
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи физических наук»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

И. М. ХАЛАТНИКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ

הטכניון
ספריית הפקולטה לפיסיקה

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

530.1

X 17

УДК 530.14

АННОТАЦИЯ

Монография посвящена изложению современного состояния теории сверхтекучести. Явление сверхтекучести занимает исключительное место в современной физике. В первую очередь интерес к этому явлению объясняется тем, что здесь мы сталкиваемся с применением квантовых законов в области макроскопической физики. Интенсивное изучение этого явления способствовало прогрессу всей физики твердого тела, а идеи и методы теории сверхтекучести оказались плодотворными во многих разделах физики, включая и столь отдаленные от теории твердого тела, как, например, теория атомного ядра. Автор книги внес значительный вклад в развитие теории сверхтекучести.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, а также может служить учебным пособием для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики и физики твердого тела.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
1. Энергетический спектр квантовой жидкости и сверхтекучесть	7
2. Термодинамические функции гелия II	14
3. Квантование движения жидкости	20
4. Связь энергетического спектра возбуждений со структурным фактором жидкого гелия II	23
5. Энергетический спектр слабо неидеального бозе-газа	29
6. О форме спектра элементарных возбуждений вблизи особых точек	33
7. Взаимодействие элементарных возбуждений	41
8. Гидродинамика сверхтекучей жидкости	54
9. Диссипативные члены в гидродинамических уравнениях	61
10. Распространение звука в сверхтекучей жидкости	65
11. Излучение звука в сверхтекучей жидкости	69
12. Поглощение звука	75
13. Разрывы в сверхтекучей жидкости	77
14. Четвертый звук	85
15. Капиллярные волны	86
16. Гидродинамика вращающейся сверхтекучей жидкости	88
17. Гидродинамика сверхтекучей жидкости вблизи λ -точки	101
18. Кинетическое уравнение для элементарных возбуждений	106
19. Теплопроводность	112
20. Первая вязкость	119
21. Коэффициенты второй вязкости гелия II	121
22. Звук в жидком гелии II вблизи абсолютного нуля	125
23. Теплообмен между твердым телом и гелием II	128
24. Растворы посторонних частиц в сверхтекучем гелии II	136
25. Диффузия и теплопроводность в слабых растворах He^3 в гелии II	152
Литература	158

ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени открытия П. Л. Капицей явления сверхтекучести в жидком гелии II прошло немногим менее 30 лет. Можно без преувеличения сказать, что влияние этого открытия на всю макроскопическую физику было поистине революционным.

Объяснение этого явления, данное Л. Д. Ландау и основанное на оригинальном применении квантовых законов к макроскопическим системам, способствовало прогрессу всей теории твердого тела. Дальнейшее развитие физики твердого тела показало, что явление сверхтекучести не является чем-то исключительным и присущим только сверхтекучему гелию. По существу, в том или ином виде это явление обнаруживается во всех макроскопических системах в области действия квантовых законов. Так, в сверхпроводимости мы имеем дело со сверхтекучестью электронов в металлах.

Идеи и методы теории сверхтекучести оказали исключительное влияние и на другие разделы теоретической физики. Современная теория ядра широко использует представление о сверхтекучих свойствах ядерного вещества.

Настоящая книга посвящена изложению современного состояния теории сверхтекучести.

26 декабря 1964 г.

✱ Автор

1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КВАНТОВОЙ ЖИДКОСТИ И СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ

В жидком гелии при температуре $2,18^{\circ}\text{K}$ происходит фазовый переход второго рода. Ниже λ -точки жидкий гелий (гелий II) обладает рядом необыкновенных свойств, наиболее замечательным из которых является сверхтекучесть, открытая П. Капицей. Сверхтекучестью называют способность жидкого гелия II протекать без трения через узкие капилляры. Можно без труда убедиться в том, что де-Бройлевская длина волны атомов гелия при температурах порядка $1\text{--}2^{\circ}\text{K}$ сравнима с межатомными расстояниями. Отсюда следует, что гелий II является существенно квантовым объектом. Таким образом, гелий II представляет собой не классическую, а квантовую жидкость. Как известно, имеется два устойчивых изотопа гелия — He^4 и He^3 с массами 4 и 3 в атомных единицах соответственно. Свойством сверхтекучести обладает жидкость, образованная из атомов He^4 , т. е. из частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Атомы He^3 также образуют квантовую жидкость, которая, однако, в указанной выше области температур свойством сверхтекучести не обладает. Квантовую жидкость, образованную фермиевскими частицами, принято называть ферми-жидкостью. Таким образом, свойством сверхтекучести обладает лишь жидкость, состоящая из бозе-частиц.

В последнее время стало, однако, ясно, что в ферми-жидкости, состоящей из атомов He^3 , при достаточно низких температурах (по-видимому, порядка $0,001^{\circ}\text{K}$) должно происходить спаривание, т. е. образование частиц бозевского типа. А это обстоятельство должно сопровождаться возникновением сверхтекучести. Таким образом, складывается впечатление, что свойство сверхтекучести

присуще в том или ином виде всем квантовым жидкостям. Перечень макроскопических объектов, являющихся квантовыми жидкостями, ограничен лишь упомянутыми двумя жидкостями, образованными изотопами гелия*). Однако со свойствами сверхтекучести мы встречаемся и в других объектах. Так, электроны в металлах при низких температурах могут образовывать пары, т. е. бозе-частицы, что приводит к сверхтекучести «электронной жидкости». Сверхтекучесть «электронной жидкости» проявляется, поскольку жидкость заряжена, в форме сверхпроводимости. Таким образом, свойство сверхтекучести присуще различным квантовым объектам при низких температурах и не является столь экзотическим, как казалось раньше. Установление связи между явлением сверхтекучести и квантовыми свойствами системы и на этой основе последовательная теория этого явления были осуществлены Л. Ландау [1, 2, 3]. Согласно классической механике при абсолютном нуле температур все атомы должны покоиться, а их потенциальная энергия должна иметь минимум. Следовательно, при низких температурах атомы могут совершать лишь малые колебания около некоторых положений равновесия, т. е. все тела при этом должны затвердевать, образуя кристаллическую решетку. Жидкий гелий — единственная жидкость, в которой квантовые эффекты проявляются раньше, чем жидкость затвердевает. Это объясняется относительно слабым взаимодействием атомов гелия. Во всех других средах взаимодействие атомов достаточно сильно, так что тела затвердевают до того, как проявятся квантовые эффекты. При абсолютном нуле система атомов образующих твердое тело, находится в энергетически наименьшем (основном) состоянии. При отличных от нуля температурах система находится в возбужденном состоянии — атомы совершают колебания около* положений равновесия. Энергия кристалла будет суммой энергий квантовых осцилляторов. Каждый из осцилляторов при этом может находиться в каком-либо из возбужденных состояний. Вместо того чтобы говорить об осцилляторе в n -

*) Быстро распадающийся изотоп He^6 мало изучен, однако несомненно, жидкость из атомов He^6 должна была бы обладать свойством сверхтекучести.

возбужденном состоянии, можно рассматривать n колебательных квантов. Эти кванты-фононы соответствуют звуковым волнам, подобно световым квантам-фотонам, представляющим волны света. Таким образом, состояние системы характеризуется совокупностью длинноволновых звуковых квантов-фононов. Фононы обладают энергией, которая линейно связана с импульсом (точнее, «квазиимпульсом»). Используя представление о фононах, можно объяснить все свойства твердых тел при низких температурах. Ситуация, которую мы сейчас описали, не является исключительной в квантовой механике. Всякая система произвольно взаимодействующих частиц в слабовозбужденном состоянии может рассматриваться как совокупность отдельных элементарных возбуждений. Каждое элементарное возбуждение ведет себя подобно некоторой квазичастице, способной двигаться сквозь тело. Оно обладает определенной энергией и импульсом. Функцию, характеризующую зависимость энергии элементарного возбуждения от импульса, называют *энергетическим спектром тела*.

Обозначим посредством ε энергию элементарного возбуждения в жидком гелии как функцию импульса p . Вид энергетического спектра при малых значениях импульса p устанавливается легко. Малым импульсам соответствуют длинноволновые возбуждения, которые, как очевидно, в жидкости являются просто продольными звуковыми колебаниями. Таким образом, соответствующие элементарные возбуждения представляют собой звуковые кванты-фононы. Энергия фононов является линейной функцией импульса:

$$\varepsilon = c p, \quad (1.1)$$

где c — скорость звука. По мере увеличения импульса кривая $\varepsilon(p)$ отклоняется от линейности. Однако дальнейший ее ход не может быть получен из общих соображений. Л. Ландау для объяснения экспериментальных значений термодинамических величин жидкого гелия предложил изображенный на рис. 1 вид энергетического спектра. Дело в том, что одних фононов оказалось недостаточно для объяснения температурной зависимости и абсолютной величины таких термодинамических характеристик, как, например, теплоемкость. Как легко видеть, элементарные

возбуждения с энергией вблизи минимума на кривой рис. 1 будут давать конкурирующий с фононами вклад во все термодинамические величины. Соответствующие возбуждения были названы *ротонами*, и их энергия из общих свойств функций вблизи минимума может быть представлена в виде

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}. \quad (1.2)$$

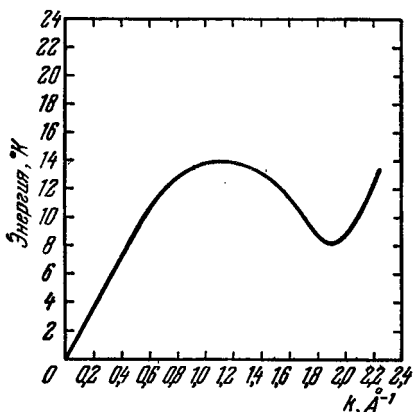


Рис. 1.

Здесь p_0 — значение импульса, при котором функция ε имеет минимум, равный Δ . Точные значения параметров, характеризующих энергетический спектр гелия, найдены по рассеянию нейтронов жидким гелием. Монохроматические нейтроны в гелии

поглощают (или испускают) элементарные возбуждения. Измеряя энергию рассеянных под данным углом нейтронов, можно восстановить весь спектр элементарных возбуждений. Таким образом получены следующие значения параметров спектра [4]:

$$\Delta = 8.6^\circ \text{K}, \quad p_0 = 1.9 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad \mu = 0.16 m_{\text{He}^4}.$$

Величину μ , имеющую размерность массы, обычно называют эффективной массой ротона.

Концепция элементарных возбуждений предполагает, что количество их невелико, так что энергия их взаимодействия между собой невелика по сравнению с их собственной энергией. В этом случае газ элементарных возбуждений можно рассматривать как идеальный газ. Поскольку при возбуждении жидкости фононы и ротонны могут появляться поодиночке, то очевидно, что они должны обладать целочисленным моментом и подчиняться статистике Бозе. Таким образом, фононный и ротонный газы описываются в равновесии равновесными функциями статистики Бозе. Что касается ротоннов, то их энергия содержит большую величину Δ , и поэтому распределение Бозе

может быть заменено распределением Больцмана. Модель идеального газа возбуждений, таким образом, пригодна при температурах, не слишком близких к λ -точке. Вблизи λ -точки возбуждений много, и их взаимодействие становится существенным. Время жизни, определяемое их взаимными соударениями, становится малым, а неопределенность энергии возбуждений — сравнимой с их энергией. Поэтому концепция элементарных возбуждений вблизи λ -точки оказывается непригодной. Однако практически уже при температурах порядка $1,7\text{—}1,8^\circ\text{K}$ и ниже в гелии фононный и ротонный газы можно считать идеальными.

Покажем теперь, как из приведенных представлений об элементарных возбуждениях в гелии следует свойство сверхтекучести. Вначале предположим, что гелий находится при абсолютном нуле температуры, т. е. в основном энергетическом состоянии. Пусть жидкость теперь течет через капилляр со скоростью v . Если бы при этом жидкость испытывала трение, часть кинетической энергии диссипировала бы, превращалась в тепловую энергию. Нагревание гелия означало бы переход в возбужденное состояние. Но мы знаем, что квантовая жидкость не может получать энергию непрерывным образом. Для того чтобы такая жидкость перешла в ближайшее возбужденное состояние, в ней должно появиться элементарное возбуждение. Пусть энергия, которую имело бы возникающее возбуждение в движущейся вместе с жидкостью системе отсчета, равна $\varepsilon(p)$, а соответствующий импульс равен p . Тогда в неподвижной системе отсчета энергия системы изменится на величину

$$\varepsilon(p) + pv. \quad (1.3)$$

Переход жидкости в возбужденное состояние будет энергетически выгоден в том случае, если выполнено условие

$$\varepsilon(p) + pv < 0. \quad (1.4)$$

Очевидно, что наиболее благоприятная для выполнения этого условия ситуация будет в том случае, когда импульс образованного возбуждения направлен противоположно скорости. В этом случае из (1.4) следует, что

$$v > \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что возбуждение может возникать в жидком гелии, если условие (1.5) выполнено по крайней мере в точке спектра, где отношение $\varepsilon(p)/p$ имеет минимальное значение. Таким образом, окончательно получаем условие, необходимое для рождения возбуждения:

$$v > \min \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (1.6)$$

Для наличия сверхтекучести необходимо, чтобы

$$v_{кр} = \min \frac{\varepsilon(p)}{p} \neq 0. \quad (1.7)$$

Тогда при значениях скорости движения гелия v , меньших критического значения $v_{кр}$, рождение возбуждения энергетически невыгодно, и жидкость движется без диссипации энергии, т. е. без трения. Течение жидкости без трения не будет замедляться, т. е. будет сверхтекучим. Наоборот, при скоростях, больших $v_{кр}$, движение гелия будет сопровождаться рождением возбуждений и, следовательно, диссипацией энергии. Спектр элементарных возбуждений жидкого гелия, как это видно из рис. 1, удовлетворяет условию (1.7). Минимум отношения ε/p осуществляется, как это следует из условия экстремума

$$\frac{d}{dp} \frac{\varepsilon}{p} = \frac{1}{p} \frac{d\varepsilon}{dp} - \frac{\varepsilon}{p^2} = 0,$$

в точке, где

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{d\varepsilon}{dp}, \quad (1.8)$$

т. е. в точке, где прямая, проведенная из начала координат, касается кривой $\varepsilon(p)$. Для спектра жидкого гелия эта точка лежит недалеко от минимума кривой $\varepsilon(p)$ и численно равна примерно 60 м/сек. Это значение на несколько порядков превосходит реально наблюдающиеся значения критических скоростей в гелии II. Объяснение этого, по-видимому, состоит в том, что, как мы увидим, в сверхтекучем гелии, кроме фононов и ротонов, могут существовать возбуждения другого типа, так называемые квантованные вихри. Хотя эти возбуждения из-за малого статистического веса и не играют роли в термодинамике,

они, благодаря либеральным условиям их рождения, играют роль в гидродинамике, определяя значение критических скоростей*). Заметим, что при выводе критерия (1.6) нигде не использовалось то обстоятельство, что в жидкости отсутствуют готовые возбуждения. Наличие таких возбуждений не препятствовало бы выводу, и поэтому критерий (1.6) будет справедлив и при температурах, отличных от абсолютного нуля. Однако наличие возбуждений при не равных нулю температурах вносит определенное своеобразие в характер течения гелия II по капиллярам. Присутствующие в жидкости возбуждения будут отражаться от стенок и передавать им часть своего импульса. Благодаря этому та часть жидкости, которая увлекается движением возбуждений, будет вести себя как нормальная вязкая жидкость и будет тормозиться благодаря трению о стенки. Таким образом, при $T = 0$ через капилляр протекает вся жидкость без трения, при $T \neq 0$ — лишь часть. Получилась своеобразная ситуация: в сверхтекучей жидкости возможны одновременно два независимых движения. Часть жидкости, которая увлекается движением возбуждений, ведет себя как нормальная жидкость, остальная часть — сверхтекучая — не испытывает трения и, пока скорость не превосходит критического значения, движется независимо от нормальной части. Итак, в гелии II могут существовать одновременно два движения: сверхтекучее со скоростью v_s и нормальное со скоростью v_n . Каждому из этих движений соответствует своя эффективная масса. Сумма сверхтекучей и нормальной масс равна полной массе жидкости. Оба движения происходят независимо (по крайней мере в области малых значений скоростей v_s и v_n , не превосходящих некоторых критических значений), так что передача импульса от одного к другому невозможна. Импульс j единицы объема гелия II, таким образом, складывается из двух частей:

$$j = \rho_s v_s + \rho_n v_n. \quad (1.9)$$

*) Критическая скорость, связанная с рождением квантованных вихрей, зависит от диаметра капилляра; имеет место соотношение $v_{кр} d \sim \hbar/m$. Поэтому так существенна для наблюдения сверхтекучести узость капилляра. В широких трубках значение $v_{кр}$ чрезвычайно мало и наблюдение сверхтекучести невозможно.

Коэффициент ρ_n называют плотностью нормальной части жидкости, а ρ_s — плотностью сверхтекучей части жидкости. Сумма ρ_n и ρ_s равна плотности жидкости

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (1.10)$$

Отношение ρ_n/ρ в λ -точке равно единице; с понижением температуры оно убывает, стремясь к нулю при $T = 0$.

Пусть в гелии одновременно происходят два поступательных движения со скоростями \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s . Энергия элементарного возбуждения в неподвижной системе отсчета $E(p)$ выражается через энергию $\varepsilon(p)$ в системе отсчета, в которой сверхтекучая часть жидкости покоится, с помощью соотношения

$$E(p) = \varepsilon(p) + p\mathbf{v}_s. \quad (1.11)$$

Нормальное движение жидкости связано с поступательным движением газа возбуждений, происходящим со скоростью \mathbf{v}_n . Функция распределения n для элементарных возбуждений зависит от энергии относительного движения E' :

$$E' = E - p\mathbf{v}_n = \varepsilon(p) + p\mathbf{v}_s - p\mathbf{v}_n. \quad (1.12)$$

Таким образом, в движущемся гелии II распределение фононов по энергиям определяется функцией Планка

$$n = \left[\exp \left(\frac{\varepsilon + p\mathbf{v}_s - p\mathbf{v}_n}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (1.13)$$

с функцией ε , определяемой соотношением (1.1).

Распределение же ротоннов по энергиям определяется функцией Больцмана

$$n = \exp \left(- \frac{\varepsilon + p\mathbf{v}_s - p\mathbf{v}_n}{kT} \right) \quad (1.14)$$

с функцией ε , определяемой соотношением (1.2).

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГЕЛИЯ II

Не очень близко к λ -точке плотности фотонного и ротонного газа невелики, и, как уже говорилось, эти газы могут рассматриваться как идеальные. В этом случае все термодинамические функции слагаются из двух частей: из части, обязанной фононам, и части, обязанной ротонам.

При вычислении термодинамических функций мы воспользуемся функциями распределения фононов и ротонов (1.13) и (1.14). При этом зависимостью функций распределения от относительной скорости $v_n - v_s$ в первом приближении можно пренебречь. Указанная зависимость проявляется в области таких значений $v_n - v_s$, при которых в обычных условиях наступает нарушение сверхтекучести. Лишь при распространении в гелии II звука большой амплитуды удастся достичь заметных значений относительной скорости $v_n - v_s$. В этом случае появляется необходимость учета квадратичных относительно разности $v_n - v_s$ членов в термодинамических функциях.

Вычислим вначале термодинамические функции для покоящегося гелия II. Они могут быть получены с помощью формул статистики Бозе. Фононы, как известно, подчиняются статистике Бозе; распределение ротонов не зависит от типа статистики благодаря наличию в энергии ротона большого постоянного члена $\Delta \gg kT$.

Свободная энергия бозе-газа равна

$$F = -kT \int \ln(1 + n) d\tau_p \quad (2.1)$$

($d\tau_p = \frac{p^2 dp d\omega}{(2\pi\hbar)^3}$ — элемент объема в p -пространстве, $d\omega$ — элемент телесного угла). После однократного интегрирования по частям (2.1) получаем

$$F = -\frac{1}{3} \int n p \frac{\partial \epsilon}{\partial p} d\tau_p, \quad (2.2)$$

что дает возможность вычислить свободную энергию газа возбуждений. Энтропия возбуждений находится дифференцированием свободной энергии (2.2) по температуре:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{1}{3kT^2} \int n' \epsilon p \frac{\partial \epsilon}{\partial p} d\tau_p \quad (2.3)$$

(n' — производная функции распределения по аргументу).

Свободная энергия, энтропия и теплоемкость фононного газа. Выполнив в (2.2) интегрирование с функцией распределения (1.13), находим

свободную энергию фононного газа ($\varepsilon = cp$):

$$F_{ph} = -\frac{1}{3} \int \left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1 \right)^{-1} p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p = -\frac{1}{3} E_{ph}. \quad (2.4)$$

Энергия E_{ph} фононов в единице объема гелия II равна

$$E_{ph} = \frac{4\pi^5}{15} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3 kT \approx \frac{\pi^4}{36} kT N_{ph} \quad (2.5)$$

($N_{ph} \approx 2,4 \cdot 4\pi \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3$ — число фононов в единице объема гелия II). Энтропия фононного газа находится или по общей формуле (2.3), или непосредственно дифференцированием полученного выражения (2.4) для свободной энергии; таким путем находим

$$S_{ph} = -\frac{\partial F_{ph}}{\partial T} = \frac{16\pi^5}{45} k \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (2.6)$$

Далее вычисляем теплоемкость фононного газа:

$$C_{ph} = T \frac{\partial S_{ph}}{\partial T} = \frac{16\pi^5}{15} k \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (2.7)$$

Свободная энергия, энтропия и теплоемкость ротоного газа. Свободная энергия ротоного газа в единице гелия II находится по общей формуле (2.2) с функцией распределения (1.14). При интегрировании необходимо учитывать то обстоятельство, что импульсы ротонов по своей величине близки к p_0 .

Таким путем находим

$$F_r = -kTN_r, \quad (2.8)$$

где N_r — число ротонов в единице объема гелия:

$$N_r = \int n d\tau_p = \frac{2p_0^2 (\mu kT)^{1/2} e^{-\frac{\Delta}{T}}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}. \quad (2.8')$$

Дифференцированием соотношения (2.8) находим энтропию ротоного газа:

$$S_r = -\frac{\partial F_r}{\partial T} = kN_r \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right). \quad (2.9)$$

Далее вычисляем теплоемкость ротонного газа:

$$C_r = T \frac{\partial S_r}{\partial T} = kN_r \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right). \quad (2.10)$$

Суммируя результаты (2.6), (2.7), (2.9) и (2.10), находим выражения для энтропии и теплоемкости единицы объема гелия II:

$$S = S_r + S_{ph} = kN_r \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right) + \frac{16\pi^5 k}{45} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3, \quad (2.11)$$

$$C = C_r + C_{ph} = kN_r \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) + \frac{16\pi^5 k}{15} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (2.12)$$

Вычисления, аналогичные приведенным, могут быть произведены для случая не равной нулю относительной скорости $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s$. Не останавливаясь на несложных выкладках, приведем окончательные выражения для термодинамических функций, получающихся в этом случае:

$$\bar{F}_{ph} = F_{ph} (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (2.13)$$

$$\bar{F}_r = F_r \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT}, \quad (2.14)$$

$$\bar{S}_{ph} = S_{ph} (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (2.15)$$

$$\bar{C}_{ph} = C_{ph} (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (2.16)$$

$$\bar{S}_r = S_r \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} + F_r \frac{1}{T} \left(\frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} - \operatorname{ch} \frac{p_0 w}{kT} \right), \quad (2.17)$$

$$\bar{C}_r = C_r \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} + F_r \frac{1}{T} \frac{p_0 w}{kT} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT}. \quad (2.18)$$

$w = |\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s|$ есть относительная скорость нормального и сверхтекучего движений. Буквами без черты обозначаем значения термодинамических функций в покоящемся гелии II.

