетах статистических характеристик лазерного излучения применяются более простые модели высотной зависимости $C_n^2(z)$. В частности, в [42] использована высотная зависимость вида

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_0)(z/z_0)^{-2/3} \exp(-z/z_e), \quad z \geq z_0, \quad (1.118)$$

которая при соответствующем подборе величины «эффективной толщи» атмосферы z_e удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные рис. 1.10.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Р. Левин.* Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1957.
2. *А. Н. Колмогоров.* Докл. АН СССР, 1940, 26, № 1, 6—9.
3. *А. М. Яглом.* Успехи матем. наук, 1952, 7, № 5 (51), 3—168.
4. Справочник по геофизике. М., «Наука», 1965.
5. *В. Е. Зуев.* Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М., «Сов. радио», 1970.
6. *А. С. Монин, А. М. Яглом.* Статистическая гидромеханика. Т. 1. М., «Наука», 1965; 1967.
7. *А. М. Обузов.* Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1949, 13, № 1, 58—69.
8. *А. М. Яглом.* Докл. АН СССР, 1949, 69, № 6, 743—746.
9. *G. K. Batchelor, J. D. Howells, A. A. Townsend.* J. Fluid Mech., 1959, 5, № 1, 134—139.
10. *G. K. Batchelor.* J. Fluid Mech., 1959, 5, № 1, 113—133.
11. *А. С. Монин, А. М. Обузов.* Труды Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24 (151), 163—187.
12. *А. С. Монин.* Теория вероятности и ее применения, 1958, 3, № 3, 285—317.
13. *Дж. Ламли, Г. Пановский.* Структура атмосферной турбулентности. М., «Мир», 1966.
14. *А. С. Гурвич.* Труды ИФА АН СССР, 1962, № 4, 81—100.
15. *А. М. Обузов.* Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 9, 1392—1396.
16. *D. Boldjiano.* J. Geophys. Res., 1958, 63, № 4, 851—853.
17. *Г. Н. Шур.* Труды ЦАО, 1964, № 53, 43—55.
18. *R. W. Stewart.* Radio Sci., 1969, 4, № 12, 1269.
19. *Д. Ф. Тимановский.* «Метеорология и гидрология», 1971, № 4, 105—107.
20. *H. Panofsky.* J. Geophys. Res., 1968, 73, № 18, 6047—6049.
21. *М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1971, 7, № 1, 73—75.
22. *Ю. А. Волков, М. И. Мордухович.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1973, 9, № 6, 639—642.
23. *В. И. Татарский.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
24. *Л. Р. Цванг.* Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 8, 1252—1262.
25. *Л. Р. Цванг.* Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 11, 76.
26. *Л. Р. Цванг.* Изв. АН СССР, серия геофиз., 1963, № 10, 1594—1600.
27. *G. J. Morris.* J. Opt. Soc. Amer., 1973, 63, № 3, 263—270.
28. *H. Ottersten.* Radio Sci., 1969, 4, № 12, 1179—1193.
29. *J. L. Bufton, P. O. Minott, M. W. Fitzmanrice.* J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, № 9, 1068—1070.
30. *J. L. Bufton.* J. Atmospher. Sci., 1973, 30, № 1, 83—87.
31. *J. L. Bufton.* Appl. Optics, 1973, 12, № 8, 1785—1793.
32. *J. A. Lane.* Radio Sci., 1969, 4, № 12, 1111—1114.
33. *Yih-Ho-Pao.* Radio Sci., 1969, 4, № 12, 1315—1320.
34. *А. С. Гурвич, Б. М. Конров, Л. Р. Цванг, А. М. Яглом.* В кн.: Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М., «Наука», 1967, стр. 30—50.
35. *Ю. А. Волков, В. П. Кухарец, Л. Р. Цванг.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1968, 4, № 10, 1026—1041.
36. *L. R. Tsvang.* Radio Sci., 1969, 4, № 12, 1175—1177.
37. *Ф. Я. Войт, Е. С. Корниенко, В. П. Кухарец, С. Б. Хусид, Л. Р. Цванг.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1973, 9, № 5, 451—459.
38. *C. E. Coulman.* Solar Physics, 1969, 7, № 1, 122—143.
39. *Н. Л. Бызова, Э. Е. Вьяльцева.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1970, 6, № 11, 1209—1212.
40. *М. А. Каллистратова.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1966, 9, № 1, 50—56.
41. *R. E. Hufnagel.* In: «Restoration of Degraded Images». Vol. 2. Woods Hole, 1966, p. 15—18.
42. *В. Л. Миронов, С. С. Хмельцов.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 5, 743—750.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Как известно, распространение электромагнитных волн наиболее полно описывается уравнениями Максвелла для векторов напряженности электрического \mathcal{E} и магнитного полей \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathcal{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial (\varepsilon \mathcal{E})}{\partial t}, \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathcal{E}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь уравнения записаны для непроводящей среды без зарядов с магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Поскольку характерные частоты флуктуаций диэлектрической проницаемости ω обычно малы по сравнению с частотой колебаний электромагнитного поля ω_0 , в (2.1) удобно перейти к комплексным амплитудам $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t}, \\ \mathcal{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения Максвелла для величин \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik\mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ik\varepsilon\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}, \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0 \quad (k = \omega_0/c). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Воспользовавшись известными формулами векторного анализа, из системы (2.3) можно получить уравнение для напряженности электрического поля

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \varepsilon \mathbf{E} = -\nabla (\mathbf{E} \nabla \ln \varepsilon) - \frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что флуктуации диэлектрической проницаемости малы по сравнению с ее средним

значением:

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \tilde{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

$$\langle |\tilde{\varepsilon}| \rangle \ll \langle \varepsilon \rangle. \quad (2.6)$$

Кроме того, для рассматриваемых в дальнейшем задач можно с достаточным основанием полагать $\langle \varepsilon \rangle \simeq 1$. Условие (2.6) хорошо выполняется в реальной атмосфере, так как флуктуации диэлектрической проницаемости для световых волн имеют здесь порядок $\langle |\tilde{\varepsilon}| \rangle \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$. Закон распределения вероятностей для величины $\tilde{\varepsilon}$ во всех конкретных расчетах будет приниматься гауссовским, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Учитывая (2.5), уравнение (2.4) можно переписать в виде

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 (1 + \tilde{\varepsilon}) \mathbf{E} = -\nabla (\mathbf{E} \nabla \tilde{\varepsilon}) - \frac{2ik}{c} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Исходя из качественных соображений о характерных временах и масштабах изменения величин, входящих в уравнение (2.7), В. И. Татарский показал [1], что если выполнено условие

$$\frac{v}{c} \ll \tilde{\varepsilon} \quad (2.8)$$

(v — характерная скорость движения турбулентных неоднородностей, c — скорость света), то можно пренебречь вторым и третьим членами в правой части (2.7). Так как в реальной атмосфере условие (2.8) хорошо выполняется, для комплексной амплитуды электрического поля имеем

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -k^2 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} - \nabla (\mathbf{E} \nabla \tilde{\varepsilon}). \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) можно еще упростить, если пренебречь деполяризацией, обусловленной атмосферной турбулентностью. Для этого в (2.9) нужно опустить член $\nabla (\mathbf{E} \nabla \tilde{\varepsilon})$. Соответствующие оценки, показывающие правомерность такого подхода, даны в работе [2]. В этом случае векторное уравнение распадается на три одинаковых скалярных уравнения для компонент вектора \mathbf{E} . Обозначая любую из этих компонент через φ , приходим к стохастическому волновому уравнению

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -k^2 \tilde{\varepsilon} \varphi. \quad (2.10)$$

Основная трудность отыскания решения линейного уравнения (2.10) связана с тем, что входящая в него случайная функция от координат и времени $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$ является коэффициентом при искомой функции. Точное решение такой задачи неизвестно, и в дальнейшем мы будем применять те или иные приближенные методы, основанные на использовании различных малых параметров, возникающих в конкретных задачах.

§ 1. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Как указывалось выше, во всех рассматриваемых нами задачах присутствует малый параметр, связанный с малостью относительных флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}$. Это, однако, не означает, что все изучаемые в дальнейшем эффекты проявляются в незначительных искажениях первичной структуры волны, или, точнее, структуры, которую имела бы волна, распространяясь в однородной среде. В том случае, когда существенны эффекты многократного рассеяния, флуктуации могут становиться большими.

Простейшим приближенным методом, учитывающим малость $\tilde{\epsilon}$, является метод возмущений, примененный непосредственно к волновому уравнению (2.10).

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (2.11)$$

где φ_0 — поле невозмущенной волны, являющееся решением волнового уравнения в однородной среде

$$\Delta \varphi_0 + k^2 \varphi_0 = 0, \quad (2.12)$$

а φ_1 — малая поправка к φ_0 , так что

$$\left| \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right| \sim \langle |\tilde{\epsilon}| \rangle \ll 1.$$

Сохраняя в уравнении (2.10) члены первого порядка малости по $\tilde{\epsilon}$, получаем

$$\Delta \varphi_1 + k^2 \varphi_1 = -k^2 \tilde{\epsilon} \varphi_0. \quad (2.13)$$

Удовлетворяющее условиям излучения решение уравнения (2.13), как известно, имеет вид

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_v \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}') d^3r', \quad (2.14)$$

где интегрирование производится по объему, заполненному флуктуирующей средой. Это так называемое «приближение однократного рассеяния» (или, как иногда говорят по аналогии с квантовой механикой, «борновское приближение») не учитывает ослабления среднего поля из-за рассеяния (экстинкции) по мере проникновения волны в среду, так как $\langle \varphi_1(\mathbf{r}) \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \varphi_0(\mathbf{r})$.

Записывая поле падающей волны в виде

$$\varphi_0 = A_0 e^{iS_0} \quad (2.15)$$

и учитывая малость φ_1 , для логарифма амплитуды и фазы возмущенной волны находим

$$\ln \frac{A}{A_0} \equiv \chi = \operatorname{Re} \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad (2.16)$$

$$S_1 = S - S_0 = \operatorname{Im} \frac{\varphi_1}{\varphi_0}.$$

Как видно из формул (2.14) и (2.16), корреляционные моменты поля, а также его амплитуды и фазы выражаются через корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$B_{\varepsilon}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}'') \rangle.$$

Условия применимости приближения однократного рассеяния, записанные для амплитуды и фазы, имеют вид

$$\begin{aligned} \langle |\chi| \rangle &\ll 1, \\ \langle |S_1| \rangle &\ll 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для детального изучения границ применимости этого метода нужно исходить из интегрального уравнения, соответствующего (2.10):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (2.18)$$

Здесь G — функция Грина однородной среды:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.19)$$

Решая уравнение (2.18) итерациями, получаем ряд теории возмущений

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = &\varphi_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}') d^3r' + \\ &+ k^4 \int \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}'') \varphi_0(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}'') d^3r' d^3r'' - \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь $\varphi_0(\mathbf{r})$ — поле волны в отсутствие флуктуаций, а n -й член ряда, содержащий произведение значений случайного поля $\tilde{\varepsilon}$ в n точках, описывает n -кратное рассеяние. Из формулы (2.20) нетрудно видеть, что уже для вычисления среднего поля $\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle$ надо знать моменты поля $\tilde{\varepsilon}$ любого порядка.

Приближение однократного рассеяния соответствует удержанию в ряде (2.20) только первых двух членов. Это приближение может быть использовано для решения весьма широкого круга задач [3]. Границы его применимости определяются из требования малости отношения рассеянной энергии к энергии падающей волны. Для среды с одномасштабной корреляционной функцией вида

$$B_{\varepsilon}(\rho) = \langle \tilde{\varepsilon}(\rho_1 + \rho) \tilde{\varepsilon}(\rho_1) \rangle = \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle e^{-\varepsilon^2/l^2} \quad (2.21)$$

(l — характерный масштаб неоднородностей) условие применимости приближения однократного рассеяния¹ выглядит особенно просто:

$$\langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle kL \ll [kl(1 - e^{-2k^2l^2})]^{-1}. \quad (2.22)$$

Как видно из (2.22), малость флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$ еще не гарантирует применимости борновского приближения, так как при достаточно больших расстояниях L , проходимых волной в среде, метод перестает работать. Более того, ограничение (2.22) тем жестче, чем

больше kl , т. е. чем крупнее характерный масштаб неоднородностей по сравнению с длиной волны¹. Отсюда ясно, что метод малых возмущений малопригоден для описания распространения света в атмосфере, где выполняется условие $kl_0 \gg 1$. Физически это объясняется тем, что индикатриса рассеяния крупных (в масштабе длины волны) неоднородностей вытянута в направлении распространения волны и, следовательно, для распространения в зоне прямой видимости большую роль играют эффекты многократного рассеяния — переизлучения на большом числе неоднородностей.

Попытки «подправить» борновское приближение с учетом нескольких последующих членов ряда теории возмущений оказываются столь же трудоемкими, сколь и малоэффективными. Другой путь уточнения борновского приближения основан на приближенном суммировании бесконечного ряда теории возмущений. Обычно для этого используется метод диаграмм Фейнмана, заключающийся в следующем. Каждому члену итерационного ряда (2.20) ставится в соответствие по определенным правилам некоторая диаграмма. Затем анализируется относительная значимость вкладов, даваемых различными членами ряда, и производится суммирование бесконечной последовательности диаграмм, наиболее существенных для заданных условий распространения. Однако, несмотря на наглядность метода (анализу помогает рассмотрение топологической структуры диаграмм), процедура выделения существенных подпоследовательностей и особенно их суммирования оказывается зачастую весьма сложной. На наш взгляд, наиболее существенным результатом, достигнутым на этом пути, является обоснование в полевых терминах уравнения переноса излучения.

В интересующих нас задачах распространения света в атмосфере, как правило, существенны эффекты многократного рассеяния, так как длина волны оптического излучения λ намного меньше внутреннего масштаба турбулентности l_0 . Ниже мы рассмотрим различные приближенные методы решения стохастического волнового уравнения, основанные на использовании условия

$$\frac{\lambda}{l_0} \ll 1. \quad (2.23)$$

Эти методы соответствуют неявному суммированию той или иной бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений.

§ 2. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И МЕТОД ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Будем исходить из стохастического волнового уравнения (2.10):

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -k^2 \tilde{\epsilon} \varphi.$$

¹ Для турбулентной среды речь должна идти о величине параметра kl_0 , где l_0 — минимальный размер неоднородностей $\tilde{\epsilon}$, присутствующих в атмосфере.

Выберем ось x в направлении распространения невозмущенной волны и введем функцию $u(\mathbf{r})$, такую, что

$$\varphi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{ikx}. \quad (2.24)$$

Тогда функция $u(\mathbf{r})$ должна удовлетворять уравнению

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + [\Delta u] = -k^2 \tilde{\epsilon} u. \quad (2.25)$$

Пренебрегая в уравнении (2.25) членом $\partial^2 u / \partial x^2$, приходим к уравнению параболического типа

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta_{\perp} u = -k^2 \tilde{\epsilon} u, \quad (2.26)$$

где введено обозначение $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

Мы не будем здесь подробно останавливаться на обосновании возможности перехода от (2.25) к (2.26). Укажем только, что приближение параболического уравнения¹ достаточно хорошо описывает распространение света в турбулентной атмосфере в тех случаях, когда путь L , проходимый волной, значительно больше характерного масштаба неоднородностей l ($l \gg \lambda$). Отбрасывание $\partial^2 u / \partial x^2$ оправдано тем, что характер зависимости u от x определяется в основном членом $2ik (\partial u / \partial x)$. В самом деле, поле u заметно меняется на расстояниях порядка размера неоднородностей l , и, следовательно, $|\partial^2 u / \partial x^2| \sim u / l^2$. В то же время $|2ik (\partial u / \partial x)| \sim u / \lambda l$, и отношение этих двух членов имеет порядок $\lambda / l \ll 1$.

Параболическое уравнение для поля φ имеет вид

$$2ik \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Delta_{\perp} \varphi + 2k^2 \varphi + k^2 \tilde{\epsilon} \varphi = 0. \quad (2.27)$$

В дальнейшем мы будем исходить в основном из параболического приближения (2.27) и поэтому условимся использовать обозначения Δ и ∇ , всюду понимая под ними поперечные части операторов, за исключением специально оговариваемых случаев.

Введем теперь комплексную фазу Ψ по формулам

$$\Psi = \ln \varphi, \quad (2.28)$$

$$\Psi = \ln A + iS. \quad (2.29)$$

Подставляя в (2.27) $\varphi = e^{\Psi}$, приходим к уравнению для комплексной фазы:

$$2ik \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Delta \Psi + (\nabla \Psi)^2 + 2k^2 + k^2 \tilde{\epsilon} = 0! \quad (2.30)$$

(напомним, что здесь Δ и ∇ — поперечные части лапласиана и оператора «набла»).

Это уравнение, называемое уравнением метода плавных возмущений (МПВ), является нелинейным и так же, как и (2.27), не мо-

¹ Переход от (2.25) к (2.26) иногда называют в литературе [приближением «квазиоптики»].

жет быть решено точно. Заметим, что случайные функции φ и Ψ связаны нелинейным преобразованием (2.28). Поэтому, чтобы по моментам одной из них найти моменты другой, необходимо знать закон вероятностного распределения, который, как правило, неизвестен. В связи с этим при нахождении моментов амплитуды и фазы удобнее пользоваться уравнением (2.30), а при вычислении моментов поля (так называемых функций когерентности) следует исходить из уравнения (2.27).

Этот и следующий параграфы будут посвящены приближенному решению уравнения для комплексной фазы (2.30), а § 5 — уравнения для поля (2.26).

Будем искать решение уравнения (2.30) в виде ряда теории возмущений по степеням малого параметра $\tilde{\epsilon}$:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots, \quad (2.31)$$

где Ψ_0 соответствует волне в свободном пространстве; Ψ_1 — член первого порядка по $\tilde{\epsilon}$; Ψ_2 — второго и т. д.

Нетрудно видеть, что каждый член этого ряда эквивалентен бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений для поля (2.20). Действительно, согласно (2.28),

$$\varphi(\mathbf{r}) = \tilde{\epsilon} e^{\Psi(\mathbf{r})} = \varphi_0 e^{\Psi_0} e^{\Psi_2} \dots$$

Если даже пренебречь величинами Ψ_2, Ψ_3, \dots , то, разлагая $\exp(\Psi_1)$ в ряд по степеням Ψ_1 для поля φ , приходим к выражению

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) \left[1 + \Psi_1 + \frac{1}{2!} \Psi_1^2 + \dots \right],$$

которое описывает многократное рассеяние.

Выпишем уравнения для Ψ_0 и Ψ_1 :

$$2ik \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} + \Delta \Psi_0 + (\nabla \Psi_0)^2 + 2k^2 = 0, \quad (2.32)$$

$$\Psi_0(0, \rho) = \Psi^0(\rho) = \ln \varphi^0(\rho);$$

$$2ik \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \Delta \Psi_1 + 2\nabla \Psi_0 \nabla \Psi_1 + k^2 \tilde{\epsilon} = 0, \quad (2.33)$$

$$\Psi_1(0, \rho) = 0.$$

Уравнение (2.32) можно легко решить, если, например, вернуться к уравнению для поля $\varphi_0 = \exp(\Psi_0)$ и перейти к фурье-представлению по поперечным координатам. Для невозмущенного поля тогда имеем

$$\varphi_0(x, \rho) = \frac{k}{2\pi i x} e^{ikx} \int \varphi^0(\rho') \exp\left\{ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2x} \right\} d^2 \rho'. \quad (2.34)$$

Здесь и далее, когда специально не оговариваются пределы интегрирования, речь идет об интегрировании по всему пространству вектора ρ' . Формула (2.34) представляет собой формулу Кирхгофа, которая устанавливает связь между полем $\varphi^0(\rho')$ в начальной

плоскости $x = 0$ и полем в произвольной ¹ точке (x, ρ) . В частности, при падении на полупространство $x > 0$ плоской волны $\varphi^0(\rho') = A_0$ и невозмущенное поле в среде

$$\varphi_0(x, \rho) = A_0 \exp(ikx), \quad (2.35)$$

а при падении гауссовского пучка с плоским фазовым фронтом $\varphi^0(\rho') = A_0 \exp(-\rho'^2/2a^2)$, а

$$\varphi_0(x, \rho) = \frac{A_0}{1 + ix/ka^2} \exp \left\{ ikx - \frac{\rho^2}{2a^2(1 + ix/ka^2)} \right\}. \quad (2.36)$$

Получим теперь решение уравнения (2.33). Для этого перейдем к новой неизвестной функции $V(x, \rho)$:

$$\Psi(x, \rho) = e^{-\Psi_0(x, \rho)} V(x, \rho) = \frac{V(x, \rho)}{\varphi_0(x, \rho)} \quad (2.37)$$

и воспользуемся уравнением (2.32):

$$2ik \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta V + 2k^2 V + k^2 f(x, \rho) = 0, \quad (2.38)$$

где введено обозначение

$$f(x, \rho) = \bar{\epsilon}(x, \rho) \varphi_0(x, \rho). \quad (2.39)$$

Перепишем (2.38) в фурье-представлении, понимая преобразование Фурье от случайной функции $f(x, \rho)$ в оговоренном в § 2 главы I смысле:

$$2ik \frac{\partial g_V(x, \kappa)}{\partial x} + (2k^2 - \kappa^2) g_V(x, \kappa) + k^2 g_f = 0, \quad (2.40)$$

$$g_V(0, \kappa) = 0,$$

где

$$g_V = \frac{1}{4\pi^2} \int V(x, \rho) e^{-i\kappa\rho} d^2\rho; \quad g_f = \frac{1}{4\pi^2} \int f(x, \rho) e^{-i\kappa\rho} d^2\rho.$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка (2.40) имеет вид

$$g_V(x, \kappa) = \frac{ik}{2} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{(2k^2 - \kappa^2)(x - x')}{2ik} \right\} g_f(x', \kappa) dx'. \quad (2.41)$$

Возвращаясь от фурье-образов к исходным функциям, получаем

$$V(x, \rho) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{e^{ik(x-x')}}{x-x'} dx' \times$$

$$\times \int d^2\rho' \exp \left\{ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x-x')} \right\} \varphi_0(x', \rho') \bar{\epsilon}(x', \rho').$$

¹ В меру справедливости френелевского упрощения точной функции Грина.

Следовательно, для интересующей нас комплексной фазы имеем

$$\Psi_1(x, \rho) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{e^{ik(x-x')}}{x-x'} dx' \times \\ \times \int \frac{\Phi_0(x', \rho')}{\Phi_0(x, \rho)} \exp \left\{ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x-x')} \right\} \bar{\epsilon}(x', \rho') d^2\rho'. \quad (2.42)$$

Мы получили так называемое первое приближение метода плавных возмущений (МПВ), связывающее флуктуации комплексной фазы с невозмущенной волной Φ_0 и флуктуациями диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon}$ на пути распространения. Не представляет труда получить уравнения для высших приближений, в которые входят соответствующие низшие приближения. Решение их не вызывает принципиальных трудностей, но становится громоздким. Для примера выпишем только уравнение для Ψ_2 и его решение:

$$2ik \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \Delta \Psi_2 + 2\nabla \Psi_0 \nabla \Psi_2 = -(\nabla \Psi_1)^2, \quad (2.43)$$

$$\Psi_2(x, \rho) = \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{e^{ik(x-x')}}{x-x'} dx' \times \\ \times \int \frac{\Phi_0(x', \rho')}{\Phi_0(x, \rho)} \exp \left\{ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x-x')} \right\} (\nabla \Psi_1)^2 d^2\rho'. \quad (2.44)$$

Для практических расчетов обычно ограничиваются первым приближением МПВ (2.42), а уравнение (2.43) используется лишь для оценок границ применимости и для учета ослабления среднего поля, ибо уравнение (2.42) ослабления среднего поля не дает $\langle \Psi_1(\mathbf{r}') \rangle = 0$.

§ 3. ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ СВЕТОВЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

В этом параграфе с использованием основной формулы (2.42) и статистических свойств случайного поля $\bar{\epsilon}$ найдены корреляционные функции флуктуаций амплитуды и фазы в плоской и сферической волнах, а также в ограниченном пучке.

1. Плоская волна

В принятом приближении комплексная фаза $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$, и, следовательно,

$$\Psi_1 = \Psi - \Psi_0 = \ln A/A_0 + i(S - S_0) \equiv \chi + iS_1. \quad (2.45)$$

Рассчитаем сначала корреляционные функции флуктуаций логарифма амплитуды $B_x = \langle \chi(x, \rho_1) \chi(x, \rho_2) \rangle$ и фазы $B_S = \langle S_1(x, \rho_1) S_1(x, \rho_2) \rangle$ плоской волны. В этом случае $\Phi_0(x, \rho) = A_0 e^{ikx}$ и

$$\Psi_1(x, \rho) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \int d^2\rho' \exp \left\{ \frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(x-x')} \right\} \bar{\varepsilon}(x', \rho'). \quad (2.46)$$

Удобнее перейти к преобразованию Фурье функции $\bar{\varepsilon}(x', \rho')$:

$$\bar{\varepsilon}(x', \rho') = \int e^{i\kappa_1 x'} g_\varepsilon(x', \kappa) d^2\kappa.$$

Меняя порядок интегрирования по κ и ρ' и выполняя интегрирование по ρ' , получаем

$$\Psi_1 = \frac{ik}{2} \int_0^x dx' \int d^2\kappa \exp \left\{ i\kappa \rho + \frac{\kappa^2(x-x')}{2ik} \right\} g_\varepsilon(x', \kappa). \quad (2.47)$$

Вычислим корреляционные моменты комплексной фазы вида

$$B_{\psi\psi^*} \equiv \langle \Psi_1(x, \rho_1) \Psi_1^*(x, \rho_2) \rangle; \quad B_{\psi\psi} \equiv \langle \Psi_1(x, \rho_1) \Psi_1(x, \rho_2) \rangle, \quad (2.48)$$

которые связаны с интересующими нас корреляционными функциями амплитуды и фазы соотношениями

$$B_{\psi\psi^*}(x, \rho_1, \rho_2) = B_\chi(x, \rho_1, \rho_2) + B_S(x, \rho_1, \rho_2), \quad (a) \quad (2.49)$$

$$B_{\psi\psi} = B_\chi - B_S + 2iB_{\chi S}. \quad (б)$$

Используя определение (2.48) и формулу (2.47), получаем для $B_{\psi\psi^*}$:

$$B_{\psi\psi^*} = \frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int_0^x dx'' \int d^2\kappa_1 \int d^2\kappa_2 \exp \left\{ \frac{\kappa_1^2(x-x')}{2ik} - \frac{\kappa_2^2(x-x'')}{2ik} \right\} \exp \{ i\kappa_1 \rho_1 - i\kappa_2 \rho_2 \} \langle g_\varepsilon(x', \kappa_1) g_\varepsilon^*(x'', \kappa_2) \rangle.$$

Воспользовавшись теперь введенной в главе I двумерной спектральной плотностью однородных флуктуаций поля $\bar{\varepsilon}$

$$\langle g_\varepsilon(x', \kappa_1) g_\varepsilon^*(x'', \kappa_2) \rangle = \delta(\kappa_1 - \kappa_2) F_\varepsilon(x' - x'', \kappa_1),$$

получим

$$B_{\psi\psi^*} = \frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int_0^x dx'' \int d^2\kappa \times \\ \times \exp \left\{ i\kappa(\rho_1 - \rho_2) + \frac{i\kappa^2(x' - x'')}{2k} \right\} F_\varepsilon(x' - x'', \kappa).$$

Как отмечалось выше (§ 3, гл. I), двумерная спектральная плотность $F_\varepsilon(x, \kappa)$ является «острой» функцией, которая заметно отлична от нуля лишь в области $|\kappa x| \lesssim 1$. Используя указанное свойство функции F_ε и соотношение (1.59), можно в последней

формуле приближенно выполнить интегрирование по $\xi = x' - x''$, что дает для $B_{\psi\psi^*}$ следующее выражение:

$$B_{\psi\psi^*} = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^x dx' \int d^2\kappa e^{i\kappa(\rho'_1 - \rho_2)} \Phi_\varepsilon(x', \kappa). \quad (2.50)$$

Отметим здесь одно чрезвычайно важное обстоятельство. Формулу (2.50) можно было получить сразу, если считать, что

$$F_\varepsilon(x' - x'', \kappa) = 2\pi\delta(x' - x'') \Phi_\varepsilon(x', \kappa).$$

Для функций g_ε это эквивалентно соотношению

$$\langle g_\varepsilon(x', \kappa_1) g_\varepsilon^*(x'', \kappa_2) \rangle = 2\pi\delta(\kappa_1 - \kappa_2) \delta(x' - x'') \Phi_\varepsilon(x', \kappa_1). \quad (2.51)$$

В дальнейшем мы не будем пользоваться двумерными спектрами F_ε , а будем сразу переходить к формуле (2.51), что приводит к тем же результатам, но упрощает выкладки. На физическом смысле аппроксимации (2.51) мы подробно остановимся в § 5 этой главы.

Совершенно аналогично, но с использованием равенства

$$\langle g_\varepsilon(x', \kappa_1) g_\varepsilon(x'', \kappa_2) \rangle = 2\pi\delta(\kappa_1 + \kappa_2) \delta(x' - x'') \Phi_\varepsilon(x', \kappa_1) \quad (2.51a)$$

получаем для функции $B_{\psi\psi}$

$$B_{\psi\psi} = -\frac{\pi k^2}{2} \int_0^x dx' \int d^2\kappa \exp\left\{i\kappa\rho + \frac{\kappa^2(x-x')}{2ik}\right\} \Phi_\varepsilon(x', \kappa). \quad (2.52)$$

В (2.52) введено обозначение $\rho = \rho_1 - \rho_2$. Учитывая связь между корреляционными и структурными функциями

$$D(\rho) = 2[B(0) - B(\rho)],$$

используя изотропность флуктуаций и производя интегрирование по угловой переменной вектора κ , имеем

$$D_{\psi\psi^*} = D_x + D_S = 2\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(x', \kappa) [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa d\kappa, \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} D_{\psi\psi} &= D_x - D_S + 2iD_{xS} = \\ &= -2\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(x', \kappa) \exp\left\{\frac{\kappa^2(x-x')}{ik}\right\} [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa d\kappa \end{aligned} \quad (2.54)$$

($J_0(x)$ — функция Бесселя).

Формулы (2.53) — (2.54) справедливы в случае, когда поле флуктуаций $\bar{\varepsilon}$ не является статистически однородным. На это указывает зависимость спектра Φ_ε от продольной координаты. Учет неоднородности трассы не вносит никаких принципиальных труд-

ностей, но требует для проведения расчетов задания конкретной модели зависимости структурной характеристики C_ε^2 от расстояния. Мы будем это делать в тех случаях, когда неоднородность трассы приводит к каким-нибудь новым эффектам. В этом параграфе для простоты мы будем считать среднюю статистически однородной, а в качестве спектра флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$ использовать спектр, являющийся частным случаем (1.86),

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = A_0 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \exp\{-\kappa^2/\kappa_m^2\} \quad (A_0 = 0,033).$$

При этих предположениях

$$D_{\psi\psi^*} = 0,033\pi^2 k^2 x C_\varepsilon^2 \kappa_m^{-5/3} \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g^2\right) - 1 \right], \quad (2.55)$$

$$D_{\psi\psi} = -i0,033\pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\varepsilon^2 k^3 \kappa_m^{-11/3} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -g^2\right) - 1 - (1+iD)^{11/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g^2}{1+iD}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (2.56)$$

Здесь введены обозначения

$$g = \frac{\kappa_m^2 \rho}{2} = 2,96 \frac{\rho}{l_0}, \quad D = \frac{\kappa_m^2 x}{k} = 5,6 \frac{\lambda x}{l_0^2},$$

${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Так как эта функция будет часто встречаться в дальнейшем, приведем здесь ее представление в виде ряда

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+\gamma)} \frac{z^k}{k!} \quad (2.57)$$

и асимптотический ряд при $|z| \rightarrow \infty$:

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha+1-\gamma, -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} G(\gamma-\alpha, 1-\alpha, z), \quad (2.58)$$

где

$$G(\delta, \beta, z) = 1 + \frac{\delta\beta}{1!z} + \frac{\delta(\delta+1)\beta(\beta+1)}{2!z^2} + \dots$$

С помощью (2.55) — (2.56) могут быть рассчитаны статистические характеристики флуктуаций амплитуды и фазы без каких бы то ни было предположений о величине параметра g и волнового параметра D .

В частности, для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды справедлива следующая формула:

$$\langle \chi^2 \rangle \equiv B_\chi(0) = \frac{1}{2} D_\chi(\infty) = \frac{3A_0\pi^3}{11\Gamma(11/6)} C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} D^{-11/3} \times \\ \times [(1+D^4)^{11/2} \sin(11/6 \arctg D^2) - 11/6 D^2]. \quad (2.59)$$

Приведем теперь несколько асимптотических формул, вытекающих из (2.55) — (2.56).

Случай $D = \frac{\kappa_m^2 x}{k} \ll 1$ носит название приближения геометрической оптики и практически реализуется на достаточно коротких трассах. Относящиеся сюда формулы могут быть получены также из стохастического волнового уравнения (2.10), упрощенного в предположении $k = 2\pi/\lambda \rightarrow \infty$. Мы не будем останавливаться на этой процедуре и получим геометрооптическое приближение из (2.55) — (2.56) при $D \ll 1$. Для структурной функции амплитуды в этом случае получаем

$$D_x(\rho) = 2B(0) - 2B(\rho) = \frac{0,033\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{72} C_\varepsilon^2 x^3 \kappa_m^{7/3} \times \\ \times \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g^2\right) \right].$$

Для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды отсюда имеем

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,80 C_\varepsilon^2 x^3 l_0^{-7/3}, \quad (2.60)$$

а для нормированной корреляционной функции (коэффициента корреляции) —

$$b_x(\rho) = \frac{B_x(\rho)}{\langle \chi^2 \rangle} = {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right). \quad (2.61)$$

Структурная функция флуктуаций фазы $D_S = \langle [S_1(x, \rho_1) - S_1(x, \rho_1 + \rho)]^2 \rangle$ в этом приближении равна

$$D_S(x, \rho) = 2,2 C_\varepsilon^2 k^2 x \kappa_m^{-5/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1 \right]. \quad (2.62)$$

Асимптотики D_S при $\rho \ll l_0$ и $\rho \gg l_0$ таковы:

$$D_S = \begin{cases} 0,82 C_\varepsilon^2 k^2 x l_0^{-1/3} \rho^2, & \rho \ll l_0, \\ 0,73 C_\varepsilon^2 k^2 x \rho^{5/3}, & \rho \gg l_0. \end{cases} \quad (2.62a)$$

$$(2.62b)$$

Практически более интересен другой предельный случай $D \gg 1$, когда становятся существенными дифракционные эффекты. Будем считать, кроме того, что параметр $g \gg 1$. Структурные функции $D_{\psi\psi^*}$ и $D_{\psi\psi}$ в этом случае имеют вид

$$D_{\psi\psi^*} \approx 0,73 C_\varepsilon^2 k^2 x \rho^{5/3}, \quad (2.63)$$

$$D_{\psi\psi} = -i0,054 C_\varepsilon^2 k^3 \rho^{11/3} \left\{ 1 - \Gamma\left(\frac{17}{6}\right) \left(\frac{i}{\beta}\right)^{11/6} \times \right. \\ \left. \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{\beta}{i}\right) - 1 \right] \right\}, \quad (2.64)$$

где введен параметр $\beta = g/D = k\rho^2/4x$, представляющий собой по порядку величины квадрат отношения разнесения точек наблю-

дения к радиусу первой зоны Френеля. Параметр β , таким образом, уже не зависит от внутреннего масштаба турбулентности и может при $D \gg 1$ и $g \gg 1$ быть, вообще говоря, как малым, так и большим.

При указанных выше значениях параметров $D \gg 1$ и $g \gg 1$ структурная функция амплитуды¹ равна

$$D_x = \frac{0,033\pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) 2^{5/3}} \left\{ C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{1/3} + \frac{9}{121} C_\epsilon^2 k^3 \rho^{1/3} \Gamma\left(\frac{17}{6}\right) \times \right. \\ \left. \times \beta^{-1/6} \operatorname{Re} \left[i^{17/6} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, i\beta\right) - 1 \right] \right\}. \quad (2.65)$$

Из (2.65), используя асимптотику вырожденной гипергеометрической функции (2.58), легко получить выражение для среднего квадрата флуктуаций уровня

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2} D(\infty) = 0,077 C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}. \quad (2.66)$$

(Отметим, что выражения (2.60) и (2.66) являются предельными случаями формулы (2.59).) Нормированная корреляционная функция амплитуды равна

$$b_x(\rho) = \operatorname{Re} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, i\beta\right) - \\ - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, i\beta\right) - \frac{11\beta^{5/6}}{6\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}}. \quad (2.67)$$

Как видно из (2.67), радиус корреляции флуктуаций амплитуды имеет порядок радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda x}$. При малых значениях аргумента $\rho \gg l_0$ функция $b_x(\rho)$ равна

$$b_x(\rho) = 1 - 12,3 \frac{\rho^2}{(\lambda x)^{5/6} l_0^{1/3}} + \dots, \quad (2.68a)$$

а при больших $\beta \gg 1$:

$$b_x(\rho) \approx -0,0242 (k\rho^2/4x)^{-7/6}. \quad (2.68b)$$

Вспоминая теперь, что, согласно (2.53), структурная функция фазы

$$D_S = D_{\psi\psi^*} - D_\chi,$$

получаем

$$D_S(\rho) = 0,73 C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{1/3} - 2\langle \chi^2 \rangle [1 - b_x(\rho)], \quad (2.69)$$

¹ В дальнейшем для краткости мы будем говорить «структурная (или корреляционная) функция амплитуды» вместо «структурная функция флуктуаций логарифма амплитуды».

что в асимптотических случаях дает

$$D_S(\rho) = \begin{cases} 0,73C_2^2 k^2 x \rho^{4/3}, & \rho \gg \sqrt{\lambda x}, \\ \frac{1}{2} 0,73C_2^2 k^2 x \rho^{5/3}, & \rho \ll \sqrt{\lambda x}. \end{cases} \quad (2.69a)$$

$$(2.69b)$$

В заключение этого пункта рассчитаем среднее значение комплексной фазы. При этом нас будет интересовать среднее значение логарифма амплитуды $\langle \chi \rangle$. Что касается средней фазы, то эта величина, как и средний квадрат флуктуаций фазы (а следовательно, и корреляционная функция), не имеет для случая турбулентного спектра Φ_ϵ четкого физического смысла. Дело в том, что флуктуации фазы в отличие от амплитудных определяются самыми крупномасштабными пульсациями (соответствующие им волновые числа $\kappa \rightarrow 0$). Спектр (1.86) формально не ограничен снизу по волновым числам, что приводит к бесконечной дисперсии флуктуаций фазы из-за расходимости соответствующих интегралов. Ясно, что для реальной турбулентной среды существует некоторое минимальное волновое число κ_0 и введение его в спектр, например по Карману (1.88), позволяет рассчитывать $\langle S \rangle$ и $\langle S_1^2 \rangle$. Однако в этом случае нас подстерегает другая неприятность, связанная с тем, что для самых крупномасштабных вихрей с размерами $\sim L_0$ ($L_0 \sim 1/\kappa_0$) уже теряет смысл используемая для расчетов модель изотропных флуктуаций $\bar{\epsilon}$. В связи с этим для фазы мы всегда ограничиваемся расчетом структурной функции $D_S(\rho)$ лишь при $\rho \ll L_0$, когда существенны масштабы неоднородностей $l \lesssim \rho \ll L_0$. Если же пытаться вычислить какую-либо величину, существенно зависящую от крупномасштабных компонент спектра турбулентности, то необходимо использовать тот или иной модельный метод учета внешнего масштаба L_0 (см., например, гл. VII). Получаемые при этом результаты всегда носят оценочный характер.

Для расчета $\langle \chi \rangle$, дающего ослабление волны в турбулентной среде, необходимо учесть уравнение для второго приближения МПВ (2.43), так как в первом приближении $\langle \Psi \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle \chi \rangle = \text{Re} \langle \Psi_2 \rangle$. Можно рассчитать $\langle \chi \rangle$ непосредственно по формуле (2.44) с учетом (2.46), но это приводит к громоздким выкладкам. Мы получим интересующий нас результат непосредственно из уравнений (2.33) и (2.43). Вспоминая, что $\Psi = \chi + iS$, и беря мнимую часть (2.33) и (2.43), имеем для плоской исходной волны ($\Psi_0 = ikx$):

$$\Delta S_1 + 4k \frac{\partial \chi_1}{\partial x} = 0, \quad (2.70a)$$

$$\Delta S_2 + 4k \frac{\partial \chi_2}{\partial x} = -2\nabla \chi_1 \nabla S_1. \quad (2.70b)$$

Усредним уравнения (2.70) в плоскости наблюдения $x = \text{const}$.

В связи с однородностью флуктуаций $\Delta \langle S_2 \rangle = 0$ и

$$\frac{d \langle \chi_2 \rangle}{dx} = -\frac{1}{2k} \langle \nabla \chi_1 \nabla S_1 \rangle. \quad (2.71)$$

Умножая (2.70а) на χ_1 и усредняя, получим

$$\frac{d \langle \chi_1^2 \rangle}{dx} = -\frac{1}{2k} \langle \chi_1 \Delta S_1 \rangle.$$

Средняя величина, стоящая в правой части, равна

$$\langle \chi_1 \Delta S_1 \rangle = \nabla \langle \chi_1 \nabla S_1 \rangle - \langle \nabla \chi_1 \nabla S_1 \rangle.$$

В силу однородности $\langle \chi_1 \nabla S_1 \rangle$ не зависит от поперечной координаты и, следовательно, $\nabla \langle \chi_1 \nabla S_1 \rangle = 0$. Отсюда

$$\frac{d \langle \chi_1^2 \rangle}{dx} = \frac{1}{2k} \langle \nabla \chi_1 \nabla S_1 \rangle. \quad (2.72)$$

Сравнивая (2.71) и (2.72), имеем

$$\frac{d}{dx} [\langle \chi_2 \rangle + \langle \chi_1^2 \rangle] = 0.$$

Учитывая, что на входе в турбулентную среду $\langle \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle = 0$, окончательно находим

$$\langle \chi_2(x) \rangle = \langle \chi(x) \rangle = -\langle \chi_1^2 \rangle. \quad (2.73)$$

Величина $\langle \chi_1^2 \rangle$ была найдена выше и определяется формулой (2.59).

2. Сферические волны

Рассмотрим теперь в приближении МПВ распространение сферических волн в турбулентной среде. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес и, кроме того, имеет большое вспомогательное значение, так как статистическая часть многих рассматриваемых в дальнейшем задач сводится к вычислению корреляционных характеристик ненаправленных сферических волн вида e^{ikr}/r (см., например, § 4 этой главы).

Мы будем, следуя работе [4], рассматривать статистические характеристики сферических волн в плоскости $x = \text{const}$. Флуктуации в этом случае, вообще говоря, не будут однородными — это свойство формально имеет место только на сфере $r = \text{const}$. Однако, как показывают простые качественные соображения, внутри некоторого конуса с раствором $\theta_0 \sim \sqrt{l^2 / \lambda x}$ (l — характерный масштаб флуктуаций) однородность на плоскости хорошо выполняется. Мы всегда будем считать, что $\theta < \theta_0$; это эквивалентно «несильному» требованию, чтобы расстояние между точками наблюдения было гораздо меньше длины трассы.

Пусть в плоскости $x = 0$ в точке ρ_{01} находится точечный источник, и пусть его излучение падает на турбулентный слой тол-

пины L , заключенный между плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + L$. Используя (2.42), для флуктуаций комплексной фазы в сферической волне получаем

$$\Psi_1(\rho_{01}, \rho_1) = \frac{k^2 x}{4\pi} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \int d^2 \rho' \frac{\tilde{\varepsilon}(x', \rho')}{x'(x-x')} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik [(\rho_1 - \rho_{01})x' - (\rho' - \rho_{01})x]^2}{2x'(x-x')x} \right\}. \quad (2.74)$$

Здесь координата $x \geq x_0 + L$ определяет положение плоскости наблюдения, ρ_{01} характеризует положение источника в плоскости $x = 0$, а ρ_1 — поперечный радиус-вектор точки наблюдения.

Рассмотрим корреляции комплексных фаз двух сферических волн, излучаемых из различных точек ρ_{01}, ρ_{02} и принимаемых в точках (x, ρ_1) и (x, ρ_2) соответственно. Опуская выкладки, аналогичные проведенным в предыдущем пункте, получим

$$B_{\psi\psi^*} = \frac{\pi k^2}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \int d^2 \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \times \\ \times \exp \left\{ i\kappa \frac{x'}{x} \left[\rho_1 - \rho_2 + \frac{x-x'}{x'} (\rho_{01} - \rho_{02}) \right] \right\}, \\ B_{\psi\psi} = \frac{\pi k^2}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \int d^2 \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\kappa^2 x' (x-x')}{ikx} + i\kappa \frac{x'}{x} \left[\rho_1 - \rho_2 + \frac{x-x'}{x'} (\rho_{01} - \rho_{02}) \right] \right\}.$$

Используя эти формулы и вводя обозначения $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho_0 = \rho_{01} - \rho_{02}$, для структурных функций фазы и амплитуды получаем

$$\left. \begin{aligned} D_S(\rho_0, \rho) \\ D_\chi(\rho_0, \rho) \end{aligned} \right\} = B_{\psi\psi^*}(0, 0) \mp \operatorname{Re} B_{\psi\psi}(0, 0) - [B_{\psi\psi^*}(\rho_0, \rho) \mp \\ \mp \operatorname{Re} B_{\psi\psi}(\rho_0, \rho)] = \frac{\pi k^2}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \int d^2 \kappa \left[1 \pm \cos \frac{\kappa^2 x' (x-x')}{kx} \right] \times \\ \times \Phi_\varepsilon(\kappa) \left\{ 1 - \exp \left[i \frac{x'}{x} \kappa \left(\rho + \frac{x-x'}{x'} \rho_0 \right) \right] \right\} \quad (2.75)$$

или после интегрирования по угловой переменной

$$\left. \begin{aligned} D_S(\rho_0, \rho) \\ D_\chi(\rho_0, \rho) \end{aligned} \right\} = \pi^2 k^2 \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \times \\ \times \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 \pm \cos \frac{\kappa^2 x' (x-x')}{kx} \right] \times \\ \times \left[1 - J_0 \left(\frac{\kappa x'}{x} \left| \rho + \frac{x-x'}{x'} \rho_0 \right| \right) \right] \kappa d\kappa. \quad (2.76)$$

Для $D_{\psi\psi^*}$ справедлива более простая формула

$$D_{\psi\psi^*} = \pi^2 k^2 \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 - J_0 \left(\frac{\kappa x'}{x} \left| \rho + \frac{x-x'}{x'} \rho_0 \right| \right) \right] \kappa d\kappa. \quad (2.76a)$$

Результаты для флуктуаций в одной сферической волне могут быть получены из (2.76) при $\rho_0 = 0$. В частности, для источника и приемника, находящихся в турбулентной среде ($x_0 = 0$, $x = L$), справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} D_S(\rho) \\ D_X(\rho) \end{aligned} \right\} = \pi^2 k^2 \int_0^L dx' \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 \pm \cos \frac{\kappa^2 x' (L-x')}{kL} \right] \times \\ \times \left[1 - J_0 \left(\kappa \rho \frac{x'}{L} \right) \right] \kappa d\kappa. \quad (2.77)$$

Переход к геометрическому приближению осуществляется здесь при $\frac{\kappa^2 x}{k} \ll \frac{\kappa_m^2 x}{k} \ll 1$. В этом случае в (2.77) можно разложить косинус в ряд, удержав один член разложения для фазы и два — для амплитуды. Для функции D_S в этом приближении справедлива весьма наглядная формула

$$D_S(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho D_S^{\text{пл}}(\rho') d\rho', \quad (2.78)$$

связывающая структурные функции фазы в сферической и плоской волнах. Соответствующая связь между корреляционными функциями амплитуды выглядит несколько сложнее:

$$B_X(L, \rho) = 3 \int_0^1 \eta^2 (1 - \eta^2) B_X^{\text{пл}}(L, \rho\eta) d\eta. \quad (2.79)$$

Отметим, что для структурной функции комплексной фазы $D_{\psi\psi^*}(\rho) = \langle |\Psi_1(\rho_1) - \Psi_1(\rho_1 + \rho)|^2 \rangle$ формула типа (2.78) выполняется не только в геометрическом приближении, но и в приближении МПВ:

$$D_{\psi\psi^*}(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho D_{\psi\psi^*}^{\text{пл}}(\rho') d\rho'. \quad (2.80)$$

Для турбулентного спектра $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ при $\rho \gg l_0$ отличие сферической волны от плоской сводится, как легко видеть, к численному коэффициенту $3/8$ в формулах (2.78) и (2.80) и $1/10$ — в формуле (2.79). В общем случае при произвольных значениях параметров g

и D формула (2.77) дает для турбулентного спектра:

$$\left. \begin{aligned} D_S \\ D_\chi \end{aligned} \right\} = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma(-5/6)}{2} C_\varepsilon^2 k^2 L \kappa_m^{-5/3} \times \\ \times \operatorname{Re} \int_0^1 d\xi \left\{ \left[1 - {}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1, -g\xi^2 \right) \right] \pm [1 - i\xi(1-\xi)D]^{5/6} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - {}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{g\xi^2}{1 - i\xi(1-\xi)D} \right) \right] \right\}, \quad (2.81)$$

$$D_{\psi\psi^*} = A_0 \pi^2 \Gamma(-5/6) C_\varepsilon^2 k^2 L \kappa_m^{-5/3} \int_0^1 d\xi [1 - {}_1F_1(-5/6, 1, -g\xi^2)]. \quad (2.81a)$$

Отметим еще, что для величины $\langle \chi \rangle$ справедливо соотношение, совпадающее по форме с (2.73). Все рассуждения, приведшие к выводу (2.73), можно повторить и для сферической волны при $kr \gg 1$, заменяя усреднение по плоскости усреднением по сфере с центром в источнике и $\partial/\partial x$ на $\partial/\partial r$.

Формулы (2.75)–(2.76) допускают переход к плоским волнам. Для этого достаточно ¹ устремить $x_0 \rightarrow \infty$ и ввести вектор угла между волнами $\rho_0/x \rightarrow \beta$:

$$\left. \begin{aligned} D_S(\beta, \rho) \\ D_\chi(\beta, \rho) \end{aligned} \right\} = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^L d\eta \int d^2\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 \pm \cos \frac{\kappa^2(L-\eta)}{k} \right] \times \\ \times [1 - \exp\{i\kappa[\rho - (L-\eta)\beta]\}]. \quad (2.82)$$

3. Ограниченный пучок

Рассмотрим теперь распространение гауссовского пучка, амплитуда которого в плоскости падения имеет вид

$$\varphi^0(\rho) = A_0 \exp(-\rho^2/2a^2). \quad (2.83)$$

Формула (2.83) может служить моделью начального распределения поля идеального одномодового лазера. В принципе можно использовать исходный пучок более общего вида $\varphi^0(\rho) = A_0 \times \exp\left(-\rho^2/2a^2 - \frac{ik\rho^2}{2f}\right)$, учитывающий фокусировку. Но в практически наиболее интересной плоскости фокусировки $x = F$ результаты МПВ, по крайней мере для амплитуды, теряют силу. В области же $x \ll F$ «фокусирующий множитель» слабо влияет на результат, но делает вычисления более громоздкими. Поэтому мы сочли возможным в этом параграфе ограничиться гауссовским пучком с плоским фазовым фронтом (так называемым «коллимированным пучком»).

¹ Для практического осуществления предельного перехода удобно сначала ввести $\eta = x' - x_0$, а затем перейти к пределу при $x_0 \rightarrow \infty$.

Невозмущенное поле, соответствующее (2.83), которое следует подставлять в формулу (2.42), было вычислено ранее и дается соотношением (2.36). Для флуктуаций комплексной фазы в точке (x, ρ_1) справедливо следующее представление:

$$\Psi_1(x, \rho_1) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dx'}{x-x'} \frac{f(x')}{f(x)} \int d^2\rho' \tilde{\varepsilon}(x', \rho') \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik(\rho_1 - \rho')^2}{2(x-x')} - \frac{\rho'^2}{2a^2 f(x')} + \frac{\rho_1^2}{2a^2 f(x)} \right\}, \quad (2.84)$$

где введено обозначение $f(x) = 1 + ix/ka^2$. Переходя к спектральному представлению флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$, имеем

$$\Psi_1(x, \rho_1) = \frac{ik}{2} \int_0^\infty dx' \int d^2\kappa \exp \left\{ \frac{f(x')}{f(x)} \left[\frac{\kappa^2(x-x')}{2ik} + i\kappa\rho_1 \right] \right\} \times \\ \times g_\varepsilon(x', \kappa). \quad (2.84a)$$

Проводя вычисления, аналогичные описанным в п. 1 настоящего параграфа, мы приходим к следующим формулам для корреляционных функций комплексной фазы в ограниченном пучке:

$$B_{\Phi\Phi^*} = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^\infty dx' \int d^2\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp \left\{ -\frac{\kappa^2(x-x')^2}{k^2 a^2 (1+x^2/k^2 a^4)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i\kappa\rho \frac{1 + \frac{i(x-x')}{ka^2}}{1+x^2/k^2 a^4} + \frac{2\kappa R(x-x')}{ka^2(1+x^2/k^2 a^4)} \right\}, \quad (2.85)$$

$$B_{\Psi\Psi} = -\frac{\pi k^2}{2} \int_0^\infty dx' \int d^2\kappa \exp \left\{ \frac{\kappa^2(x-x')}{ik} \frac{1 - \frac{i(x-x')}{ka^2} + \frac{xx'}{k^2 a^4}}{1+x^2/k^2 a^4} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i\kappa\rho \frac{1 - \frac{i(x-x')}{ka^2} + \frac{xx'}{k^2 a^4}}{1+x^2/k^2 a^4} \right\} \Phi_\varepsilon(\kappa). \quad (2.86)$$

Здесь введены обозначения $\rho = \rho_1 - \rho_2$ для разнесения точек наблюдения и $R = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ для положения «центра тяжести» этих точек.

Обращает на себя внимание существенное отличие (2.85)–(2.86) от соответствующих формул для плоской и сферической волн. Хотя фазовый фронт рассмотренного нами пучка и является плоским, уже нет однородности флуктуаций в плоскости наблюдения и корреляционные функции зависят от ρ и R , а также от взаимной ориентации этих векторов. Для структурных функций фазы и амплитуды в случае симметричного разнесения точек наблюдения

($\mathbf{R} = 0$), используя (2.85)–(2.86), получаем

$$\left. \begin{aligned} D_S \\ D_x \end{aligned} \right\} = \frac{\pi k^2 x}{2} \int_0^1 d\xi \int d^2 \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp \left[-\frac{\kappa^2 x (1 - \xi)^2}{k (\Omega + \Omega^{-1})} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left[i \kappa \rho \frac{\Omega + \xi \Omega^{-1}}{\Omega + \Omega^{-1}} \right] \pm \operatorname{Re} \exp \left[\frac{i \kappa^2 x (1 - \xi)(\Omega + \xi \Omega^{-1})}{k (\Omega + \Omega^{-1})} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left[i \kappa \rho \frac{\Omega + \Omega^{-1} \xi}{\Omega + \Omega^{-1}} + i \kappa \rho \frac{1 - \xi}{\Omega + \Omega^{-1}} \right] \right\}, \quad (2.87)$$

где введено обозначение $\Omega = ka^2/x$. С помощью этой формулы, подставляя конкретный вид спектра, можно рассчитывать интересные нас амплитудные и фазовые характеристики в ограниченном гауссовском пучке.

В заключение этого параграфа, не вдаваясь в вычислительные подробности, остановимся на границах применимости метода плавных возмущений.

Если формально оценивать границы применимости МПВ из требования малости первых отброшенных членов ряда, то получаются очень жесткие требования и для амплитудных, и для фазовых флуктуаций

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,077 C_\varepsilon^2 k^7 l_0 x^{1/6} \ll 1, \quad (2.88)$$

$$D_S(\rho) = 0,73 k^2 x C_\varepsilon^2 \rho^{5/3} \ll 1. \quad (2.89)$$

Однако, так как вопрос о сходимости ряда МПВ остается неясным, условия (2.88)–(2.89) можно рассматривать как достаточные, но не необходимые. Проведенные экспериментальные исследования показали [5], что для флуктуаций фазы не наблюдается заметных отклонений от результатов, полученных МПВ, до самых больших измеренных на опыте значений D_S .

Что же касается амплитуды, то здесь расхождение с результатами МПВ начинает проявляться существенно раньше [6] — при $\langle \chi^2 \rangle \gtrsim 0,7$. Это условие существенно ограничивает область применимости МПВ. Оно является результатом приближенного решения нелинейного уравнения для комплексной фазы.

Кроме того, имеется ряд ограничений [1, 19], связанных с переходом к приближению параболического уравнения

$$\langle \bar{\varepsilon}^2 \rangle kx \ll 1, \quad (2.90)$$

$$x \ll l_0^4 / \lambda^3. \quad (2.91)$$

Что же касается формул МПВ для флуктуаций фазы, то ими, как показывают результаты [7], практически можно пользоваться, пока

$$D_S(\rho) \sim C_\varepsilon^2 k^2 x \rho^{5/3} \ll k\rho. \quad (2.92)$$

§ 4. МЕТОД ГЮЙГЕНСА — КИРХГОФА

В конце предыдущего параграфа указывалось, что начиная с некоторых расстояний, проходящих светом в случайно-неоднородной среде, МПВ становится неприменимым. Это «критическое» расстояние различно в зависимости от того, статистические характеристики какой физической величины мы изучаем [ср. условия (2.88) и (2.92)]. Более того, даже в тех случаях, когда мы исследуем флуктуации одной и той же величины (скажем, амплитуды), длина трассы, в пределах которой применим МПВ, существенно зависит от геометрии пучка. В частности, для фокусированного пучка МПВ становится некорректным, начиная с очень малых расстояний¹.

В тех случаях, когда мы имеем дело с сильными флуктуациями амплитуды, приходится пользоваться какими-либо иными приближенными методами, два из которых будут описаны более подробно в этом и следующем параграфах. Следует указать, что были разработаны и другие методы приближенного решения волнового уравнения в области сильных флуктуаций. Укажем здесь, в частности, «метод селективного суммирования», который использовали авторы [9—11], и «локальный метод», развитый Л. А. Черновым [12]. Мы остановились на методе Гюйгенса — Кирхгофа (§ 4) [13] и марковском приближении (§ 5) [14] в основном из тех соображений, что первый наиболее прост и нагляден, а второй отличается хорошей (и надежно оцениваемой) точностью и большей стройностью исходных посылок и математического аппарата, чем, например, работы [9—12].

Метод Гюйгенса — Кирхгофа для случайно-неоднородной среды является естественным обобщением этого метода для вакуума. Содержание его заключается в том, что он позволяет по заданному на некоторой плоскости (для определенности на плоскости $x = 0$) полю φ_0 рассчитывать его значение в произвольной точке $\mathbf{r} = (x, \rho)$

В однородной среде поле $\varphi(x, \rho)$ может быть получено как решение волнового уравнения

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$$

с граничным условием $\varphi(0, \rho_0) = \varphi_0(\rho_0)$ и условием излучения при $x = \infty$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \varphi_0(\rho_0) \frac{\partial}{\partial x} G(\mathbf{r}; 0, \rho_0) d^2\rho_0. \quad (2.93)$$

Входящая в формулу Кирхгофа (2.93) функция точечного источника

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}. \quad (2.94)$$

¹ Это связано с тем, что в сфокусированном пучке гораздо раньше начинается область сильных флуктуаций — как показывает эксперимент [8], уже при значениях параметра $D_S(2a) \sim C_e^2 k^2 F(2a)^{5/2} \sim 1$ (F — фокусное расстояние линзы, $2a$ — начальный диаметр пучка).

В соответствии с принципом Гюйгенса поле $\varphi(\mathbf{r})$, даваемое формулой Кирхгофа, может быть интерпретировано как результат суперпозиции полей виртуальных точечных источников, расположенных на начальной плоскости $x = 0$ и имеющих амплитуду $\varphi_0(\rho_0)$.

В работе [13] предложено естественное обобщение формул (2.93)—(2.94), состоящее в замене функции $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ на

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \Psi_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\}, \quad (2.95)$$

где $\Psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — случайный набег комплексной фазы при прохождении сферической волны от $\mathbf{r}_0 = (0, \rho_0)$ до $\mathbf{r} = (x, \rho)$. Переходя, как и ранее, к френелевскому приближению и учитывая, что $kr \gg 1$, из (2.93)—(2.95) получаем искомое поле в случайно-неоднородной среде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{ke^{ikx}}{2\pi ix} \int \varphi_0(\rho_0) \exp\left\{ik \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2x} + \Psi_1(\mathbf{r}; \rho_0)\right\} d^2\rho_0. \quad (2.96)$$

При практическом применении формулы (2.96) для расчета $\Psi_1(\mathbf{r}; \rho_0)$ обычно используется приближение МПВ. Тем не менее результаты, получаемые этим методом, как показывают экспериментальные данные, оказываются пригодными в области сильных флуктуаций амплитуды, где непосредственный расчет статистических характеристик поля по МПВ неверен. Этот на первый взгляд неожиданный результат можно пояснить следующими рассуждениями. Формула (2.96) является следствием точной формулы Грина и, следовательно, в принципе правильно моделирует структуру формирования поля $\varphi(\mathbf{r})$ в среде как результат суперпозиции полей точечных источников. Турбулентные добавки к фазе этих вспомогательных источников учитываются некоторым приближенным образом. Можно, однако, ожидать, что это не приведет к значительным ошибкам, так как основной вклад во флуктуации величины Ψ_1 вносят флуктуации действительной фазы S_1 , но не амплитуды. В самом деле, структурная функция амплитуды $D_\chi \ll 2 \langle \chi^2 \rangle$, по данным эксперимента, быстро насыщается, в то время как величина D_S может принимать очень большие значения. Вспоминая теперь, что для фазовых флуктуаций расчет по МПВ справедлив в весьма широких пределах (2.92), мы приходим к качественному утверждению, что область справедливости формулы (2.96) не ограничена требованием малости флуктуаций амплитуды.

Пользуясь приведенной выше формулой, рассчитаем среднюю интенсивность пространственно-ограниченного фокусируемого пучка в турбулентной среде. Пусть поле на выходе оптической системы (и «входе» в турбулентную среду) имеет вид

$$\varphi_0(\rho_0) = u_0 \exp\{-\rho_0^2/2a^2 - ik\rho_0^2/2F\}. \quad (2.97)$$

Здесь F — расстояние до центра излучения [если $F > 0$ — пучок фокусируемый, если $F < 0$ — расходящийся, если $F = \infty$ — коллимированный пучок вида (2.53)]. Подставляя $\varphi_0(\rho_0)$ в (2.96), для случайной интенсивности на оси пучка ($\rho = 0$) получаем

$$I(x) = \Phi\Phi^* = \frac{k^2 u_0^2}{4\pi^2 x^2} \int d^2 \rho' \int d^2 \rho'' \exp \left\{ \Psi_1(x, 0; 0, \rho') + \Psi_1^*(x, 0; 0, \rho'') \right\} \exp \left\{ \frac{ik\rho'^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{f} \right) - \frac{ik\rho''^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{f} \right) - \frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2a^2} \right\}. \quad (2.98)$$

Здесь $\Psi_1(x, 0; 0, \rho')$ и $\Psi_1(x, 0; 0, \rho'')$ — набег комплексной фазы в точке $(x, 0)$ от источников сферических волн, расположенных в точках $(0, \rho')$ и $(0, \rho'')$ соответственно.

Чтобы найти среднюю интенсивность, усредним выражение (2.98), воспользовавшись предположением о нормальном законе распределения вероятностей для Ψ_1 . Учитывая, что в этом случае, как легко видеть,

$$\langle \exp \{ \Psi_1(x; \rho') + \Psi_1^*(x; \rho'') \} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\Psi\Psi^*}(x, \rho' - \rho'') \right\}, \quad (2.99)$$

для средней интенсивности получаем

$$\langle I(x) \rangle = \frac{k^2 u_0^2}{4\pi^2 x^2} \int d^2 \rho' \int d^2 \rho'' \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\Psi\Psi^*}(x, \rho' - \rho'') \right\} \times \exp \left\{ \frac{ik(\rho'^2 - \rho''^2)}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{f} \right) - \frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2a^2} \right\}. \quad (2.100)$$

Воспользовавшись (2.76а) для $x_0 = 0$, $L = x$, $\rho = 0$ и турбулентного спектра $\Phi_\epsilon(\kappa)$, можно выписать формулу для структурной функции $D_{\Psi\Psi^*}$ сферических волн:

$$D_{\Psi\Psi^*}(x, \rho) = \frac{3}{8} 0,73 C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{5/3} \quad (\rho \gg l_0). \quad (2.101)$$

Подставим это выражение в (2.100) и введем новые переменные интегрирования $\rho = \rho' - \rho''$, $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\rho' + \rho'')$. Интеграл по \mathbf{R} после этого легко вычисляется. Производя, кроме того, интегрирование по угловой переменной вектора ρ , после несложных выкладок для средней интенсивности на оси пучка в турбулентной среде получаем

$$\langle I(x) \rangle = \frac{2u_0^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \int_0^\infty \exp \left\{ -t^2 - \frac{1}{2} D_{\Psi\Psi^*} \left(x, \frac{2\sigma}{g(x)} \right) t^{5/3} \right\} t dt, \quad (2.102)$$

где $g(x) = \left[1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{f} \right)^2 \right]^{1/2}$ обращается в единицу для сфокусированного пучка ($x = F$). Этот результат будет получен ниже

(гл. IV) из более строгого рассмотрения в марковском приближении.

Совершенно аналогично могут быть получены формулы и для четвертого момента по полю (дающего решение задачи о флуктуациях интенсивности; см. об этом в гл. VI), а также для величин, связанных с флуктуациями интенсивности (например, для смещений центров тяжести световых пучков в турбулентной среде; см. гл. VII).

Резюмируя результаты этого параграфа, следует отметить, что под методом Гюйгенса — Кирхгофа для случайно-неоднородной среды мы фактически понимаем расчет статистических моментов волнового поля с помощью формулы (2.96) и следующих основных предположений: флуктуации комплексной фазы распределены нормально и определяются первым и вторым приближениями МПВ [второе приближение должно использоваться для вычисления $\langle \Psi \rangle$ при получении формул типа (2.99)].

С помощью метода Гюйгенса — Кирхгофа не удается получить формул для амплитуды и фазы без дополнительных гипотез о характере их вероятностного распределения. Этот же недостаток присущи марковскому приближению (§ 5), в котором тоже получаются только выражения для моментов волнового поля. В связи с этим МПВ остается удобным методом расчета статистических характеристик амплитуды и фазы.

Точность метода Гюйгенса — Кирхгофа недостаточно обоснована, и указания на возможность его применения в широких пределах базируются на полуинтуитивных соображениях, упомянутых выше, а также на хорошем согласии результатов, полученных этим методом, с экспериментом. Поэтому, если окончательные результаты могут быть получены в марковском приближении, им следует отдавать предпочтение. В том случае, когда уравнение для момента оказывается слишком сложным и решение его неизвестно, можно использовать метод Гюйгенса — Кирхгофа, который сводит решение задачи к вычислению квадратур.

Однако метод Гюйгенса — Кирхгофа оказывается полезным не только в тех случаях, когда невозможно решить уравнения для соответствующих моментов поля. Удобство его для решения некоторых задач связано с тем, что он позволяет выписать явное выражение для случайного поля, в то время как марковское приближение дает только уравнения для моментов.

§ 5. МАРКОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При вычислении статистических методов световых полей методом плавных возмущений (а следовательно, и методом Гюйгенса — Кирхгофа) мы пользовались для спектров корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости математической моделью (2.51), которая для корреляционной функции самого

поля $\tilde{\varepsilon}$ эквивалентна соотношению

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \tilde{\varepsilon}(x', \rho') \rangle = B_{\varepsilon}^{\text{эф}}(x - x', \rho - \rho') = \delta(x - x') A(\rho - \rho'), \quad (2.103)$$

причем $A(\rho)$ определяется из условия равенства интегралов от истинной корреляционной функции B_{ε} и эффективной $B_{\varepsilon}^{\text{эф}}$:

$$A(x, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' B_{\varepsilon}(x - x', \rho). \quad (2.104)$$

Оказывается, что если с самого начала принять справедливость аппроксимации (2.103), то можно без каких бы то ни было дополнительных предположений получить замкнутые уравнения для моментов поля любого порядка. Прежде чем перейти к выводу этих уравнений, поясним физический смысл формулы (2.103).

Когда исследуются статистические свойства какой-либо величины в плоскости $x = \text{const}$, например амплитуды или разности фаз, всегда существует характерный поперечный размер неоднородностей, которые играют основную роль. В случае амплитуды это неоднородности с размерами $\sim \sqrt{\lambda x}$, для разности фаз на базе ρ — с размерами $\sim \rho$, для полного набега флуктуационной фазы — порядка внешнего масштаба турбулентности L_0 . Так как флуктуации $\tilde{\varepsilon}$ статистически изотропны, то и продольный размер наиболее существенных неоднородностей имеет тот же порядок. Если же этот масштаб меньше всех других характерных продольных масштабов задачи (например, длины трассы x), то возникает малый параметр, по которому можно строить разложение. Переход к δ -коррелированным по продольной координате флуктуациям ε как раз и означает пренебрежение характерным продольным размером наиболее существенных неоднородностей по сравнению с длиной трассы. Отсюда следует, в частности, что аппроксимация (2.103) становится более точной по мере увеличения длины трассы.

Будем исходить из параболического уравнения (2.26) для комплексной амплитуды поля $u(x, \rho)$

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta u + k^2 \tilde{\varepsilon} u = 0. \quad (2.26)$$

Следуя работе [15], заметим, что

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 \tilde{\varepsilon} u \equiv 2ik \exp \left\{ -\frac{k^2}{2ik} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp \left\{ \frac{k^2}{2ik} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} u(x, \rho) \right], \quad (2.105)$$

это легко проверить непосредственным дифференцированием.

Учитывая (2.105), уравнение (2.26) можно переписать в виде

$$2ik \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp \left\{ -\frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} u(x, \rho) \right] + \Delta u = 0.$$

Умножая это уравнение на $\exp \left\{ -\frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\}$ и интегрируя в пределах $(0, x)$, получаем

$$2ik \left[\exp \left\{ -\frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} u(x, \rho) - u(0, \rho) \right] + \int_0^x \exp \left\{ -\frac{ik}{2} \int_0^{x'} \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} \Delta u(x', \rho) dx' = 0. \quad (2.106)$$

Умножая теперь (2.106) на $\exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\}$, имеем

$$2iku(x, \rho) - 2ik \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} u(0, \rho) + \int_0^x \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} \Delta u(x', \rho) dx' = 0. \quad (2.107)$$

Если записать решение этого уравнения в виде итерационного ряда, то легко убедиться в том, что $u(x, \rho)$ будет функционально зависеть лишь от предшествующих по x значений $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$ из интервала $0 \leq \xi \leq x$. Следуя В. И. Кляцкину и В. И. Татарскому [16], мы будем называть это динамической причинностью. Из динамической причинности, вообще говоря, не вытекает статистической независимости между $u(x')$ и последующими значениями $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$, так как имеется статистическая связь между $\tilde{\varepsilon}(\xi')$ и $\tilde{\varepsilon}(\xi)$, когда $\xi' < x'$, $\xi > x'$. Ясно, что такая корреляция простирается до значений порядка $x' + l_{\parallel}$, где l_{\parallel} — продольный радиус корреляции $\tilde{\varepsilon}$. Однако в нашем случае δ -коррелированных по x флуктуаций продольный радиус корреляции l_{\parallel} равен нулю. В этом случае вместе с динамической независимостью $u(x')$ от последующих значений $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$ будет выполняться и их статистическая независимость. Но это означает, что множитель

$\exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\}$ в (2.107) статистически независим от

$u(x', \rho)$, так как в него входят только последующие за x' значения $\tilde{\varepsilon}$. Поэтому в (2.107) оба множителя можно усреднять

независимо:

$$2ik\bar{u}(x, \rho) - 2ik \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} \right\rangle u(0, \rho) + \\ + \int_0^x \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi \right\} \right\rangle \Delta \bar{u}(x', \rho) dx' = 0. \quad (2.108)$$

Здесь для удобства записи введено обозначение $\bar{u} = \langle u \rangle$.

Мы получили замкнутое уравнение для среднего поля, которое для рассматриваемой модели δ -коррелированных неоднородностей является точным следствием параболического уравнения (2.26). В действительности приближенность получаемого таким образом решения связана с тем, насколько хороша использованная нами аппроксимация (2.103).

Примем еще одно предположение, состоящее в том, что величина $z = \int_{x'}^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) d\xi$ имеет гауссово распределение вероятностей.

Это предположение в силу центральной предельной теоремы должно быть близко к истине, даже если само поле $\tilde{\varepsilon}$ не нормально. Тогда в соответствии с известной формулой для характеристической функции нормального распределения

$$\langle \exp(ikz) \rangle = \exp \left\{ ik \langle z \rangle - \frac{1}{2} k^2 (\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2) \right\}.$$

В нашем случае $\langle z \rangle = 0$, а

$$\langle z^2 \rangle = \int_{x'}^x d\xi_1 \int_{x_1}^x d\xi_2 \langle \tilde{\varepsilon}(\xi_1, \rho) \tilde{\varepsilon}(\xi_2, \rho) \rangle = \\ = \int_{x'}^x d\xi_1 \int_{x'}^x d\xi_2 \delta(\xi_1 - \xi_2) A(0) = (x - x') A(0).$$

Подставляя это значение $\langle z^2 \rangle$ в (2.108), получаем следующее уравнение для функции $\bar{u}(x, \rho)$:

$$2ik\bar{u} - 2ik \exp \left\{ -\frac{1}{8} k^2 x A(0) \right\} u(0, \rho) + \\ + \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{8} k^2 A(0)(x - x') \right\} \Delta \bar{u}(x', \rho) dx' = 0.$$

Умножим его на $\exp \left\{ \frac{1}{8} k^2 x A(0) \right\}$ и продифференцируем по x . После простых выкладок окончательно получаем уравнение для среднего поля

$$2ik \frac{\partial \bar{u}(x, \rho)}{\partial x} + \frac{ik^3}{4} A(0) \bar{u}(x, \rho) + \Delta \bar{u}(x, \rho) = 0. \quad (2.109)$$

Не представляет труда выписать решение этого уравнения:

$$\bar{u}(x, \rho) = u_0(x, \rho) \exp\{-x/2 L_0\}, \quad (2.110)$$

где $u_0(x, \rho) = \frac{k}{2\pi i x} \int u_0(\rho') \exp\left(\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2x}\right) d^2\rho'$ — поле в среде без флуктуаций, а $L_0 = 1/4 k^2 A(0)$ — так называемая «длина экстинкции».