Нормальная плотность

Импульс единицы объема гелия II в системе отсчета, движущейся вместе со сверхтекучей частью, равен, согласно (1.9),

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{j} - \rho \boldsymbol{v}_s = \rho_n (\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s). \quad (2.19)$$

С другой стороны, этот импульс может быть представлен в виде интеграла

$$\int p n (\varepsilon + p v_s - p v_n) d\tau_p, \quad (2.20)$$

взятого по всем элементарным возбуждениям. Сравнивая (2.19) и (2.20), получаем соотношение, определяющее величину нормальной плотности:

$$\rho_n (v_n - v_s) = \int p n (\varepsilon + p v_s - p v_n) d\tau_p. \quad (2.21)$$

В случае малых значений разности $(v_n - v_s)$ функцию распределения n можно разложить в ряд по степеням этой разности. Нулевой член разложения обращает интеграл правой части в нуль. Первый член разложения дает

$$\rho_n = - \frac{1}{3kT} \int p^2 n' d\tau_p. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) справедлива при малых значениях разности $(v_n - v_s)$.

Вычислим вначале фононную часть нормальной плотности. Подставив в (2.21) функцию распределения (1.13), получим

$$\rho_{nph} (v_n - v_s) = \int p \left[\exp\left(\frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} d\tau_p. \quad (2.23)$$

Произведя несложное интегрирование и опустив общий множитель $(v_n - v_s)$ в левой и правой частях (2.23), находим

$$\rho_{nph} = \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2} (1 - \omega^2/c^2)^{-3}. \quad (2.24)$$

Произведем аналогичные вычисления для ротонов^{*}. Имеем

$$\rho_{nr} (v_n - v_s) = \int p \exp\left(-\frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT}\right) d\tau_p.$$

Отсюда без труда находим

$$\rho_{nr} = N_r \frac{kT}{\omega^2} \left(\operatorname{ch} \frac{p_0 \omega}{kT} - \frac{kT}{p_0 \omega} \operatorname{sh} \frac{p_0 \omega}{kT} \right). \quad (2.25)$$

Нормальная плотность гелия ρ_n равна сумме ρ_{nph} и ρ_{nr} . Согласно (2.24) и (2.25) имеем

$$\rho_n = N_r \frac{kT}{\omega^2} \left(\operatorname{ch} \frac{p_0 \omega}{kT} - \frac{kT}{p_0 \omega} \operatorname{sh} \frac{p_0 \omega}{kT} \right) + \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2} (1 - \omega^2/c^2)^{-3}. \quad (2.26)$$

В случае малых значений скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей частей зависимость ρ_{nph} и ρ_{nr} от $\omega = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ можно пренебречь. Формулы (2.24) и (2.25) в этом случае дают

$$\rho_{nph} = \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2}, \quad (2.27)$$

$$\rho_{nr} = \frac{p_0^2}{3kT} N_r, \quad (2.28)$$

$$\rho_n = \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2} + \frac{p_0^2}{3kT} N_r. \quad (2.29)$$

В области температур выше $0,8-1^\circ\text{K}$ ротонны играют основную роль во всех термодинамических функциях. Однако относительный вклад ротонов в величину указанных функций быстро убывает с убыванием температуры. Это объясняется тем, что ротонные части функций убывают с температурой по экспоненциальному закону, в то время как фононные убывают по степенному закону T^3 .

Практически, как уже отмечалось, во всех задачах можно не учитывать зависимость термодинамических величин от скорости относительного движения $\omega = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Это объясняется тем, что в области скоростей, где наблюдается явление сверхтекучести, отношения ω/c и $\omega p_0/kT$ очень малы. Однако при рассмотрении задачи о распространении звука большой амплитуды указанной зависимостью пренебрегать уже нельзя. Наконец, заметим, что, поскольку $c > \frac{kT}{p_0}$, зависимость от ω в большей степени сказывается для ротонных величин, чем для фононных.

3. КВАНТОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ [1]

Классическая жидкость может быть описана заданием плотности ρ и вектора потока массы \mathbf{j} , которые определяются следующим образом:

$$\rho = \sum m_a \delta(R - r_a), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{j} = \sum \mathbf{p}_a \delta(R - r_a) = \sum m_a \mathbf{v}_a \delta(R - r_a). \quad (3.2)$$

Суммирование производится по частицам системы, \mathbf{v}_a и \mathbf{p}_a — скорость и импульс частицы с массой m_a . При переходе к квантовой жидкости необходимо величинам ρ и \mathbf{j} поставить в соответствие некоторые операторы.

Рассмотрим одну частицу массы m . Оператор для этой частицы определяется таким образом, чтобы его среднее значение $\int \psi^*(\mathbf{r}) \rho \psi(\mathbf{r}) dV$ равнялось $m\psi^*\psi$. Этому условию удовлетворяет оператор $\rho = m\delta(R - \mathbf{r})$. Аналогичным образом для системы частиц оператор ρ будет иметь по-прежнему вид (3.1).

Вектор потока, согласно квантовой механике, равен

$$\frac{\hbar}{2i} \{ \psi^*(R) \nabla \psi(R) - \psi(R) \nabla \psi^*(R) \}. \quad (3.3)$$

Снова для простоты рассмотрим классическую плотность потока для одной частицы $\mathbf{j} = \mathbf{p}\delta(R - \mathbf{r})$. Соответствующий симметризованный квантовый оператор равен

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{p}\delta(R - \mathbf{r}) + \delta(R - \mathbf{r}) \mathbf{p} \}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$ — оператор импульса (∇ действует на координату \mathbf{r}). Убедимся в том, что среднее значение оператора (3.4) равно (3.3). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int \bar{\psi}^* \mathbf{j} \psi dV &= \\ &= \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \nabla \delta(R - \mathbf{r}) \psi dV + \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \delta(R - \mathbf{r}) \nabla \psi dV, \end{aligned}$$

или, после интегрирования по частям в первом члене,

$$\int \psi^* j \psi dV = \frac{\hbar}{2i} \int \{-\psi \delta(R-r) \nabla \psi^* + \psi^* \delta(R-r) \nabla \psi\} = \\ = \frac{\hbar}{2i} \{\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\},$$

т. е. как раз выражение (3.3).

В общем случае произвольной системы частиц оператор потока равен сумме выражений (3.4) по всем частицам:

$$j = \frac{1}{2} \sum [\rho_\alpha \delta(R-r_\alpha) + \delta(R-r_\alpha) \rho_\alpha], \\ \rho_\alpha = \frac{\hbar}{i} \nabla_\alpha. \quad (3.5)$$

В гидродинамике наряду с потоком j употребляется скорость v . Соответствующий квантовый оператор равен

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} j + j \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.6)$$

Соотношения коммутации между введенными операторами получаются непосредственным вычислением коммутаторов. Для примера приведем вычисление коммутатора j и ρ . Согласно (3.1) и (3.5) имеем

$$j_1 \rho_2 - \rho_2 j_1 = \\ = \sum \frac{m_\alpha \hbar}{2i} \{[\nabla_\alpha \delta(r_\alpha - R_1) + \delta(r_\alpha - R_1) \nabla_\alpha] \delta(r_\alpha - R_2) - \\ - \delta(r_\alpha - R_2) [\nabla_\alpha \delta(r_\alpha - R_1) + \delta(r_\alpha - R_1) \nabla_\alpha]\} = \\ = \sum \frac{m_\alpha \hbar}{i} \delta(r_\alpha - R_1) \nabla \delta(R_1 - R_2) = \frac{\hbar}{i} \rho_1 \nabla \delta(R_1 - R_2). \quad (3.7)$$

Аналогичным образом получают и другие соотношения коммутации (индексами 1 и 2 обозначаются значения операторов в точках R_1 и R_2):

$$\rho_1 \rho_2 - \rho_2 \rho_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$v_1 \rho_2 - \rho_2 v_1 = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(R_1 - R_2), \quad (3.9)$$

$$v_{1l} v_{2k} - v_{2k} v_{1l} = \frac{\hbar}{i} \delta(R_1 - R_2) \frac{1}{\rho_1} (\text{rot } v)_{lk}. \quad (3.10)$$

Еще одно соотношение можно получить, применив операцию rot к левой и правой частям (3.9):

$$\text{rot } v_1 \rho_2 - \rho_2 \text{rot } v_1 = 0. \quad (3.11)$$

Применение полученных соотношений коммутации к макроскопическому движению приводит к уравнениям гидродинамики в операторном виде. Плотность энергии макроскопической системы равна

$$\frac{\rho v^2}{2} + E(\rho). \quad (3.12)$$

Макроскопический характер описания проявляется во втором члене в (3.12), который выражает внутреннюю энергию $E(\rho)$ только как функцию плотности ρ . Соответствующий квантовый оператор имеет вид

$$\frac{\mathfrak{p}\rho\mathfrak{v}}{2} + E(\rho), \quad (3.13)$$

а функция Гамильтона системы равна интегралу

$$H = \int \left[\frac{\mathfrak{p}\rho\mathfrak{v}}{2} + E(\rho) \right] d\mathfrak{v}. \quad (3.14)$$

Уравнения гидродинамики определяют производные по времени от переменных ρ и \mathfrak{v} . Для вычисления указанных производных образуем коммутатор из оператора Гамильтона и соответствующих величин. Таким образом, имеем

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} (H\rho - \rho H).$$

Подставив сюда оператор Гамильтона в форме (3.12), после несложных вычислений получаем уравнение непрерывности в операторном виде

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \frac{\rho\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\rho}{2} = 0. \quad (3.15)$$

Аналогичным образом находим производную от скорости

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{i}{\hbar} (H\mathfrak{v} - \mathfrak{v}H), \quad *$$

откуда следует уравнение движения в операторной форме

$$\dot{v}_l + \left(v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} v_k \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.16)$$

где давление p , как и в классической жидкости, равно $\rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}$.

4. СВЯЗЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ СО СТРУКТУРНЫМ ФАКТОРОМ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ II

Между формой энергетического спектра и структурным фактором жидкости имеется тесная связь (Фейнман [5]). Рассмотрим некоторое возбужденное состояние жидкости, состоящей из бозе-частиц. ψ -функцию этого состояния будем искать в виде симметричной суммы

$$\sum f(\mathbf{r}_a)\Phi, \quad (4.1)$$

взятой по всем атомам системы. $f(\mathbf{r}_a)$ есть некоторая функция радиуса-вектора атома номера a , Φ — волновая функция основного состояния, зависящая от координат всех атомов. Для нахождения функции $f(\mathbf{r}_a)$ применяем вариационный метод.

Запишем гамильтониан системы:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \nabla_a^2 + U - E_0, \quad (4.2)$$

где U — потенциальная энергия системы, а энергию отсчитываем относительно основного состояния E_0 . Волновая функция основного состояния удовлетворяет поэтому уравнению

$$\hat{H}\Phi = 0. \quad (4.3)$$

Далее вводим функцию

$$\psi = F\Phi. \quad (4.4)$$

Поддействовав на функцию (4.4), взятую в таком виде гамильтонианом (4.2) и учитывая (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi &= \hat{H}(F\Phi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_a (\Phi \nabla_a^2 F + 2\nabla_a \Phi \nabla_a F) = \\ &= -\Phi^{-1} \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \nabla_a (\rho_N \nabla_a F). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь $\rho_N = \Phi^2$ есть плотность вероятности для основного состояния *). Она определяет вероятность той или иной

*) ψ -функция основного состояния не имеет узлов, поэтому Φ может быть выбрана вещественной.

конфигурации \mathbf{r}^N (\mathbf{r}^N обозначает совокупность радиусов-векторов всех N атомов системы). Энергия системы находится как минимум выражения

$$\mathcal{E} = \int \psi^* \hat{H} \psi d^N \mathbf{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \int (\nabla_a F^* \cdot \nabla_a F) \rho_N d^N \mathbf{r} \quad (4.6)$$

при дополнительном условии, что нормировочный интеграл

$$I = \int \psi^* \psi d^N \mathbf{r} = \int F^* F \rho_N d^N \mathbf{r} \quad (4.7)$$

имеет фиксированное значение. Энергия E равна \mathcal{E}/I . Согласно (4.1) функцию F записываем в виде суммы

$$F = \sum_a f(\mathbf{r}_a) \quad (4.8)$$

по всем атомам системы. Подставим это выражение в нормировочный интеграл (4.7)

$$I = \int \sum_a \sum_b f^*(\mathbf{r}_a) f(\mathbf{r}_b) \rho_N d^N \mathbf{r} \quad (4.9)$$

и зафиксируем два каких-либо значения номеров атомов a и b . Затем проведем интегрирование в (4.9) по координатам всех остальных атомов; таким путем получим

$$I = \int f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (4.10)$$

где ρ_2 — вероятность нахождения одного атома в точке с координатой \mathbf{r}_1 , а другого — с \mathbf{r}_2 . Аналогичным образом можно, проинтегрировав ρ_N по координатам всех атомов, за исключением одного, получить функцию $\rho_1(\mathbf{r})$, дающую вероятность нахождения атома в точке \mathbf{r} в жидкости, находящейся в основном состоянии. Эта величина, очевидно, не зависит от \mathbf{r} и равна некоторому числу ρ_0 . Что же касается функции $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, то в силу однородности и изотропности жидкости ее можно записать в виде $\rho_2 = \rho_0 p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Таким образом, нормировочный интеграл можно переписать в виде

$$I = \rho_0 \int f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (4.11)$$

Интеграл (4.6) для энергии \mathcal{E} после подстановки F в форме (4.8) и интегрирования по координатам всех атомов, за исключением одного, приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \int \nabla_a f^*(r_a) \nabla_a f(r_a) \rho_N d^N r = \\ &= \rho_0 \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla f^*(r) \nabla f(r) dr. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Теперь выбираем функцию $f(r)$ таким образом, чтобы отношение \mathcal{E}/I имело минимальное значение. Проварьировав отношение \mathcal{E}/I по f^* , из (4.11) и (4.12) находим уравнение

$$E \int p(r_1 - r_2) f(r_2) dr_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 f(r_1). \quad (4.13)$$

Полученное уравнение имеет решение *)

$$f(r) = \exp(ikr). \quad (4.14)$$

Этому решению соответствует значение энергии

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2mS(k)}, \quad (4.15)$$

где $S(k)$ есть фурье-компонента корреляционной функции

$$S(k) = \int p(r) \exp(ikr) dr. \quad (4.16)$$

Функция $S(k)$, как видно из ее связи с корреляционной функцией $p(r)$, представляет собой структурный фактор жидкости, характеризующий взаимодействие жидкости с различными частицами при абсолютном нуле температуры (рассеяние нейтронов, γ -квантов и др.). Структурный фактор $S(k)$ не может быть вычислен. Однако он хорошо известен из эксперимента. Наиболее характерные свойства этой функции могут быть получены из элементарных соображений. При больших k функция $S(k)$ стремится к единице; при этом корреляционная функция обращается в δ -функцию. Функция $S(k)$ имеет максимум при значениях k

*) Такого рода функция f была предложена впервые Байлем. Для малых значений волнового вектора k волновую функцию возбужденного состояния Байль записывал в виде $\sum_a e^{ikr} a\Phi$.

порядка $\frac{2\pi}{a}$, где a -- межатомное расстояние, чему соответствует максимум функции $p(r)$ при r порядка a , когда два атома находятся на расстоянии, равном среднему межатомному. Наконец, при малых значениях k функция $S(k)$ стремится к нулю по линейному закону, в соответствии с тем, что на больших расстояниях корреляция исчезает.

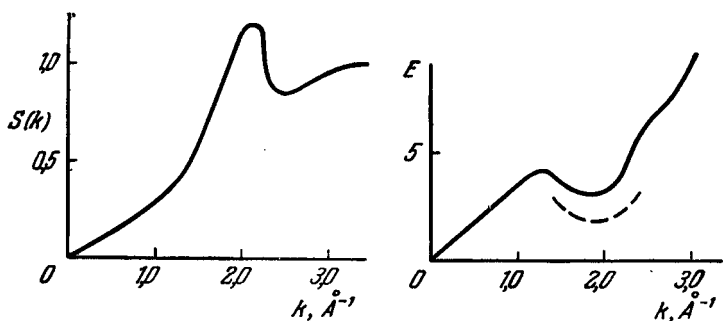


Рис. 2.

На рис. 2 изображена функция $S(k)$ и следующая из нее функция $E(k)$. Начальный линейный участок $E(k)$ соответствует фоновой части спектра. Вблизи минимума кривая $E(k)$ имеет вид

$$E(k) = \Delta + \frac{\hbar^2}{2\mu} (k - k_0)^2.$$

Наконец, при $k \rightarrow \infty$ $E(k) = \frac{k^2}{2m}$.

Приведем теперь другой поучительный вывод формулы Файнмана, основанный на гидродинамике квантовой жидкости [6]. Запишем гамильтониан квантовой жидкости (см. (3.14))

$$\hat{H} = \int \left[\frac{v\rho v}{2} + E(\rho) \right] dV. \quad (4.17)$$

Для слабозбужденного состояния жидкости плотность ρ можно представить в виде

$$\rho(r) = \rho_0 + \rho_1 \quad (\rho_1 \ll \rho_0), \quad (4.18)$$

где $\rho_0 = \text{const.}$ Далее, разложим ρ_1 и \mathbf{v} в ряд Фурье:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum (\rho_k e^{i\mathbf{k}r} + \text{к. с.}), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum (\mathbf{v}_k e^{i\mathbf{k}r} + \text{к. с.}). \quad (4.20)$$

Из уравнения непрерывности

$$\dot{\rho} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$$

находим связь между \mathbf{v}_k и ρ_k :

$$\mathbf{v}_k = i \frac{\dot{\rho}_k}{\rho_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2}. \quad (4.21)$$

Разложим теперь гамильтониан \hat{H} в ряд по ρ_1 и \mathbf{v} и, ограничиваясь квадратичными членами, получим *)

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int E(\rho_0) dV + \frac{1}{2} \int \rho_0 \mathbf{v}^2 dV + \\ + \frac{1}{2} \int \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_1(\mathbf{r}) \rho_1(\mathbf{r}') dV dV'. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть вторая функциональная производная от плотности энергии $E(\rho)$; она полностью определяется свойствами невозмущенной жидкости. В силу изотропии и однородности жидкости функция $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависит только от $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Переходим в (4.22) к фурье-компонентам:

$$\hat{H} = \int E(\rho_0) dV + \frac{1}{V} \sum \left(\frac{|\dot{\rho}_k|^2}{2\rho_0 k^2} + \frac{1}{2} \varphi_k |\rho_k|^2 \right). \quad (4.23)$$

Полученное выражение имеет вид суммы гамильтонианов осцилляторов с частотами

$$\omega^2(k) = k^2 \varphi_k \rho_0. \quad (4.24)$$

Таким образом, слабовозбужденное состояние жидкости представляет собой совокупность элементарных возбужде-

*) Линейный по ρ_1 член в разложении (4.22) обращается в нуль. Действительно, он имел бы вид $\int \psi(\mathbf{r}) \rho_1(\mathbf{r}) dV$. В силу изотропии и однородности $\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$, а интеграл $\int \rho_1(\mathbf{r}) dV = 0$.

ний, каждое из которых описывается уравнением для гармонического осциллятора. Согласно квантовой механике энергия E_k такого осциллятора определяется его частотой:

$$E_k = \hbar\omega_k \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Энергия основного состояния жидкости, таким образом, равна

$$E_0 = \int E(\rho_0) dV + \sum \frac{\hbar\omega_k}{2}, \quad (4.26)$$

где второй член в (4.26) есть нулевая энергия осцилляторов. Сравнив (4.26) и (4.23), находим

$$\frac{\hbar\omega_k}{2} = \frac{1}{V} \left(\frac{|\bar{\rho}_k|^2}{2\rho_0 k^2} + \frac{1}{2} \varphi_k |\bar{\rho}_k|^2 \right) = \frac{1}{V} \varphi_k |\bar{\rho}_k|^2. \quad (4.27)$$

Наконец, из (4.24) и (4.27) получаем снова формулу (4.15), определяющую энергию элементарного возбуждения:

$$\varepsilon_k = \hbar\omega_k = \frac{k^2 \hbar^2}{2mS(k)}, \quad (4.28)$$

где $S(k) = \frac{|\rho_k|^2}{Vm\rho_0}$ есть фурье-компоненты функции корреляции плотности

$$S(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\overline{(n(\mathbf{r}) - \bar{n})(n(\mathbf{r}') - \bar{n})}}{\bar{n}}. \quad (4.29)$$

Здесь $n(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/m$ — плотность числа частиц.

Приведенный гидродинамический вывод справедлив лишь для волновых векторов $k < \frac{1}{a}$ (a — межатомное расстояние), т. е. там, где жидкость может быть рассмотрена как сплошная среда. Поэтому формула (4.15), является справедливой лишь в области малых значений волновых векторов. Благодаря тому, что она дает правильный предел при $k \rightarrow \infty$, т. е. при переходе к свободным частицам, ее можно рассматривать как хорошую интерполяцию в области импульсов $k \sim \frac{1}{a}$. Представляется естественным обобщить гидродинамический вывод на случай $T \neq 0$. При этом энергия $E(\rho, S)$ зависит от двух переменных ρ

и S , и в разложении Фурье возникает два типа осцилляторов. Первый — уже рассмотренный выше и второй тип — осцилляторы «второго звука». При малых значениях импульса энергия возбуждений, связанная с осциллятором второго типа, определяется формулой

$$E_k = \hbar u_2 k, \quad (4.30)$$

где u_2 — скорость второго звука (см. § 10, (10.15)). Таким образом, мы получаем возбуждения, являющиеся квантами второго звука. Следует, однако, помнить, что о квантах второго звука можно говорить только в том случае, когда их длина волны больше длины свободного пробега обычных возбуждений, т. е. когда имеет место двухскоростная гидродинамика. Благодаря этому последнему обстоятельству вклад квантов второго звука во все эффекты обрезается длинами волн порядка длины свободного пробега возбуждений (ротонных и фононных), и поэтому оказывается пренебрежимо малым.

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Задача о теоретическом определении энергетического спектра реальной жидкости, естественно, не может быть решена. Поэтому представляет интерес рассмотрение какой-либо простой модели, в которой возникал бы энергетический спектр со свойствами, близкими к описанным выше.

Рассмотрим неидеальный бозе-газ частиц (со спином нуль). Спектр возбуждений в случае слабой неидеальности, когда имеет место теория возмущений, может быть получен точно (Боголюбов [7]).

Гамильтониан системы при вторичном квантовании записывается в виде

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p + \frac{1}{2V} \sum U_{p_1 p_2, p_3 p_4} a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ a_{p_3} a_{p_4}, \quad (5.1)$$

где операторы a_p^+ и a_p удовлетворяют известным соотношениям коммутации:

$$\left. \begin{aligned} a_p a_{p'}^+ - a_{p'}^+ a_p &= \delta_{pp'}, & a_p a_{p'} - a_{p'} a_p &= 0, \\ a_p^+ a_{p'}^+ - a_{p'}^+ a_p^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Пусть рассматриваемая система находится вблизи абсолютного нуля. Тогда почти все частицы вследствие бозеконденсации будут находиться в конденсате, т. е. будут иметь энергию, равную нулю ($p = 0$).

Мы будем интересоваться возбужденными состояниями (малые p). Поэтому матричный элемент взаимодействия $U_{p_1 p_2; p_3 p_4}$ можно просто заменить на постоянную, которую мы обозначим через α . Следующее упрощающее обстоятельство для слабовозбужденного состояния состоит в том, что почти все частицы находятся в конденсате. Таким образом, полное число частиц N равно

$$N = N_0 + \sum_p N_p, \quad (5.3)$$

причем $\sum N_p \ll N_0$. Поскольку число конденсатных частиц велико, то эти частицы можно рассматривать классически и заменить всюду операторы a_0^+ и a_0 на $\sqrt{N_0}$.

В энергию взаимодействия главный вклад дают члены, описывающие взаимодействие частиц конденсата между собой $0 + 0 \rightarrow 0 + 0$ и взаимодействие неконденсатных частиц с частицами конденсата.

Выпишем эти члены:

$$\frac{N_0^2}{2V} \alpha + \frac{N_0}{V} \alpha \sum (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+ + 2a_p^+ a_p + 2a_{-p}^+ a_{-p}). \quad (5.4)$$

Далее, выразим N_0 через N и $\sum a_p^+ a_p$ с помощью (5.3) и подставим в (5.4); получаем

$$\frac{N^2}{2V} \alpha + \frac{N}{V} \alpha \sum (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+ + a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}). \quad (5.5)$$

Таким образом, гамильтониан (5.1) с интересующей нас точностью равен

$$\hat{H} = \sum \left(\alpha N + \frac{p^2}{2m} \right) (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}) + \frac{N\alpha}{V} \sum (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+). \quad (5.6)$$

Полученный квадратичный по операторам a_p и a_p^+ гамильтониан с помощью преобразования Боголюбова приводится к диагональному виду. Для этого вводим новые операторы α_p^+ и α_p , связанные с a_p^+ и a_p линейным соотношением:

$$\left. \begin{aligned} a_p &= u_p \alpha_p + v_p \alpha_{-p}^+, \\ a_p^+ &= u_p \alpha_p^+ + v_p \alpha_{-p}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Из требования, чтобы новые операторы удовлетворяли обычным соотношениям коммутации для бозе-операторов, следует

$$u_p^2 - v_p^2 = 1. \quad (5.8)$$

Подставив a_p^+ и a_p в виде (5.7) в (5.6), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{p>0} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) (u_p^2 + v_p^2) + 2 \frac{N\alpha}{V} u_p v_p \right\} \times \\ & \times (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}) + \sum_{p>0} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) 2u_p v_p + \right. \\ & \left. + \frac{N\alpha}{V} (u_p^2 + v_p^2) \right\} (\alpha_p^+ \alpha_{-p}^+ + \alpha_p \alpha_{-p}) + \\ & + \sum_{p>0} \left\{ 2 \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) v_p^2 + 2 \frac{N\alpha}{V} u_p v_p \right\} + \frac{\alpha N^2}{2V}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Для диагональности полученного гамильтониана необходимо, чтобы члены вида $\alpha_p^+ \alpha_{-p}^+$ отсутствовали, следовательно,

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) 2u_p v_p + \frac{N\alpha}{V} (u_p^2 + v_p^2) = 0. \quad (5.10)$$

Из двух уравнений (5.8) и (5.10) находим коэффициенты u_p и v_p и подставляем их в (5.9). Окончательно получаем

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{p>0} \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left(\frac{N\alpha}{V} \right)^2} (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}), \quad (5.11)$$

где «нулевая» энергия E_0 равна

$$\begin{aligned} E_0 = & \frac{\alpha N^2}{2V} - \sum_{p>0} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left(\frac{N\alpha}{V} \right)^2} \right\}. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Полученный результат весьма примечателен. Из (5.11) мы видим, что слабозвозбужденное состояние рассматриваемой системы представляет собой суперпозицию элементарных возбуждений с энергетическим спектром

$$\varepsilon_p = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V}\right)^2 - \left(\frac{N\alpha}{V}\right)^2}. \quad (5.13)$$

При достаточно малых p :

$$p^2 \ll 4m \frac{N\alpha}{V}, \quad (5.14)$$

имеем

$$\varepsilon_p = p \sqrt{\frac{N\alpha}{mV}}, \quad (5.15)$$

т. е. элементарные возбуждения являются фононами со скоростью звука

$$c = \sqrt{\frac{\alpha N}{mV}}. \quad (5.16)$$

При больших значениях p имеет место более сложный закон дисперсии, асимптотически приближающийся к спектру свободных частиц $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$. Однако следует помнить, что произведенный анализ был справедлив лишь для достаточно малых значений p .

Вернемся теперь к выражению (5.12) для энергии основного состояния E_0 . Хотя сумма в (5.12) и расходится, однако, как было показано Ли и Янгом [8], можно получить конечный результат, если выразить матричный элемент α через его значение во втором приближении теории возмущений. Второе приближение теории возмущений дает

$$\alpha^{(2)} = \alpha - \frac{\alpha^2}{V} \sum \frac{m}{p^2}. \quad (5.17)$$

Выразив отсюда α через $\alpha^{(2)}$ и подставив в (5.12), получаем

$$E_0 = \frac{N^2 \alpha^{(2)}}{2V} - \sum \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left(\frac{N\alpha}{V} \right)^2} - \left(\frac{N\alpha}{V} \right)^2 \frac{m}{p^2} \right\}. \quad (5.18)$$

Заменим сумму в (5.18) на интеграл и выполним несложное интегрирование. Наконец, вместо матричного элемента перехода введем более удобную величину — амплитуду рассеяния

$$a = \frac{m\alpha}{4\pi\hbar^2}, \quad (5.19)$$

после чего окончательно получаем

$$E_0 = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV} \left(1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a^3 N}{V}} \right). \quad (5.20)$$

Полученная формула представляет первые два члена разложения энергии основного состояния по степеням $a \left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}$. Таким образом, все рассмотрение справедливо для случая короткодействующих сил, когда амплитуда рассеяния мала по сравнению с расстоянием между частицами.

6. О ФОРМЕ СПЕКТРА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК [3]

Исследуем свойства спектра вблизи точек, где возможен распад возбуждения на два.

Из законов сохранения энергии и импульса следует тогда уравнение

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{q}) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|). \quad (6.1)$$

Здесь \mathbf{p} — импульсы распадающегося возбуждения, \mathbf{q} и $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ — импульсы образующихся возбуждений. Предполагаем, что у спектра имеются устойчивые области. Математически это означает, что вплоть до некоторого p_0 уравнение (6.1) не имеет решений, а, начиная с p_0 , появляется возможность удовлетворить уравнению (6.1). Для этого необходимо, чтобы, как функция q , правая часть уравнения (6.1) имела минимум. Вектор \mathbf{q} может быть задан двумя величинами: абсолютной величиной q и углом ϑ , образованным векторами \mathbf{q} и \mathbf{p} . Условия экстремума

правой части по переменным q и $\cos \vartheta$ имеют соответственно вид

$$\varepsilon'(q) + \varepsilon'(|p - q|) \frac{q - p \cos \vartheta}{|p - q|} = 0, \quad (6.2)$$

$$\varepsilon'(|p - q|) pq = 0. \quad (6.3)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по аргументу. Из условия (6.3) следует, что либо $q \rightarrow 0$, либо $\varepsilon'(|p - q|) = 0$. Таким образом, согласно (6.2) и (6.3), имеются две возможности:

$$а) \quad q = 0, \quad \varepsilon'(0) = \varepsilon'(p) \cos \vartheta, \quad (6.4)$$

$$б) \quad \varepsilon'(|p - q|) = 0, \quad \varepsilon'(q) = 0. \quad (6.5)$$

В случае а) при распаде испускается возбуждение с импульсом $q \rightarrow 0$, т. е. фотон. Из условия (6.4) мы видим, что впервые испускание фотона произойдет там, где $\varepsilon'(p) = \pm \varepsilon'(0)$. Поскольку в бозе-системе длинноволновые возбуждения являются фотонами, то $\varepsilon'(0) = c$ — скорости звука. Таким образом, в точке спектра, где начинается неустойчивость, происходит испускание фотона, вылетающего либо по направлению ($\vartheta = 0$), либо против направления ($\vartheta = \pi$) импульса распадающегося возбуждения. При этом мы предполагаем, что кривая $\varepsilon(p)$ имеет непрерывную производную. В принципиально возможном, однако мало вероятном случае излома кривой $\varepsilon(p)$ фотон будет вылетать под углом ϑ , определяемым соотношением (6.4)

$$\cos \vartheta = \frac{\varepsilon'(0)}{\varepsilon'(p)}.$$

В случае б) распад происходит при значениях импульсов возбуждений q и $p - q$, для которых энергия ε имеет минимум. Величина импульса q и угол вылета определяются при этом двумя уравнениями (6.5). †

Экстремум правой части (6.1) по углу ϑ может быть достигнут также и на границах области, т. е. при углах $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ (случай в)). В этом случае из условия (6.2) следует

$$\varepsilon'(q) = \pm \varepsilon'(p \mp q). \quad (6.6)$$

Таким образом, при таком распаде возбуждения вылетают с одинаковой по величине скоростью под углом $\vartheta = 0$

или $\theta = \pi$ друг к другу. Можно показать, что указанными тремя случаями исчерпываются все возможные точки неустойчивости спектра. Заметим, что для спектра возбуждений слабо неидеального бозе-газа (5.13) неустойчивость появляется в самом начале спектра. Действительно, имеет место случай а), поскольку при $q \rightarrow 0$ и $\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q^2} > 0$ правая часть (6.1) имеет минимум. В спектре жидкого гелия имеет место обратная ситуация: благодаря противоположному знаку $\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q^2}$ на фоновой части спектра фононы оказываются устойчивыми относительно распада на два.

Рассмотрим теперь подробно свойства спектра в точках, где возможен распад возбуждений (пороговые точки). Исследование производится методами квантовой теории поля. Необходимо выяснить особенность гриновской функции возбуждения $G(p)$ вблизи порога распада (p — 4-импульс с компонентами ϵ , p). Взаимодействие между возбуждениями предполагается имеющим трехчастичный характер. Соответствующая вершинная часть есть $\Gamma(p; q; p-q)$. Гриновская функция $G(p)$ выражается через нулевую функцию $G_0(p)$ для «свободного» возбуждения и вершинную часть Γ уравнением Дайсона

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) + \\ + i \int \Gamma(p; q; p-q) G(q) G(p-q) \Gamma_0(p; q; p-q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (6.7)$$

где Γ_0 есть вершинная часть в первом приближении теории возмущений (некоторое затравочное взаимодействие).

а) Свойства спектра вблизи порога рождения фона. Предполагаем, что испущенный фон устойчив и при малом q спектр имеет вид ($\alpha > 0$)

$$\omega(q) = cq - \alpha q^3. \quad (6.8)$$

Однако, как мы увидим, член с α в $\omega(q)$ окажется в дальнейшем несущественным. Далее предполагаем, что вблизи порога ($p = p_c$) спектр имеет вид

$$\epsilon(p) = \epsilon_c + c(p - p_c) + \beta(p - p_c)^2, \quad (6.9)$$

и особенность появляется в высших членах по $(p - p_c)$. Естественно, что вычисления должны подтвердить это последнее предположение. При этом, для того чтобы правая часть (6.1) имела минимум по q , необходимо, чтобы β было больше нуля. Действительно, при $\cos \vartheta = 1$ и $p = p_c$ правая часть (6.1) равна

$$\epsilon_c + \beta q^2$$

и имеет минимум по q при $\beta > 0$.

При малых ω и q гриновская функция равна

$$G(q) = \frac{a}{\omega^2 - \omega^2(q) + i\delta} \quad (6.10)$$

и пропорциональна функции распространения фонона.

При $p \approx p_c$ и $\epsilon \approx \epsilon_c$ гриновская функция возбуждения имеет особенность. Мы предположим, что $G^{-1}(p)$ вблизи нуля имеет вид

$$G^{-1}(p) = b^{-1} [c \Delta p + \beta (\Delta p)^2 - \Delta \epsilon - i\delta], \quad (6.11)$$

$$\Delta p = p - p_c, \quad \Delta \epsilon = \epsilon - \epsilon_c$$

плюс члены более высокого порядка, которые подлежат определению. Вершинная часть для фонона при малых q пропорциональна q , так что имеем

$$\Gamma_0(p; q; p - q) = g_0 q, \quad \Gamma(p; q; p - q) = g q. \quad (6.12)$$

Нас интересует та часть интеграла в уравнении Дайсона (6.7), которая содержит особенность. Несложный анализ выражения (6.7) показывает, что особенность возникает в интеграле при интегрировании по малым значениям ω и q , для которых нам известны все входящие в интеграл функции. Таким образом, предполагаемая особая часть интеграла (6.7) равна

$$\text{const} \int \frac{q^4 dq d \cos \vartheta d\omega}{[(cq)^2 - \omega^2 - i\delta] [c(\Delta p - q \cos \vartheta) - \Delta \epsilon + \omega + \beta(\Delta p - q)^2 - i\delta]}. \quad (6.13)$$

В полученном интеграле существенный вклад дают углы ϑ , близкие к нулю. Поэтому можно всюду положить $\cos \vartheta = 1$. Интегрирование по ω можно распространить на интервал

— $-\infty < \omega < \infty$, после чего интегрирование сводится к взятию вычета в точке $\omega = cq$. В результате получаем

$$\text{const} \int q^2 dq \ln(x - 2\beta q \Delta p + \beta q^2), \quad (6.14)$$

где $x = c \Delta p - \Delta \varepsilon + \beta (\Delta p)^2$.

Последнее интегрирование по q производится без труда после разложения выражения под логарифмом на множители; таким путем находим

$$\left. \begin{aligned} a_1 q_1^3 \ln q_1 + a_2 q_2^3 \ln q_2, \\ q_{1,2} = \beta \Delta p \pm \sqrt{(\beta \Delta p)^2 - (\beta - \alpha) x}. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Отсюда в непосредственной близости от полюса $G(p)$ (нуля $G^{-1}(p)$) получаем ($x \ll \beta (\Delta p)^2$) особую часть $G^{-1}(p)$:

$$(\Delta p)^3 \ln(-\Delta p). \quad (6.16)$$

С учетом (6.11) имеем

$$G^{-1}(p) = b^{-1} [c \Delta p + \beta (\Delta p)^2 + \gamma (\Delta p)^3 \ln(-\Delta p) - \Delta \varepsilon]. \quad (6.17)$$

Из формулы (6.17) следует, что энергия возбуждения вблизи порога испускания фонона равна

$$\varepsilon = \varepsilon_c + c(p - p_c) + \beta(p - p_c)^2 + \gamma(p - p_c)^3 \ln(p_c - p). \quad (6.18)$$

При $p > p_c$ в энергии ε появляется отрицательная мнимая часть, равная $-\gamma \ln(\Delta p)^3$, что означает появление затухания. При этом время жизни обратно пропорционально $(\Delta p)^3$. Заметим, что этот результат можно было бы получить по теории возмущения. Это объясняется тем, что взаимодействие с длинноволновыми фононами всегда является слабым. Выше был рассмотрен случай, когда фонон испускается под углом $\vartheta = 0$ к направлению импульса распадающегося возбуждения. Для другого возможного случая, когда $\vartheta = \pi$, меняется только кинематика распада, характер же особенности остается тем же.

Далее рассмотрим сначала случай в) (как более простой), а затем уже случай б).

в) Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с не равными нулю параллельными импульсами. Из физических соображений очевидно, что главный вклад в интеграл

в уравнении (6.7) в этом случае дает область импульсов q , близких к значению q_0 , с которым рождается новое возбуждение. Функция Грина вблизи порогового значения q_0 не имеет особенностей и записывается вблизи полюса в обычном виде

$$G(q) = A(\varepsilon(q) - \omega - i\delta)^{-1}. \quad (6.19)$$

Это обстоятельство значительно упрощает весь дальнейший анализ. Разбиваем область интегрирования в интеграле (6.7) на две, выделив небольшую окрестность вблизи q_0 и ε_0 . Интегрирование по этой небольшой области, как и можно ожидать, выдает нерегулярную часть гриновской функции вблизи $p = p_c$. В указанной небольшой области вершинные части Γ и Γ_0 можно считать постоянными. Таким образом, нерегулярная часть определяется интегралом

$$\int \frac{d^3q d\omega}{[\varepsilon(q) - \omega - i\delta][\varepsilon(|p - q|) - \varepsilon + \omega - i\delta]} \sim \sim \int \frac{d^3q}{\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|) - \varepsilon}. \quad (6.20)$$

При $p = p_c$ сумма $\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|)$ имеет минимум как функция q , и ее можно записать в виде

$$\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|) \approx \varepsilon_c + v_c \Delta p + \alpha (q_0 - q)^2 + \frac{\beta (q_0 - q, p_c)^2}{p_0^2}. \quad (6.21)$$

Здесь v_c — скорость образующихся возбуждений,

$$\alpha = \frac{v_c p_c}{2q_0 (p_c - q_0)},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \right)_{q=p_c - q_0} - \frac{v_c p_c}{q_0 (p_c - q_0)} \right\}.$$

Вводим новые переменные $u = |q - q_0|$ и $u p_{\#} = u p_c \cos \psi$, после чего интегрирование в (6.20) выполняется элементарно, и мы получаем

$$G^{-1} \sim \int \frac{u^2 du d \cos \psi}{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon + \beta u^2 \cos^2 \psi + \alpha u^2} \sim \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}. \quad (6.22)$$

Поскольку точка $p = p_c$ и $\varepsilon = \varepsilon_c$ есть точка спектра, то при $\Delta p = 0$ и $\Delta \varepsilon = 0$ $G^{-1}(p)$ должна обращаться в нуль,

а следовательно, регулярная часть $G^{-1}(p)$ при малых Δp и $\Delta \epsilon$ должна иметь вид $a' \Delta p + b' \Delta \epsilon$. Таким образом, окончательно имеем

$$G^{-1}(p) = A_1^{-1} [a \Delta p + \Delta \epsilon + b \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \epsilon}]. \quad (6.23)$$

Энергия возбуждения определяется уравнением $G^{-1}(p) = 0$. Решение этого уравнения при $p < p_c$ имеет вид

$$c = \epsilon_c + v_c(p - p_c) - \left(\frac{a + v_c}{b}\right)^2 (p - p_c)^2. \quad (6.24)$$

При этом должно быть выполнено неравенство

$$\frac{(a + v_c)}{b} > 0.$$

При $p > p_c$ уравнение $G^{-1}(p) = 0$ не имеет решений ни действительных, ни комплексных. Таким образом, кривая $\epsilon(p)$ вблизи порога имеет наклон v_c и далее не продолжается.

б) Распад на два возбуждения, вылетающие под углом друг к другу. В этом случае, согласно (6.5), рождающиеся возбуждения имеют энергии, соответствующие минимумам на кривой $\epsilon(p)$. Имея в виду спектр жидкого гелия, у которого минимум соответствует ротонам, мы будем говорить о распаде возбуждения на два ротона с энергиями

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(q) &= \Delta + \frac{(q - p_0)^2}{2\mu}, \\ \epsilon(|p - q|) &= \Delta + \frac{(|p - q| - p_0)^2}{2\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

По тем же соображениям, что и в предыдущем случае, нерегулярная часть гриновской функции возникает от интегрирования в уравнении Дайсона по области q , близкой к p_0 . Однако при этом вершинная часть оказывается также нерегулярной вблизи порога. Чтобы увидеть, с какого рода особенностями мы встречаемся в этом случае, рассмотрим интеграл (6.20), который получается в уравнении для G^{-1} , если вначале предположить, что Γ регулярна (теория возмущений). Этот интеграл после подстановки

(6.25) и введения цилиндрических координат

$$\begin{aligned} q_z &= p_0 \cos \frac{\theta_0}{2} + q'_z, \\ q_x &= \left(p_0 \sin \frac{\theta_0}{2} + q'_\rho \right) \cos \varphi, \\ q_y &= \left(p_0 \sin \frac{\theta_0}{2} + q'_\rho \right) \sin \varphi \end{aligned}$$

легко вычисляется:

$$\int \frac{dq'_\rho dq'_z}{2\Delta - \omega + \frac{1}{\mu} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} q'^2_\rho + \cos^2 \frac{\theta_0}{2} q'^2_z \right)} \sim \ln(2\Delta - \omega). \quad (6.26)$$

Для вычисления $\Gamma(p; p - p_0; p_0)$ вблизи $q = p_0$ следовало бы решить соответствующее интегральное уравнение, связывающее Γ с некоторой затравочной Γ_0 . Мы не будем подробно останавливаться на этом. Заметим только, что анализ такого уравнения приводит к необходимости суммирования ряда геометрической прогрессии, члены которой есть степени интеграла вида (6.26). Таким образом, удастся показать, что

$$\Gamma(p; p - p_0; p) \sim \frac{p}{1 + Q \ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{2\Delta}}. \quad (6.27)$$

Подставив такого вида Γ в уравнение Дайсона (6.7) и произведя интегрирование, аналогичное (6.26), получаем нерегулярную часть $G^{-1}(p)$ вблизи порога в виде

$$\ln \frac{a}{2\Delta - \varepsilon} \frac{a}{\alpha}. \quad (6.28)$$

Поскольку $G^{-1}(p_c) = 0$, окончательно получаем

$$G^{-1}(p) = A^{-1} \left[p - p_c - \frac{a}{\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha}} \right]. \quad (6.29)$$

Из уравнения $G^{-1}(p) = 0$ с помощью (6.29) получаем при $p < p_c$ спектр вблизи порога

$$\varepsilon(p) = 2\Delta - \alpha e^{\frac{a}{p_c - p}}. \quad (6.30)$$

Таким образом, в этом случае кривая $\varepsilon(p)$ оказывается в точке $p = p_c$ с горизонтальной касательной (касание бесконечного порядка).

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные нейтроннографические данные [4] указывают, что, по-видимому, в сверхтекучем гелии имеет место этот последний случай, т. е. кривая $\varepsilon(p)$ заканчивается в точке, где происходит распад на два ротона.

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ [10, 11]

Начальный участок энергетического спектра является в первом приближении линейным (фононы). Однако в ряде эффектов оказывается существенной дисперсия фононной части спектра, т. е. отклонение энергетической кривой от линейной зависимости. Ввиду чрезвычайной малости эффекта его невозможно определить по существующим нейтроннографическим данным. Не ясно также, можно ли этот эффект вычислить теоретически, рассматривая систему взаимодействующих фононов. Имея в виду, что спектр фононов устойчив и учитывая изотропию жидкости, можно сразу для начального участка фононного спектра написать следующее выражение:

$$\varepsilon = cp(1 - \gamma p^2), \quad (7.1)$$

где γ — существенно положительная величина. Оценки величины γ можно произвести, интерполируя всю энергетическую кривую; такая интерполяция дает

$$\gamma \approx 2,5 \cdot 10^{37} \text{ г}^{-2} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^2. \quad (7.2)$$

Однако к этой оценке следует относиться с осторожностью ввиду ее чрезвычайной грубости.

Далее рассмотрим вопрос о квантовании поля фононов. Представим плотность жидкости $\rho(\mathbf{r})$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в виде рядов по плоским волнам:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum (\rho_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \rho_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum (\mathbf{v}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{v}_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad (7.4)$$

Здесь ρ_0 — равновесная плотность, $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ — волновой вектор фонона, связанный с частотой соотношением

$$\omega = ck. \quad (7.5)$$

Далее воспользуемся соотношением коммутации (3.9)

$$\rho(\mathbf{r}_1) \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_1) = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

из которого для компонент Фурье следуют соотношения, справедливые при $\text{rot } \mathbf{v} = 0$:

$$\rho_p \rho_q^* - \rho_q^* \rho_p = \frac{\rho_0 p}{2c} \delta_{pq}, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{v}_p = \frac{cp}{\rho_0 p} \rho_p. \quad (7.7)$$

Гамильтониан рассматриваемой системы — жидкого гелия в объеме V — равен

$$\hat{H} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} + E(\rho) \right\} dV. \quad (7.8)$$

Без учета ангармонических членов он выражается через фурье-компоненты плотности в следующем виде:

$$\hat{H}_0 = \frac{c^2}{\rho_0} \sum (\rho_p \rho_p^* + \rho_p^* \rho_p), \quad \langle \hat{H} \rangle = \sum \left(n_p + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega. \quad (7.9)$$

Здесь n_p — число фононов с импульсом \mathbf{p} . Из (7.6) и (7.8) находим отличные от нуля матричные элементы фурье-компонент плотности

$$(\rho_p)_{n_p, n_p+1} = \sqrt{(p\rho_0/2c)(n_p+1)} e^{-i\omega t}, \quad (7.10)$$

$$(\rho_p^*)_{n_p, n_p-1} = \sqrt{(p\rho_0/2c)n_p} e^{i\omega t}. \quad (7.11)$$

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению различных возможных случаев взаимодействия элементарных возбуждений друг с другом.