Совершенно аналогично могут быть выведены уравнения для более высоких моментов поля

$$M_{n,m} = \langle u(x, \rho_1) \dots u(x, \rho_n) u^*(x, \rho'_1) u^*(x, \rho'_m) \rangle.$$

Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{n,m}}{\partial x} = & \frac{i}{2k} [\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n - \Delta'_1 - \Delta'_2 - \Delta'_3 - \dots - \Delta'_m] \times \\ & \times M_{n,m} - \frac{k^2}{8} Q_{n,m}(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho'_1, \dots, \rho'_m) M(x, \rho_1, \dots, \rho_n, \\ & \rho'_1, \dots, \rho'_m), \end{aligned} \quad (2.111)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} Q_{n,m} = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A(\rho_i - \rho_j) - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n A(\rho'_k - \rho_j) - \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m A(\rho_i - \rho'_k) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m A(\rho'_k - \rho'_l), \end{aligned}$$

а индексы поперечных лапласианов соответствуют индексам векторов ρ . Выпишем здесь два частных случая уравнений (2.111) — а именно уравнения для функций когерентности второго $M_{1,1} \equiv \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2)$ и четвертого $M_{2,2} \equiv \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2)$ порядков:

$$2ik \frac{\partial \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2)}{\partial x} + (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_2 + \frac{i\pi k^3}{2} H(x, \rho_1 - \rho_2) \Gamma_2 = 0, \quad (2.112)$$

$$2ik \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} + (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) \Gamma_4 + \frac{i\pi k^3}{2} F(x, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2) \Gamma_4 = 0. \quad (2.113)$$

В формулах (2.112)–(2.113) приняты следующие обозначения:

$$H(x, \rho) = \frac{1}{\pi} [A(x, 0) - A(x, \rho)] = 2 \int \Phi_\epsilon(x, \kappa) [1 - \cos \kappa \rho] d^2\kappa, \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} F(x; \rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2) = & H(x, \rho_1 - \rho'_1) + H(x, \rho_2 - \rho'_2) + \\ & + H(x, \rho_1 - \rho'_2) + H(x, \rho_2 - \rho'_1) - H(x, \rho_2 - \\ & - \rho_1) - H(x, \rho'_2 - \rho'_1). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Функция когерентности второго порядка

$$M_{1,1} \equiv \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) = \langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle$$

дает среднюю энергетичеку пучка, так как средняя интенсивность $I(x, \mathbf{R}) = \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R})$, а функция когерентности четвертого порядка $M_{2,2} \equiv \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2')$ определяет флуктуации интенсивности — $\langle I(x, \rho_1)I(x, \rho_2) \rangle = \Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_1, \rho_2)$. Подробное исследование уравнений (2.112)–(2.113) и вытекающих из них следствий будет проведено в следующих главах.

Для учета конечности продольного радиуса корреляции случайного поля $\tilde{\epsilon}$ можно построить систему последовательных приближений, в которой приведенные уравнения играют роль первого приближения [7]. Из анализа второго приближения можно получить условия применимости марковского подхода. Оказывается, что эти условия различны для разных моментов поля. Уравнение для функции когерентности $\Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2)$ справедливо при выполнении следующих условий:

$$kl_0 \gg 1, \quad x \gg \rho, \quad D_S(x, \rho) \ll k\rho. \quad (2.116)$$

Выписать в явном виде условия применимости для $\Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_1', \rho_2')$ не удастся. Однако численные решения этого уравнения, проведенные И. М. Дагжесаманской и В. И. Шишовым [17], а также Брауном [18], качественно хорошо соответствуют экспериментальным данным и в области сильных флуктуаций, где МПВ уже дает неверные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
2. В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1967, 10, № 5, 1763.
3. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский. УФН, 1970, 102, вып. 1, 3.
4. А. И. Кон, Э. И. Фейзуллин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 71.
5. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 1, 66.
6. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1965, 8, № 4, 717.
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 9, 1400.
8. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец. Радиотехника и электроника, 1970, 15, № 6, 1290.
9. D. A. de Wolf. J. Opt. Soc. Amer., 1969, 59, № 11, 1455.
10. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 7, 1039.
11. В. И. Шишов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 6, 866.
12. Л. А. Чернов. VI Всесоюзная акустическая конференция. М., 1968.
13. Ю. А. Кравцов, Э. И. Фейзуллин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1969, 12, № 6, 896.
14. В. И. Татарский. ЖЭТФ, 1969, 56, № 6, 2106.
15. В. И. Кляцкин. ЖЭТФ, 1969, 57, № 3 (9), 952.
16. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 10, 1433.
17. И. М. Дагжесаманская, В. И. Шишов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 16.
18. W. P. Brown, Jr. J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, N 1, 45.
19. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. ЖЭТФ, 1970, 58, № 2.

ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ И НАРУШЕНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ В ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКАХ

Турбулентные пульсации атмосферных параметров (для оптического диапазона главным образом температуры) вызывают флуктуации показателя преломления, которые, в свою очередь, приводят к дополнительным случайным набегам фазы. Этот эффект, естественно, должен учитываться при работе в атмосфере любых практических систем, использующих как когерентное, так и некогерентное излучение. Ясно, однако, что для лазерного излучения учет фазовых флуктуаций особенно актуален, так как они приводят к нарушению когерентности — одного из основных свойств, во многом обусловившего широкую применимость оптических квантовых генераторов.

Эта глава будет посвящена рассмотрению возникающих в турбулентной среде фазовых флуктуаций и их влиянию на пространственную когерентность.

§ 1. ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ В СВЕТОВЫХ ПУЧКАХ

В предыдущей главе был обсужден теоретический подход к решению задачи о флуктуациях фазы и отмечено, что МПВ в этом случае дает правильные результаты даже в области сильных флуктуаций амплитуды, если только выполняется условие (2.92). В этом приближении для флуктуаций фазы в плоских и сферических волнах оказываются справедливыми формулы (2.69) и (2.76), полученные в работах В. И. Татарского [1] и А. И. Кона и З. И. Фейзулина [2].

Во второй главе было рассмотрено также распространение пространственно-ограниченного гауссовского пучка и получены формулы (2.87) для структурных функций амплитуды и фазы в случае произвольного спектра флуктуаций ϵ . Формулы такого типа были впервые получены в работах А. И. Кона и В. И. Татарского [3] и Шмельцера [4], а в работе Исимару [5] произведены более подробные расчеты для турбулентного спектра $\Phi_\epsilon(\kappa)$.

1. Структурные функции флуктуаций фазы

Будем отправляться далее от приведенной в [5] структурной функции флуктуаций фазы для коллимированного гауссовского пучка (2.83), имея в виду, что формулы для фокусируемого пучка (2.97) могут быть получены отсюда формальной заменой $a \rightarrow a(1 + ika^2/F)^{-1/2}$:

$$D_S(\rho_1, \rho_2) = 0,55C_\varepsilon^2 k^{7/2} L^{11/2} \int_0^1 dx \left\{ A^{*1/2} \left[{}_1F_1(-5/6, 1, -P^2/4a) + {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{P^2}{4A}\right) - {}_1F_1(-5/6, 1, z_1) - {}_1F_1(-5/6, 1, z_2) \right] - B^{*1/2} \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{Q^2}{4B}\right) \right] - B^{*1/2} \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{Q^{*2}}{4B^*}\right) \right] \right\}, \quad (3.1)$$

где

$$A = \gamma_2(1-x) + D^{-2}, \quad B = i\gamma(1-x) + D^{-2}, \quad D = \frac{\kappa_m^2 L}{k},$$

$$\gamma = 1 + \frac{1 + 2ix/ka^2}{(1 + 2iL/ka^2)} = \gamma_1 - i\gamma_2, \quad Q = \frac{k\gamma_1^2 \rho^2}{L},$$

$$P^2 = \frac{k\gamma_1^2 \rho^2}{L} - \frac{4k\gamma_2^2 R^2}{L} - 4i\gamma_1\gamma_2 \rho R,$$

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad 2R = \rho_1 + \rho_2,$$

$$z_1 = \frac{k\gamma_2 \rho_1^2}{L(1-x)}, \quad z_2 = \frac{k\gamma_2 \rho_2^2}{L(1-x)}.$$

Результаты численного анализа этой формулы, проведенного в [6], представлены на рис. 3.1. Из них видно, как нормированная на дисперсию флуктуаций интенсивности в плоской волне структурная функция флуктуации фазы зависит от безразмерного разнесения точек наблюдения $|n| = 1/2 \sqrt{k/L} |\rho|$.

Для практических оценок представляют интерес асимптотические выражения для структурной функции фазы в коллимированном пучке, приведенные в [7]. Рассматривались два варианта расположения точек наблюдения:

$$1) \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = 0,$$

$$2) \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = -\rho.$$

В этом случае можно получить следующие простые выражения для структурной функции фазы в коллимированном пучке:

$$D_S(\rho, 0) = b_1 \cdot 0,73 C_\varepsilon^2 k^2 L \rho^{5/3}, \quad (3.2)$$

$$D_S(\rho, -\rho) = b_2 \cdot 0,73 C_\varepsilon^2 k^2 L (2\rho)^{5/3}, \quad (3.3)$$

где b_1 и b_2 — некоторые постоянные. Ниже приведены значения

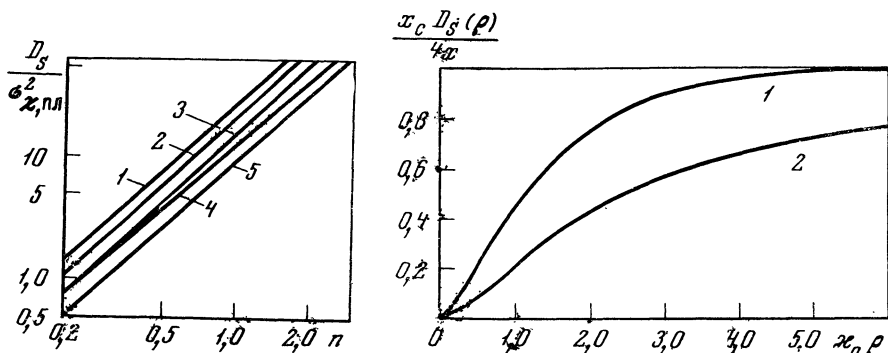


Рис. 3.1. Нормированная структурная функция флуктуаций фазы $D_S/\sigma_x^2\pi$ (центральный разнос точек наблюдения, $D = 4220$)

1 — плоская волна; 2 — $\Omega = 2$; $L/F = 0$; 3 — $\Omega = 1$; 4 — $\Omega = 2$; $L/F = -4$; 5 — сферическая волна

Рис. 3.2. Зависимость нормированной структурной функции $(x_c/4x) D_S(\rho)$ от $\kappa_0\rho$

1 — плоская волна; 2 — сферическая волна

коэффициентов b_1 и b_2 в зависимости от параметра Френеля $\Omega = ka^2/L$.

Ω	∞	10	2	1	0
b_1	1,0	0,96	0,78	0,45	0,375
b_2	1,0	0,95	0,84	0,63	0,375

Сравнение приближенных формул (3.2) и (3.3) с точным численным решением при $\Omega = 1$ показывает их хорошее совпадение.

Использование кармановского спектра флуктуаций (1.88), «обрезающего» спектр в области больших масштабов, позволяет исследовать поведение структурной функции $D_S(\rho)$ в области больших значений ρ и оценить дисперсию и корреляционную функцию флуктуации фазы. Такие расчеты выполнены в ряде работ [8—10].

В работе [8] для структурной функции комплексной фазы плоской и сферической волн получены следующие формулы:

$$D_{\psi\psi^*}(\rho) = \frac{4x}{x_c} \left[1 - \frac{5}{3} (\rho/L_0)^{5/3} \int_0^\infty \frac{J_0(u) u du}{[u^2 + (\rho/L_0)^2]^{11/6}} \right], \quad (3.4)$$

$$D_{\psi\psi^*, \text{ сф}} = \frac{4x}{x_c} \left[1 - \frac{5}{3} (\rho/L_0)^{5/3} \int_0^\infty du J_0(u) u \int_0^1 \frac{s^{5/2} ds}{[u^2 + (s\rho/L_0)^2]^{11/6}} \right], \quad (3.5)$$

где $x_c = (0,1 C_{\epsilon}^2 k^2 L_0^{5/3})^{-1}$, а $J_0(x)$ — функция Бесселя.

На рис. 3.2 приведена функция $(x_c/4x) D_{\psi\psi^*}$ в зависимости от параметра $\kappa_0\rho = 2\pi\rho/L_0$. Значения $(x_c/4x) D_{\psi\psi^*}$ для пространственно-ограниченных пучков конечной ширины a попадают в зону, ограниченную кривыми 1 и 2.

2. Корреляционная функция и спектр флуктуаций фазы и разности фаз

Пространственные статистические характеристики флуктуаций можно, используя гипотезу «замороженности», пересчитывать во временные. Так, временная автокорреляционная функция флуктуаций фазы на оси фокусируемого гауссового пучка в приближении МПВ имеет вид [10]

$$R_S(\tau) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^1 d\xi J_0(\kappa V_\perp \tau) \exp\left\{-\frac{\gamma_2 \xi^2 \kappa^2 L}{k}\right\} \times \\ \times \cos^2 \frac{\xi(1-\gamma_1 \xi) \kappa^2 L}{2k}, \quad (3.6)$$

где V_\perp — нормальная к оси пучка составляющая скорости ветра;

$$\gamma_1 = \frac{L}{F} (L/F - 1) + (L/ka^2)^2 / (1 - L/F)^2 + (L/ka^2)^2,$$

$$\gamma_2 = L/ka^2 [(1 - L/F)^2 + (L/ka^2)^2].$$

Временная спектральная плотность определяется по формуле

$$W(f) = 4 \int_0^\infty \cos 2\pi f \tau R_S(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Подставляя сюда $R_S(\tau)$ из формулы (3.6) и выполняя интегрирование по τ , получаем для нормированного спектра $w_S(f)$ флуктуаций фазы коллимированного пучка ($F = \infty$):

$$w_S(f) = \frac{W_S(f)}{W_S(0)} = \int_0^L \frac{d\xi}{V_\perp} \int_{2\pi f/V_\perp}^\infty \frac{\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) f_S(\kappa, \xi) d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 4\pi^2 f^2 / V_\perp^2}} \times \\ \times \left[\int_0^L \frac{d\xi}{V_\perp} \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) f_S(\kappa, \xi) d\kappa \right]^{-1}, \quad (3.8)$$

где

$$f_S(\kappa, \xi) = \exp\left\{-\gamma_2 \frac{L-\xi}{k} \kappa^2\right\} \left[1 + \cos\left(\gamma_1 \frac{L-\xi}{k} \kappa^2\right)\right].$$

Используя модифицированный кармановский спектр флуктуаций ε (домноженный на $\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)$), из (3.8) можно получить для спектра флуктуаций фазы:

$$w_S(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{2\Gamma(4/3)} \int_0^L d\xi \frac{C_\varepsilon^2}{V_\perp} (b^2 + \kappa_0^2)^{-4/3} \times \\ \times \left[e^{-\beta_1 b^2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}; \beta_1(b^2 + \kappa_0^2)\right) + \right. \\ \left. + \frac{\exp(-\beta_2 b^2)}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}; \beta_2(b^2 + \kappa_0^2)\right) + \right. \\ \left. + \frac{\exp(-\beta_3 b^2)}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}; \beta_3(b^2 + \kappa_0^2)\right) \right] \left[\int_0^L d\xi \frac{C_\varepsilon^2}{V_\perp} \kappa_0^{-4/3} \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

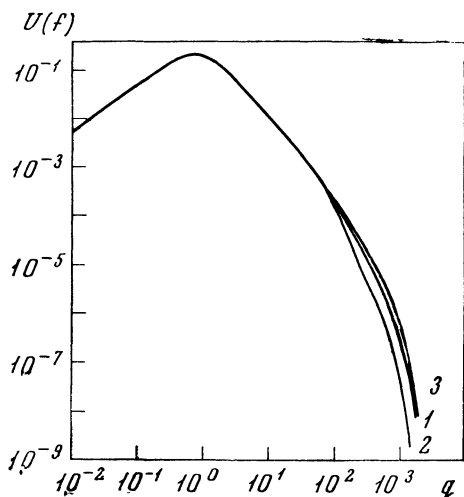


Рис. 3.3. Спектральная плотность флуктуаций фазы $u(f) = fw(f)/\sigma_s^2$ как функция безразмерной частоты $q = 2\pi f/\kappa_0 V_\perp$

1 — плоская волна, $\Omega = 10^{+5}$;
 2 — ограниченный пучок, $\Omega = 1$;
 3 — сферическая волна, $\Omega = 10^{+5}$,
 $\kappa_0^2 L/k = 10^{-4}$, $\kappa_m/\kappa_0 = 10^3$

где $b = 2\pi f/V_\perp$, ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$\beta_1 = \frac{(1-s)^2}{\Omega + \Omega^{-1}} \frac{L}{k} + \frac{1}{\kappa_m^2}, \quad \beta_2 = \frac{(1-s)^2}{\Omega + \Omega^{-1}} \frac{L}{k} + \frac{1}{\kappa_m^2} -$$

$$- i(1-s) \frac{\Omega + \Omega^{-1}s}{\Omega + \Omega^{-1}} \frac{L}{k}, \quad s = \xi/L,$$

$$\beta_3 = \frac{(1-s)^2}{\Omega + \Omega^{-1}} \frac{L}{k} + \frac{1}{\kappa_m^2} + i(1-s) \frac{\Omega + \Omega^{-1}s}{\Omega + \Omega^{-1}} \frac{L}{k}.$$

Нормированный спектр в (3.9) записан для общего случая распространения, когда C_ϵ , V_\perp и κ_0 могут зависеть от переменной интегрирования вдоль трассы. Для однородной трассы выражение для $w_S(f)$ несколько упрощается. Для сравнения с экспериментальными данными удобнее функция $u(f) = \frac{fw_S(f)}{\sigma_S^2}$, где

$$\sigma_S^2 = 2\pi^2 k^2 \int_0^L d\xi \int_0^\infty \kappa \Phi_\epsilon(\kappa) f_S(\kappa, \xi) d\kappa$$

— дисперсия флуктуаций фазы. На рис. 3.3 приведен спектр $u(f)$ при $\kappa_0^2 L/k = 10^{-4}$, $\kappa_m/\kappa_0 = 10^3$. В низкочастотной области ход представленных на этом рисунке спектров практически совпадает. Можно выделить два участка: линейный рост ($b \ll 1$) и спад пропорционально частоте в степени $-5/3$ ($b \gg 1$). В высокочастотной области ($\frac{2\pi f}{V_\perp} \sqrt{\frac{L}{k}} \gg 1$, $\frac{2\pi f}{\kappa_m V_\perp} \gg 1$) имеется различие в скоростях спада спектра. Спектр флуктуаций фазы для ограниченного пучка уже соответствующего спектра для неограниченных волн.

Для некоторых задач наряду со спектром $w_S(f)$ необходимо знание спектра флуктуаций разности фаз на базе $\rho - w_{\delta S}(f)$. Нетрудно показать [11], что спектр $w_{\delta S}(f)$ связан с $w_S(f)$ соотношением

$$w_{\delta S}(f) = 4 \sin^2 \frac{\pi \rho f}{V_{\perp}} w_S(f), \quad (3.10)$$

которое позволяет находить спектр разности фаз.

3. Экспериментальные исследования флуктуаций фазы и разности фаз световой волны

Основным способом получения информации о фазе световой волны в настоящее время служит анализ интерференционных картин, образованных либо смещением исследуемой волны с высококогерентным колебанием, либо смещением двух областей возмущенного фазового фронта.

Наиболее простым методом регистрации является фотографирование интерференционных картин с последующим определением контрастности полос. Наряду с легкой реализуемостью и наглядностью, этот метод обладает, однако, существенными недостатками. Главным из них является практическая невозможность регистрировать большие набеги фаз и работать в условиях значительных амплитудных флуктуаций. Тем не менее этим методом были получены некоторые важные результаты. В работах [12, 13] исследовалась зависимость структурной функции флуктуаций фазы от разнесения точек наблюдения и была показана тенденция к ее насыщению, а в работе [14] были измерены корреляционные функции флуктуаций фазы.

Более интересным и перспективным является метод оптического смещения, используемый совместно с цифровым фазометром оптического диапазона [15]. Остановимся на полученных здесь результатах.

Измерения структурной функции фазы в области малых масштабов ρ показали, что квадратичный участок $D_S(\rho)$ простирается несколько дальше, чем предсказывалось в [11]. На рис. 3.4 приведены результаты измерений, выполненных с помощью фазометра в приземном слое атмосферы.

На рис. 3.5 представлены результаты измерения $D_S(\rho)$ при варьировании разнесения точек измерения до 110 см. Эти данные свидетельствуют о том, что имеется насыщение структурной функции при некоторых значениях ρ , близких к внешнему масштабу турбулентности. Результаты, подобные приведенным на рис. 3.5, получены в ряде работ. Например, в [13] при измерении структурной функции $D_S(\rho)$ практически отсутствовал участок зависимости $D_S(\rho) \sim \rho^{1/2}$; как показывают оценки, внешний масштаб в этих экспериментах уменьшался до 20—30 см. В работе Бузера и др. [16] измерения структурной функции флуктуаций

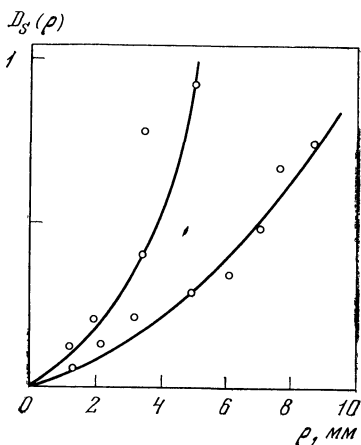


Рис. 3.4. Сравнение расчетных и эмпирических зависимостей $D_S(\rho)$ в области малых ρ (непрерывные кривые рассчитаны по формуле (2.62а))

Рис. 3.4

Рис. 3.5. Сравнение расчетных и эмпирических зависимостей $D_S(\rho)$ в области больших ρ

1 — область квадратичной зависимости $D_S(\rho)$; 2 — прямая рассчитана по формуле (2.69а); 3 — область насыщения

Рис. 3.6. Выпрямленная накопленная функция распределения фазовых флуктуаций в вероятностном масштабе

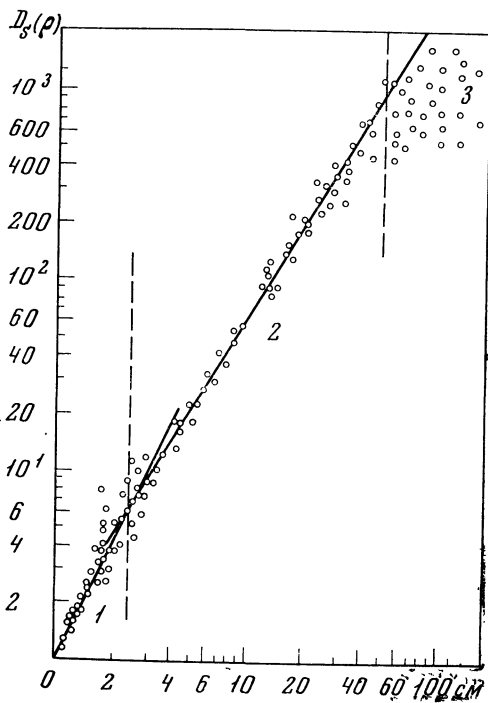


Рис. 3.5

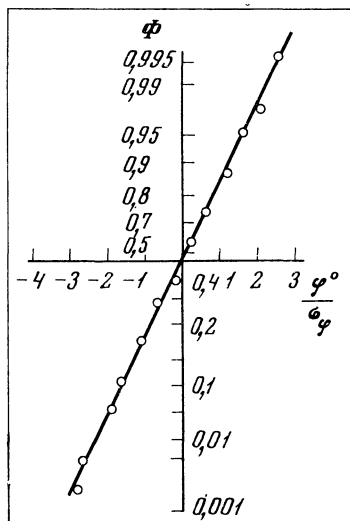


Рис. 3.6

фазы проведены для разнесений точек наблюдения до 22 см, и в этом случае была замечена тенденция к насыщению $D_S(\rho)$. Все перечисленные работы, выполненные в приземном слое при высотах трасс не более 1,5—2 м, показывают наличие насыщения функции $D_S(\rho)$ и необходимость использования для ее оценки модели спектра атмосферной турбулентности с внешним масштабом L_0 .

Распределение плотности вероятности фазовых флуктуаций было измерено в [18]; здесь было показано, что оно хорошо аппроксимируется нормальным законом (рис. 3.6).

Измерения временных статистических характеристик флуктуаций фазы с помощью модифицированного интерферометра Майкельсона методом оптического гетеродинамирования были выполнены авторами [18]. Измерения проводились на горизонтальных трассах длиной 95 и 200 м, высота луча над подстилающей поверхностью составляла 1,5 м. Измерялись нормированные временные корреляционные функции флуктуаций фазы как функции временной задержки τ . Чтобы привести данные к соответствующему пространственному разнесению $\rho = V_{\perp}\tau$, измерялась поперечная составляющая скорости ветра V_{\perp} . Для того чтобы построить коэффициент корреляции b_S как функцию безразмерного времени $\kappa_0 V_{\perp}\tau$ и провести сравнение с теоретической корреляционной функцией флуктуаций фазы, необходимо оценить волновое число κ_0 , соответствующее внешнему масштабу турбулентности. Это можно сделать из измерений C_S^2 и дисперсии флуктуаций фазы σ_S , предположив, что для приземного слоя атмосферы является справедливой кармановская модель спектра флуктуаций показателя преломления. На рис. 3.7 приведены корреляционные функции $b_S(\tau)$ как функции аргумента $\kappa_0 V_{\perp}\tau$. Соответствующие спектральные плотности $f_{w_S}(f)/\sigma_S^2$ (фурье-преобразование автокорреляционной функции) приведены на рис. 3.8.

Статистические характеристики флуктуаций разности фаз измерялись по двухпучковой схеме с использованием методики, описанной в [17]. Измерялась временная реализация разности фаз в центрах двух гауссовых пучков, разнесенных на расстояние ρ . Автокорреляционную функцию $B_{\delta S}(\tau)$ в предположении стационарности и изотропности полей флуктуаций фазы можно представить в виде

$$B_{\delta S}(\tau) = \langle [S(\rho, t) - S(0, t)] [S(\rho, t + \tau) - S(0, t + \tau)] \rangle = 2R_S(\tau) - B_S(\rho + V_{\perp}\tau) - B_S(\rho - V_{\perp}\tau). \quad (3.11)$$

На рис. 3.9 приведены рассчитанные для различных величин ρ (для случая $\rho \uparrow V_{\perp}$) функции $\gamma(\tau) = B_{\delta S}(\tau)/B_{\delta S}(0)$ в зависимости от аргумента $\kappa_0 V_{\perp}\tau$. Из сравнения кривых 1, 2, 3 видно, что уменьшение базы ($\kappa_0 \rho \rightarrow 0$) существенно уменьшает радиус положительной корреляции, в то время как увеличение разнесения пучков приводит к росту радиуса положительной корреляции и

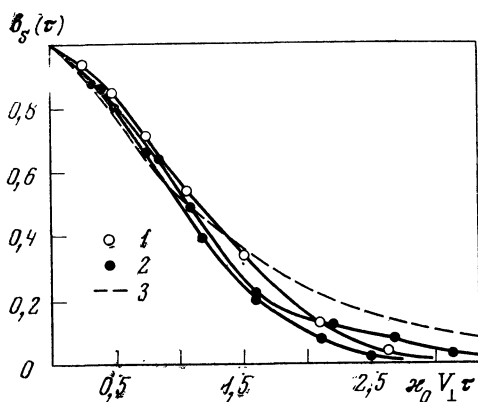


Рис. 3.7. Экспериментальные корреляционные функции флуктуаций фазы $b_S(\tau)$

1 — $L = 95$ м; 2 — $L = 200$ м; 3 — корреляционная функция $b_S(\rho)$ для плоской волны, $L = 100$ м, $\kappa_0 = 5$ м⁻¹, $\lambda = 0,63$ мкм

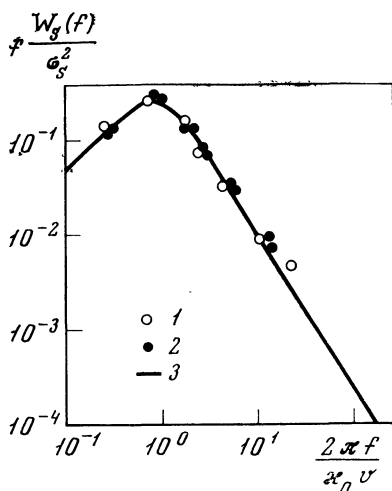


Рис. 3.8. Спектральные плотности $fw_S(f)/\sigma_S^2$ флуктуаций фазы (эксперимент)

1 — $L = 95$ м; 2 — $L = 200$ м; 3 — функция $fw_S(f)/\sigma_S^2$, рассчитанная для плоской волны, $L = 100$ м, $\lambda = 0,63$ мкм, $\kappa_0 = 5$ м⁻¹, $V_{\perp} = 1,2$ м/сек

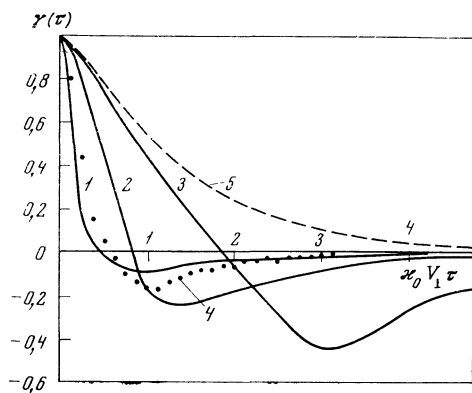


Рис. 3.9. Нормированные корреляционные функции флуктуаций разности фаз на базе ρ для коллимированного пучка $\Omega = 1$, $\lambda = 0,63$ мкм, $L = 100$ м, $\kappa_0^2/\kappa_m^2 = 10^{-6}$

- 1 — $\kappa_0 \rho = 0,2$;
- 2 — $\kappa_0 \rho = 1,0$;
- 3 — $\kappa_0 \rho = 3,0$;
- 4 — экспериментальные значения $\gamma(\tau)$ на трассе $L = 110$ м, $\rho = 10$ см;
- 5 — автокорреляционная функция флуктуаций фазы на оси пучка

к увеличению глубины отрицательной корреляции. Измерения флуктуаций разности фаз проводились в диапазоне значений ρ от 2 см до 1,5 м. Эффективный размер пучков при входе в атмосферу был равен 1 см, длина трассы $L = 110$ м, высота над подстилающей поверхностью $\sim 1,5$ м. На рис. 3.9 точками нанесена экспериментально измеренная корреляционная функция разности фаз $\gamma(\tau)$ ($\kappa_0 \rho = 0,5$).

§ 2. НАРУШЕНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ В ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКАХ

С флуктуациями фазы оказывается тесно связанным вопрос о нарушении когерентности при распространении волновых пучков. Следуя М. Борну и Э. Вольфу [19], будем определять пространственный радиус когерентности в плоскости $x = \text{const}$ с помощью функции когерентности второго порядка $\Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) = \overline{u(\rho_1)u^*(\rho_2)}$ (черта сверху означает усреднение по флуктуациям поля). Если переписать это определение в переменных $\mathbf{R} = 1/2(\rho_1 + \rho_2)$, $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и ввести комплексную степень когерентности

$$\gamma(\mathbf{R}, \rho) = \frac{\Gamma_2(\mathbf{R}, \rho)}{[\Gamma_2(\mathbf{R} + \rho/2, 0)\Gamma_2(\mathbf{R} - \rho/2, 0)]^{1/2}}, \quad (3.12)$$

то пространственным радиусом когерентности называется характерный масштаб убывания $|\gamma(\mathbf{R}, \rho)|$ по разностному аргументу ρ . Для функции когерентности в турбулентной среде в главе II было выведено уравнение (2.112). В переменных (\mathbf{R}, ρ) оно имеет вид

$$2ik \frac{\partial \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)}{\partial x} + 2\nabla_\rho \nabla_{\mathbf{R}} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) + \frac{i\pi k^3}{2} H(x, \rho) \Gamma(x, \mathbf{R}, \rho) = 0 \quad (3.13)$$

с граничным условием для детерминированного исходного поля

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \rho) \equiv \Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = u_0(\mathbf{R} + \rho/2)u_0^*(\mathbf{R} - \rho/2). \quad (3.14)$$

Напомним, что при выводе (2.112) произведено усреднение по ансамблю реализаций случайного поля \tilde{e} , и входящая в уравнение функция $H(x, \rho)$ характеризует статистические свойства флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$H(x, \rho) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(x; 0, \boldsymbol{\kappa}) (1 - \cos \boldsymbol{\kappa} \rho) d^2 \boldsymbol{\kappa}. \quad (3.15)$$

Если начальное поле u_0 флуктуирует, то в качестве граничного условия (3.14) надо подставлять функцию

$$\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = \overline{u_0(\mathbf{R} + \rho/2)u_0^*(\mathbf{R} - \rho/2)}. \quad (3.14a)$$

Для примера [20] приведем здесь граничное условие в случае частично-когерентного светового пучка, поле которого имеет вид

$$u_0(\rho_1) = A(\rho_1) \exp(i\varphi(\rho_1)).$$

Здесь $A(\rho_1)$ — некоторое регулярное комплексное поле, зависящее от расстояния ρ_1 от оси пучка, а $\varphi(\rho_1)$ — случайная фаза со средним значением, равным нулю, и распределенная, например, по гауссовскому закону. Для определенности будем в дальнейшем

считать, что поле $A(\rho_1)$ соответствует фокусируемому гауссовскому пучку

$$A(\rho_1) = u_0 \exp\left(-\frac{\rho_1^2}{2a^2} - \frac{ik\rho_1^2}{2l}\right), \quad (3.16)$$

где a — эффективный начальный размер пучка, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а F — фокусное расстояние. Предположим далее, что флуктуации фазы φ однородны, так что

$$\overline{[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]^2} = E(\rho_1 - \rho_2).$$

Используя известное равенство для нормально распределенных величин

$$\overline{\exp\{i[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]\}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\overline{[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]^2}\right\},$$

легко получить следующее представление для функции когерентности частично-когерентного пучка:

$$\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = |u_0^2| \exp\left\{-\frac{R^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{4a^2} - \frac{ik\rho\mathbf{R}}{l} - \frac{1}{2}E(\rho)\right\}. \quad (3.17)$$

Для дальнейшего необходимо задаться каким-либо конкретным видом структурной функции разности фаз $E(\rho)$. Для упрощения расчетов мы будем использовать квадратичную аппроксимацию¹:

$$E(\rho) = \frac{\rho^2}{2a_k^2}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) граничное условие (3.17) принимает вид

$$\Gamma_2^0(R, \rho) = |u_0^2| \exp\left\{-\frac{R^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{4a^2} - \frac{ik\rho\mathbf{R}}{l} - \frac{\rho^2}{4a_k^2}\right\}. \quad (3.19)$$

Нетрудно теперь убедиться, что a_k является, согласно данному выше определению, исходным радиусом когерентности пучка. Заметим еще, что радиус когерентности a_k связан с угловой шириной пучка ψ_0 в области, где сформировалась диаграмма направленности (при $F = \infty$):

$$\psi_0 = \frac{1}{ka} \sqrt{1 + a^2/a_k^2} \quad (\text{при } x \gg x_0 = ka^2/(1 + a^2/a_k^2)^{1/2}). \quad (3.20)$$

Это дает, в частности, способ его практического измерения.

Переход к полностью когерентному гауссовскому пучку осуществляется при $a_k \rightarrow \infty$:

$$\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = |u_0^2| \exp\left(-\frac{R^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{4a^2} - \frac{ik\rho\mathbf{R}}{l}\right). \quad (3.19a)$$

¹ Отметим, что предложенная аппроксимация соответствует волнам с плоским фазовым фронтом, направление которого является случайным. Такой выбор объясняется удобством этого выражения для расчетов средней интенсивности в гауссовском пучке (3.16). В качестве другой возможной аппроксимации укажем $E(\rho) = |\rho|/a_k$.

Модуль комплексной степени когерентности в этом случае равен единице и, следовательно, радиус когерентности бесконечен. Другим частным случаем полностью когерентного исходного поля является плоская волна. Получим для нее из уравнения (3.13) закон убывания радиуса когерентности по мере прохождения турбулентной трассы. Для плоской волны из однородности флуктуаций поля ϵ следует, что $\nabla_R \Gamma_2 = 0$, так как функция Γ_2 не должна зависеть от R . Уравнение (3.13) в этом случае имеет решение

$$\Gamma_2(x, \rho) = |u_0^2| \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H(\xi, \rho) d\xi \right\}. \quad (3.21)$$

Используя формулы (3.15) и (2.53), показатель экспоненты в (3.21) можно связать со структурной функцией разности комплексных фаз в плоской волне $D_{\psi\psi^*}$:

$$\Gamma_2(x, \rho) = |u_0^2| \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\psi\psi^*}(x, \rho) \right\}. \quad (3.22)$$

Функция $D_{\psi\psi^*}$ дается формулой (2.55), из которой легко получить следующие предельные случаи:

$$D_{\psi\psi^*} = \begin{cases} 0,82 C_\epsilon^2 k^2 x l_0^{-1/3} \rho^2, & \rho \ll l_0, \end{cases} \quad (3.23a)$$

$$\begin{cases} 0,73 C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{5/3}, & \rho \gg l_0. \end{cases} \quad (3.23b)$$

Таким образом, можно выделить два асимптотических случая. Если флуктуации очень сильны, так что среднеквадратичный набег разности фаз велик уже при расстоянии между лучами порядка внутреннего масштаба турбулентности l_0 :

$$D_{\psi\psi^*}(l_0) \sim C_\epsilon^2 l_0^2 x l_0^{5/3} \gg 1, \quad (3.24)$$

то радиус когерентности определяется формулой

$$\rho_T = (0,41 C_\epsilon^2 k^2 l_0^{-1/3} x)^{-1/2}. \quad (3.25)$$

Если же неравенство (3.24) меняется на противоположное, что обычно имеет место в реальной атмосфере, радиус когерентности уже не зависит от внутреннего масштаба турбулентности l_0 и равен

$$\rho_T = (0,365 C_\epsilon^2 k^2 x)^{-1/5}. \quad (3.26)$$

Для сферической волны выражения для радиуса когерентности отличаются от приведенных численным коэффициентом:

$$\rho_{T, \text{сф}} = \begin{cases} (0,137 C_\epsilon^2 k^2 l_0^{-1/3} x)^{-1/2}, & D_{\psi\psi^*}(l_0) \gg 1, \\ (0,137 C_\epsilon^2 k^2 x)^{-1/5}, & D_{\psi\psi^*}(l_0) \ll 1. \end{cases} \quad (3.27)$$

Формула (3.22) получила экспериментальную проверку в работе А. К. Артемьева и А. С. Гурвича [21], где по распределению средней интенсивности в фокальной плоскости линзы изучался

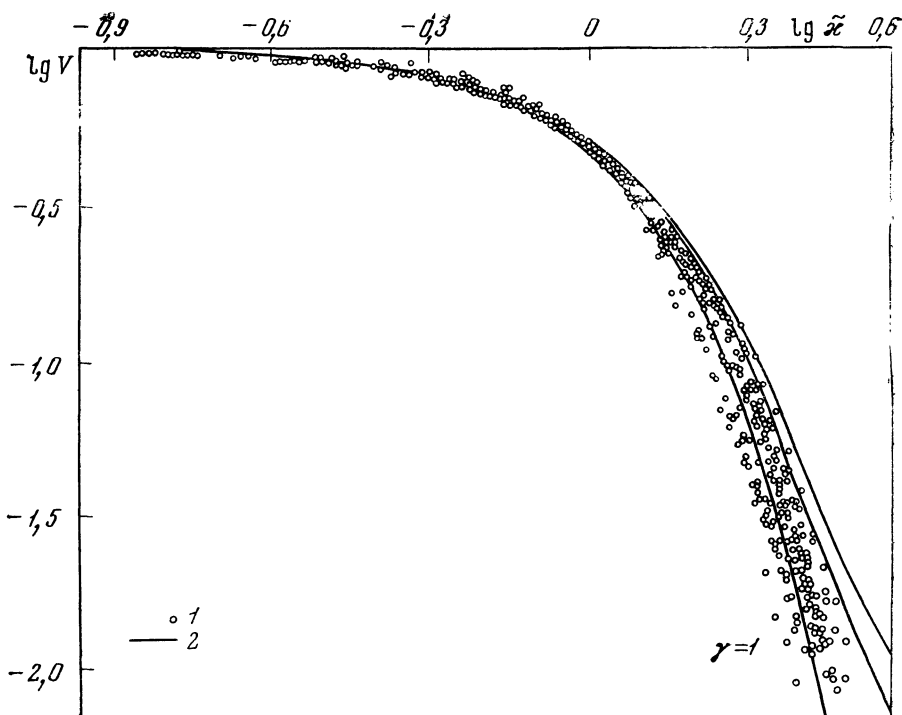


Рис. 3.10. Сравнение экспериментально измеренной зависимости спектра функции когерентности V (1) от безразмерного волнового числа \tilde{k} и теоретического расчета (2)

спектр функции когерентности прошедшей турбулентный слой волны. Результаты измерений [21], приведенные на рис. 3.10, обнаруживают хорошее согласие опытных и расчетных данных.

Для пространственно-ограниченного светового пучка уже не удается получить таких простых формул. В этом случае необходимо решать уравнение (3.13) с граничными условиями (3.14) (для когерентного поля) или (3.14а) (для частично-когерентных пучков). Такое решение для произвольного граничного условия было впервые получено Л. С. Долиным [22]. Не повторяя вывода, мы выпишем его в обозначениях, использованных в работе В. И. Кляцкина и В. И. Татарского [23]:

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \int d^2 R' \int d^2 \rho' \Gamma_2^0(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \rho - \rho') \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}' \cdot \rho - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H(x', \rho - \rho' (1 - x'/x)) dx' \right\}. \quad (3.28)$$

Оценим приближенно изменение радиуса когерентности в турбулентной среде для коллимированного гауссовского пучка. После интегрирования по \mathbf{R}' получаем

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{u_0^2 k^2 a^2}{4\pi x^2} \int d^2 \rho' \exp \left\{ \frac{ik\mathbf{R}\rho'}{x} - \frac{(\rho - \rho')^2}{4a^2} \right\} \times \quad (3.29)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{k^2 a^2 \rho'^2}{4x^2} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H(x', \rho - \rho'(1 - x'/x)) dx' \right\}.$$

Дальнейшее интегрирование точно выполнить не удастся, и мы воспользуемся квадратичной аппроксимацией функции $H(\rho)$, имеющей в области, существенной для интегрирования, вид $H(\rho) = \alpha \rho^{1/2}$. Такая аппроксимация, эквивалентная замене $\exp(-\alpha \rho^{1/2}) \rightarrow \exp(-\alpha^{1/2} \rho^2)$, использовалась в работе [24] для оценок профилей средней интенсивности и дала результаты, хорошо согласующиеся с точным расчетом. В этом приближении для функции когерентности получается следующая формула:

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{a^2 u_0^2}{R_0^2} \exp \left\{ -\frac{R^2}{R_0^2} - \frac{\rho^2}{4\rho_0^2} + i \frac{\delta}{R_0^2} \rho \mathbf{R} \right\}, \quad (3.30)$$

где введены обозначения

$$R_0 = a \left[1 + \Omega^{-2} \left(1 + \frac{4}{3} \beta_0^{1/2} \Omega \right) \right]^{1/2}$$

$$\left(\beta_0 = 0,365 C_\epsilon^2 k^7 l_0^3 x^{11/2}, \quad \Omega = \frac{ka^2}{x} \right),$$

$$\rho_0 = R_0 \left[1 + 4\beta_0^{1/2} \Omega \left(1 + \frac{1}{3\Omega^2} \right) + \frac{4}{3} \beta_0^{1/2} \right]^{-1/2}, \quad (3.31)$$

$$\delta = (1 + 2\beta_0^{1/2}) \Omega^{-1}.$$

Для радиуса когерентности пучка $\rho_{\text{кор}}$ отсюда получаем

$$\rho_{\text{кор}}^2 = \frac{4\rho_0^2 R_0^2}{R_0^2 - \rho_0^2} = \rho_T^2 \frac{1 + 1/\Omega^2 + 4/3 \beta_0^{1/2} \Omega}{1 + 1/3 \Omega^2 + 1/3 \beta_0^{1/2} \Omega}. \quad (3.32)$$

Из последней формулы видно, что радиус когерентности пучка не лежит в пределах между радиусом когерентности плоской волны и радиусом когерентности сферической волны и зависит от величины β_0 , пропорциональной среднему квадрату флуктуаций амплитуды χ^2 в первом приближении МПВ.

Отметим, что, так как функция $H(\rho)$ имеет квадратичную асимптоту при $\rho \ll l_0$, формула (3.32) становится точной в асимптотическом смысле, если выполняется условие

$$\min(a, x/ka) \ll l_0,$$

и под ρ_T в этом случае надо понимать выражение (3.25).

В заключение этого параграфа рассмотрим другой предельный случай формулы (3.19) — переход к полностью некогерентному

(тепловому) источнику. Устремляя в (3.19) $a_k \rightarrow 0$, получим

$$\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = 4\pi u_0^2 a_k^2 e^{-\frac{R^2}{a^2}} \delta(\rho). \quad (3.196)$$

Отметим, что эта формула является частным случаем общего соотношения для функции когерентности теплового источника. В общем случае, если $a_k \rightarrow 0$, $\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho)$ можно аппроксимировать выражением

$$\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = b^2 I(\mathbf{R}) \delta(\rho). \quad (3.33)$$

Величину a_k в случае использования этой формулы можно однозначно определить из дифракционной теории построения оптического изображения в однородной среде. При этом оказывается, что $b = \lambda/\sqrt{2\pi}$, т. е. радиус когерентности теплового источника имеет порядок длины волны. Поэтому в общем случае для полностью некогерентного источника света можно принять

$$\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = \frac{\lambda^2}{2\pi} I(\mathbf{R}) \delta(\rho). \quad (3.34)$$

На расстоянии x в турбулентной среде, согласно (3.28) и (3.196),

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{u_0^2 k^2 a^2 a_k^2}{x^2} \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik\rho\mathbf{R}}{x} - \frac{k^2 a^2 \rho^2}{4x^2} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H\left(x', \rho \frac{x'}{x}\right) dx'\right\}. \quad (3.35)$$

Для модуля комплексной степени когерентности имеем

$$|\gamma(x, \mathbf{R}, \rho)| = \exp\left\{-\frac{k^2 a^2 \rho^2}{4x^2} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H\left(x', \rho \frac{x'}{x}\right) dx'\right\}. \quad (3.36)$$

Отсюда видно, что имеются две противоположные тенденции изменения пространственного радиуса когерентности первоначально некогерентного источника. С одной стороны, он растет пропорционально $d_0 = 2x/ka$ (за счет уменьшения его видимого углового размера $\gamma_S = a/x$), а с другой стороны — уменьшается из-за потери когерентности в турбулентной среде. Если теперь, как и при выводе (3.32), принять квадратичную аппроксимацию функции $H(\rho)$, то для радиуса когерентности теплового источника в турбулентной среде получаем формулу

$$\rho_{\text{кор}} = \frac{d_0(x)}{(1 + d_0^2/\rho_T^2)^{1/2}}, \quad (3.37)$$

где ρ_T — радиус когерентности сферической волны, определяемый формулой (3.27). Отсюда видно, что радиус когерентности в турбулентной среде достигает максимума при

$$x_m = (0,285 C_\epsilon^2 k^{1/3} a^{-2/3})^{-3/4}. \quad (3.38)$$

и равен

$$\rho_{\text{ког},m} = (0,8C_{\epsilon}^2 k^3 a)^{-1/2}. \quad (3.39)$$

Интересным частным случаем являются астрономические источники типа звезд. В этом случае на границу атмосферы (C_{ϵ}^2 — убывающая функция высоты z) падает уже частично когерентный свет. Связанный с турбулентностью масштаб ρ_T , который в данном случае следует подставлять в (3.37), принимает вид

$$\rho_T = (0,375 k^2 N_0 \sec^2 \theta)^{-1/2}, \quad (3.40)$$

где θ — зенитный угол звезды, а $N_0 = \int_0^{\infty} C_{\epsilon}^2(z) dz$ — интеграл по всей толще атмосферы от C_{ϵ}^2 , который на практике получают из измерений дрожаний звезд в телескопах. Отметим, что при определении угловых диаметров звезд с помощью интерферометра Майкельсона [25] фактически измеряется средний радиус когерентности $\bar{\rho}_{\text{ког}}$, вообще говоря, не совпадающий с вакуумным, и для нахождения углового диаметра объекта можно пользоваться формулой

$$\gamma_S = \frac{2}{k \bar{\rho}_{\text{ког}}} \sqrt{1 - \frac{\bar{\rho}_{\text{ког}}^2}{\rho_T^2}}, \quad (3.41)$$

учитывающей влияние турбулентности атмосферы.

§ 3. ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ АТМОСФЕРЫ НА РАБОТУ СИСТЕМ ОПТИЧЕСКОГО ГЕТЕРОДИНИРОВАНИЯ

Метод оптического гетеродинного приема сигналов заключается в фотосмещении излучения, несущего информацию, и излучения опорного гетеродина с последующим выделением полезного сигнала. Основным условием эффективности гетеродинного приема является высокая когерентность смешиваемых на квадратичном оптическом детекторе сигналов. Турбулентная атмосфера, внося искажения в амплитудную и фазовую структуру сигнала, является помехой. Дадим ниже характеристику ее влияния на сигнал когерентной гетеродинной системы связи.

Расчет влияния турбулентной атмосферы на гетеродинный оптический приемник впервые был выполнен Гарднером [26] и затем Фридом [27]. Следуя этим работам, рассмотрим действие оптического гетеродинного приемника с амплитудной модуляцией.

Если невозмущенный оптический сигнал задан выражением

$$E_S = A_S \exp(2\pi i f_s t + \Phi_S), \quad (3.42)$$

а волна гетеродина имеет вид

$$E_0 = A_0 \exp\{2\pi i f_0 t + \Phi_0\}, \quad (3.43)$$

то фототок, создаваемый совмещенными волнами в отсутствие турбулентных искажений, равен

$$i = \eta \int_{\Sigma} (E_0 + E_S)(E_0 + E_S)^* d\Sigma. \quad (3.44)$$

Здесь η — чувствительность фотодетектора, а интегрирование производится по поверхности Σ приемника, который мы для определенности будем считать кругом диаметра D .

Если принять обычное для оптических гетеродинных систем условие $A_0 \gg A_S$ и пренебречь квадратичным по A_S членом, то выражение для фототока можно представить в виде

$$i = \eta \frac{\pi}{4} D^2 [A_0^2 + 2A_0 A_S \cos(2\pi \Delta f t + \Delta \Phi)], \quad (3.45)$$

где $\Delta f = f_S - f_0$, $\Delta \Phi = \Phi_S - \Phi_0$.

Фототок компоненты с разностной частотой, несущей информацию, получается отсюда равным

$$i_S = \eta \frac{\pi}{2} D^2 A_0 A_S \cos(2\pi \Delta f t + \Delta \Phi). \quad (3.46)$$

Мощность сигнала в нагрузке R будет равна $S = (iG)^2 R$ (G — коэффициент усиления усилителя тока). Если произвести теперь усреднение по времени за период, существенно превышающий $1/\Delta f$, но малый по сравнению с обратной шириной информационной полосы, то для мощности протектированного сигнала получим

$$S = \frac{1}{2} \left(\eta \frac{\pi}{2} D^2 A_0 A_S \right)^2 G^2 R. \quad (3.47)$$

Средний фототок до усилителя равен

$$i_{cp} = \eta \frac{\pi}{4} D^2 A_0^2,$$

а его среднеквадратичные флуктуации в единичной полосе частот $i' \equiv \sqrt{\overline{\delta i^2}} = (2i_{cp} e)^{1/2}$ (e — заряд электрона). Если тепловой шум в нагрузке мал по сравнению с дробовым шумом фотоэлектронов (коэффициент усиления G достаточно велик), то мощность шума в нагрузке в единичной полосе частот будет равна

$$N = (i'G)^2 R = eG^2 \eta \frac{\pi}{2} D^2 A_0^2 R, \quad (3.48)$$

а отношение сигнал/шум в однородной среде запишется в виде

$$S/N \equiv W_0(D) = (\eta/e) \frac{\pi}{4} A_S^2 D^2. \quad (3.49)$$

Если сигнальная волна прошла в турбулентной атмосфере некоторый путь, то ее амплитуда и фаза получили возмущение, и ее можно записать в виде

$$E'_S = E_S u, \quad (3.50)$$

где u — комплексный множитель, учитывающий влияние турбулентной среды. Так как u зависит от координаты, интегрирование по поверхности приемника, как при переходе от (3.44) к (3.45), сразу выполнить не удастся. Проведя с учетом этого рассуждения, использованные при выводе (3.47), можно получить следующее выражение для мощности фототока:

$$S' = (\eta A_0 A_S G)^2 R \int_{\Sigma} d^2 r_1 \int_{\Sigma} d^2 r_2 u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2). \quad (3.51)$$

Выполняя в этой формуле усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\tilde{\epsilon}$, мы получим под знаком интеграла рассмотренную в предыдущем параграфе функцию когерентности

$$\langle S' \rangle = (\eta A_0 A_S G)^2 R \int_{\Sigma} d^2 r_1 \int_{\Sigma} d^2 r_2 \Gamma_2(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (3.52)$$

Если выбрать теперь в качестве сигнальной плоскую волну, флуктуации в которой однородны и изотропны (функция когерентности зависит только от $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$), интеграл (3.52) можно свести к однократному:

$$\langle S' \rangle = \pi (\eta A_0 A_S G)^2 R D^2 \int_0^D \left[\arccos \frac{r}{D} - \frac{r}{D} \sqrt{1 - r^2/D^2} \right] \times \\ \times \Gamma_2(x, r) r dr. \quad (3.53)$$

Здесь $\Gamma_2(x, \mathbf{r})$ определяется формулой (3.22):

$$\Gamma_2(x, \mathbf{r}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\psi\psi^*}(x, r) \right\} = \exp \left\{ - (r/\rho_T)^{1/2} \right\},$$

где $\rho_T = (0,365 C_\epsilon^2 k^2 x)^{-1/2}$. Для отношения сигнал/шум имеем

$$W(D) = 8 (\eta/e) A_S^2 D^2 \int_0^1 (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2}) \exp \times \\ \times (-D^{1/2}/\rho_T^{1/2} \xi^{1/2}) \xi d\xi. \quad (3.54)$$

Перепишем эту формулу в более удобном виде

$$W(D) = W_0(\rho_T) \Psi(D/\rho_T). \quad (3.55)$$

Введенная здесь функция

$$\Psi(V) = \frac{32}{\pi} V^2 \int_0^1 (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2}) \exp(-V^{1/2} \xi^{1/2}) \xi d\xi \quad (3.56)$$

показывает, как при увеличении диаметра приемника отношение сигнал/шум приближается к значению этого отношения в однородной среде при диаметре объектива $D = \rho_T$. При малых V функция $\Psi(V) \sim V^2$, а при больших значениях аргумента

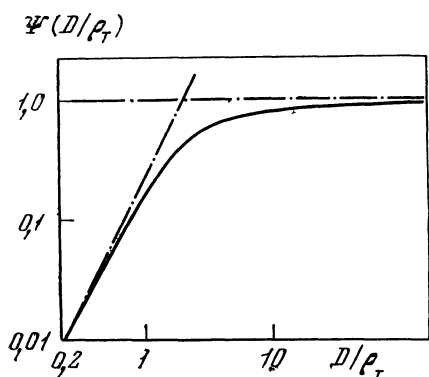


Рис. 3.11. Зависимость функции Ψ от нормированного диаметра D/ρ_T

$\Psi(V) \rightarrow 1$. Максимальное значение отношения сигнал/шум, которое можно достичь в турбулентной среде, равно $W_0(\rho_T)$, и увеличение диаметра приемника целесообразно лишь до размеров порядка ρ_T . Таким образом, оптимальным размером приемного устройства является радиус когерентности волны, что хорошо понятно из качественных соображений.

Результаты численного расчета функции $\Psi(V)$ по формуле (3.56) представлены на рис. 3.11. Из него видно, что «загиб» кривой наступает при значениях радиуса приемного объектива порядка ρ_T .

При использовании в качестве сигнальной волны лазерного пучка размер оптимальной апертуры увеличивается в соответствии с формулой (3.32), оценивающей радиус когерентности для пространственно-ограниченного пучка.

Экспериментальная реализация оптического гетеродинирования была проведена в работе Голдстейна, Майлса и Шабо [28]. Эксперимент строился по локационной схеме, и в качестве сигнала использовалось излучение лазеров с длинами волн 0,63 и 1,15 мкм. Сдвиг частоты опорного сигнала Δf достигался за счет отражения от движущегося уголкового отражателя.

На трассах 2 и 12 км с помощью анализатора спектра наблюдался сигнал биений в полосе около 50 кГц. Была также измерена усредненная мощность сигнала биений в зависимости от диаметра приемной апертуры. В различное время суток размер эффективных апертур варьировал от 1 до 10 см, что качественно согласуется с теоретическими оценками.

В ряде других работ системы с оптическим гетеродинированием использовались для установления когерентной связи на длинах волн $\lambda = 3,39$ мкм [29] и $\lambda = 10,6$ мкм [30]. Было выяснено, что с увеличением длины волны использованного излучения эффективность оптического гетеродинирования в атмосфере растет. Это также согласуется с проведенным выше рассмотрением, ибо радиус когерентности ρ_T , как видно из формулы (3.26), растет, как $\lambda^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Татарский*. Докл. АН СССР, 1956, 107, № 2, 245.
2. *А. И. Кон, З. И. Фейзулин*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 71.
3. *А. И. Кон, В. И. Татарский*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1965, 8, № 5, 870.
4. *R. A. Schmeltzer*. Quart. Appl. Math., 1967, 24, 339.
5. *A. Isimaru*. Rad. Sci., 1969, 4, N 4, 295.
6. *В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 6, 865.
7. *В. П. Лукин, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*. Тезисы докладов Юбилейной конференции РДФ ГТУ, 105. Томск, 1973.
8. *R. F. Lutmirski, H. Yura*. J. Opt. Soc. Amer., 1971, 61, N 4, 482.
9. *A. Consortini, I. Ronchi*. Lettere al Nuovo Cimento, 1972, 3, N 3, 571.
10. *В. П. Лукин, В. Л. Миронов, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*. «Радиотехника и электроника», 1975, 20, № 6, 68.
11. *В. И. Татарский*. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
12. *В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1968, № 5, 82.
13. *M. Betoletti, M. Carnevale, L. Muzii, D. Sette*. Appl. Optics, 1968, 7, N 11, 2246.
14. *Т. И. Арсеньян, Ф. Ф. Пашков, А. А. Семенов, А. А. Тищенко, Н. И. Римский*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 8, 1228.
15. *В. В. Покасов*. Кандидатская диссертация. Томск, 1972.
16. *R. F. Vuser, I. I. Kainz*. Appl. Optics, 1964, 3, N 12, 1495.
17. *В. П. Лукин, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 12, 1861.
18. *В. П. Лукин, В. Л. Миронов, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*. «Радиотехника и электроника», 1973, 18, № 3, 502.
19. *М. Борн, Э. Вольф*. Основы оптики. М., «Наука», 1970.
20. *А. И. Кон, В. И. Татарский*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 10, 1547.
21. *А. К. Артемьев, А. С. Гурвич*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 5, 734.
22. *Л. С. Долин*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 6, 840.
23. *В. И. Кляцкин, В. И. Татарский*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 7, 1061.
24. *W. P. Brown Jr.* J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, N 1, 45.
25. *Браун Р. Хэнбери*. УФН, 1972, 107, 523.
26. *S. Gardner*. IEEE Internat. Convent. Rec., 1964, 12, N 6, 337.
27. *D. L. Fried*. Proc. IEEE, 1967, 55, N 1, 57.
28. *Голдстейн, Майлс, Шабо*. ТИИЭР, 1965, 13, № 9, 1333.
29. *R. F. Goodwin*. In: IEEE Conference of Laser Engineering and Application, 1967, p. 28.
30. *R. F. Lucy, K. Lang*. Appl. Optics, 1968, 7, N 10, 1965.

СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛАЗЕРНОМ ПУЧКЕ

Эта глава посвящена изучению средней интенсивности в пространственно-ограниченных световых пучках. Вопрос этот, естественно, является основным при оценке «энергетики» различных практических систем, работающих в турбулентной атмосфере, ибо именно «расплывание» профиля средней интенсивности из-за рассеяния на турбулентных пульсациях показателя преломления приводит к падению интенсивности на оси пучка по сравнению с той, которая должна была бы наблюдаться в однородной среде.

Рассмотрение вопроса о средней интенсивности удастся провести в приближении марковского случайного процесса, так как уравнение (2.112) для функции когерентности второго порядка Γ_2 допускает аналитическое решение.

§ 1. КОГЕРЕНТНЫЙ СВЕТОВОЙ ПУЧОК

Будем исходить из уравнения (3.13) для функции когерентности $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)$, где $\rho = \rho_1 - \rho_2$ — разнесение, а $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ — радиус-вектор положения центра тяжести точек наблюдения:

$$2ik \frac{\partial \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)}{\partial x} + 2\nabla_\rho \nabla_{\mathbf{R}} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) + \frac{i\pi k^3}{2} H(x, \rho) \Gamma_2 = 0 \quad (4.1)$$

с граничным условием при $x = 0$, которое в случае детерминированного поля u_0 имеет вид

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \rho) \equiv \Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho) = u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2} \rho \right) u_0^* \left(\mathbf{R} - \frac{1}{2} \rho \right). \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.1) можно получить важное следствие. Проинтегрируем уравнение по \mathbf{R} . Если функция когерентности на границе $\Gamma_2^0(\mathbf{R}, \rho)$ убывает с ростом $|\mathbf{R}|$ быстрее, чем R^{-2} , то, используя теорему Гаусса, получим для усредненной по пучку функции когерентности

$$\gamma_2(x, \rho) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) d^2R$$

следующее простое уравнение:

$$\frac{\partial \gamma_2(x, \rho)}{\partial x} + \frac{\pi k^2}{4} H(x, \rho) \gamma_2(x, \rho) = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$\gamma_2(x, \rho) = \gamma_2(0, \rho) \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H(x', \rho) dx' \right\}. \quad (4.3)$$

Полагая в (4.3) $\rho = 0$ и замечая, что $H(x', 0) = 0$, приходим к следующему закону сохранения:

$$\gamma_2(x, 0) = \gamma_2(0, 0) = \text{const.}$$

Если учесть, что интенсивность $I(x, \mathbf{R}) = \Gamma_2(x, \mathbf{R}, 0)$, то отсюда нетрудно найти

$$\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, \mathbf{R}) d^2R = \iint_{-\infty}^{\infty} I(0, \mathbf{R}) d^2R. \quad (4.4)$$

Этот результат является следствием закона сохранения энергии и означает, что интеграл от средней интенсивности произвольного пучка (с убывающей, как было указано выше, быстрее $1/R^2$ начальной интенсивностью) в любом сечении сохраняется при распространении¹.

В предыдущей главе было выписано решение уравнения (4.1) при произвольном граничном условии [1]:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = & \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \Gamma_2^0(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \rho - \rho') \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}' \rho' - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H \left(x', \rho - \rho' \left(1 - \frac{x'}{x} \right) \right) dx' \right\}. \end{aligned}$$

Сейчас нас будет интересовать средняя интенсивность, которая получается из $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)$ при $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = & \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \Gamma_2^0(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \rho') \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}' \rho' - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H \left(x', \rho' \left(1 - \frac{x'}{x} \right) \right) dx' \right\}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Как видно из формулы (4.5), для конкретных расчетов средней интенсивности нужно задать начальную функцию когерентности Γ_2^0 .

¹ Отметим, что для плоской волны, если пренебречь поглощением, средняя интенсивность остается неизменной во всех точках среды.

Рассмотрим сначала чисто когерентный источник — гауссовский фокусируемый пучок. Соответствующая граничная функция когерентности равна

$$I_2^0(\mathbf{R}, \rho) = u_0^2 \exp\left(-\frac{R^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{4a^2} - \frac{ik\rho\mathbf{R}}{F}\right). \quad (3.19a)$$

Средняя интенсивность в таком пучке, как следует из формулы (4.5) после подстановки в нее (3.19a) и интегрирования по \mathbf{R}' , равна

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle &= \frac{k^2 a^2 u_0^2}{4\pi x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \times \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{x} \rho' \mathbf{R} - \frac{(\rho')^2 g^2(x)}{4a^2} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H\left(x', \rho' \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\right) dx'\right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь введено обозначение

$$g(x) = \left[1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{F}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (4.7)$$

Выполним в (4.6) интегрирование по угловой переменной вектора ρ' и перейдем к безразмерным переменным в оставшихся интегралах. В результате для профиля средней интенсивности в когерентном гауссовском фокусируемом пучке получим

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle &= I_0(x) \int_0^{\infty} J_0\left(\frac{2kaR}{xg(x)} t^{1/2}\right) \times \\ &\times \exp\left\{-t - \frac{\pi k^2 x}{4} \int_0^1 H\left(x\xi, \frac{2a}{g(x)} (1 - \xi) t^{1/2}\right) d\xi\right\} dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь J_0 — функция Бесселя, $I_0(x)$ — интенсивность на оси пучка в однородной среде:

$$I_0(x) = \frac{u_0^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} = \frac{u_0^2 a^2}{R_0^2(x)}, \quad (4.9)$$

где $R_0(x) = xg(x)/ka$ — эффективный размер пучка на расстоянии x в однородной среде. Воспользовавшись формулой (4.8), средней интенсивности пучка в турбулентной среде со спектром

$$\Phi_\epsilon(\kappa) = A_0 C_\epsilon^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) \quad (A_0 = 0,033)$$

можно представить в виде

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = I_0(x) \int_0^{\infty} J_0(\beta t^{1/2}) \exp\left\{-t - \frac{1}{2} D_{\psi\psi^*}\left(x, \frac{2a}{g(x)} t^{1/2}\right)\right\} dt. \quad (4.10)$$

В этой формуле введены обозначения

$$\beta = 2kaR/xg(x), \quad (4.11)$$

$$D_{\psi^*}(x, \rho) = \frac{6}{5} \pi^2 A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\varepsilon^2 k^2 \kappa_m^{-5/3} \times \\ \times \int_0^x \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2 (x-\xi)^2}{4x^2}\right) - 1 \right] d\xi \quad (4.12)$$

(${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция). Функция (4.12), которая определяет влияние турбулентной среды на интенсивность в пучке, совпадает с рассчитанной по МПВ в гл. II структурной функцией разности фаз сферических волн $D_{\psi^*}(x, \rho)$ на базе $\rho = 2a/g(x)$ [ср. (4.12) и (2.81)]. Физический смысл этого совпадения проясняется при расчете средней интенсивности с использованием метода Гюйгенса — Кирхгофа [2]. При этом функция D_{ψ^*} естественным образом появляется в результате учета интерференции парциальных сферических волн со случайными набегами фаз. Это рассмотрение приводит к формуле (2.102), совпадающей при $\beta = 0$ с (4.10).

Исследуем подробнее выражение (4.10) при различных значениях параметров. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функции D_{ψ^*} :

$$D_{\psi^*}(x, \rho) = \begin{cases} \frac{\pi^2 A}{12} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\varepsilon^2 k^2 x \kappa_m^{1/3} \rho^2 \equiv \nu(x, \rho), & \kappa_m \rho \ll 1, \quad (4.13a) \\ \frac{9\pi^2 A \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{20 \cdot 2^{5/3} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} C_\varepsilon^2 k^2 x \rho^{5/3} \equiv \mu(x, \rho), & \kappa_m \rho \gg 1. \quad (4.13b) \end{cases}$$

В случае, когда разность набегов фаз велика уже на расстояниях порядка внутреннего масштаба турбулентности $l_0 = 5,92/\kappa_m$, т. е. когда

$$\mu(x, l_0) \sim C_\varepsilon^2 k^2 x l_0^{5/3} \gg 1, \quad (4.14)$$

в области, существенной для интегрирования в (4.10), справедлива асимптотика (4.13a). Это позволяет вычислить интеграл и получить следующее выражение для средней интенсивности:

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{u_0^2 a^2}{R_0^2(x) \left[1 + \nu\left(x, \frac{2a}{g(x)}\right) \right]} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{R^2}{R_0^2(x) \left[1 + \nu\left(x, \frac{2a}{g(x)}\right) \right]} \right\}. \quad (4.15)$$

Формуле (4.15) можно придать и несколько другой вид:

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{u_0^2 a^2}{\frac{x^2 g^2(x)}{k^2 a^2} + \pi^2 A \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) C_\epsilon^2 x^3 \kappa_m^{1/3}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{R^2}{\frac{x^2 g^2(x)}{k^2 a^2} + \pi^2 A \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) C_\epsilon^2 x^3 \kappa_m^{1/3}}\right\}. \quad (4.15a)$$

Если, как это обычно принято, называть эффективной шириной пучка (при фиксированном x) масштаб, на котором интенсивность падает в e раз, то из (4.15a) видно, что квадрат ширины пучка складывается из квадрата его ширины в однородной среде $R_0^2(x) = x^2 g^2(x)/k^2 a^2$ и среднего квадрата поперечного смещения луча, пропорционального $C_\epsilon^2 x^3 \kappa_m^{1/3}$ [3]. Заметим, что условие (4.14) применимости полученной формулы в реальной земной атмосфере выполняется лишь для очень протяженных трасс при сильной турбулентности. Легко показать, что формула (4.15) справедлива и в противоположном случае очень коротких трасс либо очень слабых флуктуаций диэлектрической проницаемости, когда выполняется условие

$$v\left(x, \frac{2a}{g(x)}\right) \sim C_\epsilon^2 k^2 x \kappa_m^{1/3} \frac{a^2}{g^2(x)} \ll 1. \quad (4.16)$$

Однако практически наиболее интересной является промежуточная область, когда неравенства (4.14) и (4.16) меняются на противоположные. В этом случае формула (4.10) для средней интенсивности принимает вид

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = I_0(x) \int_0^\infty J_0(\beta t^{1/2}) \exp\left\{-t - \frac{1}{2} \mu\left(x, \frac{2a}{g(x)}\right) t^{5/6}\right\} dt. \quad (4.17)$$

Если положить в (4.17) $\beta = 0$, то мы получим выражение для средней интенсивности на оси пучка:

$$\langle I(x, 0) \rangle = I_0(x) f\left(\frac{1}{2} \mu\left(x, \frac{2a}{g(x)}\right)\right), \quad (4.18)$$

где

$$f(u) = \int_0^\infty \exp(-z - uz^{5/6}) dz. \quad (4.19)$$

Функция $f(u)$ представляется сходящимся при всех значениях аргумента рядом

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{5n}{6} + 1\right)}{n!} u^n = 1 - 0,94u + \\ + 0,75u^2 - 0,56u^3 + \dots \quad (4.19a)$$

и имеет следующее асимптотическое разложение при $u \rightarrow \infty$:

$$f(u) \sim \frac{6}{5u^{9/5}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{6(n+1)}{5}\right)}{n!} u^{-\frac{6n}{5}} = 1,10u^{-9/5} - 1,494u^{-12,5} + \dots \quad (4.196)$$

График функции $f(u)$, рассчитанный по формуле (4.19), изображен на рис. 4.1. Таким образом, интенсивность на оси пучка

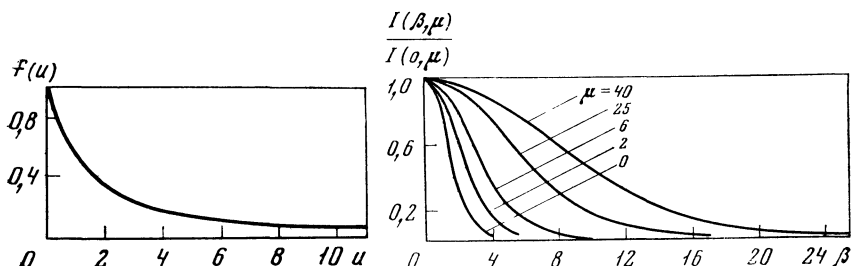


Рис. 4.1. Функция $f(u)$

Рис. 4.2. Нормированное распределение средней интенсивности в пучке в зависимости от β

представляет собой монотонно убывающую функцию расстояния, проходимого в турбулентной среде.

Пользуясь формулой (4.17), можно рассчитать также трансформацию поперечного профиля средней интенсивности. Результат такого расчета приведен на рис. 4.2, где представлена зависимость нормированного распределения средней интенсивности $\langle I(x, R) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle$ от величины $\beta = 2kaR/xg(x)$ для различных значений параметра $\mu(x, 2a/g(x))$.

Таким образом, формулы (4.15) и (4.17) практически охватывают все возможные значения параметров, характеризующих распределение средней интенсивности в пучке.

Отметим в заключение, что качественную оценку ширины лазерного пучка во флуктуирующей среде проще проводить с использованием энергетического соотношения

$$\langle I(x, 0) \rangle S_{\text{эфф}} = I_0(x) S_0(x),$$

где $S_{\text{эфф}}$ — эффективная площадь «размытого» турбулентного пучка, а S_0 — эффективная площадь пучка в однородной среде. Отсюда, используя (4.18), можно получить простую формулу

$$S_{\text{эфф}}(x) = S_0(x) / f\left(\frac{1}{2} \mu(x, 2a/g(x))\right). \quad (4.20)$$

Заметим, что эффективная ширина пучка, найденная из этого соотношения, близка к ширине пучка, определенной по половинному уровню рис. 4.2.

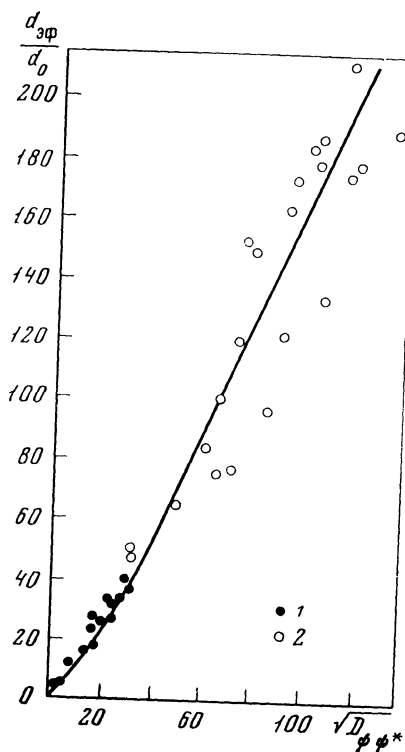


Рис. 4.3. Уширение лазерного пучка в турбулентной среде (d_0 — диаметр пучка в однородной среде)

1 — измерения при $L = 250$ см;

2 — $L = 750$ м

Экспериментальная проверка полученных выше формул проводилась М. А. Каллистратовой и В. В. Покасовым [4]. В работе изучалось уширение сфокусированного гауссовского пучка с длиной волны $0,63$ мкм на однородных приземных трассах протяженностью 250 и 1750 м с контролируемыми значениями структурной характеристики флуктуаций диэлектрической проницаемости C_ϵ^2 . Как видно из рис. 4.3, расчетное уширение пучка достаточно хорошо согласуется с измеренным. Выполненные другими авторами [9—11] экспериментальные исследования средней интенсивности в пучках с различной геометрией и на трассах различной протяженности также обнаружили хорошее согласие опытных и теоретических данных.