Рассеяние фонона фононом

Спектр фононов вида (7.1) устойчив — распад фонона на два или более фононов невозможен, так как невозможно при этом одновременно удовлетворить законам со-

хранения энергии и импульса. Взаимодействие фононов обязано наличию ангармонических членов в гамильтониане (7.8). Матричные элементы плотности (7.10) и (7.11) пропорциональны $\sqrt{\rho}$, т. е. существенно зависят от энергии фонона. При низких температурах ($T < T_\lambda$) энергия фононов заведомо много меньше дебаевской энергии. Поэтому взаимодействие фононов слабо, и можно рассчитывать возможные процессы по теории возмущений. Первый из возможных процессов — рассеяние фонона фононом — является четырехфононным. Ограничиваясь членами четвертого порядка по ρ' , запишем гамильтониан (7.8) в виде

$$H = H_0 + V_3 + V_4, \quad (7.12)$$

где H_0 — гамильтониан свободного поля фононов, содержащий члены второго порядка по ρ' , V_3 содержит ангармонические члены третьего порядка:

$$V_3 = \frac{v\rho'v}{2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^3, \quad (7.13)$$

и наконец, V_4 — члены четвертого порядка по ρ' :

$$V_4 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^4. \quad (7.14)$$

ρ' есть отклонение плотности от ее значения в неподвижной жидкости. Амплитуда перехода двух фононов в два других получается из кубических по ρ' членов в энергии (V_3) во втором приближении теории возмущений и из членов четвертой степени по ρ' в первом приближении теории возмущений

$$\langle p, p_1 | H | p', p_1 \rangle = \sum \frac{\langle p, p_1 | V_3 | q \rangle \langle q | V_3 | p', p_1 \rangle}{\varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(q)} + \langle p, p_1 | V_4 | p', p_1 \rangle. \quad (7.15)$$

Вычисление амплитуды перехода в общем случае приводит к довольно громоздким формулам. Однако в дальнейшем оказывается достаточным знания амплитуды перехода в том случае, когда импульс одного из сталкивающихся фононов много меньше импульса другого ($p \ll p_1$). Мы ограничимся этим случаем. Тогда из всех промежуточных состояний в сумму (7.15) дает наибольший вклад состояние, в котором $q = p + p_1$. При этом знаменатель указанной суммы,

если не учитывать дисперсию спектра фононов, обращается в нуль при значении угла θ между импульсами p и p_1 , равном нулю. Таким образом, учет дисперсии существенно необходим. Ограничиваясь указанным случаем, вычисляем дифференциальное эффективное сечение рассматриваемого процесса:

$$d\sigma = \frac{(u+2)^4 p_1^3 p_1' p' \delta \{ \varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p') - \varepsilon(p_1') \}}{(16\pi\hbar^2\rho_0)^2 c p (1 - \cos\theta + 3\gamma p_1^2)^2} p'^2 dp' d\theta',$$

$$u = \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho}. \quad (7.16)$$

То обстоятельство, что выражение (7.16) имеет острый максимум при малых значениях угла θ , позволяет легко выполнить интегрирование, необходимое для получения полного сечения. В результате для полного сечения рассеяния фонона с импульсом p фононом с импульсом p_1 , усредненного по всем углам θ , получаем следующее выражение:

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi (u+2)^4 p_1^4}{(96\pi\hbar^2\rho_0 c)^2 \gamma} \quad (p \ll p_1). \quad (7.17)$$

Безразмерный параметр u равен приблизительно шести. Согласно (7.16) эффективное сечение достигает максимума при нулевом угле между импульсами сталкивающихся фононов. Из законов сохранения следует, что в этом случае при рассеянии не происходит изменения направлений импульсов фононов. При этом происходит лишь быстрый обмен энергиями между фононами, а следовательно, и установление энергетического равновесия в фононном газе. Процесс установления энергетического равновесия в фононном газе играет существенную роль в кинетических явлениях в сверхтекучем гелии. Точное вычисление времени релаксации, характеризующего установление энергетического равновесия в фононном газе, не представляется возможным, так как трудно точно сформулировать задачу. Однако с помощью результата (7.17) можно подойти к решению такой задачи в двух предельных случаях.

В первом случае мы предполагаем, что функция распределения фононов в области малых энергий несколько отличается от равновесной на величину δn . Интеграл столк-

новений, характеризующий скорость приближения функции распределения к равновесному значению, равен

$$I(n) = - \int \sigma(p, p_1) \{ n n_1 (n' + 1) (n_1 + 1) - n' n'_1 (n + 1) (n_1 + 1) \} dp_1 (2\pi\hbar)^{-3}. \quad (7.18)$$

Предполагая функции n_1 , n' и n'_1 равновесными, отсюда получаем

$$I(n) = - \delta n \int \sigma(p, p_1) n^{-1} n' n'_1 (n_1 + 1) dp_1 (2\pi\hbar)^{-3}. \quad (7.19)$$

Таким образом, время релаксации фиксированной группы фононов равно

$$\frac{1}{t} = \int \sigma(p, p_1) n^{-1} n' n'_1 (n_1 + 1) dp_1 (2\pi\hbar)^{-3}. \quad (7.20)$$

Для случая $p \ll p_1$ в интеграле (7.20), как мы убедимся, играют главную роль фононы с энергией порядка $6kT$. Поэтому для упрощения равновесные функции можно взять в виде виновских функций. Подставив в (7.21) выражение (7.17) для $\sigma(p, p_1)$, в итоге получаем время релаксации фононов малой энергии

$$\frac{1}{t_M} = \frac{\pi (u+2)^4 p}{(96\pi\hbar^2\rho_0) kT\gamma (2\pi\hbar)^3} \int n_1 (n_1 + 1) p_1^4 dp_1, \quad (7.21)$$

или после элементарного интегрирования

$$\frac{1}{t_M} = \frac{(u+2)^4 6!}{(48\hbar^2\rho_0)^2 c\gamma (2\pi\hbar)^3} \left(\frac{kT}{c}\right)^6 p. \quad (7.22)$$

Аналогичным путем можно получить время релаксации фононов большой энергии. Предполагая $p \gg p_1$, из (7.20) в этом случае получаем

$$\frac{1}{t_B} = \frac{\pi (u+2)^4 p^4}{(96\hbar^2\rho_0)^2 c\gamma (2\pi\hbar)^3} \int n_1 (n_1 + 1) dp_1. \quad (7.23)$$

Наконец, снова после элементарного интегрирования находим

$$\frac{1}{t_B} = \frac{(u+2)^4 (kT/c)^3 (\pi^2/3) p^4}{(48\hbar^2\rho_0)^2 c\gamma (2\pi\hbar)^3}. \quad (7.24)$$

Тот факт, что импульс p_1 мал, учитывается в интеграле (7.23) автоматически, поскольку в нем играют существенную роль энергии порядка $2kT$. Подставив численные значения всех параметров и интерполируя между указанными предельными случаями, получим следующую формулу, приближенно справедливую для всех энергий ($x = \varepsilon/kT$):

$$\frac{1}{t_{ph}} \approx 4 \cdot 10^5 T^7 x (x + 6)^3. \quad (7.25)$$

Сравнение полученного времени с другими временами, характеризующими различные другие процессы, показывает, что установление энергетического равновесия в фононном газе происходит очень быстро. Таким образом, во всех случаях можно предполагать наличие энергетического равновесия.

Рассеяние фонона ротоном

Вычислим эффективное сечение рассеяния фонона ротоном. Ротон, находящийся в фононном поле, можно рассматривать как частицу в движущейся среде. Этому соответствует появление в энергии ротона дополнительного члена — $\mathbf{p}\mathbf{v}$, или в симметризованном виде

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{p}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{p}). \quad (7.26)$$

Здесь \mathbf{p} — оператор импульса ротона, \mathbf{v} — оператор скорости фонона (7.4). Наличие фононного поля также связано с изменением плотности среды. Разложив энергию ротона в ряд по плотности ρ' до членов второго порядка, находим

$$H_r = H_{r0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} \rho' + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho'^2. \quad (7.27)$$

H_{r0} — энергия ротона в отсутствие фонона, ρ' — оператор плотности фонона (7.3). В разложении (7.27) мы пренебрегаем членами, содержащими разность $p - p_0$, так как большинство ротонов имеет импульс p , близкий к p_0 . Член с производной $\partial \Delta / \partial \rho$ (7.27) мы также в дальнейшем не будем удерживать, так как он заведомо меньше

члена (7.26). Таким образом, окончательно энергия взаимодействия фонон — ротон записывается в виде

$$V = -\frac{1}{2}(\mathbf{p}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho'^2. \quad (7.28)$$

Процесс рассеяния фонона ротоном является двухфононным, потому интересующие нас переходы получаются из линейного члена по \mathbf{v} в (7.28) во втором порядке теории возмущений и в первом порядке из квадратичных (по ρ') членов *).

Так, вычисленная амплитуда перехода для рассматриваемого процесса, с учетом малости импульса фонона p по сравнению с импульсом ротона p_0 и малости энергии фонона по сравнению с μc^2 , имеет следующий вид:

$$\langle \mathbf{n} | H | \mathbf{n}' \rangle = \frac{p_0 p}{2\rho_0} \left\{ (\mathbf{n} + \mathbf{n}', \mathbf{m})(\mathbf{n}\mathbf{n}') + \frac{p_0}{\mu c} (\mathbf{n}\mathbf{m})^2 (\mathbf{n}'\mathbf{m})^2 + A^2 \right\},$$

$$A = \frac{\rho_0^2}{p_0 c} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho} \right)^2 \right]. \quad (7.29)$$

Здесь \mathbf{n} и \mathbf{n}' — единичные векторы в направлении импульсов падающего и рассеянного фононов, \mathbf{m} — единичный вектор в направлении импульса ротона.

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что рассеяние фонона на ротоне подобно рассеянию легкой частицы тяжелой. Величина импульса фонона и направление импульса ротона практически при рассеянии не

*) Тот факт, что уравнения гидродинамики являются нелинейными, несколько усложняет картину. Действительно, если решать уравнения гидродинамики методом последовательных приближений, то из суперпозиции плоских волн, имеющих в первом приближении, во втором приближении мы получим члены, содержащие произведения фононных амплитуд. Поэтому уже в первом приближении теории возмущений первый член в (7.28) сможет давать нужные переходы. Более подробный анализ этого вопроса, однако, показывает, что скорость \mathbf{v} во втором приближении содержит произведение амплитуд с множителем $p - p'$, где p и p' — начальный и конечный импульсы фонона. Поскольку импульс фонона много меньше импульса ротона p_0 , то рассеяние, как это следует из законов сохранения, происходит упругим образом, так что $p \approx p'$. И следовательно, указанным эффектом можно пренебречь.

меняются. С помощью (7.29) находим эффективное дифференциальное сечение

$$d\sigma = \left(\frac{p_0 p^2}{4\pi \hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left\{ (n + n', m)(nn') + \right. \\ \left. + \frac{p_0}{\mu c} (mn)^2 (mn')^2 + A^2 \right\} do'. \quad (7.30)$$

Усреднив сечение по всем направлениям импульса ротона, окончательно получаем

$$d\sigma = \left(\frac{p_0 p^2}{4\pi \hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos \psi) \cos^2 \psi + \right. \\ \left. + \frac{1}{105} \left(1 + 8 \cos^2 \psi + \frac{8}{3} \cos^4 \psi \right) \left(\frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2A}{15} \left(\frac{p_0}{\mu c} \right) (1 + 2 \cos^2 \psi) + A^2 \right\} do'. \quad (7.31)$$

Входящий в формулу угол ψ образован направлениями импульсов падающего и рассеянного фононов. Полное сечение находится интегрированием (7.31) по всем углам рассеяния:

$$\sigma_{phr} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{p_0 p^2}{\hbar \rho_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{9} + \frac{1}{25} \left(\frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2A}{9} \frac{p_0}{\mu c} + A^2 \right\}. \quad (7.32)$$

Приведем приближенные значения производных от параметров спектра по плотности, найденные из анализа экспериментальных данных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln p_0}{\partial \ln \rho} &\approx 0,4, & \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \ln \rho} &\approx -0,57, \\ \frac{\rho^2}{\Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} &\approx -5, & \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln \rho} &\approx -2,3. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Рассеяние ротона ротоном

Теория не дает никаких сведений о характере взаимодействия ротонов друг с другом. Однако для вычисления температурной зависимости характерных для процесса рассеяния ротона ротоном времен оказывается достаточным знания соответствующей вероятности с точностью до постоянного множителя. Такая вероятность мало чувствительна к выбору вида энергии взаимодействия. Мы выби-

раем энергию взаимодействия ротонов в виде δ -функции от расстояния между ротонами

$$V = V_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (7.34)$$

\mathbf{r} и \mathbf{r}_1 — радиус-векторы ротонов, V_0 — некоторая постоянная.

В качестве волновых функций выбираем плоские волны, симметризованные по парам сталкивающихся и рассеянных ротонов. С помощью таких волновых функций вычисляем матричный элемент перехода. Проинтегрировав квадрат модуля матричного элемента по фазовому объему одного из рассеянных ротонов, находим вероятность перехода $d\omega$ в виде

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |2V_0|^2 \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (7.35)$$

Из вида энергетического спектра следует, что большинство ротонов будет обладать импульсами, по абсолютной величине близкими к p_0 . Следовательно, изменения импульсов ротонов при рассеянии по своей величине будут значительно меньше p_0 .

Пусть импульсы ротонов \mathbf{p} и \mathbf{p}_1 до столкновения образуют угол θ . Тогда из рис. 3 легко видеть, что импульсы

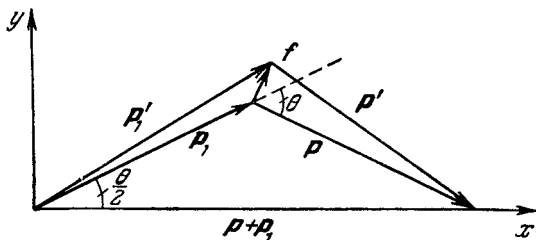


Рис. 3.

ротонов после столкновения, вводя переменную f , можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} p' &= p_0 + f_x \cos \frac{\theta}{2} + f_y \sin \frac{\theta}{2}, \\ p'_1 &= p_0 + f_y \cos \frac{\theta}{2} - f_x \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

причем $|f| \ll p_0$.

В новых переменных элемент фазового объема сводится к

$$d\mathbf{p}' = 2\pi p_0 \sin \frac{\theta}{2} df_x df_y, \quad (7.37)$$

а закон сохранения энергии — к

$$f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (p - p_0)^2 + \frac{1}{2} (p_1 - p_0)^2. \quad (7.38)$$

Для вычисления полной вероятности рассеяния ротона ротоном необходимо произвести в (7.35) интегрирование по фазовому объему рассеянной частицы. В выражении (7.36) от координат в фазовом пространстве зависит только δ -функция, содержащая закон сохранения энергии.

Если для удобства интегрирования ввести вспомогательную переменную g при помощи соотношения

$$g^2 = f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

то с учетом (7.37) и (7.38) указанное интегрирование δ -функции по фазовому объему рассеянной частицы производится весьма просто, и в результате получаем

$$\omega = \frac{2p_0\mu |V_0|^2}{\hbar^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (7.39)$$

Обратная величина среднего времени t_r между двумя соударениями ротона получается из (7.39) умножением на плотность ротонов N_r , определяемую формулой (2.8') и усреднением по всем углам, образованным импульсами сталкивающихся ротонов. Таким образом, находим

$$\frac{1}{t_r} = \frac{4p_0\mu |V_0|^2 N_r}{\hbar^4}. \quad (7.40)$$

Постоянная $|V_0|^2$ по данным о вязкости гелия равна приблизительно $3,5 \cdot 10^{-76}$.

Поглощение и испускание фононов и ротонов

При соударениях элементарных возбуждений возможны неупругие процессы, сопровождающиеся изменением числа квазичастиц. Подобные процессы можно разделить на три типа:

- а) процессы испускания (или поглощения) фононов;
- б) процессы взаимного превращения ротоннов в фононы;
- в) процессы испускания (или поглощения) ротоннов.

Мы будем интересоваться процессами наиболее вероятными для каждого типа.

Наиболее вероятный из процессов типа а) — пятифононный процесс, в котором два фонона превращаются в три. Вероятность такого процесса вычисляется по теории возмущений аналогично четырехфононному процессу. Интересующая нас амплитуда перехода получается в третьем порядке теории возмущений из ангармонических членов V_3 (7.13), из членов V_4 и V_3 во втором порядке и членов пятого порядка в первом приближении. При этом в суммах по промежуточным состояниям также возникают резонансные знаменатели, когда импульсы начальных и промежуточных фононов имеют близкие направления. Поэтому наибольший вклад дают члены третьего порядка теории возмущений, имеющие по два резонансных знаменателя. При этом дисперсия спектра фононов оказывается существенной, так как лишь учет ее обеспечивает сходимость угловых интегралов. Мы не будем производить полное вычисление вероятности пятифононного процесса, поскольку основной параметр дисперсии γ в ответ входит в квадрате и плохо известен. Для выяснения же температурной зависимости соответствующих кинетических коэффициентов достаточно знать зависимость вероятности от импульсов фононов. Несложные оценки позволяют заключить, что средняя по углам вероятность пятифононного процесса пропорциональна кубу некоторого импульса:

$$\bar{w} \sim p^3. \quad (7.41)$$

Какие конкретно импульсы входят в w , оказывается в дальнейшем несущественным. Пусть полное число фононов в единице объема (вообще не равное равновесному) есть N_{ph} . Скорость изменения числа фононов благодаря пятифононному процессу может быть записана в виде

$$\dot{N}_{ph} = - \int \int \int \int \{ n_1 n_2 n_3 (n_4 + 1) (n_5 + 1) - (n_1 + 1) (n_2 + 1) (n_3 + 1) n_4 n_5 \} d\omega \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9}. \quad (7.42)$$

Если полное число фононов не равно равновесному, то это означает, что функции распределения n содержат не равный нулю химический потенциал μ_{ph} :

$$n = \{\exp[(\epsilon - \mu_{ph})/kT] - 1\}^{-1}.$$

При малых отклонениях от равновесия разложим функцию n по степеням μ_{ph} , ограничиваясь линейными по μ_{ph} членами; имеем:

$$n - n_0 = \frac{n_0(n_0 + 1)\mu_{ph}}{kT}. \quad (7.43)$$

Функция n с индексом нуль соответствует равновесным функциям распределения для фононов ($\mu_{ph} = 0$). После несложных преобразований с помощью (7.43) соотношение (7.42) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_{ph} = & - \int \int \int \int n_{10} n_{20} n_{30} (n_{40} + 1) \times \\ & \times (n_{50} + 1) d\omega \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9} \frac{\mu_{ph}}{kT}. \end{aligned}$$

Обозначив коэффициент в равенстве, связывающем скорость изменения N_{ph} с величиной μ_{ph} , через Γ_{ph} , имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{ph} = & \frac{1}{kT} \int \int \int \int n_{10} n_{20} n_{30} (n_{40} + 1) \times \\ & \times (n_{50} + 1) d\omega \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9}. \quad (7.44) \end{aligned}$$

Без большого ущерба для точности в подынтегральном выражении в (7.44) можно пренебречь функциями распределения n_{40} и n_{50} по сравнению с единицей. Тогда интегрирование по фазовым объемам импульсов трех сталкивающихся фононов (\mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3) производится независимо, что позволяет заменить $d\omega$ на $\bar{\omega}$, опустив при этом одно интегрирование. Таким образом, получаем

$$\Gamma_{ph} \approx \frac{1}{kT} \int \int \int n_{10} n_{20} n_{30} \bar{\omega} \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (7.44a)$$

Подынтегральное выражение в (7.44a) пропорционально p^{12} . После интегрирования в (7.44a) по фазовым

объемам сталкивающихся фононов получаем температурный закон для Γ_{ph} :

$$\Gamma_{ph} = aT^{11}, \quad (7.45)$$

где a — не зависящий от температуры коэффициент.

Полученное соотношение (7.45) устанавливает температурную зависимость именно той величины, которая существенно войдет в дальнейшие вычисления.

Из анализа экспериментальных данных по поглощению звука коэффициент a равен примерно $1 \cdot 10^{43}$.

Перейдем к процессу б). Прямое превращение фонона в ротон, очевидно, невозможно, так как импульс фонона p много меньше импульса ротона p_0 . При столкновении энергичного фонона (с энергией порядка Δ) с ротонном возможно образование двух ротоннов. При этом угол между направлениями импульсов возникающих ротоннов не должен быть слишком мал, как это следует из закона сохранения импульса. Как и в предыдущем случае, можно произвести оценку вероятности такого процесса. Для оценки можно считать, что фонон большой энергии взаимодействует с ротонном подобно ротону, т. е. энергия взаимодействия фонон — ротон в этом случае имеет вид δ -функции (7.34). Подобно предыдущему, скорость приближения числа ротоннов и фононов к равновесным значениям выражается через соответствующие химические потенциалы

$$\dot{N}_r = -\Gamma_{phr}(\mu_r - \mu_{ph}), \quad \dot{N}_{ph} = \Gamma_{phr}(\mu_r - \mu_{ph}). \quad (7.46)$$

Коэффициент Γ_{phr} определяется полным интегралом столкновений, связанным с рассматриваемым процессом превращения фонона в ротон (и обратно). Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательный результат:

$$\Gamma_{phr} = \frac{|V_0|^2 \Delta^2 N_r^2}{\pi \hbar^4 c^3 k T}. \quad (7.47)$$

Амплитуда V_0 для рассматриваемого процесса неизвестна, однако если взять в качестве V_0 его значение для взаимодействия ротон — ротон, то, очевидно, мы получим верхнюю оценку величины Γ_{hr} . Для дальнейших исследований

кинетических процессов мы выделим из Γ_{phr} его температурную зависимость и запишем (7.47) в виде

$$\Gamma_{phr} = be^{-\frac{2\Delta}{T}}. \quad (7.48)$$

Коэффициент b может быть найден из анализа соответствующих экспериментов по поглощению звука; он оказывается равным $\sim 4 \cdot 10^{50}$.

Что касается процесса в), т. е. превращения двух ротоннов в три (и наоборот), то ввиду сильного запрета как по энергиям, так и по импульсам он оказывается маловероятным и в интересующих нас явлениях не играет роли.

8. ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ [12]

Используя микроскопические представления о сверхтекучей жидкости, изложенные выше, можно построить полную систему гидродинамических уравнений. Основные положения, на которых будем базироваться, заключаются в следующем. Упорядоченное движение возбуждений увлекает за собой лишь часть жидкости, характеризующуюся «нормальной» плотностью ρ_n . Остающаяся часть, «сверхтекучая», характеризующаяся плотностью $\rho_s = \rho - \rho_n$, при этом совершает независимое движение, и что очень важно, это последнее является потенциальным. Таким образом, в сверхтекучей жидкости одновременно могут происходить два независимых движения — нормальное и сверхтекучее — со скоростями соответственно v_n и v_s , причем

$$\text{rot } v_s = 0. \quad (8.1)$$

Условие потенциальности сверхтекучего движения (8.1) не должно нарушаться до тех пор, пока скорости движения не достигнут критических значений, когда возникает взаимодействие нормальной и сверхтекучей частей жидкости.

После этих замечаний полная система гидродинамических уравнений может быть получена, исходя из одних только законов сохранения и принципа относительности Галилея.

Закон сохранения какой-либо величины имеет универсальную форму дифференциального вида: производная по времени от сохраняющейся величины равна дивергенции некоторого вектора.

Закон сохранения массы жидкости связывает плотность ρ и поток \mathbf{j} (импульс единицы объема) уравнением непрерывности

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (8.2)$$

Закон сохранения импульса дает уравнение движения

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad (8.3)$$

где Π_{ik} есть тензор потока импульса.

Вначале мы не будем рассматривать диссипативные процессы. Тогда движение происходит обратимым образом, и энтропия S сохраняется. Поэтому можно написать

$$\dot{S} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad (8.4)$$

где \mathbf{F} — вектор потока энтропии. Поскольку энтропия связана только с возбуждениями, то она должна переноситься нормальным движением. Следовательно, поток энтропии равен $S\mathbf{v}_n$. Однако мы не будем в данном пункте ссылаться на микроскопическую картину и покажем, что соотношение $\mathbf{F} = S\mathbf{v}_n$ следует из законов сохранения. Поэтому пока \mathbf{F} для нас будет оставаться некоторой неизвестной величиной, подлежащей определению.

В сверхтекучей жидкости возможны два движения и соответственно в гидродинамике должно быть два уравнения движения. Одним из них является уравнение (8.3), второе уравнение определяет производную по времени от \mathbf{v}_s . Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$, то можно написать

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\varphi + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) = 0, \quad (8.5)$$

где φ — некоторая скалярная функция.

Уравнения (8.2) — (8.5) представляют собой полную систему гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости. Однако смысл они могут приобрести лишь после того, как будет выяснен вид неизвестных членов Π_{ik} , \mathbf{F} и φ .

Для определения вида этих членов мы воспользуемся законом сохранения энергии, который в дифференциальной

форме записывается в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (8.6)$$

где E — энергия единицы объема жидкости; \mathbf{Q} — поток энергии. Необходимо, чтобы неизвестные члены в уравнениях (8.2) — (8.5) были выбраны таким образом, чтобы уравнение (8.6) выполнялось автоматически. Кроме того, мы воспользуемся принципом относительности Галилея, позволяющим выяснить зависимость всех величин от скорости \mathbf{v}_s при заданном значении разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

Для дальнейшего удобно ввести новую систему отсчета (K_0), в которой скорость сверхтекучего движения данного элемента жидкости равна нулю. Система отсчета K_0 движется относительно исходной K со скоростью \mathbf{v}_s . Значения интересующих нас величин связаны в рассматриваемых системах известными соотношениями *):

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \quad (8.7)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{sl} j_{0k} + v_{sk} j_{0l} + \pi_{ik}, \quad (8.8)$$

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{v}_s \mathbf{j}_0 + E_0, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{v}_s \mathbf{j}_0 + E_0 \right) \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{j}_0 + \pi \mathbf{v}_s + \mathbf{q}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{F} = S \mathbf{v}_s + \mathbf{f}. \quad (8.11)$$

*) Формулы (8.7) — (8.11) следуют непосредственно из принципа относительности Галилея. Покажем, например, как получается соотношение (8.8) для обычной жидкости. Тензор потока импульса в обычной гидродинамике равен

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p \delta_{ik}$$

(u — скорость, p — давление). Скорость жидкости u в неподвижной системе связана со скоростью u' в системе, движущейся со скоростью v : $u = u' + v$. Подстановка u в выражение для Π_{ik} дает

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho u'_i v_k + \rho u'_k v_i + (\rho u'_i u'_k + p \delta_{ik}).$$

Обозначив импульс единицы объема жидкости в движущейся системе отсчета буквой j_0 , окончательно находим искомое соотношение

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + v_l j_{0k} + v_k j_{0l} + \pi_{ik}.$$

Естественно, что полученная формула сохраняет свой вид и в гидродинамике сверхтекучей жидкости. Остальные формулы получаются аналогичным путем.

Здесь j_0 — импульс, π_{ik} — тензор потока импульса, E_0 — энергия, q — вектор потока энергии, f — поток энтропии в системе K_0 .

В системе K_0 жидкость движется со скоростью $v_n - v_s$, и, очевидно, все величины (j_0 , π_{ik} , E_0 , q , f) могут зависеть только от указанной разности. Для энергии E_0 имеет место термодинамическое тождество

$$dE_0 = T dS + \mu dp + (v_n - v_s, dj_0). \quad (8.12)$$

Здесь μ — химический потенциал, T — температура. Третий член в формуле (8.12) выражает просто тот факт, что скорость есть производная энергии по импульсу, и его следует рассматривать как определение скорости v_n . Из соображений симметрии следует, что вектор j_0 может быть направлен только по $v_n - v_s$; таким образом, можно записать

$$j_0 = \rho_n (v_n - v_s). \quad (8.13)$$

Соотношение (8.13) следует рассматривать как определение нормальной плотности ρ_n . Из (8.7) и (8.13) следует тогда соотношение

$$j = \rho_s v_s + \rho_n v_n, \quad (8.14)$$

где $\rho_s = \rho - \rho_n$.

Идея дальнейшего вывода состоит в следующем. Дифференцируем энергию E по времени и выражаем все производные от термодинамических величин, j и v_s по времени, используя уравнения (8.2) — (8.5). Затем вычисляем $\text{div } Q$, используя формулу (8.10), и подставляем \dot{E} и $\text{div } Q$ в уравнение (8.6). После значительных сокращений получаем

$$\begin{aligned} \text{div } q = & - (m \nabla) v_s + (v_n - v_s) (\nabla m) + j_0 (v_n - v_s, \nabla) v_n + \\ & + (j_0 - S (v_n - v_s)) \nabla (\varphi - \mu) - \nabla T (f - S (v_n - v_s)) + \\ & + \text{div} (fT + j_0 \mu). \end{aligned} \quad (8.15)$$

При этом вместо π_{ik} введен другой тензор

$$m_{ik} = \pi_{ik} + [E_0 - TS - \mu \rho - (v_n - v_s, j_0)] \delta_{ik}. \quad (8.16)$$

При отсутствии диссипации энергии величины m_{ik} , q , f и φ являются функциями термодинамических переменных и скоростей и не зависят от их производных по времени

и координатам. Это обстоятельство позволяет однозначным образом получить из (8.15) выражение для искомых величин

$$\left. \begin{aligned} m_{ik} &= j_{0i}(\mathbf{v}_{nk} - \mathbf{v}_{sk}), \quad \mathbf{f} = S(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad \varphi = \mu, \\ \mathbf{q} &= T\mathbf{f} + \mu\mathbf{j}_0 - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s)\mathbf{j}_0 + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)(\mathbf{v}_n\mathbf{j}_0). \end{aligned} \right\} (8.17)$$

Далее окончательно получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + S\mathbf{v}_s = S\mathbf{v}_n, \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= \rho v_{si}v_{sk} + v_{si}j_{0k} + v_{nk}j_{0i} - \\ &\quad - [E_0 - TS - \mu\rho - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{j}_0)]\delta_{ik}, \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) (\mathbf{j}_0 + \rho\mathbf{v}_s) + ST\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n\mathbf{j}_0). \quad (8.20)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (8.19), представляет собой полное давление, которое, по определению, равно производной от полной энергии жидкости по объему при постоянных полной массе, полной энтропии и полном импульсе относительного движения

$$p = -\frac{\partial(E_0V)}{\partial V} = -E_0 + TS + \mu\rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{j}_0). \quad (8.21)$$

Подставив полученные выражения для \mathbf{F} , φ и Π_{ik} в уравнения (8.3) — (8.5), получим полную систему гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \mathbf{v}_s \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j}\nabla) \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{j}_0 + \nabla p = 0, \quad (8.23)$$

$$\dot{S} + \operatorname{div} S\mathbf{v}_n = 0, \quad (8.24)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0. \quad (8.25)$$

Тензор потока импульса Π_{ik} с учетом (8.14) можно переписать в виде

$$\Pi_{ik} = \rho v_{ni}v_{nk} + \rho_s v_{si}v_{sk} + p\delta_{ik}, \quad (8.19')$$

где первый член представляет собой поток импульса нормального движения, а второй — поток импульса сверхтеку-

чего движения. Полученные уравнения гидродинамики (8.22) — (8.25) довольно сложны, поскольку входящие сюда величины μ , ρ_n , S и т. д. являются функциями относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, вид которых может быть найден лишь с привлечением микроскопической теории.

Общие гидродинамические уравнения заметно упрощаются в случае не слишком больших скоростей. Следует иметь в виду, что свойство сверхтекучести нарушается при скоростях, превышающих некоторое критическое значение. Однако в нестационарных условиях, например при распространении звука, скорости могут значительно превосходить критическое значение. Таким образом, существуют области применения общих уравнений, где проявляется нелинейный характер уравнений (см. § 13). Если ограничиться квадратичными членами относительно скоростей, то можно пренебречь зависимостью ρ_n и ρ_s от скоростей. Выбираем в качестве независимых термодинамических переменных давление p и температуру T .

Запишем термодинамическое тождество для химического потенциала; согласно (8.12) и (8.21) имеем

$$d\mu = -\sigma dT + \frac{1}{\rho} dp - \frac{\rho_n}{\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad (8.26)$$

$$\sigma = \frac{S}{\rho}.$$

Отсюда легко находится зависимость энтропии σ и плотности ρ от относительной скорости $\boldsymbol{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Из общих соотношений для производных

$$\frac{\partial \sigma}{\partial (\boldsymbol{w}^2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial (\boldsymbol{w}^2)} = \rho^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad (8.27)$$

находим первые члены в разложении σ и ρ по \boldsymbol{w}^2

$$\sigma(p, T, \boldsymbol{w}) = \sigma(p, T) + \frac{1}{2} \boldsymbol{w}^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad (8.28)$$

$$\rho(p, T, \boldsymbol{w}) = \rho(p, T) + \frac{1}{2} \rho^2 \boldsymbol{w}^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}. \quad (8.29)$$

Подставив эти выражения в общие уравнения (8.22) — (8.25), получим уравнения, справедливые с точностью до членов

второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho + \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right) + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n, \quad (8.30)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik}, \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[S + \frac{\rho \omega^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} + S \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0, \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left[\mu + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n \omega^2}{2\rho} \right] = 0. \quad (8.33)$$

В формулу (8.33) входит химический потенциал μ неподвижной жидкости. В полученных приближенных уравнениях скорости считаются малыми по сравнению со скоростями первого и второго звука. Общие уравнения также заметно упрощаются в случае, когда скорости малы лишь по сравнению со скоростью первого звука и сравнимы по величине со скоростью второго звука. В этом последнем случае возможно найти общее решение в виде одномерной бегущей волны. Заметное упрощение происходит ввиду слабой зависимости нормальной плотности ρ_n от квадрата относительной скорости ω^2 .

Остановимся теперь на граничных условиях, налагаемых на термодинамические величины. Очевидно, что нормальная компонента потока \mathbf{j} на стенке должна обращаться в нуль, поскольку не может быть переноса вещества через границу. Что касается скорости нормального движения \mathbf{v}_n , то она связана с движением газа возбуждений, который обладает всеми свойствами вязкой жидкости. Поэтому тангенциальная компонента \mathbf{v}_n на поверхности твердого тела должна быть равна нулю. Нормальная же компонента \mathbf{v}_n (по оси z) не равна нулю и определяет поток тепла от жидкости к твердому телу согласно (8.20); этот поток при $j_z = 0$ равен STv_{nz} . При этом непрерывными остаются нормальные компоненты потока тепла в жидкости и в твердом теле. Температуры жидкости и твердого тела на границе испытывают скачок (см. § 23), пропорциональный величине теплового потока.

Выберем оси x и y вдоль поверхности твердого тела, а ось z перпендикулярно ей. Тогда указанные граничные

условия запишутся в следующем виде:

$$\rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} = 0, \quad v_{nx} = v_{ny} = 0, \quad (8.34)$$

$$ST v_{nz} = -\kappa_{ТВ} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ТВ}, \quad T_{жидк} - T_{ТВ} = K q_z. \quad (8.35)$$

Здесь $\kappa_{ТВ}$ — коэффициент теплопроводности твердого тела (о смысле коэффициента K см. подробнее п. 23).

Во многих случаях теплопроводностью твердого тела можно пренебречь. В этом случае можно $\kappa_{ТВ}$ положить равным нулю, и мы имеем

$$v_{nz} = 0, \quad v_{sz} = 0, \quad (8.36)$$

т. е. имеем граничные условия для v_n , как у нормальной жидкости, и для v_s , как у идеальной жидкости.

Движущаяся сверхтекучая жидкость при наличии нормального к стенке потока вызывает тангенциальные силы, действующие на поверхность твердого тела. Это видно из того, что компонента потока импульса Π_{xz} в этом случае отлична от нуля. Действительно, используя первое из соотношений (8.34), находим указанную компоненту

$$\Pi_{xz} = \rho_s v_{sx} v_{sz} + \rho_n v_{nx} v_{nz} = \rho_n v_{nz} (v_{nx} - v_{sx}).$$

Выразив компоненту v_{nz} через нормальную компоненту потока тепла q_z , окончательно получаем

$$\Pi_{xz} = \frac{\rho_n q_z}{ST} (v_{nx} - v_{sx}). \quad (8.37)$$

9. ДИССИПАТИВНЫЕ ЧЛЕНЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ [13]

Полученная в предыдущем параграфе система уравнений (8.22) — (8.25) описывает движение сверхтекучей жидкости в отсутствие диссипации энергии. Неравновесность приводит к появлению во всех потоках специфических членов, зависящих от производных по координатам, от скоростей и термодинамических переменных. Следует обратить внимание на то, что в неравновесных условиях обычные определения термодинамических величин теряют смысл и нуждаются в уточнении. Если по-прежнему под ρ понимать массу единицы объема жидкости, а под j — ее

импульс, то уравнение непрерывности сохраняет свой обычный вид

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (9.1)$$

Далее, под E_0 мы будем понимать энергию единицы объема в той системе отсчета, где сверхтекучая часть покоится. Остальные термодинамические переменные определяем, как те функции плотности ρ , энергии E и относительной скорости \mathbf{w} , какими они являются в состоянии термодинамического равновесия. При этом энтропия $S(\rho, E, \mathbf{w})$ не будет истинной энтропией, интеграл от которой $\int S dV$ обязан возрастать со временем. Однако для слабо неравновесных условий, когда градиенты всех величин малы, так определенная энтропия практически будет совпадать с истинной энтропией. Действительно, легко видеть, что линейные по градиентам члены не могут присутствовать в разложении в ряд энтропии, так как они знакопеременны. Энтропия же равновесного состояния имеет максимально возможное значение. Поэтому разложение энтропии по малым градиентам начинается с квадратичных по градиентам членов, которыми с интересующей нас точностью можно пренебречь.

Закон сохранения импульса, как и ранее, записываем в виде

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0, \quad (9.2)$$

с тем отличием, что в потоке импульса, кроме обычных членов (8.19'), имеется неизвестный диссипативный член τ_{ik} , подлежащий определению. Аналогично включаем дополнительный член ∇h в уравнение сверхтекучего движения (8.25)

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + h \right) = 0^* \quad (9.3)$$

(по-прежнему $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$).

Очевидно, что выражение для потока энергии \mathbf{Q} в законе сохранения энергии также изменяется на некоторую величину \mathbf{Q}'

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = 0. \quad (9.4)$$

Что касается энтропийного уравнения, то оно не имеет теперь вида уравнения непрерывности, поскольку энтропия не сохраняется, а возрастает. Мы воспользуемся требованием возрастания энтропии для определения неизвестных диссипативных членов. Дифференцируя по времени выражение (8.9) для E , имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) \dot{\rho} + \dot{v}_s j + v_n \frac{\partial j_0}{\partial t} + T \dot{S}. \quad (9.5)$$

Далее исключаем производные по времени с помощью уравнений (9.1) — (9.3), в результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \{ \mathbf{Q} + \mathbf{q} + h(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + (\tau \mathbf{v}_n) \} = \\ = T \left(\dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) + h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \\ + \tau_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \nabla T. \end{aligned} \quad (9.6)$$

При этом, поскольку в неравновесных условиях в потоке энтропии может также появиться дополнительный член, мы для выяснения его вида к правой и левой частям (9.6) добавляем некоторый член $\operatorname{div} \mathbf{q}$ с неизвестной величиной \mathbf{q} .

Сравнив уравнение (9.6) с уравнением (9.4), получаем уравнение, определяющее скорость возрастания энтропии:

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) = \\ = -h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \tau_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \nabla T, \end{aligned} \quad (9.7)$$

и выражение для дополнительного диссипативного потока тепла

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{q} + h(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \mathbf{v}_n. \quad (9.8)$$

Стоящее в правой части уравнения (9.7) выражение представляет собой диссипативную функцию сверхтекучей жидкости. Если пространственные производные от скоростей и термодинамических переменных невелики, то в первом приближении все добавки в уравнениях (τ_{ik} , h , \mathbf{q}) являются линейными функциями от указанных производных. Из закона возрастания энтропии тогда следует, что диссипативная функция должна быть существенно положительной квадратичной формой от тех же производных. Из этого

последнего требования немедленно следует вид неизвестных членов

$$\tau_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) - \delta_{ik} [\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n], \quad (9.9)$$

$$h = -\zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \quad (9.10)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \quad (9.11)$$

В тензоре потока импульса τ_{ik} мы, как обычно, выделяем комбинацию производных \mathbf{v}_n со следом, равным нулю (первая вязкость).

В силу принципа симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов имеет место соотношение

$$\zeta_1 = \zeta_4. \quad (9.12)$$

Коэффициенты ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_4 имеют смысл коэффициентов второй вязкости. Всего, таким образом, имеется три независимых коэффициента второй вязкости. η является коэффициентом первой вязкости, и он существенно связан с нормальным движением, а κ есть коэффициент теплопроводности. Как и следовало ожидать, коэффициента, аналогичного первой вязкости, для сверхтекучего движения не возникает.

Запишем теперь в окончательном виде уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости с учетом диссипативных членов:

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (9.13)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) + \delta_{ik} \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \delta_{ik} \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\}, \quad (9.14)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) = \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}, \quad (9.15)$$

$$\dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} R. \quad (9.16)$$

Диссипативная функция равна

$$R = \zeta_2 (\operatorname{div} \mathbf{v}_n)^2 + \zeta_3 (\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n))^2 + 2\zeta_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right)^2 + \kappa \frac{(\nabla T)^2}{T}. \quad (9.17)$$

Для обеспечения положительности функции R кинетические коэффициенты η , ζ_2 , ζ_3 и κ должны быть положительными, а ζ_1 удовлетворять неравенству

$$\zeta_1^2 \leq \zeta_2 \zeta_3. \quad (9.18)$$

10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

В звуковой волне скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s предполагаются малыми*), а термодинамические величины почти равными равновесным значениям. Распространение звука в гелии II описывается системой гидродинамических уравнений (8.22) — (8.25), которая в данном случае может быть линеаризована. После линеаризации указанные уравнения приобретают вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial (\rho\sigma)}{\partial t} + \rho\sigma \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0 \quad (\sigma\rho = S), \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \quad (10.4)$$

Исключим из уравнений (10.1) и (10.3) импульс \mathbf{j} , в результате получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (10.5)$$

Далее из трех уравнений (10.2), (10.3) и (10.4) исключим скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s . Для этого продифференцируем по времени уравнение (10.2), а к уравнениям (10.3) и (10.4) применим операцию div . Исключив из полученных таким образом уравнений члены $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}_n$ и $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}_s$, получим

$$\rho_s \Delta \mu - \Delta p + \frac{\rho_n}{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho\sigma) = 0. \quad (10.6)$$

*) Имеется в виду малость скоростей \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s по сравнению со скоростью звука.

Выразим в этом уравнении производную $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ с помощью уравнения (10.5) и воспользуемся термодинамическим тождеством (8.26). В итоге находим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \Delta T. \quad (10.7)$$

Уравнения (10.6) и (10.7) определяют изменения термодинамических величин в звуковой волне.

Перейдем в указанных уравнениях к независимым переменным p и T , которые представим в виде $p = p_0 + p'$, $T = T_0 + T'$. Величины с индексом нуль есть равновесные значения, а со штрихом — их изменения в звуковой волне. Уравнения (10.6) и (10.7) в результате приобретают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0. \quad (10.9)$$

Ищем решение системы (10.8)—(10.9), представляющее бегущую в некотором направлении плоскую волну. В такой волне величины p' и T' изменяются по закону $\exp \left[-i\omega \times \times \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]$ (ось x выбираем в направлении распространения волны, ω — частота, u — скорость звука). При таком законе изменения величин p' и T' система уравнений (10.8) — (10.9) переходит в

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 - 1 \right) p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} u^2 T' = 0, \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} u^2 p' + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \right) T' = 0. \quad (10.11)$$

Условием совместности этих уравнений является равенство нулю их определителя. Раскрывая указанный определитель, получаем биквадратное уравнение*

$$u^4 \frac{\partial(\sigma, \rho)}{\partial(T, p)} - u^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} + \sigma^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 = 0, \quad (10.12)$$

которое после несложных преобразований приобретает вид

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\sigma + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_\rho \right] + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = 0. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) определяет две возможные скорости звука в гелии II. Коэффициент теплового расширения $\left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right)$ практически оказывается у всех тел очень малым. У гелия II же величина этого коэффициента аномально мала. Поэтому, согласно известным термодинамическим соотношениям, теплоемкости C_p и C_v в гелии II практически можно считать равными. Но в таком случае производные $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma$, связанные соотношением $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma = \frac{C_p}{C_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$, с большой степенью точности также можно считать равными. Это обстоятельство значительно упрощает уравнение (10.13), его корни в этом случае равны

$$u_1 = c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma}, \quad (10.14)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n (\partial \sigma / \partial T)}}. \quad (10.15)$$

Первый корень определяет скорость обычного (первого) звука в гелии II. С такой скоростью, согласно уравнению (10.5), распространяются в гелии II колебания давления (плотности). Второй корень u_2 определяет скорость так называемого второго звука. Согласно уравнению (10.7) с такой скоростью в гелии II распространяются колебания температуры (энтропии). Возможность распространения незатухающих температурных волн является специфическим свойством гелия II. Температурная зависимость скорости второго звука, вычисленная по формуле (10.15), графически изображена на рис. 4. В λ -точке $\rho_s = 0$ и скорость u_2 также обращается в нуль. При достаточно низких температурах (ниже $0,5^\circ \text{K}$), когда все термодинамические величины определяются только флуктуациями, величина скорости u_2 стремится к пределу $c/\sqrt{3}$.

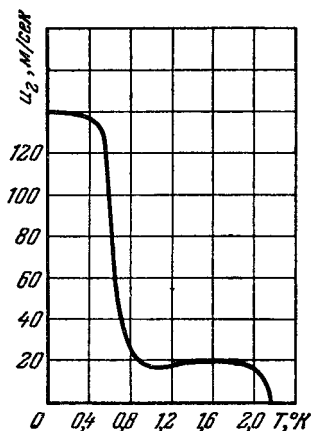


Рис. 4.

Второй звук можно рассматривать как волны сжатия и разряжения в газе возбуждений. Это непосредственно следует из того, что колебания температуры вызывают колебания плотности возбуждений. Скорость второго звука, таким образом, представляет собой скорость звука в газе возбуждений. Предельное значение $u_2 = c/\sqrt{3}$ следует непосредственно из известного результата о скорости звука в газе со спектром $\varepsilon = c p^*$.

Остановимся подробнее на физической природе обоих видов звуковых волн. Рассмотрим плоскую звуковую волну, в которой все переменные величины пропорциональны $\exp i\omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$. Обозначая штрихом переменные части соответствующих величин, получим из (10.1) — (10.4) систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} u\rho' - j' &= 0, & u\sigma\rho' + u\rho\sigma' - \sigma\rho v_n &= 0, \\ u j' - p' &= 0, & u v_s + \sigma T' - \frac{1}{\rho} p' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Перепишем эту систему в более удобном для анализа виде:

$$p' = u^2 \rho' = u j', \quad (10.17)$$

$$T' = \frac{u^2 \rho_n}{\sigma^2 \rho_s} \sigma' = \frac{u \rho_n}{\sigma \rho} (v_n - v_s). \quad (10.18)$$

Полученные уравнения устанавливают связь между колебаниями различных величин в звуковых волнах двух типов. Для каждого типа звуковых волн следует подставить соответствующее значение скорости звука u_1 или u_2 из (10.14) и (10.15). Волны первого звука представляют собой колебания плотности ρ , если пренебречь тепловым расширением; колебания температуры в них вообще отсутствуют. Согласно (10.18) в этом случае $v_n = v_s$. Другими словами, в волнах первого звука гелий движется как целое, т. е. нормальная и сверхтекучая части колеблются вместе. Волны первого звука, очевидно, аналогичны обычному звуку в обычных средах.

В волнах второго звука испытывают колебания температура и энтропия. Давление же и плотность в рассмат-

*) Так, например, в газе фотонов скорость звука равна $c/\sqrt{3}$, где c — скорость света.

риваемом приближении не колеблются. Тогда из (10.17) следует, что $j' = \rho_s v'_s + \rho_n v'_n = 0$. В такого рода колебаниях нормальная и сверхтекучая части совершают движение навстречу друг другу так, что суммарный поток вещества отсутствует в каждый момент времени. Возможность существования незатухающих температурных волн есть специфическое свойство сверхтекучей жидкости, обязанное наличию двух движений. В обычных средах температурные волны затухают благодаря теплопроводности на расстояниях порядка длины волны ($\sim \sqrt{\frac{\chi}{\omega}}$, где χ — температуропроводность), и, таким образом, никакой периодичности в таких волнах нет.