§ 2. СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ В ПУЧКАХ НА НЕОДНОРОДНОЙ ТРАССЕ

Рассмотрим теперь распространение светового пучка в среде с плавно меняющимися характеристиками турбулентности.

Уменьшение средней интенсивности будет, как и в статистически однородной среде, описываться формулой (4.10), где, однако, под функцией $D_{\psi\psi^*}$ надо понимать следующее выражение, учитывающее зависимость структурной постоянной C_ϵ^2 от расстояния вдоль трассы:

$$D_{\psi\psi^*}(x, \rho) = \frac{6}{5} \pi^2 A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 \chi_m^{-5/3} \int_0^x C_\epsilon^2(\xi) \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\chi_m^2 \rho^2 (x-\xi)^2}{4x^2}\right) - 1 \right] d\xi. \quad (4.12a)$$

Наиболее типичным случаем среды с переменной вдоль луча C_ϵ^2 является наклонная трасса [5]. Неоднородность ее в этом случае связана с тем, что структурная характеристика C_ϵ^2 ме-

няется с высотой над поверхностью Земли. Для конкретных расчетов можно воспользоваться моделью профиля, подобного (4.115):

$$C_{\varepsilon}^2(h) = \begin{cases} C_{\varepsilon}^2(h_0)(h/h_0)^{-1/3}, & h \leq 50 \text{ м}, \\ C_{\varepsilon}^2(h_0')(h/h_0')^{-1/3}, & 50 \text{ м} < h \leq 3 \text{ км}, \\ C_{\varepsilon}^2(h_0'')(h/h_0'')^{-1/3} \exp\left(\frac{h_0'' - h}{h_0''}\right), & h > 3 \text{ км}, \end{cases} \quad (4.21)$$

где h_0 — некоторая начальная высота, $h_0' = 50 \text{ м}$, $h_0'' = 3 \text{ км}$, $h_0''' = 10 \text{ км}$. Чтобы перейти от функции $C_{\varepsilon}^2(\xi)$, стоящей под знаком интеграла в (4.12а), к высотному профилю $C_{\varepsilon}^2(h)$, необходимо найти связь между высотой h текущей точки трассы и расстоянием до нее ξ от излучателя. Если излучатель расположен на высоте h_0 и угол наклона трассы характеризуется зенитным углом θ , то

$$h(\xi) = R_0 \sqrt{(\xi/R_0)^2 + \frac{2\xi}{R_0} \cos \theta + \frac{2h_0}{R_0} + 1} - R_0,$$

где R_0 — радиус Земли. В дальнейшем будем считать, что выполнено условие $\xi/R_0 \ll 1$. Тогда из предыдущей формулы следует

$$h(\xi) = h_0 + \xi \cos \theta. \quad (4.22)$$

Когда передатчик и приемник меняются местами (распространение сверху вниз), в выражениях (4.22) и (4.12а) необходимо провести замену $\xi \rightarrow x - \xi$. В результате функция $D_{\psi\psi^*}$ запишется в виде

$$D_{\psi\psi^*}(x, \rho) = \frac{6}{5} \pi^2 A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 \kappa_m^{-3/3} \int_0^x C_{\varepsilon}^2(\xi) \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2 \xi^2}{4x^2}\right) - 1 \right] d\xi, \quad (4.126)$$

где $C_{\varepsilon}^2(\xi)$ по-прежнему определяется из формулы (4.21).

При больших значениях параметра $\kappa_m a/g(x) \gg 1$ [для сфокусированного пучка с $g(x) = 1$ это эквивалентно требованию малости внутреннего масштаба турбулентности l_0 по сравнению с шириной пучка a] входящую в (4.10) структурную функцию $D_{\psi\psi^*}$ можно представить в виде

$$D_{\psi\psi^*} = 0,73 C_{\varepsilon}^2(h_0) k^2 X(x, \theta) [2a/g(x)]^{1/3}, \quad (4.23)$$

где введено эквивалентное расстояние $X(x, \theta)$, равное

$$X(x, \theta) = \frac{x}{C_{\varepsilon}^2(h_0)} \int_0^1 C_{\varepsilon}^2(x\tau, \theta) (1 - \tau)^{1/3} d\tau, \quad (4.24)$$

$$C_{\varepsilon}^2(x\tau, \theta) = C_{\varepsilon}^2(h_0 + x\tau \cos \theta)$$

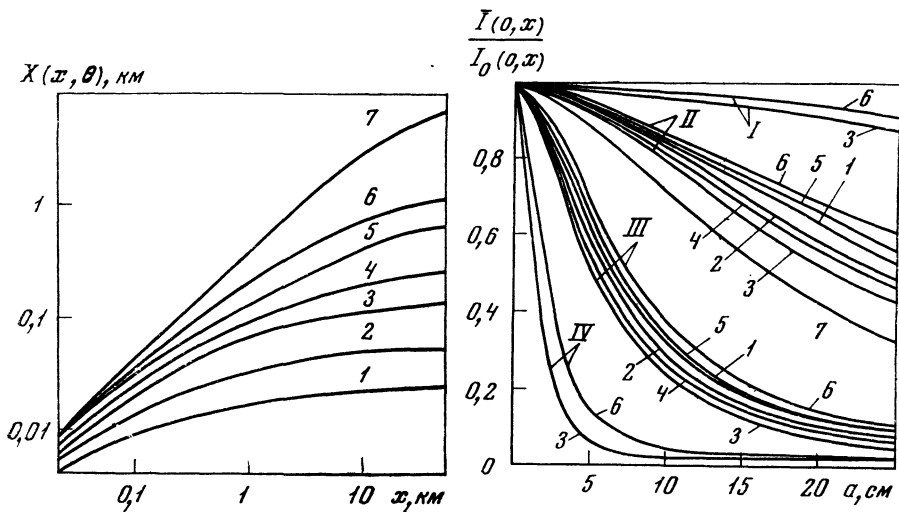


Рис. 4.4. Зависимость эквивалентного расстояния от длины трассы

1 — $\theta = 0^\circ$; 2 — $\theta = 60^\circ$; 3 — $\theta = 80^\circ$; 4 — $\theta = 85^\circ$; 5 — $\theta = 88^\circ$; 6 — $\theta = 89^\circ$; 7 — $\theta = 90^\circ$

Рис. 4.5. Зависимость турбулентного расширения пучка при обратном распространении от размеров передающей апертуры

I — $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1/3}$; II — $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1/3}$; III — $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-1/3}$; IV — $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1/3}$; 1 — $H = 0,2 \text{ км}$; 2 — $H = 0,4 \text{ км}$; 3 — $H = 2 \text{ км}$; 4 — $H = 4 \text{ км}$; 5 — $H = 7 \text{ км}$; 6 — $H = 8 \text{ км}$, $l_0 = 0,5 \text{ см}$; 7 — прямое распространение; $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-1/3}$, $H = 2 \text{ км}$; $l_0 = 0,5 \text{ см}$ ($\tilde{c} = 2,17 C_2^2(h_0) k^2 / \cos \theta$)

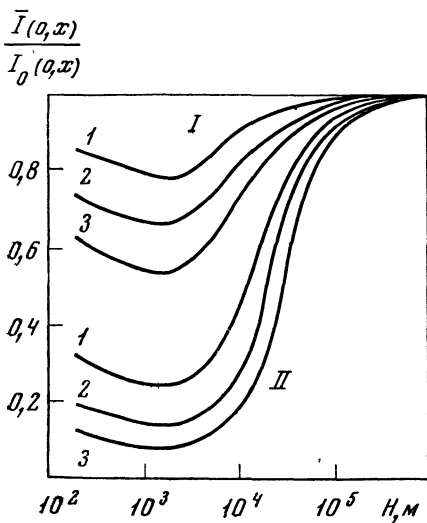


Рис. 4.6. Зависимость турбулентного расширения пучка при обратном распространении от высоты

I — $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-1/3}$;
II — $\tilde{c} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1/3}$;
1 — $\alpha = 10 \text{ см}$;
2 — $\alpha = 15 \text{ см}$;
3 — $\alpha = 20 \text{ см}$; $l_0 = 0,5 \text{ см}$

(для однородной трассы $X(x, \theta) = \sqrt[3]{8}x$). При этом мы воспользовались формулами (4.12а) и (4.22) и асимптотическим выражением для вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$.

Расчеты эквивалентного расстояния $X(x, \theta)$ для модели (4.21) и различных зенитных углов θ , проведенные в [5], представлены на рис. 4.4 (при вычислениях принято $h_0 = 2$ м). Как видно из рис. 4.4, величина эффективного расстояния по мере увеличения длины трассы насыщается, что соответствует практически полному прохождению турбулентного слоя земной атмосферы. Уровень насыщения, естественно, зависит от зенитного угла θ .

Предложенные формулы справедливы для любого положения точки наблюдения над поверхностью Земли. Иногда удобно пользоваться более простыми формулами. Например, если расстояние x больше толщины активного (турбулентного) слоя земной атмосферы, то функция $X(x, \theta)$ может быть записана в виде

$$X(x, \theta) = \frac{4N \sec \theta}{C_\epsilon^2(h_0)}. \quad (4.25)$$

Величина

$$N = \int_0^\infty C_n^2(z) dz \quad \left(C_n^2 = \frac{1}{4} C_\epsilon^2 \right),$$

представляющая собой интеграл от C_n^2 по всей толще турбулентной атмосферы, может быть измерена по наблюдениям дрожания изображений звезд в телескопах. Значения интеграла N при различных условиях приведены в [6].

Если излучающая апертура находится наверху, а приемник вблизи земной поверхности, то, как говорилось выше, необходимо пользоваться формулой (4.12б). Результаты численного расчета турбулентного уширения сфокусированного пучка при распространении сверху вниз приведены на рис. 4.5. Здесь же для сравнения приведена кривая 7, соответствующая прямому распространению. Как видно из рисунка, турбулентное расширение лазерного пучка на наклонных трассах при обратном распространении (сверху вниз) оказывается меньше, чем при прямом. Аналогичный результат для флуктуаций интенсивности был впервые экспериментально получен для тепловых источников света в работе [7]. В этой же работе было показано, что он не противоречит теореме взаимности.

Характерной особенностью результатов, полученных для обратного распространения, является наличие некоторой высоты передающей апертуры ($H \sim 2$ км), при которой наблюдается наибольшее влияние атмосферной турбулентности на расширение пучка. При дальнейшем увеличении высоты, как видно из рис. 4.6, это влияние монотонно уменьшается.

§ 3. ЧАСТИЧНО-КОГЕРЕНТНЫЙ ПУЧОК

Рассмотрим теперь более общий случай [8] распространения частично-когерентного светового поля с функцией когерентности вида (3.19). Если подставить эту функцию когерентности в формулу (4.5), то после интегрирования по \mathbf{R}' можно привести выражение для средней интенсивности частично-когерентного пучка к виду

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{k^2 a^2 u_0^2}{4\pi x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' \times \quad (4.26)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{ik}{x} \rho' \mathbf{R} - \frac{(\rho')^2 g_1^2(x)}{4a^2} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H \left(x', \rho' \left(1 - \frac{x'}{x} \right) \right) dx' \right\}.$$

Здесь введена функция

$$g_1(x) = \left[1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{f} \right)^2 + \frac{a^2}{a_k^2} \right]^{1/2}, \quad (4.27)$$

которая может быть выражена через угловую ширину пучка Ψ_0 , определяемую формулой (3.20):

$$g_1(x) = ka \left[\Psi_0^2 + \left(\frac{a}{f} - \frac{a}{x} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.27a)$$

Заметим, что формула (4.26) отличается от соответствующей формулы для полностью когерентного пучка (4.6) заменой функции $g(x)$, даваемой соотношением (4.7), на функцию $g_1(x)$. Отсюда ясно, что профиль средней интенсивности частично-когерентного пучка при распространении в турбулентной среде может быть рассчитан по формулам (4.9)–(4.12) с заменой $g(x)$ на $g_1(x)$. То же самое относится и к приближенным формулам (4.15) и (4.17). Отсюда получаем, что в области практически наиболее интересных значений параметров средняя интенсивность на оси частично-когерентного пучка выражается формулой

$$\langle I(x, 0) \rangle = I_0(x) f \left(\frac{1}{2} \mu \left(x, \frac{2a}{g_1(x)} \right) \right), \quad I_0(x) = \frac{u_0^2 k^2 a^4}{x^2 g_1^2(x)}, \quad (4.28)$$

где функции $f(u)$ и $\mu(x, \rho)$, как и ранее, даются формулами (4.19) и (4.13б) соответственно.

Таким образом, $\langle I \rangle$ зависит от среднего квадрата разности фаз на базе $2a/g_1(x)$. Устремив $a_k \rightarrow \infty$, мы получим функцию $g(x)$, фигурирующую в формулах для когерентного источника. Если мы рассмотрим слабокогерентный источник, для которого выполнены условия $a_k \ll a$ и $a_k \ll \lambda x/a$, то $g_1(x) \approx a/a_k$ и, следовательно, $2a/g_1(x) \approx 2a_k$. В этом случае интенсивность зависит от среднего квадрата разности фаз на радиусе когерентности.

Отношение средней интенсивности на оси пучка для частично-когерентного и полностью когерентного источников представлено на рис. 4.7 в зависимости от величины a_k/a . Различные кривые здесь отличаются параметром $\mu_{\text{ког}} = \mu(x, 2a/g(x))$, где $\mu(x, \rho)$ дается формулой (4.13б). Если выполняются неравенства

$$\mu_{\text{ког}} \gg 1, \quad \mu(x, 2a/g_1(x)) \gg 1,$$

так что в обоих случаях справедлива асимптотическая формула (4.19б), то

$$\frac{\langle I \rangle_{\text{неког}}}{\langle I \rangle_{\text{ког}}} \approx \quad (4.29)$$

$$\approx 1 - 1,35 [(\mu(x, 2a/g_1(x)))^{-9/8} - \mu_{\text{ког}}^{-9/8}]$$

и величины $\langle I \rangle_{\text{ког}}$ и $\langle I \rangle_{\text{неког}}$ близки друг к другу. Таким образом, в области $\mu \gg 1$ средняя интенсивность уже не зависит от степени когерентности источника.

Обобщение приведенных выше результатов на случай сред с плавно меняющимися характеристиками турбулентности может быть выполнено совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 2 для когерентного пучка. Если использовать введенное выше эквивалентное расстояние $X(x, \theta)$ (4.24), то при расчетах средней интенсивности на неоднородной трассе надо в формулу (4.28) подставлять функцию μ следующего вида:

$$\mu\left(x, \frac{2a}{g_1(x)}\right) = 0,73C_\epsilon^2(h_0)k^2X(x, \theta)[2a/g_1(x)]^{5/8}, \quad (4.30)$$

где h_0 — высота расположения передающей апертуры.

Отметим в заключение этого параграфа, что численные оценки уширения лазерных пучков по приведенным выше формулам показывают значительное ослабление влияния турбулентности при увеличении угловой расходимости пучка ψ_0 . Так, для пучка с $2a = 10$ см, $\lambda = 0,8$ мкм и $\psi_0 = 20''$ на неоднородной трассе $x = 1$ км и $\theta = 85^\circ$ даже при очень сильной турбулентности ($C_\epsilon = 10^{-13}$ см^{-2/3}) эффективная площадь пучка увеличивается незначительно: $S_{\text{эф}} = 1,18 S_0$. В то же время для близких параметров и условий распространения сфокусированного пучка его эффективная площадь может в несколько сот раз превышать площадь того же пучка в однородной среде. Это означает, что

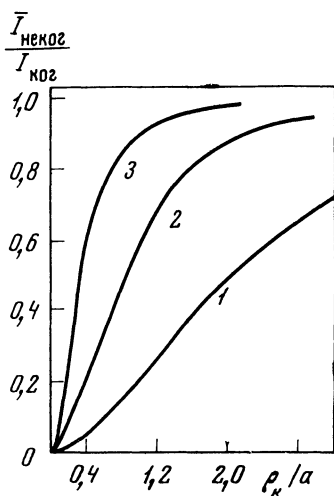


Рис. 4.7. Отношение средних интенсивностей на оси пучка для частично когерентного и полностью когерентного источников

- 1 — в отсутствие турбулентности;
2 — $\mu_{\text{ког}} = 3$;
3 — $\mu_{\text{ког}} = 10$

турбулентность гораздо сильнее влияет на «хорошие» пучки, чем на «плохие», и при расчетах средней интенсивности пучков, имеющих угловую расходимость $\psi_0 \gtrsim 1'$, влиянием турбулентности можно пренебрегать.

§ 4. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ФОРМИРОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

Как было показано выше, световой пучок в турбулентной атмосфере уширяется и, в частности, падает «острота» его фокусировки. Исследуем, опираясь на полученные формулы, влияние размера оптической системы (или, другими словами, начальной ширины пучка $2a$) на интенсивность света на оси когерентного пучка на расстоянии x от излучателя. Для определенности рассмотрим фокусирующую систему с фокусным расстоянием $F = x$. Влияние величины $2a$ проявляется двояким образом: с одной стороны, при фиксированном потоке $P_0 = \pi a^2 u_0^2$ интенсивность в центре пучка на расстоянии F растет пропорционально a^2 , а с другой стороны, с увеличением a растет дефокусировка, т. е. размытие светового пучка из-за турбулентности. Рассмотрим подробнее, к чему приводит одновременное действие этих двух эффектов.

Средняя интенсивность в фокусе системы на оси пучка согласно (4.18) равна

$$\langle I_F \rangle = \frac{u_0^2 k^2 a^4}{f^2} f\left(\frac{1}{2} \mu(x, 2a)\right), \quad (4.31)$$

где учтено, что в этом случае $g(x) = 1$. После введения упомянутого выше полного потока P_0 выражение (4.31) можно переписать в виде

$$\langle I_F \rangle = \frac{k^2 a^2 P_0}{\pi f^2} f\left(\frac{1}{2} \mu(x, 2a)\right). \quad (4.32)$$

Обратим внимание на то, что начальный размер пучка a входит в эту формулу как через коэффициент при f , так и через параметр $\mu = 0,27 C_\epsilon^2 F (2a)^{3/5}$. Выражая a через μ и подставляя в (4.32), получаем

$$\langle I_F \rangle = \frac{P_0 k^{-2/5}}{4\pi f^2 (0,27 C_\epsilon^2 F)^{3/5}} \Phi(\mu), \quad (4.33)$$

где введена новая функция

$$\Phi(\mu) = \mu^{3/5} f\left(\frac{\mu}{2}\right). \quad (4.34)$$

Теперь начальный размер пучка входит в выражение для средней интенсивности только через параметр μ . Можно показать,

что функция $\Phi(\mu)$ не имеет максимума и монотонно стремится к постоянному пределу, численно равному $\Phi_\infty = 2,52$. Асимптотическая формула, справедливая при больших μ , имеет следующий вид:

$$\Phi(\mu) \sim \frac{6 \cdot 2^{5/6}}{5} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{6(n+1)}{5}\right)}{h!} \left(-\frac{\mu}{2}\right)^n = \Phi_\infty - \frac{7,85}{\mu^{5/6}} + \dots \quad (4.35)$$

Предельное значение интенсивности, которое может быть получено в фокусе на оси оптической системы, равно

$$\langle I_F \rangle_\infty = \frac{0,465 P_0 \lambda^{3/6}}{F Q^{5/6}} \quad (Q = C_e^2 F) \quad (4.36)$$

и, следовательно, не зависит от начального размера пучка. Существование предельного значения интенсивности при увеличении апертуры фокусирующей системы (так называемое «насыщение фокусировки») было экспериментально обнаружено в работах [4,9—11] и теоретически рассчитано авторами [12, 13].

Поскольку $\Phi(\mu)$ — монотонно возрастающая функция, не имеющая максимума, то, вообще говоря, не существует абсолютного значения оптимальной величины $2a$, ибо увеличение диаметра выходной апертуры не может привести к уменьшению интенсивности в фокальной плоскости. Между тем ясно, что, начиная с некоторых размеров, дальнейшее увеличение выходного зрачка излучателя, которое достигается в эксперименте довольно дорогой ценой, практически не приводит к увеличению интенсивности на оси. Можно, однако, вычислить такое значение $(2a)_\alpha$, при котором интенсивность в фокусе составляет некоторую долю α от предельной. При этом $(2a)_\alpha$ будет определяться соответствующим μ из асимптотического соотношения (4.35):

$$\frac{7,85}{\mu_\alpha^{5/6}} = (1 - \alpha) \Phi_\infty. \quad (4.37)$$

Из (4.37) находим

$$\mu_\alpha^6 = 2,57 (1 - \alpha)^{-6}. \quad (4.38)$$

Так, например, если $\alpha = 0,9$, то $\mu_\alpha = 17,5$. Из определения параметра μ и формулы (4.38) следует

$$(2a)_\alpha = \frac{0,96 \mu_\alpha^{3/6}}{(k^2 Q)^{5/6}} = \frac{1,69 (1 - \alpha)^{-1/2}}{(k^2 Q)^{5/6}}. \quad (4.39)$$

Если k измерять в $см^{-1}$, Q — в $см^{1/2}$, то $2a$ будет получено в сантиметрах.

На рис. 4.8 приведен для примера график зависимости $(2a)_\alpha$ от параметра Q при $k = 10^5$ $см^{-1}$, $\alpha = 0,9$.

Как видно из графика, при распространении когерентного излучения на горизонтальных трассах протяженностью свыше 1 км

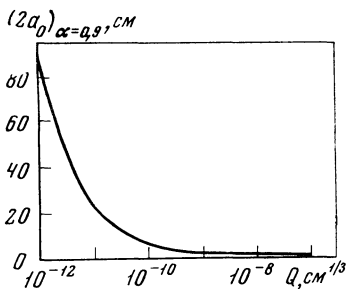


Рис. 4.8. Зависимость оптимальной апертуры от параметра Q

(типичные значения в дневных условиях $Q \gtrsim 5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{1/3}$) увеличение $2a$ до величин, больших 5—10 см, не оказывает практически влияния на интенсивность на оси пучка (при гауссовском распределении интенсивности в пучке для таких $2a$ достаточно использовать объектив диаметром не более 15—25 см). При распространении на более коротких трассах в условиях слабой турбулентности величина оптимального в указанном выше смысле диаметра выходной апертуры может значительно возрастать, достигая величин $\sim 50 \text{ см}$.

При распространении на неоднородных трассах оптимальный диаметр выходной апертуры оценивается совершенно аналогично, но с учетом определения параметра μ для сред с плавно меняющимися характеристиками турбулентности. Так, например, если излучение фокусируется в точку с зенитным углом θ , расположенную за эффективным турбулизованном слоем толщины L ($F \cos \theta > L$), то основным параметром, определяющим дефокусировку из-за турбулентности, является

$$\mu = 2,92k^2N (2a)^{3/5} \sec \theta \quad (4.40)$$

(параметр N был введен ранее формулой (4.25)). Если сравнить (4.40) с выражением для μ на однородной трассе, то видно, что оно получено заменой $^{3/8} C_n^2 F$ на $N \sec \theta$. Эта замена понятна, так как при $F \cos \theta > L$ лучи в турбулизованном слое почти параллельны, что приводит к замене структурной функции разности фаз для сферической волны на соответствующую функцию для плоской волны (множитель $^{3/8}$ переходит в единицу). Кро-

ме того, верхний предел в интеграле $\int_0^F C_n^2(z) dz$ можно без особой ошибки заменить на ∞ , так как интеграл сосредоточен в области $(0, L)$. Учитывая это, можно написать окончательное выражение для оптимальной апертуры на такой неоднородной трассе:

$$(2a)_{\text{opt}} = \frac{0,93(1-\alpha)^{-1/2}}{(k^2N \sec \theta)^{3/5}} \quad (4.41)$$

Обсудим теперь вопрос о формировании частично-когерентного пучка в турбулентной атмосфере. Пусть начальная угловая расходимость частично-когерентного коллимированного пучка после прохождения лучом лазера через формирующую оптическую систему равна ψ_0 . Учитывая постоянство полной мощности P_0 , для средней интенсивности на оси после прохождения расстояния x в турбулентной среде имеем

$$\langle I(x) \rangle = \frac{P_0 k^2 a^2}{\pi x^2 g_1(x)} f\left(\frac{1}{2} \mu\right), \quad (4.42)$$

где

$$\mu = 0,137 C_\epsilon^2 k^2 x [2a/g_1(x)]^{5/3}. \quad (4.42a)$$

Для коллимированного пучка $g_1(x) = \frac{ka}{x} \sqrt{a^2 + \psi_0^2 x^2}$ и

$$\langle I(x) \rangle = \frac{P_0}{\pi(a^2 + \psi_0^2 x^2)} f\left(0,069 C_\epsilon^2 k^2 x \left(\frac{2x}{k \sqrt{a^2 + \psi_0^2 x^2}}\right)^{5/3}\right). \quad (4.43)$$

Используя параметр

$$\mu = 0,137 C_\epsilon^2 k^2 x \left(\frac{2x}{k \sqrt{a^2 + \psi_0^2 x^2}}\right)^{5/3},$$

для средней интенсивности получаем

$$\langle I(x) \rangle = \frac{k^2 P_0}{4\pi x^2 (0,137 C_\epsilon^2 k^2 x)^{5/3}} \mu^{5/3} f\left(\frac{1}{2} \mu\right). \quad (4.44)$$

Функция $\langle I \rangle$ достигает максимума при $a_{\text{opt}} = \sqrt{x/k}$, т. е. оптимальный размер пучка имеет порядок радиуса первой зоны Френеля.

Уменьшение средней интенсивности на оси пучка за счет турбулентности для оптимального размера равно

$$\frac{\langle I(x) \rangle}{I_0(x)} = f\left(\frac{1}{2} \mu_{\text{opt}}\right), \quad (4.45)$$

где

$$\mu_{\text{opt}} = 0,137 C_\epsilon^2 k^2 x \left(\frac{2}{\sqrt{2k/x + 1/a_k^2}}\right)^{5/3}.$$

Если расходимость пучка за счет его неполной пространственной когерентности превышает дифракционную, то $1/a_k^2 \gg 2k/x$, и в этом случае

$$\mu_{\text{opt}} = 0,137 C_\epsilon^2 k^2 x (2a_k)^{5/3}. \quad (4.46)$$

Следовательно, μ_{opt} в этом случае перестает зависеть от a , и оптимальное значение диаметра апертуры не является критическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Кляцкин, В. И. Татарский.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 7, 1061.
2. *А. И. Кон.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 61.
3. *З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1967, 10, № 1, 68.
4. *А. М. Каллистратова, В. В. Показов.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 8, 1200.
5. *В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 5, 743.
6. *И. Г. Колчинский.* Оптическая нестабильность земной атмосферы. Киев, «Наукова думка», 1967.
7. *М. Е. Грачева, А. С. Лежен* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1966, 9, № 1, 57.
8. *А. И. Кон, В. И. Татарский.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 10, 1547.
9. *И. А. Старобинец.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 5, 738.
10. *А. Л. Виск.* Appl. Optics, 1967, 6, № 4, 703.
11. *В. Я. Сьедин, С. С. Хмелевцов.* Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1972, № 3, 91.
12. *Ф. В. Бунжин, К. С. Гочелашвили.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 14, 1097.
13. *М. А. Каллистратова, А. И. Кон.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 4, 545.

СЛУЧАЙНЫЕ СМЕЩЕНИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

При распространении ограниченного светового пучка в турбулентной среде возникают его хаотические смещения как целого. Это явление легко наблюдать невооруженным глазом в тех случаях, когда луч лазера по какой-либо причине визуализируется, например при наличии тумана или в вечернее время в запыленном воздухе. Физически дрожание лазерного пучка сродни наблюдавшемуся задолго до появления ОКГ дрожанию изображений астрономических объектов в фокальной плоскости телескопа — ограниченность световых пучков в последнем случае связана с конечностью размеров приемной апертуры (см. гл. VII).

Смещения световых пучков в турбулентной среде обусловлены в первую очередь флуктуациями фазы излучения, однако, как будет видно из дальнейшего, в некоторых случаях влияние флуктуаций амплитуды может также оказаться существенным.

Интерес к флуктуациям направления распространения объясняется большой важностью этого вопроса для приложений. В самом деле, о каких бы практических системах ни шла речь (связи, геодезических или локационных) везде вопрос о смещениях пучков приобретает первостепенное значение, ибо точность и надежность работы таких систем определяется в первую очередь случайными блужданиями.

В данной главе изучается вопрос о дисперсии и корреляционных функциях смещений световых пучков при распространении в турбулентной атмосфере.

§ 1. ВЫВОД ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО СМЕЩЕНИЯ ПУЧКА

Будем характеризовать положение светового пучка в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, при помощи координат центра тяжести случайного распределения интенсивности $I(\mathbf{R})$:

$$\rho_c = \frac{1}{P_0} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}) \mathbf{R} d^2R, \quad (5.1)$$

где величина

$$P_0 = \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}) d^2R \quad (5.2)$$

в приближении малоуглового рассеяния представляет собой полный поток интенсивности, сохраняющийся при распространении. В. И. Кляцкиным и В. И. Татарским [1] была получена связь среднего квадрата смещения центра тяжести светового пучка $\langle \rho_c^2 \rangle$ с некоторой функцией φ , являющейся интегралом от функции когерентности четвертого порядка Γ_4 . Уравнение для φ выглядит несколько проще, чем уравнение (2.113) для Γ_4 . Однако, поскольку оно также пока не поддается решению, мы найдем интересующие нас статистические характеристики смещений другим способом, следуя в основных чертах работе В. И. Кляцкина и А. И. Кона [2].

Будем, как обычно, описывать распространение световых пучков в приближении скалярного параболического уравнения (2.26):

$$2ik \frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} + \Delta u(x, \rho) + k^2 \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) = 0, \quad (5.3)$$

$$u(0, \rho) = u_0(\rho),$$

где ось x выбрана в направлении распространения исходного пучка; $\rho = \{y, z\}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости ($\langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) \rangle = 0$). Исходя из (5.3), напомним уравнение для случайной величины $\Psi(x, \rho_1, \rho_2) = u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \rho_1, \rho_2) = \frac{i}{2k} (\Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2}) \Psi + \frac{ik}{2} [\tilde{\epsilon}(x, \rho_1) - \tilde{\epsilon}(x, \rho_2)] \Psi,$$

$$\Psi(0, \rho_1, \rho_2) = u_0(\rho_1) u_0^*(\rho_2). \quad (5.4)$$

Перейдем к суммарным и разностным координатам

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho, \quad \rho_1 + \rho_2 = 2\mathbf{R}.$$

В этих переменных уравнение (5.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{i}{k} \nabla_{\rho} \nabla_{\mathbf{R}} \Psi + \frac{ik}{2} \left[\tilde{\epsilon}\left(x, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) - \tilde{\epsilon}\left(x, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \right] \Psi, \quad (5.4a)$$

$$\Psi(0, \mathbf{R}, \rho) = u_0\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u_0^*\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right),$$

а интенсивность пучка равна

$$I(x, \mathbf{R}) = \Psi(x, \mathbf{R}, 0).$$

Чтобы вывести уравнение для интересующей нас величины ρ_c , умножим (5.4а) на \mathbf{R}/P_0 и произведем интегрирование по \mathbf{R} , полагая $\rho = 0$. Учитывая определение (5.1) — (5.2), получаем следующее уравнение для вектора смещения центра тяжести пучка ρ_c :

$$\frac{d}{dx} \rho_c(x) = - \frac{i}{kP_0} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R \nabla_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0}. \quad (5.5)$$

Для вычисления величины, стоящей в правой части (5.5), подействуем на уравнение (5.4а) оператором $-\frac{i}{kP_0} \nabla_\rho$ и положим затем $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{i}{kP_0} \nabla_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) \right]_{\rho=0} &= \\ &= \frac{1}{k^2 P_0} \nabla_{\mathbf{R}} \Delta_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0} + \frac{1}{2P_0} I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \tilde{\varepsilon}(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Интегрируя (5.6) по \mathbf{R} , получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{i}{kP_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) d^2R \right]_{\rho=0} &= \\ &= \frac{1}{2P_0} \iint_{-\infty}^{\infty} I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \tilde{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) d^2R, \end{aligned} \quad (5.7)$$

с помощью которого уравнение (5.5) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \rho_c(x) = \frac{1}{2P_0} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \tilde{\varepsilon}(x, \mathbf{R}). \quad (5.8)$$

К уравнению (5.8) необходимо добавить граничные условия

$$\rho_c(0) = \rho_0; \quad \left. \frac{d\rho_c}{dx} \right|_{x=0} = \mathbf{n}_0. \quad (5.9)$$

Для симметричных пучков, распространяющихся вдоль оси X , $\rho_0 = 0$, $\mathbf{n}_0 = 0$, и интегрирование уравнения (5.8) приводит к следующему выражению для смещения пучка в турбулентной среде:

$$\rho_c(x) = \frac{1}{2P_0} \int_0^x (x - \xi) d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R I(\xi, R) \nabla_{\mathbf{R}} \tilde{\varepsilon}(\xi, \mathbf{R}). \quad (5.10)$$

Эта основная формула будет использована ниже для исследования смещений пространственно-ограниченных пучков в турбулентной среде.

§ 2. ДИСПЕРСИЯ СМЕЩЕНИЙ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА

1. нас будут интересовать статистические моменты случайной величины ρ_c . Простейшим из них является средний квадрат смещения пучка $\langle \rho_c^2 \rangle$ ($\langle \rho_c \rangle = 0$). Чтобы получить его, возведем формулу (5.10) в квадрат и произведем статистическое осреднение:

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{1}{4P_0^2} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R_2 \times \\ \times \langle I(\xi_1, \mathbf{R}_1) I(\xi_2, \mathbf{R}_2) \nabla_{\mathbf{R}_1} \tilde{\varepsilon}(\xi_1, \mathbf{R}_1) \nabla_{\mathbf{R}_2} \tilde{\varepsilon}(\xi_2, \mathbf{R}_2) \rangle. \quad (5.11)$$

Для вычисления корреляции в формуле (5.11) воспользуемся приближением марковского случайного процесса и будем, кроме того, считать случайное поле ε гауссовским и однородным. В марковском приближении (§ 5, гл. II) корреляционная функция случайного поля $\tilde{\varepsilon}$ аппроксимируется следующим образом:

$$B_\varepsilon(x, \rho; x', \rho') = \delta(x - x') A(\rho - \rho'); \\ A(\rho) = 2\pi \iint d^2 \kappa e^{-i\kappa \rho} \Phi_\varepsilon(\kappa). \quad (5.12)$$

Воспользуемся формулой Новикова — Фурутцу [3], выражающей среднее от произведения гауссовского случайного поля на некоторый функционал от него, —

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) R[\tilde{\varepsilon}] \rangle = \int_0^x d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' \langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}]}{\delta \varepsilon(\xi, \rho')} \right\rangle. \quad (5.13)$$

Если применить эту формулу для получения корреляции в правой части (5.11) и воспользоваться тем, что

$$\frac{\delta I(\xi_1, \mathbf{R}_1)}{\delta \varepsilon(\xi_1, \rho')} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta I(\xi_1, \mathbf{R}_1)}{\delta \varepsilon(\xi_2, \rho')} \frac{\delta I(\xi_2, \mathbf{R}_2)}{\delta \varepsilon(\xi_1, \rho'')} \sim \theta(\xi_1 - \xi_2) \theta(\xi_2 - \xi_1) = 0,$$

можно переписать (5.11) в виде

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{1}{4P_0^2} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R_2 \times \\ \times \langle I(\xi_1, \mathbf{R}_1) I(\xi_2, \mathbf{R}_2) \rangle \langle \nabla_{\mathbf{R}_1} \tilde{\varepsilon}(\xi_1, \mathbf{R}_1) \nabla_{\mathbf{R}_2} \tilde{\varepsilon}(\xi_2, \mathbf{R}_2) \rangle. \quad (5.14)$$

Такое «расщепление» корреляций $\tilde{\varepsilon}$ и I понятно и из качественных соображений, ибо при сделанных выше предположениях можно пренебречь корреляциями интегральных величин с локальными.

Вынося операторы $\nabla_{\mathbf{R}}$ из-под знака усреднения в (5.14) и используя аппроксимацию корреляционной функции (5.12),

находим

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{\pi}{2P_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2R_2 \times \\ \times \exp\{i\kappa(R_1 - R_2)\} \langle I(\xi, R_1) I(\xi, R_2) \rangle.$$

Воспользуемся теперь фурье-представлением интенсивности

$$J(x, \kappa) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} I(x, R) e^{-i\kappa R} d^2R = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, R, 0) e^{i\kappa R} d^2R \\ (J^*(x, \kappa) = J(x, -\kappa)), \quad (5.15)$$

с помощью которого выражение для среднего квадрата смещения центра тяжести примет следующий удобный вид:

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{8\pi^5}{P_0^2} \int_0^x (x - \xi)^2 d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa^2 \langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle. \quad (5.16)$$

Для нахождения величины $\langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle$ нужно знать функцию когерентности четвертого порядка. Однако, как говорилось выше, аналитическое решение для нее неизвестно. Поэтому для получения конкретных результатов с помощью формулы (5.16) приходится использовать приближенные выражения для функции

$$\varphi(\xi, \kappa) \equiv \langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle. \quad (5.17)$$

2. Для данной задачи первым естественным приближением (которое в дальнейшем будем называть «приближением заданного поля») может служить замена величины $J(\xi, \kappa)$ на ее значение в начальной плоскости $J(0, \kappa)$. Ясно, что такая операция должна приводить к завышенным результатам для $\langle \rho_c^2 \rangle$, однако можно надеяться, что для не очень больших расстояний такой подход позволит правильно описать рассматриваемое явление.

При конкретных расчетах будем рассматривать фокусируемый гауссовский частично-когерентный световой пучок с функцией когерентности на входе в турбулентную среду вида (3.19):

$$\Gamma(0, R, \rho) = u_0^2 \exp\left\{-\frac{R^2}{a^2} - \frac{ik\rho R}{l} - \frac{\rho^2}{4a^2} - \frac{\rho^2}{4a_k^2}\right\} \quad (5.18)$$

(расстояние x , вообще говоря, может не совпадать с фокусным F). Для такого пучка в приближении заданного поля

$$\langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle = \langle |J(0, \kappa)|^2 \rangle = \frac{a^2 u_0^4}{16\pi^2} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right),$$

и для интересующего нас среднего квадрата смещения получаем следующую простую формулу:

$$\sigma_\rho^2 = \frac{\pi^2 x^3}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_\varepsilon(\kappa) e^{-\frac{\kappa^2 a^2}{2}} d\kappa. \quad (5.19)$$

Если подставить теперь в (5.19) спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости ϵ , соответствующий «закону 2/3» Колмогорова — Обухова:

$$\Phi_{\epsilon}(\kappa) = A_0 C_{\epsilon}^2 \kappa^{-11/3} \quad (A_0 = 0,033),$$

то

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{3 \cdot 2^{5/6}} C_{\epsilon}^2 x^3 a^{-1/3}. \quad (5.20)$$

Для среднего квадрата углового смещения центра тяжести пучка σ_{α}^2 справедлива формула, аналогичная (5.20):

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{\sigma_{\rho}^2}{x^2} = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{3 \cdot 2^{5/6}} C_{\epsilon}^2 x a^{-1/3}. \quad (5.20a)$$

Отметим, что в формулу (5.20) не вошли радиус фокусировки F и масштаб когерентности a_k , что является следствием сделанных упрощающих предположений. В то же время это свидетельствует о том, что пока длина трассы распространения не слишком велика, так что можно пренебречь дифракционными эффектами, изменение фокусного расстояния и радиусы когерентности слабо влияют на «блуждание» пучка как целого.

Приближение заданного поля $J(\xi, \kappa) \rightarrow J(0, \kappa)$ является все же довольно грубым. В самом деле, по мере распространения в случайно-неоднородной среде начальное распределение интенсивности «расплывается» за счет дифракции, даже если отвлечься от его уширения из-за рассеяния на случайных неоднородностях показателя преломления. Решение задачи с учетом этого «расплывания» будем называть «дифракционным приближением». Мы получим далее относящиеся сюда формулы как частный случай более общих соотношений, учитывающих «расплывание» профиля средней интенсивности из-за рассеяния на турбулентных неоднородностях.

3. Флуктуации положения центра тяжести, вызванные рассеянием на турбулентности, определяются двумя эффектами: средним уширением пучка и флуктуациями интенсивности относительно этого уже уширенного среднего профиля. Представляется, однако, что первый эффект является основным. Для его учета достаточно заменить $J(\xi, \kappa)$ на $\langle J(\xi, \kappa) \rangle$. Проведенные в работе [4] приближенные оценки показали, что такая замена не приводит к заметным ошибкам в области слабых флуктуаций интенсивности, а в области сильных флуктуаций справедлива в той мере, в какой средний размер пучка превышает характерный масштаб корреляции флуктуаций интенсивности. Формула (5.16) в этом приближении принимает вид

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{8\pi^5}{P_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa^2 \langle J(\xi, \kappa) \rangle \langle J(\xi, -\kappa) \rangle. \quad (5.21)$$

В § 3, гл. IV для профиля средней интенсивности частично-когерентного пучка в турбулентной среде получена формула (4.26), которую можно записать в виде

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{u_0^2 a^2}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \kappa \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 g_1^2(x) x^2}{4k^2 a^2} + i \kappa \mathbf{R} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x d\eta H \left(\kappa \frac{\eta}{k} \right) \right\}, \quad (5.22)$$

где функция $g_1(x) = \left[1 + k^2 a^4 (1/x - 1/F)^2 + \frac{a^2}{a_k^2} \right]^{1/2}$, а

$$H(\rho) = \frac{1}{\pi} [A(0) - A(\rho)] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \kappa' (1 - e^{-i \kappa' \rho}) \Phi_{\epsilon}(\kappa'). \quad (5.23)$$

Используя (5.22), для $\langle J(\xi, \kappa) \rangle$ имеем

$$\langle J(\xi, \kappa) \rangle = \frac{u_0^2 a^2}{4\pi} \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 \xi^2 g_1^2(\xi)}{4k^2 a^2} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^{\xi} d\eta H \left(\frac{\kappa \eta}{k} \right) \right\}. \quad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в (5.21) для среднего квадрата линейного смещения центра тяжести пучка в приближении, учитывающем его среднее уширение, получаем

$$\sigma_{\rho}^2 = \pi^2 x^3 \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \int_0^{\infty} d\kappa \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa^3 \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 a^2 q^2(\xi)}{2} - \frac{\pi k^2 x}{2} \int_0^{\xi} d\eta H \left(\frac{\kappa \eta}{k} \right) \right\}, \quad (5.25)$$

где введено обозначение

$$q(\xi) = \left[\xi^2 \frac{1 + a^2/a_k^2}{\Omega^2} + \left(1 - \xi \frac{x}{F} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\Omega = ka^2/x). \quad (5.26)$$

Формулу для дифракционного приближения [5] можно получить из (5.25), полагая $H = 0$.

Из (5.25) видно, что как в приближении, учитывающем среднее размытие пучка, так и в дифракционном приближении появляется зависимость от радиуса кривизны волнового фронта F и масштаба когерентности a_k .

Исследуем более подробно величину σ_{ρ}^2 в дифракционном приближении в случае статистически однородной трассы. Тогда

$$\sigma_{\rho}^2 = \pi^2 x^3 \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^{\infty} d\kappa \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa^3 \exp \left(-\frac{\kappa^2 a^2 q^2(\xi)}{2} \right),$$

и для турбулентного спектра Колмогорова — Обухова имеем

$$\sigma_c^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{2^{3/6}} C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} \int_0^1 (1 - \xi)^2 q^{-1/3}(\xi) d\xi. \quad (5.27)$$

Радиус когерентности a_k входит в эту формулу только через функцию $q(\xi)$, определяемую выражением (5.26). Отсюда видно, что уменьшение степени когерентности всегда приводит к увеличению $q(\xi)$ и, следовательно, к уменьшению «бегания» пучка.

Для коллимированного пучка ($F \rightarrow \infty$, плоский фазовый фронт)

$$q(\xi) = \left[1 + \xi^2 \frac{(1 + a^2/a_k^2)^{1/2}}{\Omega^2} \right]^{1/2}, \quad (5.26a)$$

и после вычисления интеграла в (5.27) получаем

$$\sigma_c^2 = \frac{6.4 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{5 \cdot 2^{3/6}} \frac{C_\varepsilon^2 k^2 x a^{1/3}}{1 + a^2/a_k^2} \left[1 - F\left(-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1 + a^2/a_k^2}{\Omega^2}\right) \right], \quad (5.28)$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Если $(1 + a^2/a_k^2)\Omega^{-2} \ll 1$, что может иметь место только в ближней зоне $\Omega \gg 1$,

$$\sigma_c^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{3 \cdot 2^{3/6}} C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} \left(1 + 0,011 \frac{1 + a^2/a_k^2}{\Omega^2} + \dots \right). \quad (5.28a)$$

Отметим, что для слабокогерентного источника с $a_k \ll a$ это асимптотическое представление может нарушаться и при $\Omega \gg 1$.

В противоположном случае $(1 + a^2/a_k^2)\Omega^{-2} \gg 1$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 = & \frac{27 A_0 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2^{3/6} \cdot 4^3} C_\varepsilon^2 k^{1/3} x^{5/3} a^{1/3} \left(1 + \frac{a^2}{a_k^2} \right)^{-1/6} \times \\ & \times \left[1 - \frac{9 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{16 \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{1 + \frac{a^2}{a_k^2}}{\Omega^2} \right)^{-1/3} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.28б)$$

Условие применимости этой асимптотики всегда выполняется в дальней зоне $\Omega \ll 1$, а для слабокогерентных пучков ($a_k \ll a$) оно может иметь место и в области $\Omega \gtrsim 1$.

Формулы для сфокусированного пучка ($x = F$) можно получить, если подставить в (5.27)

$$q(\xi) = \left[(1 - \xi)^2 + \xi^2 \frac{1 + a^2/a_k^2}{\Omega^2} \right]^{1/2} \quad (5.26б)$$

и провести интегрирование. Отметим, в частности, что при $\Omega \ll 1$ формулы для коллимированного и сфокусированного пучков совпадают.

Посмотрим теперь, как уточняются приведенные выше формулы при учете турбулентного «расплывания» профиля средней интенсивности. Для турбулентного спектра $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ формула (5.25) принимает вид

$$\sigma_\rho^2 = A_0 \pi^2 C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp \left\{ -\frac{t^2 q^2(\xi)}{2} - \beta \xi^{5/3} t^{5/3} \right\} dt, \quad (5.29)$$

где введен параметр

$$\beta = \alpha C_\varepsilon^2 k^{1/3} x^{5/3} a^{-5/3} \quad (\alpha = 0,27).$$

Эта формула несколько упрощается для частных случаев коллимированного (5.26а) и сфокусированного (5.26б) пучков. Так, в области $(1 + a^2/a_k^2)\Omega^{-2} \ll 1$ получаем для коллимированного и сфокусированного пучков соответственно:

$$\sigma_\rho^2 = \begin{cases} A_0 \pi^2 C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} - \beta \xi^{5/3} t^{5/3} \right\} dt, \\ A_0 \pi^2 C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp \left\{ -\frac{t^2(1 - \xi)^2}{2} - \beta \xi^{5/3} t^{5/3} \right\} dt. \end{cases} \quad (5.30)$$

Эти формулы удобно переписать в следующем виде:

$$\sigma_\rho^2 = \begin{cases} \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{3 \cdot 2^{5/6}} C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} R(\beta), \\ R(\beta) = \frac{3 \cdot 2^{5/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} - \beta \xi^{5/3} t^{5/3} \right\} dt, \\ \frac{3 A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{8 \cdot 2^{5/6}} C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} f(\beta), \\ f(\beta) = \frac{8 \cdot 2^{5/6}}{3 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp \left\{ -\frac{t^2(1 - \xi)^2}{2} - \beta \xi^{5/3} t^{5/3} \right\} dt. \end{cases} \quad (5.31)$$

Функции $R(\beta)$ и $f(\beta)$, характеризующие степень отличия уточненных формул от соответствующих выражений в дифракционном приближении, могут быть получены численным интегрированием. Пример такого расчета для функции $f(\beta)$ (сфокусированный пучок) приведен на рис. 5.1. Как видно из этого рисунка, зависи-

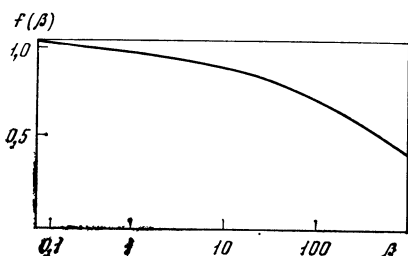


Рис. 5.1. График функции $f(\beta)$

мость от параметра β весьма слабая, что указывает на применимость дифракционного приближения для практических оценок.

В случае $(1 + a^2/a_k^2)\Omega^{-2} \gg 1$ выражения для коллимированного и сфокусированного пучков совпадают:

$$\sigma_p^2 = \frac{27A_0\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2^{5/6}\cdot 40} C_\epsilon^2 k^{1/3} x^{8/3} a^{1/3} (1 + a^2/a_k^2)^{-1/6} N\left(\mu\left(\frac{a}{\sqrt{1 + a^2/a_k^2}}\right)\right), \quad (5.32)$$

где

$$N(\mu) = \frac{2^{5/6}\cdot 40}{27\Gamma(1/6)} \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp\left\{-\frac{t^2\xi^2}{2} - \mu\xi^{5/3}t^{5/3}\right\} dt,$$

а $\mu(b) = 0,27C_\epsilon^2 k^2 x b^{5/3}$ — величина, совпадающая со средним квадратом разности фаз на базе b , рассчитанным в приближении МПВ. При малых значениях параметра μ $N(\mu) \approx 1$, и мы приходим к дифракционному приближению. Асимптотика выражения (5.32) при $\mu \gg 1$ имеет вид

$$\sigma_p^2 \simeq \text{const } C_\epsilon^2 k^{-1/3} x^{37/15}. \quad (5.33)$$

Интересно отметить, что в этом случае выпадает зависимость от начальных характеристик пучка a и a_k .

Значения σ_p^2 для промежуточных значений $\mu\left(\frac{a}{\sqrt{1 + a^2/a_k^2}}\right)$ могут быть получены численным интегрированием функции $N(\mu)$.

4. При распространении на неоднородной трассе структурная постоянная флуктуаций диэлектрической проницаемости зависит от переменной интегрирования вдоль луча. Для учета этой зависимости в формуле для среднего квадрата флуктуаций положения центра тяжести (5.25) следует заменить $\Phi_\epsilon(\kappa)$ на $\Phi_\epsilon(\xi, \kappa)$:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = & A_0\pi^2 x^3 \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 C_\epsilon^2(x\xi) \int_0^\infty \kappa^{-2/3} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{\kappa^2 a^2 q^2(\xi)}{2} - \frac{\pi k^2 x}{2} \int_0^\xi H\left(\frac{\kappa x \eta}{k}\right) d\eta\right\} d\kappa. \end{aligned} \quad (5.34)$$

В дифракционном приближении

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{2^{5/6}} a^{-1/3} x^3 \int_0^1 C_{\varepsilon}^2(x\xi) \frac{(1-\xi)^2}{[q(\xi)]^{1/3}} d\xi. \quad (5.35)$$

Вводя, подобно тому, как это делалось при расчете средней интенсивности в § 2, гл. IV, эквивалентное расстояние $X_{\text{ЭКВ}}(x, \theta)$:

$$X_{\text{ЭКВ}}(x, \theta) = \frac{x}{C_{\varepsilon}^2(h_0)} \int_0^1 C_{\varepsilon}^2(x\xi) \frac{(1-\xi)^2}{[q(\xi)]^{1/3}} d\xi, \quad (5.36)$$

мы можем переписать (5.35) в следующей форме:

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{2^{5/6}} C_{\varepsilon}^2(h_0) a^{-1/3} x^2 X_{\text{ЭКВ}}(x, \theta). \quad (5.37)$$

Используя реальный измеренный атмосферный профиль $C_{\varepsilon}^2(x\xi)$ или какую-либо его модель [например, (4.24)], по формуле (5.36) для каждого конкретного случая можно численно рассчитывать эквивалентное расстояние и, следовательно, величину σ_{ρ}^2 . Приведем здесь два частных случая формулы (5.37) для сфокусированного пучка. При выполнении условия $(1 + a^2/a_k^2)\Omega^{-2} \ll 1$ имеем

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{2^{5/6}} C_{\varepsilon}^2(h_0) a^{-1/3} x^2 X(x, \theta), \quad (5.38)$$

где $X(x, \theta)$ было определено ранее согласно формуле (4.24) и представлено для различных x и θ на рис. 4.4. В дальней зоне $\Omega \ll 1$ (а точнее, при $(1 + a^2/a_k^2)\Omega^{-2} \gg 1$):

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{2^{5/6}} C_{\varepsilon}^2(h_0) k^{1/3} (1 + a^2/a_k^2)^{-1/6} x^{5/3} X_{\text{ЭКВ}}(x, \theta), \quad (5.39)$$

где эквивалентное расстояние $X_{\text{ЭКВ}}(x, \theta)$ для этого случая определяется следующей формулой:

$$X_{\text{ЭКВ}}(x, \theta) = \frac{x}{C_{\varepsilon}^2(h_0)} \int_0^1 C_{\varepsilon}^2(x\xi) (1-\xi)^2 \xi^{-1/3} d\xi. \quad (5.40)$$

§ 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ СМЕЩЕНИЙ ПУЧКОВ

Для расчета корреляционной функции смещений двух пучков, распространяющихся в турбулентной среде по различным траекториям, будем исходить из полученной в § 1 формулы (5.10). При

этом следует помнить, что в случае, когда пучок распространяется под углом к оси X , нужно учитывать, согласно (5.9), появляющееся регулярное смещение его центра тяжести

$$\rho(x) = \left(\frac{d\rho_c}{dx} \right)_{x=0} \cdot x = n_0 x,$$

где n_0 — проекция единичного вектора вдоль направления распространения на плоскость OYZ .

Чтобы не затемнять изложение излишней общностью, будем считать, что имеются два одинаковых гауссовских когерентных ($a \ll a_k$) световых пучка, центры которых разнесены на входе в турбулентную среду на вектор ρ_0 , а их оптические оси составляют между собой некоторый угол α . Плоскости наблюдения предполагаются совпадающими. Тогда поле каждого из пучков в плоскости $x = 0$ можно представить в виде

$$u_0(R) = u_0 \exp \left\{ -\frac{(R \pm \rho_0/2)^2}{2a^2} - \frac{ik(R \pm \rho_0/2)^2}{2f} \pm ikn_0 R \right\} \quad (5.41)$$

(здесь $|n_0| = \sin \alpha \approx \alpha$). Вычисляя по формулам, приведенным в гл. IV, средние интенсивности в пучках вида (5.41), можно, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для дисперсии смещений σ_p^2 , получить следующую формулу для корреляции смещений в приближении, учитывающем турбулентное «расплывание» пучка:

$$B_\rho \equiv \langle \rho_{c_1} \rho_{c_2} \rangle = \pi^2 x^3 \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \int_0^\infty d\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa^3 \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 a^2 q^2(\xi)}{2} - \frac{\pi^2 \kappa^2 x}{2} \int_0^\xi H \left(\frac{\kappa x \eta}{k} \right) d\eta \right\} J_0(\kappa R(\xi)), \quad (5.42)$$

где $\rho_{c_{1,2}}$ — случайные смещения пучков, вызванные турбулентностью; J_0 — функция Бесселя; $q(\xi) = \left[\xi^2 / \Omega^2 + \left(1 - \xi \frac{x}{f} \right)^2 \right]^{1/2}$, а

$$R(\xi) = \left| (1 - \xi) \rho_0 + \xi \rho \right|, \quad \rho = n_0 x. \quad (5.43)$$

Дальнейшие расчеты проведем в дифракционном приближении, для чего положим в (5.42) $H = 0$. Учет среднего турбулентного распыливания пучка не представляет принципиальных затруднений и был проведен в [4] (ниже мы приведем без вывода также и основные расчетные результаты, полученные в [4]). В дифракционном приближении формула (5.42) упрощается:

$$B_\rho = \pi^2 x^3 \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi \int_0^\infty d\kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa^3 \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 a^2 q^2(\xi)}{2} \right\} J_0(\kappa R(\xi)). \quad (5.44)$$

Для практически наиболее интересных сфокусированных пучков формулу (5.44) можно переписать в виде

$$B_p = \pi^2 x^3 \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \int_0^\infty d\kappa \Phi_\epsilon(\kappa) \kappa^3 \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 x^2 \xi^2}{2k^2 a^2} - \frac{\kappa^2 a^2 (1 - \xi)^2}{2} \right\} \times \\ \times J_0(\kappa R(\xi)). \quad (5.45)$$

В случае $\Omega \gg 1$, когда фокусировка эффективна, для турбулентного спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости имеем

$$B_p = A_0 \pi^2 C_\epsilon^2 x a^{-1/3} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \int_0^\infty dt \cdot t^{-1/3} e^{-\frac{t(1-\xi)^2}{2}} J_0\left(\frac{R(\xi)}{a} t\right). \quad (5.46)$$

Мы будем в дальнейшем для наглядности рассматривать три частных случая взаимного расположения фокусируемых пучков.

а. *Пучки с параллельными осями*, когда $R(\xi) = \rho_0 = \rho$. В этом случае для коэффициента корреляции смещений центров тяжести $b_p = B_p/\sigma_p^2$ справедлива формула

$$b_p = \frac{8}{3} \int_0^1 t^{1/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a^2 t^2}\right) dt, \quad (5.47)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При разнесении осей, малом по сравнению с начальной шириной пучка,

$$b_p \approx 1 - \frac{4}{3} (\rho/2a)^2. \quad (5.47a)$$

При $\rho \gg 2a$

$$b_p \approx \frac{8}{9 \cdot 2^{1/3} \Gamma(5/6)} (\rho/2a)^{-1/3}. \quad (5.47b)$$

б. *Пучки, центры которых в начальной плоскости совпадают, а точки наблюдения в фокальной плоскости разнесены*; $R(\xi) = \xi \rho$:

$$b_p = \frac{8}{3} \int_0^1 (1-t)^{1/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a^2} \frac{t^2}{(1-t)^2}\right) dt. \quad (5.48)$$

При малых $\rho \ll 2a$

$$b_p \approx 1 - \frac{3}{5} (\rho/2a)^2, \quad (5.48a)$$

а при разнесениях, значительно больших, чем невозмущенный размер пучка $2a$,

$$b_p \approx \frac{9}{2^{1/3} \cdot 5 \Gamma(5/6)} (\rho/2a)^{-1/3}. \quad (5.48b)$$

в. Пучки, разнесенные в начальной плоскости на ρ_0 и фокусируемые в одну точку; $R(\xi) = (1 - \xi)\rho_0$. Для коэффициента корреляции в этом случае справедлива формула

$$b_\rho = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right). \quad (5.49)$$

Асимптотическое поведение этой функции таково:

$$b_\rho \approx \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}(\rho_0/2a)^2, & \rho_0 \ll 2a, \\ \frac{1}{2^{1/6}\Gamma(5/6)}(\rho/2a)^{-1/3}, & \rho \gg 2a. \end{cases} \quad (5.49a)$$

$$b_\rho \approx \frac{1}{2^{1/6}\Gamma(5/6)}(\rho/2a)^{-1/3}, \quad \rho \gg 2a. \quad (5.49б)$$

На рис. 5.2 схематически указаны три рассмотренных случая фокусировки. Как видно отсюда, пучки больше всего перекрываются во втором случае, что и объясняет более высокую корреляцию

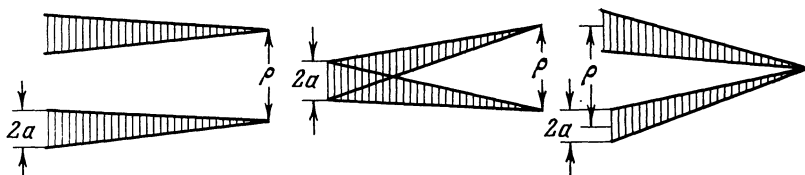


Рис. 5.2. Различные случаи взаимного расположения фокусируемых пучков

смещений их осей. Наименьшее значение при одних и тех же $\rho/2a$ имеет коэффициент корреляции для пучков с параллельными осями, а наибольшее — для фокусировки с одной апертуры в разные точки. Сравнивая, например, (5.48б) и (5.49б), мы видим, что коэффициент корреляции во втором случае в 1,8 раза меньше. Обращает на себя внимание медленный характер убывания b_ρ при больших разнесениях ($\sim (\rho/2a)^{-1/3}$), что оставляет корреляцию заметной величиной при довольно больших ρ .

В дальней зоне $\Omega \ll 1$ для коэффициента корреляции $b_\rho = B(\rho, \rho_0)/B(0, 0)$ имеем

$$b_\rho = \frac{80}{27\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)2^{1/6}} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \int_0^\infty dt e^{-\frac{t^2\xi^2}{2}t - \frac{2}{3}J_0\left(\frac{kaR(\xi)}{x}t\right)}. \quad (5.50)$$

Рассмотрим несколько случаев взаимного расположения фокусируемых пучков:

а) параллельные оси

$$b_\rho = \frac{40}{27} \int_0^1 (1 - \xi)^2 \xi^{-1/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{k^2 a^2 \rho^2}{2x^2 \xi^2}\right) d\xi; \quad (5.51)$$

б) фокусировка из одной апертуры в разнесенные на ρ точки:

$$b_\rho = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{k^2 a^2 \rho^2}{2x^2}\right); \quad (5.52)$$

в) фокусировка разнесенных на ρ_0 в начальной плоскости пучков в одну точку:

$$b_\rho = \frac{40}{27} \int_0^1 (1 - \xi)^2 \xi^{-1/2} {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{k^2 a^2 \rho^2 (1 - \xi)^2}{2x^2 \xi^2} \right) d\xi. \quad (5.53)$$

Как и можно было ожидать, при $\Omega \ll 1$ роль характерного масштаба корреляции играет уже не начальный размер пучка a , а его дифракционный размер x/ka .

Совершенно аналогичным образом можно выписать формулы для корреляции смещений центров тяжести коллимированных пучков.

В том случае, когда пучки распространяются на неоднородной трассе и структурная постоянная C_ε^2 меняется вдоль луча, интегрирование в общем случае аналитически выполнить не удастся. Для каждого конкретного профиля $C_\varepsilon^2(h)$ в атмосфере можно численно рассчитать корреляционную функцию смещений центров тяжести световых пучков, заменяя в формуле (5.42) $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ на $\Phi_\varepsilon(\xi, \kappa)$.

В дифракционном приближении формула (5.42) упрощается, и удается получить простые соотношения и для неоднородной трассы. Так, для пучков, фокусируемых в одну точку с некоторой базы ρ , в случае $\Omega \gg 1$ справедлива формула

$$B_\rho = \sigma_\rho^2 {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a^2} \right), \quad (5.54)$$

где σ_ρ^2 определяется формулой (5.38). Коэффициент корреляции в этом случае имеет такой же вид (5.49), как и ранее, и все отличие неоднородной трассы от однородной заключено в среднем квадрате смещения центра тяжести. Результаты расчета корреляции смещений центров тяжести на неоднородных трассах в области $\Omega \gg 1$ приведены в [6] для некоторых конкретных ситуаций.

В дальней зоне $\Omega \ll 1$ формула, аналогичная приведенной выше, получается для случая фокусировки с одной апертуры в разнесенные точки. В этом случае

$$B_\rho = \sigma_\rho^2 {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{k^2 a^2 \rho^2}{2x^2} \right), \quad (5.55)$$

где σ_ρ^2 на неоднородной трассе определяется формулой (5.39). Эти частные случаи показывают, что для оценок приближенно можно считать, что коэффициент корреляции на однородной и неоднородной трассах имеет один и тот же вид и отличие корреляционных функций смещений для этих случаев сосредоточено в средних квадратах смещений. Последние же на неоднородных трассах можно рассчитывать по формулам (5.35) — (5.40).

В заключение этого параграфа остановимся на вопросе о корреляциях различных компонент вектора смещения центра тяжести пучка [7].

Полагая, как и раньше, что векторы положения центров тяжести гауссовских пучков лежат в плоскости OYZ , рассмотрим корреляции компонент $\langle y_{c_1} y_{c_2} \rangle$, $\langle z_{c_1} z_{c_2} \rangle$ (корреляции типа $\langle y_{c_1} z_{c_2} \rangle$ в случае изотропных флуктуаций $\bar{\epsilon}$ равны нулю). Из формулы (5.10) имеем для компонент вектора ρ_c :

$$y_c = \frac{1}{2P_0} \int_0^x (x - \xi) d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R I(\xi, \mathbf{R}) \frac{\partial \bar{\epsilon}(\xi, \mathbf{R})}{\partial y},$$

$$z_c = \frac{1}{2P_0} \int_0^x (x - \xi) d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R I(\xi, \mathbf{R}) \frac{\partial \bar{\epsilon}(\xi, \mathbf{R})}{\partial z}.$$
(5.56)

Будем вычислять интересующие нас корреляции для пучков, невозмущенные оси которых параллельны и разнесены на некоторое расстояние $\rho_0 = \{y_0, z_0\}$. Для наглядности проведем расчет в приближении заданного поля, заменяя интенсивность $I(\xi, \mathbf{R})$ на ее значение в начальной плоскости $I_0(\mathbf{R})$. После вычислений, аналогичных приведенным выше, найдем корреляции компонент векторов ρ_{c_1} и ρ_{c_2} :

$$\langle y_{c_1} y_{c_2} \rangle = -\frac{\pi^2 x^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) J_0(\kappa \rho_0) \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa d\kappa,$$

$$\langle z_{c_1} z_{c_2} \rangle = -\frac{\pi^2 x^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) J_0'(\kappa \rho_0) \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa d\kappa.$$
(5.57)

Для турбулентного спектра $\Phi_{\epsilon}(\kappa)$ вычисление по формуле (5.57) приводит к следующим выражениям для коэффициентов корреляции:

$$b_y = \frac{\langle y_{c_1} y_{c_2} \rangle}{\langle y_c^2 \rangle} \quad \text{и} \quad b_z = \frac{\langle z_{c_1} z_{c_2} \rangle}{\langle z_c^2 \rangle},$$

$$b_y = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right) - \frac{1}{12} \frac{y_0^2}{a^2} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right),$$

$$b_z = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right) - \frac{1}{12} \frac{z_0^2}{a^2} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\rho_0^2}{2a^2}\right).$$
(5.58)

(Естественно, что $b_{\rho} = 1/2 (b_y + b_z)$.)

Предположим теперь, что вектор первоначального разнесения пучков ρ_0 имеет только y -компоненту, $\rho_0 = \{y_0, 0\}$, т. е. разнесение пучков параллельно, например, поверхности Земли. Тогда

$$b_y = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{y_0^2}{2a^2}\right) - \frac{1}{12} \frac{y_0^2}{a^2} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{y_0^2}{2a^2}\right),$$

$$b_z = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{y_0^2}{2a^2}\right).$$
(5.59)

Рис. 5.3. Корреляции компонент векторов смещений двух разнесенных пучков
 1 — b_y ; 2 — b_z

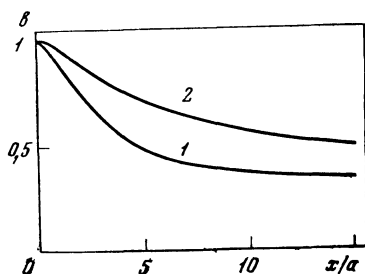


График коэффициентов корреляции (5.59) в зависимости от величины y_0/a приведен на рис. 5.3. Тот факт, что корреляции b_y и b_z заметно отличаются друг от друга, экспериментально наблюдался в работах [7, 8]. Авторы [8] сделали на основании этого неверный вывод о неизотропности флуктуации диэлектрической проницаемости ϵ . На самом деле при выводе (5.59) существенно использовалась изотропность флуктуаций, а различие b_y и b_z связано с тем, что в эксперименте имеется физически выделенное направление — плоскость, в которой лежат оси пучков.

§ 4. ДРОЖАНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

В ряде опубликованных работ [7—11] были поставлены эксперименты по изучению дрожания лазерных пучков при распространении в приземном слое атмосферы. Выполненные измерения показали удовлетворительное согласие с теоретическими формулами, приведенными в § 2. В частности, получили экспериментальное подтверждение формулы (5.20) — (5.20а). Однако экспериментальная проверка формул для корреляционных функций смещений, в частности формул (5.47) — (5.49), давала значительное расхождение опытных [7—11] и расчетных [12] данных. Измеренные корреляции оказывались значительно меньше теоретических, вычисленных по формулам (5.47) — (5.49), и причина этого расхождения оставалась неясной. В работе [11] была сделана попытка объяснить несоответствие теории и эксперимента тем, что расчеты справедливы не для любых взаимных расположений пучков. На самом деле причина наблюдающегося расхождения заключается, по-видимому, в следующем.

До сих пор во всех расчетах мы пользовались чисто степенным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости, предполагающим фактически существование в среде неоднородностей любых масштабов. Однако в приземном слое атмосферы, как отмечалось в гл. I, существует некоторый ограниченный «набор» размеров неоднородностей, который можно достаточно условно заключить в интервал между внутренним масштабом турбулентности

l_0 и L_0 — «внешним масштабом». Как указывалось выше, по оценкам разных авторов, l_0 в приземном слое заключено между 1 мм и 1 см, а L_0 — в экспериментах вблизи Земли имеет порядок высоты трассы H_0 . Трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости может иметь в этом случае вид

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = A_0 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) [1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)], \quad (5.60)$$

где $\kappa_m = 2\pi/l_0$ — максимальное волновое число, соответствующее внутреннему масштабу турбулентности, а κ_0 соответственно равно $2\pi/L_0 \sim 2\pi/H_0$. Естественно, что такой способ введения внешнего масштаба турбулентности не является единственным. Можно, например, использовать кармановский спектр. Оценки, приведенные в [6], показывают, что результаты при этом меняются несущественно, а для расчетов он менее удобен, чем предложенный выше.

Анализ, вполне аналогичный тому, который будет приведен ниже, показывает, что влияние внутреннего масштаба турбулентности на случайные смещения центров тяжести реальных пучков малосущественно, и мы в дальнейшем будем использовать спектр

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = A_0 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}\right) \right]. \quad (5.60a)$$

Учет внешнего масштаба турбулентности, согласно (5.60a), приводит для среднего квадрата смещений к следующему выражению, обобщающему формулу (5.35):

$$\sigma_\rho^2 = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^2}{2^{1/6}} a^{-1/3} x^3 \int_0^1 C_\varepsilon^2(x\xi) (1 - \xi)^2 q^{-1/3}(\xi) \times \\ \times \left[1 - \left(1 + \frac{2}{\kappa_0^2 a^2 q^2(\xi)} \right)^{-1/6} \right] d\xi. \quad (5.61)$$

В приближении заданного поля для однородной трассы эта формула принимает простой вид

$$\sigma_\rho^2 = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{3 \cdot 2^{1/6}} C_\varepsilon^2 x^3 a^{-1/3} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{\kappa_0^2 a^2} \right)^{-1/6} \right]. \quad (5.206)$$

Отсюда видно, что учет конечности внешнего масштаба турбулентности весьма существен, так как поправочный множитель заметно отличается от единицы уже при довольно малых отношениях a/L_0 .

Еще сильнее сказывается внешний масштаб L_0 на корреляции смещений пучков. Продемонстрируем сначала его влияние на примере коэффициента корреляции для параллельных пучков в приближении заданного поля, когда формулы имеют наиболее простой вид. Несложные вычисления дают для коэффициента корреляции

смещений формулу

$$b_{\rho} = \frac{\left(1 + \frac{2}{\kappa_0^2 \gamma^2}\right)^{1/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a^2}\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a^2(1 + 2/\kappa_0^2 a^2)}\right)}{(1 + 2/\kappa_0^2 a^2)^{1/2} - 1} \quad (5.62)$$

Введение в экспериментальные результаты [7—11] поправки, связанной с конечностью высоты луча над землей, по формуле (5.62) привело к хорошему согласию измеренных и расчетных данных.

В работе [4] был выполнен расчет общего случая корреляционной функции гауссовских пучков со спектром (5.60а) в приближении, учитывающем турбулентное уширение профиля средней интенсивности. Здесь получена следующая формула:

$$B(\rho_0, \rho) = 3\sigma_{\rho_0}^2 a^{1/2} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \left\{ a_9^{-1/2} (x\xi) {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{R^2(\xi)}{2a_9^2(x\xi)}\right) - [a_9^2(x\xi) + a^2\beta]^{-1/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{R^2(\xi)}{2a_9^2(x\xi) + 2a^2\beta}\right) \right\}, \quad (5.63)$$

где $\sigma_{\rho_0}^2$ определяется выражением (5.20); $\beta = 2/\kappa_0^2 a^2$, а величина a_9 , зависящая от дифракционного размера пучка $a_d = a [\Omega^{-2} + (1 - x/F)^2]^{1/2}$ и флуктуаций уровня σ_0^2 , дается формулой

$$a_9^2 = a_d^2 + 8\sigma_0^{2/3} \frac{x}{k} (1 - 0,63 [0,27C_2^2 k^2 x \kappa_0^{-3/2}]^{-1/3}). \quad (5.64)$$

На рис. 5.4 демонстрируется рассчитанное по формуле (5.63) влияние конечности внешнего масштаба турбулентности на коэффициент корреляции b_{ρ} . Как видно из приведенных графиков, указанное влияние весьма существенно, особенно когда величина внешнего масштаба приближается к ширине пучка и на низких горизонтальных трассах им нельзя пренебрегать. Физически сильное влияние внешнего масштаба связано с отмеченным выше медленным убыванием корреляции смещений при больших разнесениях пучков (пропорционально $(\rho/2a)^{-1/2}$).

Чувствительность корреляционных функций смещений к величине масштаба L_0 позволяет сделать вывод о перспективности этих измерений в качестве метода определения внешнего масштаба турбулентности.