При учете теплового расширения возникает зацепление между колебаниями первого и второго звуков, т. е. возникают колебания температуры в волнах первого звука и колебания давления в волнах второго звука. Формулы, связывающие соответствующие амплитуды колебаний, получаются с помощью соотношений (10.17), (10.18) [14]. Вводим коэффициенты пропорциональности между скоростями и переменными частями температуры и давления:

$$v_n = a v_s, \quad p' = b v_s, \quad T' = c v_s. \quad (10.19)$$

С точностью до членов первого порядка по коэффициенту теплового расширения α получаем для первого звука

$$a_1 = 1 + \frac{\alpha \rho}{\rho_s \sigma} \frac{u_1^2 u_2^2}{u_1^2 - u_2^2}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \rho \frac{\alpha T}{c} \frac{u_1^3}{u_1^2 - u_2^2}, \quad (10.20)$$

и для волн второго звука

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\alpha \rho}{\sigma \rho_n} \frac{u_1^2 u_2^2}{u_1^2 - u_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha \rho u_1^2 u_2^2}{\sigma (u_1^2 - u_2^2)}, \quad c_2 = -\frac{u_2}{\sigma}. \quad (10.21)$$

11. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ [14, 15]

Различная физическая природа первого и второго звуков обуславливает различие в способах излучения их. Рассмотрим несколько примеров излучения звука. Начнем с излучения звуковых волн плоскостью, совершающей

колебания в перпендикулярном себе направлении (которое выбираем в качестве оси x). Запишем скорость v_s (по направлению оси x) в первом и втором излучаемых звуках соответственно в виде

$$v_{s1} = A_1 e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}, \quad v_{s2} = A_2 e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}. \quad (11.1)$$

Из граничных условий (8.36) следует, что на поверхности твердого тела скорости v_{sx} и v_{nx} совпадают со скоростью поверхности $v_0 e^{-i\omega t}$. Таким образом, имеем

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad A_1 a_1 + A_2 a_2 = v_0,$$

где a_1 , a_2 — коэффициент в формуле (10.19). Отсюда находим

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1 - a_1}{1 - a_2} = \frac{\alpha \rho_n u_2^2}{\rho_s \sigma} = \frac{T \sigma \alpha}{C} \quad (11.2)$$

(C — теплоемкость). При этом используем формулы (10.20) и (10.21), которые упрощаются при не слишком низких температурах, когда можно пренебречь u_2^2 по сравнению с u_1^2 .

Поскольку при колебательном движении средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной, полная плотность энергии равна

$$E = \rho_s \bar{v}_s^2 + \rho_n \bar{v}_n^2 = \frac{1}{2} |A|^2 (\rho_s + \rho_n a^2). \quad (11.3)$$

Поток энергии (интенсивность) получается умножением этой плотности на соответствующую скорость звука. Для отношения интенсивностей излучаемых волн второго и первого звуков имеем

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{u_2 |A_2|^2 (\rho_s + \rho_n a_2^2)}{u_1 |A_1|^2 (\rho_s + \rho_n a_1^2)} \approx \frac{\alpha^2 T u_2^3 \rho}{C u_1} \cdot \quad (11.4)$$

$$(a_1 \approx 1, \quad a_2 \approx -\rho_s / \rho_n).$$

Выпишем также выражения для I_1 и I_2 через амплитуды колебаний давления p'_0 и температуры T'_0 :

$$I_1 = \frac{1}{2\rho u_1} p_0'^2, \quad I_2 = \frac{C u_2}{2T} T_0'^2. \quad (11.5)$$

Интенсивность излучения второго звука в рассмотренном случае оказывается ничтожно малой — пропорциональной квадрату коэффициента теплового расширения. Колеблущаяся указанным способом плоскость излучает в основном первый звук. Это легко понять, если обратить внимание на то, что на поверхности твердого тела $v_s = v_n$, а второй звук связан с наличием разности $v_n - v_s$.

Относительное движение компонент сверхтекучей и нормальной можно вызвать с помощью периодически изменяющего свою температуру тела, погруженного в гелий II. Рассмотрим, например, излучение звука от неподвижной твердой плоскости с периодически меняющейся температурой.

Граничные условия на поверхности состоят в этом случае в равенстве нулю перпендикулярной к плоскости компоненты потока вещества j , а также в пропорциональности разности температур твердого тела и жидкости плотности теплового потока. Для вычисления интенсивностей получаемого звука, однако, достаточно воспользоваться первым из этих условий, согласно которому имеем

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0,$$

откуда

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\rho_n a_1 + \rho_s}{\rho_n a_2 + \rho_s} \approx \frac{\sigma}{\alpha u_2^2}.$$

Для отношения интенсивностей

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{C}{\rho T \alpha^2 u_1 u_2}. \quad (11.6)$$

Это отношение очень велико (более 10^3), так что практически в данном случае излучается только второй звук.

Своеобразное явление обращения второго звука в первый и обратно имеет место при отражении звука от границы между жидким гелием и его паром. Действительно, распространяющаяся в гелии II волна второго звука, отражаясь от поверхности раздела жидкость — пар, создает на ней колебания температуры, приводящие к периодическому испарению и конденсации газа, в результате в паре вблизи поверхности возникают колебания плотности, распространяющиеся в глубь пара в виде обычных звуковых волн.

Рассмотрим случай падения волны второго звука T'_i на границу между гелием II и его паром (рис. 5). При этом возникают две отраженные волны в жидкости: T'_r (отраженная волна второго звука) и p' (волна первого звука) и одна волна в паре \bar{p}' (адиабатическая волна). Мы

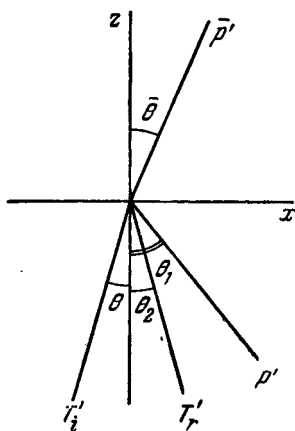


Рис. 5.

предполагаем, что теплопроводностью пара можно пренебречь. Это всегда можно сделать для частот звука, удовлетворяющих условию $\omega \ll \frac{\bar{c}^2}{\bar{\chi}}$ (\bar{c} — адиабатическая скорость звука, $\bar{\chi}$ — температуропроводность пара). Однако в граничных условиях, несмотря на то, что температурная волна быстро затухает, следует, как это будет видно, учитывать температурную волну \bar{T}' .

В качестве граничной плоскости выбираем плоскость xu .

Из однородности задачи в этой плоскости следует, что все волны будут иметь одинаковые компоненты k_x , k_y волнового вектора. Отсюда непосредственно следуют соотношения, определяющие направления распространения возникающих волн. Пусть xz есть плоскость падения волны T'_i , а θ , θ_1 , θ_2 и $\bar{\theta}$ — углы между направлениями распространения волн T'_i , p' , T'_r , \bar{p}' и осью z соответственно. Тогда из равенства k_x и k_y следует, что все волны лежат в одной плоскости:

$$\sin \theta_1 = \frac{u_1}{u_2} \sin \theta, \quad \theta_2 = \theta, \quad \sin \bar{\theta} = \frac{\bar{c}}{u_2}, \quad (11.7)$$

u_1 и u_2 — соответственно скорости первого и второго звуков в жидкости, \bar{c} — скорость звука в паре.

Введем величину $\zeta(x, t) = \zeta^{(0)} e^{-i\omega t + ix \frac{\omega}{u_2} \sin \theta}$, характеризующую колебания границы раздела. Выпишем теперь

условия, которые должны выполняться на границе раздела жидкость — пар. Индексом 0 обозначаем амплитуды соответствующих величин, чертой — значение соответствующих величин в паре и без черты — в жидкости.

а) Равенство сил, действующих на границу,

$$p^{(0)} - \bar{p}^{(0)} = \gamma \frac{\omega^2}{u_2^2} \sin^2 \theta \zeta^{(0)}, \quad (11.8)$$

γ — коэффициент поверхностного натяжения.

б) Равенство плотностей потоков вещества через границу

$$-\frac{\cos \theta_1}{u_1} p^{(0)} + i\omega \rho \zeta^{(0)} = \frac{\cos \bar{\theta}}{c} \bar{p}^{(0)} + i\omega \bar{\rho} \bar{\zeta}^{(0)}. \quad (11.9)$$

в) Равенство плотностей потоков энергии

$$\begin{aligned} W \left(-\frac{\cos \theta_1}{u_1} p^{(0)} + i\omega \rho \zeta^{(0)} \right) + \rho \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\sigma^2 T}{u_2} \cos \theta (T_i^{(0)} - T_r^{(0)}) = \\ = \bar{W} \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{c} \bar{p}^{(0)} + i\omega \bar{\rho} \bar{\zeta}^{(0)} \right), \quad (11.10) \end{aligned}$$

W — тепловая функция, σ — энтропия.

г) Равенство температур

$$T_i^{(0)} + T_r^{(0)} = \frac{T\alpha}{c_p} \bar{p}^{(0)} + \bar{T}^{(0)}. \quad (11.11)$$

α — коэффициент теплового расширения пара.

д) Равенство химических потенциалов

$$\frac{1}{\rho} p^{(0)} - \sigma (T_i^{(0)} + T_r^{(0)}) = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{p}^{(0)} - \bar{\sigma} \left(\frac{\alpha T}{c_p} \bar{p}^{(0)} + \bar{T}^{(0)} \right). \quad (11.12)$$

В интересующем нас интервале частот можно пренебречь поверхностным натяжением $\left(\frac{\gamma \omega}{\rho u_1 u_2^2} \ll 1 \right)$ в уравнении (11.8). Кроме того, учтем, что $\sigma/\bar{\sigma} \ll 1$, $\bar{\rho}/\rho \ll 1$, после чего система (11.8) — (11.12) упрощается, и мы

находим

$$\frac{\bar{p}^{(0)}}{T_i^{(0)}} = \frac{p^{(0)}}{T_i^{(0)}} = \frac{2\rho\sigma \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\sigma}{\rho} \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}{\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}, \quad (11.13)$$

$$\frac{T_r^{(0)}}{T_i^{(0)}} = \frac{-\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}{\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}, \quad (11.14)$$

где

$$\cos \bar{\theta} = \sqrt{1 - \frac{\bar{c}^2}{u_2^2} \sin^2 \theta}.$$

Используя формулы (11.5) и (11.13) — (11.14), вычисляем коэффициент отражения второго звука R_2 , коэффициент трансформации второго звука в первый R_1 и в обычный звук в паре \bar{R} :

$$R_2 = \left(\frac{-\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}{\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta} \right)^2, \quad (11.15)$$

$$R_1 = \frac{4 \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \frac{\bar{c}}{u_1} \cos \theta \cos \theta_1}{\left(\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta\right)^2}, \quad (11.16)$$

$$\bar{R} = \frac{4 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta \cos \bar{\theta}}{\left(\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta\right)^2}. \quad (11.17)$$

Из (11.17) видно, что при углах падения $\theta > \arcsin \frac{u_2}{u_1}$ отсутствует отраженная волна первого звука в жидкости, а при углах $\theta > \arcsin \frac{u_2}{c}$ отсутствует и прошедшая в пар звуковая волна. Таким образом, в этом последнем случае происходит полное внутреннее отражение второго звука.

Полное внутреннее отражение имеет место в области температур выше $0,7^\circ \text{K}$, в которой $\bar{c} > u_2$.

Следует обратить внимание на малость коэффициента R_1 , определяющего трансформацию второго звука в первый в жидком гелии II.

12. ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА [16]

Наличие диссипативных процессов в сверхтекучей жидкости приводит к поглощению звука. Для исследования вопроса о распространении звука при наличии диссипации запишем общие уравнения (9.13) — (9.16) в линейризованном виде:

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r_i} = \eta \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) + \frac{\partial}{\partial r_i} \{ \zeta_1 \text{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \text{div} \mathbf{v}_n \}, \quad (12.2)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \mu = \nabla \{ \zeta_3 \text{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \text{div} \mathbf{v}_n \}, \quad (12.3)$$

$$T \{ (\dot{\sigma} \rho) + \sigma \rho \text{div} \mathbf{v}_n \} = \chi \Delta T. \quad (12.4)$$

В звуковой волне скорости v_n и v_s и изменяющиеся части термодинамических величин ρ' и σ' (которые мы выбираем в качестве независимых переменных) меняются по закону $e^{-i\omega(t - \frac{x}{u})}$ (x — направление распространения волны, ω — частота звука). Скорость звука u в данном случае будет комплексной величиной, ее мнимая часть будет определять поглощение. Для упрощения вычислений воспользуемся малостью теплового расширения в гелии II. Тогда после исключения переменных v_n и v_s из уравнений (12.1) — (12.4) получаем два уравнения:

$$\left(u^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \rho' = i\omega \left\{ \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right) \frac{\rho'}{\rho} + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 - \rho \zeta_1 \right) \frac{\sigma'}{\sigma} \right\}, \quad (12.5)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2 \right) \sigma' = i\omega \left\{ \left(\zeta_4 - \frac{1}{\rho} \zeta_2 - \frac{4}{3\rho} \eta \right) \frac{\rho'}{\rho} + \left(\zeta_4 - \rho \zeta_3 - \frac{1}{\rho} \zeta_2 + \zeta_1 - \frac{4}{3\rho} \eta \right) \frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{\rho \sigma T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \sigma' \right\}. \quad (12.6)$$

Условие совместности системы (12.5), (12.6) записывается в виде равенства нулю ее определителя. Однако для небольших частот ω можно ограничиться в уравнениях линейными по ω членами. А это означает, как легко видеть, возможность пренебречь членами с σ' в уравнении (12.5) и членами с ρ' в уравнении (12.6). В результате получаем два независимых однородных уравнения, из которых следуют уравнения, определяющие скорости звука:

$$u^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\sigma} = \frac{i\omega}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right), \quad (12.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2 \right) = \\ = \frac{i\omega}{\rho \sigma} \left\{ \rho (\zeta_1 + \zeta_4) - \rho^2 \zeta_3 - \zeta_2 - \frac{4}{3} \eta - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Корень уравнения (12.7) определяет скорость первого звука с учетом затухания:

$$u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\sigma} + \frac{i\omega}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right). \quad (12.9)$$

Корень же уравнения (12.8) определяет скорость второго звука также с учетом затухания:

$$\begin{aligned} u_2^2 = \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{i\omega}{\rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} \left\{ \zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1 + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \eta + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Скорости u_1 и u_2 являются комплексными величинами. Поэтому комплексными величинами будут также и волновые векторы $k = \frac{\omega}{u}$. Действительная часть волнового вектора определяет изменение фазы колебаний с расстоянием, мнимая же часть есть просто коэффициент поглощения звука. Мнимая часть волнового вектора k_1^* для первого звука, согласно (12.9), равна

$$\alpha_1 = \text{Im} \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right). \quad (12.11)$$

Таким образом, коэффициент поглощения первого звука α_1 зависит только от двух кинетических коэффициентов: коэффициента первой вязкости η и коэффициента

второй вязкости ζ_2 . То обстоятельство, что другие коэффициенты (ζ_1 , ζ_3 и κ) не входят в выражение для α_1 , связано с пренебреженным эффектом теплового расширения гелия II. Так, учет теплопроводности дает дополнительное слагаемое в α_1 вида

$$\frac{\omega^2}{2u_1^3} \frac{\kappa}{C} \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right). \quad (12.12)$$

Заметим, что главную роль, как показывают вычисления коэффициентов η и ζ_2 , в поглощении первого звука играет вторая вязкость, связанная с коэффициентом ζ_2 .

Коэффициент поглощения второго звука равен мнимой части волнового вектора, вычисленной с помощью выражения (12.10):

$$\alpha_2 = \text{Im} \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega^2}{2\rho u_2^3} \frac{\rho_s}{\rho_n} \left\{ \frac{4}{3} \eta + \right. \\ \left. + (\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1) + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \quad (12.13)$$

Подробный анализ показывает, что главную роль в поглощении второго звука играет теплопроводность, эффект которой описывается последним слагаемым в формуле (12.13).

13. РАЗРЫВЫ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ [17]

Распространение звуковых волн большой амплитуды, как известно из гидродинамики, приводит к возникновению разрывов ударных волн. Сущность этого явления заключается в следующем. Точки профиля волны перемещаются с различными скоростями, а это приводит к изменению его формы со временем: точки с большими значениями скорости выдвигаются вперед (в обычной гидродинамике на гребне волны), обгоняя точки с меньшими скоростями. В конце концов профиль звукового импульса может настолько выгнуться, что станет неоднозначной функцией координаты. Физически такое положение невозможно. В действительности в волне возникает разрыв, отсекающий часть искаженного профиля. В результате все величины в волне оказываются всегда однозначными

функциями координаты. Возникающие из звуковой волны ударные волны обладают, естественно, малой интенсивностью.

Аналогичные явления должны иметь место в волнах первого и второго звуков в гелии II. Разрывы в волне первого звука должны, естественно, полностью соответствовать обычным ударным волнам — на них испытывают скачки в основном лишь давление, плотность и скорости $v_n = v_s$; скачок же энтропии, а с ним (при пренебрежении тепловым расширением) и скачки температуры и относительной скорости w являются малыми величинами третьего порядка.

Разрывы же в волне второго звука являются специфическими для сверхтекучей жидкости явлением, представляющим собой в основном разрыв температуры. Вместе с температурой испытывает скачок и относительная скорость w , разрывы же остальных величин являются малыми высшего порядка.

Выясним условия, которые должны выполняться на поверхности разрыва в гелии II. Для этого вводим систему координат, движущуюся вместе с разрывом (со скоростью u относительно неподвижной системы). Ось x выберем по направлению нормали к поверхности разрыва, скорости жидкости предполагаем направленными вдоль этой же оси *).

На поверхности разрыва должны быть непрерывны следующие величины:

а) Плотность потока массы жидкости

$$[j] = [\rho_s v_s + \rho_n v_n] = 0 \quad (13.1)$$

(здесь и ниже квадратные скобки обозначают разность значений соответствующей величины по обеим сторонам разрыва).

б) Плотность потока импульса

$$[\Pi_{xx}] = [\rho_s v_s^2 + \rho_n v_n^2 + p] = 0. \quad (13.2)$$

в) Величина, стоящая под знаком градиента в уравнении сверхтекучего движения (8.25), т. е. сила, действующая

*) Мы не рассматриваем здесь тангенциальных разрывов, на которых могут испытывать скачок касательные к поверхности компоненты скорости.

на единицу массы сверхтекучей части жидкости,

$$\left[\tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right] = 0 \quad (13.3)$$

(знаком \sim над буквой отмечаем соответствующие термодинамические величины как функции p , T и ω).

г) Плотность потока энергии; согласно (8.20) это условие гласит:

$$\left[j \left(\tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right) + T \tilde{\rho} \tilde{\sigma} v_n + \rho_n v_n^2 \omega \right] = 0,$$

а так как первый член непрерывен в силу условий (13.1) и (13.3), то достаточно потребовать:

$$[T \tilde{\rho} \tilde{\sigma} v_n + \rho_n v_n^2 \omega] = 0. \quad (13.4)$$

Возвратимся теперь к неподвижной системе координат. Для упрощения дальнейших вычислений будем считать, что по одну сторону от разрыва имеется невозмущенная жидкость; другими словами, здесь $v_n = v_s = 0$, и все величины равны своим равновесным значениям. Скорость разрыва u будем считать положительной, если разрыв движется в сторону невозмущенной жидкости. Тогда в условиях (13.1) — (13.4) скорости v_s и v_n в движущейся вместе с разрывом системе координат надо положить равными u на невозмущенной стороне, а по другую сторону от разрыва заменить на $v_s - u$ и $v_n - u$, где теперь v_s и v_n будут относиться к неподвижной системе отсчета. Для дальнейшего удобно ввести, наряду с разностью $\omega = v_n - v_s$, скорость v , формально связанную с плотностью потока соотношением $j = \tilde{\rho} v$. В результате условия (13.4) принимают вид:

$$\rho_0 u = \tilde{\rho} (u - v), \quad (13.5)$$

$$p_0 + \rho_0 u^2 = p + \tilde{\rho} (u - v)^2 + \frac{\rho_s \rho_n}{\tilde{\rho}} \omega^2, \quad (13.6)$$

$$\mu_0 + \frac{u^2}{2} = \tilde{\mu} + \frac{1}{2} \left(u - v + \frac{\rho_n}{\tilde{\rho}} \omega \right)^2, \quad (13.7)$$

$$\rho_0 T_0 \sigma_0 u = \tilde{\rho} \tilde{\sigma} T \left(u - v - \frac{\rho_s}{\tilde{\rho}} \omega \right) + \rho_n \omega \left(u - v - \frac{\rho_s}{\tilde{\rho}} \omega \right)^2 \quad (13.8)$$

(индексом нуль отмечаем равновесные значения величин, буквы без индекса обозначают значения величин по другую сторону разрыва).

Полученная система позволяет в принципе найти скорость ударных волн и скачок величин на разрывах. Однако ввиду сложной зависимости термодинамических величин от относительной скорости w общее исследование было бы чрезвычайно громоздким. Мы ограничимся рассмотрением разрывов небольшой интенсивности, когда можно ограничиться квадратичными по w членами в разложении термодинамических величин $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\rho}$.

Исключим с помощью уравнения (13.5) величину $u - v$ из остальных равенств и подставим в них для $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\rho}$ выражения (8.26), (8.28) и (8.29). Таким путем получаем систему

$$p - p_0 - \frac{\rho_0}{\rho} u^2 (\rho - \rho_0) + w^2 \rho_0 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{\rho^2} - \frac{\rho_0 u^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] = 0, \quad (13.9)$$

$$\mu - \mu_0 - \frac{u^2}{2\rho^2} (\rho^2 - \rho_0^2) + \frac{\rho_0 \rho_n}{\rho^2} w u - w^2 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{2\rho^2} + \frac{\rho_0 u^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] = 0, \quad (13.10)$$

$$\rho_0 u (T\sigma - T_0\sigma_0) - w \left(\sigma T \rho_s + \frac{\rho_n \rho_0^2}{\rho^2} u^2 \right) + \rho_0 w^2 u \left[\frac{2\rho_n \rho_s}{\rho^2} + \frac{1}{2} T \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} \right] = 0. \quad (13.11)$$

Для дальнейшего анализа выбираем в качестве независимых переменных давление p и температуру T и разлагаем все величины в ряд по степеням $\Delta p = p - p_0$ и $\Delta T = T - T_0$, ограничиваясь членами не выше второго порядка. Кроме того, пренебрегаем, как это мы делали до сих пор, зависимостью плотности ρ от температуры. После указанного разложения система (13.9) — (13.11) приобретает вид

$$\Delta p \left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + (\Delta p)^2 u^2 \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right] + w^2 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{\rho} - \frac{1}{2} \rho^2 u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] = 0, \quad (13.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \Delta p \left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) - \sigma \Delta T + \frac{\rho_n}{\rho} u \omega + \\ & + (\Delta p)^2 \left[-\frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{3}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^2 u^2 - \frac{1}{2\rho} u^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right] + \\ & + \Delta p \omega \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho_n}{\partial p} - 2 \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] + \omega^2 \left[-\frac{\rho_n \rho_s}{2\rho^2} - \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] - \\ & - \frac{1}{2} (\Delta T)^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \Delta T \omega u \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} = 0, \quad (13.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta T \rho u \left(\sigma + T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) - \omega (\sigma T \rho_s + \rho_n u^2) + \\ & + (\Delta T)^2 \rho u \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right] - \\ & - \omega \Delta T \left[u^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + \sigma \rho_s + T \frac{\partial}{\partial T} (\sigma \rho_s) \right] - \\ & - \omega \Delta p \left[-\frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 + \frac{\partial \rho_n}{\partial p} u^2 + T \sigma \frac{\partial \rho_s}{\partial p} \right] + \\ & + \omega^2 u \left(T \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + 2 \rho_s \rho_n \right) = 0. \quad (13.14) \end{aligned}$$

В линейном приближении полученная система уравнений значительно упрощается. Приравняв нулю определитель этой системы (условие ее совместности), находим уравнение

$$\left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 \rho_n - \sigma^2 \rho_s \right) = 0, \quad (13.15)$$

выражающее в первом приближении значение скорости u . Корни уравнения (13.15) равны

$$u_{10}^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (13.16)$$

$$u_{20}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma}. \quad (13.17)$$

Полученный результат совершенно очевиден: слабые разрывы давления или температуры распространяются со скоростью соответствующего звука.

Система уравнений (13.12) — (13.14) после подстановки полученных значений скорости u позволяет выяснить связь скачков Δp , ΔT и ω на разрыве. Таким путем убеждаемся в том, что первому корню соответствуют скачки ΔT и ω более высокого порядка по Δp , чем первый. Второму же корню соответствуют скачки Δp порядка выше первого

относительно ΔT и ω . Кроме того, в этом случае имеет место следующая связь между ΔT и ω :

$$\Delta T = \omega u_2 \frac{\rho n}{\rho \sigma}. \quad (13.18)$$

Первому корню соответствует разрыв давления, аналогичный ударным волнам в обычных средах. Второму же корню соответствует разрыв температуры (температурный разрыв).

Разрывы давления (ударные волны). Пренебрежем в уравнении (13.11) членами выше второго порядка; в результате получим уравнение

$$\left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p}\right) + \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right) u^2 \Delta p = 0, \quad (13.19)$$

определяющее значение скорости разрыва давления во втором приближении

$$u_1 = u_{10} \left\{ 1 + \Delta p \frac{\partial}{\partial p} \ln(\rho u_{10}) \right\}. \quad (13.20)$$

При небольших значениях скачка скорости на поверхности разрыва, согласно (13.1), имеем

$$\Delta p = \rho u_{10} v.$$

Учитывая это соотношение, перепишем формулу (13.20) в виде

$$u_1 = u_{10} \left\{ 1 + \frac{1}{2} v \frac{\partial}{\partial p} (\rho u_{10}) \right\}. \quad (13.21)$$

Решение (13.21) совпадает с выражением для скорости разрывов в обычных средах. Подставив полученное значение u^2 в остальные два уравнения, убеждаемся в том, что в этом случае скачки ΔT и ω оказываются выше второго порядка относительно скачка давления Δp .

Таким образом, разрывы давления в гелии II полностью аналогичны ударным волнам в обычной гидродинамике.

Знак выражения $\frac{\partial}{\partial p} \ln(\rho u_{10})$ в гелии II так же положителен, как и в обычных средах. Следовательно, ударные волны этого типа могут быть только волнами сжатия. Первый член в (13.20) равен скорости первого звука в гелии II; в первом приближении разрыв давления распространяется со скоростью, равной скорости первого звука.

Температурные разрывы. Второму корню u_{20} соответствуют отличные от нуля в первом приближении скачки ΔT и ω . Пренебрежем в уравнениях (13.12)—(13.14) членами более высокого порядка, чем второй. Уравнение (13.12) позволяет выразить скачок давления Δp через значения скорости ω ; указанный скачок оказывается второго порядка малости относительно ω (или ΔT):

$$\Delta p = -\omega^2 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{\rho} - \frac{1}{2} \rho^2 u_{20}^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right]. \quad (13.22)$$

Подставим полученное значение Δp в уравнение (13.13) и исключим из уравнений (13.12) и (13.14) скорость ω . В результате находим уравнение

$$\rho \left(-\sigma^2 \rho_s + u^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \rho_n \right) + \\ + \rho_s \sigma T (\Delta T)^2 \left\{ -3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{3}{2} \sigma \frac{\rho}{\rho_n \rho_s} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right\} = 0, \quad (13.23)$$

определяющее величину скорости u_2 во втором приближении. Разрешив уравнение (13.23) относительно u и учтя определение (13.17), получим

$$u_2 = u_{20} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \Delta T \right\}. \quad (13.24)$$

Полученную формулу можно записать в виде

$$u_2 = u_{20} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_n u_{20}^2}{\rho \sigma} \omega \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right\}. \quad (13.25)$$

Температурные разрывы — специфическое явление, характерное только для сверхтекучей жидкости. Формула (13.25) определяет скорость температурных разрывов в гелии. В первом приближении температурные разрывы движутся со скоростью, равной скорости второго звука u_{20} . Знак производной $\frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)$ меняется в зависимости от температуры; это обстоятельство приводит к своеобразным явлениям.

Точки профиля волны второго звука движутся с различными скоростями. Это приводит к изменению формы

профиля волны со временем. В тот момент, когда форма профиля становится неоднозначной функцией координаты, возникают разрывы (в данном случае температурные). Скорости точек профиля волны на поверхности разрыва изменяются скачком. Скорость поверхности возникающего разрыва при этом зависит от указанного скачка скорости. Согласно формуле (13.25) она равна *)

$$u_2 = u_{20} + \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \frac{\rho_s \sigma}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \quad (13.26)$$

(ω_1 и ω_2 — значения относительной скорости с обеих сторон поверхности разрыва).

Во втором звуке скорость ω связана со скоростью нормального движения соотношением $\omega = v_n \frac{\rho}{\rho_s}$. Выражая величину ω через v_n , перепишем (13.26) в виде

$$u_2 = u_{20} + \frac{1}{2} \alpha_2 (v_{n1} + v_{n2}), \quad (13.27)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\sigma T}{C} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{C}{T} \right). \quad (13.28)$$

Коэффициент α_2 меняет знак при изменении температуры. Зависимость его от температуры изображена

графически на рис. 6. При температурах выше $2,00^\circ\text{K}$ и в интервале $0,4 - 0,9^\circ\text{K}$ коэффициент $\alpha_2 < 0$, в остальной области $\alpha_2 > 0$. В области температур, где $\alpha_2 < 0$, поверхности разрыва возникают на заднем фронте волны,

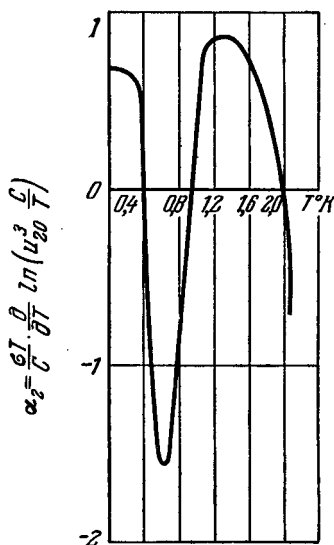


Рис. 6.

*) При выводе формулы (13.25) скорость ω с одной стороны разрыва считалась равной нулю. В общем случае получается указанный в тексте результат.

в области же температур, где $\alpha_2 > 0$, наоборот, на переднем фронте волны. Возникновение разрыва на заднем фронте волны является специфическим свойством второго звука в гелии II, неизвестным для обычного звука.

14. ЧЕТВЕРТЫЙ ЗВУК [18]

В узких капиллярах возможна такая ситуация, когда длина свободного пробега возбуждений становится сравнимой и может превосходить диаметр трубки. В этом случае при течении гелия нормальная часть будет неподвижной. При этом по сверхтекучей части жидкости могут распространяться звуковые колебания, так называемый четвертый звук. Скорость четвертого звука находится из линеаризованной системы гидродинамических уравнений, в которых следует положить $\mathbf{v}_n = 0$. Согласно (8.22) — (8.25) имеем

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \quad (14.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \mu = 0, \quad (14.2)$$

$$\dot{S} = 0. \quad (14.3)$$

Исключив из первых двух уравнений скорость \mathbf{v}_s и учитывая тождество (8.26) для μ , получим

$$\ddot{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho} \Delta p - \sigma \rho_s \Delta T. \quad (14.4)$$

Уравнение (14.3), если пренебречь коэффициентом теплового расширения $\partial \rho / \partial T$, дает

$$\rho \frac{\partial \sigma}{\partial T} \Delta T + \sigma \frac{\partial \rho}{\partial p} \Delta p = 0. \quad (14.5)$$

Из уравнений (14.4) и (14.5) следует волновое уравнение для p

$$\ddot{p} - \left[\frac{\rho_s}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\rho_s \sigma}{\rho (\partial \sigma / \partial T)} \right] \Delta p = 0, \quad (14.6)$$

имеющее периодические решения, распространяющиеся со скоростью

$$u_4^2 = \frac{\rho_s}{\rho} u_1^2 + \frac{\rho_n}{\rho} u_2^2. \quad (14.7)$$

где $u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ — скорость первого звука, а $u_2 = \sqrt{\frac{\rho_s \sigma^2}{\rho_n (\partial \sigma / \partial T)}}$ — скорость второго звука (см. (10.14), (10.15)).

Таким образом, в узких капиллярах могут распространяться звуковые колебания по сверхтекучей компоненте со скоростью, определяемой формулой (14.7). Такого рода колебания названы Аткинсом четвертым звуком. Практически в формуле (14.7) при всех температурах второй член оказывается много меньше первого.

15. КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ

На свободной поверхности гелия II могут распространяться волны, затухающие в глубь жидкости. Это явление совершенно аналогично капиллярным волнам на поверхности классической жидкости. Выбираем ось z по нормали к поверхности, обозначаем через ζ отклонение координаты поверхности от равновесного положения. Если пренебречь эффектами, связанными с присутствием пара, то на поверхности жидкости должны выполняться следующие граничные условия.

а) Нормальный поток жидкости через поверхность должен равняться нулю:

$$\rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} - \rho \dot{\zeta} = 0. \quad (15.1)$$

б) Сумма сил давления и поверхностного натяжения должна равняться нулю (поверхность — плоскость xu):

$$p - \gamma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (15.2)$$

(γ — коэффициент поверхностного натяжения).

в) Должен обращаться в нуль поток энтропии через поверхность, а следовательно,

$$v_{nz} - \dot{\zeta} = 0. \quad (15.3)$$

Из (15.1) и (15.3) следует, что z -компоненты нормальной и сверхтекучей скоростей должны равняться скорости поверхности $\dot{\zeta}$.

Рассмотрим периодическую волну, распространяющуюся по направлению x и затухающую в глубь жидкости. В ней все величины изменяются по закону $\exp(-i\omega t + ikx - \kappa z)$. Поскольку линеаризованные уравнения гидродинамики сводятся к волновым уравнениям, частота ω , волновой вектор k и величина κ связаны соотношением

$$\frac{\omega^2}{u^2} = k^2 - \kappa^2. \quad (15.4)$$

В пределе для малых частот имеем просто $k = \kappa$; z -компонента уравнения движения дает связь, которая должна иметь место на поверхности:

$$-i\omega j'_z = \kappa p' \quad (15.5)$$

(штрихом отмечаем переменные части всех величин). А из условия (15.2) имеем

$$p' + \gamma k^2 \zeta = 0. \quad (15.6)$$

Поскольку $j'_z = \rho \dot{\zeta}$, из (15.5) и (15.6) окончательно получаем

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (15.7)$$

Таким образом, капиллярные волны в сверхтекучей жидкости имеют такой же закон дисперсии, как и в классическом случае.

Ситуация изменяется в том случае, когда мы рассматриваем волны, бегущие вдоль пленки гелия II. В этом случае, если толщина пленки невелика, нормальная часть в колебательном движении не участвует и граничные условия изменяются.

Вместо условия (15.1) имеем

$$\rho_s v_{sz} - \rho \dot{\zeta} = 0. \quad (15.8)$$

Уравнение движения сверхтекучей части дает связь

$$i\omega v_{sz} + \kappa \mu' = 0. \quad (15.9)$$

Из (15.8), (15.9) и (15.6) получаем другое дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (15.10)$$

Уравнение (15.10) имеет место, очевидно, в том случае, когда длина волны волн много меньше толщины пленки h ($kh \gg 1$). В общем случае аналогичные вычисления дают уравнение

$$\omega^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\gamma}{\rho} k^3 \operatorname{th} kh. \quad (15.11)$$

Волны, распространяющиеся по сверхтекучей жидкости ($\varphi_n = 0$) вдоль пленки, иногда называют третьим звуком.

16. ГИДРОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ [19, 20, 21]

В основе рассмотренной в § 8 гидродинамики сверхтекучей жидкости лежало экспериментально подтвержденное предположение о безвихревом характере сверхтекучего движения. Из этого немедленно следует, что при вращении сверхтекучего гелия, скажем в цилиндрическом сосуде, во вращение должна увлекаться только нормальная часть жидкости. Сверхтекучая же часть жидкости при этом должна оставаться неподвижной. Это также непосредственно следует из простой микроскопической картины. Действительно, при вращении сосуда возбуждения, сталкиваясь со стенкой, увлекаются вращением, так что нормальная часть жидкости движется вместе с сосудом. Сверхтекучая же часть со стенками не взаимодействует и стоит неподвижно. Однако это следствие не подтверждается экспериментом. Если бы описанная картина была верна, то глубина мениска жидкости во вращающемся сосуде была бы в ρ_n/ρ раз меньше глубины мениска, образованного классической вращающейся жидкостью. Эксперимент же этого не подтверждает. Вращающаяся сверхтекучая жидкость образует мениск, имеющий такую же глубину, как и классическая жидкость, т. е. опыт устанавливает, что при вращении сосуда с сверхтекучей жидкостью вращением увлекается вся жидкость.

Для того чтобы понять указанную ситуацию, вернемся снова к условию потенциальности сверхтекучего движения.

Потенциальность сверхтекучего движения выражается условием $\operatorname{rot} \varphi_s = 0$. Это же условие по теореме Стокса

может быть записано в виде равенства нулю циркуляции сверхтекучей скорости v_s вдоль произвольного контура L :

$$\oint_L v_s dl = 0. \quad (16.1)$$

Умножим соотношение (16.1) на m — массу атома гелия. Таким образом, мы получим слева величину, которая в квантовой механике подлжит квантованию. Представляется поэтому естественным рассматривать условие (16.1) как частный случай более общего квантового условия

$$m \oint v_s dl = 2\pi n \hbar \quad (n — \text{целое число}). \quad (16.2)$$

Можно попытаться получить квантовую теорему о циркуляции (16.2) для бозе-жидкости, исходя из общих принципов.

Рассмотрим жидкость при абсолютном нуле в основном состоянии. Волновая функция Φ_0 в этом состоянии является симметричной функцией координат без узлов. Функция Φ_0 может быть выбрана действительной и в дальнейшем может полагаться равной положительному числу. Пусть система как целое движется с равномерной скоростью v_s . При этом волновая функция приобретает фазу $\frac{i}{\hbar} N m v_s \frac{\sum_i r_i}{N}$ и будет равна (суммирование ведется по всем N частицам системы)

$$\Phi = \Phi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar} m v_s \sum_i r_i\right). \quad (16.3)$$

Предположение об отсутствии узлов позволяет заключить, что волновая функция непрерывно зависит от фазы. Формула (16.3) является точной для равномерного движения. В общем случае, когда скорость v_s меняется от точки к точке, можно ввести в рассмотрение величину изменения фазы $\Delta\varphi$ при небольшом смещении координат частиц Δr_i :

$$\Delta\varphi = \frac{i}{\hbar} m \sum_i v_s \Delta r_i. \quad (16.4)$$

Выберем в системе некоторое число частиц, образующих замкнутый контур. Сдвиг частиц вдоль контура не меняет состояния системы, поэтому фаза может при этом измениться лишь на целое число 2π . Таким образом, совершая предельный переход, получаем

$$\frac{m}{\hbar} \sum \mathbf{v}_s \Delta r_i \rightarrow \frac{m}{\hbar} \oint \mathbf{v}_s dt = 2\pi n, \quad (16.5)$$

т. е. как раз искомое квантовое обобщение циркуляционной теоремы. При отличной от нуля температуре каждое из имеющихся в этом случае возбуждений с импульсом \mathbf{p} внесет в волновую функцию дополнительный множитель

$$\sum_i \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} r_i\right). \quad (16.6)$$

Однако при этом фаза, обязанная движению системы со скоростью \mathbf{v}_s , останется неизменной. Если в (16.5) выбрать контур L так, чтобы он не проходил вблизи возбуждений, то весь предыдущий вывод от этого не изменится.

Из формулы (16.2) следует, что в сверхтекучей жидкости возможны две различные ситуации, в зависимости от того, равно ли n нулю или не равно. При $n = 0$ имеем $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, и для случая вращения в односвязной области отсюда следует $\mathbf{v}_s = 0$. При $n \neq 0$ ситуация сложнее. Циркуляции вокруг некоторых особых линий в этом случае не равны нулю. На этих линиях, являющихся аналогом вихревых нитей, известных в обычной гидродинамике, имеем особенность в \mathbf{v}_s . Естественно, что вблизи вихревых нитей приведенные выше рассуждения уже непригодны. Однако если не интересоваться детальной структурой ствола вихря, то единственное ограничение возникает лишь на форму контура L , который не должен проходить слишком близко от ствола вихря.

Рассмотрим движение сверхтекучей жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде. Поле скоростей единичного вихря с осью, параллельной оси вращения, согласно (16.2) определяется формулой

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad \kappa = \frac{\hbar}{m} n. \quad (16.7)$$

Его кинетическая энергия, приходящаяся на единицу длины, равна

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_s \int_a^b v_s^2 2\pi r dr = \rho_s \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (16.8)$$

где a — радиус ствола вихря, имеющий размер порядка межатомного расстояния, а b — некоторый условный внешний радиус вихря. Радиус вихря b связан с числом вихрей, приходящихся на единицу площади N , очевидным соотношением

$$\pi b^2 = \frac{1}{N}.$$

Наконец, еще свяжем плотность вихрей N с величиной $\text{rot } \mathbf{v}_s$. Согласно (16.2), используя теорему Стокса, имеем

$$N = \frac{|\text{rot } \mathbf{v}_s|}{\kappa}. \quad (16.9)$$

Для выяснения общей картины вращения сверхтекучей жидкости воспользуемся вариационным методом. Стационарному состоянию соответствует минимум величины $F - M\omega_0$, где F — свободная энергия, M — момент жидкости, ω_0 — угловая скорость вращения сосуда. Свободная энергия движущейся жидкости складывается из свободной энергии покоящейся жидкости F_0 и кинетической энергии

$$\rho_s \frac{v_s^2}{2} + \rho_n \frac{v_n^2}{2} \quad *).$$

Ввиду аддитивности кинетической энергии и момента M можно движение сверхтекучей жидкости рассматривать независимо от нормальной и минимизировать величину $E_s - M_s \omega_0$, где E_s и M_s относятся к сверхтекучей части. Нормальная часть жидкости, как легко видеть, будет совершать при этом вращательное движение по типу твердого тела, т. е. со скоростью $v_n = \omega_0 r$. Энергия E

*) Строго говоря, такое разделение является приближенным вследствие того, что термодинамические переменные зависят от относительной скорости $v_n - v_s$. В пределах интересующей нас точности это обстоятельство в данном вопросе, однако, не является существенным.

сверхтекучего движения (далее индекс s для простоты опускаем) равна

$$E = \frac{1}{2} \rho_s \int v^2 2\pi r dr + \rho_s \frac{\kappa}{4\pi} \int |\text{rot } \mathbf{v}| \ln \left(\frac{\kappa^{1/2}}{\pi^{1/2} |\text{rot } \mathbf{v}|^{1/2} a} \right) 2\pi r dr. \quad (16.10)$$

Второй член в формуле есть энергия вихрей, вычисленная с помощью формул (16.7), (16.8) и (16.9). Аналогично вычисляется момент жидкости:

$$M = \rho_s \int vr 2\pi r dr + \rho_s \frac{\kappa}{2\pi} \int 2\pi r dr. \quad (16.11)$$

Здесь второй член, так же как и в (16.10), обязан вкладу вихрей. Поскольку вычисления вклада вихрей имеют логарифмическую точность, то, строго говоря, включение этого члена является в известном смысле превышением точности и его можно было бы опустить. Варьируем разность $E - M\omega_0$ по δv , получаем *)

$$\int \delta v \left\{ (v - \omega_0 r) + \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr)}{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr)} \right\} 2\pi r dr + \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \delta v \ln \frac{\kappa^{1/2}}{(\pi e |\text{rot } \mathbf{v}|)^{1/2} a} \right\} 2\pi dr. \quad (16.12)$$

Из требования обращения первого интеграла в нуль следует уравнение

$$(v - \omega_0 r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0. \quad (16.13)$$

Обращение второго интеграла (16.12) в нуль происходит автоматически, если δv равно нулю на границах интегрирования.

Полученное уравнение (16.13) определяет поле сверхтекучей скорости во вращающемся цилиндрическом сосуде.

*) Напоминаем, что в цилиндрических координатах

$$|\text{rot } \mathbf{v}| = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr).$$

Уравнение (16.13) имеет два точных решения:

$$v = \omega_0 r, \quad (16.14)$$

$$v = \frac{k}{r}. \quad (16.15)$$

Первое решение соответствует твердотельному вращению, а второе ирротационному с ротором скорости, равным нулю. Заметим, что сумма решений (16.14) и (16.15) не удовлетворяет уравнению (16.13). Предположим, что вращение твердотельного типа захватывает область внутри некоторого радиуса R_i . Во внешней же области имеет место ирротационное решение с полем (16.15). Минимизируя затем свободную энергию по R_i , мы найдем величину R_i , которая, как мы увидим, оказывается меньше радиуса сосуда R . Таким образом, расчет подтверждает сделанное предположение. Константа k определяется из граничного условия $v(R) = \omega_0 R$ *). Получающееся при использовании граничного условия решение, однако, не сшивается при $r = R_i$ с решением (16.14). Согласно уравнению (16.13) непрерывными должны быть величины vr и $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(vr)$. Следовательно, при r , близких к R_i , решения (16.14) и (16.15), вообще говоря, должны быть подправлены. Легко видеть, что в уравнении (16.13) имеется единственный параметр размерности длины $\sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0}}$. Истинное решение будет отличаться от принятого нами лишь в узкой области вблизи R_i порядка $\sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0}}$ **). Область же ирротационного движения, как мы сейчас увидим, имеет размер порядка $\sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0} \ln \frac{b}{a}}$. Таким образом, поскольку производимые здесь вычисления имеют логарифмическую степень точности, то небольшой областью вблизи R_i , где решения (16.14) и (16.15) следовало бы подправить, можно просто пренебречь и считать, что в области внутри R_i

*) Граничное условие для v необходимо поставить, так как при варьировании свободной энергии предполагалось, что на границах $\delta v = 0$.

**) Это обстоятельство подтверждается более подробным расчетом.

имеет место поле скоростей $v = \omega_0 r$ и вне ее $v = \frac{\omega_0 R^2}{r}$.

Подставляем такое поле скоростей в выражение для $E - M\omega_0$ и минимизируем его по R_i . Таким путем находим

$$\left(\frac{R}{R_i} - \frac{R_i}{R}\right)^2 = \frac{\kappa}{\omega_0 R^2} \ln \frac{b}{ae}. \quad (16.16)$$

Правая часть в (16.16) во всех интересных случаях мала, поэтому приближенно имеем

$$R - R_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0} \ln \frac{b}{ae}}. \quad (16.17)$$

Из полученной формулы мы видим, что область ирротационного движения сравнительно мала. Однако благодаря заметному логарифму (порядка 15) она доступна наблюдению. Области ирротационного движения будут также возникать в случае вращения гелия между коаксиальными цилиндрами. В этом случае будут две такие области: на внутренней и внешней границах жидкости.

Вычислим теперь интересующую нас часть свободной энергии $E - M\omega_0$, связанную со сверхтекучей компонентой. Подставив полученное значение R_i в (16.10) и (16.11) и учитывая малость $R - R_i$, находим

$$E - M\omega_0 = -\frac{1}{4} \pi \rho_s \omega_0 R^2 + \frac{1}{2} \rho_s \kappa \omega_0 R^2 \ln \frac{b}{ae}. \quad (16.18)$$

Второй член в формуле (16.18) обязан наличию вихрей и, как мы видим, повышает свободную энергию. Поэтому возникающие вихри будут иметь наименьший момент, соответствующий в формуле значению $n = 1$.

Резюмируя сказанное, мы видим, что при вращении сосуда со сверхтекучей жидкостью возникающие вихревые нити имитируют вихревое движение практически во всем сосуде с ротором скорости, равным удвоенной частоте вращения сосуда, т. е. так, как при вращении твердого тела или классической вязкой жидкости. При этом во всем объеме жидкости, не занятом вихревыми нитями, $\text{rot } v_s = 0$. Полностью свободной от вихревых нитей оказывается лишь небольшая область вблизи стенок сосуда, в которой совершается ирротационное безвихревое движение.