Общая формула (5.63) позволяет провести оценки дисперсии и корреляционных функций смещений в области сильных флуктуаций интенсивности. На рис. 5.5 представлены результаты численного расчета коэффициента корреляции смещений для пучков с параллельными осями. Видно, что переход от области слабых флуктуаций ($\sigma_0^2 \ll 1$) к области сильных флуктуаций амплитуды ($\sigma_0^2 \gg 1$) приводит к небольшому увеличению уровня корреляции. Это позволяет сделать вывод, что дифракционное приближение ($H = 0$ или $\sigma_0 = 0$) приемлемо для практических расчетов

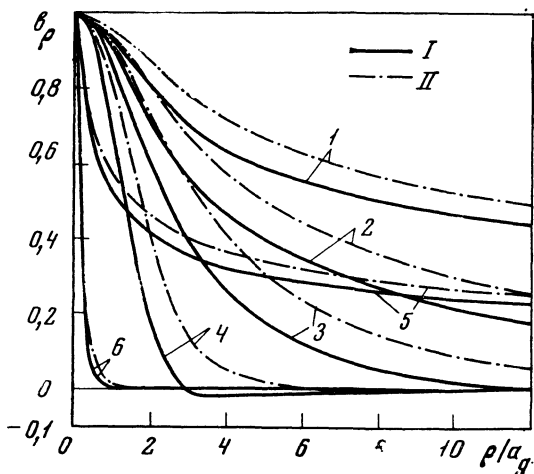


Рис. 5.4. Влияние конечности внешнего масштаба турбулентности на корреляцию смещений коллимированных пучков $\sigma = 0$

Кривые 1—4 для $\Omega = 100$:

1 — $\beta = 2/\kappa_0^2 a^2 \rightarrow \infty$;

2 — $\beta = 1000$;

3 — $\beta = 50$;

4 — $\beta = 1$; кривые 5, 6 для $\Omega = 0,01$:

5 — $\beta \rightarrow \infty$;

6 — $\beta = 10000$;

I — параллельные пучки;

II — пересекающиеся в плоскости наблюдения

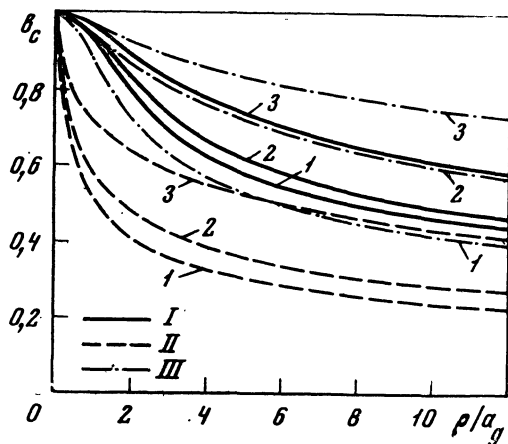


Рис. 5.5. Коэффициент корреляции смещений коллимированных пучков с параллельными осями ($\rho_0 = \rho = \rho$, $x/F = 0$, $\beta = \infty$) для различных областей флуктуаций интенсивности

1 — $\sigma_0 = 0$;

2 — $\sigma_0 = 10$;

3 — $\sigma_0 = 44$;

I — $\Omega = 100$;

II — $\Omega = 0,01$;

III — $\Omega = 1$

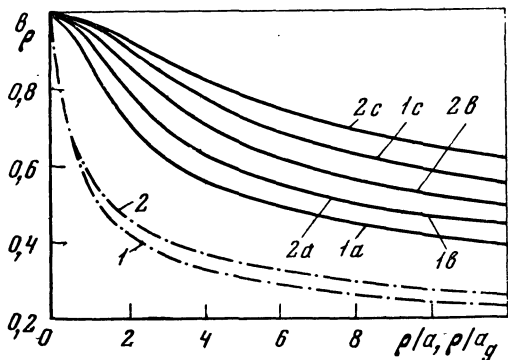


Рис. 5.6. Коэффициент корреляции смещений световых пучков в свободной атмосфере ($L_0 = \infty$, $\sigma_0 = 0$)

1 — параллельные пучки;

2 — пучки, пересекающиеся в плоскости наблюдения;

a — $\Omega = 100$; $x/F = 1$;

b — $\Omega = 1$, $x/F = 0$;

c — $\Omega = 1$, $x/F = -5$; штрихпунктирным линиям соответствует масштаб $a_g = x/\kappa a$ и параметры $\Omega = 0,01$, $x/F = 0$

корреляций смещений. Максимальное изменение уровня корреляции наблюдается в промежуточной зоне дифракции ($\Omega \sim 1$), что обусловлено ббльшим по сравнению с ближней и дальней зонами относительным турбулентным уширением и, следовательно, дополнительным пространственным перекрытием пучков. Расчеты, проведенные для пучков с пересекающимися в плоскости наблюдения осями, показали, что по сравнению с параллельными пучками наблюдается незначительное увеличение уровня корреляции (порядка 13%).

На рис. 5.6 продемонстрировано влияние условий фокусировки (величины отношения x/F) на корреляцию смещений.

Отметим в заключение, что проведенные аналогичным методом расчеты спектров смещений лазерных пучков содержатся в [13].

Резюмируя, отметим, что дифракционное приближение, описываемое формулой (5.44), по-видимому, достаточно для практических оценок смещений лазерных пучков в турбулентной атмосфере. При этом всегда следует иметь в виду, что для трасс, низко расположенных над подстилающей поверхностью, необходимо использовать спектр $\Phi_e(x)$ с учетом внешнего масштаба турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 7, 1061.
2. В. И. Кляцкин, А. И. Кон. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 9, 1381.
3. В. И. Татарский. ЖЭТФ, 1969, 56, № 6, 2106.
4. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 10, 1501.
5. А. И. Кон. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 61.
6. В. Л. Миронов, В. В. Носов. Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. Иркутск. М., «Наука», 1972.
7. Э. И. Гельфер, А. И. Кон, А. М. Черемухин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1973, 16, № 2, 245.
8. A. Consortini, L. Ronchi. Lettere al Nuovo Cimento, 1972, 3, N 3, 571.
9. Э. И. Гельфер, Н. И. Муравьев, С. Е. Финкельштейн, А. М. Черемухин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 12, 18—38.
10. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов. Тезисы Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Томск, 1971.
11. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 5, 725.
12. А. М. Кон. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 4, 533.
13. В. Л. Миронов, В. В. Носов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1975, 18, № 7, 990.

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В этой главе изложены результаты экспериментальных исследований и расчетов флуктуаций интенсивности лазерных источников излучения, выполненные в последние годы. Эксперименты показали, что при слабой турбулентности или на коротких трассах относительные флуктуации интенсивности невелики и первое приближение МПВ (см. гл. II) является их адекватным описанием. При увеличении длины трассы или усилении турбулентности флуктуации возрастают, и, когда среднеквадратичное значение относительных флуктуаций интенсивности приближается к единице, результаты МПВ оказываются неприменимыми. В дальнейшем такие флуктуации будут называться сильными.

Поскольку лазерные источники всегда дают пространственно-ограниченные пучки излучения, то в этой главе будут также изложены результаты теоретических исследований флуктуаций в ограниченных пучках. В значительной степени расчеты опираются на общую теорию, развитую в гл. II.

§ 1. РАСЧЕТЫ ФЛУКТУАЦИЙ ЛОГАРИФМА ИНТЕНСИВНОСТИ В ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКАХ

1. Корреляционная функция логарифма амплитуды (уровня)

Применение МПВ к задаче о распространении пространственно-ограниченных волновых пучков в турбулентной среде позволяет изучить некоторые закономерности поведения дисперсии, корреляционных функций и временных спектров флуктуаций интенсивности лазерного излучения в атмосфере.

Пространственно-временные корреляционные функции комплексной фазы, через которые выражаются корреляционные характеристики логарифма амплитуды, можно найти при помощи расчетов, аналогичных тем, которые проделаны в § 3, гл. II. Для этого необходимо учесть в формуле для комплексной фазы (2.84)

зависимость флуктуаций диэлектрической проницаемости от времени. Тогда в формулы (2.85) и (2.86) войдет пространственно-временная корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\langle \varepsilon'(\mathbf{x}', \boldsymbol{\rho}', t_0) \varepsilon(\mathbf{x}'', \boldsymbol{\rho}'', t_0 + \tau) \rangle,$$

которую в соответствии с гипотезой замороженной турбулентности (1.43) можно заменить на пространственную корреляционную функцию

$$\langle \varepsilon'(\mathbf{r}', t_0) \varepsilon'(\mathbf{r}'', t_0 + \tau) \rangle = \langle \varepsilon'(\mathbf{r}', t_0) \varepsilon'(\mathbf{r}'' - \mathbf{v}\tau, t_0) \rangle,$$

где \mathbf{v} — скорость переноса неоднородностей. В случае локально изотропного поля флуктуаций ε' для пучка с начальным распределением поля

$$u_0(0, \boldsymbol{\rho}) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - \frac{ik\rho^2}{2F_0}\right), \quad (6.1)$$

где a — эффективный радиус пучка, F_0 — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры ($\boldsymbol{\rho} = 0$), пространственно-временная корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды запишется в виде [1–5]

$$\begin{aligned} B_\chi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \tau) &= \langle \chi(\boldsymbol{\rho}_1, t_0) \chi(\boldsymbol{\rho}_2, t_0 + \tau) \rangle = \\ &= 2\pi^2 k^2 x \operatorname{Re} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\xi, \kappa) \left\{ J_0(\kappa | \boldsymbol{\rho}_1 |) \exp \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[-\gamma_2 \frac{\kappa^2 x}{k} (1 - \xi) \right] + J_0(\kappa | \boldsymbol{\rho}_2 |) \exp \left[-i\gamma \frac{\kappa^2 x}{k} (1 - \xi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В выражении (6.2) для удобства мы перешли от ε к показателю преломления n , так что в выражении (6.2) Φ_n — трехмерная спектральная плотность флуктуаций показателя преломления, которая в общем случае зависит от нормированного на длину трассы x расстояния $\xi = x'/x$, отсчитываемого от передатчика:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1 &= \gamma \boldsymbol{\rho}_1 - \gamma^* \boldsymbol{\rho}_2 + \mathbf{v}_\perp(\xi)\tau; \quad \boldsymbol{\rho}_2 = (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)\gamma + \mathbf{v}_\perp \tau; \\ \gamma &= \gamma_1 + i\gamma_2 = [1 - f\xi + iQ\xi]/(1 - f + iQ); \quad \mathbf{v}_\perp = \{0, v_y, v_z\}. \end{aligned}$$

$Q^{-1} = ka^2/x$ — число Френеля передающей апертуры; $f = x/F_0$ — параметр фокусировки. Детальный численный анализ дисперсии и пространственной корреляционной функции в случае спектра турбулентности вида

$$\Phi_n(\xi, \kappa) = 0,033 C_n^2(\xi) \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) \quad (6.3)$$

проведен в работах [6–8].

Подставляя спектр (6.3) в формулу (6.2), приходим к следующему представлению для пространственной корреляционной

функции [8]:

$$\begin{aligned}
 B_x(\rho_1, \rho_2) &= B_x(\rho_1, \rho_2, 0) = 7,07\sigma_{xp}^2 \int_0^1 d\xi \zeta(\xi) \times \\
 &\times \left\{ [D^{-1} + i\gamma(1 - \xi)]^{n_1} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\gamma^2 n^2}{D^{-1} + i\gamma(1 - \xi)} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - [D^{-1} + \gamma_2(1 - \xi)]^{n_2} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{n^2\gamma_1^2 - t^2\gamma_2^2 - 2i\gamma_1\gamma_2 n t \cos \psi}{D^{-1} + i\gamma(1 - \xi)}\right)\right\},
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\sigma_{xp}^2 = 0,31C_{n_0}^2 k'^2 x^{1/3}$; $C_{n_0}^2$ — структурная характеристика показателя преломления в плоскости передающей апертуры; $\zeta(\xi) = C_n^2(\xi)/C_{n_0}^2$ — нормированная структурная характеристика; $D = \kappa_m^2 x/k$ — волновой параметр, соответствующий внутреннему масштабу; $n = |n| = |\rho_1 - \rho_2| \sqrt{k/4x}$ и $t = |t| = |\rho_1 + \rho_2| \sqrt{k/4x}$ — нормированные расстояния соответственно между точками наблюдения и от оси пучка до их центра тяжести, а ψ — угол между векторами t и n .

Пространственная структура пучка в отсутствие турбулентности характеризуется дифракционным распределением интенсивности в поперечном сечении. Формула для дифракционной интенсивности пучка заданного начальным распределением поля (6.1) имеет вид:

$$I(x, \rho) = [Q^2 + (1 - f)^2]^{-1} \exp(-\rho^2/a_d^2), \tag{6.5}$$

где $a_d = a [(1 - f)^2 + Q^2]^{1/2}$ — дифракционный радиус пучка [9]. Из (6.5) видно, что коллимированный пучок ($f = 0$) имеет минимальный размер в плоскости наблюдения при $Q = 1$. Переход к неограниченной плоской волне осуществляется при $Q \ll 1, f = 0$, а к сферической волне — при $Q \gg 1$, если $f = 0$, или за счет уменьшения радиуса кривизны: $|f| \rightarrow \infty$.

2. Дисперсия и пространственная корреляция

Проведем вначале анализ дисперсии и коэффициента пространственной корреляции для статистически однородных трасс ($\zeta(\xi) \equiv \equiv 1$). Таковыми являются, например, трассы над ровной подстилающей поверхностью в приземном слое атмосферы.

Выражение для дисперсии флуктуаций уровня получается из (6.4) при совмещении точек наблюдения:

$$\sigma_x^2(t) = B_x(\rho, \rho). \tag{6.6}$$

Как следует из формул (6.6) и (6.4), эта функция симметрична относительно оси пучка. Результаты численных расчетов дисперсии коллимированного и расходящегося пучков [6, 7] приведены на рис. 6.1. Из этого рисунка видно, что минимальной дисперсией

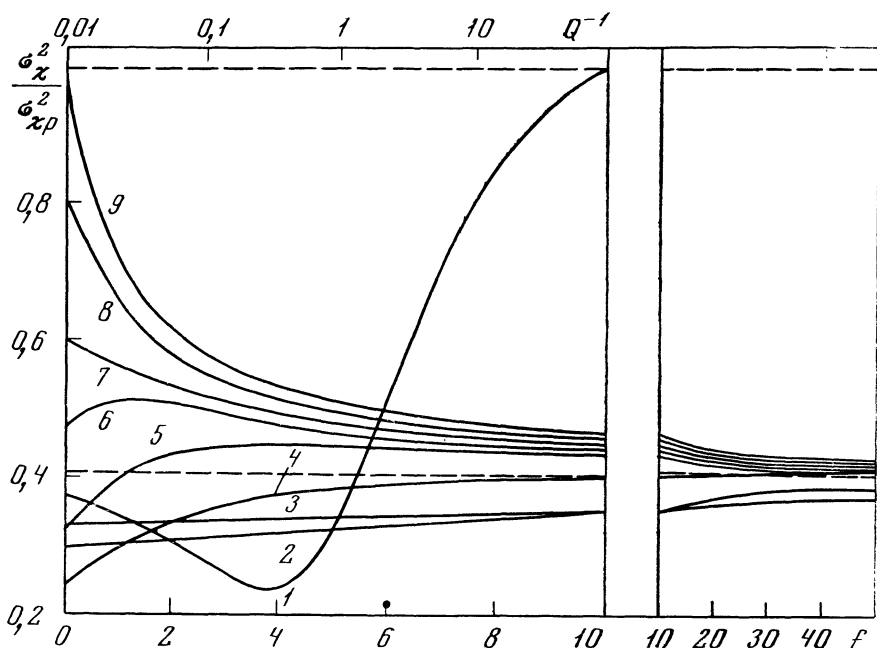


Рис. 6.1. Зависимость дисперсии на оси коллимированного и расходящегося лазерных пучков от числа Френеля передающей апертуры и расфокусировки излучения

1 — зависимость σ_x^2/σ_{xp}^2 от числа Френеля Q^{-1} при $f = 0$; 2—9 — зависимость σ_x^2/σ_{xp}^2 от параметра расфокусировки $f = x/R$: 2 — $Q = 10$; 3 — $Q = 30$; 4 — $Q = 2,5$; 5 — $Q = 1$; 6 — $Q = 5 \cdot 10^{-1}$; 7 — $Q = 3 \cdot 10^{-1}$; 8 — $Q = 10^{-1}$; 9 — $Q = 10^{-1}$. $D^{-1} = 0$

обладает узкий ($Q \simeq 1$) коллимированный пучок. При варьировании числа Френеля Q^{-1} и параметра фокусировки f величина дисперсии флуктуаций изменяется более чем в четыре раза.

Распределение дисперсии [8] в поперечном сечении пучка показано на рис. 6.2. Из приведенных здесь данных следует, что флуктуации амплитуды возрастают по мере смещения точки наблюдения от оси к краю пучка. При этом масштаб t_d изменения величины $\sigma_x^2(t)$ оказывается равным дифракционному размеру пучка. Расфокусировка излучения приводит к увеличению масштаба t_d и, следовательно, к выравниванию дисперсии по сечению пучка, что непосредственно видно из рис. 6.3.

Коэффициент пространственной корреляции флуктуаций уровня рассчитывался [8] на основе (6.4) по формуле

$$b_x(t, n) = \frac{B_x(\rho_1, \rho_2)}{\sigma_x(\rho_1)\sigma_x(\rho_2)}.$$

Из выражений (6.6) и (6.4) следует, что для точек наблюдения, центр тяжести которых остается на оси ($t = 0$), коэффициент кор-

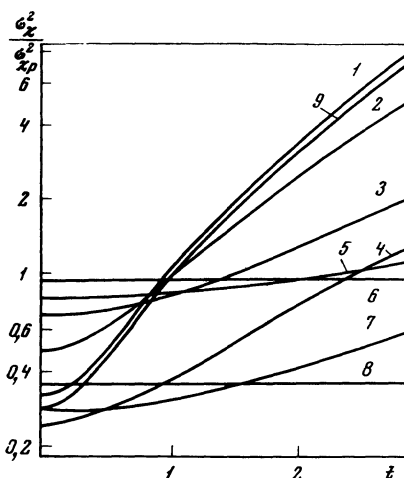


Рис. 6.2. Распределение дисперсии уровня амплитуды в поперечном сечении коллимированного пучка ($f = 0$)

- 1, 9 — $Q = 1$;
- 2 — $Q = 0,5$;
- 3 — $Q = 0,23$;
- 4 — $Q = 5$;
- 5 — $Q = 0,1$;
- 6 — $Q = 0,01$;
- 7 — $Q = 10$;
- 8 — $Q = 50$; (1—8) — $D^{-1} = 0,237 \cdot 10^{-3}$;
- 9 — $D^{-1} = 0,237 \cdot 10^{-1}$

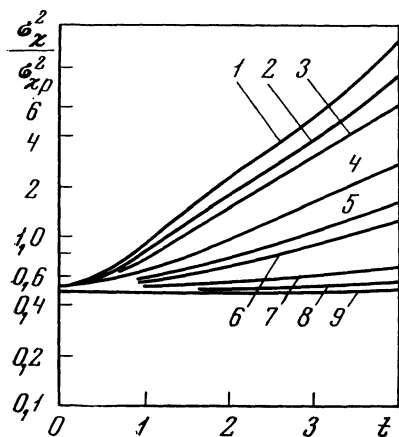


Рис. 6.3. Распределение дисперсии уровня амплитуды в поперечном сечении расфокусированного пучка

- $\varnothing = 0,5$; $D^{-1} = 0,237 \cdot 10^{-3}$;
- 1 — $f = 0$;
- 2 — $f = -0,1$;
- 3 — $f = -0,2$;
- 4 — $f = -0,5$;
- 5 — $f = -0,8$;
- 6 — $f = -1$;
- 7 — $f = -2$;
- 8 — $f = -3$;
- 9 — $f = -4$

реляции обладает осевой симметрией $b_x(0, n) = b_x(0, n)$. Масштаб корреляции для плоской и сферической волн, как известно [10, 11], имеет порядок радиуса первой зоны Френеля. При переходе от плоской волны ($Q = 0$) к узкому пучку ($Q \approx 1$) радиус корреляции несколько уменьшается и одновременно возрастает уровень отрицательной корреляции. Дальнейшее уменьшение размера передающей апертуры ($Q > 1$) и (или) радиуса кривизны фазового фронта приводит к расширению пучка. При этом коэффициент корреляции плавно переходит в коэффициент корреляции флуктуаций уровня сферической волны.

Расчеты показывают, что дисперсия и коэффициент корреляции для лазерного пучка совпадают с аналогичными величинами для неограниченной плоской и ненаправленной сферической волн соответственно при $Q \lesssim 10^{-2}$ и $Q \gtrsim 50$, т. е. в условиях, когда

его дифракционный размер намного превышает радиус первой зоны Френеля. В то же время проведенные в [8] расчеты корреляционных функций не обнаружили заметных изменений b_x при варьировании волнового параметра D в области $D \gg 1$.

3. Временная корреляция и спектры флуктуаций

Важной характеристикой флуктуаций интенсивности лазерного пучка, распространяющегося в атмосфере, является временной спектр. При известном спектральном составе флуктуационных помех турбулентного происхождения, возникающих в оптических устройствах, имеется возможность избавиться от них путем применения соответствующей обработки принимаемых оптических сигналов.

Спектральную плотность временных флуктуаций определим как фурье-преобразование временной автокорреляционной функции $R_x(\tau)$:

$$W(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau R_x(\tau) d\tau, \quad (6.7)$$

где ω — круговая частота.

Исследование спектральной плотности проведем в частном случае, когда приемник находится на оси пучка. Положим в (6.2) $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и подставим получающуюся при этом величину $R_x(\tau) = B_x(0, 0, \tau)$ в формулу (6.7). Тогда в случае спектра $\Phi_n(\xi, \kappa)$, определяемого формулой (6.3), получим следующее выражение для спектральной плотности:

$$\begin{aligned} W_x(\omega) = & 0,34\sigma_{xp}^2 \int_0^1 d\xi \zeta(\xi) \Omega^{-1/2}(\xi) \omega_0^{-1}(\xi) \int_0^{\infty} ds s^{-1/2} (1+s)^{-1/2} \times \\ & \times \{1 - \cos[\Omega^2(\xi)(1-\xi)(1-\delta_1(1-\xi)(1+s))]\} \times \\ & \times \exp\{-\Omega^2(\xi)[D^{-1} + \delta_2(1-\xi)^2(1+s)]\}, \quad (6.8) \end{aligned}$$

где $\Omega(\xi) = \omega/\omega_0(\xi)$ — нормированная частота. Здесь $\omega_0(\xi) = v_{\perp}(\xi) \sqrt{k/x}$ — характерная частота, которая соответствует переносу неоднородностей масштаба $\sim \sqrt{\lambda x}$ поперек трассы со скоростью $v_{\perp}(\xi)$. Величины δ_1 и δ_2 определяются через дифракционные параметры пучка:

$$\delta_1 = \frac{Q^2 - f(1-f)}{Q^2 + (1-f)^2}, \quad \delta_2 = \frac{Q}{Q^2 + (1-f)^2}.$$

Внутренний интеграл в формуле (6.8) можно выразить через гипергеометрические функции:

$$W_x(\omega) = 0,34\sigma_{xp}^2 \omega_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} \int_0^1 d\xi \zeta(\xi) \left(\frac{v_{\perp}(\xi)}{v_{\perp}(0)} \right)^{1/2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}; -\alpha\right) + \frac{\Gamma(-4/3)}{\sqrt{\pi}} \alpha^{4/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}; -\alpha\right) - \right. \\ & - \operatorname{Re} \left[\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(11/6)} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}; -\alpha + i\beta\right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Gamma(-4/3)}{\sqrt{\pi} i} (\alpha - i\beta)^{4/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}; -\alpha + i\beta\right) \right] \right\}, \quad (6.9) \end{aligned}$$

где

$$\Omega_0 = \Omega(0), \quad \omega_0 = \omega(0),$$

$$\alpha = \Omega_0^2 (v_{\perp}(\xi)/v_{\perp}(0))^{-2} (\delta_2(1 - \xi) + D^{-1}),$$

$$\beta = \Omega_0^2 (v_{\perp}(\xi)/v_{\perp}(0))^{-2} (1 - \xi)(1 + \delta_2\xi - \delta_1).$$

Полученное представление для спектральной плотности флуктуаций уровня в общем случае доступно лишь для численного анализа. Из соображений физической наглядности целесообразно начать этот анализ со случая распространения неограниченной плоской волны в статистически однородной среде при неизменной вдоль трассы скорости ветра.

а. Плоская волна

В этом случае, полагая в формуле (6.2) $\xi(\xi) = 1$, $v_{\perp}(\xi) = v_{\perp}$, находим, что временные флуктуации плоской волны соответствуют простому переносу пространственного поля флуктуаций:

$$R_{\chi}^*(\tau) = B_{\chi}(\rho, \rho + v_{\perp}\tau, 0). \quad (6.10)$$

В соответствии с равенством (6.10) для оценки временного масштаба корреляции τ_c можно воспользоваться формулой (2.67). При этом оказывается, что масштаб корреляции по порядку величины равен времени, в течение которого неоднородность с характерным масштабом $\sqrt{\lambda x}$ перемещается поперек трассы, т. е.

$$\tau_c \sim \sqrt{\lambda x}/v_{\perp}.$$

В случае «нулевого» внутреннего масштаба ($D^{-1} = 0$) в формуле (6.9) можно провести интегрирование по переменной ξ , в результате которого нормированная спектральная плотность запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\omega W_{\chi}(\omega)}{\sigma_{\chi p}^2} &= 0,084 \Omega^{-4/3} \left\{ 1,69 - \operatorname{Im} \frac{\sqrt{\pi} \exp(i\Omega^2)}{\Omega^2} \times \right. \\ & \times \left[\frac{\Gamma(7/3)}{\Gamma(17/6)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}; -i\Omega^2\right) + (-i\Omega^2)^{2/3} \frac{\Gamma(-7/3)}{\sqrt{\pi}} \times \right. \\ & \left. \left. \times {}_1F_1\left(\frac{17}{6}, \frac{10}{3}; -i\Omega^2\right) \right] \right\}. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Исследуем поведение этой спектральной плотности в двух предельных случаях: $\Omega \ll 1$ и $\Omega \gg 1$.

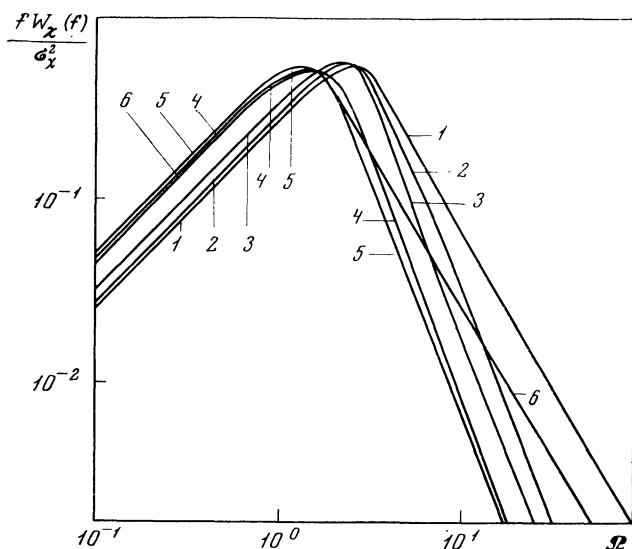


Рис. 6.4. Зависимость спектральной плотности уровня амплитуды лазерного пучка от размера передающей апертуры

$f = 0$; $D^{-1} = 0$; 1 — $Q = 10^8$ (сферическая волна); 2 — $Q = 50$; 3 — $Q = 5$; 4 — $Q = 1$; 5 — $Q = 0,1$; 6 — $Q = 10^{-9}$ (плоская волна)

В области низких частот ($\Omega \ll 1$) из (6.11) находим

$$\frac{\omega W_x(\omega)}{\sigma_{xp}^2} \simeq 0,225\Omega(1 + 0,27\Omega^{1/3} + \dots). \quad (6.12)$$

В области высоких частот ($\Omega \gg 1$) воспользуемся асимптотическим разложением гипергеометрической функции при больших значениях аргумента и ограничимся членом самого высокого порядка по Ω . Тогда получим

$$\frac{\omega W_x(\omega)}{\sigma_{xp}^2} \simeq 0,57\Omega^{-1/3}. \quad (6.13)$$

Таким образом, согласно (6.12) и (6.13) нормированный спектр в области низких частот растет линейно, проходит через максимум вблизи $\Omega \sim v_{\perp}/\sqrt{\lambda x}$, а при высоких частотах убывает по закону $\Omega^{-1/3}$. Рассчитанная численно по формуле (6.9) спектральная плотность флуктуаций уровня плоской волны приведена на рис. 6.4.

б. Сферическая волна

Временная автокорреляционная функция флуктуаций уровня сферической волны может быть найдена из формулы (6.2), если положить в ней размер передающей апертуры равным нулю ($Q^{-1} =$

= 0) и провести интегрирование по координате ξ . Тогда выражение для коэффициента корреляции $r_x(\tau) = R_x(\tau)/R_x(0)$ примет вид [12]:

$$r_x(\tau) = 1,67 \int_0^{\infty} ds J_0(2v_{\perp} \tau s \sqrt{k/x}) s^{-3/2} \exp(-4D^{-1}s^2) \times \\ \times \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{-1} \left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s\right) \cos s^2 + S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s\right) \sin s^2 \right] \right\},$$

где

$$C(x) = \int_0^x dt \cos \frac{\pi t^2}{2}, \quad S(x) = \int_0^x dt \sin \frac{\pi t^2}{2}$$

— интегралы Френеля. Функция $r_x(\tau)$ при $D^{-1} = 0$ приведена на рис. 6.5. Здесь же для сравнения показаны коэффициент корреляции для плоской волны и коэффициент пространственной корреляции для сферической волны. Как видно из представленных результатов, временной и пространственный коэффициенты корреляции сферической волны не совпадают. В этом случае перенос поля флуктуаций показателя преломления приводит к более сложной, чем простой пространственный перенос, картине флуктуаций интенсивности световой волны в плоскости приема.

Частотный спектр сферической волны удается выразить [13] через гипергеометрические функции при $D^{-1} = 0$, что соответствует чисто степенному спектру турбулентности.

С помощью разложений гипергеометрических функций в ряды нетрудно найти низкочастотную и высокочастотную асимптотики спектра:

$$\frac{\omega W_x(\omega)}{R_x(0)} \simeq 0,123\Omega (1 + 0,119\Omega^{4/3} + \dots), \quad \Omega \ll 1, \\ \frac{\omega W_x(\omega)}{R_x(0)} \simeq 1,4\Omega^{-3/2}, \quad \Omega \gg 1. \quad (6.14)$$

График нормированной спектральной плотности сферической волны представлен на рис. 6.4 (кривая 1). Из этого рисунка видно, что вклад высокочастотных составляющих в спектральную плотность выше, чем в плоской волне. Поскольку при расчетах использовалась чисто степенная модель спектра показателя преломления, полученные результаты верны в интервале

$$\frac{2\pi}{L_0} \sqrt{\frac{x}{k}} \ll \Omega \ll \frac{2\pi}{l_0} \sqrt{\frac{x}{k}},$$

где l_0 и L_0 — внутренний и внешний масштабы турбулентности. Влияние внутреннего масштаба на высокочастотную часть спектра и изменения спектральной плотности, связанные с пространственной локализацией поля пучка, мы рассмотрим в следующем разделе.

в. Ограниченные лазерные пучки

r_x, β_x

Рассчитанные в [14] по формуле (6.9) нормированные частотные спектры коллимированного пучка для различных значений числа Френеля передающей апертуры представлены на рис. 6.4. Наибольшее влияние пространственная локализация оказывает на высокочастотную часть спектральной плотности. При уменьшении дифракционного размера пучка ($Q \rightarrow 1$) наблюдается уменьшение относительного вклада высоких частот. Этот же эффект имеет место во френелевой ($0 \leq Q \leq 1$) и во френгоферовой ($1 \leq Q < \infty$) зонах дифракции соответственно при увеличении и уменьшении волнового параметра Q от значений $Q = 0$ и $Q = \infty$. Поправки к спектру в области $Q \ll 1$ были найдены также в работе [15]. Уменьшение относительного вклада высокочастотных компонент спектра узкого коллимированного пучка по сравнению с плоской волной объясняется уменьшением рассеивающего объема и, как следствие этого, — уменьшением роли мелкомасштабных неоднородностей показателя преломления, угол рассеяния которых превышает угловой размер передающей апертуры.

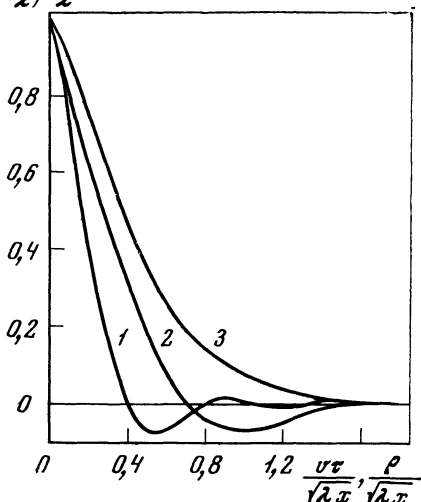


Рис. 6.5. Коэффициент временной корреляции флуктуаций уровня амплитуды сферической (1) и плоской (2) волн и коэффициент пространственной корреляции сферической волны (3)

Из результатов расчета спектров, изображенных на рис. 6.6, видно, что увеличение внутреннего масштаба или эквивалентное уменьшение соответствующего ему волнового параметра D приводит к уменьшению относительного вклада высокочастотных компонент спектральной плотности во всей области изменения числа Френеля передающей апертуры.

Высокая чувствительность спектральной плотности уровня к поведению турбулентного спектра в интервале волновых чисел $\kappa \geq \kappa_m$ позволяет исследовать (гл. VIII) спектр турбулентности по измерениям $W_\kappa(\omega)$.

Проведенный выше анализ спектральной плотности существенным образом основан на гипотезе переноса с постоянной скоростью не изменяющихся во времени неоднородностей показателя преломления поперек трассы распространения. Поэтому полученные результаты справедливы, когда флуктуациями скорости ветра можно пренебречь ($\langle \delta v^2 \rangle^{1/2} \ll \langle v \rangle$). В атмосфере это

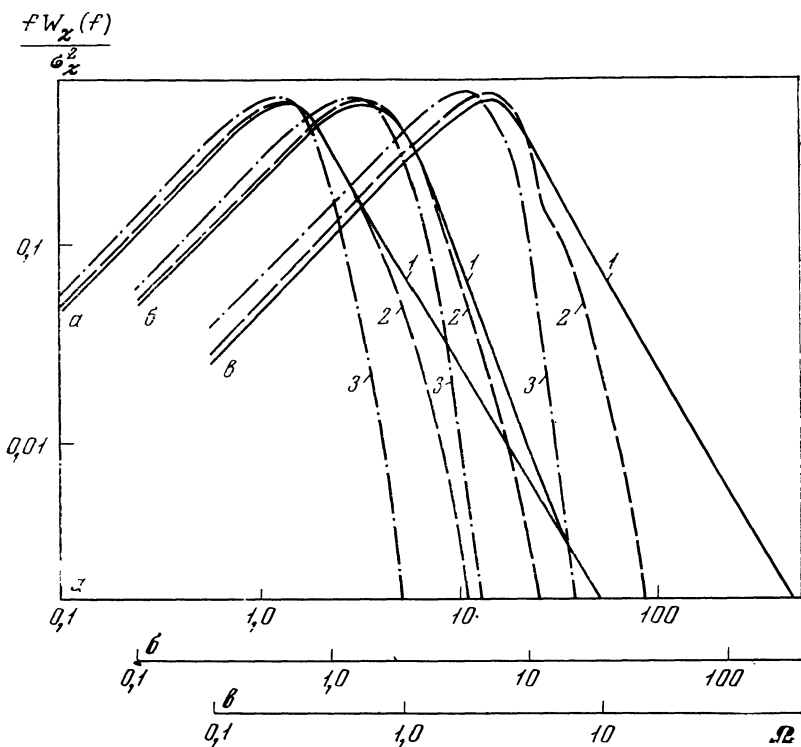


Рис. 6.6. Зависимость частотных спектров уровня амплитуды плоской, сферической волны и лазерного пучка от величины внутреннего масштаба турбулентности

$$\frac{fW_x f}{\sigma_x^2} \cong 2 \frac{\omega W_x(\omega)}{\sigma_x^2}$$

a — плоская волна; b — коллимированный пучок, $f = 0$, $Q = 1$; ϵ — сферическая волна; 1 — $D^{-1} = 0$; 2 — $D^{-1} = 10$; 3 — $D^{-1} = 10^2$

условие можно считать выполненным, так как относительное среднеквадратическое отклонение скорости обычно невелико:

$$\langle \delta v^2 \rangle^{1/2} / \langle v \rangle \cong 0,1.$$

Мы рассмотрели распространение лазерных пучков вдоль однородных горизонтальных трасс. В то же время при изменении интенсивности турбулентности вдоль трассы ($\zeta(\xi) \neq 1$), которое имеет место в случае распространения вдоль наклонных трасс, статистические характеристики флуктуаций уровня имеют некоторые особенности. В следующем разделе мы кратко обсудим результаты расчетов дисперсии и корреляции уровня пучков, распространяющихся вдоль наклонных трасс в атмосфере.

4. Распространение вдоль наклонных трасс

Приведем вначале качественные соображения, касающиеся распространения неограниченных плоской и сферической волн. Пусть направление распространения совпадает с осью Ox' . Известно [16, 10], что существенные для распространения плоской и сферической волн области пространства ограничены соответственно параболоидом

$$y'^2 + z'^2 = \frac{2\pi}{k}(x - x') + \frac{\pi^2}{k^2} \quad (6.15)$$

и эллипсоидом вращения

$$\sqrt{(x - x')^2 + z'^2 + y'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = x + \frac{\pi}{2k}. \quad (6.16)$$

Проекция параболоида и эллипсоида на плоскость показаны на рис. 6.7. Если волна распространяется через турбулентный слой толщиной Δx , то в точку наблюдения ($y' = z' = 0, x' = x$) рассеянные волны приходят из объема, образуемого в результате пересечения слоя с существенной для распространения областью. Отсюда ясно, что флуктуации интенсивности должны зависеть не только от толщины турбулентного слоя и интенсивности турбулентности в нем, но и от положения слоя относительно передатчика и приемника. Воспользовавшись выражением (6.4), дисперсию флуктуаций логарифма амплитуды плоской ($Q = 0$) и сферической ($Q = \infty$) волн запишем в виде

$$\sigma_x^2 = 7,07\sigma_{xp}^2 \cos \frac{5\pi}{12} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^{5/6} \zeta(\xi), \quad Q = 0; \quad (6.17)$$

$$\sigma_x^2 = 7,07\sigma_{xp}^2 \cos \frac{5\pi}{12} \int_0^1 d\xi \xi^{5/6} (1 - \xi)^{5/6} \zeta(\xi), \quad Q = \infty.$$

Из этих формул следует, что наибольшее возмущающее действие на плоскую волну оказывает слой, расположенный вблизи передатчика ($\xi = 0$), в то время как в случае сферической волны наиболее сильное влияние оказывает слой, расположенный посередине ($\xi = 1/2$) трассы. В обоих случаях несущественны слои, расположенные вблизи приемника.

Если расположить рассеивающий слой конечной толщины Δx вблизи передатчика и устремить к бесконечности длину трассы ($\Delta x/x \rightarrow 0$), то, как следует из формул (6.15), (6.16), объем, заполненный неоднородностями, будет неограниченно расти для плоской волны и уменьшаться в случае сферической волны. Проведем соответствующие вычисления по формулам (6.17), получим, что дисперсия плоской волны неограниченно возрастает ($\sigma_x^2 = O(x^{5/6})$), в то время как дисперсия сферической волны стремится к конечному пределу ($\sigma_x^2 = O(1)$). Из приведенных соображений сле-

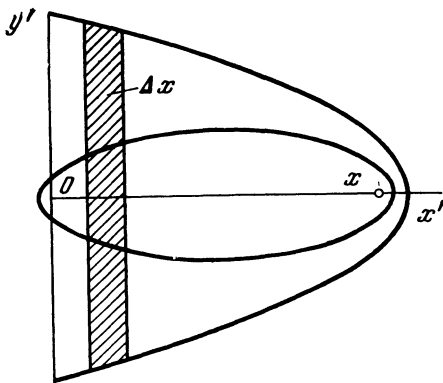


Рис. 6.7. Области пространства, существенные для распространения плоской и сферической волн

дует, что распространение волн вдоль наклонных трасс в атмосфере должно обладать определенными особенностями по сравнению с приземными трассами.

Для расчетов дисперсии и пространственной корреляции уровня амплитуды при распространении лазерного пучка вдоль наклонных атмосферных трасс воспользуемся формулой (6.4), в которой следует выразить функцию $\zeta(\xi)$ через параметры трассы и зависимость структурной характеристики от высоты.

Пренебрегая сферичностью Земли при условии

$$R \gg h, \quad (6.18)$$

где R — радиус Земли, можно считать, что высота текущей точки луча x' равна

$$h(x') = h_0 + x' \cos \theta, \quad (6.19)$$

где h_0 — высота передатчика, θ — зенитный угол луча. Формула (6.19) соответствует передатчику, расположенному ниже точки приемника. Для обратного распространения имеем

$$h(x') = h_0 - x' \cos \theta. \quad (6.20)$$

Нормированный высотный профиль $\zeta(\xi)$ в формуле (6.4) тогда запишется

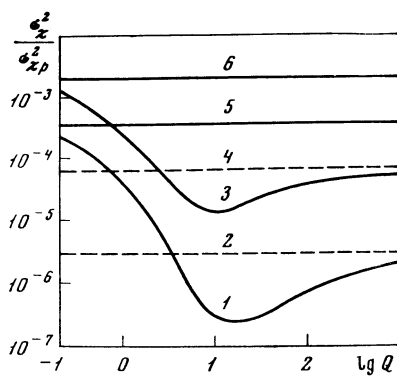
$$\zeta(\xi) = \frac{C_n^2(h(x\xi))}{C_n^2(h_0)}. \quad (6.21)$$

Вид функции $C_n^2(h)$, как было показано в § 1.7, существенным образом определяется величиной $C_n^2(h_0)$ в приземном слое. Для исследования основных закономерностей зависимости дисперсии и пространственной корреляции от дифракционного размера передающей апертуры Q^{-1} использовалась модель высотной зависимости (1.118):

$$C_n^2(h) = C_{n0}^2 \left(1 + \frac{h}{h_0}\right)^{-2l_3} \exp\left(-\frac{h}{h}\right), \quad (6.22)$$

Рис. 6.8. Зависимость дисперсии уровня амплитуды на оси коллимированного пучка от дифракционного размера излучающей апертуры

$h_0 = 2 \text{ м};$
 $\bar{h} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ м};$
 $D^{-1} = 0,95 \cdot 10^{-6};$
 $x = 3 \cdot 10^5 \text{ м};$
 $f = 0;$
 $\sigma_{xp}^2 = 0,308 \quad C_{n0}^2 k^7 / \epsilon_0 x^{11/6};$
 $1 - \theta = 0^\circ;$
 $3 - \theta = 80^\circ;$
 2, 4 и 5, 6 — асимптотические значения для сферической и плоской волн соответственно



где $\bar{h}_0 = 2 \text{ м}$ и $\bar{h} = 3,2 \text{ км}$ — константы, характеризующие модель. При этом был рассмотрен случай распространения снизу вверх. Расстояние, проходимое волной в атмосфере, считалось малым по сравнению с длиной трассы. Расчеты [17] проводились по формулам (6.6), (6.4), (6.21), (6.19) и (6.22). Как следует из рис. 6.8, на котором представлена зависимость дисперсии на оси пучка $[\sigma_x^2(O, Q) = B_x(0, 0)]$ от числа Френеля, флуктуации амплитуды имеют минимум в области $Q \approx 10$. Минимум функции $\sigma_x^2(O, Q)$ выражен более четко по сравнению с однородной трассой (рис. 6.1) и смещен в сторону френелевой зоны дифракции.

В области больших значений волнового параметра ($Q \gg 1$) и при условии $h/x \cos \theta \ll 1$ для дисперсии на оси пучка находим

$$\sigma_x^2(0, Q) = 7,07 \sigma_{xp}^2 \int_0^1 d\xi \xi (\xi) \left[(Q^{-2} + \xi^2)^{5/12} \cos\left(\frac{5}{6} \arctg Q \xi\right) - Q^{-5/6} \right].$$

Отсюда для сферической волны ($Q \rightarrow \infty$) получим

$$\sigma_{xS}^2 = 7,07 \sigma_{xp}^2 \sin \frac{\pi}{12} \int_0^1 d\xi \xi^{5/6} \zeta(\xi).$$

Во френелевой зоне дифракции ($Q \ll 1$) асимптотика дисперсии записывается следующим образом:

$$\sigma_x^2(0, Q) = 7,07 \sigma_{xp}^2 (1 + Q^2)^{-5/12} \left[\cos\left(\frac{5}{6} \arctg Q^{-1}\right) - \left(\frac{Q^2}{1 + Q^2}\right)^{5/12} \right] \int_0^1 d\xi \xi (\xi). \quad (6.23)$$

Из выражения (6.23) при $Q = 0$ получается формула для дисперсии флуктуаций уровня в плоской волне. Подставляя в (6.23)

высотный профиль (6.22), в случае $h_0/\bar{h} \ll 1$ получаем

$$\sigma_x^2(0, Q) = 7,07\sigma_{xp}^2 (1 + Q^2)^{-5/12} \left[\cos\left(\frac{5}{6} \arctg Q^{-1}\right) - \left(\frac{Q^2}{1+Q^2}\right)^{5/12} \right] \times \\ \times \frac{\bar{h}}{x \cos \theta} \left(\frac{h_0}{\bar{h}}\right)^{1/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - 3 \left(\frac{h_0}{\bar{h}}\right)^{1/3} \right]. \quad (6.24)$$

Формула (6.24) дает значения, удовлетворительно согласующиеся при $Q \ll 1$ с результатами, представленными на рис. 6.8. Исследование зависимости дисперсии от положения точки приемника в поперечном сечении пучка относительно центра дает [17] качественно такую же картину, как в случае однородных трасс (рис. 6.2, 6.3).

Асимптотические выражения для коэффициентов пространственной корреляции удастся получить лишь для неограниченных плоской и сферической волн. В случае плоской волны при условии $\bar{h}/x \cos \theta \ll 1$, используя формулы (6.6), (6.4), можно получить

$$b_x(n) = \operatorname{Re}_1 F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; in^2\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im}_1 F_1\left(-5/6, 1; in^2\right) - \\ - n^{5/3} \frac{\Gamma^{-1}(11/6)}{\sin \pi/12}, \quad n = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{k}{x}}. \quad (6.25)$$

Для сферической волны асимптотику удастся найти лишь при дополнительном ограничении на величину разнесения точек наблюдения ($n \ll 1$):

$$b_x(n) = 1 - \frac{n^{5/3}}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} \frac{\int_0^1 d\xi \xi^{5/6} \zeta(\xi)}{\int_0^1 d\xi \xi^{5/6} \zeta(\xi)}. \quad (6.26)$$

Подставляя в (6.26) высотную зависимость (6.22), получим приближенное равенство

$$b_x(n) \simeq 1 - \frac{\Gamma^{-1}(7/6)}{\Gamma(11/6) \sin \pi/12} \left(\frac{\bar{h}n^2}{x \cos \theta}\right)^{5/6}, \quad (6.27)$$

которое справедливо при малых значениях параметра $\bar{h}n^2/x \cos \theta$.

Из формулы (6.25) следует, что коэффициент корреляции для плоской волны вообще не зависит от параметров высотного профиля структурной характеристики. Напротив, в случае точечного источника, как следует из (6.7), уровень корреляции существенным образом определяется отношением эффективной толщины слоя h к высоте приемника над земной поверхностью $x \cos \theta$. Из этого сопоставления ясно, что влияние высотной зависимости структурной характеристики на корреляцию должно проявляться только во френгоферовой зоне дифракции.

Детальное исследование возникающих здесь закономерностей проведено численным способом [17] для нескольких реально наблюдаемых высотных профилей структурной характеристики $C_n^2(h)$. Результаты этих расчетов подтверждают сделанный вывод о том, что влияние вариаций профиля на корреляционную функцию проявляется только во френгоферовой зоне дифракции ($Q \geq 10$).

§ 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РАСЧЕТЫ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Расчеты сильных флуктуаций интенсивности в турбулентной атмосфере проводятся в настоящее время в основном с использованием уравнения для четвертого момента поля, полученного в приближении марковского случайного процесса (§ 4, гл. II), и принципа Гюйгенса — Кирхгофа, обобщенного на случай плавно-неоднородных сред (§ 5, гл. II). Точное решение уравнения для четвертого момента поля $M_{22} = \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2)$ найти не удастся. Поэтому разными авторами предпринимались попытки приближенного решения этого уравнения как для плоской и сферической волн [19—26], так и для пространственно-ограниченных пучков [27—29]. Расчеты статистических характеристик флуктуаций интенсивности пучков, проведенные в приближении Гюйгенса — Кирхгофа [30—33], дают результаты, количественно совпадающие с экспериментальными данными. Для изучения сильных флуктуаций интенсивности, возникающих при распространении излучения за тонким слоем турбулентной среды, применяется приближение фазового экрана [34, 35]. Некоторые качественно верные результаты получены [36] также при селективном суммировании ряда теории возмущений (2.20), возникающего при решении волнового уравнения (2.10). Попытки численного решения уравнения для $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2)$ удаются пока только для модельных сред [37, 38], которые описывают атмосферную турбулентность качественно.

1. Свойства пространственной корреляции; соотношения подобия

На основе анализа уравнения (2.113) для функции когерентности четвертого порядка в простейшем случае неограниченной плоской волны удастся ввести обобщенные безразмерные переменные, от которых зависят дисперсия, коэффициент пространственной корреляции, спектры и распределение вероятностей флуктуаций интенсивности [19—23, 39].

Проведем в уравнении (2.113) замену переменных:

$$R = \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho'_1 + \rho'_2), \quad r_1 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 + \rho'_1 - \rho'_2),$$

$$r_2 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 - \rho'_1 + \rho'_2), \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2,$$

тогда $\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta'_1 - \Delta'_2 = 2(\nabla_{\mathbf{R}}\nabla_{\rho} + \nabla_{r_1}\nabla_{r_2})_{\mathbf{x}}$ и уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho) = \frac{i}{k} (\nabla_{\mathbf{R}}\nabla_{\rho} + \nabla_{r_1}\nabla_{r_2}) \Gamma_4(x, \mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho) - \frac{\pi k^2}{4} F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho) \Gamma_4(x, \mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho). \quad (6.28)$$

Функция $F(x, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2) = F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho)$, выраженная через новые переменные, запишется следующим образом:

$$F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho) = 4 \int d^2\kappa \Phi_{\varepsilon}(x, \kappa) \left[1 - \cos \kappa r_1 \cos \kappa r_2 - \cos \kappa r_1 \cos \frac{1}{2} \kappa \rho - \cos \kappa r_2 \cos \frac{1}{2} \kappa \rho \right].$$

В новых переменных дифференциальный оператор имеет более простой вид, который в случае плоской волны (с учетом инвариантности решения по отношению к сдвигам в плоскости $x = \text{const}$) еще более упрощается ($\nabla_{\mathbf{R}}\Gamma_4 \equiv 0$). Теперь переменная ρ входит в уравнение как параметр. Располагая точки $\rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2$ в вершинах параллелограмма с центром в точке \mathbf{R} и со сторонами $\rho_1 - \rho'_1 = \rho'_2 - \rho_2 = \mathbf{r}_2$, $\rho_1 - \rho'_2 = \rho'_1 - \rho_2 = \mathbf{r}_1$, так что точки ρ_1 и ρ_2 соответствуют противоположным вершинам, запишем уравнение (6.28) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{k} \nabla_{r_1}\nabla_{r_2} \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \frac{\pi k^2}{4} F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \Gamma_4(x, \mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0), \\ F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = 4 \int d^2\kappa \Phi_{\varepsilon}(x, \kappa) \times \\ &\quad \times [1 - \cos \kappa r_1] [1 - \cos \kappa r_2]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Граничное условие в случае распространения плоской волны с амплитудой u_0 записывается в виде

$$\Gamma_4(0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |u_0|^4.$$

Так как функция $F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и оператор $\frac{i}{k} \nabla_{r_1}\nabla_{r_2}$ в уравнении (6.29) симметричны по отношению к преобразованию $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$, ясно, что функция $\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ также инвариантна относительно этого преобразования:

$$\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_4(x, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (6.31)$$

Равенство (6.31) означает изотропность функции когерентности четвертого порядка для плоской волны. Запишем $\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ через комплексные амплитуды поля, располагая центр параллело-

грамма в начале координат:

$$\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left\langle u\left(x, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) u\left(x, -\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) u^*\left(x, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times u^*\left(x, -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right) \right\rangle. \quad (6.32)$$

Из выражения (6.32) следует, что второй момент интенсивности при разнесении точек наблюдения, равном \mathbf{r} , можно записать в виде

$$\left\langle I\left(x, \frac{\mathbf{r}}{2}\right) I\left(x, -\frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right\rangle = \Gamma_4(x, \mathbf{r}, 0) = \Gamma_4(x, 0, \mathbf{r}). \quad (6.33)$$

Учитывая, что средняя интенсивность выражается через функцию когерентности второго порядка

$$\langle I(x) \rangle = \Gamma_2(x, 0, 0), \quad (6.34)$$

для корреляционной функции флуктуаций интенсивности находим

$$B_I(x, r) = \Gamma_4(x, r, 0) - \Gamma_2^2(x, 0, 0). \quad (6.35)$$

Функция $\Gamma_2(x, 0, \mathbf{r}_1)$ удовлетворяет (§ 5, гл. II) уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2(x, 0, \mathbf{r}_1) = \frac{\pi k^2}{4} H(x, \mathbf{r}_1) \Gamma_2(x, 0, \mathbf{r}_1), \quad (6.36)$$

где $H(x, \mathbf{r}_1) = 2 \int d^2 \boldsymbol{\kappa} \Phi_\epsilon(x, \boldsymbol{\kappa}) (1 - \cos \boldsymbol{\kappa} \mathbf{r})$. Используя равенство (6.36) и уравнение (6.29), можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x} [\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \Gamma_2^2(x, 0, \mathbf{r}_1)] = \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{r}_1} \nabla_{\mathbf{r}_2} [\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \\ - \Gamma_2^2(x, 0, \mathbf{r}_1)] - \frac{\pi k^2}{4} F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) [\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \\ - \Gamma_2^2(x, 0, \mathbf{r}_1)] - \frac{\pi k^2}{4} \Gamma_2^2(x, 0, \mathbf{r}_1) [F(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - 2H(x, \mathbf{r}_1)]. \quad (6.37)$$

Проинтегрируем выражение (6.36) по \mathbf{r}_2 в бесконечных пределах. Тогда, применяя теорему Гаусса и учитывая очевидное соотношение

$$\lim_{|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty} \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_2^2(x, 0, \mathbf{r}_1),$$

находим, что первое слагаемое в правой части равно нулю. Полагая затем в оставшихся членах $\mathbf{r}_1 = 0$ и принимая во внимание, что $H(x, 0) = 0$, $F(x, 0, \mathbf{r}_2) = 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int d^2 \mathbf{r}_2 [\Gamma_4(x, 0, \mathbf{r}_2) - \Gamma_2^2(x, 0, 0)] = 0.$$

С учетом (6.35) отсюда следует

$$\frac{d}{dx} \int d^2 \mathbf{r} B_I(x, \mathbf{r}) = 0.$$

Поскольку при $x = 0$ флуктуации поля отсутствуют и $B_I(0, r) = 0$, то имеет место соотношение

$$\int d^2r B_{I\bar{I}}(x, r) = 0, \quad (6.38)$$

которое является следствием закона сохранения энергии. Равенство (6.38) эквивалентно утверждению о том, что в поперечной к направлению распространения плоскости положительные выбросы интенсивности относительно среднего уровня компенсируются отрицательными выбросами.

Уравнение (6.29) позволяет ввести универсальные параметры, от которых зависят дисперсия и функция пространственной корреляции флуктуаций интенсивности. С учетом гипотезы замороженной турбулентности эти параметры обобщаются также по отношению к временным спектрам флуктуаций интенсивности.

Рассмотрим сначала случай, когда внутренний масштаб l_0 существенно меньше всех остальных характерных масштабов задачи, за исключением длины волны. Тогда для вычисления функции $F(x, r_1, r_2)$ (6.30) можно взять спектр диэлектрической проницаемости (1.74). Оказывается, что при этом можно единственным образом выбрать продольный $L_T = kl_T^2$ и поперечный $l_T = (\pi AC_z^2 k^3)^{-1/4}$ масштабы, которые после замены переменных

$$x = L_T \xi, \quad r_1 = l_T \eta_1, \quad r_2 = l_T \eta_2 \quad (6.39)$$

приводят уравнение (6.29) к безразмерному виду, не содержащему никаких параметров:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \xi} = i \nabla_{\eta_1} \nabla_{\eta_2} \Gamma_4 - F(\xi, \eta_1, \eta_2) \Gamma_4, \quad (6.40)$$

$$F(\xi, \eta_1, \eta_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \kappa \kappa^{-1/4} [1 - \cos(\kappa \eta_1)] [1 - \cos(\kappa \eta_2)].$$

Универсальный вид уравнения (6.40) дает все основания полагать, что четырехточечная функция когерентности Γ_4 является универсальной функцией безразмерных переменных:

$$\Gamma_4(\xi, \eta_1, \eta_2) = \Gamma_4\left(\frac{x}{L_T}, \frac{r_1}{l_T}, \frac{r_2}{l_T}\right) \quad (6.41)$$

и масштабы l_T и L_T являются масштабами подобия [39]. Формула (6.41) выражает соотношения подобия. В случае распространения плоской волны $\Gamma_4(0, r_1, r_2) = 1$, и масштабы l_T и L_T представляют собой полный набор параметров. Для пучков, заданных граничным условием (6.1), безразмерными параметрами, характеризующими задачу, являются a_0/l_T и F/L_T .

Если в уравнении (2.111) для функции $M_{n,n}$ провести замену переменных по формулам, аналогичным (6.39), то в результате уравнение для функции когерентности порядка $2n$ также не будет

содержать никаких параметров. В свою очередь из (2.111) следует, что когда все n точек сливаются в одну, то для плоской волны

$$M_{n,n} = \langle I^n(x) \rangle.$$

Поэтому для спектра (1.82) произвольный момент флуктуаций интенсивности плоской волны зависит только от x/L_T и, следовательно, их одноточечное распределение вероятностей определяется одним безразмерным параметром x/L_T .

Для другого предельного случая, когда внутренний масштаб велик по сравнению с другими масштабами задачи, в (6.30) можно разложить $\cos(\kappa r)$ в степенной ряд и ограничиться квадратичными членами. И в этом случае можно единственным образом выбрать продольный $L_{T_0} = k l_{T_0}^2$ и поперечный $l_{T_0} = [0,103 C_e^2 k^3 l_0^{-7/3}]^{-1/4}$ масштабы, так что после замены переменных

$$x = L_{T_0} \xi, \quad r_1 = l_{T_0} \eta_1, \quad r_2 = l_{T_0} \eta_2 \quad (6.42)$$

уравнение (6.29) может быть записано в виде, не содержащем никаких параметров:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \xi} = i \nabla_{\eta_1} \nabla_{\eta_2} \Gamma_4 - F(\xi, \eta_1, \eta_2) \Gamma_4, \quad (6.43)$$

$$F(\xi, \eta_1, \eta_2) = [\eta_1^2 \eta_2^2 + 2(\eta_1 \eta_2)^2] \int_0^\infty p^{1/2} \Phi_3(p, Pr) dp.$$

Масштабы L_T и L_{T_0} имеют определенный физический смысл. Подставляя $x = L_T$ в формулу (2.66) и $x = L_{T_0}$ в (2.60), получаем, что дисперсия логарифма интенсивности $\langle \chi^2 \rangle = \sigma_\chi^2$, рассчитанная в первом приближении МПВ, соответственно равна

$$\sigma_\chi^2(L_T) \simeq 0,75,$$

$$\sigma_\chi^2(L_{T_0}) \simeq 1,33.$$

Отсюда следует, что продольные масштабы L_T и L_{T_0} по порядку величины совпадают с расстоянием, на котором флуктуации интенсивности становятся сильными, и результаты, полученные в первом приближении МПВ, теряют смысл. Поперечные масштабы l_T и l_{T_0} по порядку величины равны радиусу первой зоны Френеля на расстояниях L_T и L_{T_0} .

Вместо безразмерных параметров x/L_T или x/L_{T_0} оказывается удобным пользоваться одним параметром β_0^2 , равным учетверенной дисперсии уровня, вычисленной в первом приближении МПВ. Удобство использования параметра β_0^2 заключается в его универсальности: один параметр пригоден для описания как в случае малых, так и больших l_0 . Кроме того, при малых значениях $\beta_0^2 \ll \ll 1$ относительная дисперсия флуктуаций интенсивности β , определяемая как

$$\beta^2 = \frac{\Gamma_4(x, 0, 0)}{(\Gamma_2(x, 0))^2} - 1, \quad (6.44)$$

совпадает с β_0^2 :

$$\beta^2 \simeq \beta_0^2; \beta_0^2 \ll 1.$$

При $\beta_0^2 \gg 1$ на основании соотношений подобия можно утверждать, что

$$\beta^2 = \beta^2(\beta_0^2). \quad (6.45)$$

Эта зависимость может быть найдена из эксперимента.

Установленные соотношения подобия позволяют записать выражения для корреляционных функций и частотных спектров флуктуаций интенсивности в виде универсальных функций. В дальнейшем будем рассматривать случай исчезающе малого внутреннего масштаба, поскольку именно этот случай представляет наибольший интерес для атмосферных задач. Из определения четырехточечной функции когерентности Γ_4 следует, что коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности $b_I(\rho)$ выражается через Γ_4 следующим образом:

$$b_I(\rho) = \frac{\Gamma_4(x, \rho, 0) - \Gamma_2^2(x, 0)}{\Gamma_4(x, 0, 0) - \Gamma_2^2(x, 0)}.$$

Следовательно, коэффициент корреляции может быть представлен как универсальная функция безразмерного расстояния между точками наблюдения ρ/l_T и параметра β_0^2 :

$$b_I = b_I(\rho/l_T, \beta_0^2). \quad (6.46)$$

Так как частотный спектр в предположении «замороженной» турбулентности связан с пространственным коэффициентом корреляции преобразованием Фурье по переменной ρ , то безразмерное произведение частоты ω на спектральную плотность $W_I(\omega)$ тоже является универсальной функцией безразмерной частоты $\Omega_T = \omega l_T/v_\perp$ и параметра β_0^2 :

$$\omega W(\omega) = U(\Omega_T/v_\perp, \beta_0^2). \quad (6.47)$$

Формулы (6.45) — (6.47) существенно облегчают процесс обработки экспериментальных данных с широкими пучками, так как они позволяют свести множество условий эксперимента к двум независимым параметрам: β_0^2 и ρ/l_T . При этом полезно иметь в виду следующие очевидные соотношения, связывающие эти параметры с поперечным масштабом $(x/k)^{1/2}$, характерным для слабых флуктуаций ($\beta_0^2 \ll 1$):

$$l_T = 1,35 (x/k)^{1/2} \beta_0^{-9/11} \quad (6.48)$$

и масштабом когерентности поля l_k (см. гл. III):

$$l_k = (0,365 C_\epsilon^2 k^2 x)^{-1/5} = 0,53 l_T \beta_0^{-39/55}. \quad (6.49)$$

Соотношения подобия не позволяют, строго говоря, отдать предпочтение какому-либо из трех поперечных масштабов l_T , l_k и $(x/k)^{1/2}$, поскольку все они выражаются друг через друга и через безразмерный параметр β_0^2 . Вопрос о том, какой из этих масштабов является, скажем, масштабом корреляции флуктуаций интенсивности, можно разрешить лишь на основе теоретического или экспериментального исследования флуктуаций интенсивности. Например, при $\beta_0^2 \ll 1$ решение, полученное в первом приближении МПВ, дает однозначный ответ на этот вопрос.

2. Приближенные решения уравнения для функции когерентности четвертого порядка

Для решения уравнения (6.29) воспользуемся преобразованием Фурье по координате \mathbf{r}_2 :

$$\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int d^2\boldsymbol{\kappa} \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}_1, \boldsymbol{\kappa}) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}_2). \quad (6.50)$$

Подставляя выражение (6.50) в уравнение (6.29) и используя равенство (6.30), приходим к уравнению для спектральной плотности $\tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}_1, \boldsymbol{\kappa})$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{k} \nabla_r \tilde{\varphi} + \frac{\pi k^2}{2} H(x, \mathbf{r}) \tilde{\varphi} = G(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}), \quad (6.51)$$

где

$$G(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = \pi k^2 \int d^2\boldsymbol{\kappa}' \Phi_\varepsilon(x, \boldsymbol{\kappa}') (1 - \cos \boldsymbol{\kappa}'\mathbf{r}) \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'). \quad (6.52)$$

Граничное условие для функции $\tilde{\varphi}(0, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa})$ имеет вид

$$\tilde{\varphi}(0, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = |u_0|^4 \delta(\boldsymbol{\kappa}). \quad (6.53)$$

Преобразуем полученное уравнение к чисто интегральному. Для этого решим уравнение (6.51), считая $G(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa})$ известной функцией. Первые два слагаемых запишем в форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi} + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{k} \nabla_r \tilde{\varphi} = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k} \nabla_r\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k} \nabla_r\right) \tilde{\varphi} \right]. \quad (6.54)$$

Тогда уравнение (6.51) после подстановки в него (6.54) и умножения на оператор $\exp\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k} \nabla_r\right)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k} \nabla_r\right) \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) \right] + \exp\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k} \nabla_r\right) \frac{\pi k^2}{2} H(x, \mathbf{r}) \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = \\ = \exp\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k} \nabla_r\right) G(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Нетрудно убедиться, что если $\nabla_r \mathbf{a} = 0$, то разложение функции $f(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ в окрестности точки \mathbf{r} в ряд Тейлора можно представить в операторной форме:

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \exp(\mathbf{a} \nabla_r) f(\mathbf{r}).$$

Поэтому, введя в равенство (6.55) функцию

$$v(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = \tilde{\varphi}\left(x, \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k}, \boldsymbol{\kappa}\right),$$

получим для нее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) + \frac{\pi k^2}{2} H\left(x, \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k}\right) v(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = G\left(x, \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k}, \boldsymbol{\kappa}\right). \quad (6.56)$$

Решая это уравнение и переходя к функции $\tilde{\varphi}$, искомое интегральное уравнение представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = & \tilde{\varphi}\left(0, \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}x}{k}, \boldsymbol{\kappa}\right) \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{2} \int_0^x H\left(\xi, \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}(x-\xi)}{k}\right) d\xi\right\} + \\ & + \int_0^x dx' \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x H\left(\xi, \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}(x-\xi)}{k}\right) d\xi\right\} G\left(x', \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}(x-x')}{k}, \boldsymbol{\kappa}\right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Заметим, что уравнение (6.57) по своей структуре совпадает с уравнением переноса излучения, при этом член $\frac{\pi k^2}{2} H$ описывает «экстинкцию излучения», а стоящая в правой части величина G имеет смысл «потока излучения» в направлении $\boldsymbol{\kappa}$ от «потока», идущего в направлении $\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'$. В качестве приближенного решения уравнения (6.57) рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa})$, получающуюся при подстановке в правую часть начального «потока» (6.53). Заметим, что такая процедура отыскания решения отличается от известного из теории переноса излучения приближения однократного рассеяния, соответствующего первому члену итерационного ряда, в котором в качестве нулевого члена используется первое слагаемое правой части (6.57).

Подставляя (6.53) в (6.52) и затем (6.52) в (6.57), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) = & |u_0|^4 \delta(\boldsymbol{\kappa}) \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{2} \int_0^x d\xi H(\xi, \mathbf{r})\right\} + \\ & + \pi k^2 |u_0|^4 \int_0^x dx' \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x H\left(\xi, \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}(x-\xi)}{k}\right) d\xi\right\} \times \\ & \times \left\{1 - \cos \boldsymbol{\kappa}\left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}(x-x')}{k}\right)\right\} \Phi_\varepsilon(x', \boldsymbol{\kappa}). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Полученное после подстановки (6.58) в (6.50) выражение для $\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ не обладает симметрией относительно $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, что является существенным недостатком рассматриваемого приближе-

ния. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать корреляционную функцию вида

$$B_I(r) = \Gamma_4(x, 0, r) - \Gamma_2^2(x, 0),$$

основываясь при этом только на соображениях простоты получаемых результатов и непротиворечивости следующих из них выводов по отношению к данным эксперимента.

Положим в (6.58) $r = 0$. Величина

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, 0, \kappa) = & |u_0|^4 \delta(\kappa) + \pi k^2 |u_0|^4 \int_0^x dx' \Phi_\varepsilon(x', \kappa) \times \\ & \times \left[1 - \cos \frac{\kappa^2(x-x')}{k} \right] \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x d\xi H \left(\xi, \frac{\kappa(x-\xi)}{k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.59)$$

является преобразованием Фурье функции

$$\Gamma_4(x, 0, r) = \langle I(x) \rangle^2 + B_I(r).$$

При этом первое слагаемое в (6.59) есть преобразование Фурье квадрата средней интенсивности $\langle I(x) \rangle^2 = |u_0|^4$, а функция

$$\begin{aligned} F_I(x, \kappa) = & \pi k^2 \langle I \rangle^2 \int_0^x dx' \Phi_\varepsilon(x', \kappa) \left[1 - \cos \frac{\kappa^2(x-x')}{k} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x d\xi H \left(\xi, \frac{\kappa(x-x')}{k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.60)$$

в рассматриваемом приближении является фурье-преобразованием корреляционной функции B_I , т. е. спектральной плотностью флуктуаций интенсивности.

Относительная дисперсия флуктуаций интенсивности

$$\sigma_I^2 = \frac{B_I(x, 0)}{\langle I(x) \rangle^2},$$

найденная с использованием формулы (6.60), в случае однородной трассы ($\Phi_\varepsilon(x, \kappa) = \Phi_\varepsilon(\kappa)$) и колмогоровского спектра флуктуаций показателя преломления (1.82) записывается в виде однократного интеграла

$$\sigma_I^2(\beta_0) = 0,65 \int_0^\infty dt t^{-3/2} (1 - \cos t) [1 - \exp(-0,89\beta_0^2 t^{3/2})]. \quad (6.61)$$

Согласно (6.61) и в полном соответствии с (6.49) относительная дисперсия является универсальной функцией параметра β_0 .

При $\beta_0 \gg 1$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\sigma_I^2 = 1,36 - 0,907\beta_0^{-4/3},$$

из которой следует, что при $\beta_0 \rightarrow \infty$ относительная дисперсия насыщается на уровне 1,36. Этот уровень насыщения не является

универсальным и соответствует показателю степени 11/3 в колмогоровском спектре. Изменение показателя степени, как нетрудно убедиться путем прямого расчета, влечет за собой изменение уровня насыщения.

График функции $f(\beta_0)$ изображен на рис. 6.9. При $\beta_0 \geq 1,4$ точность асимптотической формулы составляет не менее 1,5%. Пространственная корреляционная функция представляется в виде двукратного интеграла

$$B_I(\beta_0, l_T) = 2,37 \gamma \int_0^1 dz \int_0^\infty ds s^{-8/3} J_0(\tilde{\rho}s) (1 - \cos \gamma z s^2) \exp(-\gamma^{8/3} z^{8/3} s^{8/3}), \quad (6.62)$$

где

$$\gamma = 0,94 \beta_0^{12/11}, \quad \tilde{\rho} = 1,31 \rho / l_T.$$

Коэффициент пространственной корреляции

$$b_I\left(\beta_0, \frac{\rho}{l_T}\right) = \frac{B_I(\beta_0, \rho/l_T)}{B_I(\beta_0, 0)}$$

зависит от обобщенных параметров β_0 и ρ/l_T . Графики этой функции в зависимости от $\rho (C_\varepsilon^2 k^3)^{1/11} = 1,85 \rho / l_T$ для различных значений β_0 представлены на рис. 6.10.

Воспользовавшись формулой (6.60), нетрудно получить интегральное представление для одномерного пространственного спектра:

$$V(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\rho b_I(\rho) \cos \kappa \rho,$$

который связан с двумерной спектральной плотностью $F_I(\kappa)$ (§ 1.3) соотношением

$$V(\kappa) = \frac{2}{\sigma_I^2} \int_0^\infty dx F_I(\sqrt{x^2 + \kappa^2}). \quad (6.63)$$

Подставляя (6.60) в (6.33) и проводя необходимые преобразования, получаем

$$V(\kappa) = 0,68 \frac{\beta_0^2}{\sigma_I^2(\beta_0)} \sqrt{\frac{x}{k}} \int_0^\infty ds (s^2 + \Omega^2)^{-11/6} \times \\ \times \int_0^1 d\xi [1 - \cos(s^2 + \Omega^2)\xi] \exp[-0,89\beta_0^2 (s^2 + \Omega^2)^{5/6} \xi^{1/3}], \quad (6.64)$$

где $\Omega = \kappa \sqrt{x/k}$. Когда выполняется гипотеза замороженной турбулентности, для временного $W(\omega)$ и пространственного спектров флуктуаций справедливо соотношение (1.47). Из формул (6.64),

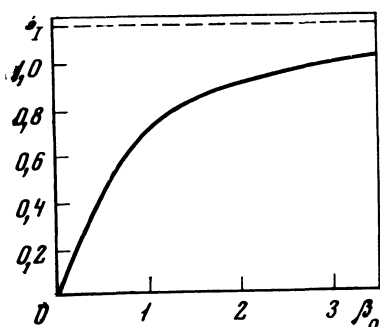


Рис. 6.9. Зависимость дисперсии флуктуации интенсивности плоской волны от параметра β_0^2

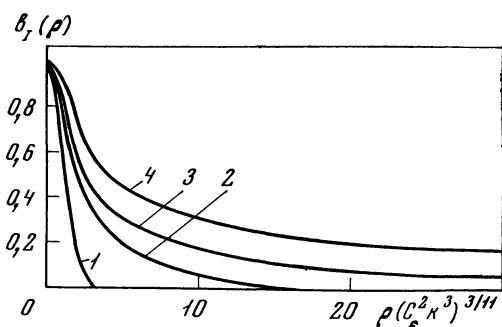
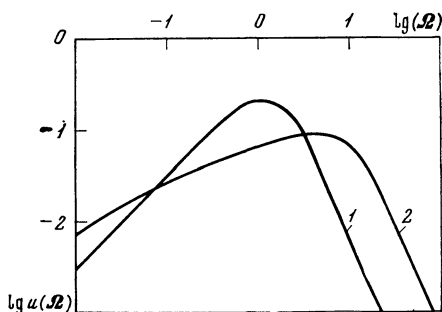


Рис. 6.10. Коэффициент пространственной корреляции интенсивности плоской волны

1 — $\beta_0^2 = 1$; 2 — $\beta_0^2 = 10$; 3 — $\beta_0^2 = 48$; 4 — $\beta_0^2 = 1600$

Рис. 6.11. Временной спектр флуктуаций интенсивности плоской волны

1 — $\beta_0^2 = 2,85$;
2 — $\beta_0^2 = 1125$



(1.47) легко получить безразмерный временной спектр:

$$\omega W(\omega) = U(\Omega, \beta_0),$$

где $\Omega = \omega \sqrt{x/k}/v$. Спектральная плотность, рассчитанная в [86] для различных значений параметра β_0 , представлена на рис. 6.11. Из рисунка видно, что с увеличением параметра β_0^2 спектр расширяется и характерная частота флуктуаций интенсивности повышается.

Наряду с изложенными приближенными расчетами дисперсии, корреляционной функции и спектров плоской волны в области сильных флуктуаций интенсивности для некоторых из этих величин были получены асимптотические формулы при $\beta_0^2 \gg 1$ и $\beta_0^2 \ll 1$, основанные на приближенном суммировании итерационного ряда, соответствующего уравнению (6.29). Используемая при этом процедура суммирования рядов в области низких и высоких про-

пространственных частот спектра флуктуаций интенсивности и оценка ошибок, допускаемых при удержании конечного числа членов ряда и сшивании асимптотик в промежуточной области частот, подробно описаны в работах [23—25]. Мы приведем здесь формулу [25] для относительной дисперсии:

$$\beta^2 = 1 + 0,87\beta_0^{-4/5}, \quad \beta_0^2 \gg 1, \quad (6.65)$$

которая выполняется с точностью до членов порядка $\beta_0^{-8/5}$.

3. Флуктуации интенсивности в оптических пучках

Рассмотрим теперь флуктуации интенсивности при распространении пространственно-ограниченных пучков. Для расчета дисперсии и пространственных корреляционных функций интенсивности воспользуемся принципом Гюйгенса — Кирхгофа, обобщенным на случай плавно-неоднородных сред [30—32]. Согласно (2.96), поле в плоскости наблюдения, расположенной на расстоянии $x' = x$ от излучающей апертуры, записывается в виде

$$\varphi(x, \rho) = \frac{k \exp(ikx)}{2\pi ix} \int d^2\rho_0 \varphi_0(\rho_0) \exp\left\{\frac{ik}{2x}(\rho - \rho_0)^2 + \psi_1(\rho, \rho_0)\right\}, \quad (6.66)$$

где $\psi_1(\rho, \rho_0)$ — флуктуирующая часть комплексной фазы сферической волны, распространяющейся из точки $(0, \rho_0)$ в точку (x, ρ) , а $\varphi_0(\rho_0)$ — распределение поля в плоскости излучающей апертуры ($x' = 0$). Выражение (6.66) позволяет представить второй момент интенсивности в виде

$$\begin{aligned} \langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle &= \langle \varphi(x, \rho_1) \varphi^*(x, \rho_1) \varphi(x, \rho_2) \varphi^*(x, \rho_2) \rangle = \\ &= \frac{k^4}{(2\pi x)^4} \int d^8\rho_{0; 1, 2, 3, 4} \overline{\varphi_0}(\rho_{01}) \varphi_0^*(\rho_{02}) \varphi_0(\rho_{03}) \varphi_0^*(\rho_{04}) \times \\ &\times \Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}) \times \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{2x} [2\rho_1(\rho_{02} - \rho_{01}) + 2\rho_2(\rho_{04} - \rho_{03}) + \rho_{01}^2 - \rho_{02}^2 + \rho_{03}^2 - \rho_{04}^2]\right\}, \end{aligned} \quad (6.67)$$

где функция Γ_4 описывает влияние случайно-неоднородной среды и равна статистическому среднему от экспоненты, показатель которой содержит сумму набегов комплексной фазы элементарных источников:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}) &= \\ &= \langle \exp[\psi_1(\rho_1, \rho_{01}) + \psi_1^*(\rho_1, \rho_{02}) + \psi_1(\rho_2, \rho_{03}) + \psi_1^*(\rho_2, \rho_{04})] \rangle. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Как уже указывалось в § 2.4, вклад амплитудных флуктуаций в функцию $\Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04})$ значительно меньше фазовых. Поэтому в дальнейших расчетах будем учитывать только

случайные набегі фазы и положим

$$\Psi_1(\rho, \rho_0) = \chi(\rho, \rho_0) + iS(\rho, \rho_0) \simeq iS(\rho, \rho_0). \quad (6.69)$$

Количественно оценить возникающую при этом ошибку затруднительно. Однако из физических соображений очевидно, что в случае распространения пространственно-ограниченных пучков интенсивность в точке наблюдения определяется в основном соотношениями между фазами парциальных сферических волн, приходящих из различных точек передающей апертуры. Поэтому можно надеяться, что приближение (6.69) дает удовлетворительную точность при расчетах флуктуаций интенсивности.

Проведем усреднение в выражении (6.68), считая флуктуации фазы распределенными по нормальному закону, что не противоречит имеющимся экспериментальным данным [40]. Тогда для функции $\Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04})$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i=1, 2; \\ j=3, 4}} (-1)^{i+j} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times D_S(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{0i}, \rho_{0j}) + D_S(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}) + \right. \right. \\ \left. \left. + D_S(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{03}, \rho_{04}) \right] \right\}, \quad (6.70) \end{aligned}$$

где величина

$$D_S(x; \rho_l, \rho_k; \rho_{0i}, \rho_{0j}) = \langle [S(\rho_l, \rho_{0i}) - S(\rho_k, \rho_{0j})]^2 \rangle$$

является структурной функцией фаз двух сферических волн, источники которых расположены в точках $(0, \rho_{0i})$ и $(0, \rho_{0j})$, а точки наблюдения имеют координаты (x, ρ_l) и (x, ρ_k) соответственно. Для структурной функции фазы воспользуемся выражением (2.76) в ближней (относительно внутреннего масштаба) зоне дифракции ($\kappa_m^2 x/k \ll 1$):

$$\begin{aligned} D_S(\rho_l, \rho_k; \rho_{0i}, \rho_{0j}) = D_S(\rho_l - \rho_k, \rho_{0i} - \rho_{0j}) = \\ = 2\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty dx \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \left\{ 1 - J_0 \left(\kappa \left| \frac{x'}{x} (\rho_l - \rho_k) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{x'}{x} \right) (\rho_{0i} - \rho_{0j}) \right) \right\}. \quad (6.71) \end{aligned}$$

Чтобы получить представление $D_S(\rho, \rho_0)$ в форме, удобной для дальнейших расчетов, выберем в (6.71) в качестве спектральной плотности функцию [41]

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,02c_\varepsilon^2 l_0^{11/3} (\kappa l_0)^{-11/6} K_{11/6}(\kappa l_0), \quad (6.72)$$

где $K_{11/6}(z)$ — функция Макдональда. Спектральная плотность (6.72) в случае $\kappa l_0 \ll 1$ выражается через характерную для инерционного интервала степенную функцию вида (1.74). При $(\kappa l_0 \gg 1)$ формула (6.72) дает экспоненциальное затухание спектра.

Подставляя спектр (6.72) в формулу (6.71) и проводя интегрирование, получаем

$$D_S(\rho, \rho_0) = 0,73 C_2^2 k^2 x \left\{ \int_0^1 d\xi (|\xi \rho + (1 - \xi) \rho_0|^2 + l_0^2)^{5/4} - l_0^{5/4} \right\}. \quad (6.73)$$

Подставим в выражение (6.67) в качестве $\varphi_0(\rho)$ поле простейшего одномодового лазерного пучка:

$$\varphi_0(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - \frac{ik\rho^2}{2f}\right),$$

где a — эффективный радиус пучка в плоскости излучающей апертуры; F — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры. Используя затем для $\Gamma_4(x; \rho_1, \rho_2; \rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04})$ и $D_S(\rho_l, \rho_k; \rho_{0i}, \rho_{0j})$ равенства (6.70), (6.73), для второго момента интенсивности находим

$$\begin{aligned} \langle I\left(\mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) I\left(\mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \rangle &= \frac{2^3 Q^{-4}}{\pi^3} \int d^3 t_{1,2,3} \exp\left\{-2(g^2 t_1^2 + \right. \\ &+ t_2^2 + t_3^2) - \frac{4}{3} D_S(2a) \int_0^1 d\xi \left[(1 - \xi)^2 |t_1 + t_2|^2 + \left(\frac{l_0}{2a}\right)^2 \right]^{5/4} + \\ &+ [(1 - \xi)^2 |t_1 - t_2|^2 + \left(\frac{l_0}{2a}\right)^2]^{5/4} + \left[\xi \frac{\rho}{2a} + (1 - \xi)(t_3 + t_1) \right]^2 + \\ &+ \left(\frac{l_0}{2a}\right)^2 \left. \right]^{5/4} + \left[\xi \frac{\rho}{2a} + (1 - \xi)(t_3 - t_1) \right]^2 + \left(\frac{l_0}{2a}\right)^2 \left. \right]^{5/4} - \\ &- \left[\xi \frac{\rho}{2a} + (1 - \xi)(t_3 + t_2) \right]^2 + \left(\frac{l_0}{2a}\right)^2 \left. \right]^{5/4} - \left[\xi \frac{\rho}{2a} + (1 - \xi)(t_3 - \right. \\ &- t_2) \left. \right]^2 + \left(\frac{l_0}{2a}\right)^2 \left. \right]^{5/4} - 2\left(\frac{l_0}{2a}\right)^{5/4} \left. \right\} \cos\left\{2Q^{-1}\left[\left(1 - \frac{x}{f}\right)2t_2 t_3 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(\frac{\mathbf{R}}{a} + \frac{\rho}{2a}\right)(t_1 + t_2) - \left(\frac{\mathbf{R}}{a} - \frac{\rho}{2a}\right)(t_1 - t_2)\right]\right\}, \quad (6.74) \end{aligned}$$

где $D_S(2a) = 0,274 C_2^2 k^2 x (2a)^{5/4}$ — структурная функция фазы сферической волны, вычисленная на диаметре передающей апертуры; $\mathbf{R} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ — «центр тяжести» точек наблюдения; $\rho = \rho_1 - \rho_2$ — разнесение точек наблюдения; $g^2 = 1 + Q^{-2}(1 - f)^2$ — дифракционный параметр. Для дальнейшего анализа нам понадобится первый момент интенсивности $\langle I(\rho) \rangle = \langle \varphi(x, \rho) \varphi^* \times (x, \rho) \rangle$, который вычисляется аналогично второму моменту и представляется в виде

$$\begin{aligned} \langle I(\rho) \rangle &= \frac{2}{Q^2 g^2} \int_0^\infty dt t \exp\left\{-t^2 - \frac{4}{3} D_S(2a) \int_0^1 d\xi \times \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{t^2 \xi^2}{g^2} + \frac{l_0^2}{4a^2}\right)^{5/4} - \left(\frac{l_0}{2a}\right)^{5/4} \right] \right\}. \quad (6.75) \end{aligned}$$

В формулах (6.74) и (6.75) состояние атмосферы описывается двумя параметрами $D_S(2a)$ и $l_0 = l_0/2a$, а векторы пространственного разнесения ρ и центра тяжести \mathbf{R} точек наблюдения нормированы на размер пучка $2a$ в плоскости излучения. Из выражения (6.75) можно установить [42], что радиус пучка в плоскости передающей апертуры связан с эффективным (по средней интенсивности) a_0 и дифракционным a_d радиусами соотношениями

$$\begin{aligned} a_0 &= aQ [g^2 + 0,46D_S^2(2a)]^{1/2}, \\ a_d &= aQg. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Выражение (6.76) для a_0 справедливо при исчезающе малом значении внутреннего масштаба турбулентности.

Любой из масштабов (6.76), наряду с $2a$, при фиксированных значениях $D_S(2a)$, Q и f может использоваться в качестве нормировочного для пространственных переменных ρ и \mathbf{R} .

Провести аналитическое вычисление интеграла (6.74) в общем случае не удается. Численные оценки второго момента интенсивности (6.74) были получены методом статистических испытаний с использованием существенной выборки [43], а интеграл (6.75) вычислялся по квадратурным формулам Гаусса с относительной точностью не хуже $\delta = 10^{-3}$.

Рассмотрим детально зависимость относительной дисперсии и пространственной корреляции флуктуаций интенсивности сфокусированного и узкого ($Q = 1$) коллимированного пучков при различных атмосферных условиях распространения. Относительная дисперсия флуктуаций интенсивности по определению записывается в виде

$$\sigma_I^2(\mathbf{R}) = \frac{\langle I^2(\mathbf{R}) \rangle}{\langle I(\mathbf{R}) \rangle^2} - 1. \quad (6.77)$$

Используя формулы (6.74) и (6.75), легко убедиться, что функция $\sigma_I(\mathbf{R})$ является осесимметричной в плоскости наблюдения ($\sigma_I^2(\mathbf{R}) = \sigma_{I\perp}^2(\mathbf{R})$). Для чисто степенного спектра зависимость величины $\sigma_I(0)$ от параметра $D_S(2a)$ для сфокусированного и коллимированного пучков показана на рис. 6.12. При значении $D_S(2a) \approx 50$ наблюдается максимум дисперсии флуктуаций интенсивности. Максимальное значение дисперсии при прочих фиксированных условиях возникает на определенном расстоянии от передатчика. Соответствующую плоскость можно считать «фокальной» для случайных эффективных линз. «Фокальная» плоскость возникает также в случае одномасштабного гауссова спектра флуктуаций показателя преломления [37] и двумерной модели случайно-неоднородной среды [38]. При дальнейшем увеличении параметра $D_S(2a)$ относительная дисперсия убывает, проявляя тенденцию к насыщению. Установить предельное значение σ_I численным способом не удается, так как при $D_S(2a) \rightarrow \infty$ время вычислений возрастает, а точность счета ухудшается. Если инте-

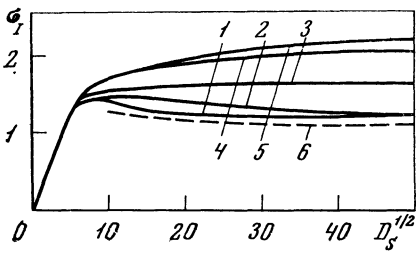


Рис. 6.12. Зависимость дисперсии флуктуаций интенсивности сфокусированного и коллимированного пучков от параметра $D_S(2a)$ при различных значениях внутреннего масштаба турбулентности

- 1—5 — коллимированный пучок ($f = 0, Q = 1$);
 1 — $\tilde{l}_0 = 0$;
 2 — $\tilde{l}_0 = 0,05$;
 3 — $\tilde{l}_0 = 0,125$;
 4 — $\tilde{l}_0 = 0,2$;
 5 — $\tilde{l}_0 = 0,25$; 1 — сфокусированный пучок ($f = 1, Q^{-1} = 25, \tilde{l}_0 = 0$);
 6 — асимптотика (6.78)

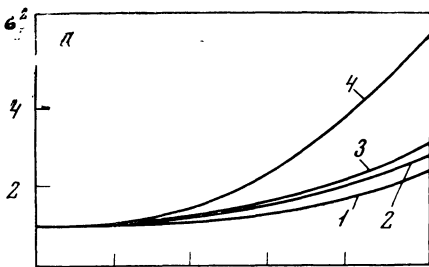
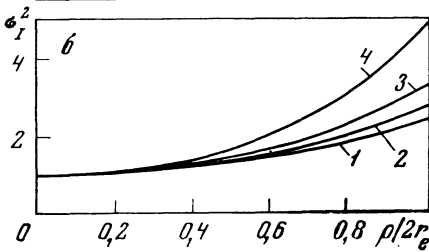


Рис. 6.13. Зависимость относительной дисперсии интенсивности от расстояния до центра пучка



- Рис. 6.13. Зависимость относительной дисперсии интенсивности от расстояния до центра пучка
- а — сфокусированный пучок, $Q^{-1} = 25; f = 1$;
 1 — $D_S = 400$;
 2 — $D_S = 50$;
 3 — $D_S = 20$;
 4 — $D_S = 2$;
 б — коллимированный пучок, $Q = 1; f = 0$;
 1 — $D_S = 158$;
 2 — $D_S = 32$;
 3 — $D_S = 16$;
 4 — $D_S = 3. r_l = a_0$

решаться только относительной дисперсией на оси пучка, то приближенный асимптотический анализ (при $D_S(2a) \gg 1$ и $l_0 = 0$) выражения (6.74) может быть проведен так же, как и в случае фазового экрана [34, 35]. При этом получается [35] следующая простая формула:

$$\sigma_I^2 = 1 + 4D_S^{-2/3} (2a), f = 1. \quad (6.78)$$

Отсюда следует, что с ростом $D_S(2a)$ относительная дисперсия насыщается к единице. В точности совпадающая с (6.78) формула получена также в работе [29] на основе приближенного решения уравнения для четвертого момента поля сфокусированного пучка. Значения σ_I^2 , полученные из (6.78), удовлетворительно согласуются (рис. 6.12) с результатами численного счета.

Значения относительной дисперсии, полученные для коллимированного пучка, при $Q = 1$ (рис. 6.12) слабо отличаются от соответствующих результатов для сфокусированного пучка. Как видно из формул (6.74) и (6.75), дисперсия в коллимированном пучке $\sigma_I(Q, D_S)$ как функция параметра $D_S(2a)$ должна полностью

совпадать с дисперсией в сфокусированном пучке $\sigma_I(D_S)$ во френгоферовой зоне дифракции ($Q \gg 1$). Очевидно, максимальное расхождение функций $\sigma_I(Q, D_S)$ и $\sigma_I(D_S)$ будет наблюдаться в френелевой зоне дифракции коллимированного пучка ($Q \ll 1$).

Из рис. 6.12 следует также, что относительная дисперсия в коллимированном пучке увеличивается с ростом значений внутреннего масштаба. Возможно, это увеличение дисперсии связано с блужданиями пучка как целого, которые возрастают с ростом l_0 при фиксированном значении D_S . В частности, из физических соображений ясно, что, когда внутренний масштаб превышает размер передающей апертуры $l_0/2a \gg 1$, флуктуации интенсивности будут обусловлены только блужданиями пучка как целого.

Дальнейший анализ поведения дисперсии и коэффициента пространственной корреляции проведем для случая $l_0 \ll 2a$. Параметрические семейства кривых, характеризующих зависимость относительной дисперсии от расстояния до центра пучка, нормированного на эффективный радиус a_0 , приведены на рис. 6.13 для сфокусированного и коллимированного пучков. Из этого рисунка видно, что флуктуации интенсивности возрастают по мере удаления точки наблюдения от оси пучка. Рост дисперсии проявляется заметнее в области малых значений $D_S(2a)$.

Точность представленных на рис. 6.12, 6.13 данных определяется в основном ошибкой вычисления второго момента (6.74). Относительная ошибка монотонно возрастает по мере увеличения параметров $D_S(2a)$ и $R/2a$. При максимальных значениях $D_S(2a)$ и $R/2a$ она не превышает 0,2.

Расчет коэффициента корреляции проводился при $R = 0$ по формуле

$$b_I(\rho) = \frac{\langle I\left(\frac{\rho}{2}\right) I\left(-\frac{\rho}{2}\right) \rangle - \langle I(-\rho/2) \rangle \langle I(-\rho/2) \rangle}{\left[\langle \left(I\left(\frac{\rho}{2}\right) - \langle I\left(\frac{\rho}{2}\right) \rangle \right)^2 \rangle \langle \left(I(-\rho/2) - \langle I(-\rho/2) \rangle \right)^2 \rangle \right]^{1/2}} \quad (6.79)$$

Согласно (6.79), (6.74) и (6.75), коэффициент корреляции зависит только от расстояния между точками наблюдения $\rho = |\rho|$. Результаты расчета $b_I(\rho)$ представлены на рис. 6.14. Максимальная ошибка вычисления соответствует большим значениям ρ и параметра $D_S(2a)$. Относительная ошибка вычислений не превышает 0,25. В соответствии с результатами, приведенными на рис. 6.13, значения $D_S(2a)$ на рис. 6.14 выбраны таким образом, чтобы включить в рассмотрение слабые флуктуации, область фокусировки флуктуаций интенсивности и интервал асимптотического спада дисперсии.

Из вида кривых $b_I(\rho)$ следует, что характерной особенностью пространственной структуры флуктуаций интенсивности в пределах изменения параметра $D_S(2a)$, принятых в расчетах, является наличие двух масштабов корреляции в области насыщения диспер-

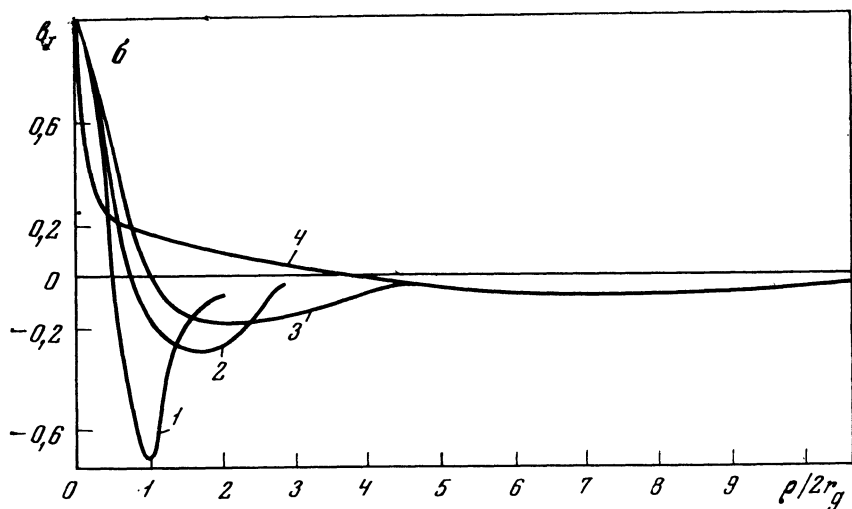
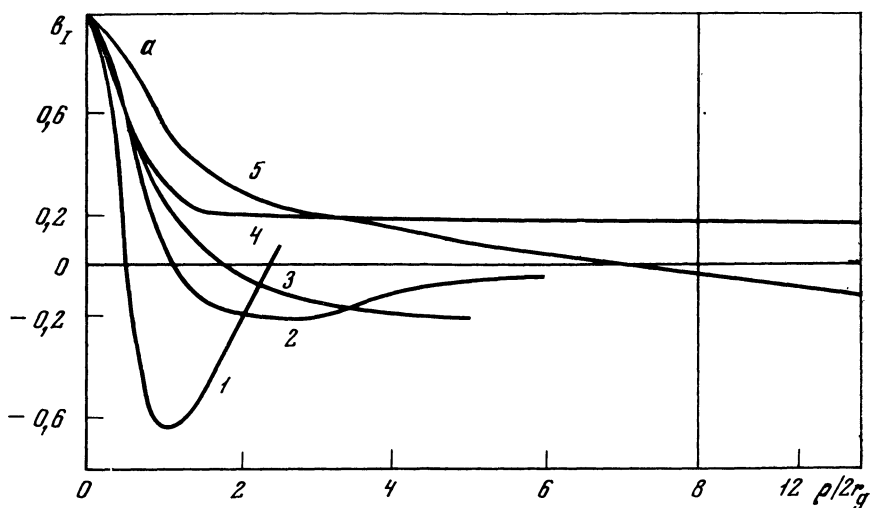


Рис. 6.14. Коэффициент пространственной корреляции при различных значениях D_S (2а)

а — сфокусированный пучок, $f = 1$, $Q^{-1} = 25$: 1 — $D_S = 2$; 2 — $D_S = 10$; 3 — $D_S = 50$; 4 — $D_S = 400$; 5 — $D_S = 1400$; б — коллимированный пучок, $f = 1$, $Q = 1$: 1 — $D_S = 3$; 2 — $D_S = 16$; 3 — $D_S = 32$; 4 — $D_S = 158$. $r_g \equiv a_g$

сии. Первый масштаб определяется быстрым убыванием коэффициента корреляции до уровня, приблизительно равного 0,5, а второй — пересечением кривой с осью абсцисс. В случае сфокусированного пучка первый масштаб приблизительно совпадает с дифракционным размером и почти не меняется с ростом пара-

метра $D_S(2a)$, характеризующего метеорологические условия распространения и длину трассы.

Второй примечательной особенностью пространственной корреляции является наличие в области слабых флуктуаций (кривые 1 на рис. 6.14, а, б) большого отрицательного уровня корреляции для точек наблюдения, разнесенных приблизительно на расстояние, равное дифракционному размеру пучка. Учитывая, что в этой области значений D_S возможны смещения пучка как целого на расстояние, равное его дифракционному размеру, можно предположить, что именно случайные блуждания являются причиной высокой отрицательной корреляции, так как они вызывают одновременное увеличение сигнала в одном приемнике и убывание в другом.

Основные особенности пространственной структуры флуктуаций интенсивности узкого коллимированного пучка, как это видно из результатов, представленных на рис. 6.14, б, качественно остаются такими же, как и в случае сфокусированного пучка. Однако при больших значениях параметра $D_S(2a)$, когда эффективный размер пучка определяется не дифракцией на краях передающей апертуры, а его расходимостью за счет турбулентности среды, наблюдается тенденция к уменьшению первого масштаба корреляции.

На основе принципа Гюйгенса — Кирхгофа в [33] были рассчитаны частотные спектры флуктуаций интенсивности в узких коллимированных и сфокусированных пучках. В результате этих расчетов обнаружено появление минимума в спектре флуктуаций по мере усиления турбулентности. Качественно наличие такого минимума согласуется с экспериментальными данными, приведенными далее.

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Вопрос о законе распределения вероятностей флуктуаций интенсивности лазерного излучения возникает при анализе работы в атмосфере систем лазерной связи, локации и других оптических устройств.

В условиях применимости первых приближений метода малых возмущений (ММВ) или метода плавных возмущений (МПВ) комплексная амплитуда u_1 или комплексная фаза ψ_1 имеют вид интегралов от произведения детерминированной функции и случайного поля флуктуаций диэлектрической проницаемости ϵ_1 по объему, занимаемому турбулентной средой. В интересных для приложений случаях размеры этого объема намного превышают внешний масштаб L_0 корреляции случайного поля ϵ_1 . Если разбить область интегрирования на объемы размером порядка L_0 , то можно представить соответствующий интеграл в виде суммы большого числа

независимых слагаемых. Отсюда в соответствии с центральной предельной теоремой можно сделать вывод о том, что в приближении ММВ амплитуда поля подчиняется распределению Райса (обобщенное релеевское распределение), а в приближении МПВ амплитуда (а следовательно, и интенсивность) имеет логарифмически нормальное, а фаза — нормальное распределение.!

В условиях сильных флуктуаций интенсивности, когда теория возмущений становится неприменимой, сделать какие-либо определенные выводы о распределении вероятностей интенсивности не представляется возможным. Для этого необходимо знать решения уравнений (2.111) для моментов поля высших порядков. К сожалению, к настоящему времени эта проблема еще не решена. Правда, в частном случае плоской волны из вида самого уравнения (2.111) в § 6.2 было установлено, что единственным универсальным безразмерным параметром, от которого зависит закон распределения вероятностей флуктуаций интенсивности, является величина

$$\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 h^{7/6} x^{11/6}. \quad (6.80)$$

В некоторых теоретических работах на основе приближенных расчетов [44—46] или путем использования качественных соображений о природе рассеянного поля [47] утверждалось, что распределение вероятностей флуктуаций амплитуды в области насыщения является релеевским. Релеевское или обобщенное релеевское распределение амплитуды поля имеет место [48], когда обе компоненты комплексной амплитуды поля статистически независимы и распределены по нормальному закону. Кажущаяся очевидность утверждений [47] о нормальном распределении поля в области сильных флуктуаций основывается на представлении о том, что суммарное поле в точке приема есть результат сложения полей, рассеянных большим числом независимо переизлучающих объемов. Однако подобные качественные рассуждения, очевидно, неприменимы для среды с крупномасштабными неоднородностями, рассеивающей под малыми углами вперед. В этом случае главную роль в процессе возникновения флуктуаций интенсивности должны играть интерференционные эффекты, обусловленные сильной корреляцией разностей фаз лучей, близко расположенных друг к другу. Действительно, исследование распределения вероятностей рассеянного поля, проведенное в работе [49] на основе уравнения вида (2.111), записанного для третьего момента, показало, что гипотеза о нормальном распределении рассеянного поля противоречива.

В связи с тем, что задача о законе распределения вероятностей флуктуаций интенсивности в настоящее время теоретически не решена, мы обратимся к экспериментальным данным. Многочисленные измерения, проведенные на реальных атмосферных трассах как в условиях слабых флуктуаций интенсивности, так и при насыщении, в большинстве случаев дают распределения, близкие

к логарифмически нормальному закону, с некоторыми отклонениями от него в области глубоких замираний и больших выбросов интенсивности над средним уровнем. Учитывая это обстоятельство, прежде чем перейти к анализу экспериментальных данных, рассмотрим основные характеристики логарифмически нормального закона [50].

Плотность вероятностей логарифмически нормального закона зависит от среднего значений уровня интенсивности $\Lambda = \langle \ln I \rangle$ и дисперсии этого уровня $\sigma^2 = \langle (\ln I - \langle \ln I \rangle)^2 \rangle$:

$$p(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma I}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln I - \Lambda)^2\right]. \quad (6.81)$$

Медиана интенсивности определяется, как нетрудно убедиться из (6.81), через среднее значение уровня интенсивности:

$$I_0 = \exp(\Lambda), \quad (6.82)$$

а среднее значение самой интенсивности и ее дисперсия соответственно равны

$$\langle I \rangle = \exp\left(\Lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad (6.83)$$

$$\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle = \langle I \rangle^2 (e^{\sigma^2} - 1). \quad (6.84)$$

Используя соотношения (6.83) и (6.84), параметры σ^2 и Λ можно выразить только через среднюю интенсивность $\langle I \rangle$ и относительную дисперсию интенсивности $\beta^2 = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$:

$$\sigma^2 = \ln(1 + \beta^2), \quad \Lambda = \ln \frac{\langle I \rangle}{(1 + \beta^2)^{1/2}}. \quad (6.85)$$

Центральные моменты порядка n :

$$M_n = \langle (I - \langle I \rangle)^n \rangle,$$

соответствующие плотности вероятности (6.82), выражаются через полиномы вида

$$M_n = \beta^n \langle I \rangle^n \sum_{k=0}^{n(n-2)} C_k^{(n)} \beta^k, \quad (6.86)$$

где коэффициенты $C_k^{(n)}$ для $2 \leq n \leq 4$ равны $C_0^{(2)} = 1$, $C_1^{(2)} = C_2^{(2)} = 0$, $C_0^{(3)} = C_0^{(3)} = 0$, $C_1^{(3)} = 3$, $C_3^{(3)} = 1$, $C_0^{(4)} = 3$, $C_1^{(4)} = C_3^{(4)} = 0$, $C_2^{(4)} = 16$, $C_4^{(4)} = 15$. Используя выражение (6.86), находим, что коэффициент асимметрии k и эксцесс γ логарифмически нормального закона возрастают с увеличением относительной дисперсии:

$$k = \frac{M_3}{M_2^{3/2}} = 3\beta_I + \beta^3, \quad \gamma = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = 16\beta^2 + 15\beta^4 + 6\beta^6 + \beta^8.$$

Рассмотрим также распределение вероятностей интенсивности

$$P(I \leq I_1) = \int_0^{I_1} p(I) dI. \quad (6.87)$$

Подставляя плотность (6.81) в формулу (6.87), получим

$$P(I \leq I_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln I_1 - \Lambda}{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\ln I_1 - \Lambda}{\sigma}\right)\right], \quad (6.88)$$

где $\Phi(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt$ — интеграл вероятности. Если изобразить зависимость (6.88), откладывая по оси абсцисс $\lg I_1$, а по оси ординат величину P в вероятностном масштабе, то логарифмически нормальный закон будет представлен прямой линией

$$\frac{\ln I_1 - \Lambda}{\sigma} = \Phi^{-1}(2P - 1). \quad (6.89)$$

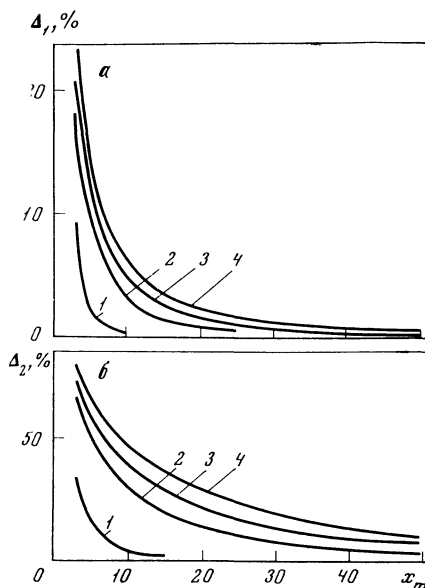
Из выражения (6.89) ясно, что наклон этой прямой определяет дисперсию логарифма интенсивности, а пересечение ее с уровнем $P = 1/2$ дает среднее значение этой величины Λ . Зная величины σ и Λ , нетрудно установить из (6.85) также значение средней интенсивности.

Прежде чем переходить к изложению экспериментальных результатов, отметим важность методических вопросов измерений флукутаций, которые определяют в конечном итоге достоверность данных эксперимента и возможность их корректной физической интерпретации. Этот круг вопросов, включающий в себя тип измерительной аппаратуры, динамический и частотный диапазоны используемых приборов, время записи сигнала, частоту выборки и дискретизацию измеряемых сигналов по уровням, обычно достаточно полно приводится в работах, которым мы следуем. Поэтому в дальнейшем мы будем касаться только основных характеристик трасс распространения и параметров измерительных установок, необходимых для понимания физической природы получаемых результатов.

Здесь имеет смысл привести оценки, которые иллюстрируют некоторые требования к измерительной аппаратуре. Обычно измерения проводятся с помощью прибора, который имеет конечный динамический диапазон. В случае фотоэлектрических измерений этот диапазон можно характеризовать отношением максимального значения фототока, которое регистрируется прибором, x_{\max} к минимальному x_{\min} , определяемому, например, шагом квантования в цифровых системах или дрейфом усилителей в аналоговых

Рис. 6.15. Погрешность, вносимая ограничением в измерительном приборе, для среднего значения (а) и среднего квадрата (б)

- 1 — $\sigma^2 = \ln 2$;
- 2 — $\sigma^2 = \ln 4$;
- 3 — $\sigma^2 = \ln 5$;
- 4 — $\sigma^2 = \ln 6$



устройствах. Прибор имеет, следовательно, характеристику чувствительности $y(x)$, равную

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq x_{\max}, \\ x_{\max}, & x > x_{\max}. \end{cases}$$

Результат измерения дает статистические моменты $\langle y^n \rangle$ вместо истинных $\langle x^n \rangle$. Несложный расчет систематической погрешности, характеризующей величиной

$$\frac{\langle x^n \rangle - \langle y^n \rangle}{\langle x^n \rangle} = \Delta_{(n)},$$

приводит к результатам, представленным на рис. 6.19, а, для $n = 1$ и $n = 2$ и распределения (6.81).

Расчет выполнен в предположении, что $\langle x \rangle = 1$, т. е. в качестве масштабной единицы выбрано среднее значение. Из графиков рис. 6.15 видно, например, что для измерения второго момента с точностью 10% для вполне возможного значения $\sigma^2 = \ln 5$ необходима линейная шкала прибора в диапазоне, в 50 раз превышающем среднее значение фототока. Если принять при этом, что погрешность за счет неопределенности x_{\min} не более 5%, то динамический диапазон x_{\max}/x_{\min} должен быть более 1000, или более 60 дб. Эти оценки указывают на весьма большую роль в выборе системы измерения и регистрации при исследовании сильных флуктуаций интенсивности.

Как было установлено в § 6.2, в случае плоской волны (френелевская зона дифракции передающей апертуры) закон распределения вероятностей флуктуаций интенсивности зависит

от единственного обобщенного параметра $\beta_0^2 = 0,308C_{\xi}^2k^2/e\alpha^{1/2}$. Экспериментальная проверка этого соотношения подобия проведена в работах [39, 51, 52]. Измерения проводились на трех трассах длиной $x_1 = 1750$ м, $x_2 = 8500$ м и $x_3 = 650$ м. Пучок от гелий-неонового лазера ($\lambda = 0,63$ мкм), работавшего в режиме осевых мод, расширялся до размера $2a = 30$ см с помощью коллиматора, имевшего выходной диаметр 0,5 м. Фазовый фронт в плоскости излучения можно считать плоским. Приемником света служил фотоумножитель, перед которым была установлена диафрагма диаметром 0,3 мм. Для защиты от посторонней засветки служили бленды и интерференционные светофильтры. На рис. 6.16 приведен пример гистограммы, полученной при $\beta_0^2 = 25$, $x_1 = 1750$ м. На этом же рисунке сплошной линией нанесена плотность вероятности, соответствующая логарифмически нормальному закону со средним и дисперсией, вычисленными из экспериментальной гистограммы. Штриховой прямой на рис. 6.16 изображено экспоненциальное распределение вероятностей интенсивности:

$$p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right), \quad (6.90)$$

соответствующее релеевскому распределению для амплитуды. Из графика рис. 6.16 видно, что распределение (6.90) гораздо хуже согласуется с экспериментальными данными, чем логарифмически нормальное распределение.

Для более детального сравнения экспериментальных гистограмм с распределениями (6.81) и (6.90) были найдены отношения m_n/m_1^n , где m_n — момент распределения порядка n :

$$m_n = \int_0^{\infty} dII^n p(I).$$

В табл. 6.1 приведены отношения m_n/m_1^n , полученные из эксперимента ($\beta_0^2 \gtrsim 25$) для законов (6.81), (6.90). Из сравнения этих данных видно, что полученное распределение сильно отличается от

Таблица 6.1

Высшие моменты флуктуаций интенсивности

Номер момента	m_n/m_1^n			$\frac{m_n/(m_1)^n_{\text{эксп}}}{m_n/(m_1)^n_{\text{лог.-норм}}}$
	экспериментальное	логарифмически нормальное	релеевское	
2	2,18	2,18	2	1,0
3	9,76	10,33	6	0,94
4	79,32	106,71	24	0,74

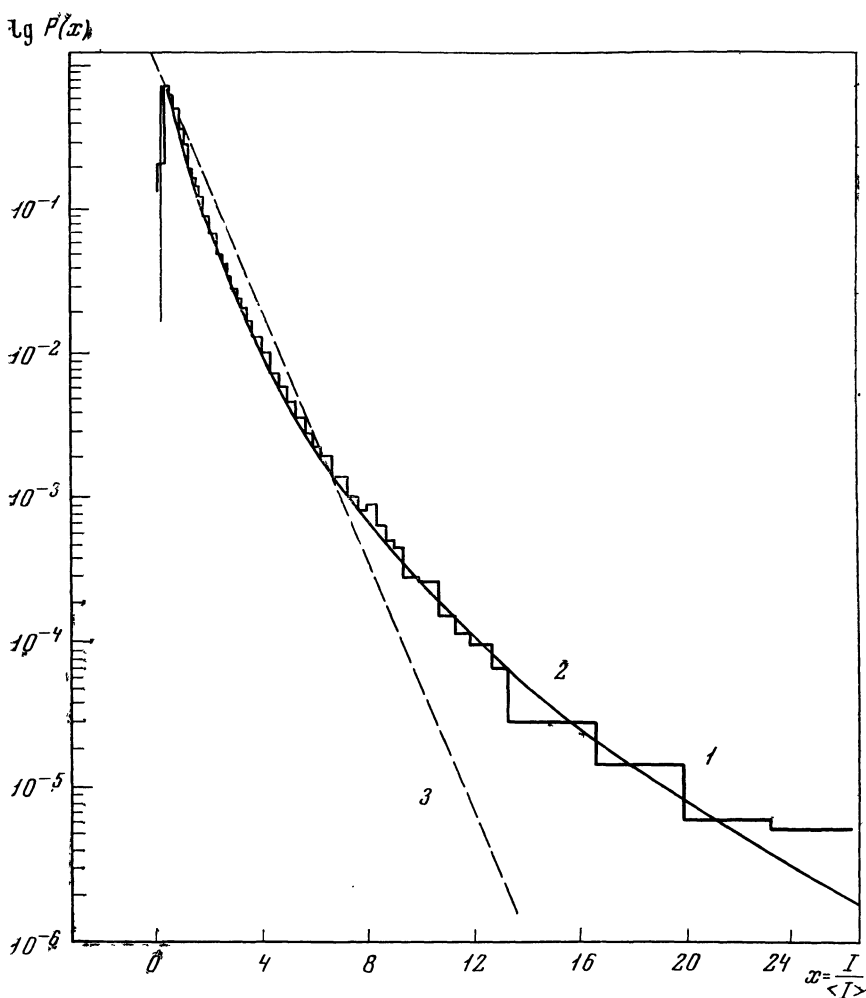


Рис. 6.16. Плотность вероятности P относительных флуктуаций интенсивности $I/\langle I \rangle$

1 — гистограмма, полученная при обработке записи сигнала; 2 — логарифмически нормальный закон распределения; 3 — распределение Релея

релеевского и близко к логарифмически нормальному. При таком сравнении мы учли систематическое занижение моментов высокого порядка, оцененных по конечной выборке [53].

На графике рис. 6.17 приведены распределения $P(I \leq I_1)$ в вероятностном масштабе по оси ординат и в логарифмическом по оси абсцисс. При этом логарифмически нормальному закону соответствовала прямая линия. Из этих распределений видно, что наибольшие отклонения от логарифмически нормального закона

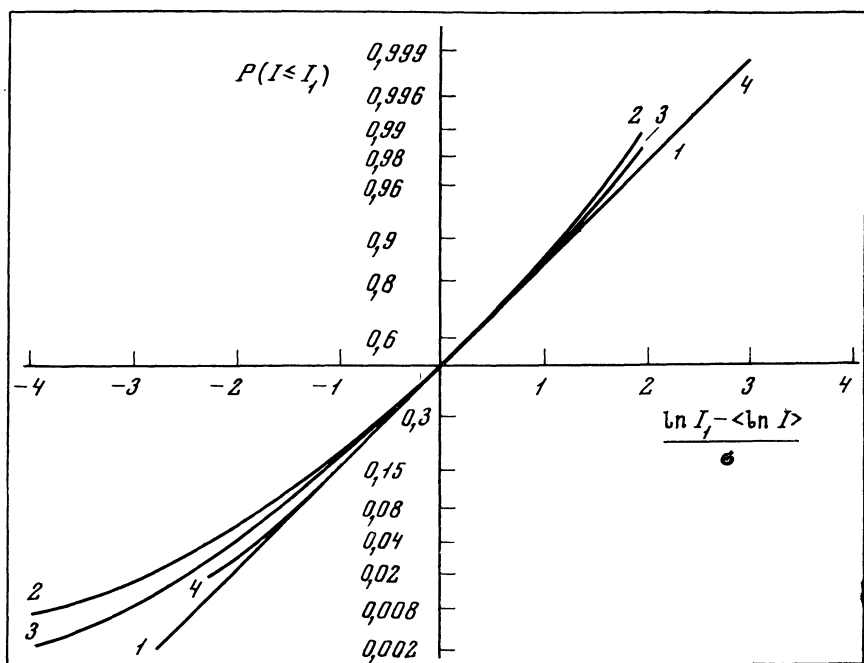


Рис. 6.17. Распределение вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности

1 — $\beta_0^2 < 1$; 2 — $\beta_0^2 = 1 \div 4$; 3 — $\beta_0^2 > 4$; 4 — $\beta_0^2 \geq 25$

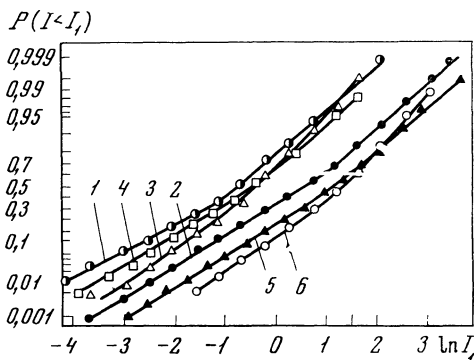


Рис. 6.18. Распределение вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности в фокусированном лазерном пучке

1 — $\sqrt{D_S} = 3,2\pi$;
 2 — $\sqrt{D_S} = 6,1\pi$;
 3 — $\sqrt{D_S} = 6,2\pi$;
 4 — $\sqrt{D_S} = 8\pi$;
 5 — $\sqrt{D_S} = 15\pi$;
 6 — $\sqrt{D_S} = 30\pi$

наблюдаются при значениях параметра β_0 [порядка единицы. В области слабых флуктуаций ($\beta_0 \ll 1$) распределение очень хорошо аппроксимируется логарифмически нормальным законом. При $\beta_0^2 \geq 25$ и до значений $\beta_0^2 \simeq 100$ распределение снова приближается к логарифмически нормальному, несколько отличаясь от него в

области глубоких замираний. Отклонения от логарифмически нормального закона при значениях параметра $\beta_0 \simeq 1$ отмечались также в работах [54, 55].

Дополнительными параметрами, определяющими измеренное распределение вероятностей флуктуаций интенсивности лазерных пучков в турбулентной атмосфере, могут быть размер приемной апертуры, условия фокусировки излучения передающей апертурой и, наконец, степень монохроматичности оптического излучения. Влияние всех перечисленных факторов исследовалось экспериментально. Остановимся кратко на полученных при этом результатах. Оказывается, что увеличение размеров апертуры не приводит, как показано в [56, 57], к искажению логарифмически нормального закона. Этот закон сохраняется даже в том случае, когда размер приемной апертуры намного превышает радиус корреляции интенсивности. Предельные диаметры приемных апертур, использованных для измерений в [56] и [57], достигали соответственно 0,9 и 0,5 м. Лазерный источник ($\lambda = 0,63$ мкм) в [56] имел выходное отверстие $2a = 1,75$ мм и давал сферическую волну на расстоянии $x = 8$ км. В работе [57] с помощью коллиматора расходимость пучка уменьшалась до $8''$ на расстоянии $x = 25$ км. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами работы [50], в которой показано, что сумма умеренного числа величин, распределенных по логарифмически нормальному закону, распределена скорее логарифмически нормально, чем по гауссовскому закону.

Изучение законов распределения вероятностей флуктуаций интенсивности в фокусе лазерного пучка проводилось в [58, 59]. На рис. 6.18 приведены законы вероятностей при различных значениях параметра $D_S(2a) = 1,095 C_n^2 k^2 x (2a)^{5/3}$ в области сильных ($D_S(2a) > \pi^2$) флуктуаций интенсивности. Эмпирические законы заметно отклоняются от логарифмически нормального при глубоких замираниях. Распределения амплитуды при этом отличаются также от релеевского и тем более от обобщенного релеевского законов.

При измерениях флуктуаций в сфокусированном пучке фотографическим способом исключается влияние случайных блужданий пучка как целого. Это, возможно, приводит к тому, что распределение вероятностей остается, как и в случае широкого коллимированного пучка, логарифмически нормальным [59].

В приземном слое атмосферы были проведены эксперименты с использованием расходящихся лазерных пучков ($\lambda = 0,63$ мкм) [54, 55, 60], некогерентных тепловых источников света [61, 62], импульсных лазеров ($\lambda = 1,06; 0,53; 0,69$ мкм) [63, 64] и непрерывного полупроводникового лазера ($\lambda = 0,905$ мкм) [65], обладающего большим количеством поперечных мод. Уникальные измерения закона распределения проводились на трассе Земля — космос [66] для непрерывного аргонового лазера ($\lambda = 0,488$ мкм). Результаты этих экспериментов подтверждают логарифмически нормальное распределение флуктуаций интенсивности. Медленные

вариации интенсивности также распределены логарифмически нормально [67]. При приеме излучения большой апертурой, сравнимой с размером размытого турбулентностью пучка, распределение флуктуаций принимаемого светового потока неотлично от нормального закона [68].

§ 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Появление лазеров стимулировало экспериментальные исследования флуктуационных характеристик интенсивности поля когерентных оптических волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере. Благодаря полученным в настоящее время экспериментальным сведениям удастся понять многие аспекты рассматриваемого явления, которые необходимо учитывать при использовании лазеров в оптической связи, локации и других прикладных задачах атмосферной оптики. Наиболее полно исследованы дисперсия, временная и пространственная корреляционные функции и временная спектральная плотность флуктуаций интенсивности. Рассмотрим вначале закономерности, установленные для дисперсии.

1. Дисперсия флуктуаций интенсивности широких коллимированных и расходящихся пучков

Один из основных результатов, полученных при измерении флуктуаций интенсивности, состоит в том, что с увеличением длины трассы и интенсивности турбулентности воздуха они вначале возрастают, а затем насыщаются. В частности, полученная в приближении МПВ (§ 2.3) для дисперсии логарифма интенсивности плоской волны формула

$$4\sigma_x^2 = \sigma^2 = 1,23C_n^2 k^7 l^6 x^{11} \quad (6.91)$$

описывает экспериментальные данные только в области $4\sigma_x^2 \lesssim 1$. При дальнейшем увеличении правой части равенства (6.91) экспериментально измеренные значения оказываются меньше расчетных. Величину $\beta_0^2 = 1,23C_n^2 k^7 l^6 x^{11}$ можно рассматривать (§ 6.2) как универсальный параметр, от которого зависит функция $\beta^2 = \beta^2(\beta_0^2)$, по крайней мере, в случае неограниченных плоской и сферической волн (соответственно во френелевой и фраунгоферовой зонах дифракции коллимированного пучка). Исследование зависимости $\beta^2(\beta_0^2)$ для френелевой зоны одномодового коллимированного пучка проводилось в работе [39]. Основные параметры этого эксперимента были приведены в § 6.3. Результаты измерений дисперсии флуктуаций интенсивности представлены на рис. 6.19. Средняя по измеренным значениям кривая имеет слабо выраженный максимум при $\beta_0 \simeq 1,5 \div 2,5$. В области $\beta_0 \lesssim 0,8$ измеренные значения удовлетворительно согласуются с формулой

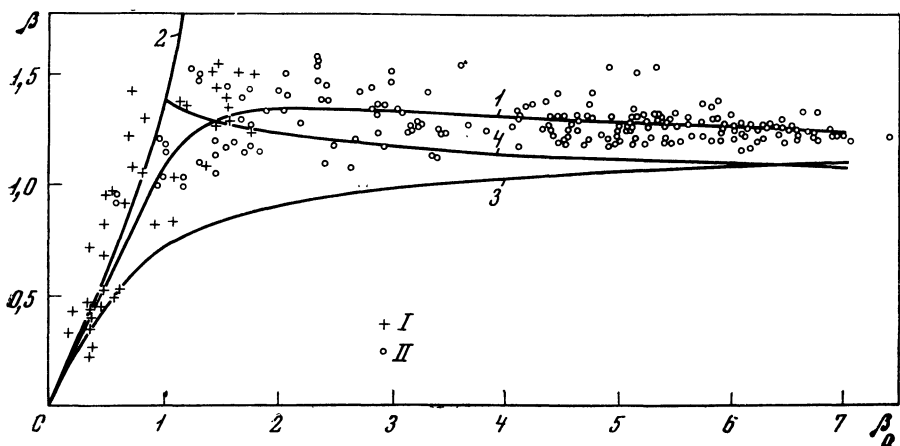


Рис. 6.19. Зависимость относительной дисперсии флуктуаций квазиплоской волны от параметра β_0^2

I — $x = 250$ м; II — $x = 1750$ м; 1 — усредненная по экспериментальным данным кривая; 2 — расчет в приближении МПВ по формулам (6.91), (6.85); 3, 4 — расчет по формулам (6.61) и (6.65) соответственно

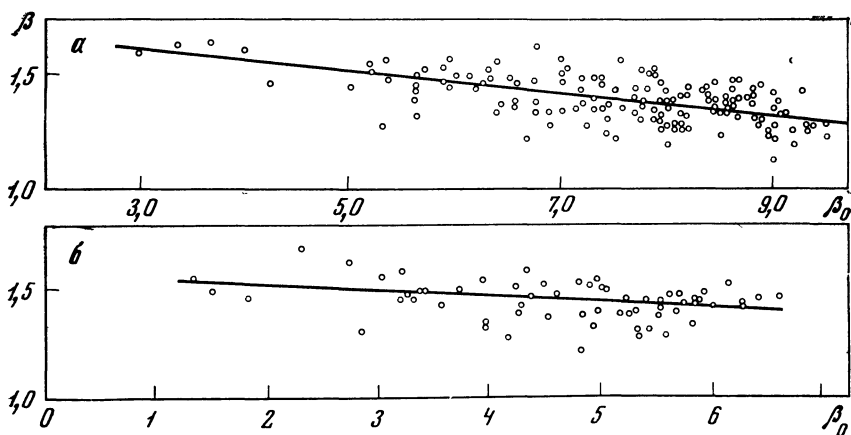


Рис. 6.20. Зависимость β (β_0)

а — коллимированный пучок, $x = 8,5$ км, $Q^{-1} = 26,5$; б — расходящийся пучок, $x = 1750$ м

(6.91), полученной в приближении МПВ. Поведение функции $\beta = \beta(\beta_0)$ при больших значениях β_0 показаны на рис. 6.20. Полученные здесь результаты соответствуют измерениям [39] на трассе длиной $x = 8,5$ км, проведенным с коллимированным пучком при числе Френеля $Q^{-1} = 26,5$. Сравнение результатов, представленных на рис. 6.19 и 6.20, показывает, что для одинаковых

значений параметра β_0 относительная дисперсия оказывается несколько выше при меньших значениях числа Френеля Q^{-1} . Влияние ограниченности пучка будет обсуждено далее в специальном разделе.

Экспериментальное исследование относительной дисперсии во френелевой зоне дифракции пучка было проведено также в работах [69, 70]. Трассы распространения имели протяженность $x = 0,2$ км, $x = 0,5$ км, $x = 1,36$ км и $x = 18,5$ км. Короткие трассы проходили над ровной подстилающей поверхностью. Средний перепад высот при этом не превышал 0,5—0,7 м, а средняя высота трасс составляла 0,7 и 1,5 м. Длинная трасса ($x = 18,5$ км) располагалась над озером. Источником излучения служил гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,63$ мкм), работавший в режиме осевых колебаний. Радиус коллимированного пучка на выходе зеркально-линзовой оптической системы, измеренный на уровне e^{-1} , равнялся $a = 18$ см. Диафрагмы приемников варьировались в пределах $d = 1 \div 20$ мм. На рис. 6.21 точками нанесена полученная в [69] зависимость $\beta = f(\beta_0)$. Здесь же приведены усредненные данные рис. 6.19, 6.20 и некоторые теоретические зависимости. Из показанных на рис. 6.21 результатов видно, что полученные в различных условиях экспериментальные данные в целом удовлетворительно согласуются друг с другом. Отклонение данных работы [69] в сторону меньших значений, по-видимому, связано с использованием в работе [69] приемной апертуры большего, чем в [39], размера, что приводило к заметному усреднению (гл. VII) флуктуаций.

В ряде работ были проведены экспериментальные исследования статистических параметров флуктуаций логарифма амплитуды. В частности, для широких коллимированных пучков такие измерения проводились [71] на трассах длиной $x_1 = 250$ м и $x_2 = 1750$ м в открытой степи над достаточно ровной поверхностью. Средняя высота луча для этих трасс составляла соответственно 1,1 и 2 м. Структурная постоянная C_n^2 определялась из измерений средних вертикальных профилей температуры и скорости ветра в приземном слое на высотах от 0,5 до 8 м. Диапазон изменения величины C_n^2 на высоте 2 м составлял $1 \cdot 10^{-18} \div 2 \cdot 10^{-14}$ см⁻². В качестве источника света использовался гелий-неоновый лазер с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. Выходное отверстие коллиматора составляло $D_1 = 12$ см на первой трассе x_1 и $D_2 = 50$ см на второй. Получаемые при этом значения параметра Френеля kD^2/x равны соответственно 570 и 1400. Приемником света служил фотоумножитель, перед которым была установлена диафрагма диаметром 0,3 мм. Фотоумножитель был нагружен на вакуумный диод, напряжение на котором пропорционально логарифму тока. В этом эксперименте проводились измерения дисперсии логарифма интенсивности и среднего значения уровня интенсивности. Результаты измерений $\sigma = \sigma(\beta_0)$ показаны на рис. 6.22. Прямая I соответствует приближению МПВ. Экспериментальные данные

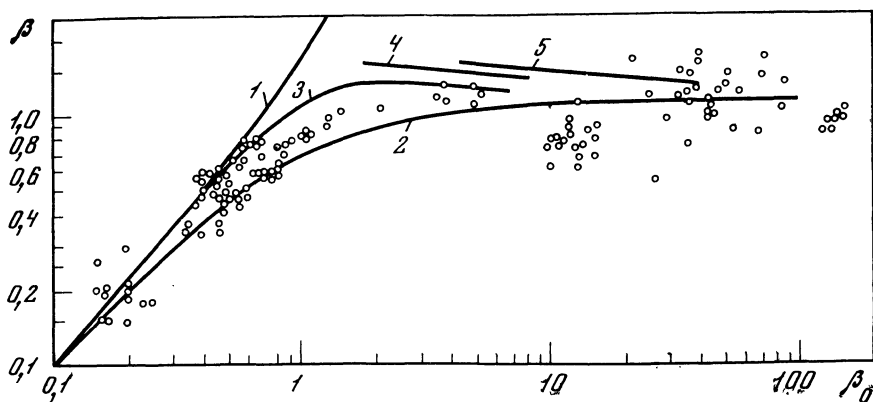


Рис. 6.21. Зависимость относительной дисперсии β^2 от параметра β_0^2 для плоской волны [69]

1 — расчет в приближении МПВ по формуле $\beta = [\exp(\beta_0^2) - 1]^{1/2}$; 2 — расчет по формуле (6.61); 3—5 — соответствуют кривой 1 на рис. 6.19 и усредненным данным рис. 6.20

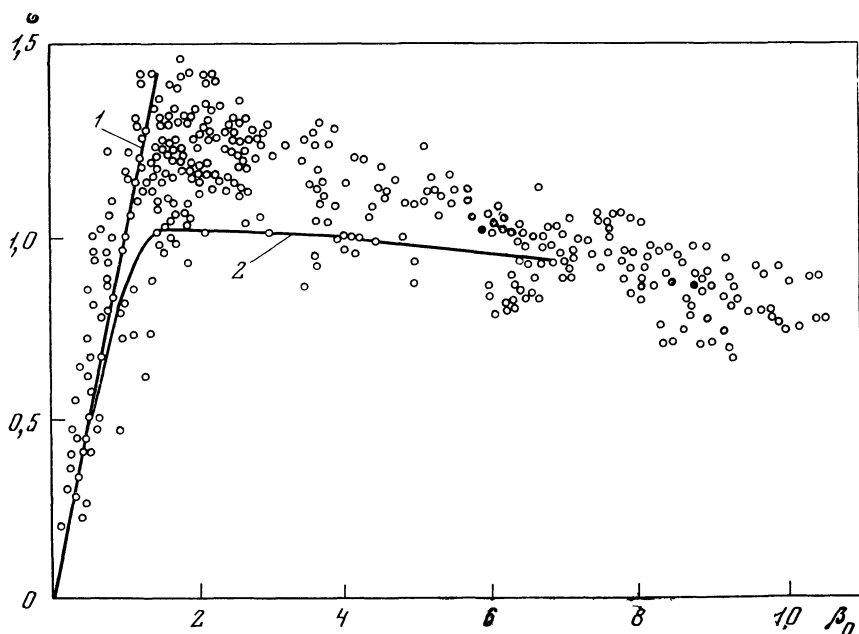


Рис. 6.22. Зависимость дисперсии логарифма интенсивности σ^2 от параметра β_0 для плоской волны

1 — приближение МПВ; 2 — соответствует кривой 1 на рис. 6.19 при пересчете по формуле $\sigma = [\ln(1 + \beta^2)]^{1/2}$

для σ на рис. 6.22 имеют отчетливо выраженный максимум при значениях параметра $\beta_0 = 1 \div 3$. В этом интервале наблюдается также наибольшее расхождение с кривой 2, полученной из измерений β^2 и предположения о логарифмической нормальности. Такое поведение экспериментальных данных для σ и β объясняется тем, что в области $\beta_0 = 1 \div 3$ возрастает вероятность глубоких замираний и высоких выбросов относительно среднего уровня (по сравнению с логарифмически нормальным законом) (рис. 6.17), которые заметно увеличивают дисперсию логарифма интенсивности. Проведенное сравнение показывает, что формулой (6.85) можно пользоваться для оценок σ и β (когда измеряется одна из этих величин) в области слабых флуктуаций ($\beta_0 \ll 1$) и при насыщении дисперсии ($\beta_0 \gg 1$). При промежуточных значениях параметра β_0 возможны отклонения σ в большую сторону.

Измерения дисперсии σ в случае расходящихся лазерных пучков были проведены на трассе длиной $x = 1750$ м при угловой расходимости $60''$ [52] и на трассе длиной 990 м при угловой расходимости 2 *мрад* [54]. В обоих случаях источником излучения служил непрерывный гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,6328$ *мкм*) и измерения проводились в условиях ровной подстилающей поверхности с травяным покровом. Высота луча над землей составляла около 2 м. На рис. 6.23 точками приведены результаты измерений [52], а кривые 1, 2 дают интервал разброса экспериментальных точек работы [54]. Из этого рисунка видно, что полученные в близких условиях экспериментальные данные хорошо согласуются между собой и дают большие по сравнению с плоской волной (рис. 6.22) значения относительной дисперсии в области максимума. При оси абсцисс на рис. 6.23 откладывается среднеквадратическое отклонение флуктуаций логарифма интенсивности сферической волны, вычисленное в приближении МПВ (§ 6.1). Из сравнения экспериментальных данных с теоретической кривой 3 следует, что границы применимости МПВ для расчета дисперсии сферической волны ($0,64 \beta_0 \lesssim 1,5$) оказываются несколько шире, чем в случае плоской волны ($\beta \lesssim 1,5$, рис. 6.22).

Рассмотренные экспериментальные зависимости $\beta^2 = \beta^2(\beta_0^2)$ и $\sigma^2 = \sigma^2(\beta_0^2)$ (рис. 6.19, 6.21, 6.22) были получены при различных значениях длины трассы x и структурной характеристики C_n^2 . Кроме этих переменных, универсальный параметр $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^7 l_0 x^{11/6}$ содержит длину волны оптического излучения. Как показали экспериментальные исследования [72—74], соотношение подобия $\sigma^2 = \sigma^2(\beta_0^2)$ выполняется и при изменении длины волны оптического излучения. Измерения проводились одновременно на длинах волн (в *мкм*): $\lambda_1 = 0,488$, $\lambda_2 = 1,15$, $\lambda_3 = 10,6$ — в работе [72]; $\lambda_1 = 0,6328$, $\lambda_2 = 1,084$ — в работе [73] и $\lambda_1 = 0,6328$, $\lambda_2 = 10,6$ — в работе [74].

Таким образом, проведенные экспериментальные исследования зависимости дисперсии флуктуаций интенсивности в широких кол-

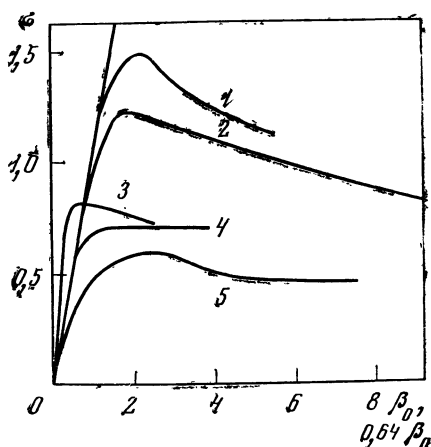
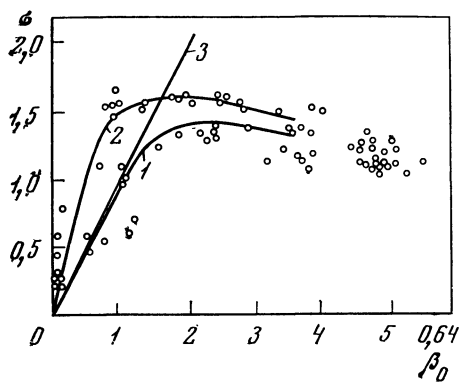


Рис. 6.23. Зависимость дисперсии логарифма интенсивности для сферической волны от параметра β_0

Точки — данные работы [52]; 1, 2 — данные работы [54]; 3 — приближение МПВ

Рис. 6.24. Зависимость дисперсии логарифма интенсивности многомодового излучения от параметра β_0

1 — сферическая волна [52]; 2 — плоская волна [71]; 3–5 — многомодовое лазерное излучение по данным [76, 63, 75] соответственно; масштаб β_0 относится к кривым 2–5, масштаб $0,64 \beta_0$ — к кривой 1

лимированных и расходящихся пучках подтвердили универсальные соотношения подобия $\beta^2 = \beta^2(\beta_0^2)$ и $\sigma^2 = \sigma^2(\beta_0^2)$ и установили область применимости расчетных формул, полученных в приближении МПВ. Эти исследования проводились с одномодовыми лазерами и тем самым соответствовали условиям, для которых имеется достаточно хорошо разработанная теория.

Зависимость дисперсии флуктуаций интенсивности многомодового лазерного излучения изучалась пока только экспериментально [63, 75, 76]. На рис. 6.24 показаны результаты измерений дисперсии логарифма интенсивности многомодового гелий-неонового ($\lambda = 0,6328 \text{ мкм}$ [75]) и импульсного рубинового ($\lambda = 0,6943 \text{ мкм}$ [63, 76]) лазера. В работе [75] луч лазера проходил вначале приземный участок трассы длиной 100 или 500 м на высоте 1–1,5 м, а затем отражался плоским зеркалом и проходил дополнительно расстояние 900 м до приемника, расположенного на высоте 70 м. Излучение лазера перед выходом в атмосферу пропускалось через коллиматор с выходной апертурой $D = 11 \text{ см}$. В работах [63, 76] интенсивность лазерного пучка после прохождения атмосферы регистрировалась с помощью фотографирования отражающих свет экранов. В дальнейшем осуществлялось фотометрирование полученных снимков и проводилась соответствующая обработка цифровой информации с усреднением по пространственным случайным реализациям интенсивности. В обоих случаях лазер-

ные пучки были расходящимися. Эффективная площадь приемного отверстия в работе [76] составляла $0,4 \times 3$ мм, а в [63] ширина щели микрофотометра в соответствующем масштабе равнялась 0,1 радиуса первой зоны Френеля. Измерения [63] и [76] проводились на горизонтальных трассах длиной $x_1 = 1,2$ км, $x_2 = 3,5$ км, $x_3 = 9,8$ км и $x_1 = 200$ м, $x_2 = 600$ м, $x_3 = 1000$ м, $x_4 = 1500$ м соответственно.

Из этих экспериментов следует, что дисперсия насыщенных флуктуаций интенсивности многомодового лазерного излучения оказывается меньше, чем в случае лазеров, работающих в одномодовом режиме, и неоднородный характер трассы [75] не меняет качественного вида зависимости $\sigma^2 = \sigma^2(\beta_0^2)$, полученной ранее для однородных трасс.

2. Дисперсия флуктуации интенсивности узких коллимированных пучков

Как было установлено в § 6.1, существенное влияние на дисперсию (рис. 6.1—6.3) и пространственную корреляцию (рис. 6.4) слабых флуктуаций оказывает пространственная локализация поля узких коллимированных пучков. Из формулы (6.5) следует, что коллимированный пучок имеет минимальный дифракционный размер ($a_d = \sqrt{2a}$), когда радиус пучка на выходной апертуре приблизительно равен радиусу первой зоны Френеля ($a = \sqrt{x/k}$). Очевидно, в этом случае вклад в рассеянное поле вносят только неоднородности, расположенные в узкой приосевой области пучка. Из расчетов (§ 6.1) следует, что такая «пространственная фильтрация» приводит, в частности, к уменьшению дисперсии флуктуаций интенсивности на оси пучка (рис. 6.1) и относительному увеличению дисперсии на «краю» (рис. 6.2). Экспериментальная проверка полученных в теории зависимостей была проведена в работах [77—81].

В работе [77] исследовалось влияние размера коллимированного пучка на выходной апертуре на дисперсию флуктуаций интенсивности на его оси. Максимальный диаметр пучка на выходе был равен $2a = 10$ см. Трасса длиной $x = 500$ м проходила в среднем на высоте 0,5—1,5 м над ровной подстилающей поверхностью. Величина $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^2 x^{11/6}$ по данным градиентных измерений изменялась в пределах $0,4 \leq \beta_0^2 \leq 1$. В эксперименте измерялись значения β^2 . Для сравнения с расчетами осуществлялся переход к дисперсии логарифма интенсивности σ^2 по формуле (6.85). При этом контролировалось распределение вероятностей интенсивности, которое в некотором диапазоне удовлетворительно совпадало с логарифмически нормальным законом. В области значений $10 \leq Q^{-1} \leq 100$ эксперимент удовлетворительно согласуется с расчетной зависимостью [6, 7]. Для более узких пучков ($Q^{-1} < 10$) теория дает заниженные значения дисперсии. Замет-

ный разброс экспериментальных данных объясняется, по-видимому, вариациями структурной характеристики C_n^2 в процессе измерений.

В работе [78] экспериментально изучалось поведение дисперсии флуктуаций интенсивности в зависимости от кривизны фазового фронта на выходной апертуре. Методика, аппаратура и трасса измерений полностью совпадали с [77]. Относительный радиус кривизны $f_s = x/F_0$ (§ 1) варьировался в пределах $0 \leq f \leq 2$ и определялся с помощью формулы (6.5) путем измерения радиуса пучка на выходной апертуре и в плоскости приема. Измерения показали, что расчет в приближении МПВ дает правильные результаты для оценки дисперсии флуктуаций интенсивности в расходящихся пучках. Увеличение относительной дисперсии при перемещении приемника от оси пучка к его краю, теоретически предсказанное в § 1 и 2, экспериментально изучалось в условиях слабых флуктуаций в работах [79—81]. Оно было обнаружено также в измерениях [65]. В работах [79—81] использовался одномодовый гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,6328$ мкм). Пучок распространялся [79, 80] вдоль трассы длиной $x = 220$ м в среднем на высоте 1,7 м над подстилающей поверхностью. Входная диафрагма приемника имела диаметр $d = 1$ мм. Измерения проводились с предельно узким ($Q = 1$) и расходящимся ($Q^{-1} = 0,01$) пучками. Как показали измерения, результаты расчетов на основе МПВ соответствуют экспериментальным данным только во френгоферовой зоне дифракции ($Q \gg 1$). В случае узкого пучка ($Q = 1$) имеет место только качественное согласие. В то же время данные для узкого пучка согласуются с расчетом, выполненным с использованием метода Гюйгенса — Кирхгофа [80].

Как уже отмечалось выше, уровни насыщения дисперсии флуктуаций интенсивности для коллимированных и расходящихся пучков не совпадают. Детальное теоретическое исследование зависимости уровня насыщения от дифракционного размера пучка пока не проведено. При определенных условиях уровень насыщения дисперсии узкого коллимированного пучка ($Q = 1$) может зависеть от величины внутреннего масштаба турбулентности [32]. Экспериментально зависимость насыщенной дисперсии от числа Френеля передающей апертуры коллимированного пучка изучалась в работах [77, 82].

Измерения в [77] были выполнены на трассе длиной $x = 7$ км с помощью одномодового гелий-неонового ($\lambda = 0,6328$ мкм) лазера. Максимальный радиус коллимированного пучка составлял $a = 8$ см. Значения параметра $\beta_0^2 = 1,23C_n^2 k^7 l^3 x^{11/6}$, определяемые по градиентам средней температуры и скорости ветра и по мощности спектральной компоненты температурных микропульсаций, колебались в пределах $9 \leq \beta_0^2 \leq 16$.

Трасса проходила над пересеченной местностью. Высота луча над подстилающей поверхностью изменялась от 10 до 30 м. Диа-

метр входного отверстия приемника был много меньше размера зоны Френеля $\sqrt{\lambda x}$. В работе [82] измерения проводились на трассе длиной $x = 16,3$ км, проходившей над озером. Источником служил однододовый гелий-неоновый ($\lambda = 0,6328$ мкм) лазер. Максимальный радиус пучка на выходе коллиматора был равен $a = 6$ см. Входное отверстие приемника имело диаметр $d = 1$ мм. Параметр β_0^2 определялся по полуширине дифракционной картины в фокальной плоскости приемной линзы (§ 8.1) и изменялся в пределах $16 \ll \beta_0^2 \leq 49$. На рис. 6.25 показаны измеренные [82] значения относительной дисперсии в зависимости от числа Френеля передающей апертуры. Вертикальные линии соответствуют 99%-ному доверительному интервалу.

Следует отметить, что при больших значениях β_0^2 зависимость среднеквадратичного значения флуктуаций β от волнового параметра передающей апертуры радикально отличается от соответствующей зависимости в случае предельно малых значений $\beta_0^2 \ll 1$. При $\beta_0^2 \ll 1$ наименьшие флуктуации на оси пучка наблюдаются при значениях волнового параметра порядка единицы, а при $\beta_0^2 \gg 1$ — наоборот, эта область соответствует наиболее сильным флуктуациям. Измерения пространственных корреляционных функций показали, что наличие максимума не связано со смещением пучка как целого. Отметим, что данные [77] сильно занижены из-за усредняющего действия приемной апертуры и недостаточно широкого динамического диапазона измерительной аппаратуры.

Измерения зависимости β от β_0 на оси узкого пучка с $Q \approx 1$ в условиях сильных флуктуаций проводилось на трассах длиной 16,3 км над Севаном и 13,5 км в Цимлянске. Измерения велись практически одновременно на длинах волн 0,63 и 10,6 мкм. Результаты этих измерений представлены на рис. 6.26. Как видно из данных, приведенных на этом рисунке, зависимость β (β_0) для узких пучков имеет тот же характер, что и для широких (рис. 6.20). Однако при одинаковых β_0 в области $\beta_0 > 1$ экспериментальные значения β_0 для узких пучков получаются несколько больше, чем для широких.

3. Дисперсия флуктуаций интенсивности в сфокусированном пучке

Имеются все основания полагать, что дисперсия флуктуаций интенсивности сфокусированного лазерного пучка зависит от структурной функции фазы, вычисленной на диаметре фокусирующей апертуры D_S ($2a$) $= 1,1 C_n^2 k^2 x (2a)^{7/3}$.

По крайней мере для $\beta_0^2 \ll 1$, как показывают расчеты § 6.2, величина дисперсии растет линейно с увеличением D_S и в дальнейшем насыщается вблизи значений порядка $1 \lesssim \sigma_I \lesssim 1,4$. Экспериментальные исследования дисперсии интенсивности и логарифма

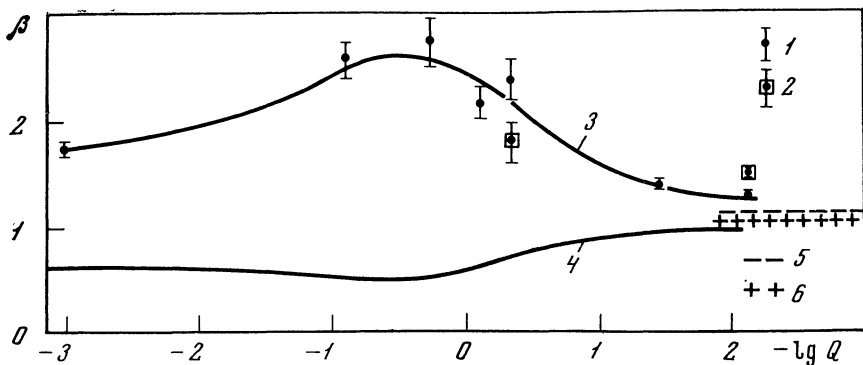


Рис. 6.25. Зависимость дисперсии сильных флуктуаций интенсивности коллимированного лазерного пучка от числа Френеля передающей апертуры при $\beta_0 \sim 1$

1 — коллимированный пучок; 2 — расходящийся пучок; 3 — эмпирическая зависимость; 4 — расчет в МПВ; 5 — асимптотика [20]; 6 — асимптотика [25]

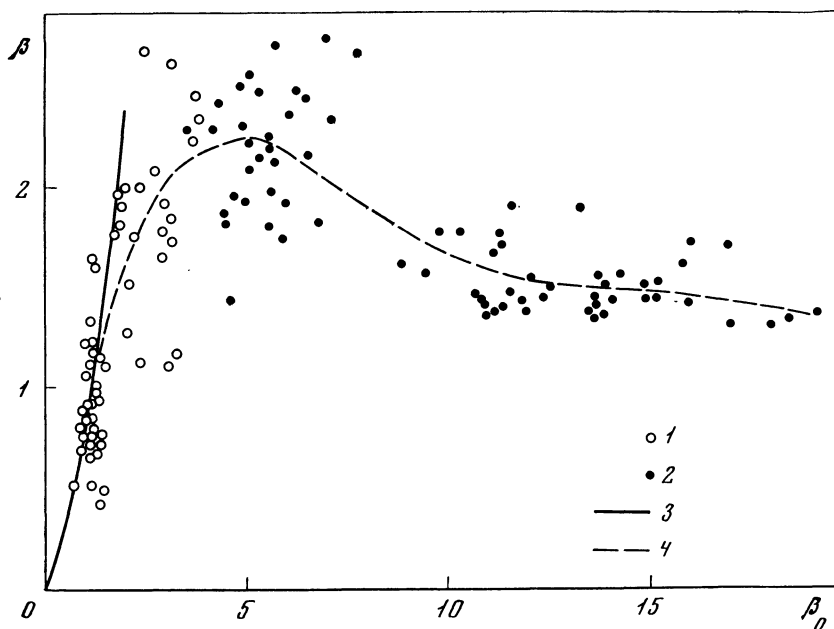


Рис. 6.26. Зависимость β (β_0) для узких лазерных пучков

1 — длина волны 10,6 мкм; 2 — то же, 0,63 мкм; 3 — расчет МПВ; 4 — эксперимент

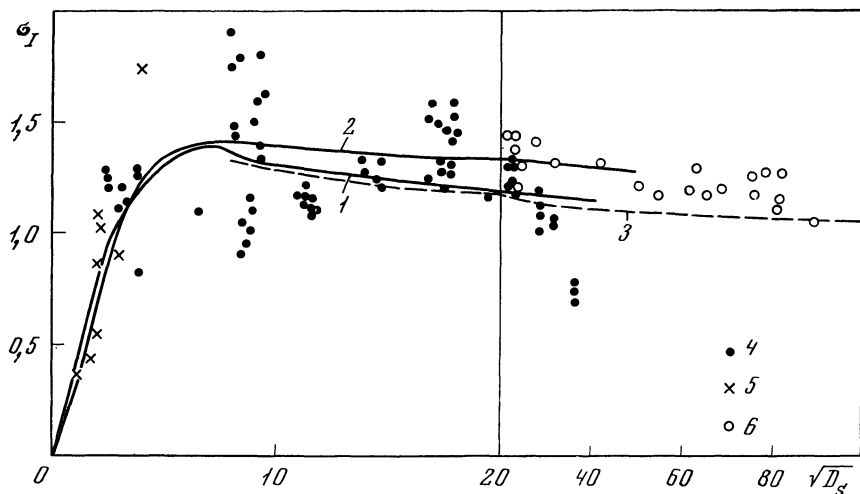


Рис. 6.27. Зависимость относительной дисперсии в фокусе лазерного пучка от параметра D_S . $\sigma_T \equiv \beta$.

1, 2 — расчет по формулам (6.74), (6.75): 1 — $kl_0^2/x = 0$, 2 — $kl_0^2/x = 0,25$; 3 — расчет по асимптотике (6.78); 4 — экспериментальные данные [83]; 5 — измерения [55] для логарифма интенсивности, пересчитанные по формуле (6.85); 6 — экспериментальные данные [30]

рифта интенсивности сфокусированного пучка проводились в работах [58, 83, 84]. Использовался непрерывный одномодовый гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,6328$ мкм). Трассы имели протяженность $x_1 = 250$ и 1750 м в [58, 84] и $x_2 = 20 \div 1360$ м в [83]. Число Френеля передающей апертуры в [83] составляло $Q^{-1} > 5$, а в работах [58, 84] оно было равно 4,6 и 129. Диафрагма на входе фотоумножителя во всех случаях выбиралась меньшей, чем дифракционный размер пучка, что давало возможность пренебречь усредняющим действием приемной апертуры. Статистическая обработка принятого сигнала осуществлялась с помощью аналоговых вычислительных устройств. На рис. 6.27 приведены экспериментально полученные данные, взятые из работ [58, 83]. Здесь же изображена рассчитанная в § 6.2 зависимость дисперсии от обобщенного параметра $D_S = 1,1 C_n^2 k^2 x (2a)^{5/3}$ при двух значениях внутреннего масштаба турбулентности. Согласие расчетных и экспериментальных результатов свидетельствует в пользу применимости обобщенного метода Гюйгенса — Кирхгофа для расчета флуктуационных характеристик интенсивности в сфокусированном лазерном пучке. Вследствие того, что параметр $D_S(2a) = 2,84 \times \beta_0^2 Q^{-5/3}$ при больших размерах фокусирующей апертуры ($Q^{-1} \gg 1$) может принимать значения порядка единицы и больше даже на коротких атмосферных трассах ($\beta_0 \lesssim 1$), область приме-

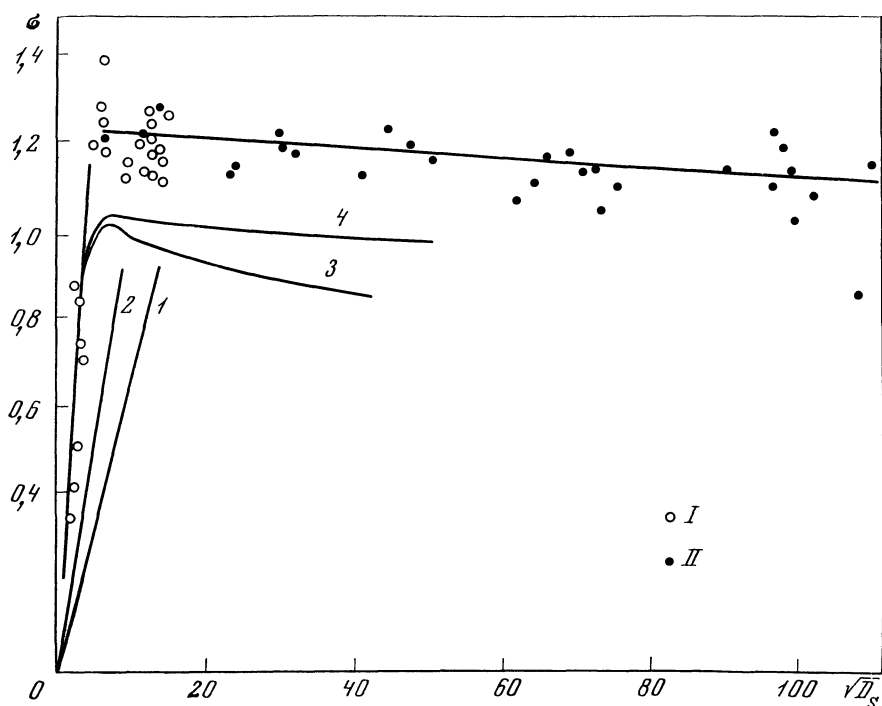


Рис. 6.28. Зависимость дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности в фокусе лазерного пучка от параметра D_S

I — $x = 250$ м, $a = 3,4$ см; II — $x = 1750$ м, $a = 15$ см; 1, 2 — зависимость дисперсии сферической волны в приближении МПВ ($\sigma^2 = 2,84 D_S(2a)Q^{-3/2}$) соответственно при $x = 250$ м, $a = 3,4$ см и $x = 1750$ м, $a = 15$ см; 3, 4 — кривые 1, 2 на рис. 6.31, пересчитанные по формуле $\sigma^2 = \ln(1 + \sigma_I^2)$

нимости методов возмущений при расчетах дисперсии в сфокусированном пучке является более ограниченной, чем для расходящихся волн. Именно этим можно объяснить то обстоятельство, что с ростом числа Френеля Q^{-1} результаты расчетов на основе МПВ все сильнее расходятся с экспериментальными данными, полученными даже в условиях, когда $\beta_0^2 \leq 1$ [58, 78].

Зависимость дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности в фокусе лазерного пучка от параметра D_S (2а) исследовалась в работах [58, 84]. Результаты этих измерений показаны на рис. 6.28. Здесь же приведены пересчитанные по формуле (6.85) расчетные кривые 1, 2 рис. 6.27. В области насыщения эксперимент и расчет заметно отличаются.

Из сравнения усредненной экспериментальной кривой с кривыми 1, 2 видно, что в области слабых флуктуаций $\sigma \lesssim 1$ дисперсия в сходящемся пучке превышает соответствующую величину в расходящейся волне.

4. Пространственная корреляция флуктуаций интенсивности

Кроме дисперсии, для многих возможных практических приложений несомненный интерес представляет пространственная структура светового пучка. Это необходимо, в частности, для выбора размеров приемной апертуры (гл. VII), обеспечивающей заданное уменьшение дисперсии за счет пространственного усреднения флуктуаций. Простейшей характеристикой пространственной структуры флуктуаций интенсивности является корреляционная функция $B_I = \langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$ и коэффициент корреляции:

$$b_I = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{[\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2]^{1/2} [\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle^2]^{1/2}}.$$

Приведем вначале экспериментальные данные о пространственной корреляции интенсивности для широких коллимированных и расходящихся пучков, полученные в [39, 60, 85]. Трассы, аппаратура и методика измерений [39, 85] были кратко описаны в предыдущем разделе. Коэффициенты пространственной корреляции для широкого коллимированного (плоская волна) и расходящегося (сферическая волна) пучков показаны на рис. 6.29 и 6.30 соответственно. Из представленных данных видно, что при слабых флуктуациях ($\beta_0^2 < 1$) имеет место хорошее совпадение эксперимента с полученными в приближении МПВ кривыми для плоской и сферической волн. Радиус корреляции в этом случае имеет порядок размера зоны Френеля. С увеличением параметра β_0^2 коэффициенты корреляции плоской и сферической волн ведут себя сходным образом: уменьшается масштаб корреляции по сравнению с зоной Френеля и появляется сравнительно высокий уровень корреляции при разносах $\rho \gtrsim \sqrt{\lambda x}$ (второй масштаб). Это качественно согласуется с полученной в § 6.2 приближенной оценкой коэффициента корреляции. Несколько лучшее совпадение с экспериментом в этой области дает расчет, проведенный в [25]. Однако полученные здесь результаты дают заниженные по сравнению с экспериментальными значения коэффициента корреляции при $\rho \gtrsim \sqrt{\lambda x}$, $\beta_0^2 \gg 1$.

На рис. 6.30 представлены коэффициенты корреляции флуктуаций логарифма интенсивности сферической волны, полученные в [60] с расходящимся пучком на дистанциях 5,5 и 15 км при слабых флуктуациях и на дистанции 45 км в области сильных флуктуаций. Из этого рисунка можно видеть хорошее согласие полученных данных с теорией при слабых флуктуациях.

Фокусировка излучения может приводить к появлению масштаба пространственной корреляции, равного дифракционному размеру сфокусированного пучка в однородной среде. Измерения пространственных корреляционных функций интенсивности сфо-

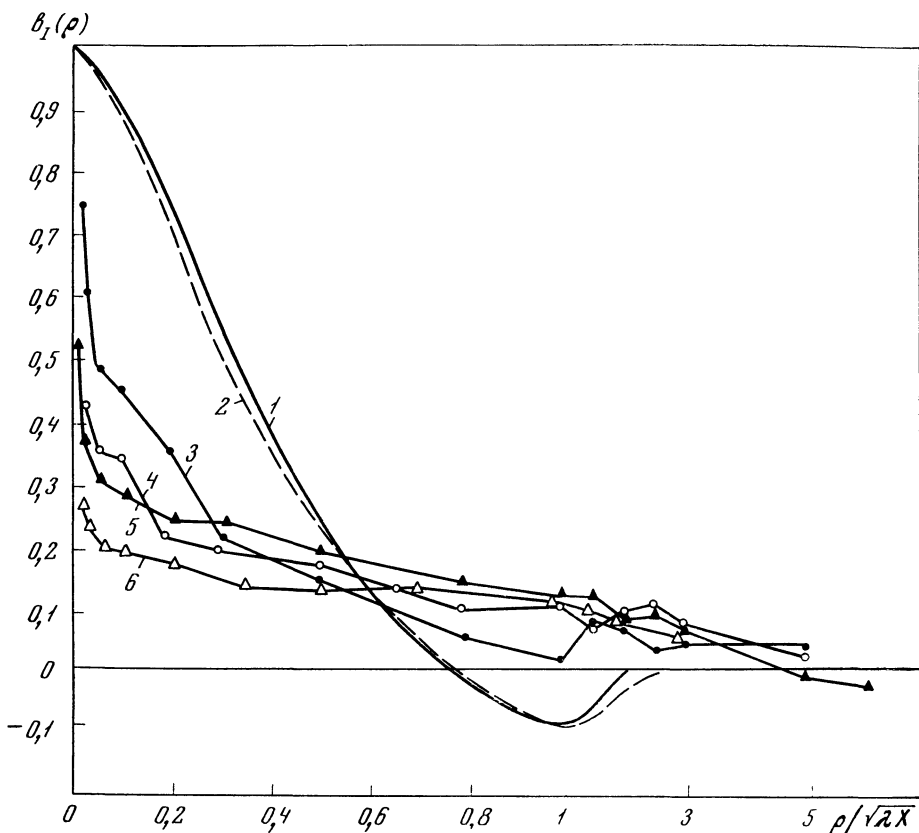


Рис. 6.29. Коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности широкого коллимированного пучка

1 — теоретическая кривая (2.67) для $\beta_0^2 \ll 1$; 2—6 — экспериментальные результаты: 2 — $\beta_0^2 < 1$ ($x = 650$ м); 3 — $1 < \beta_0^2 < 5,3$; 4 — $7,9 < \beta_0^2 < 27$; 5 — $\beta_0^2 > 27$ ($x = 1750$ м); 6 — $9,3 < \beta_0^2 < 7,5$ ($x = 8500$ м), $2a = 30$ см

кусированного лазерного излучения проводились в работах [59, 83, 87, 88, 89]. В работе [88] использован аргоновый ($\lambda = 0,488$ мкм) лазер. Пучок света фокусировался параболическим зеркалом диаметром 15 см на расстоянии 1,4 км и распространялся в среднем на высоте 2 м над ровной подстилающей поверхностью. На выходной апертуре пучок можно было считать гауссовым с эффективным радиусом $a = 3,5$ см. Диафрагмы приемников имели диаметр 3 мм. На рис. 6.31 точками показаны результаты измерения коэффициента корреляции флуктуаций логарифма интенсивности вместе с расчетными данными, полученными для $b_I(\rho)$ с помощью метода Гюйгенса — Кирхгофа (§ 6.2). Измерения [88] были проведены в условиях сильной турбулентности, однако точные значения струк-

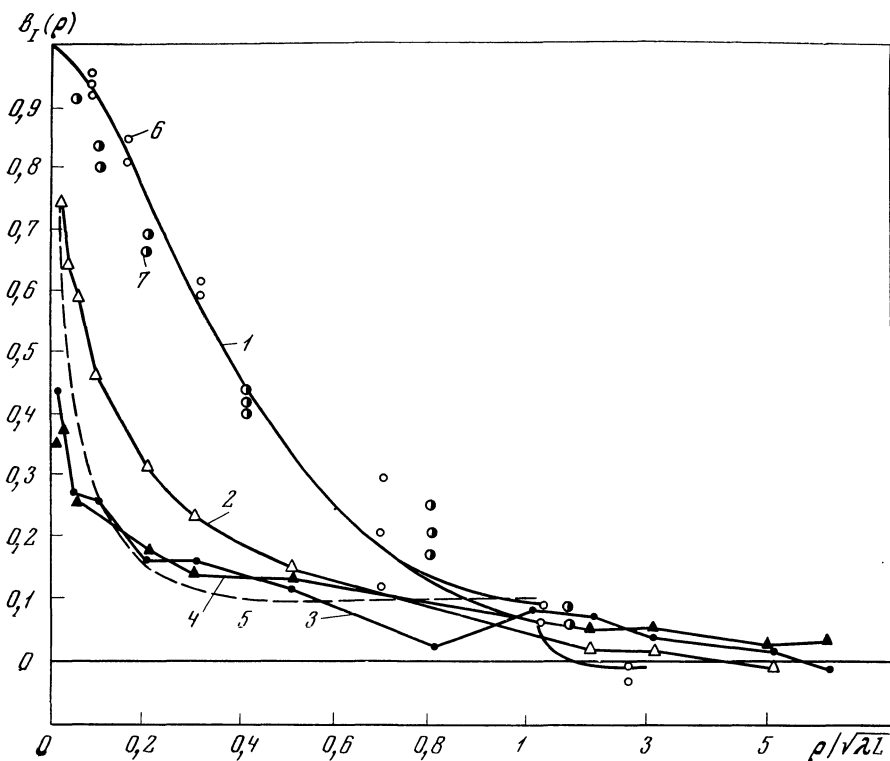


Рис. 6.30. Коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности расходящегося пучка

1 — теоретическая кривая в приближении МПВ для сферической волны при $\beta_0^2 \ll 1$; 2—5 — экспериментальные данные: 2 — $1 < \beta_0^2 < 5,3$; 3 — $7,9 < \beta_0^2 < 27$; 4 — $\beta_0^2 > 27$ ($x = 1750$ м), $2a = 30$ см, угол расходимости равен 60° ; 5 — результат осреднения по четырем кривым из [60] при $\beta_0^2 > 1$, $x = 45$ км; 6, 7 — экспериментальные данные из [60] для слабых флуктуаций: 6 — $x = 5,5$ км; 7 — $x = 15$ км

турной характеристики показателя преломления при этом не приведены. Для сравнения с теорией мы положили параметр D_S равным $D_S \simeq 160 \div 1600$, что соответствует $C_n^2 = 2,5 \cdot 10^{-14}$ см $^{-2/3}$.

Данные о пространственной корреляции флуктуаций интенсивности можно получить также из измерений функций усреднения, осуществляемых при приеме оптического излучения апертурой переменного диаметра [87, 89]. Оценка масштаба пространственной корреляции проводится непосредственно из функции усреднения [87] или после перехода к корреляционным функциям путем решения интегрального уравнения [89]. При втором подходе равенство (7.6) можно рассматривать как интегральное уравнение для определения коэффициента корреляции $b_I(\rho)$

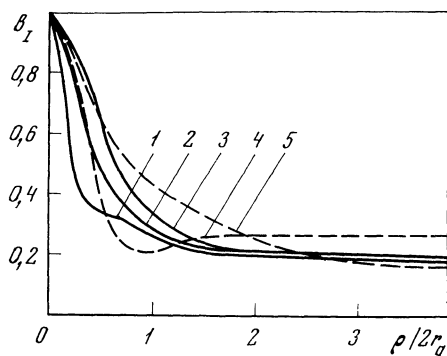
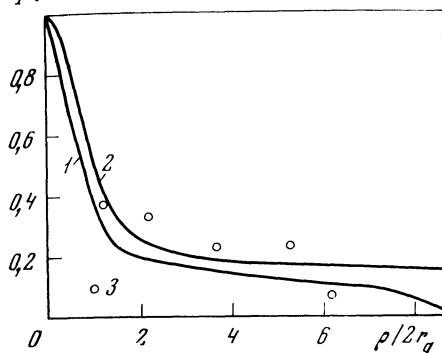
$b_I(\rho), b(\rho)$ 

Рис. 6.31. Коэффициент пространственной корреляции флуктуаций интенсивности $b_I(\rho)$ и логарифма интенсивности $b(\rho)$ сфокусированного излучения

1, 2 — расчетные кривые для $b_I(\rho)$ по методу Гюйгенса—Кирхгофа (§ 6.2), $Q^{-1} = 25$: 1 — $D_S = 400$; 2 — $D_S = 1400$; 3 — экспериментальные точки из работы [88] для $b(\rho)$, $Q^{-1} = 8,7$; $D_S = 160 \div 1600$. $r_g \equiv a_g$

Рис. 6.32. Коэффициент пространственной корреляции флуктуаций интенсивности сфокусированного излучения

1, 2, 3 — экспериментальные кривые, $Q^{-1} = 63$: 1 — $D_S = 7740$; 2 — $D_S = 6240$; 3 — $D_S = 3900$; 4, 5 — теоретические кривые, рассчитанные по методу Гюйгенса—Кирхгофа (§ 6.2), $Q^{-1} = 63$; 4 — $D_S = 3900$; 5 — $D_S = 1400$. $r_g \equiv a_g$

по измеренным значениям функции $G(d)$:

$$G(d) = \int_0^d K(d, \rho) b_I(\rho) d\rho, \quad (6.92)$$

где

$$K(d, \rho) = \frac{16}{\pi d^2} \rho \left[\arccos\left(\frac{\rho}{d}\right) - \frac{\rho}{d} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{d^2}} \right]$$

— ядро уравнения. В работе [89] показано, что решение уравнения (6.92) представляет собой некорректную математическую задачу. На рис. 6.32 показаны полученные путем решения уравнения (6.92) значения коэффициента корреляции. Измерения [87] проводились в призмемном слое над ровной поверхностью степи. Длина трассы составляла $x = 1750$ м, диаметр пучка на выходной апертуре был равен $2a = 10,5$ см. В качестве источника использовался непрерывный гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,63$ мкм). Диаметр приемной апертуры изменялся в пределах $0,3 \text{ мм} \leq d \leq 200 \text{ мм}$, при этом эффективный диаметр пучка в фокальной плоскости всегда превышал наибольший размер приемной апертуры. Функция усреднения $G(d)$ находилась путем последовательного попар-

ного измерения относительных дисперсий флуктуаций интенсивности при минимальном ($d = 0,3$ мм) и текущем значениях диаметра приемной апертуры. Минимальный размер приемника можно было считать точечным, так как дальнейшее его уменьшение не изменило относительной дисперсии.

Как видно из представленных на рис. 6.31, 6.32 результатов обработки измерений, масштаб корреляции интенсивности в сфокусированном пучке при $\beta_0 \ll 1$ совпадает приблизительно с дифракционным размером пучка в однородной среде, что согласуется с расчетами в приближении Гюйгенса — Кирхгофа (§ 6.2) и с приближенным решением уравнения для четвертого момента поля [27—29]. При увеличении β_0 масштаб корреляции несколько уменьшается и одновременно повышается уровень остаточной корреляции в области разнесений, больших дифракционного размера пучка ($\rho > 2a_d$).

Фотографические измерения коэффициентов корреляции в сфокусированном лазерном пучке проводились в работах [59, 83] на траассах длиной 1,2 и 3,5 км над пересеченной местностью. В качестве источника использовался импульсный рубиновый ($\lambda = 0,69$ мкм) лазер, работавший в режиме осевых колебаний, и телескопическая система с максимальным диаметром $D = 260$ мм. Масштаб корреляции кривых по уровню e^{-1} , оцененной по фотографиям, соответствует дифракционному размеру пучка в вакууме. Однако в области больших значений ρ данные [59, 83] существенно расходятся с результатами, изображенными на рис. 6.31, 6.32, отклоняясь в сторону меньших значений $b_I(\rho)$. Это может объясняться, в частности, тем, что фотографические измерения не обеспечивают необходимого динамического диапазона, и, возможно, недостаточным объемом использованных в [59, 83] выборки случайных значений.

Отметим также, что результаты измерения корреляционных функций в узких пучках приведены в [82]. В этой работе использовалась аппаратура, обладающая достаточно большим динамическим диапазоном, особенно необходимым при измерении в узких пучках, когда относительное среднеквадратичное значение флуктуаций интенсивности заметно больше, чем в широких пучках.

Измерения второго момента интенсивности $\langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle$ фотографическим способом с последующим использованием оптического коррелометра [64, 90] дают в качестве пространственного масштаба корреляции зону Френеля в случае расходящегося лазерного пучка в условиях слабых флуктуаций [64] и дифракционный размер для сфокусированного [90] пучка.

Пространственная корреляционная функция флуктуаций интенсивности в узком ($Q^{-1} = 2,5$) коллимированном пучке измерялась в работе [91]. Эксперимент проводился в условиях гористой местности на наклонной трассе длиной 6,4 км. Перепад высот между приемным и передающим пунктами составлял 540 м. Угол наклона трассы к горизонту был равен $4^\circ 30'$. В качестве пе-

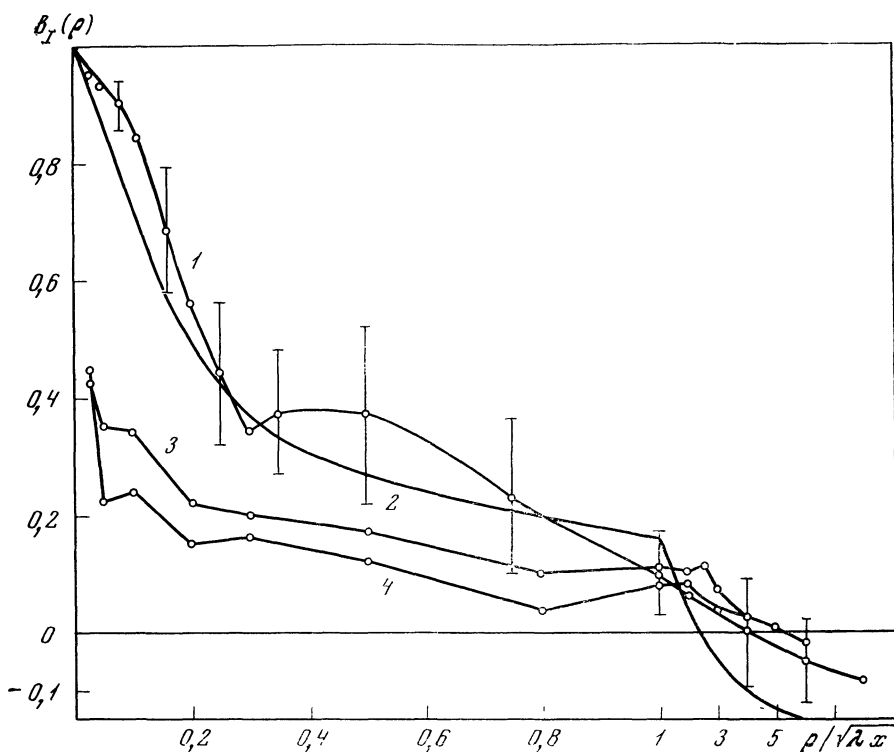


Рис. 6.33. Коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности

1, 2 — коллимированный пучок, $Q^{-1} = 2,5$; 1 — измеренные значения $D_S(2a) = 68 \div 226$; $C_n^2 = (3 \div 10) \cdot 10^{-15} \text{ см}^{-2/\text{s}}$; 2 — расчет по методу Гюйгенса—Кирхгофа (§ 6.2) при $D_S(2a) = 153$; 3, 4 — экспериментальные кривые соответственно для плоской и сферической волн при $D_S(2a) = 48 \div 154$, $C_n^2 = (2 \div 8) \cdot 10^{-15} \text{ см}^{-2/\text{s}}$

редатчика (который располагался на вершине) использовался одномодовый гелий-неоновый лазер. Пучок света, выходящий из лазера, расширялся с помощью коллиматора до размера $2a = 8 \text{ см}$. В плоскости приема эффективный размер пучка был равен $2a_0 = 40 \div 60 \text{ см}$. Входные отверстия приемников имели диафрагмы $1,2 \text{ мм}$ при разнесении приемников $\rho < 0,35 \sqrt{\lambda x}$ и $3,2$ для $\rho \geq 0,2 \sqrt{\lambda x}$. Измерение интегрального значения структурной характеристики показателя преломления вдоль трассы проводилось оптическим методом (§ 8.1) по полуширине дифракционной картины в фокальной плоскости приемной линзы. На рис. 6.33 представлены экспериментальные значения коэффициента корреляции. Вертикальными линиями показаны 90%-ные доверительные интервалы.

Из рис. 6.33 видно, что экспериментальные данные для узкого пучка согласуются с расчетом, выполненным в приближении Гюйгенса — Кирхгофа, и дают большой уровень корреляции при разносах $\rho/\sqrt{\lambda x} \lesssim 1$ по сравнению с плоской и сферической волнами. Высокий уровень корреляции в области $\rho/\sqrt{\lambda x} \lesssim 1$ подтверждается также результатами измерений, описанными в [82, 92].

5. Частотные спектры флуктуаций интенсивности

Частотные спектры флуктуаций интенсивности света изучались экспериментально с использованием тепловых [40, 62] и лазерных [39, 52, 93] источников. Ранние работы [10] подтвердили следующую из расчетов в приближении МПВ и из гипотезы замороженной турбулентности универсальную зависимость спектральной плотности $W(f)$ от безразмерной частоты $\Omega = f/f_0$, где $f_0 = v/l$ — характерная частота. В случае плоской и сферической волн, распространяющихся в условиях слабых флуктуаций, масштаб l равен приблизительно размеру первой зоны Френеля.

Рассмотрим подробно экспериментальные результаты, полученные с помощью лазерных источников. Наиболее полные исследования спектров для квазиплоской волны содержатся в [39, 93, 101]. Условия проведения этих экспериментов были приведены при обсуждении данных о законе распределения вероятностей и дисперсии интенсивности.

Спектральный анализ сигнала от приемника излучения проводился анализатором с 36 третьоктавными фильтрами, перекрывавшими полосу частот от 2 гц до 6,3 кгц. Одновременно проводилась запись сигнала на магнитную ленту для последующей цифровой обработки на ЭВМ и получения спектра в полосе от 0,04 до 16 гц. Перед записью на магнитофон сигнал отфильтровывался от высокочастотной составляющей с помощью фильтра со срезом на частоте 16 гц. Для получения устойчивых результатов каждое измерение спектров продолжалось в течение 4 мин. В результате было обработано более 100 спектров. Спектральные плотности флуктуаций интенсивности $W_I(f)$ приводились к безразмерному виду путем умножения на частоту f

и нормировки на дисперсию $\sigma_I^2 = \int_0^{\infty} df W_I(f)$.

Как следует из соотношений подобия (§ 6.2), безразмерная функция $fW_I(f)/\sigma_I^2$ в случае степенного спектра турбулентности будет функцией безразмерной частоты $\Omega = f/f_0$ и параметра β_0^2 . Для проверки этой закономерности все полученные спектры были разбиты на группы по параметру β_0^2 и скорости ветра. На рис. 6.34 приведены частотные спектры при разных скоростях ветра как функции частоты $f = \omega/2\pi$. Как видно из рис. 6.34, эти же спектры после перехода к безразмерным ча-

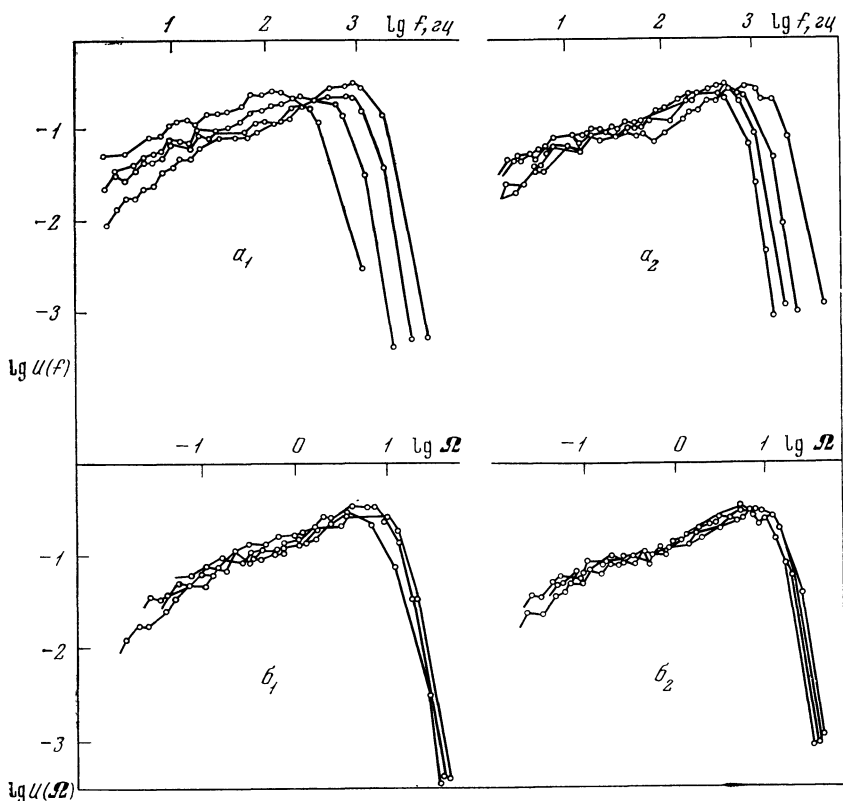


Рис. 6.34. Спектры флуктуаций интенсивности $U(f) = fW(f)/\sigma_I^2$ и $U(\Omega) = 2U(\Omega, \beta_0^2) = \frac{fW(f)}{\sigma_I^2}$

a — при различных скоростях ветра для групп со значениями: 1 — $16 < \beta_0^2 < 36$; 2 — $\beta_0^2 > 36$; b — те же спектры после перехода к безразмерной частоте $\Omega = f/f_0$; $f_0 = v/V \sqrt{2\pi\lambda x}$

стотам практически налагаются друг на друга. Таким образом, переход к безразмерной частоте Ω позволяет объединить результаты измерений при различных скоростях ветра в группы, соответствующие различным значениям параметра β_0^2 . На рис. 6.35 представлены усредненные по группам с близкими значениями β_0^2 спектры $U(\Omega, \beta_0^2)$ как функции Ω , а в качестве параметра взяты значения β_0^2 . На этом же графике представлена полученная в § 6.1 в приближении МПВ функция $U_0(\Omega)$, которую можно рассматривать как предельную кривую семейства $U(\Omega, \beta_0^2)$ при $\beta_0^2 \rightarrow 0$.

Для того чтобы при дальнейшем анализе иметь представление о диапазоне пространственных масштабов, в которых изучался

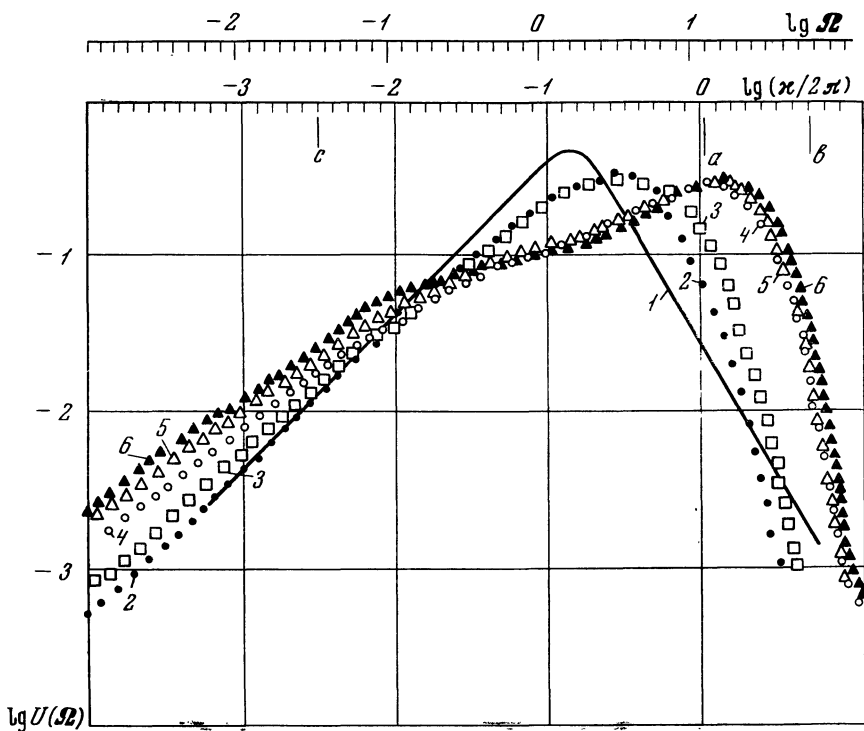


Рис. 6.35. Осредненные по группам с близкими значениями β_0^2 спектры флуктуаций интенсивности плоской волны. $U(\Omega) = 2U(\Omega, \beta_0^2)$
 $x = 1750$ м; 1 — $0,5 < \beta_0^2 < 1,7$; 2 — $1,7 < \beta_0^2 < 4$; 3 — $4 < \beta_0^2 < 16$; 4 — $16 < \beta_0^2 < 36$; 5 — $\beta_0^2 > 36$; 6 — $U_0(\Omega)$ — расчетная кривая в приближении МПВ (рис. 6.7)

спектр, на рис. 6.35 отложена также шкала волновых чисел $\kappa/2\pi = f/v$ см⁻¹ одномерного пространственного спектра $V(\kappa)$, переход к которому от временного спектра $W(2\pi f)$ осуществляется в соответствии с гипотезой замороженной турбулентности (§ 1.3) по формуле

$$V(\kappa) = vW\left(\frac{\kappa v}{2\pi}\right).$$

В масштабе этой шкалы отмечена условная нижняя граница инерционного интервала κ_η и указаны пределы $a \leq \kappa_\eta/2\pi \leq b$, в которых изменялась верхняя граница инерционного интервала $\kappa_\eta = 2\pi/8\eta_\kappa$, где η_κ — колмогоровский масштаб турбулентности. Значения η_κ оценивались по вертикальным градиентам скорости ветра и температуры [94].

Спектры $U(\Omega, \beta_0^2)$, представленные на рис. 6.35, обнаружи-

$\lg U(\Omega_T, \beta_0)$

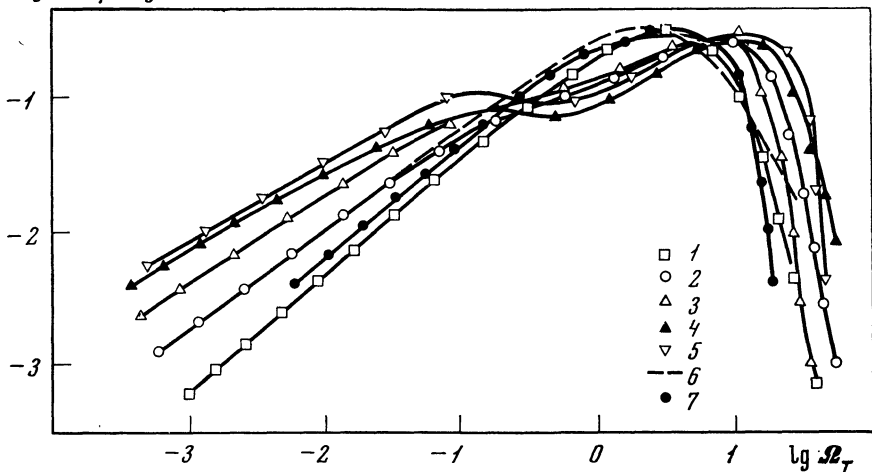


Рис. 6.36. Спектры флуктуаций интенсивности в плоской волне как функции безразмерной частоты $\Omega_T = \omega l_T / v_{\perp}$

1 — $\beta_0 = 1,7$; 2 — $\beta_0 = 5,3$; 3 — $\beta_0 = 2,8$; 4 — $\beta_0 = 7$; 5 — $\beta_0 = 14$, все $\lambda = 0,63$ мкм;
6 — $\beta_0 = 1,1$; 7 — $\beta_0 = 2,8$; все $\lambda = 10,6$ мкм

вают четкую зависимость от параметра β_0^2 . При увеличении β_0^2 за счет интенсивности турбулентности (увеличение C_n^2) спектры расширяются, а их максимум смещается в область более высоких частот. В области высоких частот затухание спектра оказывается более резким, чем у функции U_0 . В области низких частот, наоборот, при $\beta_0^2 \gg 1$ наблюдается более медленное затухание спектра, а при самых больших значениях β_0^2 намечается небольшой провал на частотах, приблизительно соответствующих максимуму U_0 .

Для того чтобы проверить соотношения подобия по масштабу (6.39), в [101] были обработаны результаты измерений частотных спектров на длинах волн 0,63 и 10,6 мкм на трассах длиной от 250 м до 16,3 км. Здесь показано, что частотные спектры занимают широкий интервал частот; положение их максимумов, например, различается более чем на три порядка.

На рис. 6.36 представлены частотные спектры после перехода к безразмерным частотам $\Omega_T = \frac{\omega l_T}{v_{\perp}}$ и усреднения по группам.

Такой переход заметно сближает все полученные спектры, форма и взаимное расположение их закономерно меняются с ростом параметра β_0 . Этот результат является экспериментальным подтверждением соотношений подобия (6.47).

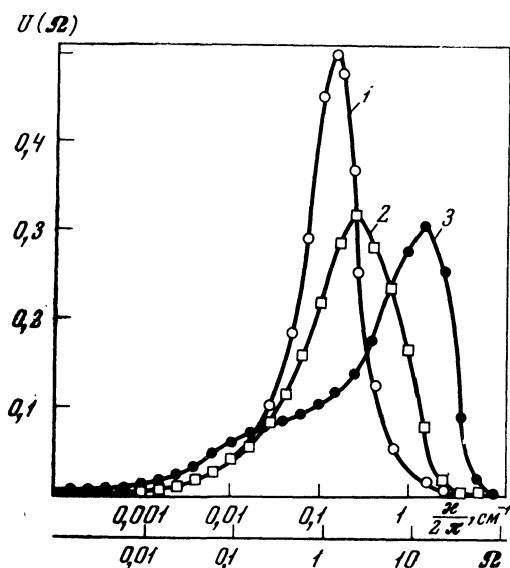


Рис. 6.37. Распределение мощности флуктуаций по спектру при различных значениях β_0^2

- 1 — $\beta_0^2 \rightarrow 0$;
- 2 — $1,7_i < \beta_0^2 < 4$;
- 3 — $\beta_0^2 > 16$

Для того чтобы наглядно представить вклад различных частот в дисперсию, на рис. 6.37 спектры изображены в полулогарифмическом масштабе. Из этого рисунка видно, что относительный вклад высоких частот при прочих равных условиях увеличивается по мере роста параметра β_0^2 .

Измерения спектров флуктуаций логарифма интенсивности проводились на коротких трассах. Целью таких измерений является проверка расчетных функциональных соотношений, полученных в приближении МПВ. В дальнейшем эти соотношения могут быть использованы при оптических измерениях параметров самой атмосферной турбулентности (гл. VIII). Для квазиплоской волны [95] опыт был проведен на трассе длиной 50 м. В качестве источника света использовался гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,63$ мкм). На выходе лазера была установлена телескопическая система, формирующая пучок размером $2a = 4$ см. Луч проходил на высоте 1 м над подстилающей поверхностью. При измерениях нормальная к трассе компонента скорости ветра составляла 3—5 м/сек. Приемная апертура имела размер 0,2 мм. Результаты измерений приведены на рис. 6.38 в виде функции $\Omega U(\Omega)$. Здесь же показаны спектры плоской волны, рассчитанные с использованием гауссовой модели (8.37) спектральной плотности флуктуаций показателя преломления в области высоких пространственных частот. Ближе всех к экспериментальным данным лежит кривая с $D = \kappa_m^2 x/k = 100$, что соответствует значению внутреннего масштаба, равному $l_0 = 5 \cdot 92/\kappa_m = 1,2$ мм. Из рис. 6.38 видно также, что модель спект-

Рис. 6.38. Сравнение экспериментальных и расчетных в приближении МПВ спектров флуктуаций логарифма интенсивности плоской волны

1, 2 — экспериментальные данные:

1 — $x = 50$ м; $v = 4,3$ м/сек;

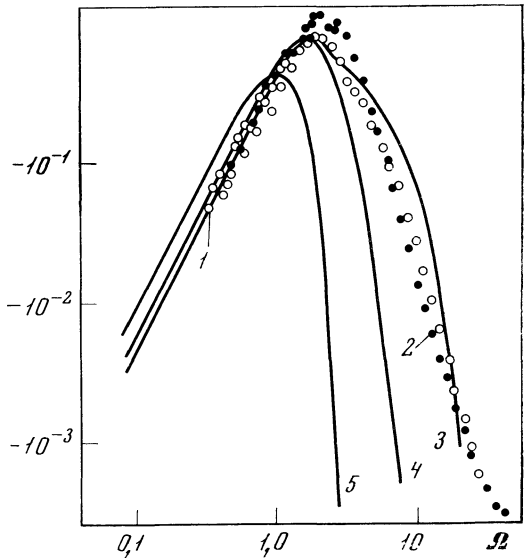
2 — $x = 50$ м; $v = 4,2$ м/сек;

3 — 5 — расчет в приближении МПВ:

3 — $\kappa_m^2 x/h = 100$;

4 — $\kappa_m^2 x/h = 10$;

5 — $\kappa_m^2 x/h = 1$



ра с более слабым затуханием, чем $\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)$, могла бы лучше соответствовать экспериментальным данным.

Измерения спектров флуктуаций логарифма интенсивности для расходящегося лазерного пучка были осуществлены [96] на трассах $x_1 = 50$ и $x_2 = 100$ м с гелий-неоновым лазером ($\lambda = 0,63$ мкм). На выходе лазера устанавливалась фокусирующая линза с фокусным расстоянием 75 см. Поэтому волну, распространяющуюся в атмосфере, можно было считать сферической. Результаты измерений, представленные на рис. 6.39 совместно с расчетными кривыми, дают удовлетворительное совпадение с расчетом в приближении МПВ.

Измерения спектров сфокусированного лазерного пучка [58, 84] проводились на трассе длиной 1,75 км. Исходный радиус пучка от гелий-неонового ($\lambda = 0,63$ мкм) лазера после прохождения телескопической системы составлял $a = 10,5$ см. Диаметр входного отверстия приемника варьировался в пределах $d = 0,25 \div 100$ мм. Приемник располагался на оси пучка. Аппаратура и методика измерений были аналогичны случаю коллимированного пучка. Результаты измерений приведены на рис. 6.40 в виде безразмерной функции частоты f :

$$U_p(f) = \frac{f W_p^2(f)}{\bar{p}^2},$$

нормированной на квадрат принимаемого среднего светового потока \bar{p} . Спектр, измеренный при наименьшей апертуре ($d = 0,5$ мм), можно считать спектром флуктуаций интенсивности, потому

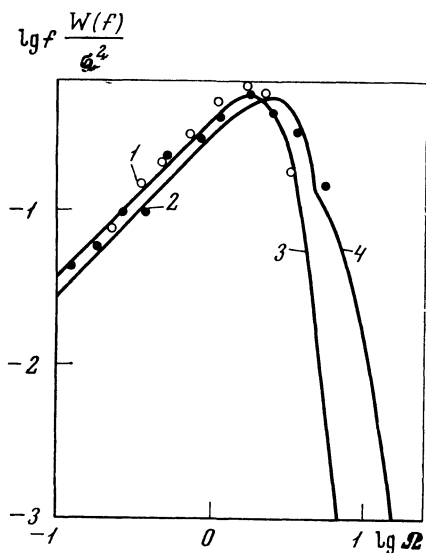


Рис. 6.39. Сравнение экспериментальных (1, 2) и расчетных (3, 4) спектров логарифма интенсивности сферической волны в условиях слабых флуктуаций

- 1 — $x = 50$ м; $v = 2,5$ м/сек;
- 2 — $x = 100$ м; $v = 1$ м/сек;
- 3 — $l_0 \sqrt{k/x} = 1,87$;
- 4 — $l_0 \sqrt{k/x} = 0,59$

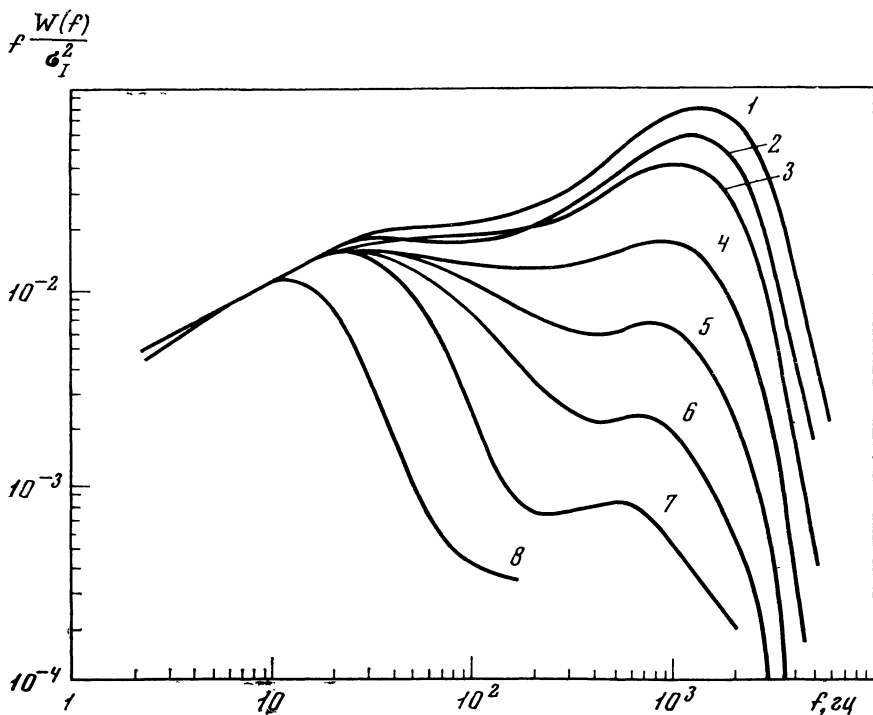


Рис. 6.40. Частотные спектры относительных флуктуаций потока фокусированного излучения, падающего на приемник с радиусом входной апертуры r (мм)

Перпендикулярная трасса; компонента скорости ветра равна $v = (5 \pm 1)$ м/сек; 1 — $r = 0,25$; 2 — $r = 0,5$; 3 — $r = 1$; 4 — $r = 2,5$; 5 — $r = 5$; 6 — $r = 10$; 7 — $r = 25$; 8 — $r = 100$

что дальнейшее уменьшение диаметра не сопровождалось изменением величины относительной дисперсии. Из результатов измерений следует, что в спектре флуктуаций интенсивности преобладает высокочастотная часть. При увеличении диаметра приемной апертуры мелкомасштабные флуктуации усредняются, при этом существенно уменьшается вклад высоких частот в дисперсию принимаемого светового потока.

§ 5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЫБРОСЫ ИНТЕНСИВНОСТИ

Если приемник лазерного излучения является пространственно-распределенным и обладает некоторым порогом срабатывания по интенсивности излучения, то выбросы случайной функции $I(\rho)$ могут играть определяющую роль в режиме работы такой приемной системы, в особенности, когда средний уровень интенсивности в пришедшей волне ниже порога срабатывания I_0 приемной системы.

Теоретическое исследование выбросов проводилось рядом исследователей [97—99, 102]. В этих работах было показано, что для расчета выбросов необходимо знать совместное распределение интенсивности и ее первых производных.

В предположении нормальности совместного распределения логарифма интенсивности и его производной, а также изотропности случайного поля в [97, 99] получены следующие формулы для средней площади выброса $\langle S(I_1) \rangle$ над уровнем с интенсивностью I_1 , среднего числа таких выбросов $\langle N(I_1) \rangle$ на единицу площади и среднего расстояния между выбросами $\langle l(I_1) \rangle$:

$$\langle S(I_1) \rangle = -\frac{\pi^2}{b_x''(0)} [1 - \Phi(\xi_1)]^2 \exp(\xi_1^2),$$

$$\langle N(I_1) \rangle = -\frac{b_x''(0)}{2\pi^2} [1 - \Phi(\xi_1)]^{-1} \exp(-\xi_1^2),$$

$$\langle l(I_1) \rangle = -\frac{\pi}{[-2b_x''(0)]^{1/2}} [1 - \Phi(\xi_1)]^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\xi_1^2\right),$$

где $\xi_1 = \frac{1}{2\sigma_x} \left(2\sigma_x^2 + \ln \frac{I_1}{\langle I \rangle} \right)$; σ_x^2 — дисперсия уровня; $\langle I \rangle$ — средняя

интенсивность; $\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\xi \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$; $b_x''(0)$ — вторая

производная коэффициента корреляции уровня в нуле.

Наибольший практический интерес представляет случай сильных флуктуаций интенсивности, когда выбросы велики. Однако для сильных флуктуаций нет сведений о совместном распределении флуктуации интенсивности и производной интенсивности и даже недостаточно данных для определения $b_x''(0)$.

Некоторые попытки оценить выбросы при сильных флуктуациях содержатся в [102].

Введем сначала некоторые определения. Обозначим $S (I > I_1)$ ту площадь в фокальной плоскости, где интенсивность I больше некоторого фиксированного значения I_1 . Среднее значение этой площади может быть рассчитано по формуле

$$\langle S (I > I_1) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \int_{I_1}^{\infty} w_{r,\varphi} (I) dI, \quad (6.93)$$

если известна плотность вероятностей $w_{r,\varphi} (I)$ в каждой точке с координатами r, φ в фокальной плоскости. Поместив начало координат в фокусе пучка, можно считать из соображений симметрии, что $w_{r,\varphi} (I)$ не зависит от угла φ . Среднее значение интенсивности $\langle I (r) \rangle$ на расстоянии r от фокуса может быть вычислено по формуле (4.10) (см. рис. 4.2). Для проведения оценок по (6.93) будем считать, что I распределено логарифмически нормально со средним $\langle I (r) \rangle$ и дисперсией логарифма интенсивности σ^2 , не зависящей от r . Для дальнейших вычислений удобно ввести эффективный радиус $r_{\text{эфф}}$, определив его следующим образом:

$$r_{\text{эфф}}^2 = \frac{\langle S (I > I_1) \rangle}{\pi}.$$

При сделанных допущениях о распределении вероятностей получаем следующее выражение:

$$\left(\frac{r_{\text{эфф}}}{r^*} \right)^2 = \int_0^{\infty} y \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\ln [\alpha / f (y, \mu)] + \sigma^2 / 2}{\sigma} \right] \right\} dy, \quad (6.94)$$

где $\alpha = I_1 / I^*$; I^* — интенсивность в фокусе в отсутствие турбулентности; r^* — радиус на уровне половинной интенсивности идеальной дифракционной картины в фокальной плоскости;

$$y = r / r^*;$$

функция $f (y, \mu)$ — нормированная средняя интенсивность в фокальной плоскости пучка, сфокусированного в турбулентной среде (4.10):

$$f (y, \mu) = 2 \int_0^{\infty} J_0 (2 \sqrt{\ln 2} yt) \exp \left(-t^2 - \frac{1}{2} \mu^2 t^{5/3} \right) t dt;$$

$\mu^2 = 1,1 C_n^2 k^2 F_0 (2a)^{5/3}$, F_0 и a — параметры, определяющие распределение фазы и амплитуды на фокусирующей апертуре. Формула (6.94) связывает измеримые непосредственно в эксперименте величины: $r_{\text{эфф}}$ и структурную характеристику C_n^2 , и тем

самым открываются возможности для экспериментальной проверки сделанных предположений.

Измерения выбросов [100] проводились в приземном слое атмосферы на горизонтальных трассах длиной 180 и 650 м. Трассы проходили на высоте 1,5—2 м над однородной ровной поверхностью степи. Для измерения площади выбросов, т. е. суммарной площади тех областей поперечного сечения пучка, где интенсивность I больше фиксированного значения I_0 , с первичной пленки контактными перепечатыванием получали позитивные изображения пучка. Контрастная позитивная пленка имела близкую к z -образной характеристическую кривую почернения. Полученная при определенной выдержке позитивная пленка прозрачна там, где $I > I_0$, и не прозрачна в точках, где $I < I_0$. Мгновенная искомая площадь выбросов равна площади прозрачных участков кадра позитивного отпечатка.

Она определялась по величине светового потока, прошедшего через кадр. Средняя площадь выбросов $\langle S \rangle$ находилась по 35—40 кадрам, откуда вычислялась величина $r_{эфф} = \sqrt{\langle S \rangle / \pi}$.

На рис. 6.41 приведены данные описанного эксперимента вместе с рассчитанными по формуле (6.94) кривыми. Как видно из сравнения экспериментальных результатов с расчетными, формула (6.94) может быть использована для оценочных расчетов площади выбросов интенсивности в сфокусированном пучке в практически интересном случае $\mu \gg 1$.

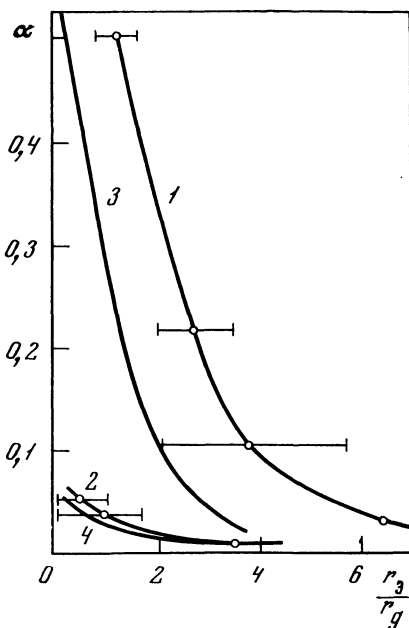


Рис. 6.41. Расчетные кривые и экспериментальные значения эффективного радиуса $r_{эфф}$, соответствующего уровню выброса α

Эксперимент: 1 — $\mu < 5$; 2 — $\mu = 5 \div \div 20$; расчет: 3 — $\mu = 2$; 4 — $\mu = 10$; $\sigma = 1$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Schmelzter. Quart. Appl. Math., 1967, 24, No. 4, 339—354.
2. A. Ishimaru. Proc. IEEE, 1969, 57, No. 4, 407—414.
3. A. Ishimaru. Radio Sci., 1969, 4, No. 4, 295—305.
4. З. И. Фейзулин. «Радиотехника и электроника», 1970, 15, № 7, 1390—1397.
5. В. Л. Милонов, Г. Я. Патрушев. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, No. 9, 1421—1424.

6. D. L. Fried, J. B. Siedman. J. Opt. Soc. Amer., 1967, 57, No. 2, 181—185.
7. А. С. Гурвич. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1969, 12, № 1, 147—149.
8. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 6, 865—872.
9. L. M. Vallesse. Appl. Optics, 1971, 10, No. 4, 959—960.
10. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
11. D. L. Fried. J. Opt. Soc. Amer., 1967, 57, No. 2, 175—180.
12. А. С. Гурвич, Н. С. Тиме. «Радиотехника и электроника», 1970, 15, № 4, 812—815.
13. S. F. Clifford. J. Opt. Soc. Amer., 1971, 61, No. 10, 1285—1292.
14. В. Л. Миронов, Л. Н. Щавлев. «Радиотехника и электроника», 1975, 20, № 2, 413—416.
15. Н. С. Тиме. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 8, 1195—1199.
16. Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1961.
17. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, С. И. Тузова. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 1, 94—104.
18. А. С. Гурвич, Б. М. Копров, Л. Р. Цванг. В кн.: Труды Международного коллоквиума «Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн». М., «Наука», 1965, стр. 30.
19. Ю. Н. Барабанников, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский. Успехи физ. наук, 1970, 102, № 1, 3—42.
20. В. И. Татарский. Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Препринт. АН СССР, Отделение океанологии, физики атмосферы и географии. М., 1970.
21. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 7, 1061—1068.
22. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 10, 1433—1455.
23. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов. Успехи физ. наук, 1974, 114, № 3, 413—456.
24. К. С. Gochelashvily, V. I. Shishov. Optica Acta, 1971, 18, No. 10, 767—777.
25. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов. Ж. exper. теор. физ., 1974, 66, № 4, 1237—1247.
26. К. С. Гочелашвили, В. Г. Певгов, В. И. Шишов. «Квантовая электроника», 1974, 1, № 5, 1156—1165.
27. К. С. Гочелашвили. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, No. 4, 592—595.
28. K. S. Gochelashvily. Optica Acta, 1973, 20, No. 3, 193—206.
29. К. С. Гочелашвили. «Квантовая электроника», 1974, 1, № 4, 848—857.
30. В. А. Банак, Г. М. Креков, В. Л. Миронов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 2, 252—260.
31. V. A. Banakh, G. M. Krekov, V. L. Mironov, S. S. Khmelevtsov, R. Sh. Tsvik. J. Opt. Soc. Amer., 1974, 64, No. 4, 516—518.
32. В. А. Банак, А. Ф. Жуков, В. Л. Миронов, Р. Ш. Цык, Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1975, № 2, 33—36.
33. В. А. Банак, В. Л. Миронов. Квантовая электроника, 1975, 2, № 10, 2163—2177.
34. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov. Optica Acta, 1971, 18, No. 4, 313—320.
35. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov. Optica Acta, 1972, 19, No. 4, 327—332.
36. D. A. de Wolf. J. Opt. Soc. Amer., 1968, 58, No. 4, 461—466.
37. И. М. Дагжесаманская, В. И. Шишов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 16—20.
38. W. P. Brown, Jr. J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, No. 8, 966—971.
39. Н. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Каижаров, В. В. Покасов. Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях интенсивности лазерного излучения. [Препринт]. АН СССР,

- Отделение океанологии, физики атмосферы и географии. М., 1973.
40. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 1, 66—71.
 41. А. В. Артемьев, А. С. Гурвич. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 5, 734—738.
 42. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 10, 1501—1511.
 43. Н. П. Бусленко, Д. Н. Голенко, И. Н. Соболев, В. Г. Срагович, Ю. А. Шрейдер. Метод статистических испытаний. М., ГИФМЛ, 1962.
 44. D. A. de Wolf. J. Opt. Soc. Amer., 1973, 63, No. 2, 171—179.
 45. K. Furutsu. J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, No. 2, 240—254.
 46. D. A. de Wolf. J. Opt. Soc. Amer., 1969, 59, No. 11, 1455—1460.
 47. D. J. Torrieri, L. L. Taylor. J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, No. 1, 145—147.
 48. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М., «Сов. радио», 1969.
 49. Н. Г. Кузнецова. Акустич. ж., 1972, 18, № 2, 323—324.
 50. R. L. Mitchel. J. Opt. Soc. Amer., 1968, 58, No. 9, 1267—1272.
 51. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, Вл. А. Покасов, А. С. Хрупин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 1, 105—112.
 52. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Гиле. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 9, 1360—1370.
 53. В. Г. Алексеев. Изв. АН СССР, серия «Техническая кибернетика», 1970, № 6, 171—176.
 54. R. G. Ochs, R. S. Lawrence. J. Opt. Soc. Amer., 1969, 59, No. 2, 226—227.
 55. D. H. Höhn. Appl. Optics, 1966, 5, No. 9, 1427—1430.
 56. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. P. Keister. J. Opt. Soc. Amer., 1967, 57, No. 6, 787—797.
 57. Р. А. Кагарян, Р. Г. Манучарян, С. С. Гаспарян. Экспериментальное исследование флуктуаций интенсивности лазерного излучения в атмосфере и их усреднение приемной апертурой. Препринт Института физических исследований, 72—06. Ереван, 1972.
 58. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец. «Радиотехника и электроника», 1970, 15, № 6, 1290.
 59. Н. Н. Дьяченко, В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1974, № 7, 132—134.
 60. G. R. Ochs, R. R. Bergman, J. R. Snyder. J. Opt. Soc. Amer., 1969, 59, No. 2, 231—234.
 61. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1965, 8, № 4, 717—724.
 62. М. Е. Грачева. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1967, 10, № 6, 775—787.
 63. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Ф. Небольсин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 44—49.
 64. Г. А. Андреев, Э. Н. Гельфер, В. А. Зверев, В. А. Цейтлин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 2, 276—284.
 65. H. Raidt, D. H. Höhn. Appl. Optics, 1973, 12, No. 1, 103—107.
 66. P. O. Minott. J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, No. 7, 885—888.
 67. Л. М. Лобкова, Т. П. Литвинова, Е. Р. Милютин, А. Б. Чистяков, М. М. Лобков, А. Б. Голубничий, В. С. Элдин, В. Т. Негожин. Труды учебных институтов связи, вып. 46. Л., 1969, 54—62.
 68. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1970, № 2, 52—56.
 69. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1973, № 6, 130—131.
 70. S. S. Khmelevtsov. Appl. Optics, 1973, 12, No. 10, 2421—2433.
 71. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 56—59.

72. J. R. Kerr. J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, No. 9, 1040—1049.
73. R. H. Kleen, G. R. Ochs. J. Opt. Soc. Amer., 1970, 60, No. 12, 1695—1697.
74. M. W. Fitzmanrice, J. L. Buf-ton, P. O. Minott. J. Opt. Soc. Amer., 1969, 59, No. 1, 7—10.
75. М. И. Мордухович. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 2, 275—280.
76. P. H. Deitz, N. J. Wright. J. Opt. Soc. Amer., 1969, 59, No. 5, 527—535.
77. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1973, № 9, 108—112.
78. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1970, 13, № 1, 146—148.
79. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Л. И. Щавлев. В кн.: II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Тезисы докладов. Томск, 1973, стр. 242—244.
80. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, В. В. Покасов, Л. И. Щавлев. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1975, 18, № 3.
81. А. Ф. Жуков, А. В. Ефремов, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1975, № 1.
82. А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1975, 18, № 1.
83. В. Я. Следин, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 6, 798—800.
84. И. А. Старобинец. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 5, 738—742.
85. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, А. С. Хрунин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 1, 155—158.
86. В. Л. Миронов, С. И. Тузова. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1975, 18, № 1.
87. А. С. Гурвич, И. А. Старобинец. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 14, № 2, 1834—1837.
88. J. R. Kerr, J. R. Dunphy. J. Opt. Soc. Amer., 1973, 63, No. 1, 1—8.
89. М. С. Беленький, В. Л. Миронов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 7, 1050—1057.
90. Э. И. Гельфер, М. Н. Князев, Т. А. Постныкова, А. М. Черемухин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1974, 17, № 5, 710—713.
91. Н. Ц. Гомбоев, Э. В. Зубрицкий, Г. Ф. Малыгина, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов. «Квантовая электроника», 1975, 2, № 4.
92. М. С. Беленький, А. Ф. Жуков, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. В кн.: Распространение оптических волн в атмосфере. Новосибирск, «Наука», 1974.
93. А. С. Гурвич, Вл. В. Покасов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1973, 16, № 6, 913—917.
94. Дж. Ламли, Г. Пановский. Структура атмосферной турбулентности. М., «Мир», 1966.
95. Н. С. Тиме. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1972, 8, № 1, 90—92.
96. А. С. Гурвич, Н. С. Тиме. «Радиотехника и электроника», 1970, 15, № 4, 812—815.
97. Ф. В. Булкин, К. С. Гочелашвили. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 12, 1864—1870.
98. В. И. Тихонов. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
99. Ф. В. Булкин, К. С. Гочелашвили. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1969, 12, № 6, 875—881.
100. Э. Н. Гельфер, А. С. Гурвич, А. М. Черемухин. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 8, 1208—1211.
101. А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, К. П. Погосян, Вл. В. Покасов. Частотные спектры флуктуаций интенсивности лазерного излучения на волнах 0,63 и 10,6 мкм в атмосфере. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1975, 18, № 4, 610.
102. Ю. А. Храмов. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1975, 18, № 3, 453.

УСРЕДНЯЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕДАЮЩИХ И ПРИЕМНЫХ АПЕРТУР

Для интерпретации экспериментальных результатов представляет значительный интерес зависимость флуктуаций волн, прошедших через турбулентную среду, от размеров источника и приемника. Без знания таких зависимостей невозможно разобраться в разнообразии экспериментальных данных, получаемых, естественно, при самых различных размерах передающих и приемных устройств и соотношениях между ними.

Из опыта хорошо известно, что конечные размеры источника и приемника оказывают сглаживающее, или, как обычно говорят, осредняющее влияние на флуктуации интенсивности волны. Об этом свидетельствуют хотя бы такие давно известные из наблюдательной астрономии факты, как ослабление пульсаций изображений звезд при рассматривании их в большой телескоп и слабость мерцания планет, имеющих значительные угловые размеры по сравнению со звездами.

Настоящая глава посвящена количественному расчету подобных явлений.

§ 1. ВЛИЯНИЕ ПРИЕМНИКА НА ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНАХ

На практике мы всегда имеем дело с приемником конечных размеров, ибо при неограниченном уменьшении его апертуры принимаемая энергия также становится исчезающе малой. В этом параграфе мы исследуем влияние приемника на проходящий через него полный световой поток в том случае, когда флуктуации падающих световых волн статистически однородны и изотропны. Как было показано в гл. II, таким свойством обладают, в частности, флуктуации интенсивности в плоской и сферической волнах.

Пусть на приемный объектив Σ падает волна со случайным распределением интенсивности в плоскости объектива $I(y, z)$.

Тогда полный световой поток есть

$$P = \iint_{\Sigma} I(\rho) d^2\rho \quad (7.1)$$

и для флуктуаций $P' = P - \langle P \rangle$ имеем

$$P' = \iint_{\Sigma} (I - \langle I \rangle) dy dz \equiv \iint_{\Sigma} I'(\rho) d^2\rho.$$

Средний квадрат флуктуаций светового потока через объектив определяется формулой

$$\langle P'^2 \rangle = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} B_I(\rho_1, \rho_2) d^2\rho_1 d^2\rho_2, \quad (7.2)$$

где

$$B_I(\rho_1, \rho_2) = \langle I'(\rho_1) I'(\rho_2) \rangle.$$

Таким образом, задача об осредняющем действии объектива сводится к интегрированию корреляционной функции флуктуаций интенсивности по поверхности объектива. Отсюда, в частности, сразу ясно, что если размер объектива значительно превосходит радиус корреляции флуктуаций интенсивности, то в его пределах будут находиться участки волнового фронта с противоположными знаками флуктуаций, в результате чего полный световой поток будет флуктуировать относительно слабее, чем для маленького по сравнению с радиусом корреляции объектива.

Используем теперь предположение об однородности флуктуаций в плоскости приемника и будем для определенности считать объектив круглым, так что $\Sigma = \pi R^2$. В этом случае, используя «ступенчатую» функцию

$$\theta(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leq R, \\ 0, & |\rho| > R, \end{cases} \quad (7.3)$$

формулу (7.2) можно переписать в виде

$$\langle P'^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} B_I(\rho_1 - \rho_2) \theta(\rho_1) \theta(\rho_2) d^2\rho_1 d^2\rho_2.$$

Введем новые переменные интегрирования $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и ρ_1 и выполним интегрирование по ρ_1 и угловой переменной вектора ρ (использовав еще и свойство изотропности флуктуаций, т. е. зависимость только от $|\rho|$). После несложных вычислений получим

$$\langle P'^2 \rangle = 4\pi R^2 \int_0^{2R} B_I(\rho) \left[\arccos \frac{\rho}{2R} - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho. \quad (7.4)$$

Для относительных флуктуаций полного светового потока $F(R)$ имеем

$$F(R) \equiv \frac{\langle P'^2 \rangle}{\langle P \rangle^2} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} \frac{B_I(\rho)}{\langle I \rangle^2} \left[\arccos \frac{\rho}{2R} - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho. \quad (7.5)$$

Введем функцию $G(R)$, показывающую, во сколько раз величина относительных флуктуаций полного светового потока через объектив радиуса R меньше, чем для точечного объектива:

$$(F(0) = B_I(0)/\langle I \rangle^2),$$

$$G(R) \equiv \frac{F(R)}{F(0)} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} b_I(\rho) \left[\arccos \frac{\rho}{2R} - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho, \quad (7.6)$$

где $b_I(\rho) = B_I(\rho)/B_0(0)$ — коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности в падающей на приемник волне. Формула (7.6) была впервые получена В. И. Татарским [1]. Подставляя конкретные значения $b_I(\rho)$ (например, из эксперимента), можно численным интегрированием рассчитывать функцию $G(R)$.

Для практического использования может оказаться более удобной другая формула для функции влияния размеров приемника $G(R)$. Введем двумерный спектр однородных флуктуаций интенсивности в плоскости объектива:

$$B_I(\rho) = \iint F_I(\kappa) e^{+i\kappa\rho} d^2\kappa. \quad (7.7)$$

Подставим (7.7) в формулу (7.2) и сменим порядок интегрирования:

$$\langle P'^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa F_I(\kappa) \iint_{\Sigma} d^2\rho_1 \iint_{\Sigma} d^2\rho_2 e^{i\kappa(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Для круглого объектива интегрирование по ρ_1, ρ_2 легко выполняется, после чего получается следующая формула:

$$\langle P'^2 \rangle = 4\pi^2 R^2 \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa) \frac{J_1^2(\kappa R)}{\kappa^2} d^2\kappa. \quad (7.8)$$

Для введенной выше функции влияния $G(R)$, как легко видеть, справедлива формула

$$G(R) = \frac{1}{B_I(0)} \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa) \frac{4J_1^2(\kappa R)}{(\kappa R)^2} d^2\kappa, \quad (7.9)$$

или в изотропном случае, когда F_I зависит только от $|\kappa|$, —

$$G(R) = \frac{2\pi}{B_I(0)} \int_0^{\infty} F_I(\kappa) \left[\frac{4J_0^2(\kappa R)}{(\kappa R)^2} \right] \kappa d\kappa. \quad (7.9a)$$

Формулу (7.9) можно переписать в следующем наглядном виде:

$$G(R) = \frac{\sigma_P^2(R)}{\sigma_I^2},$$

где, согласно (7.7),

$$\sigma_I^2 \equiv B_I^2(0) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa) d^2\kappa \quad (7.10)$$

— дисперсия флуктуаций интенсивности в падающей волне, а

$$\sigma_P^2(R) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa) \frac{4J_1^2(\kappa R)}{(\kappa R)^2} d^2\kappa \quad (7.11)$$

— дисперсия флуктуаций светового потока, проходящего через протяженный объект. Сравнивая (7.10) и (7.11), мы видим, что σ_P^2 отличается от σ_I^2 наличием под интегралом функции, фильтрующей пространственные частоты:

$$H^2(\kappa R) = \frac{4J_1^2(\kappa R)}{(\kappa R)^2}. \quad (7.12)$$

Из формулы (7.11) видно, что неоднородности флуктуаций интенсивности с масштабами $l \lesssim R$ подавляются приемным объективом. Однако если радиус приемника R значительно меньше радиуса корреляции флуктуаций в падающей волне $r_0 \sim 1/\kappa_0$ (спектр $F_I(\kappa)$ быстро убывает при $\kappa > \kappa_0$), то осредняющее действие объектива становится несущественным.

Отметим здесь, что использованное выше предположение о круглом объективе не является обязательным. Использование приемника другой формы приведет к изменению вида фильтрующей функции H^2 , которая в общем случае определяется формулой

$$H^2(\kappa, \Sigma) = \frac{1}{\Sigma^2} \iint_{\Sigma} d^2\rho_1 \iint_{\Sigma} d^2\rho_2 \exp\{i\kappa(\rho_1 - \rho_2)\}. \quad (7.13)$$

Например, для часто применяемой на практике кольцевой апертуры (системы кассегреновского типа) функция H^2 имеет следующий вид:

$$H^2(\kappa, R, \gamma) = \frac{4[J_1(\kappa R) - \gamma J_1(\kappa R \gamma)]^2}{R^2 \kappa^2 (1 - \gamma^2)^2}, \quad (7.14)$$

где $\gamma = r/R$ — отношение внутреннего диаметра к внешнему ($0 \leq \gamma < 1$).

Для оценочных расчетов осредняющего действия наиболее употребительной круглой апертуры удобно пользоваться следующей простой аппроксимацией функции (7.12):

$$H_1^2(\kappa R) = \exp\{-\alpha(\kappa R)^2\}.$$

Это значительно упрощает вычисления $G(R)$ для конкретных спектров F_I . Коэффициент α может быть выбран, например, из условия равенства интегралов от H и H_1 :

$$\iint_{-\infty}^{\infty} H^2(\chi) d^2\chi = \iint_{-\infty}^{\infty} H_1^2(\chi) d^2\chi \quad (7.15)$$

или из условия равенства вторых производных в нуле

$$(H^2)''(0) = (H_1^2)''(0), \quad (H^2(0) = H_1^2(0) = 1, \quad (H^2)'(0) = (H_1^2)'(0) = 0). \quad (7.15a)$$

Оба условия (7.15) и (7.15a) дают одно и то же значение коэффициента $\alpha = 1/4$. Это свидетельствует о том, что аппроксимация

$$H_1(\kappa R) = \exp\left\{-\frac{\kappa^2 R^2}{8}\right\} \quad (7.16)$$

для круглой апертуры является достаточно удачной. Отметим еще, что замена точной функции (7.12) на приближенную (7.16) эквивалентна переходу от интегрирования по апертуре с резкими краями к «апертуре» с гауссовской функцией пропускания.

Перейдем теперь к расчету конкретных функций осреднения объектива $G(R)$ для различных приходящих волн. Для этого необходимо знать вид спектра флуктуаций интенсивности $F_I(\kappa)$. Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды U :

$$I = \alpha U^2 \equiv \alpha U_0^2 e^{2\chi}.$$

В приближении МПВ уровень $\chi = \ln \frac{U}{U_0}$, как отмечалось выше, распределен по нормальному закону, так что

$$\langle I \rangle = \alpha U_0^2 \langle e^{2\chi} \rangle = \alpha U_0^2 e^{2\langle \chi^2 \rangle},$$

а

$$B_I = \alpha U_0^4 [e^{4\langle \chi^2 \rangle + 4B_\chi(\rho)} - e^{4\langle \chi^2 \rangle}].$$

В области применимости МПВ $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$ и, следовательно,

$$B_I(\rho) \approx 4\alpha U_0^4 B_\chi(\rho), \quad B(0) = 4\alpha U_0^4 \langle \chi^2 \rangle.$$

Отсюда легко получить, что

$$\frac{F_I(\kappa)}{B_I(0)} = \frac{F_\chi(\kappa)}{\langle \chi^2 \rangle}. \quad (7.17)$$

С использованием (7.17) и (7.12) формулу (7.9a) можно записать в виде

$$G(R) = \frac{2\pi}{\langle \chi^2 \rangle} \int_0^\infty F_\chi(\kappa) H^2(\kappa R) \kappa d\kappa. \quad (7.18)$$

Пусть теперь у нас имеется точечный источник, отстоящий на x_0 от турбулентного слоя толщины L , так что объектив находится

на расстоянии $x = x_0 + L$ от источника. В этом случае, используя (2.76) при $\rho_0 = 0$, можно получить формулу для корреляционной функции флуктуаций амплитуды в сферической волне:

$$B_x(\rho) = \frac{\pi k^2}{4} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x' (x - x')}{kx} \right] \exp \left\{ \frac{ix'}{x} \kappa \rho \right\} d^2 \kappa, \quad (7.19)$$

$$B_x(0) \equiv \langle \chi^2 \rangle = \frac{\pi^2 k^2}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x (x - x')}{kx} \right] \kappa d\kappa. \quad (7.19a)$$

Делая в (7.19) замену $\kappa x'/x = \kappa'$ и сравнивая получающееся выражение с представлением (7.7), можно записать следующую формулу для спектра флуктуаций амплитуды:

$$F_x(\kappa) = \frac{\pi k^2 x^2}{4} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{\Phi_\varepsilon \left(\kappa \frac{x}{x'} \right)}{(x')^2} \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x (x - x')}{kx'} \right] dx'. \quad (7.20)$$

Подставим теперь спектр (7.20) в формулу (7.18). В результате получим интересующую нас функцию $G(R)$ для сферической волны:

$$G(R) = \frac{2\pi^2 k^2 x^2}{\langle \chi^2 \rangle R^2} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx'}{(x')^2} \int_0^\infty \Phi_\varepsilon \left(\frac{\kappa x}{x'} \right) \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x (x - x')}{kx'} \right] J_1^2(\kappa R) \frac{d\kappa}{\kappa}. \quad (7.21)$$

Для колмогоровского спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости ε

$$\Phi_\varepsilon \left(\frac{\kappa x}{x'} \right) = A_0 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \left(\frac{x}{x'} \right)^{-11/3} \quad (A_0 = 0,033).$$

Если источник и приемник находятся в турбулентной среде ($x_0 = 0$), то (7.21) принимает вид

$$G(R) = \frac{8\Gamma \left(\frac{11}{3} \right) \cos \frac{\pi}{12}}{\pi \Gamma \left(\frac{11}{6} \right) \alpha_R^2} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty y^{-\frac{17}{6}} \frac{1 - \cos [y\xi(1-\xi)]}{\xi^2} J_1^2(\alpha_R \xi y^{\frac{1}{2}}) dy. \quad (7.22)$$

Здесь

$$\alpha_R = \frac{k^{1/2} R}{L^{1/2}} \quad (7.23)$$

— параметр, равный отношению размера приемного объектива R к характерному масштабу корреляции флуктуации интенсивности в сферической волне $(L/k)^{1/2}$, который имеет порядок радиуса первой зоны Френеля.

Результаты численного расчета функции $G(R)$ по формуле (7.22), выполненные в [2], представлены на рис. 7.1.

Из формулы (7.21) предельным переходом $x_0 \rightarrow \infty$ может быть также получена функция осредняющего действия конечной апертуры $G(R)$ в случае плоской волны, прошедшей путь L в турбулентной среде. Для колмогоровского спектра $\Phi_\varepsilon(\kappa)$:

$$G(R) = \frac{24 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}}{17 \alpha_R^2} \left[1 + \operatorname{Im} \frac{i^{-5/6}}{\cos(\pi/12)} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{17}{6}; 2; -i \alpha_R^2\right) \right] - \frac{{}^{144}\Gamma(7/3)\Gamma(11/6)}{17 \sin(\pi/12) \Gamma^2(17/6) \sqrt{\pi}} \alpha_R^{5/2}, \quad (7.24)$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. На рис. 7.2 представлен график функции $G(R)$. Как и следовало ожидать, функция, описывающая осредняющее действие приемника, зависит только от отношения размера объектива к радиусу корреляции флуктуаций интенсивности, который в области слабых флуктуаций для плоской волны имеет порядок радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$.

Если же использовать вместо функции $H^2(\kappa R)$ ее аппроксимацию (7.16), то усредняющее действие объектива на флуктуации в плоской волне выражается более простой формулой

$$G(R) = \left(1 + \frac{\alpha_R^4}{16}\right)^{11/12} \frac{\sin\left(\frac{11}{6} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_R^2}\right)}{\sin(\pi/12)} - \frac{11}{6 \sin(\pi/12)} \left(\frac{\alpha_R^2}{4}\right)^{1/6}. \quad (7.25)$$

Численный расчет по формуле (7.25) приводит к результатам, практически совпадающим с расчетом по формуле (7.24). Отклонение соответствующих кривых друг от друга во всяком случае гораздо меньше обычно имеющегося разброса при экспериментальном измерении зависимостей $G(R)$. Это лишний раз указывает на удачность принятой аппроксимации (7.16).

Результаты расчетов усредняющего действия кольцевой апертуры с фильтрующей функцией (7.14) можно найти в работе [3]. Здесь для функции $G(\alpha_R, \gamma)$ получено выражение

$$G(\alpha_R, \gamma) = \frac{11 \alpha_R^{5/2}}{6 \Gamma(1/6) \sin \frac{\pi}{12} (1 - \gamma^2)^2} \times \int_0^\infty y^{-1/6} \left[1 - \frac{\sin y^2 / \alpha_R^2}{y^2 / \alpha_R^2} \right] [J_1(y) - \gamma J_1(\gamma y)]^2 dy. \quad (7.26)$$

Результаты численных расчетов по этой формуле представлены на рис. 7.3 и 7.4. Из них видно, что зависимость усредняющего действия от размеров внутреннего затененного круга оказывается весьма слабой.

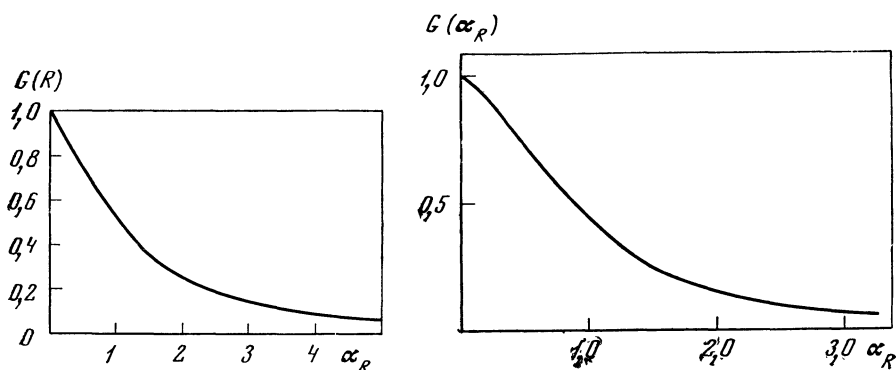


Рис. 7.1. Усредняющее действие объектива на флуктуации в сферической волне

Рис. 7.2. Усреднение флуктуаций интенсивности плоской волны протяженным объективом

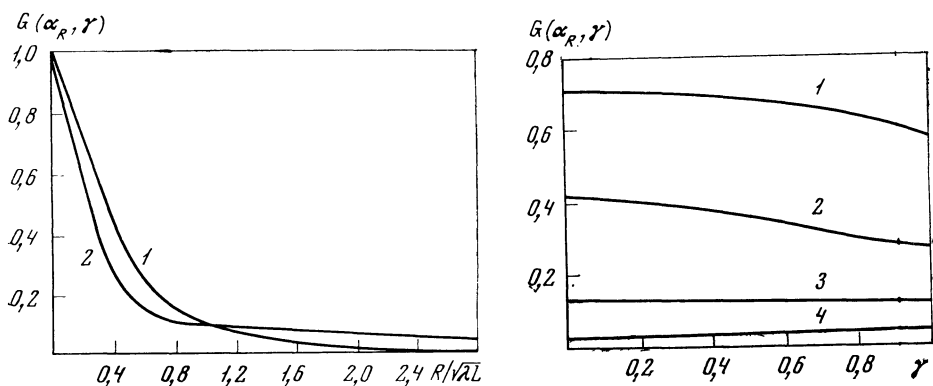


Рис. 7.3. Зависимость функции усреднения от нормированного размера объектива $R/\sqrt{\lambda L} = \alpha_R/\sqrt{2\pi}$ при различных значениях параметра γ
 1 — $\gamma = 0$; 2 — $\gamma = 0,99$

Рис. 7.4. Зависимость функции усреднения от нормированного диаметра затененного круга $\gamma = r/R$
 1 — $\alpha_R = 0,5$; 2 — $\alpha_R = 1$; 3 — $\alpha_R = 2$; 4 — $\alpha_R = 5$

§ 2. ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛНОГО СВЕТОВОГО ПОТОКА

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет протяженный приемник на частотный спектр флуктуаций.

Введем временную корреляционную функцию флуктуаций полного светового потока, которые мы будем считать стационарными, —

$$R_P(\tau) = \langle P'(t) P'(t + \tau) \rangle.$$

Частотный спектр $W_P(f)$ связан с автокорреляционной функцией $R_P(\tau)$ соотношением

$$W_P(f) = 4 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R_P(\tau) d\tau \quad (7.27)$$

(для удобства сравнения расчетов с экспериментом мы пользуемся разложением по положительным частотам $f = \omega/2\pi$). Рассчитаем $R_P(\tau)$ для протяженной апертуры. Используя «гипотезу заморозенности», получаем

$$P'(t) = \iint_{\Sigma} I'(\rho) d^2\rho, \quad (7.28)$$

$$P'(t + \tau) = \iint_{\Sigma} I'(\rho - \mathbf{v}_{\perp}\tau) d^2\rho, \quad (7.29)$$

где \mathbf{v}_{\perp} — перпендикулярная к направлению распространения волны скорость ветра (скорость «сноса» неоднородностей). Перемножая (7.28) и (7.29) и усредняя, получаем

$$R_P(\tau) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} d^2\rho_1 d^2\rho_2 B_I(\rho_1, \rho_2 - \mathbf{v}_{\perp}\tau). \quad (7.30)$$

Воспользуемся теперь, как и ранее, однородностью флуктуаций интенсивности. После несложных выкладок найдем

$$R_P(\tau) = \Sigma^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa e^{i\kappa\mathbf{v}_{\perp}\tau} H^2(\kappa R) F_I(\kappa),$$

где $F_I(\kappa)$ — двумерный спектр флуктуаций интенсивности, а функция $H^2(\kappa, R)$ определяется формулой (7.12). Если флуктуации изотропны, то F_I зависит только от $|\kappa|$, и

$$R_P(\tau) = 2\pi\Sigma^2 \int_0^{\infty} H^2(\kappa R) F_I(\kappa) J_0(\kappa v_{\perp}\tau) \kappa d\kappa. \quad (7.31)$$

Подставим теперь (7.31) в (7.27) и сменим порядок интегрирования по τ и κ :

$$W_P(f) = 8\pi\Sigma^2 \int_0^{\infty} H^2(\kappa R) F_I(\kappa) d\kappa \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) J_0(\kappa v_{\perp}\tau) d\tau. \quad (7.32)$$

Внутренний интеграл в (7.32) равен

$$\int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) J_0(\kappa v_{\perp}\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} & \text{при } \kappa^2 v_{\perp}^2 > 4\pi^2 f^2, \\ 0 & \text{при } \kappa^2 v_{\perp}^2 < 4\pi^2 f^2, \end{cases}$$

и для частотного спектра $W_P(f)$ получаем

$$\begin{aligned}
 W_P(f) &= 8\pi\Sigma^2 \int_{2\pi f/v_{\perp}}^{\infty} F_I(\kappa) H^2(\kappa R) \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} = \\
 &= \frac{8\pi\Sigma^2}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} F_I\left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}\right) H^2\left(R\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}\right) d\kappa.
 \end{aligned}
 \tag{7.33}$$

Частотный спектр относительных флуктуаций полного светового потока может быть получен делением (7.33) на $(\langle P \rangle)^2 = \Sigma^2 \langle I \rangle^2$:

$$W_{P\langle P \rangle} = \frac{8\pi}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{F_I\left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}\right)}{\langle I \rangle^2} H^2\left(R\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}\right) d\kappa.
 \tag{7.34}$$

Это выражение отличается от спектра флуктуаций интенсивности в точке наличием под интегралом функции H , которая при $R = 0$ обращается в единицу.

Выразим входящий в (7.34) спектр интенсивности через спектр флуктуаций уровня χ . Очевидно, что

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{\langle I \rangle + I'}{I_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{\langle I \rangle}{I_0} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{I'}{\langle I \rangle} + 1 \right),$$

и если флуктуации интенсивности слабы так, что $\langle I \rangle \approx I_0$ и $I' \ll \langle I \rangle$ (это эквивалентно условию $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$), то $\chi \approx \frac{1}{2\langle I \rangle} I'$, и, следовательно,

$$\frac{F_I}{\langle I \rangle} = 4F_{\chi}.
 \tag{7.35}$$

В случае падения на протяженный объектив плоской волны, прошедшей путь L в турбулентной среде,

$$F_{\chi}(\kappa, L) = \frac{i\pi k^2 L}{4} \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_{\epsilon}(\kappa)
 \tag{7.36}$$

(это следует, например, из (7.20) при $x_0 \rightarrow \infty$). Используя (7.34) — (7.36), а также (7.12), получаем для спектра относительных флуктуаций полного светового потока через круглый объектив площадью $\Sigma = \pi R^2$ следующую формулу:

$$\begin{aligned}
 W_{P\langle P \rangle}(f) &= 0,67 \frac{\sigma_I^2}{f_0} \int_0^{\infty} \left[\frac{2J_1(\alpha_R \sqrt{z + \Omega^2})}{\alpha_R \sqrt{z + \Omega^2}} \right]^2 \times \\
 &\times \left[1 - \frac{\sin(z + \Omega^2)}{z + \Omega^2} \right] (z + \Omega^2)^{-11/6} z^{-1/2} dz,
 \end{aligned}
 \tag{7.37}$$

где $\sigma_I^2 = 4\langle\chi^2\rangle$, $\alpha_R = k^{1/2}R/L^{1/2}$ и, аналогично [1], введены обозначения

$$f_0^2 = \frac{kv_{\perp}^2}{4\pi^2L}, \quad \Omega = \frac{f}{f_0}. \quad (7.38)$$

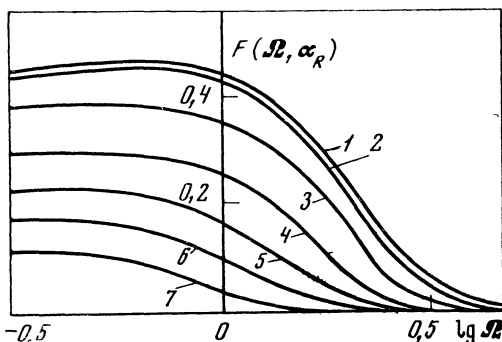
На рис. 7.5 приведен безразмерный спектр

$$F_P(\Omega, \alpha_R) = f_0 W_{P\langle P\rangle} / \sigma_I^2,$$

рассчитанный по формуле (7.37). Таким образом, спектр F_P оказывается функцией отношения частоты f к характерной частоте

Рис. 7.5. Зависимость частотного спектра флуктуаций светового потока через объектив от диаметра объектива

- 1 — $\alpha_R = 0$;
- 2 — $\alpha_R = 0,2$;
- 3 — $\alpha_R = 0,6$;
- 4 — $\alpha_R = 1$;
- 5 — $\alpha_R = 1,4$;
- 6 — $\alpha_R = 1,8$;
- 7 — $\alpha_R = 2,5$



флуктуаций интенсивности $f_0 \sim v_{\perp} / \sqrt{\lambda L}$ и параметра α_R , связанного с размером объектива,

$$\alpha_R \sim R / \sqrt{\lambda L}.$$

В области высоких частот усредняющее действие объектива ослабляет действие неоднородностей всех масштабов; так, для $f \gg \gg v_{\perp} / 2\pi R$ функция H мала при всех значениях κ . Для низких частот $f \ll v_{\perp} / 2\pi R$ влияние функции H существенно лишь при $\kappa \gg 1/R$, поскольку при $\kappa \ll 1/R$ $H \approx 1$. Это означает, что вклад в низкочастотную часть спектра от крупномасштабных неоднородностей флуктуаций интенсивности ($l \gtrsim R$) практически не ослабляется, а масштабы, малые по сравнению с R , подавляются апертурой.

В заключение этого параграфа отметим, что, используя описанную выше методику, не представляет труда получить спектры относительных флуктуаций полного светового потока для кольцевой апертуры (7.14), а также для случая падения на протяженный объектив сферической волны.

§ 3. МЕРЦАНИЕ НЕКОГЕРЕНТНЫХ ИСТОЧНИКОВ КОНЕЧНЫХ УГЛОВЫХ РАЗМЕРОВ

Рассмотрим теперь прием объективом радиуса R излучения протяженного теплового источника. Пусть источник представляет собой круглый диск радиуса S , лежащий на расстоянии x от прием-

ника в плоскости, параллельной плоскости объектива. Будем считать, кроме того, что турбулентный слой толщины L примыкает к приемнику и находится на расстоянии x_0 от источника, так что $x = x_0 + L$.

На любую точку объектива падает некогерентный пучок сферических волн от различных точек источника, и интенсивности этих волн складываются. Обозначим через $I(\rho)$ суммарную интенсивность в точке объектива ρ

$$I(\rho) = \iint_{\sigma} i(\rho, \mathbf{s}) d^2s, \quad (7.39)$$

где $i(\rho, \mathbf{s})$ — интенсивность света, приходящего в точку ρ из точки \mathbf{s} , и интегрирование производится на поверхности σ диска источника (площадью $\sigma = \pi s^2$). Полный световой поток через объектив есть

$$P = \iint_{\Sigma} d^2\rho \iint_{\sigma} d^2s i(\rho, \mathbf{s}).$$

Для флуктуаций $P' = P - \langle P \rangle$ имеем

$$P' = \iint_{\Sigma} d^2\rho \iint_{\sigma} d^2s i'(\rho, \mathbf{s}), \quad (7.40)$$

и средний квадрат флуктуаций, следовательно, равен

$$\langle P'^2 \rangle = \iint_{\Sigma} d^2\rho_1 \iint_{\Sigma} d^2\rho_2 \iint_{\sigma} d^2s_1 \iint_{\sigma} d^2s_2 B_i(\rho_1, \rho_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), \quad (7.41)$$

где $B_i(\rho_1, \rho_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \equiv \langle i'(\rho_1, \mathbf{s}_1) i'(\rho_2, \mathbf{s}_2) \rangle$.

Формула для относительных флуктуаций получается делением (7.41) на $(\bar{P})^2 \equiv \Sigma^2 \sigma^2 \langle i \rangle^2$:

$$F(R, S) = \frac{1}{\Sigma^2 \sigma^2 \langle i \rangle^2} \langle (P')^2 \rangle. \quad (7.42)$$

Как и в § 1, введем функцию

$$G(R, S) = \frac{F(R, S)}{F(0, 0)}, \quad (7.43)$$

показывающую, во сколько раз относительные флуктуации полного светового потока от источника радиуса S через объектив радиуса R меньше, чем в случае точечного источника и приемника. С учетом того, что $F(0, 0) = B_i(0)/\langle i \rangle^2$, функция G равна

$$G(R, S) = \frac{1}{(\Sigma\sigma)^2} \iint_{\Sigma} d^2\rho_1 \iint_{\Sigma} d^2\rho_2 \iint_{\sigma} d^2s_1 \iint_{\sigma} d^2s_2 b_i(\rho_1, \rho_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \\ (b_i(\rho_1, \rho_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = B_i(\rho_1, \rho_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)/B_i(0)). \quad (7.44)$$

В области слабых флуктуаций $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$

$$b_i \approx b_{\chi}$$

и можно подставлять в (7.44) вместо b_i коэффициент корреляции уровня b_x . Воспользовавшись формулой (2.75), получим для b_x выражение

$$b_x = \frac{\pi k^2}{4\sigma_{\text{эф}}^2} \int_{x_0}^{x=x_0+L} dx' \iint d^2\kappa \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x' (x - x')}{kx} \right] \Phi_\epsilon(\kappa) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{x'}{x} \kappa \left[(\rho_1 - \rho_2) + \frac{x - x'}{x'} (s_1 - s_2) \right] \right\}, \quad (7.45)$$

где средний квадрат флуктуаций уровня в сферической волне

$$\sigma_{\text{эф}}^2 = \frac{\pi^2 k^2}{2} \int_{x_0}^x dx' \int_0^\infty \Phi_\epsilon(\kappa) \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x' (x - x')}{kx} \right] \kappa d\kappa. \quad (7.46)$$

Подставим (7.45) в (7.44) и аналогично тому, как это было сделано при выводе (7.9), выполним сначала интегрирование по $\rho_{1,2}$ и $s_{1,2}$. Учитывая, что

$$\iint_{\Sigma} e^{i\kappa \rho} d^2\rho = \Sigma H(\kappa R), \quad \iint_{\sigma} e^{i\kappa s} d^2s = \sigma H(\kappa S) \quad (7.47)$$

(функция $H(x)$ определяется формулой (7.12) и равна $H(x) = 2J_1(x)/x$), после интегрирования по угловой переменной вектора κ получаем

$$G(R, S) = \frac{\pi^2 k^2}{2\sigma_{\text{эф}}^2} \int_{x_0}^x dx' \int_0^\infty \Phi_\epsilon(\kappa) \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x' (x - x')}{kx} \right] \times \\ \times H^2\left(\kappa R \frac{x'}{x}\right) H^2\left(\kappa S \frac{x - x'}{x}\right) \kappa d\kappa. \quad (7.48)$$

Для турбулентного спектра $\Phi_\epsilon(\kappa)$ формулу (7.48) можно переписать в более удобном виде:

$$G(\alpha_R, \alpha_S) = \frac{1}{C(x_0/L)} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty y^{-11/6} \left[1 - \cos y(1 - \xi) \frac{\xi + x_0/L}{1 + x_0/L} \right] \times \\ \times H^2\left(\alpha_R \sqrt{y} \frac{\xi + x_0/L}{1 + x_0/L}\right) H^2\left(\alpha_S \sqrt{y} (1 - \xi)\right) dy, \quad (7.49)$$

где параметр α_R задается формулой (7.23), а

$$\alpha_S = k^{1/2} L^{1/2} \gamma_S \quad (7.50)$$

есть отношение углового размера источника $\gamma_S = S/x$ к «углу корреляции» $\psi_0 = 1/k^{1/2} L^{1/2} \sim \sqrt{\lambda/L}$, а функция

$$C(x_0/L) = \int_0^1 d\xi \int_0^\infty y^{-11/6} \left[1 - \cos y(1 - \xi) \frac{\xi + x_0/L}{1 + x_0/L} \right] dy \quad (7.51)$$

не зависит от размеров источника и приемника.

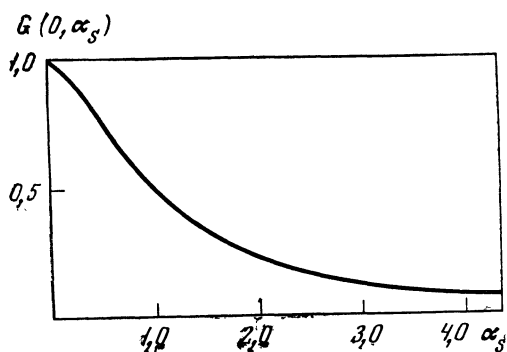


Рис. 7.6. Зависимость мерцания удаленного протяженного источника от его угловых размеров

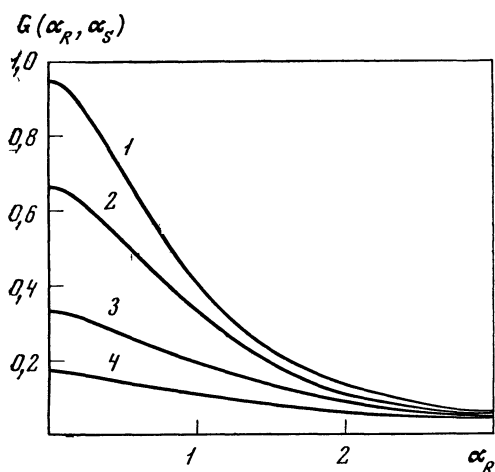


Рис. 7.7. Функции усредняющего действия конечных размеров источника и приемника
 1 — $\alpha_S = 0,2$;
 2 — $\alpha_S = 1$;
 3 — $\alpha_S = 2$;
 4 — $\alpha_S = 3$

Функция $G(\alpha_R, \alpha_S)$, характеризующая ослабление флуктуаций из-за конечных размеров источника и приемника, естественно, равна единице при $\alpha_R = \alpha_S = 0$ и убывает с ростом этих параметров. При $\alpha_S = 0$ G переходит в приведенную выше функцию (7.21), а при $\alpha_R = 0$ она дает функцию влияния $G(0, \alpha_S)$ конечных размеров источника при точечном приемнике. Интересно отметить, что функция влияния G не является мультипликативной, т. е.

$$G(\alpha_R, \alpha_S) \neq G(0, \alpha_S) G(\alpha_R, 0). \quad (7.52)$$

Это означает, что переход к точечным размерам источника и приемника нельзя производить последовательно.

Если источник и приемник находятся в турбулентной среде, то в (7.49) и (7.51) надо положить $x_0 = 0$. Для астрономических приложений интересен другой случай, когда источник находится далеко за границей преломляющего турбулентного слоя ($x_0 \rightarrow \infty$).

Тогда, как легко видеть,

$$G(\alpha_R, \alpha_S) = \frac{11 \cos(\pi/12) \Gamma(11/6)}{3\pi} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty y^{-11/6} [1 - \cos \xi y] \times \\ \times H^2(\alpha_R \sqrt{y}) H^2(\alpha_S \sqrt{y\xi}) dy. \quad (7.53)$$

Формула (7.53) описывает ослабление флуктуаций светового потока от источников типа планет. В работе [4] была рассчитана функция $G(0, \alpha_S)$ для этого случая. График $G(0, \alpha_S)$ приведен на рис. 7.6. Поставленный авторами [5] эксперимент обнаружил хорошее согласие с этим графиком.

Расчет семейства кривых $G(\alpha_R, \alpha_S)$ был предпринят в [6]. На рис. 7.7 представлены результаты этого расчета.

Для оценок можно в формулах (7.49) и (7.53) использовать вместо функции $H(x)$ ее аппроксимацию (7.16). Формула (7.53) в этом случае принимает вид

$$G(\alpha_R, \alpha_S) = \frac{22 \cos(\pi/12)}{3} \int_0^1 \left\{ - \left(\frac{\alpha_R^2}{4} + \frac{\alpha_S^2}{4} \xi^2 \right)^{5/6} + \right. \\ \left. + \left[\xi^2 + \left(\frac{\alpha_S^2}{4} \xi^2 + \frac{\alpha_R^2}{4} \right) \right]^{5/12} \cos \left[\frac{5}{6} \arctg \left(\frac{\xi}{\frac{\alpha_S^2}{4} \xi^2 + \frac{\alpha_R^2}{4}} \right) \right] \right\} d\xi. \quad (7.54)$$

Это выражение удобнее использовать для численных расчетов, так как под интегралом не содержится быстро осциллирующих функций.

§ 4. УСРЕДНЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОМ ПУЧКЕ ПРОТЯЖЕННЫМ ОБЪЕКТИВОМ

Учет усредняющего действия объектива на флуктуации интенсивности лазерного пучка представляет собой более сложную задачу, чем учет усреднения для плоских и сферических волн. Это связано с тем, что флуктуации в ограниченном (например, гауссовском) пучке, вообще говоря, неоднородны. Из качественных соображений ясно, что при достаточно больших расстояниях, проходимых пучком в турбулентной среде, влияние начального распределения интенсивности становится малозначительным, если только излучение регистрируется достаточно малым приемником, удаленным от краев сильно размытого пучка. Тогда флуктуации можно считать однородными и рассчитывать влияние размеров объектива по формулам (7.6) или (7.9а), используя, например, экспериментально измеренные зависимости $b_I(\rho)$ или $F_I(x)$. Недостатком этого способа вычисления функций влияния приемника является ограниченность их применения из-за обыч-

но имеющего место большого разброса экспериментальных точек и из-за привязанности полученных таким образом функций G к конкретной геометрии и условиям эксперимента.

Получение универсальных зависимостей $G(R)$ требует знания аналитического выражения для $b_I(\rho)$, справедливого как в области слабых, так и сильных флуктуаций. Однако такая формула в настоящий момент неизвестна. Поэтому исследуем усредняющее действие приемника только в области слабых флуктуаций.

Пусть на круглый объектив площадью $\Sigma = \pi R^2$ падает прошедший в турбулентной среде путь x световой пучок с гауссовским исходным распределением поля:

$$u = u_0 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2a^2} \right\}.$$

Световой поток P через объектив равен

$$P = \iint_{\Sigma} I(\rho) d^2\rho,$$

где $I(\rho)$ — распределение интенсивности пучка в плоскости приемного объектива. Флуктуации светового потока равны

$$P' = \iint_{\Sigma} (I(\rho) - \langle I \rangle) d^2\rho = \iint_{\Sigma} I'(\rho) d^2\rho. \quad (7.55)$$

Используем теперь равенство

$$I(x, \rho) = I_0(x, \rho) e^{2\chi(x, \rho)}$$

и будем считать флуктуации интенсивности малыми ($\langle \chi^2 \rangle \ll 1$). Тогда $I(x, \rho) \approx I_0(x, \rho)$, и, разлагая экспоненту в ряд, имеем для P' и $\langle P \rangle$:

$$P' = 2 \iint_{\Sigma} I_0(x, \rho) \chi(x, \rho) d^2\rho, \quad (7.56)$$

$$\langle P \rangle = \iint_{\Sigma} I_0(x, \rho) d^2\rho, \quad (7.57)$$

где $I_0(x, \rho)$ — распределение интенсивности в плоскости x в отсутствие флуктуаций. Введем для $I_0(x, \rho)$ и $\chi(x, \rho)$ фурье-представления g_0 и g_{χ} и подставим их в (7.56). После смены порядка интегрирования для флуктуаций светового потока через объектив получим

$$P' = 2 \iint d^2\kappa \iint d^2\kappa' g_0(\kappa') g_{\chi}(\kappa) \iint_{\Sigma} \exp \{ i(\kappa + \kappa') \rho \} d^2\rho. \quad (7.58)$$

Внутренний интеграл в (7.58) равен (см. формулу (7.13))

$$\iint_{\Sigma} \exp \{ i(\kappa + \kappa') \rho \} d^2\rho = \pi R^2 H(|\kappa + \kappa'| R),$$

где функция H для круглого объектива дается выражением (7.12). Дальнейшие вычисления с точной функцией H такого вида затруднительны, и мы будем использовать аппроксимацию (7.16):

$$H_1(\kappa R) = \exp(-\kappa^2 R^2/8).$$

Подставляя в (7.58)

$$g_0(\kappa') = \frac{u_0^2 a^2}{4\pi} \exp\left\{-\frac{(\kappa')^2 a^2 (1 + x^2/k^2 a^4)}{4}\right\} \quad (7.59)$$

и вычисляя интеграл по κ' , приходим к следующему выражению для P' :

$$P' = \frac{2\pi u_0^2 k R^2 a^2}{x(\Omega + \Omega^{-1}) \left(1 + \frac{kR^2}{2x(\Omega + \Omega^{-1})}\right)} \iint d^2\kappa g_\kappa(\kappa) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\kappa^2 R^2}{8 \left[1 + \frac{kR^2}{2x(\Omega + \Omega^{-1})}\right]}\right\}, \quad (7.60)$$

$$\Omega = ka^2/x. \quad (7.61)$$

Для среднего квадрата относительных флуктуаций полного светового потока $P'/\langle P \rangle$ получаем

$$F(R) = \frac{\langle (P')^2 \rangle}{\langle P \rangle^2} = 4 \iint d^2\kappa_1 \iint d^2\kappa_2 \langle g_\kappa(\kappa_1) g_\kappa(\kappa_2) \rangle K(\kappa_1, \kappa_2), \quad (7.62)$$

где введена функция

$$K(\kappa_1, \kappa_2) = \exp\left\{-\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) R^2}{8 [1 + a_R^2/2(\Omega + \Omega^{-1})]}\right\} (\alpha_R = k^{1/2} R/x^{1/2}), \quad (7.63)$$

являющаяся аналогом функции $H^2(\kappa R)$ для ограниченного пучка. Чтобы вычислить

$$F_I(\kappa_1, \kappa_2) = 4 \langle g_\kappa(\kappa_1) g_\kappa(\kappa_2) \rangle,$$

воспользуемся приведенным в главе I выражением (2.84а) для флуктуаций комплексной фазы $\Psi_1 = \chi + iS_1$ гауссовского пучка и выпишем формулу для фурье-образа комплексной фазы:

$$g_\psi(x, \kappa) = \frac{ik}{2} \int_0^x \frac{f^2(x)}{f^2(x')} \exp\left\{\frac{f(x)}{f(x')} \frac{\kappa^2(x-x')}{2ik}\right\} g_\varepsilon\left(x', \frac{f(x)}{f(x')} \kappa\right) dx', \quad (7.64)$$

где $f(x) = 1 + ix/ka^2$. Используя связь g_χ с g_ψ

$$g_\chi = \frac{1}{2}(g_\psi + g_\psi^*),$$

подставим g_x в (7.62). Учитывая (2.51) и (2.51a), после несложных, но довольно громоздких выкладок получим

$$\begin{aligned}
 F(R) = & 2\pi^2 k^2 x \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \Phi_\epsilon(\kappa) \times \\
 & \times \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 x}{k} \frac{(1-\xi)(\xi + \Omega^2)}{\left(1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})}\right)(1 + \Omega^2)} \right] \times \\
 & \times \exp \left\{ - \frac{\kappa^2 R^2 (\xi + \Omega^2)^2}{4 \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})} \right] (1 + \Omega^2)^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\kappa^2 x (1-\xi)^2 \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{4(\Omega + \Omega^{-1})} \right]}{k (\Omega + \Omega^{-1}) \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})} \right]} \right\} \kappa d\kappa. \quad (7.65)
 \end{aligned}$$

Для турбулентного спектра $\Phi_\epsilon(\kappa)$ функция $F(R)$ равна

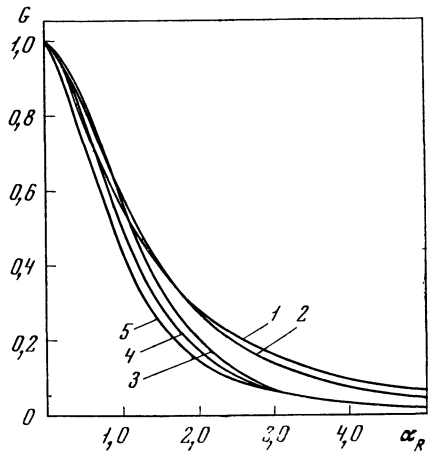
$$\begin{aligned}
 F(R) = & 2\pi^2 A_0 C_\epsilon^2 k^7 t^3 x^{11/6} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \left[1 - \cos \frac{t^2 (1-\xi)(\xi + \Omega^2)}{\left(1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})}\right)(1 + \Omega^2)} \right] \times \\
 & \times \exp \left\{ - \frac{t^2 \alpha_R^2 (\xi + \Omega^2)^2}{4 \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})} \right] (1 + \Omega^2)^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{t^2 (1-\xi)^2 \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{4(\Omega + \Omega^{-1})} \right]}{(\Omega + \Omega^{-1}) \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})} \right]} \right\} t^{-9/6} dt. \quad (7.66)
 \end{aligned}$$

Отсюда находим функцию влияния $G(R) = F(R)/F(0)$:

$$\begin{aligned}
 G(R) = & \frac{1}{\rho(\Omega)} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{t^2 \alpha_R^2 (\xi + \Omega^2)^2}{4 \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})} \right] (1 + \Omega^2)^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{t^2 (1-\xi)^2 \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{4(\Omega + \Omega^{-1})} \right]}{(\Omega + \Omega^{-1}) \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{2(\Omega + \Omega^{-1})} \right]} \right\} \times \\
 & \times \left[1 - \cos \frac{t^2 (1-\xi)(\xi + \Omega^2)}{[1 + \alpha_R^2/2(\Omega + \Omega^{-1})](1 + \Omega^2)} \right] t^{-9/6} dt, \quad (7.67)
 \end{aligned}$$

Рис. 7.8. Усреднение флуктуаций пространственно-ограниченного пучка протяженным объективом

- 1 — $\Omega = 10^{-3}$;
- 2 — $\Omega = 0,1$;
- 3 — $\Omega = 1$;
- 4 — $\Omega = 10$;
- 5 — $\Omega = 10^3$



где зависящая только от параметра Ω функция ρ дается формулой

$$\rho(\Omega) = \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t^2(1-\xi)^2}{\Omega + \Omega^{-1}}\right\} \left[1 - \cos \frac{t^2(1-\xi)(\xi + \Omega^2)}{1 + \Omega^2}\right] t^{-\Omega} dt. \quad (7.68)$$

Легко видеть, что при $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow \infty$ из (7.67) получаются формулы для плоской и сферической волн соответственно.

Результаты проведенного С. И. Тузовой численного счета по формуле (7.67) функций $G(R)$ при различных значениях параметра Ω представлены на рис. 7.8. Как видно из приведенных графиков, влияние пространственной ограниченности пучка на функцию $G(R)$ незначительно, и она слабо отличается от случаев сферической и плоской волн.

Отметим в заключение, что приведенные в § 1—4 расчеты относились к случаю слабых флуктуаций интенсивности и, следовательно, применимы к распространению волн на достаточно коротких приземных либо на наклонных трассах. Чтобы учесть влияние объектива на волны с сильными флуктуациями интенсивности, необходимо знание соответствующих корреляционных функций. Однако для качественных оценок можно в приведенных выше зависимостях $G(\alpha_R)$ заменять параметр α_R на R/ρ_k , где ρ_k — радиус корреляции флуктуаций интенсивности, величина которого в различных условиях подробно обсуждалась в главе VI.

§ 5. ДРОЖАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ОБЪЕКТИВА

До сих пор мы изучали влияние конечных размеров приемника на флуктуации светового потока через него. Это явление полностью определяется флуктуациями интенсивности в падающей

волне. Данный параграф посвящен исследованию флуктуаций положения центра тяжести изображения в фокальной плоскости объектива. Этот эффект определяется уже в первую очередь фазовыми флуктуациями. В самом деле, в первом приближении протяженный приемник можно заменить интерферометром с базой $2R$. Если на него падает прошедшая турбулентную среду волна со средним положением фазового фронта, параллельным базе, то случайный поворот фронта волны на угол α приводит к разности фаз в щелях интерферометра $\Delta S = k(2R)\sin\alpha \approx \approx 2kR\alpha$. Отсюда флуктуационное изменение углового положения изображения равно

$$\alpha = \frac{\Delta S(2R)}{2kR}. \quad (7.69)$$

Средний квадрат флуктуаций α равен

$$\sigma_\alpha^2 = \langle \alpha^2 \rangle = \frac{\langle \Delta S^2 \rangle}{4k^2 R^2} = \frac{D_S(2R)}{4k^2 R^2}, \quad (7.70)$$

а средний квадрат линейного смещения в фокальной плоскости с учетом того, что $D_S(\rho) = 0,73 C_\epsilon^2 k^2 L \rho^{5/3}$, есть

$$\sigma_\rho^2 = \sigma_\alpha^2 F^2 = 0,73 C_\epsilon^2 L F^2 (2R)^{-1/3}. \quad (7.71)$$

Это соотношение может использоваться для оценки эффекта дрожания в фокальной плоскости приемного объектива изображения объекта, находящегося в турбулентной среде. Однако оно является приближенным, потому что учитывает только масштабы флуктуаций фазы порядка размера приемного объектива и игнорирует влияние меньших масштабов. Для получения математически более строгого результата исследуем этот вопрос подробнее.

Будем определять положение изображения в фокальной плоскости вектором положения его центра тяжести:

$$\rho_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_F(\rho) \rho \, d^2\rho}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_F(\rho) \, d^2\rho}, \quad (7.72)$$

где $I_F(\rho)$ — распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы $x = F$. Найдем это распределение в том случае, когда на объектив падает прошедшая турбулентный слой волна

$$u(\rho_0) = u_0 e^{\Psi(\rho_0)} = u_0 e^{X+iS}. \quad (7.73)$$

Если среду за объективом можно считать однородной, то поле здесь определяется из волнового уравнения

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0. \quad (7.74)$$

К нему необходимо добавить граничное условие при $x = 0$

$$\varphi_0(\rho_0) = u_0 \exp \left\{ \chi(\rho_0) + iS(\rho_0) - \frac{ik\rho_0^2}{2f} \right\}, \quad (7.75)$$

учитывающее вносимый линзой фазовый сдвиг, и условие излучения на бесконечности. Эта задача, как известно, имеет следующее решение:

$$\varphi(x, \rho) = \iint_{\Sigma} \varphi_0(\rho_0) G(x, \rho - \rho_0) d^2\rho_0, \quad (7.76)$$

где

$$G(x, \rho - \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{ik\sqrt{x^2 + (\rho - \rho_0)^2}}}{\sqrt{x^2 + (\rho - \rho_0)^2}} \right) \quad (7.77)$$

(интегрирование в бесконечных пределах заменено на интегрирование по поверхности линзы Σ , где поле отлично от нуля). В приближении френелевской дифракции из (7.76) для поля φ в точке (F, ρ) получаем формулу, аналогичную (2.34):

$$\varphi(F, \rho) = \frac{ke^{ikF}}{2\pi iF} \iint_{\Sigma} \varphi_0(\rho_0) \exp \left\{ \frac{ik(\rho_0 - \rho)^2}{2F} \right\} d^2\rho_0. \quad (7.78)$$

Отсюда для интенсивности $I = \varphi\varphi^*$ находим

$$I_F(\rho) = \frac{k^2}{4\pi^2 F^2} \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \varphi(\rho_0) \varphi^*(\rho'_0) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik(\rho - \rho_0)^2}{2F} - \frac{ik(\rho - \rho'_0)^2}{2F} \right\} d^2\rho_0 d^2\rho'_0. \quad (7.79)$$

Подставим граничное условие (7.75) в выражение (7.79):

$$I_F(\rho) = \frac{k^2}{4\pi^2 F^2} \iint_{\Sigma} d^2\rho_0 \iint_{\Sigma} d^2\rho'_0 u(\rho_0) u^*(\rho'_0) \exp \left\{ -\frac{ik\rho(\rho_0 - \rho'_0)}{F} \right\}, \quad (7.80)$$

где $u(\rho_0)$ — поле волны, падающей на приемник [см. формулу (7.73)].

Найдем теперь случайное положение центра тяжести распределения интенсивности в фокальной плоскости, для чего подставим (7.80) в (7.72). Интеграл в знаменателе легко вычисляется с использованием известного в теории обобщенных функций соотношения

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{ik\rho(\rho_0 - \rho'_0)}{F} \right\} d^2\rho = 4\pi^2 \delta \left[\frac{k}{F} (\rho_0 - \rho'_0) \right] = \\ = \frac{4\pi^2 F^2}{k^2} \delta(\rho_0 - \rho'_0)$$

и дает полный световой поток через объектив:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} I_F(\rho) d^2\rho = \iint_{\Sigma} I(\rho_0) d^2\rho_0 = u_0^2 \iint_{\Sigma} e^{2\chi(\rho_0)} d^2\rho_0.$$

Совершенно аналогично, но с использованием производной от δ -функции вычисляется интеграл в числителе. В результате для случайного смещения положения центра тяжести ρ_c получаем

$$\rho_c = \frac{F}{ik} \frac{\iint_{\Sigma} u(\rho_0) \nabla u^*(\rho_0) d^2\rho_0}{\iint_{\Sigma} I(\rho_0) d^2\rho_0}. \quad (7.81)$$

Смещение ρ_c — величина действительная, поэтому, беря полу-
сумму (7.81) и комплексно-сопряженного к нему выражения, можно записать вектор ρ_c в более удобном виде

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{F}{k} \frac{\iint_{\Sigma} \frac{1}{2i} [u(\rho_0) \nabla u^*(\rho_0) - u_0^*(\rho_0) \nabla u(\rho_0)] d^2\rho_0}{\iint_{\Sigma} I(\rho_0) d^2\rho_0} = \\ &= \frac{F}{k} \frac{\iint_{\Sigma} \text{Im} [u(\rho_0) \nabla u^*(\rho_0)] d^2\rho_0}{\iint_{\Sigma} I(\rho_0) d^2\rho_0}. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Подставим теперь $u(\rho_0) = u_0 \exp[\chi(\rho_0) + iS(\rho_0)]$. Тогда полу-
чим

$$\rho_c = -\frac{F}{k} \frac{\iint_{\Sigma} e^{2\chi(\rho_0)} \nabla S(\rho_0) d^2\rho_0}{\iint_{\Sigma} e^{2\chi(\rho_0)} d^2\rho_0}. \quad (7.83)$$

Из этой формулы видно, что флуктуации фазы играют основную роль в явлении дрожания изображений в фокальной плоскости: если $S = 0$, то $\rho_c = 0$; амплитудные же флуктуации играют роль поправки второго порядка. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь, положив $\chi = 0$. Тогда

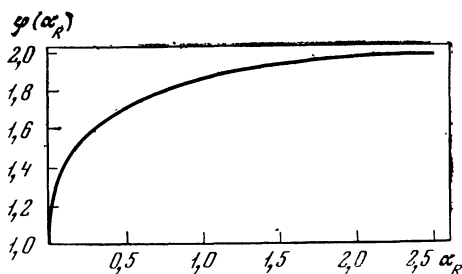
$$\rho_c = -\frac{F}{k\Sigma} \iint_{\Sigma} \nabla S(\rho_0) d^2\rho_0. \quad (7.84)$$

Средний квадрат смещения центра тяжести равен

$$\sigma_{\rho}^2 = \langle \rho_c^2 \rangle = \frac{F^2}{k^2 \Sigma^2} \iint_{\Sigma} d^2\rho_0 \iint_{\Sigma} d^2\rho'_0 \nabla_{\rho_0} \nabla_{\rho'_0} B_S(\rho_0, \rho'_0), \quad (7.85)$$

где $B_S(\rho_0, \rho'_0) = \langle S(\rho_0) S(\rho'_0) \rangle$. Если флуктуации фазы в падающей на приемник волне однородны и изотропны, то, вводя, как и в § 1 этой главы, спектральное представление корреля-

Рис. 7.9. График функции $\varphi(\alpha_R)$



ционной функции и вычисляя двойной интеграл по поверхности приемника, можно получить следующую простую формулу:

$$\sigma_p^2 = \frac{2\pi F^2}{k^2} \int_0^\infty F_S(\kappa) H^2(\kappa R) \kappa^3 d\kappa, \quad (7.86)$$

где двумерный спектр флуктуаций фазы

$$F_S(\kappa) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\rho} B_S(\rho) d^2\rho,$$

а фильтрующая функция $H(\kappa R)$ дается формулой (7.13) и в частном случае круглой приемной линзы, согласно (7.12), равна

$$H(\kappa R) = \frac{2J_1(\kappa R)}{\kappa R}.$$

Если на приемник падает прошедшая турбулентный слой L плоская волна, то, аналогично (7.36):

$$F_S(\kappa, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left(1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_\varepsilon(\kappa),$$

и, следовательно, выражение для σ_p^2 имеет вид

$$\sigma_p^2 = 0,71 C_\varepsilon^2 F^2 L (2R)^{-1/3} \varphi(\alpha_R), \quad (7.87)$$

где

$$\varphi(\alpha_R) = \frac{11\Gamma^3 \left(\frac{11}{6} \right) 2^{2/3}}{15\Gamma(5/3)\Gamma(7/6)} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\alpha_R^2}{t^2} \sin \frac{t^2}{\alpha_R^2} \right) J_1^2(t) t^{-3/2} dt, \quad (7.88)$$

а $\alpha_R = k^{1/2} R / L^{1/2}$.

При малых $\alpha_R \ll 1$ ($R \ll \sqrt{\lambda L}$) функция $\varphi(\alpha_R) = 1$ и

$$\sigma_p^2 = 0,71 C_\varepsilon^2 F^2 L (2R)^{-1/3}. \quad (7.89)$$

Это выражение отличается от приближенной формулы (7.71) лишь численным коэффициентом, равным 0,97. При больших $\alpha_R \gg 1$ функция $\varphi(\alpha_R) = 2$ и различие (7.87) и (7.71) становится более заметным.

График функции $\varphi(\alpha_R)$, полученный численным интегрированием (7.88), приведен на рис. 7.9. Он позволяет определять дисперсию дрожания при произвольных размерах приемного фокусирующего объектива.

§ 6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ПРИЕМНОЙ АПЕРТУРЫ

Вследствие практической важности эффекта усреднения флуктуаций интенсивности приемником с конечной апертурой экспериментальным исследованиям функции усреднения $G(r)$ уделялось значительное внимание [7—15].

Из выражения (7.6) следует, что функция усреднения существенно образом определяется видом пространственной корреляционной функции флуктуаций интенсивности. В свою очередь, как было показано в главе VI, корреляционная функция зависит от эквивалентной толщи турбулентной атмосферы, которую удобно характеризовать, например, параметром $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^2 x^{1/6}$ в случае плоской волны или величиной $D_S(2a) = 1,1 C_n^2 k^2 x (2a)^{5/6}$ — при фокусировке излучения апертурой диаметром $2a$. Поэтому измерения функции усреднения следует проводить, обеспечивая контроль основных параметров турбулентности, от которых зависит пространственная корреляция. Таким параметром в условиях развитой колмогоровской турбулентности является, как видно из выражений для β_0^2 и $D_S(2a)$, структурная характеристика C_n^2 . В первых измерениях [7—9], как правило, значения C_n^2 не фиксировались.

Функция усреднения на практике определяется как отношение относительной дисперсии флуктуаций потока через объектив конечного размера к величине дисперсии, соответствующей некоторому минимальному объективу. При этом очень важно правильно выбрать размер последнего. Ясно, что если на используемом в качестве минимального объективе d_{\min} происходит усреднение, которое характеризуется значением $G(d_{\min})$, то получаемые при этом результаты окажутся завышенными. Последнее обстоятельство становится особенно существенным в области сильных флуктуаций, где первый пространственный масштаб корреляции в случае, например, плоской и сферической волн (см. гл. VI) пропорционален величине $(C_n^2 k^3)^{-3/4}$. В оптическом диапазоне этот масштаб принимает малые значения, и усреднение становится заметным уже на апертурах с размерами порядка нескольких миллиметров.

Необходимо также сопровождать измерения дисперсии апертурой переменного диаметра одновременными измерениями с минимальным приемником, так как в противном случае могут получаться значения $G(d)$, содержащие ошибку за счет неправильной

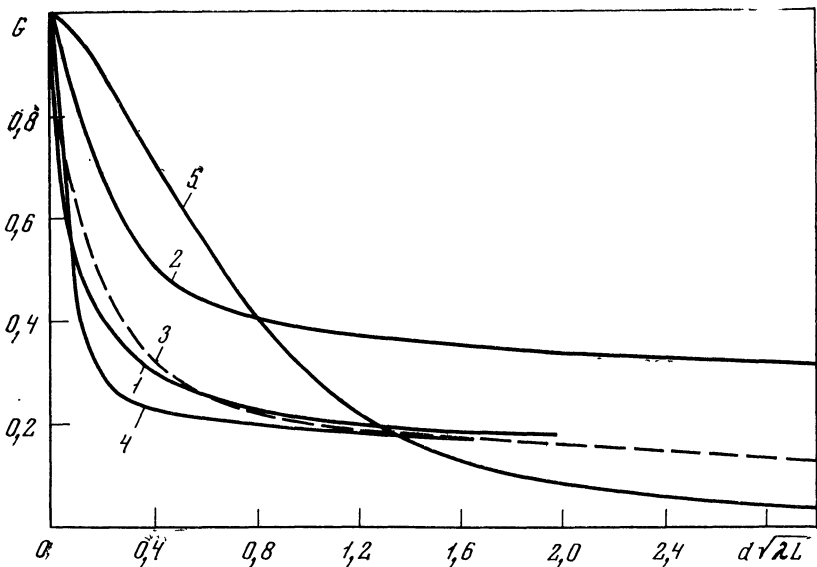


Рис. 7.10. Эмпирические функции усреднения приемной апертуры
 1 — усредненная кривая из [12], $x = 25$ км; 2 — данные работы [11], $x = 30$ км; 3 — перенормированная кривая; 4 — данные из [13], $x = 24$ км; 5 — расчетная кривая при слабых флуктуациях

нормировки. Процесс измерения функции усреднения занимает обычно время от 0,5 до 1 часа, поэтому несоблюдение этого условия вследствие изменчивости метеорологических условий в атмосфере приводит к значительному разбросу экспериментальных результатов.

Экспериментальные данные по усредняющему действию приемной апертуры были получены главным образом при сильных флуктуациях интенсивности. Описанные выше требования к измерениям, которые позволили бы проследить за изменением функции усреднения в зависимости от метеорологических условий, в проведенных измерениях не всегда выполнялись. Поэтому нам придется в ряде случаев приводить усредненные эмпирические кривые, указывая, где это возможно, диапазон значений структурной характеристики, по которому проводилось усреднение.

Наиболее полные экспериментальные данные по усредняющему действию приемной апертуры на длинных атмосферных трассах при распространении коллимированных лазерных пучков получены в работах [10—15]. Часть из них показана на рис. 7.10. Результаты [12] получены по измерениям на трассе длиной 25 км. Превышение передающего пункта над приемным составляло 350 м. Максимальная высота светового луча над поверхностью земли достигала 500 м. Использовался гелий-неоновый лазер ($\lambda =$

$= 0,6328$ мм), расходимость которого с помощью коллиматора уменьшалась до $8''$. Минимальный диаметр приемной апертуры был равен 1 мм. Измерение структурной характеристики вдоль трассы проводилось оптическим методом по полуширине средней дифракционной картины в фокальной плоскости линзы [16]. Кривая 1 рис. 7.10 есть результат усреднения пяти кривых из [12], которые соответствуют близким значениям $C_n^2 = (3,1; 3,5; 3,6; 3,8; 4,4) \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2}$.

Кривые 2 — 4 получены при измерениях [11, 13] на трассах $x_1 = 30$ км и $x_2 = 24$ км в гористой местности. Перепады высот между передающим и приемными пунктами составляли соответственно 506 и 510 м. В качестве передатчика также использовался гелий-неоновый лазер. На выходе телескопической системы диаметр пучка составлял $2a = 6$ см, а его расходимость равнялась $2''$. Минимальный и максимальный размеры приемной апертуры были соответственно 4,5 и 40 см. Дисперсии, соответствующие минимальной и переменной апертурам, измерялись одновременно. Структурная характеристика C_n^2 находилась из градиентных метеорологических измерений в пунктах приемника и передатчика. При таком контроле интегральное вдоль трассы значение этого параметра можно определить на основе некоторых предположений относительно высотной зависимости $C_n^2(h)$, что неизбежно приводит к значительным ошибкам, в особенности в условиях пересеченной местности, где проводились измерения.

Кривая 2 на рис. 7.10 является результатом усреднения большого количества экспериментальных данных, полученных за 13 сеансов измерений в летнее ночное время в течение двух месяцев. На трассе имели место всегда сильные флуктуации интенсивности. Представленные результаты соответствуют некоторому усредненному по всему периоду измерений интегральному значению C_n^2 .

Заметим, что минимальный размер приемной апертуры, использованной в [11], меньше, чем входная диафрагма приемника в [12]. Этим обстоятельством может объясняться различное поведение кривых 1 и 2 на рис. 7.10. Действительно, если перенормировать кривую 2, приняв для нее значение $G(d_{\min})$, соответствующее данным [12], то полученный результат (кривая 3) хорошо согласуется с кривой 1. Это свидетельствует о том, что средние метеорологические условия на трассе в [11] соответствовали условиям, имевшим место в процессе измерений, проведенных в [12].

Показанная на рис. 7.10 кривая 4 из [13] относится к измерениям на трассе длиной 24 км. Нижняя граница значений параметра $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^2 / x^{11/6}$ по приближенным оценкам интегральной структурной характеристики в этом случае дается равенством $\beta_0^2 \simeq 15$.

Из сравнения приведенных на рис. 7.10 эмпирических зависимостей с расчетной кривой, которая верна в области слабых флук-

туаций, заметно проявление двухмасштабной структуры пространственной корреляции сильных флуктуаций интенсивности. В области малых по сравнению с $\sqrt{\lambda x}$ размеров апертуры возникает дополнительное усреднение за счет уменьшения первого масштаба. Уменьшение усредняющего действия при $d > \sqrt{\lambda x}$, очевидно, обусловлено появлением второго масштаба пространственных флуктуаций (см. гл. VI).

Попытка систематизировать измерения функции усреднения в зависимости от метеорологических условий предпринята в [15]. Трасса, на которой проводились измерения, имела протяженность $x = 11,8$ км и проходила на высоте 42 м над поверхностью моря в районе морского порта г. Одессы. Использовался гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,6328$ мкм). С помощью телескопической системы формировался коллимированный пучок, диаметр которого на выходе был равен 8 см. Приемник минимальных размеров ($d = 4$ мм) и объектив переменного диаметра ($10 \text{ мм} \leq d \leq 260 \text{ мм}$) располагались в центре светового пятна в плоскости приема. Структурная характеристика C_n^2 определялась градиентным методом на берегу в точке расположения приемников. Одновременно проводились оценки значений C_n^2 по измерениям эффективного диаметра пучка в плоскости приема.

В течение одного сеанса проводились измерения дисперсии σ_I^2 флуктуаций интенсивности по двум каналам одновременно для $\mu = (6 \div 8)$ значений диаметра объектива d_j ($j = 1, 2, \dots, \mu$). Изменение диаметра проводилось после получения $m \simeq 9$ соответствующих ему значений дисперсии. Таким образом, за один сеанс измерялось $m\mu$ значений относительной дисперсии $(\sigma_I^2)_j^i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и столько же значений функции усреднения $G^i(d_j) = (\sigma_I^2)_j^i / (\sigma_{I,S}^2)^i$, где $\sigma_{I,S}^2$ — дисперсия почти точечного минимального приемника.

В некоторых измерениях за время одного сеанса происходило существенное изменение значений структурной характеристики C_n^2 . Поэтому была проведена сортировка экспериментальных данных $G^i(d_j)$ между сеансами, так чтобы каждой экспериментальной функции $G(d)$ соответствовали результаты $G^i(d_j)$, полученные при близких значениях C_n^2 .

Усредненные по всем измерениям, соответствующим каждой отдельной функции усреднения, значения структурной характеристики, относительная дисперсия флуктуаций светового потока $\sigma_{I,S}^2$, принимаемого точечным приемником, и параметр $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^2 l^3 x^{11/6}$, характеризующий условия распространения вдоль трассы, приведены в табл. 7.1.

Значения структурной характеристики, измеренные двумя различными способами, коррелируют между собой. Однако C_n^2 из метеорологических измерений оказались по величине боль-

Таблица 7.1

Данные измерений структурной характеристики

Номер кривой	Расчет по градиентным измерениям			Расчет по диаметру пучка	
	σ_{IS}^2	$C_n^2, \text{см}^{-2/3}$	β_0^2	$C_n^2, \text{см}^{-2/3}$	β_0^2
1	4,8	$1,7 \cdot 10^{-15}$	192	$1,58 \cdot 10^{-16}$	17,8
2	5,25	$4,3 \cdot 10^{-15}$	485	$3,5 \cdot 10^{-16}$	40,5
3	4,5	$1,1 \cdot 10^{-14}$	1240	$0,7 \cdot 10^{-15}$	78
4	4,0	$1,4 \cdot 10^{-14}$	1580	$0,7 \cdot 10^{-15}$	78

шими по сравнению с C_n^2 , полученными из турбулентного уширения пучка. Это различие связано с тем, что градиентные измерения проводились над сушей на небольшой высоте от подстилающей поверхности $h < 10$ м, в то время как трасса проходила над водной поверхностью на большей высоте ($h = 42$ м).

Результаты измерений функции усреднения показаны на рис. 7.11. Сплошные кривые здесь проведены по методу наимень-

ших квадратов через средние значения $\bar{G}(d_j) = \sum_{i=1}^m G^i(d_j)/m$.

Вертикальными линиями показаны доверительные интервалы средних значений, соответствующие доверительной вероятности 0,95. Из представленных на рис. 7.11 кривых видна четко выраженная параметрическая зависимость функции усреднения от метеорологических условий на трассе. Замедление спада функции $G(d)$ при диаметре приемной апертуры, превышающем некоторое значение, связано, по-видимому, с появлением второго масштаба пространственной корреляции флуктуаций интенсивности.

Перейдем теперь к обсуждению экспериментов по измерению функции усреднения при приеме сфокусированного через атмосферу лазерного излучения. Такие исследования проводились в работе [17]. Изучалось усредняющее действие объектива на флуктуации логарифма интенсивности на трассе длиной $x = 650$ м, проходившей над ровным участком подстилающей поверхности на высоте $h = 2$ м. Диаметр пучка на выходе из фокусирующего зеркала был равен $2a = 8$ см, 15 см, 30 см. В качестве источника использовался гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,6328$ мкм). Радиус диафрагмы приемника изменялся от 0,15 до 25 мм. За счет уширения атмосферной турбулентностью эффективный радиус пучка в фокальной плоскости, определенный по половинной средней мощности, был равен $r_e = 15$ мм. Для нормировки в качестве точечной апертуры использовалась диафрагма, начиная с которой дальнейшее уменьшение размера приемника не влияло на величину

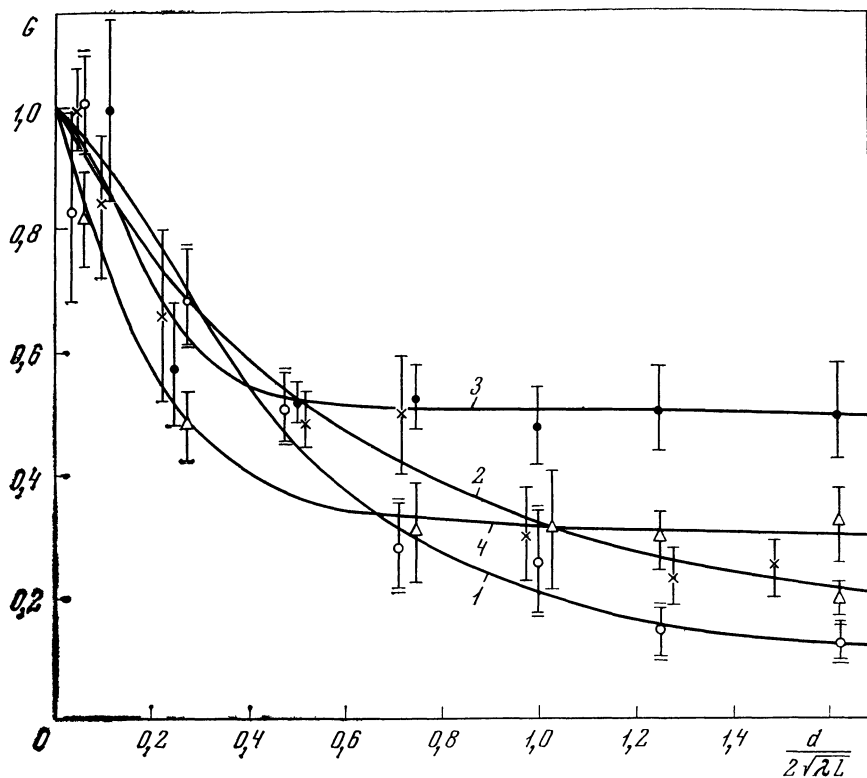


Рис. 7.11. Функции усреднения флуктуаций интенсивности приемной апертурой по данным [15] для коллимированного пучка

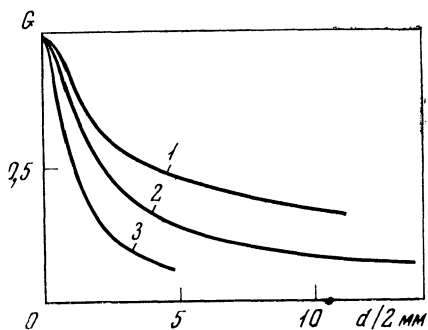


Рис. 7.12. Функции усреднения флуктуаций сфокусированного пучка приемной апертурой по данным [17]

- 1 — $a = 4$ см;
- 2 — $a = 7,5$ см;
- 3 — $a = 15$ см

дисперсии $\ln I$. Дисперсия для точечного приемника определялась последовательно после каждого измерения с апертурой переменного диаметра. Одновременно проводились измерения структурной характеристики показателя преломления оптическим методом. Для каждого значения диаметра фокусирующей апертуры были получены семейства кривых $G_{\text{лнр}}(r) = \sigma^2/\sigma_0^2$, где σ^2 и σ_0^2 — относительные дисперсии логарифма флуктуаций светового потока, принимаемого апертурой радиуса r и «точечным» приемником ($r = r_{\text{min}} = 0,15$ мм). Пределы изменения параметра $D_S(2a) = 1,1 C_n^2 k^2 x (2a)^{5/3}$ для каждой из апертур оказались следующими: $a_1 = 4$ см, $(\sqrt{D_S})_1 = 12 \div 28$; $a_2 = 7,5$ см, $(\sqrt{D_S})_2 = 21 \div 100$; $a_3 = 15$ см, $(\sqrt{D_S})_3 = 20 \div 130$. Различия между экспериментальными кривыми, полученными для каждой из апертур при различных значениях D_S , находились в пределах возможной ошибки измерений, что указывает на отсутствие для условий данного эксперимента существенной зависимости функции усреднения от метеорологических условий. В то же время оказалось, что, несмотря на полное перекрытие диапазонов изменения D_S при всех использовавшихся апертурах, значения $G(r)$, соответствующие $a = 7,5$ см, во всем интервале изменения r превышают значения этой величины, полученные при $a = 15$ см. В свою очередь кривые $G(r)$ при $a = 4$ см лежат выше, чем при $a = 7,5$ см. Такое поведение экспериментальных данных объясняется тем, что первый масштаб пространственной корреляции флуктуаций интенсивности сфокусированного излучения, как было отмечено в главе VI, пропорционален дифракционному размеру пучка $r_d = x/ka$. Радиус корреляции в сфокусированном пучке в соответствии с расчетными данными, представленными на рис. 6.18, слабо зависит от параметра $D_S(2a)$.

Полученные результаты для $G_{\text{лнр}}(r)$ были усреднены при фиксированных значениях параметров r и a . Усредненные кривые представлены на рис. 7.12. Если провести оценку радиуса корреляции ρ_l флуктуаций интенсивности по размеру апертуры приемника, при котором функция $G_{\text{лнр}}(r)$ падает до уровня 0,5, то получающиеся при этом результаты неплохо согласуются с представлением о пропорциональности величины ρ_l дифракционному размеру пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
2. А. И. Кон. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1969, 12, № 2, 149.
3. В. Л. Миронов, Ю. А. Пхалагов. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1972, № 1, 145.
4. А. И. Кон, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1964, 7, № 2, 306.
5. А. С. Гурвич, А. И. Кон. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1964, 7, № 4, 790.
6. А. И. Кон. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1969, 12, № 5, 686.

7. D. H. Höhn. Appl. Optics, 1966, 5, No. 9, 1427—1431.
8. A. L. Buck. Appl. Optics, 1967, 6, No. 4, 703—708.
9. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. P. Keister. J. Opt. Soc. Amer., 1967, 57, No. 6, 789—797.
10. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1970, № 2, 52—56.
11. Н. Ц. Гомбоев, Э. В. Зубрицкий, В. В. Бороноев, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. В кн.: X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Тезисы докладов. Секция IV. М., «Наука», 1972, стр. 216—221.
12. Р. А. Казарян, Р. Г. Манучарян, С. С. Гаспарян. Экспериментальное исследование флуктуаций интенсивности лазерного излучения в атмосфере и их усреднение приемной апертурой. Препринт Института физических исследований, 72—06. АН Арм. ССР. Ереван, 1972.
13. S. S. Khmelevtsov. Appl. Optics, 1973, 12, No. 10, 2421—2433.
14. Э. С. Вартамян, С. Е. Восканян, Р. А. Казарян, Р. Г. Манучарян. Докл. АН Арм. ССР, 1970, № 2, 86—89.
15. М. С. Белецкий, А. Ф. Жуков, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык. В кн.: Распространение оптических волн в атмосфере. Под ред. В. Е. Зуева. Новосибирск, «Наука», 1975, стр. 72—81.
16. Э. С. Вартамян, А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, Р. Г. Манучарян. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1970, 6, № 8, 844—845.
17. А. С. Гурвич, И. А. Старобинец. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 12, 1834—1837.

ОПТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

На возможность получения информации о структуре турбулентности из исследований взаимодействия волн и среды впервые было указано в работе [1]. Принципиальные возможности и перспективы развития подобных исследований обсуждались в [2—10].

В данной главе мы рассмотрим методы оптического зондирования атмосферной турбулентности, которые к настоящему времени получили надежное экспериментальное подтверждение. Вопросы, связанные с математической обработкой результатов измерений, будут излагаться лишь в той степени, в какой это будет необходимо для обоснования информативности обсуждаемых методов. Основное внимание уделено физическим основам оптических методов с тем, чтобы оттенить принципиальные ограничения, присущие каждому из них. Приводятся в достаточном объеме фактические данные об используемых в измерениях экспериментальных установках. Результаты проведенных оптических измерений, где это оказывается возможным, сравниваются с данными, полученными другими методами.

§ 1. ИЗМЕРЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛУКТУАЦИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Почти любой эксперимент по определению статистических характеристик оптической волны, прошедшей слой турбулентной среды, в принципе дает возможность найти интенсивность турбулентных пульсаций, описываемую структурной характеристикой C_n^2 . В частности, в формулах, получаемых методами возмущений (гл. II), структурная характеристика входит в качестве множителя и легко находится, например, из измерений дисперсии флуктуаций логарифма амплитуды (гл. II, VI), разности фаз (гл. III) или смещений изображения в фокальной плоскости приемной линзы (гл. V).

В частности, при определении структурной характеристики из измерений дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности

приходится пользоваться формулой (2.66), которая, как следует из экспериментальных данных (гл. VI), применима в приземном слое атмосферы только на коротких трассах длиной не более нескольких сот метров. Кроме того, сама величина дисперсии логарифма интенсивности при измерениях на коротких трассах существенно зависит от величины внутреннего масштаба турбулентности [2, 11—13], который необходимо измерить независимо, что вносит дополнительную неопределенность. Эти факторы явились главной причиной того, что оптические амплитудные методы измерения структурной характеристики, и в особенности ее значения, усредненного вдоль длинной трассы, не получили широкого распространения на практике. Однако в некоторых случаях, например в самолетных измерениях [14], применение амплитудного способа определения C_n^2 оказывается достаточно эффективным.

Наибольшее применение получили оптические методы, основанные на наблюдении эффектов, связанных с нарушением когерентности излучения. Преимущества этих методов заключаются в их простоте и возможности определения структурной характеристики, усредненной вдоль трассы, имеющей практически произвольную длину. Нарушение когерентности поля после прохождения волной слоя турбулентной среды вызывает, в частности, следующие явления:

а) уменьшение средней интенсивности в центре дифракционного изображения источника в фокальной плоскости телескопа [15—17];

б) размытие этого изображения [15, 17, 18];

в) исчезновение контраста изображения оптических структур типа миры [19—21];

г) уширение оптических пучков, фокусируемых через турбулентную среду (§ 1, гл. IV).

Дополнительные возможности для оптического измерения C_n возникают также при использовании высших мод лазерного излучения [25].

Все эти эффекты в принципе позволяют определять структурную характеристику турбулентности оптическим способом. Дрожание и размытие изображений звезд (§ VII.5) измерялись астрономами еще в конце прошлого века [11, 26]. Однако количественная интерпретация таких измерений, которая позволила найти структурную характеристику [22—24], стала возможной лишь после развития теории этого явления.

В дальнейшем мы подробно остановимся на первых трех перечисленных выше методах. При использовании этих методов уже накоплены обширные экспериментальные данные о структурной характеристике в приземном слое атмосферы.

1. Определение структурной характеристики по ослаблению интенсивности в фокусе линзы

Распределение средней интенсивности в фокальной плоскости приемной линзы в соответствии с [16, 18] равно

$$\langle I(y', z') \rangle = \frac{2R^2}{\lambda^2 l^2} \iint dy dz \Gamma_2(x, \rho) K\left(\frac{\rho}{2R}\right) \exp\left[-i \frac{k}{F} (yy' + zz')\right], \quad (8.1)$$

где $2R$ — диаметр приемника; F — фокусное расстояние; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число и $\Gamma_2(x, \rho)$ — функция когерентности поля волны, падающей на линзу; $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ — модуль радиуса-вектора в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны ($x = \text{const}$);

$$K(x) = \arccos x - x\sqrt{1-x^2}. \quad (8.2)$$

Если размер приемного объектива не превышает эффективную ширину освещающего его лазерного пучка, то функцию $\Gamma_2(x, \rho)$ можно приближенно представить в форме

$$\Gamma_2(x, \rho) = \Gamma_2(x, 0) \exp\left[-\frac{1}{2} D_{10}(\rho)\right], \quad (8.3)$$

где

$$D_{10}(\rho) = 2,91 \int_0^1 f(\xi) C_n^2(\xi) d\xi k^2 x \kappa_m^{-5/3} [(1 + \kappa_m^2 \rho^2)^{5/6} - 1]$$

— структурная функция комплексной фазы (2.53), вычисленная для спектральной плотности флуктуаций показателя преломления вида (1.86), (1.87a), а $f(\xi)$ — весовая функция, вид которой определяется формой освещающего объектив лазерного пучка. Для квазиплоской волны $f(\xi) \equiv 1$ в случае расходящегося пучка (квасисферическая волна) $f(\xi) = \xi^{5/3}$. Учитывая, что безразмерная дистанция $\xi = x'/x$ измеряется от передатчика ($\xi = 0$), замечаем, что в случае точечного источника света наибольший вклад в пространственно усредненное значение структурной характеристики

$$C_n^2 = \int_0^1 f(\xi) C_n^2(\xi) d\xi \quad (8.4)$$

вносит участок трассы, прилегающий к приемнику ($\xi = 1$).

Используя выражение (8.4), представим отношение светового потока через узкую щель шириной Δ , расположенную в центре дифракционной картины, к полному потоку через объектив в виде

$$\frac{P_S}{P} = \frac{4R\Delta}{\pi\lambda l} \int_0^1 d\eta \gamma_2(x, 2R\eta) K(\eta), \quad (8.5)$$

где $\gamma_2(x, \rho) = \Gamma_2(x, \rho)/\Gamma_2(x, 0)$ — степень когерентности.

Формула (8.5) справедлива при условии, что ширина щели Δ не превышает диаметра кружка Эйри линзы ($\Delta \ll 0,61 \frac{\lambda}{2R} F$). Подставляя в выражение (8.5) функцию (8.3), находим

$$\frac{P_S}{P} = \frac{4R\Delta}{\pi\lambda F} \int_0^1 d\eta \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_1(2R) \eta^{5/3} [1 + (2R\kappa_m \eta)^{-2}]^{5/6} - (2R\kappa_m \eta)^{-5/3} \right\} K(\eta). \quad (8.6)$$

Здесь

$$D_1(2R) = 2,91 \tilde{C}_n^2 k^2 x (2R)^{5/3} \quad (8.7)$$

— структурная функция комплексной фазы, вычисленная на диаметре приемной линзы при условии $2R \gg \kappa_m^{-1}$. Если флуктуации фазы на базе κ_m^{-1} малы,

$$D_1(\kappa_m^{-1}) = 2,91 \tilde{C}_n^2 k^2 x \kappa_m^{-5/3} \ll 1,$$

то влиянием внутреннего масштаба можно пренебречь. Тогда выражение (8.6) примет вид

$$\frac{P_S}{P} = \frac{4R\Delta}{\pi\lambda F} \int_0^1 d\eta \exp \left(-\frac{1}{2} D_1(2R) \eta^{5/3} \right) K(\eta). \quad (8.8)$$

Воспользуемся квадратичной аппроксимацией экспоненты под знаком интеграла и разложим в степенной ряд второй сомножитель подынтегральной функции. После несложных вычислений для интеграла в правой части (8.8) получим

$$I \simeq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Phi(\mu^{3/5})}{\mu^{3/5}} - \frac{1}{\mu^{6/5}} \left(1 - \frac{1}{6\mu^{6/5}} \right) + \frac{e^{-\mu^{6/5}}}{6\mu^{6/5}} \left(5 - \frac{1}{\mu^{6/5}} \right), \quad (8.9)$$

где $\mu = \frac{1}{2} D_1(2R)$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятности.

Величина интеграла I изображена на рис. 8.1 как функция параметра D_1 . Данные, полученные численным интегрированием (8.8) и вычисленные по асимптотической формуле (8.9), практически совпадают.

Таким образом, по измеренному значению величины $\frac{P_S}{P} = \frac{4R\Delta}{\pi\lambda F} I(D_1)$ из формулы (8.9) или графика рис. 8.1 можно найти сначала структурную функцию D_1 , а затем по формуле (8.7) определить интегральное значение структурной характеристики \tilde{C}_n^2 . Этот принцип измерения \tilde{C}_n^2 был реализован на практике в виде действующего прибора [27].

На рис. 8.2 прибор изображен в двух режимах работы. В качестве источника света использовался гелий-неоновый лазер, ра-

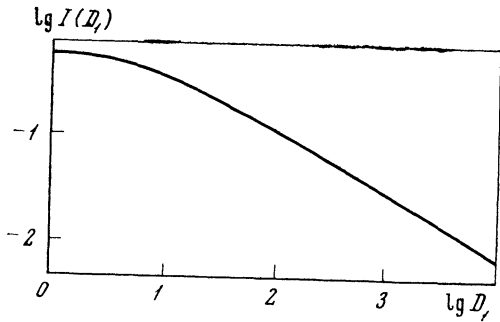


Рис. 8.1. Интеграл $I(D_1)$, определяющий среднюю интенсивность в фокусе линзы в зависимости от структурной функции комплексной фазы падающей волны

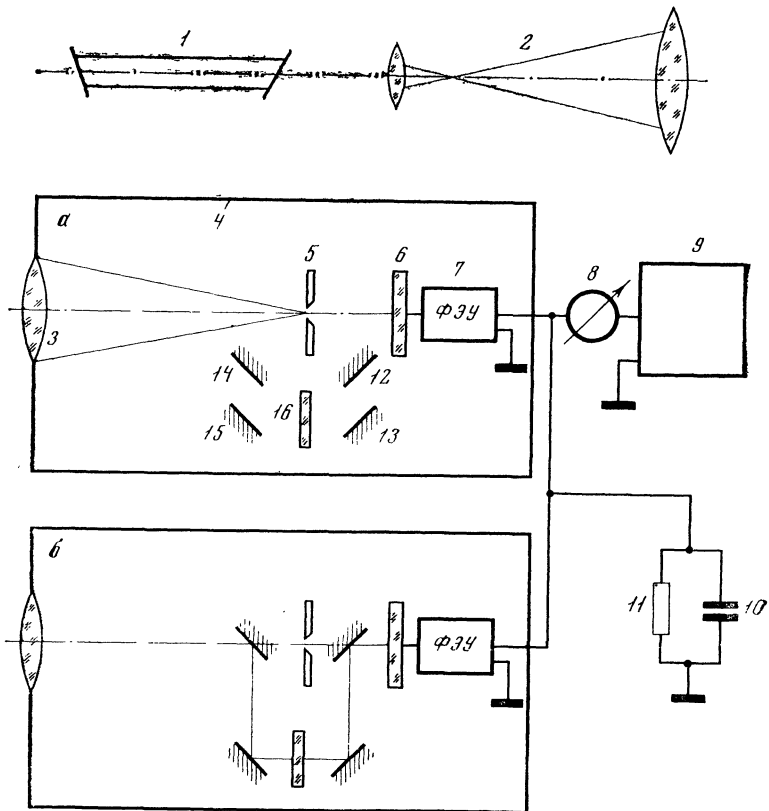


Рис. 8.2. Схема прибора для измерения \tilde{C}_n^2

а — режим измерения светового потока через щель; **б** — режим измерения полного светового потока; 1 — лазер; 2 — коллимирующая система; 3 — линза; 4 — корпус прибора; 5 — щель; 6 — интерференционный светофильтр; 7 — ФЭУ; 8 — микроамперметр; 9 — самописец; 10, 11 — RC-цепь; 12—15 — плоские зеркала; 16 — нейтральный светофильтр

ботавший в режиме осевых колебаний. Излучение лазера коллимировалось телескопической системой 2. После прохождения турбулентной трассы пучок света падал на линзу 3 коллиматора. Диаметр лазерного пучка был примерно в два раза больше диаметра $2R$ приемной линзы 3. В фокальной плоскости этой линзы, на ее оптической оси, помещалась вертикально щель 5. Ширина щели была в три раза меньше диаметра кружка Эйри линзы 3, а ее длина в три раза больше максимально возможного эффективного диаметра размытой турбулентностью дифракционной картины в фокальной плоскости. Световой поток через щель попадал на фотоэлектронный умножитель 7. Сигнал ФЭУ усреднялся с помощью RC -цепи 10, 11, постоянная времени которой составляла 20 сек, и затем регистрировался на ленте самописца 9. По истечении одной минуты от начала регистрации потока через щель плоские зеркала 12—15 переводились с помощью кулачкового механизма из положения *a* в положение *b*. При этом полный поток лазерного излучения, прошедший через линзу 3, направлялся системой зеркал 12—15 на фотоэлектронный умножитель. Одновременно в RC -цепи емкость 10 переключалась на меньшую, так что постоянная RC -цепи становилась равной 3 сек.

Перед началом измерений щель выводилась в центр дифракционной картины. Контроль за правильной установкой щели осуществлялся с помощью микроамперметра 8. Вертикальное расположение щели избавляло от помех, обусловленных вертикальной рефракцией. Интерференционный светофильтр 6 и корпус 4 приемника надежно защищали ФЭУ от фоновой засветки. Нейтральный светофильтр 16 ослаблял полный поток с тем, чтобы его измерения проводить в том же режиме работы ФЭУ, что и потока через щель. Самописец 9 типа Н-110 включался в режиме логарифмирования входного сигнала. Таким образом, разность отсчетов δ на ленте самописца при переключении прибора была равна отношению потоков через щель и объектив, выраженному в децибелах. Выбранный режим работы прибора и способ измерений исключали влияние нестабильности работы лазера и прозрачности атмосферы на получаемые данные.

В соответствии с формулой (8.8) измеряемая прибором величина равна

$$\delta = 20 \lg \frac{4R\Delta}{\pi\lambda f T} I(D_1), \quad (8.10)$$

где T — коэффициент ослабления полного потока света системой зеркал 12—15 и фильтром 16. Величину T можно определить по следующей методике. Уменьшая диаметр апертуры линзы 3 с помощью апертурных диафрагм до значений, при которых величина D_1 становится малой по сравнению с единицей, измеряем отношение δ_k . Для этого случая из выражений (8.9), (8.10) находим

$$\delta_k = 20 \lg \left(\frac{2R\Delta}{\lambda f T} \right),$$

откуда и определим величину T . Признаком выполнения условия $\exp(-\frac{1}{2}D_1) \simeq 1$ служит появление прямого участка на графике величины $10^{(S/20)}$ в зависимости от R .

При проведении измерений необходимо по данным рис. 8.1 или формуле (8.10) рассчитать величину δ как функцию аргумента $C_n^2 x$ при фиксированных параметрах прибора λ, R, F, Δ, T . По результатам расчета должна быть построена номограмма, на которой по одной оси координат отложены значения величины δ , а по другой — $C_n^2 x$. Эта номограмма будет универсальна для определения C_n^2 при разных расстояниях x . Общая инструментальная ошибка такого прибора, как показывают оценки, составляет $\pm 1,5 \text{ db}$.

На рис. 8.3 представлены результаты измерений C_n^2 с помощью описанного прибора, проведенных на атмосферных трассах [28, 29]. Полученные метеорологическими методами данные для C_n^2 в большинстве случаев удовлетворительно согласуются с результатами оптических измерений. Следует отметить, что значения C_n^2 , полученные из метеорологических данных, испытывают в процессе наблюдений большие случайные вариации. Стабильность результатов оптических измерений C_n^2 обусловлена дополнительным пространственным усреднением.

2. Измерение структурной характеристики по размытию средней дифракционной картины

Используя формулу (8.1), которая получила надежное экспериментальное подтверждение (§ III.3) [30], можно установить следующее соотношение между полушириной средней дифракционной картины в фокальной плоскости приемной линзы и усредненной вдоль трассы структурной характеристикой C_n^2 :

$$\bar{C}_n^2 = \frac{0,95 (y_k/2l)^{5/3}}{2,91 k^{1/3} x}. \quad (8.11)$$

Здесь y_k — полуширина, измеренная на уровне половины максимальной средней интенсивности. Формула (8.11) соответствует измерению интенсивности с помощью вертикальной щели, длина которой во много раз превышает средний размер дифракционного изображения, а ширина удовлетворяет обратному условию.

Экспериментальная проверка метода была осуществлена в [31, 32] на трассе длиной 25 км. Превышение передающего пункта над приемным составляло 350 м. Источником света служил одномодовый гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,6328 \text{ мкм}$) с выходной мощностью 30 мвт и расходимостью 2'. С помощью коллиматора расходимость пучка уменьшалась до 8" при выходном диаметре пучка 3,5 см. В фокусе приемной линзы ($F = 200 \text{ см}$) устанавливалась щель шириной 20 мкм, приводимая в равномерное движение со

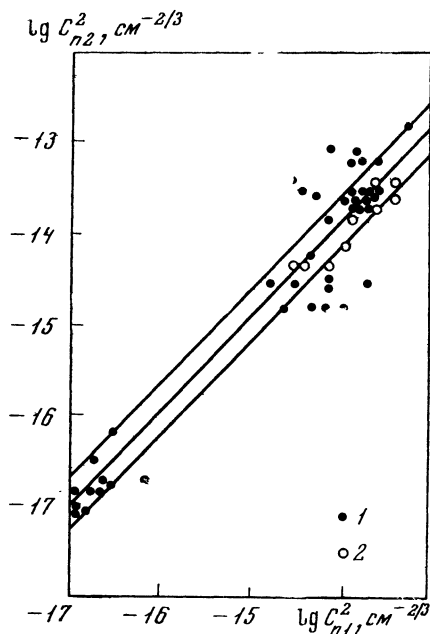
Рис. 8.3. Сравнение значений структурной характеристики показателя преломления воздуха, измеренных оптическими и метеорологическими методами

C_{n1}^2 — метеорологические [28] и оптические [29] данные, полученные из измерений дефокусировки пучка;

C_{n2}^2 — измерения прибором [27], проведенные в [28], [29];

1 — данные работы [28];

2 — данные работы [29]



$$\tilde{C}_n^2 \cdot 10^{17}, \text{cm}^{-2/3}$$

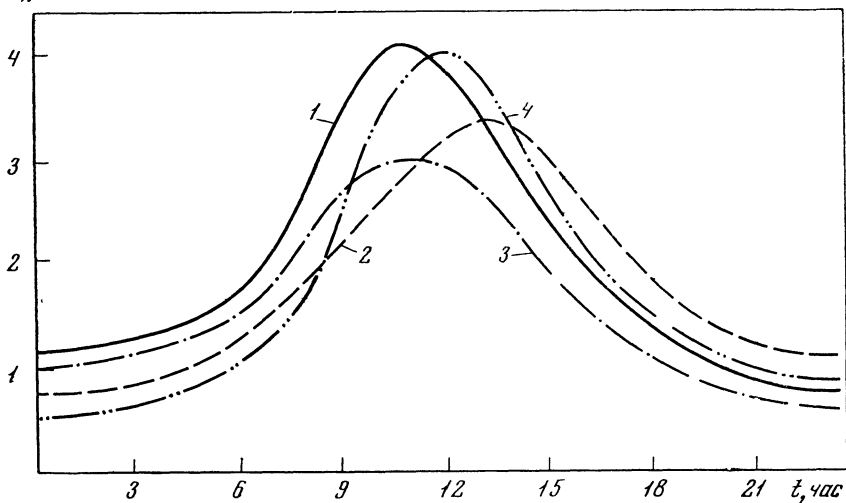


Рис. 8.4. Суточный ход структурной характеристики

1 — 4 июля; 2 — 5 июля; 3 — 6 июля; 4 — 7 июля

скоростью 0,01 мм/мин. После щели был установлен интерференционный светофильтр с полосой пропускания 60 Å на волне $\lambda = 0,6328$ мкм. Сигнал с фотоумножителя после прохождения через усилитель постоянного тока подавался на самопишущий прибор.

Для усреднения быстрых флуктуаций тока фотоумножителя на вход усилителя была включена интегрирующая цепочка с постоянной времени интегрирования 2 мин. Время интегрирования подбиралось экспериментально.

Измерения проводились непрерывно в течение четырех суток с 4 по 7 июля 1969 г. Суточный ход изменения C_n^2 , полученный скользящим усреднением за каждые 3 часа, приведен на рис. 8.4. Эти данные позволяют оценить временные вариации величины C_n^2 на длинных трассах в условиях гористой местности.

Измерения C_n^2 на приземных трассах по ослаблению средней интенсивности в центре дифракционной картины и ее размытию с использованием фотографического способа регистрации проводились также в работах [33, 34]. Имеется некоторый опыт [35] оптических измерений структурной характеристики турбулентности потока реактивного двигателя.

3. Определение структурной характеристики по размытию изображения мира

Простая и удобная методика определения величины структурной характеристики была предложена в работе [19]. Согласно этой методике, для определения C_n^2 необходимо с помощью качественного длиннофокусного объектива фотографировать с большой выдержкой (порядка 1 мин) удаленную радиальную миру. После чего значения C_n^2 находятся по величине размытой области изображения мира. Более строгое, чем в [19], обоснование этой методики дано в работе [21].

Рассмотрим параллельную миру, коэффициент отражения которой вдоль одной из декартовых координат меняется по гармоническому закону, а вдоль другой — постоянен, так что интенсивность объекта фотографирования с точностью до постоянного коэффициента равна

$$O(y, z) = 1 + \cos \frac{2\pi z}{M}, \quad (8.12)$$

где M — период мира.

Размытие изображения определяется контрастом

$$\alpha = \frac{\langle I_{\max} \rangle - \langle I_{\min} \rangle}{\langle I_{\max} \rangle + \langle I_{\min} \rangle}, \quad (8.13)$$

где $\langle I_{\max} \rangle$ и $\langle I_{\min} \rangle$ — соответственно максимальное и минимальное значения средней освещенности в плоскости изображения.

Согласно теории формирования изображения оптическими системами [36], освещенность в плоскости изображения $I(y, z)$ связана с распределением интенсивности в плоскости объекта $O(\eta, \zeta)$ соотношением

$$I(y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\eta d\zeta S(y - \eta, z - \zeta) O(\eta, \zeta). \quad (8.14)$$

Входящая в формулу (8.14) функция $O(\zeta, \eta)$ в соответствии с (8.12) есть

$$O(\eta, \zeta) = 1 + \cos \frac{2\pi\zeta}{m}, \quad m = \beta M, \quad (8.15)$$

где β — коэффициент линейного увеличения оптической системы. Функция $S(y, z)$ в (8.14) есть «функция рассеяния», описывающая распределение света в плоскости изображения (y, z) , обусловленное наличием точечного источника в плоскости объекта. Производя в формуле (8.14) статистическое усреднение, находим среднюю освещенность в плоскости изображения:

$$\langle I(y, z) \rangle = \iint d\eta d\zeta \langle S(y - \eta, z - \zeta) \rangle O(\eta, \zeta). \quad (8.16)$$

Для определенности введем нормировку

$$\iint dy dz \langle S(y, z) \rangle = 1.$$

Тогда, воспользовавшись формулой (8.1), для $S(y, z)$ можно записать следующее представление:

$$\langle S(y, z) \rangle = \frac{2}{\pi\lambda^2 F^2} \iint d\eta d\zeta \gamma_2(x, \rho) K\left(\frac{\rho}{2R}\right) \exp\left(i\frac{k}{F}(y\eta + z\zeta)\right), \quad (8.17)$$

где $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$. Подставляя выражение (8.17) в формулу (8.16) и учитывая четность функции $\langle S(y, z) \rangle$ по обоим аргументам, получаем

$$\langle I(y, z) \rangle = 1 + (2\pi)^2 \cos \frac{2\pi y}{m} \tilde{S}\left(\frac{2\pi}{m}, 0\right), \quad (8.18)$$

где

$$\tilde{S}(\kappa_2, \kappa_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dy dz \langle S(y, z) \rangle \exp(-i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)). \quad (8.19)$$

В соответствии с (8.13) и (8.18) находим, что контраст средней освещенности выражается через фурье-образ функции рассеяния:

$$\alpha = (2\pi)^2 \tilde{S}\left(\frac{2\pi}{m}, 0\right). \quad (8.20)$$

Используя далее соотношения (8.19), (8.17) и (8.3) и пренебрегая влиянием внутреннего масштаба турбулентности, можно записать выражение (8.20) в виде

$$\alpha = \exp\left[-1,46\mathcal{C}_n^2 k^2 x \left(\frac{2\pi l}{km}\right)^{5/3}\right] \frac{2}{\pi} K\left(\frac{\pi F}{kmR}\right). \quad (8.21)$$

Отсюда по измеренному контрасту α можно найти структурную характеристику:

$$C_n^2 = \frac{\ln \frac{2}{\pi} K \left(\frac{\pi F}{kmR} \right) - \ln \alpha}{1,46 k^{1/2} x (2\pi F/m)^{5/2}}. \quad (8.22)$$

Рассмотрим теперь формирование изображения параллельной миры, состоящей из равношироких черных и белых полос (тест Фуко), ширина которых равна $M/2$. Примем, что функция распределения интенсивности $O(y, z)$ четна по y и точка $y = 0$ соответствует середине белой полосы. Кроме того, будем считать, что средний уровень интенсивности теста и амплитуда ее изменения равны единице. В этом случае функция $O(y, z)$ может быть записана в виде следующего ряда Фурье:

$$O(y, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi n}{m} y, \quad (8.23)$$

где

$$A_n = \frac{8}{m} \int_0^{m/2} \cos \left(\frac{2\pi n}{m} y \right) dy = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Воспользовавшись формулами (8.23) и (8.16), для средней интенсивности получим

$$\langle I(y, z) \rangle = 1 + (2\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{S} \left(\frac{2\pi n}{m}, 0 \right) \cos \frac{2\pi n}{m} y. \quad (8.24)$$

Подставляя выражение (8.24) в формулу (8.13) и ограничиваясь при условии значительного ($\alpha < 0,8$) размытия изображения первым слагаемым ряда, для контраста средней интенсивности будем иметь

$$\alpha \simeq \frac{4}{\pi} (2\pi)^2 \mathcal{S} \left(\frac{2\pi}{m}, 0 \right). \quad (8.25)$$

Согласно (8.25) и (8.20), в условиях одинаковой турбулентности контраст теста Фуко несколько выше контраста изображения синусоидальной миры.

Формула (8.25) приводит к следующему выражению для определения структурной характеристики C_n^2 по величине контраста изображения миры при заданном периоде m :

$$C_n^2 \simeq \frac{\ln \left[\frac{2}{\pi} K \left(\frac{\pi F}{kmR} \right) \right] + \ln \frac{4}{\pi \alpha}}{1,46 x k^{1/2} (2\pi F/m)^{5/2}}. \quad (8.26)$$

Нетрудно оценить значение периода миры, для которой наблюдается сильное размытие при максимальных значениях структурной характеристики. Задавая, например, $C_n^2 = 10^{-13} \text{ см}^{-2}$ и

располагая объектив с фокусным расстоянием $F = 1$ м на дистанции $x = 1500$ м от миры, находим, что контраст $\alpha = 0,1$ достигается при периоде $M = xm/F = 75$ см.

Если имеется набор мир с разным периодом, то значение \bar{C}_n^2 можно определить по величине периода миры M при заданной величине контраста α . Представим, как это сделано в [19], радиальную миру в виде набора параллельных мир с изменяющимся периодом $m = r\theta$, где r — текущий радиус окружности, проведенный из центра миры, θ — ее угловой период. Тогда величина \bar{C}_n^2 , согласно (8.26), определится в виде

$$\bar{C}_n^2 = \frac{\ln \frac{2}{\pi} K \left(\frac{2\pi F}{kdR\theta} \right) + \ln \frac{4}{\pi\alpha}}{1,46xk^{1/3} \left(\frac{4\pi F}{d\theta} \right)^{5/3}}, \quad (8.27)$$

где d — диаметр окружности, соответствующей контрасту α . Разлагая функцию $\frac{2}{\pi} K \left(\frac{2\pi F}{kdR\theta} \right)$ в ряд Маклорена

$$\frac{2}{\pi} K \left(\frac{2\pi F}{kdR\theta} \right) \simeq 1 - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\lambda}{2a} \middle| \frac{\theta d}{2f} \right) + \frac{4}{\pi 3!} \left(\frac{\lambda}{2a} \middle| \frac{\theta d}{2f} \right)^3 + \dots$$

и учитывая, что при достаточно сильной турбулентности и протяженных трассах угловая разрешающая способность объектива в вакууме $\lambda/2a$ всегда меньше, чем разрешающая способность $\theta d/2F$ в атмосфере, получим следующее приближенное выражение для вычисления структурной характеристики:

$$\bar{C}_n^2 \simeq \frac{\ln \frac{4}{\pi\alpha}}{1,46x^{1/3}k^{1/3} \left(\frac{4\pi F}{\theta d} \right)^{5/3}}. \quad (8.28)$$

Оценки показывают, что на трассе длиной порядка $x = 1$ км введенное упрощение дает ошибку не более 5% при $C_n^2 \gtrsim 10^{-15}$ см^{-2/3}.

Пренебрежение влиянием внутреннего масштаба при выводе формулы (8.21) приводит к завышению величины \bar{C}_n^2 не более чем на 10%. Учитывая, что в случае однородной трассы и квазисферического источника света интегральное значение структурной характеристики \bar{C}_n^2 связано, согласно (8.4), с истинной величиной соотношением $\bar{C}_n^2 = 3/8 C_n^2$, можно считать, что равномерно усредненная по всей трассе величина \bar{C}_n^2 равна

$$\bar{C}_n^2 = \frac{8}{3} C_n^2. \quad (8.29)$$

Измерения структурной характеристики по изложенной методике проводились в [37]. Здесь использовалась мира с переменным угловым периодом $\theta_1 = 1,96$ рад⁻¹ и $\theta_2 = 3,92$ рад⁻¹. Фотографирование проводилось над ровной степью на расстоянии $x = 770$ м.

Время экспозиции при съемке было равно 30 и 60 сек. Одновременно величина C_n^2 определялась по традиционной микрометеорологической методике (§ 1.6). В табл. 8.1 приведены результаты измерений диаметров размытия мира для различных значений контраста α . Величина $\alpha = 0,1$ соответствует полному визуальному размытию мира. Здесь же указаны значения C_n , определенные по метеоданным и по формулам (8.28), (8.29). При сравнении значений \bar{C}_n и C_n следует иметь в виду, что C_n относится к определенной точке трассы, в то время как \bar{C}_n представляет результат пространственного усреднения по всей трассе.

Таблица 8.1

Результаты определения структурной характеристики по размытию мира

Время дня, час, мин	d, μ	α	$\bar{C}_n \cdot 10^7,$ $\text{см}^{-1/3}$	$C_n \cdot 10^7,$ $\text{см}^{-1/3}$
8.30	1,63	0,79	1,15	0,7
	1,25	0,74	1,00	
	0,94	0,48	1,20	
	0,47	0,10		
10.00	1,50	0,79	1,00	1,2
	1,28	0,69	1,10	
	0,94	0,53	1,15	
	0,67	0,10		
12.30	1,63	0,68	1,4	1,2
	1,25	0,57	1,3	
	0,94	0,37	1,4	
	0,59	0,10		

Проведенные измерения показали, что перспективным методом является определение \bar{C}_n по визуальным наблюдениям диаметра полного размытия мира с помощью объектива с измерительной шкалой, которая наносится в соответствии с формулами (8.28) и (8.29) при $\alpha = 0,1$ и других фиксированных параметрах. Проведенная проверка показала хорошее совпадение значений \bar{C}_n , определенных по диаметру полного визуального размытия изображения мира и диаметру, соответствующему контрасту $\alpha = 0,1$ при фиксации изображения на фотопленке.

Каждая из рассмотренных методик обладает свойственными ей техническими недостатками и преимуществами. Разумный выбор оптических методов обеспечивает, как показывает практика, надежные измерения структурной характеристики турбулентности на лазерных атмосферных трассах.

§ 2. АМПЛИТУДНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ИНТЕРВАЛЕ ДИССИПАЦИИ

Разработка оптических методов измерения высокочастотной части спектра турбулентности является перспективной [2] в связи с тем, что малая длина волны оптического излучения позволяет в принципе исследовать такие мелкие детали структуры турбулентности, которые пока недоступны для изучения никакими другими способами. При исследовании тонкой структуры турбулентного потока важное значение приобретает и то обстоятельство, что оптический датчик абсолютно не воздействует на измеряемые характеристики.

Поведение спектральной плотности турбулентности в интервале диссипации в ряде случаев существенным образом определяет характеристики флуктуаций поля оптической волны. Это побуждает изыскивать способы контроля спектра, знание которого необходимо для изучения закономерностей распространения оптического излучения в среде и для прогнозирования статистических характеристик волны. С другой стороны, надежные экспериментальные данные о поведении спектральной плотности в интервале диссипации необходимы, чтобы разобраться в приемлемости многочисленных гипотез, которые используются в настоящее время для искусственного замыкания уравнений статистической гидродинамики [38], и исследовать вопрос о достоверности получаемых при этом моделей турбулентности.

Оптические методы предполагают измерение спектральных характеристик поля показателя преломления. Как следует из формул, представленных в § 1.4, флуктуации показателя преломления при определенных условиях полностью определяются изменениями температуры воздуха, и, следовательно, спектры этих величин можно считать подобными. Они отличаются, согласно (1.64) и (1.67), только численным коэффициентом

$$\Phi_n(x) = \left\langle \frac{\partial n}{\partial T} \right\rangle^2 \Phi_T(x), \quad (8.30)$$

где $\left\langle \frac{\partial n}{\partial T} \right\rangle = \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_{T=\langle T \rangle, P=\langle P \rangle}$ — производная показателя преломления, вычисленная при средних значениях температуры и давления.

Первые оценки параметров моделей спектра в области интервала диссипации ($x \simeq l_0^{-1}$, где l_0 — внутренний масштаб флуктуаций) были проведены в [13] для созданной в лабораторных условиях конвективной турбулентности. Здесь использовалась формула геометрооптического приближения (2.60) для дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности:

$$\sigma^2 = 3,2C_n^2 x^3 l_0^{-7/2}, \quad (8.31)$$

где x — длина трассы. Значения внутреннего масштаба l_0 определялись из (8.31) при независимом измерении структурной харак-

теристики показателя преломления C_n^2 . Позже такие измерения были повторены в атмосфере [39]. В дальнейшем к подобной идее оценки внутреннего масштаба возвращается автор работы [12].

В [12] был предложен способ определения l_0 по измерениям σ^2 на двух дистанциях. В этой работе приводятся графики зависимости отношения дисперсий логарифма амплитуды, измеряемых на двух фиксированных расстояниях, от величины внутреннего масштаба l_0 . Такие измерения обладают максимальной чувствительностью, когда приемники расположены на расстояниях x_1 и x_2 , удовлетворяющих условиям $\sqrt{\lambda x_1} \ll l_0$, $\sqrt{\lambda x_2} \gg l_0$. Они позволяют получать данные о внутреннем масштабе, не обращаясь к независимым измерениям C_n^2 . Однако необходимо быть уверенным при этом, что турбулентность строго одинакова на короткой и длинной трассах.

Используя зависимость коэффициента пространственной корреляции флуктуаций логарифма амплитуды плоской волны от величины внутреннего масштаба l_0 [40, 41], авторы работы [42] провели измерения на атмосферной трассе длиной 10 м в различное время суток и оценили значения l_0 путем совмещения экспериментальных кривых с расчетными.

Значительно большей чувствительностью и возможностью определять, помимо значений параметров для различных моделей спектра, еще и функциональный вид спектральной плотности в интервале диссипации обладает метод спектральных измерений флуктуаций логарифма интенсивности [43—45], на изложении которого мы остановимся более подробно.

Этот метод основан на использовании полученного в [11] интегрального уравнения, связывающего пространственную трехмерную спектральную плотность флуктуаций показателя преломления и временной спектр флуктуаций логарифма амплитуды плоской волны $W_x(\omega)$:

$$W_x(\omega) = \frac{8\pi^2 k^2 x}{v_{\perp}} \int_{\frac{\omega}{v_{\perp}}}^{\infty} \frac{1 - \frac{k}{\kappa^2 x} \sin \frac{\kappa^2 x}{k}}{\sqrt{\kappa^2 - \frac{\omega^2}{v_{\perp}^2}}} \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (8.32)$$

Здесь v_{\perp} — перпендикулярная к трассе компонента скорости ветра. Дисперсия флуктуаций логарифма амплитуды

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) d\omega$$

следует из выражений (2.49), (2.50), (2.52) и может быть представлена [11] в форме

$$\langle \chi^2 \rangle = 2\pi k^2 x \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 x} \sin \frac{\kappa^2 x}{k}\right) \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (8.33)$$

Спектр $\Phi_n(x)$ возьмем в соответствии с (8.30) и (1.86) в виде

$$\Phi_n(x) = 0,033C_n^2 x^{-11/3} \varphi(x\eta_0), \quad (8.34)$$

где функция $\varphi(x\eta_0)$ учитывает отклонения от чисто степенного спектра в интервале диссипации ($x\eta_0 \geq 1$), а $\eta_0 = \chi^{2/3} \varepsilon^{-1/3}$ — колмогоровский масштаб температурных флуктуаций, выражающийся через молекулярную теплопроводность χ и скорость диссипации кинетической энергии турбулентности ε .

Используя выражения (8.32) — (8.34) и проводя соответствующие вычисления, получаем функциональное соотношение вида

$$U(X, G) = \frac{2}{\pi} \frac{X \int_0^\infty dy \left(1 - \frac{\sin(y^2 + X^2)}{y^2 + X^2}\right) (y^2 + X^2)^{-11/6} \varphi\left(\sqrt{\frac{y^2 + X^2}{G}}\right)}{\int_0^\infty dy \left(1 - \frac{\sin y^2}{y^2}\right) y^{-11/3} \varphi\left(\sqrt{\frac{y^2}{G}}\right)}. \quad (8.35)$$

Здесь $U(X, G) = \omega W_x(\omega)/2\pi \langle \chi^2 \rangle$ — нормированный безразмерный спектр, зависящий от безразмерной частоты $X = \omega \sqrt{x/k}/v_\perp$, а $G = x/k\eta_0^2$ — волновой параметр, вычисленный относительно внутреннего масштаба η_0 .

Чтобы продемонстрировать чувствительность метода к возможным изменениям вида функции φ и входящих в нее параметров, воспользуемся известными в настоящее время модельными представлениями спектра [11, 46—49]:

$$\varphi(x\eta_0) = \exp[-(\gamma x\eta_0)^{4/3}], \quad [46], \quad (8.36)$$

$$\varphi(x\eta_0) = \exp[-(\gamma x\eta_0)^2], \quad [47], \quad (8.37)$$

$$\varphi(x\eta_0) = \exp[-\gamma x\eta_0], \quad [48], \quad (8.38)$$

$$\varphi(x\eta_0) = \exp[-(\gamma x\eta_0)^{1/2}], \quad [11, \S 12], \quad (8.39)$$

$$\varphi(x\eta_0) = \exp\left[-\frac{8}{\sigma^2} \ln^2(\gamma x\eta_0)\right], \quad [49], \quad (8.40)$$

где γ — постоянная, которая должна определяться экспериментальным путем; σ^2 — дисперсия флуктуаций логарифма скорости диссипации энергии. На рис. 8.5 представлены безразмерные спектры $U(X, G)$ для различных типов затухания φ в спектре температуры, а на рис. 8.6 показаны результаты расчета для изменяющихся значений внутреннего масштаба. Отсюда видно, что изменение характера и масштабного коэффициента затухания в спектре температуры заметно проявляется в высокочастотной области спектра $U(X, G)$.

Вклад высоких частот, содержащих основную информацию о мелкомасштабной турбулентности, в величину дисперсии флуктуаций логарифма амплитуды $\chi(t)$ мал. Поэтому удобно измерять и анализировать не $\chi(t)$, а производную $\dot{\chi} = d\chi/dt$. Связь спектров

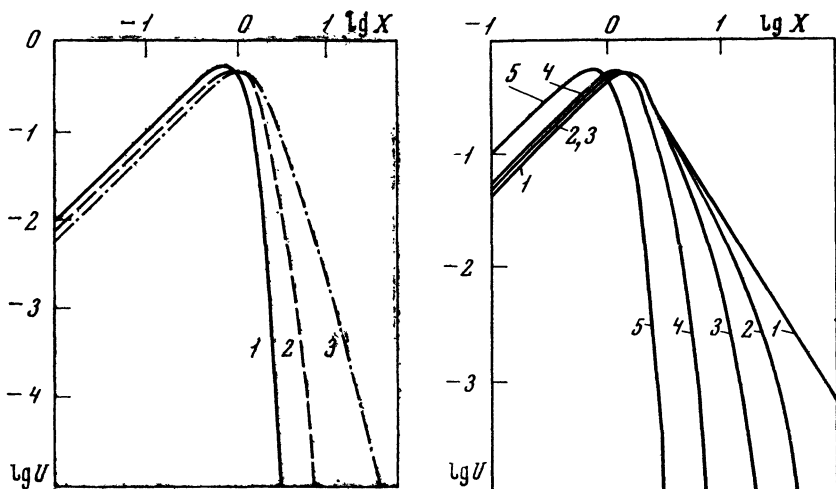


Рис. 8.5. Спектральные функции $U(X, G)$ для различных типов затухания в вязком интервале спектра турбулентности $\varphi(\kappa\eta_0) = \exp[-f(\gamma\kappa\eta_0)]$, $G = 1$

1 - $f(x) = x^2$; 2 - $f(x) = x$; 3 - $f(x) = \sqrt{x}$

Рис. 8.6. Спектральные функции $U(X, G)$ для модели (8.37) при различных значениях волнового параметра $G_\gamma = G/\gamma^2$

1 - $G_\gamma = \infty$; 2 - $G_\gamma = 10^2$; 3 - $G_\gamma = 10^3$; 4 - $G_\gamma = 10$; 5 - $G_\gamma = 1$

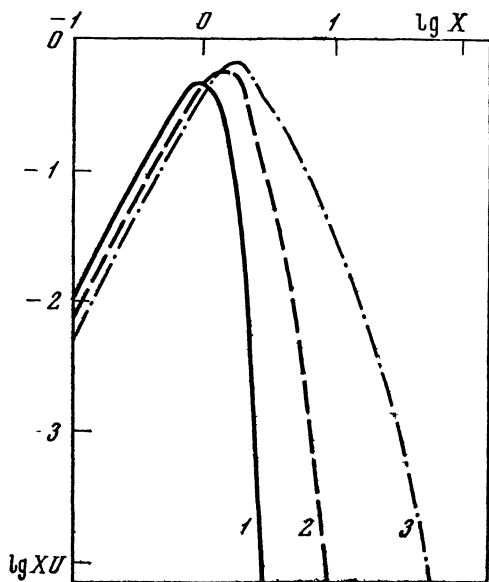
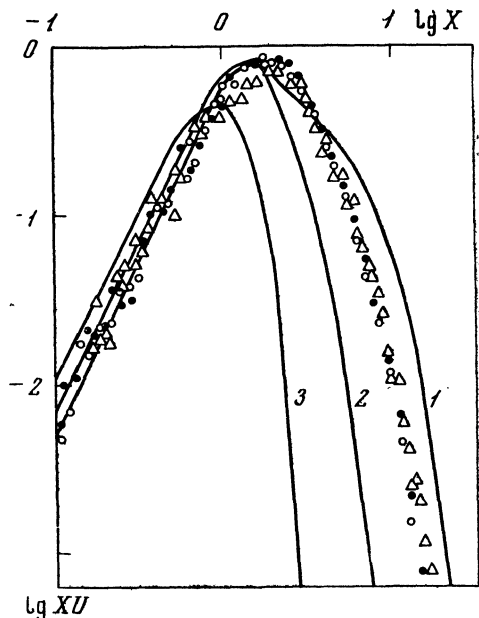


Рис. 8.7. Спектральные функции $XU(X, G)$, соответствующие кривым на рис. 8.5

Рис. 8.8. Спектральные функции $XU(X, G)$ для модели (8.37) при различных значениях волнового параметра

- 1 — $G_\gamma = 10^2$;
 2 — $G_\gamma = 10$;
 3 — $G_\gamma = 1$; значки — экспериментальные данные



уровня $\chi(t)$ и производной $\dot{\chi}(t)$ очевидна: $W_{\dot{\chi}}(\omega) = \omega^2 W_{\chi}(\omega)$. Преимущество использования производной для повышения чувствительности метода наглядно видно из рис. 8.7, 8.8, где представлены графики безразмерной функции

$$XU(X) = \frac{W_{\dot{\chi}}}{2\pi \langle \chi^2 \rangle v_{\perp}} \sqrt{\frac{x}{k}}.$$

Сравнивая измеренные спектры с рассчитанными для различных моделей турбулентности, можно выяснить степень достоверности этих моделей, а также оценить значения входящих в них параметров. Более полную информацию о спектральной плотности можно получить, обратив функциональное соотношение (8.35) и найдя функцию $\varphi(\chi\eta_0)$.

Измерения частотных спектров W_{χ} и $W_{\dot{\chi}}$ осуществлялись [43—45] с помощью одномодового гелий-неонового лазера ($\lambda = 0,6328$ мкм), на выходе которого была установлена телескопическая система с объективом диаметра $D = 20$ см, что обеспечивало формирование квазиплоской волны на расстояниях $x_1 = 50$ м и $x_2 = 25$ м. На приемном конце коаксиально с выходом лазера устанавливалась приемная труба длиной 1 м. Пучок света проходил на высоте 1 м над ровным участком степи в районе г. Цимлянска, покрытым невысокой (порядка 15 см) травой. Диаметр входной диафрагмы выбирался равным $d = 0,3 \div 0,5$ мм. Измерения проводились в дневное время в основном при безоблачной погоде с достаточно сильным ветром ($\langle v \rangle = 3 \div 5$ м/сек). Угол между направлением ветра и направлением трассы был больше 60° .

Сигнал, пропорциональный световому потоку через диафрагму, проходил далее через логарифмический усилитель и поступал непосредственно или после дифференцирующей цепочки в систему регистрации и обработки. Для обработки применялась запись процессов χ и $\dot{\chi}$ на магнитную ленту после прохождения аналого-цифрового преобразователя. Выборка значений проводилась с частотой 25 кГц. Процессы χ и $\dot{\chi}$ вводились затем с магнитной ленты в ЭВМ. Определение спектральной плотности χ и $\dot{\chi}$ производилось путем сглаживания периодограмм, вычисленных методом быстрого преобразования Фурье [50]. Форма спектрального окна принималась прямоугольной, а его ширина выбиралась путем модельных расчетов со спектрами ожидаемой формы. Сигналы χ и $\dot{\chi}$ записывались последовательно во времени, а спектральная плотность $U(X)$ находилась путем «сшивания» получаемых при этом спектров $U(X, G) = \omega W_x(\omega)/2\pi \langle \chi^2 \rangle$ и $XU(X, G) = W_x \sqrt{x}/(2\pi \langle \chi^2 \rangle v_\perp \sqrt{k})$ в точке $X = 1$.

Сравним полученные таким образом спектры с рассчитанными по формуле (8.35) для различных моделей турбулентности. На рис. 8.8 и 8.9 экспериментальные значения $XU(X, G)$ нанесены на семейство расчетных кривых, соответствующих различным значениям волнового параметра G_γ . По наилучшему совпадению расчетных кривых с экспериментальной можно найти эффективный внутренний масштаб $\gamma\eta_0$ для каждой из моделей:

$$\gamma\eta_0 = \sqrt{\frac{x}{kG_\gamma}}.$$

Нетрудно убедиться, что величина $\gamma\eta_0$ пропорциональна внутреннему масштабу l_0 , определяемому как точка пересечения асимптотик (1.78) и (1.79) (см. § 1.5).

Из рис. 8.8 и 8.9 видно, что наилучшее совпадение экспериментальных данных с расчетными обеспечивается для моделей (8.38) и (8.40), причем наличие двух параметров в (8.40) позволяет осуществить почти идеальное совмещение расчетной и эмпирической кривых. Полученные значения внутреннего масштаба $l_{01} = 0,23$, $l_{02} = 0,3$ и $l_{03} = 0,2$ см соответственно для функций (8.37), (8.38) и (8.40) приблизительно совпадают. Это означает, что при удачном выборе модели высокочастотной составляющей спектра значение внутреннего масштаба является одной из основных характеристик турбулентности.

Получим теперь более детальную информацию о спектре, обратившись к функциональному соотношению (8.35). Его можно рассматривать как интегральное уравнение типа Абеля для искомой функции $\varphi(z)$, если известен функционал от этой функции вида

$$F = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin y^2}{y^2}\right) y^{-\alpha} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{G}}\right) dy.$$

Рис. 8.9. Сравнение экспериментальных функций $XU(X, G)$ с расчетными

a — модель (8.38):

1 — $G_\gamma = 10^2$;

2 — $G_\gamma = 10$;

3 — $G_\gamma = 1$;

b — модель (8.39):

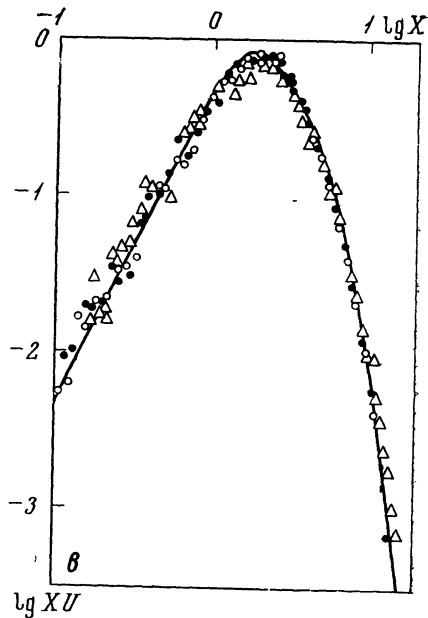
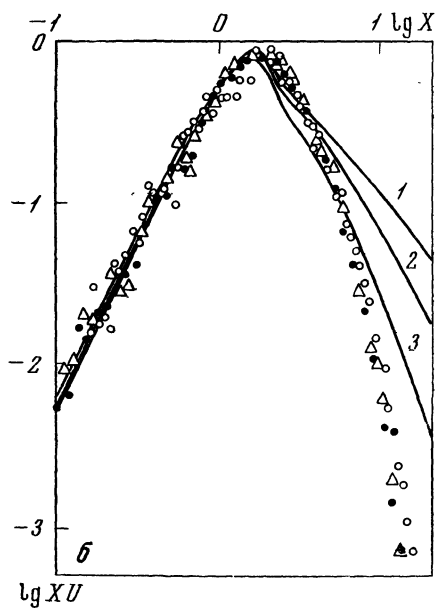
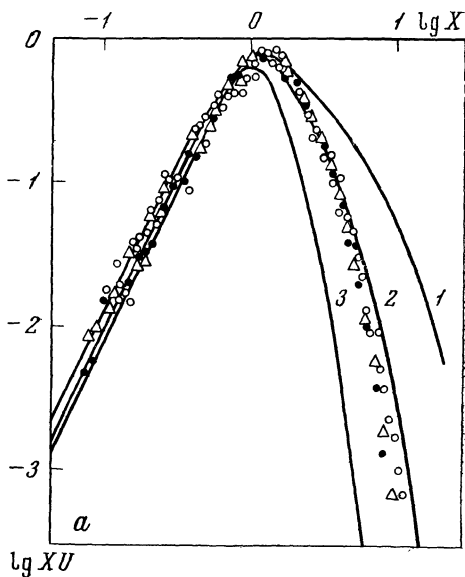
1 — $G_\gamma = 10^2$;

2 — $G_\gamma = 10$;

3 — $G_\gamma = 1$;

в — модель (8.40):

$G_\gamma = 10$; $\sigma = 2$; значки — экспериментальные данные



Величина F , как следует из формул (8.33) и (8.34), равна

$$F = \langle \chi^2 \rangle / 2\pi \cdot 0,033 C_n^2 k^{7/6} x^{11/6} \quad (8.41)$$

и легко находится при независимом определении структурной характеристики C_n^2 . Величина C_n^2 может быть определена из дополнительных метеорологических (§ 1.6) или оптических (§ 8.1) измерений. Заметим также, что функционал F , согласно (2.66) и (8.41), однозначно связан с дисперсией логарифма амплитуды, измеренной в дальней зоне ($G \gg 1$) в условиях слабых флуктуаций интенсивности.

Если указанные дополнительные измерения отсутствуют, то функция $\varphi(z)$ определяется из соотношения (8.35) с точностью до постоянного множителя. Учитывая, что по определению (8.34) $\varphi(\kappa\eta_0)$ стремится к единице при $\kappa\eta_0 \rightarrow 0$, можно пользоваться приближенным условием нормировки $\varphi(\kappa\eta_0) \simeq 1$, $\kappa\eta_0 \ll 1$. Однако при этом требуется находить значения функции $\varphi(\kappa\eta_0)$ в области $\kappa\eta_0 \ll 1$ достаточно точно. Если измерения проводятся на одной дистанции и при одинаковых метеорологических режимах турбулентности, то ожидаемый разброс значений $\varphi(\kappa\eta_0)$, обусловленный отсутствием нормировки, будет незначительным. Именно при таких условиях были проведены наблюдения в работе [45].

Следуя этой работе, вместо $\varphi(\kappa\eta_0)$ будем рассматривать функцию

$$\varphi_1(\kappa\eta_0) = \frac{2\varphi(G^{-1/2}\kappa\eta_0)}{1,35\pi \int_0^\infty (1 - y^{-2} \sin y^2) y^{-5/3} \varphi(G^{-1/2}y) dy},$$

которая удовлетворяет, согласно (8.35), интегральному уравнению типа Абеля:

$$U(X) = 1,35X \int_X^\infty (1 - y^{-2} \sin y^2) y^{-5/3} (y^2 - X^2)^{-1/2} \varphi_1(y) dy. \quad (8.42)$$

Несмотря на то что уравнение (8.42) имеет [51] формальное аналитическое решение, задача отыскания $\varphi_1(X)$ по измеренной с реальными ошибками спектральной плотности $U(X)$ на основе уравнения (8.42) является некорректной [52]. Для нахождения физически пригодного решения этой задачи необходимо использовать дополнительные сведения о поведении искомой функции φ_1 . При решении уравнения (8.42) в [45] был применен метод статистической регуляризации, в котором использована информация о положительности функции $\varphi_1(X)$ и обращении ее производной в нуль при $X \rightarrow 0$ [53].

Для проверки методики вычислений был проведен численный эксперимент, в котором значения $U(X) = U_0(X)$ определялись из соотношения (8.35) путем подстановки в правую часть функции $\varphi_1^0(y) = \exp(-0,05y^2)$. К значениям $U_0(X)$ добавлялась случай-

ная ошибка $\beta S(X)$, где $S(X)$ — среднеквадратичная ошибка экспериментальных данных, а β — независимые случайные числа с нулевым средним и единичной дисперсией. Результат обращения (8.42) для левой части вида $U(X) = U_0(X) + \beta S(X)$ представлен на рис. 8.10 вместе с пробной функцией φ_1^0 , значения которой, как видно из рисунка, не выходят за пределы доверительного интервала для уровня значимости 0,95. Путем прямых расчетов были исследованы также возможные ошибки восстановления, которые возникают из-за «сшивания» функции спектральной плотности $U(X)$, вычисленной из записей процессов χ и $\dot{\chi}$. Оказалось, что в пределах разумных значений ошибки сшивания форма φ_1^0 заметно не меняется.

На рис. 8.11 представлены результаты обращения уравнения (8.42) с использованием экспериментально полученных функций $U(X)$. Восстановленные данные усреднены по шести эмпирическим кривым и нормированы так, что $\varphi_1(0) = 1$. Вертикальными отрезками показаны оценки среднеквадратического отклонения экспериментальных данных. Здесь же приведена относительная ошибка восстановления σ/φ_1 , получаемая для каждой отдельной спектральной кривой за счет неточности измерений исходной функции $U(X)$. Рост этой ошибки с уменьшением $\kappa\eta_0$ связан с характером задаваемой ошибки функции $U(X)$ и малой информативностью ядра уравнения (8.42) в области $\kappa\eta_0 \ll 1$.

Представленная на рис. 8.11 функция $\varphi_1(\kappa\eta_0)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с полученной из эксперимента оценкой истинного значения универсальной функции $\varphi(\kappa\eta_0)$, характеризующей поведение спектральной плотности температурных микропульсаций (1.86) в интервале диссипации кинетической энергии турбулентности. Подъем $\varphi_1(\kappa\eta_0)$ в области $\kappa\eta_0 \simeq 1$ может быть связан с проявлением молекулярной теплопроводности.

Интересно сравнить полученный спектр с экспериментальными спектрами температуры, измеренными с помощью микротермометров [54, 55], и спектром пульсаций скорости. Поскольку в этих работах измерялись одномерные спектры $V(\kappa)$, воспользуемся вытекающей из (1.39) формулой перехода

$$V(\kappa) = 2\pi \int_{\kappa}^{\infty} \kappa \Phi(\kappa) d\kappa.$$

Тогда, подставляя в нее выражение (8.34), получаем

$$V_n(\kappa) = 2\pi \cdot 0,033 C_n^2 \int_{\kappa}^{\infty} \kappa^{-5/4} \varphi(\kappa\eta_0) d\kappa. \quad (8.43)$$

На рис. 8.12 спектр $V_n(\kappa)$, вычисленный по формуле (8.43) с использованием экспериментальной кривой, представленной на рис. 8.11, нанесен кружками. Кривая 2 соответствует измеренному с помощью микротермометра спектру температурных флуктуа-

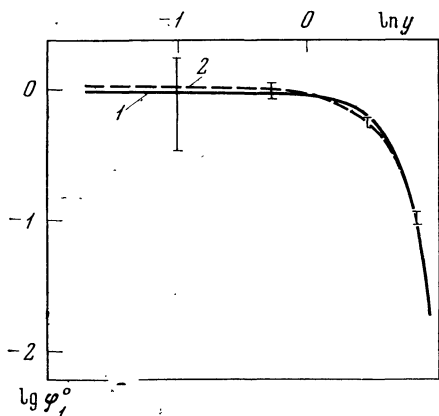


Рис. 8.10. Результаты численного эксперимента по замкнутой схеме

1 — функция φ_1^0 ;
2 — восстановленная функция φ_1^0

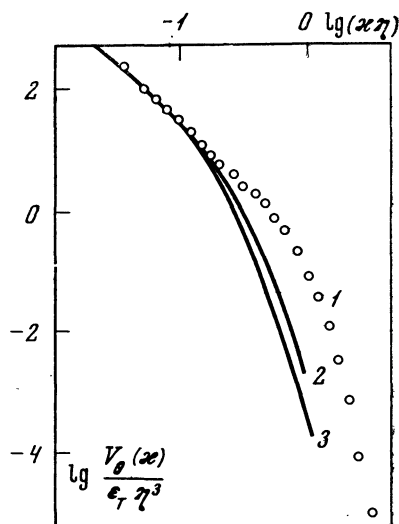
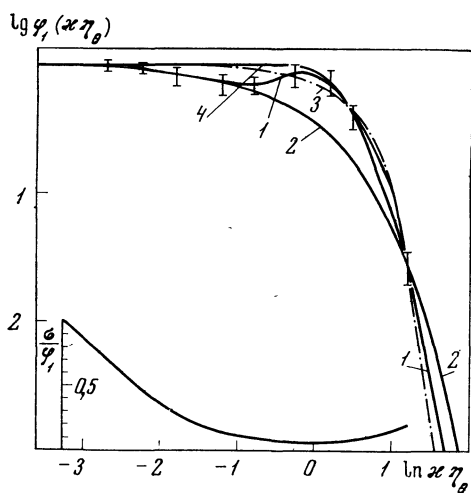


Рис. 8.11. Функция спектральной плотности температурных микропульсаций в интервале диссипации

1 — усредненные восстановленные значения функции φ_1 по шести экспериментальным спектрам $U(X)$; 2—4 — модельные спектры: 2 — (8.38); 3 — (8.37); 4 — (8.40)

Рис. 8.12. Одномерные спектры температуры и скорости

1 — спектр температуры, вычисленный по формуле (8.41) с использованием экспериментальной функции $\varphi_1(x\eta_0)$ (кривая 1 на рис. 8.11); 2 — измеренный в [54]; 3 — спектр скорости, измеренный в [54]

ций, нормированному на произведение скорости выравнивания температурных неоднородностей ϵ_T (I § 5) и куб внутреннего масштаба η^3 . Масштаб η связан с масштабом температурных микропульсаций η_0 равенством $\eta = (\nu/\chi)^{2/3}\eta_0$, где ν — молекулярная вязкость среды. Ввиду отсутствия абсолютной нормировки данных оптических измерений значения сравниваемых спектров в области инерционного интервала совмещались. Кривая 3 соответствует спектру скорости, измеренному в [54] и совмещенному с температурным спектром в инерционном интервале.

Как видно из графиков рис. 8.12, одномерный спектр, полученный из оптических измерений, спадает в области высоких частот несколько медленнее, чем спектр, полученный с помощью термосопротивления [54, 55]. В то же время отмеченная выше (рис. 8.11) немонотонность $\varphi_1(k\eta_0)$ практически не проявляется в одномерных спектрах. Различие в высокочастотной части спектров превосходит возможную неточность оценки колмогоровского масштаба η в экспериментах. Возможно, что несовпадение сравниваемых спектральных плотностей в области $k\eta \geq 1$ является следствием искажающего влияния датчика на структуру потока.

Продемонстрированная выше эффективность измерений высокочастотной части спектра турбулентности при лазерном просвечивании потока позволяет надеяться, что в будущем оптические методы измерения спектров получают дальнейшее развитие и найдут широкое применение.

§ 3. ФАЗОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ИНТЕРВАЛЕ

Колмогоровская модель спектральной плотности флуктуаций показателя преломления не в состоянии объяснить (гл. III, V) некоторые экспериментальные результаты. Это относится, например, к измерениям структурной функции фазы при разнесении точек наблюдения, сравнимом с высотой приземной трассы, и корреляционной функции флуктуаций пространственного положения центров горизонтально разнесенных оптических пучков. Для описания этих характеристик обычно используются изотропные модели (1.88) и (1.89), учитывающие отклонение функциональной зависимости спектра от степенного закона в энергетическом интервале волновых чисел.

Оставаясь в рамках изотропной модели, можно получить функциональный вид спектра показателя преломления в энергетическом интервале из измерений пространственной корреляционной функции фазы оптического излучения [56].

Для таких измерений были использованы [57] два идентичных пространственно разнесенных одномодовых лазерных пучка. Распределение поля в начальном сечении пучка зададим в виде

$$U_0(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - ik\frac{\rho^2}{2a^2}\right), \quad (8.44)$$

где a — эффективный радиус пучка, F — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры. Корреляционная функция флуктуаций фазы в центрах параллельных пучков, разнесенных на расстояние ρ , в первом приближении метода плавных возмущений имеет вид [57]

$$B_S(\rho) = \int d^2\kappa \Phi_n(\kappa) f_S(\kappa) e^{i\kappa\rho}, \quad (8.45)$$

где

$$f_S(\kappa) = \pi k^2 \operatorname{Re} \int_0^x dx' \left[e^{-\frac{\gamma_2 \kappa^2 (x-x')}{k}} + e^{-\frac{i\gamma \kappa^2 (x-x')}{k}} \right];$$

$$\gamma = \frac{1 + i\alpha x'}{1 + i\alpha x}, \quad \gamma_2 = -\operatorname{Im} \gamma, \quad \alpha = \frac{1}{ka^2} + \frac{i}{F}.$$

Предполагая спектр $\Phi_n(\kappa)$ изотропным ($\Phi_n(\kappa) = \Phi_n(\kappa)$), выразим спектральную плотность через корреляционную функцию в виде преобразования Ганкеля:

$$\Phi_n(\kappa) = \frac{(2\pi)^{-1}}{f_S(\kappa)} \int_0^\infty B_S(\rho) J_0(\kappa\rho) \rho d\rho. \quad (8.46)$$

Количественное определение величины интервалов устойчивого восстановления $\Phi_n(\kappa)$ по измерениям $B_S(\rho)$ и относительных ошибок необходимо получать в конкретном численном эксперименте.

С этой целью проведем предварительные расчеты по замкнутой схеме. Воспользуемся кармановской моделью спектральной плотности

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/2}, \quad (8.47)$$

где $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ — волновое число, соответствующее внешнему масштабу модели. Подставляя модельный спектр в формулу (8.45) и рассматривая трассы, протяженность которых ограничена ус-

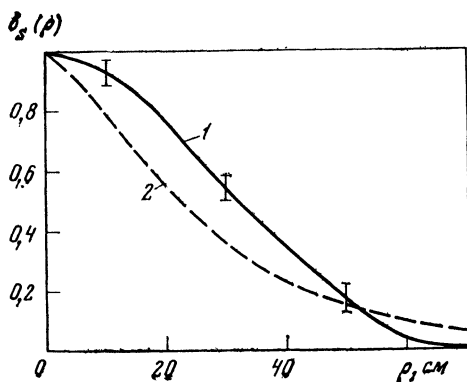


Рис. 8.13. Коэффициент корреляции фазы

1 — экспериментальные данные;
2 — модель Кармана (8.48) при $\kappa_0 = 4,6 \text{ м}^{-1}$

ловием $\frac{\kappa_0^2 x}{k} \ll 1$, для коэффициента корреляции фазы будем иметь

$$b_S(r) = \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{2\tau} r^{5/6} K_{5/6}(r), \quad (8.48)$$

где $r = \kappa_0 \rho$, $K_\alpha(x)$ — функция Макдональда.

Экспериментальные измерения корреляционной функции флуктуаций фазы проводились в атмосфере на трассе длиной $x = 110$ м. Высота трассы над подстилающей поверхностью составляла 1,5 м. Излучение гелий-неонового лазера ($\lambda = 0,6328$ мкм) формировалось в два одинаковых коллимированных гауссовых пучка с выходным размером $a^2 = 10 \cdot (x/k)$. Пучки разносились в горизонтальном направлении на расстояние ρ . В плоскости приема с помощью цифрового оптического фазометра регистрировались фазовые флуктуации в центрах пучков [57]. Полученный экспериментально коэффициент корреляции $b_S(\rho)$ приведен на рис. 8.14. Вертикальными линиями показаны доверительные интервалы по уровню значимости $\Delta = 90\%$. Для сравнения корреляционных функций на рис. 8.13 нанесен коэффициент корреляции (8.48) при $\kappa_0 = 4,6$ м⁻¹. Полученное из сравнения модельного и восстановленного спектров значение внешнего масштаба ($L_0 = 2\pi/\kappa_0 = 1,3$ м) приблизительно совпадает с высотой трассы $h = 1,5$ м, что согласуется с существующими представлениями [11] о величине L_0 в приземном слое атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Обухов. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1953, № 2, 155—165.
2. А. С. Гурвич. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1968, 4, № 2, 160—169.
3. В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1960, 3, № 4, 551—583.
4. R. W. Lee. Radio Sci., 1969, 4, No. 12, 1211—1233.
5. D. T. Gjessing. Radio Sci., 1969, 4, No. 12, 1195—1210.
6. R. W. Lee, J. C. Harp. Proc. IEEE, 1969, 57, No. 4, 375—406.
7. D. L. Fried. Proc. IEEE, 1969, 57, No. 4, 415—420.
8. V. E. Derr, C. G. Little. Appl. Optics, 1970, 9, No. 9, 1976—1992.
9. R. S. Lawrence. In: Remote sensing of the troposphere. Ed. by V. E. Derr. Boulder, Colo., 1972.
10. C. G. Little. In: Remote sensing of the troposphere. Ed. by V. E. Derr. Boulder, Colo., 1972.
11. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
12. P. M. Livingstone. Appl. Optics, 1972, 11, No. 3, 684—687.
13. А. С. Гурвич, Б. Н. Мелешкин. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1966, 2, № 7, 688—694.
14. G. J. Morris. J. Opt. Soc. Amer., 1973, 63, No. 3, 263—270.
15. P. Burlamacchi, A. Consortini. Optica Acta, 1967, 14, No. 1, 17—26.
16. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1963, 6, № 3, 488—494.
17. А. А. Семенов, А. А. Тищенко, Т. И. Арсеньян. Изв. ВУЗов,

- серия «Физика», 1972, № 2, 144—146.
18. *Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов.* «Радиотехника и электроника», 1964, 9, № 11, 1944—1947.
 19. *Г. А. Андреев, В. М. Кузнецов, В. Э. Цейтлин.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1971, 7, № 9, 987—990.
 20. *Г. А. Андреев, Г. М. Хохлов.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1971, 7, № 10, 1045—1052.
 21. *А. С. Гурвич, И. А. Старобинец, А. М. Черемухин.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1974, 10, № 4, 413—416.
 22. *М. А. Каллистратова.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1966, 9, № 1, 50—56.
 23. *М. А. Каллистратова.* В кн.: «Атмосферная оптика». Под ред. Н. Б. Дивари. М., «Наука», 1968.
 24. *А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1968, 11, № 1, 66—71.
 25. *В. А. Банаж, В. Л. Миронов, Т. В. Мышкина.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1973, 9, № 5, 539—543.
 26. *И. Г. Колчинский.* Оптическая нестабильность атмосферы по наблюдениям звезд. Киев, «Наукова думка», 1967.
 27. *М. А. Воробьев, А. С. Гурвич, И. А. Старобинец.* Устройство для измерения структурной характеристики показателя преломления атмосферы. Авт. свид. СССР № 386325.— Бюллетень «Открытия и изобретения, промышленные образцы и товарные знаки», 1973, № 26.
 28. *В. Г. Бахтияров, А. Ф. Жуков, В. А. Троепольский, С. С. Хмельцов, Р. Ш. Цвык.* В кн.: «II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения. Тезисы докладов». Томск, 1973, стр. 258—260.
 29. *И. А. Старобинец.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1972, 15, № 5, 738—742.
 30. *Т. Г. Власова, Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин.* Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1971, 14, № 6, 876—879.
 31. *Э. С. Вартамян, А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, Р. Г. Манучарян.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1970, 6, № 8, 844—845.
 32. *Р. А. Kazarian, A. S. Gurvich, R. G. Manucharian, E. S. Vartanian.* Proc. IEEE, 1970, 58, No. 10, 1546—1547.
 33. *Э. М. Крикунова, Ф. А. Маркус, Н. И. Муравьев, А. М. Черемухин.* В кн.: «II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Тезисы докладов». Томск, 1973, стр. 291—293.
 34. *А. А. Тищенко.* Изв. ВУЗов, серия «Физика», 1973, № 7, 45—50.
 35. *C. V. Hogge, W. L. Visinsky.* Appl. Optics, 1971, 10, No. 4, 889—891.
 36. *Э. О'Нейл.* Введение в статистическую оптику. Пер. с англ. Под ред. П. Ф. Паршина. М., «Мир», 1966.
 37. *В. Г. Закин, Э. М. Крикунова, А. М. Черемухин.* В кн.: «II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Тезисы докладов». Томск, 1973, стр. 294—296.
 38. *А. С. Монин, А. М. Яглож.* Статистическая гидромеханика. Т. 1. М., «Наука», 1965; Т. 2. 1967.
 39. *J. R. Kerr.* J. Opt. Soc. Amer., 1972, 62, No. 9, 1040—1049.
 40. *J. W. Strohbehn.* J. Geophys. Res., 1966, 71, No. 24, 5793—5808.
 41. *J. W. Strohbehn.* J. Geophys. Res., 1970, 75, No. 6, 1067—1076.
 42. *D. A. Gray, A. T. Waterman.* J. Geophys. Res., 1970, 75, No 6, 1077—1083.
 43. *Н. С. Тиме.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1972, 8, № 1, 91—92.
 44. *А. С. Гурвич, Н. С. Тиме.* Изв. АН СССР, серия «Механика жидкости и газа», 1973, № 6, 142—145.
 45. *А. С. Гурвич, Н. С. Тиме, Л. С. Туровцева, В. Ф. Турчин.* Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1974, 10, № 5, 484—492.
 46. *У. Н. Рао.* Phys. of Fluids, 1965, 8, No 6, 1063—1075.

47. *Е. А. Новиков*. Докл. АН СССР, 1961, **139**, № 2, 331—334.
48. *Г. А. Кузьмин*. Прикл. мех. и техн. физика, 1971, № 4, 63—71.
49. *Б. С. Келлер, А. М. Яглом*. Изв. АН СССР, серия «Механика жидкости и газа», 1970, № 3, 70—79.
50. *М. З. Холмянский*. В кн.: «Электронно-вычислительная техника и программирование». Под ред. О. В. Голосова и В. И. Цветкова. Вып. 4. М., «Статистика», 1971, стр. 26—39.
51. *Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон*. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.
52. *В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич*. Успехи физ. наук, 1970, **102**, № 3, 345—386.
53. *В. Ф. Турчин, Л. С. Туровцева*. «Оптика и спектроскопия», 1974, **36**, № 2, 280—286.
54. *N. E. J. Boston, R. W. Burling*. J. Fluid Mech., 1972, **55**, No. 3, 473—492.
55. *C. H. Gibson, G. R. Stegen, R. B. Williams*. J. Fluid Mech., 1970, **41**, No. 1, 153—167.
56. *В. П. Лукин, В. Л. Миронов, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 1976, № 5, 550—553.
57. *В. П. Лукин, В. В. Покасов*. Изв. ВУЗов, серия «Радиофизика», 1973, **16**, № 11, 1726—1729.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
<i>Глава I</i>	
СТРУКТУРА ПОЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ	7
§ 1. Случайные и детерминированные функции	7
§ 2. Структурные функции и их спектры	9
§ 3. Корреляционные и спектральные функции случайных полей	18
§ 4. Показатель преломления в атмосфере	24
§ 5. Кинематика турбулентности и структура поля температуры и показателя преломления	26
§ 6. Микрометеорология приземного слоя воздуха	35
§ 7. Оптические свойства турбулентности в свободной атмосфере	48
<i>Глава II</i>	
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ	56
§ 1. Метод малых возмущений	58
§ 2. Параболическое уравнение и метод плавных возмущений	60
§ 3. Флуктуации амплитуды и фазы световых волн в турбулентной среде	64
§ 4. Метод Гюйгенса — Кирхгофа	77
§ 5. Марковское приближение	80
<i>Глава III</i>	
ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ И НАРУШЕНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ В ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКАХ	86
§ 1. Флуктуации фазы в световых пучках	86
§ 2. Нарушение когерентности в лазерных пучках	95
§ 3. Влияние турбулентности атмосферы на работу систем оптического гетеродинамирования	101
<i>Глава IV</i>	
СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛАЗЕРНОМ ПУЧКЕ	106
§ 1. Когерентный световой пучок	106
§ 2. Средняя интенсивность в пучках на неоднородной трассе	112
§ 3. Частично-когерентный пучок	116
§ 4. Влияние размеров оптических систем на формирование световых пучков	118

Глава V

СЛУЧАЙНЫЕ СМЕЩЕНИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ	123
§ 1. Вывод основной формулы для случайного смещения пучка	123
§ 2. Дисперсия смещений центра тяжести светового пучка	126
§ 3. Корреляционные функции смещений пучков	133
§ 4. Дрожание лазерных пучков при распространении в приземном слое атмосферы	139

Глава VI

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ	144
§ 1. Расчеты флуктуаций логарифма интенсивности в ограниченных пучках	144
§ 2. Приближенные расчеты сильных флуктуаций	159
§ 3. Распределение вероятностей флуктуаций интенсивности	177
§ 4. Экспериментальные исследования флуктуаций интенсивности	186
§ 5. Случайные пространственные выбросы интенсивности	211

Глава VII

УСРЕДНЯЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕДАЮЩИХ И ПРИЕМНЫХ АПЕРТУР	217
§ 1. Влияние приемника на флуктуации интенсивности в плоской и сферической волнах	217
§ 2. Частотный спектр флуктуаций полного светового потока	224
§ 3. Мерцание некогерентных источников конечных угловых размеров	227
§ 4. Усреднение флуктуаций в пространственно-ограниченном пучке протяженным объективом	231
§ 5. Дрожание изображений в фокальной плоскости объектива	235
§ 6. Экспериментальные исследования усредняющего действия приемной апертуры	240

Глава VIII

ОПТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	248
§ 1. Измерение структурной характеристики флуктуаций показателя преломления	248
§ 2. Амплитудные измерения спектра турбулентности в интервале диссипации	261
§ 3. Фазовые измерения спектра турбулентности в энергетическом интервале	274

ЛАЗЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Утверждено к печати
Институтом физики атмосферы Академии наук СССР

Редактор *З. И. Фейзулин*
Редактор издательства *Э. С. Пазлинова*
Художник *В. В. Фирсова*
Художественный редактор *Т. П. Поленова*
Технический редактор *Н. Н. Плохова*
Корректор *И. А. Талалай*

Сдано в набор 31/V 1976 г. Подписано к печати 29/XI 1976 г.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 17,5
Уч.-изд. л. 17,6. Тираж 1400 Т-17791. Тип. зак. 881
Цена 1 р. 76.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21

2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Исправления и опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
16	6 св.	$h^*(\omega)$	$h^*(\omega_1)$
16	7 св.	$e^{i(\omega-\omega_1)t} d\omega d\omega_1$	$d\omega d\omega_1$
32	12 св.	температур, пропорциональная	температур пропорциональна
69	11 сн.	$\rho \gg l_0$	$\rho \ll l_0$
211	9 сн.	$= -\frac{\pi}{[-2b_x''(0)]^{1/2}}$	$= \frac{\pi}{[-2b_x''(0)]^{1/2}}$

Заказ № 881