О критических скоростях

Вычисление критических скоростей, связанных с возможностью рождения фононов или ротонов, согласно критерию Ландау ($v_{кр} = \min \frac{\varepsilon}{p}$) дает значения, на два порядка превосходящие наблюдаемые и не зависящие от толщины капилляров. Экспериментально наблюдаемое значение критических скоростей и правильная зависимость их от толщины капилляра непосредственно следуют из возможности рождения в сверхтекучей жидкости вихревых колец. Эти своеобразные возбуждения характеризуются энергией [20]

$$\varepsilon = \rho_s \frac{Rh^2}{2m^2} \ln \frac{R}{a} \quad (16.19)$$

и импульсом

$$p = \rho \frac{\pi R^2 h}{m}, \quad (16.20)$$

зависящими от радиуса кольца R (a — толщина ядра вихря).

Применив критерий Ландау к данной ветви спектра, получим

$$v_{кр} = \min \frac{\varepsilon}{p} = \frac{h}{Rm} \ln \frac{R}{a}. \quad (16.21)$$

Полученная формула объясняет наблюдающееся постоянство произведения $v_{кр}R$ и дает близкое к наблюдаемым значение критических скоростей.

Уравнения гидродинамики вращающейся сверхтекучей жидкости

Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости при наличии вихрей могут быть получены феноменологическим путем, с помощью законов сохранения. При этом также выясняется вид диссипативных членов, связанных с наличием отличного от нуля $\text{rot } v_s$. Основное отличие рассматриваемого движения от безвихревого движения состоит в зависимости внутренней энергии жидкости от абсолютной величины $\text{rot } v_s$. Эта зависимость выражается в дифференциальной форме:

$$\delta\varepsilon = \lambda \delta\omega, \quad \omega = |\text{rot } v_s|. \quad (16.22)$$

Согласно (16.8) коэффициент λ с логарифмической степенью точности равен

$$\lambda = \rho_s \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (16.23)$$

Далее действуем тем же способом, что и в § 8 при выводе уравнений гидродинамики при $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$. Записываем все уравнения в форме дифференциальных законов сохранения. Уравнение непрерывности при этом остается неизменным:

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (16.24)$$

и по существу является определением вектора потока массы жидкости \mathbf{j} . К тензору потока импульса Π_{ik} и вектору потока энергии \mathbf{Q} мы добавляем пока неизвестные члены, соответственно π_{ik} и \mathbf{q} . Таким образом, уравнения сохранения энергии и импульса записываются в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div } (\mathbf{Q} + \mathbf{q}) = 0, \quad (16.25)$$

$$\frac{\partial j_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\Pi_{lk} + \pi_{lk}) = 0. \quad (16.26)$$

Энергия единицы объема E с помощью преобразования Галилея выражается через внутреннюю энергию жидкости E_0 в системе отсчета, движущейся со скоростью сверхтекучей части:

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{j}_0 \mathbf{v}_s + E_0, \quad (16.27)$$

где \mathbf{j}_0 — импульс единицы объема жидкости в этой же системе. Он выражается через полный импульс \mathbf{j} в неподвижной системе:

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s. \quad (16.28)$$

В термодинамическое тождество, определяющее внутреннюю энергию E_0 , кроме членов, содержащихся в (8.12), необходимо добавить член $\lambda d\omega$, выражающий изменение энергии благодаря наличию $\text{rot } \mathbf{v}_s$. Таким образом, имеем

$$dE_0 = T dS + \mu d\rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, d\mathbf{j}_0) + \lambda d\omega. \quad (16.29)$$

Невозмущенные тензор потока импульса Π_{ik} и поток энергии Q определяются формулами (8.19) и (8.20):

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{nk} j_{0i} + p \delta_{ik},$$

$$Q = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) j + ST v_n + v_n (v_n j_0),$$

где давление p равно

$$p = -E_0 + TS + \mu\rho + (v_n - v_s, j_0).$$

Полная система гидродинамических уравнений содержит еще два уравнения: уравнение сверхтекучего движения и уравнение роста энтропии

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s \nabla) v_s + \nabla \mu = f, \quad (16.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S v_n = \frac{R}{T}, \quad (16.31)$$

где вектор f и диссипативная функция R подлежат определению. Воспользуемся теперь законом сохранения энергии (16.25) для определения дополнительных членов в уравнениях гидродинамики. Для этого дифференцируем по времени левую и правую части равенства (16.27) и подставляем из уравнений (16.24), (16.26) и (16.30) производные по времени от величин j , ρ и v_s . В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{E} = & -\operatorname{div} Q - \operatorname{div} (\pi v_n) + T (\dot{S} + \operatorname{div} S v_n) + \lambda \dot{\omega} + \\ & + \lambda v_{ni} \frac{\partial \omega}{\partial r_i} + \pi_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + (j - \rho v_n, f + [\omega, v_n - v_s]), \end{aligned} \quad (16.32)$$

где

$$(\pi v_n)_i = \pi_{ik} v_{nk}.$$

Вводим единичный вектор $v = \omega/\omega$ и вычисляем с помощью (16.30) производную $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega} = v \operatorname{rot} v_s = v \operatorname{rot} \{ f + [\omega, v_n - v_s] \} - v \operatorname{rot} [\omega v_n]. \quad (16.33)$$

Подставим полученное выражение для $\dot{\omega}$ в (16.32) и сгруппируем все члены, имеющие вид дивергенции; таким путем

находим

$$\begin{aligned} \dot{E} + \operatorname{div} \{ \mathbf{Q} + (\pi \mathbf{v}_n) + \lambda [\mathbf{v}, \mathbf{f} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s]] \} = \\ = T (\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n) + \left(\pi_{ik} + \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} - \lambda \omega \delta_{ik} \right) \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \\ + (\mathbf{f} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s], \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n + \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (16.34)$$

Сравним теперь (16.34) с уравнением сохранения энергии (16.25) и уравнением возрастания энтропии (16.31), получим

$$\mathbf{q} = (\pi \mathbf{v}_n) + \lambda [\mathbf{v}, \mathbf{f} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s]], \quad (16.35)$$

$$\begin{aligned} R = - \left(\pi_{ik} - \lambda \omega \delta_{ik} + \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} \right) \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} - \\ - (\mathbf{f} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s], \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n + \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (16.36)$$

Из требования положительности диссипативной функции R следует наиболее общий вид для функции \mathbf{f} и тензора π_{ik} :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = - [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s] + \alpha [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n + \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}] + \\ + \beta [\mathbf{v} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n + \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}]] - \\ - \gamma \mathbf{v} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n + \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}) \quad (\beta, \gamma \geq 0), \end{aligned} \quad (16.37)$$

$$\pi_{ik} = \lambda \omega \delta_{ik} - \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} + \tau_{ik}. \quad (16.38)$$

Тензор напряжений τ_{ik} выражается обычным образом через коэффициенты вязкости (см. (9.9)).

Импульс относительного движения, согласно (16.28), равен *)

$$\mathbf{j}_0 = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s).$$

Выразив разность $\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n$ через $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$:

$$\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n = \mathbf{j}_0 + \rho \mathbf{v}_s - \rho \mathbf{v}_n = - \rho_s (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s),$$

*) При наличии в жидкости выделенного направления $\boldsymbol{\omega}$ возникают, вообще говоря, эффекты, обязанные анизотропии жидкости. Это обстоятельство приводит к тому, что вместо коэффициента вязкости η возникает тензор вязкости η_{iklm} . В импульсе \mathbf{j}_0 появляется компонента вдоль направления $\boldsymbol{\omega}$ и т. д. Однако эти эффекты квадратичны по $\boldsymbol{\omega}$ и чрезвычайно малы.

преобразуем f к виду

$$f = -\frac{1}{\rho_s} [\omega, \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}] - (1 + \alpha \rho_s) \left[\omega, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v} \right] - \\ - \beta \rho_s \left[\mathbf{v} \left[\omega, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v} \right] \right] + \\ + \gamma \rho_s \mathbf{v} \left(\omega, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v} \right). \quad (16.39)$$

Выпишем окончательно уравнение сверхтекучего движения (16.30)

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla \mu = \\ = -\frac{1}{\rho_s} [\omega, \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}] - \beta' \rho_s \left[\omega, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v} \right] - \\ - \beta \rho_s \left[\mathbf{v}, \left[\omega, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v} \right] \right] + \\ + \gamma \rho_s \mathbf{v} \left(\omega, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{v} \right). \quad (16.40)$$

Здесь $\beta' \rho_s = 1 + \alpha \rho_s$. Последние три члена в (16.40) описывают силу взаимного трения, коэффициенты β и β' выражаются через коэффициенты B и B' , введенные Холлом и Вайненом [21], при помощи соотношений

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{B \rho_n}{\rho \rho_s}, \quad \beta' = \frac{1}{2} \frac{B' \rho_n}{\rho \rho_s}. \quad (16.41)$$

Члены с $\operatorname{rot} \lambda \mathbf{v}$ проявляются во взаимном трении в случае, когда имеют место поперечные изгибы вихрей. Продольная сила (последний член в (16.40)) вдоль ω действует в том случае, когда направление отдельных вихревых нитей отклоняется от направления среднего вихря, например при тепловых колебаниях. Ввиду малости этого эффекта коэффициент γ , по-видимому, крайне мал. Обусловленная вихревым движением добавка к тензору потока импульса

$$\tilde{\pi}_{ik} = \lambda \omega \delta_{ik} - \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} \quad (16.42)$$

состоит из двух частей: перенормировки давления $\lambda \omega$ и члена, характеризующего натяжение вихрей, $-\lambda \omega_i \omega_k / \omega$. Из формулы (16.35), подставив выражение (16.42) для π_{ik} ,

находим выражение для дополнительного потока энергии q

$$q = \lambda [\mathbf{v}, \mathbf{f} + [\mathbf{v}_s \boldsymbol{\omega}]]. \quad (16.43)$$

В отсутствие продольной силы ($\gamma = 0$) этому выражению можно придать более изящный вид, допускающий простое истолкование. Применяв к уравнению (16.40) операцию rot , имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot} \{ \mathbf{f} + [\mathbf{v}_s \boldsymbol{\omega}] \} = \text{rot} [\mathbf{v}_L \boldsymbol{\omega}]. \quad (16.44)$$

Это уравнение описывает перенос вектора $\boldsymbol{\omega}$ со скоростью

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_L = \mathbf{v}_s + \frac{1}{\rho_s} \text{rot} \lambda \mathbf{v} + \beta' \rho_s \left(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot} \lambda \mathbf{v} \right) + \\ + \beta \rho_s \left[\mathbf{v}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot} \lambda \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (16.45)$$

Это есть скорость движения вихревых нитей (при отсутствии продольного трения). Теперь поток энергии q может быть записан в окончательном виде

$$q = \boldsymbol{\omega} \frac{\partial E_0}{\partial \boldsymbol{\omega}} [\mathbf{v} [\mathbf{v}_L \mathbf{v}]], \quad (16.46)$$

из которого видно, что энергия вихрей переносится в перпендикулярном к $\boldsymbol{\omega}$ направлении.

Остановимся на граничных условиях, которым должна удовлетворять сверхтекучая компонента на поверхности твердого тела и на свободной поверхности, помимо обращения в нуль нормальной компоненты скорости \mathbf{v}_s .

В случае свободной поверхности должны быть равны, как обычно, касательные компоненты натяжений, т. е. $\pi_{N\tau} = \omega_N \omega_\tau = 0$. Следовательно, вихри перпендикулярны поверхности (N — вектор нормали к поверхности). На твердой поверхности имеет место несколько более сложная ситуация. Если поверхность шероховатая, то вихри движутся вместе с поверхностью. В случае же проскальзывания вихрей на поверхности будет иметь место диссипация энергии. Из подсчета диссипируемой энергии можно показать, что в общем случае на поверхности, движущейся со скоростью \mathbf{u} , будет иметь место условие (при $\gamma = 0$)

$$\mathbf{v}_L - \mathbf{u} = \zeta [\mathbf{v} [N \mathbf{v}]] + \zeta' [N \mathbf{v}], \quad (16.47)$$

где коэффициенты ξ и ξ' имеют следующий порядок величины:

$$\frac{\xi}{B} \approx \frac{\xi'}{B'} \approx \frac{\rho_n \hbar}{\rho m d} \quad (16.48)$$

(d — средний размер шероховатостей).

Абсолютно шероховатой поверхности соответствует обращение коэффициентов ξ и ξ' в нуль, абсолютно гладкой поверхности ξ и $\xi' \rightarrow \infty$.

17. ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ λ -ТОЧКИ [22, 23]

В теории фазовых переходов второго рода обычно вводится малый параметр, характеризующий близость состояния системы к λ -точке. Затем термодинамические потенциалы разлагаются в ряд по этому параметру, и величина его определяется минимизацией потенциала. Вдали от λ -точки мы имеем дело с идеальным газом возмущений, и нормальная плотность жидкости ρ_n , а следовательно и ρ_s , находится по формуле (2.22). Вблизи λ -точки такой подход уже невозможен, и следует воспользоваться методом малого параметра. Таким параметром может служить величина ρ_s , обращающаяся в нуль в λ -точке. Более удобным оказывается введение некоторой комплексной функции $\psi(x, y, z, t) = \eta e^{i\varphi}$, определяемой таким образом, что

$$\rho_s = m |\psi|^2, \quad \mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi. \quad (17.1)$$

При достаточно малых значениях \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s энергию единицы объема E разлагаем в ряд по \mathbf{v}_n и $\nabla \psi$

$$E = (\rho - m |\psi|^2) \frac{\mathbf{v}_n^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + E_0(\rho, S, |\psi|^2). \quad (17.2)$$

Далее, выразив ψ через ρ_s и \mathbf{v}_s , получим

$$E = \rho_n \frac{\mathbf{v}_n^2}{2} + \rho_s \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{(\nabla \rho_s)^2}{\rho_s}, \quad (17.3)$$

$$\rho_n = \rho - m |\psi|^2.$$

Последний член в (17.3) представляет собой специфически квантовую добавку.

Равновесные значения ψ и ψ^* находятся путем минимизации энергии E по ψ^* и ψ при заданном значении импульса j :

$$j = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s = (\rho - m|\psi|^2) \mathbf{v}_n + \frac{i\hbar}{2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \quad (17.4)$$

Умножим (17.4) на неопределенный лагранжев множитель u и прибавим к выражению (17.3). Затем варьируем полученную сумму по ψ^* и \mathbf{v}_n (при постоянных ρ , S , j и ψ) и исключаем u . Таким путем находим уравнение

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 \psi + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)_{\rho, S} \psi = 0, \quad (17.5)$$

определяющее равновесное значение ψ .

Перейдем теперь к выводу полной системы гидродинамических уравнений. Указанные уравнения можно получить, исходя из законов сохранения, как это было сделано выше при выводе уравнений двухскоростной гидродинамики. Начнем с уравнения, определяющего функцию ψ . Исходим из предположения, что состояние системы определяется заданием величины ψ (так же как и других термодинамических величин), т. е. что ψ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению по t . По аналогии с квантовой механикой пишем

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L} \psi, \quad (17.6)$$

где \hat{L} — некоторый линейный оператор. Поскольку величина $\rho_s = m|\psi|^2$ может релаксировать (не сохраняться и превращаться в ρ_n), то оператор \hat{L} не является эрмитовым. Эрмитову часть оператора \hat{L} можно по аналогии с уравнением Шредингера записать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U, \quad (17.7)$$

где

$$U = \left(\frac{\partial E_0}{\partial |\psi|^2} \right)_{\rho_n, S} - gm = \left\{ \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho} \right)_{\rho_s} + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)_{\rho} - g \right\} m \quad (17.8)$$

и функция g подлежит определению.

Что касается антиэрмитовой части, то она описывает приближение ρ_s к равновесному значению и в равновесии должна обращаться в нуль. Если отклонение от состояния равновесия мало, то ее, согласно (17.5), можно записать в виде

$$i\Lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 m\psi + \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} m\psi \right\}, \quad (17.9)$$

где Λ — некоторый безразмерный коэффициент, пропорциональный обратному времени релаксации. Окончательно получаем следующее уравнение для ψ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \left\{ \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho} \right)_{\rho_s} + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)_{\rho} - g \right\} m\psi - \\ - i\Lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right) \right\} m\psi. \quad (17.10)$$

Коэффициент Λ , как показывает несложный анализ, должен быть действительным, так как в противном случае возможен был бы перенос сверхтекучей части жидкости нормальной скоростью. Все остальные уравнения записываются в обычном виде:

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (17.11)$$

закон сохранения импульса (8.3)

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad (17.12)$$

$$\Pi_{ik} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_i} \frac{\partial \psi^*}{\partial r_k} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial r_i \partial r_k} + \text{к. с.} \right) + \\ + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad (17.13)$$

и наконец, закон возрастания энтропии (9.16)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{R}{T}. \quad (17.14)$$

Члены τ_{ik} , \mathbf{q} и R , наряду с g , подлежат определению. Закон сохранения энергии требует, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{Q}. \quad (17.15)$$

Далее дифференцируем выражение (17.2) для E по времени и выражаем производные по времени $\dot{\psi}$, $\dot{\rho}$, \dot{S} и $\dot{\mathbf{v}}_n$ с помощью (17.11) — (17.14). Затем подбираем неизвестные члены таким образом, чтобы все члены, которые не удается заключить под знак div , обратились в нуль. Кроме того, учитывая положительность функции R , в результате находим

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

$$\tau_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}_n \right). \quad (17.16)$$

Что же касается члена g и части тензора τ_{ik} , имеющей не равный нулю след, то их можно положить равными нулю, так как они связаны со второй вязкостью, а вблизи λ -точки основная диссипация происходит за счет релаксации ρ , определяемой коэффициентом Λ .

Выпишем теперь окончательно получающиеся таким путем уравнения:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho} + \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right) m \psi - \\ & - i\Lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right\} m \psi, \end{aligned} \quad (17.17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \{ (\rho - m |\psi|^2) \mathbf{v}_n \} + \frac{i\hbar}{2} (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) = 0, \quad (17.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho - m |\psi|^2) v_{ni} + \frac{i\hbar}{2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \right) \right\} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0. \quad (17.19)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} = & (\rho - m |\psi|^2) v_{ni} v_{nk} + \\ & + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_i} \frac{\partial \psi^*}{\partial r_k} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial r_i \partial r_k} + \text{к. с.} \right) + \\ & + p \delta_{ik} - \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}_n \right), \end{aligned} \quad (17.20)$$

$$p = -E_0 + TS + \rho \frac{\partial E_0}{\partial \rho} + \rho_s \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v}_n = & \frac{1}{T} \text{div} (\kappa \nabla T) + \\ & + \frac{1}{T} \left\{ \frac{2\Lambda}{\hbar} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right] m \psi \right\}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}_n \right)^2. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Рассмотрим случай малых градиентов $\nabla \rho_s$, когда специфически квантовые эффекты малы. В этом случае $-\frac{i\hbar}{m} \nabla \psi$ можно заменить всюду на \mathbf{v}_s , применив к уравнению (17.17) операцию grad и сделав в остальных уравнениях указанную замену; получаем более простую систему уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left\{ \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \frac{\partial E_0}{\partial \rho} + \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} - \frac{\hbar \Lambda}{2m\rho_s} \operatorname{div} \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \right\} = 0, \quad (17.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0, \quad (17.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n \mathbf{v}_{ni} + \rho_s \mathbf{v}_{si}) + \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \rho_n \mathbf{v}_{ni} \mathbf{v}_{nk} + \rho_s \mathbf{v}_{si} \mathbf{v}_{sk} + p \delta_{ik} - \right. \\ \left. - \eta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial \mathbf{v}_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right) \right\} = 0, \quad (17.24) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s = - \frac{\Lambda m}{2\hbar} \left\{ \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} + \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right\} \rho_s, \quad (17.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = \frac{1}{T} \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \\ + \frac{1}{T} \left\{ \frac{\hbar \Lambda}{2m\rho_s} [\operatorname{div} \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)]^2 + \right. \\ + \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2 + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)^2 \right] \rho_s + \\ \left. + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial \mathbf{v}_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right)^2 \right\}. \quad (17.26) \end{aligned}$$

В этих уравнениях, в отличие от рассмотренных в § 8 уравнений гидродинамики, величина ρ_s не считается заданной, а является независимой величиной. Приближение ее к равновесному значению определяется уравнением (17.25). Коэффициент Λ определяет величину поглощения звука вблизи λ -точки. Он просто связан с коэффициентами второй вязкости. По экспериментальным данным коэффициент Λ имеет величину, приблизительно равную 15. Функцию $E_0(\rho, S, \rho_s)$ принципиально можно определить из экспериментальных данных о зависимости теплоемкости гелия и ρ_s от температуры и давления вблизи λ -точки. Область применимости уравнений ограничена неравенством

$T_\lambda - T \ll T_\lambda$. Наиболее интересной областью применения рассмотренных здесь уравнений являются процессы при наличии вихрей, в которых имеют место большие градиенты ρ_s .

18. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ [13]

Функция распределения элементарных возбуждений удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial r} = I(n), \quad (18.1)$$

где $I(n)$ — интеграл столкновений, конкретный вид которого пока для нас несуществен. Гамильтониан H квази-частицы при наличии сверхтекучего движения со скоростью v_s равен

$$H = \varepsilon(p) + pv_s, \quad (18.2)$$

где $\varepsilon(p)$ — ее энергия в системе отсчета, где сверхтекучая компонента покоится. Исходя из кинетического уравнения, можно получить уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости. При этом находятся выражения для потоков импульса и энергии, необходимые для вычисления кинетических коэффициентов. Умножим уравнение (18.1) на компоненту импульса p_i и проинтегрируем по всему p -пространству. Благодаря закону сохранения импульса интеграл от правой части равен нулю; таким путем получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n p_i d\tau_p + \int p_i \frac{\partial n}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} d\tau_p - \int p_i \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} d\tau_p = 0,$$

или после несложного преобразования

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{np_i} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i \frac{\partial H}{\partial p_k}} + \overline{n \frac{\partial H}{\partial r_i}} = 0. \quad (18.3)$$

Здесь и в дальнейшем чертой будем обозначать интегрирование по p -пространству. Подставив в (18.3) выражение

(18.2) для H , получим уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{np_i} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right)} + \overline{n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} + \frac{\partial}{\partial r_i} p v_s \right)} = 0, \quad (18.4)$$

определяющее изменение во времени полного импульса относительного движения нормальной и сверхтекучей частей.

Запишем теперь уравнение движения для полного импульса:

$$\mathbf{j} = \overline{pn} + \rho \mathbf{v}_s. \quad (18.5)$$

Поскольку полный импульс сохраняется, то производная от него по времени равна дивергенции симметричного тензора потока импульса Π_{ik} (8.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0. \quad (18.6)$$

Тензор потока импульса Π_{ik} в неподвижной системе отсчета, согласно (8.8), можно выразить через его значение π_{ik} в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{v}_s :

$$\Pi_{ik} = \pi_{ik} + v_{sk} \overline{np_i} + v_{sl} \overline{np_k} + \rho v_{sl} v_{sk}. \quad (18.7)$$

Вычтем из уравнения (18.6) уравнение (18.4) и воспользуемся уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{np_k} + \rho v_{sk}). \quad (18.8)$$

В результате получим

$$\rho \frac{\partial v_{sl}}{\partial t} + \rho v_{sk} \frac{\partial v_{sl}}{\partial r_k} + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial r_k} - \overline{n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i}} - \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}} = 0. \quad (18.9)$$

Из условия $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ следует, что сумма последних трех членов в (18.9) должна быть произведением плотности ρ на градиент некоторой функции. Производную $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i}$, очевидно, можно переписать в виде $\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r_i}$. Кроме того,

тензор π_{ik} при абсолютном нуле в отсутствие возбуждений должен быть равен $p_0\delta_{ik}$ (p_0 — давление сверхтекучего гелия при $T=0$). Из этих требований однозначно следует вид тензора π_{ik} :

$$\pi_{ik} = n p_i \frac{\overline{\partial \varepsilon}}{\partial p_k} + \delta_{ik} \left(p_0 + n \frac{\overline{\partial \varepsilon}}{\partial \rho} \rho \right), \quad (18.10)$$

причем, согласно термодинамическому тождеству (8.26),

$$\frac{\partial p_0}{\partial r_i} = \rho \frac{\partial \mu_0}{\partial r_i} \quad (18.11)$$

(μ_0 — значение химического потенциала при $T=0$).

Подставим (18.10) в уравнение (18.9) с учетом (18.11), в результате получим

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left\{ \mu_0 + n \frac{\overline{\partial \varepsilon}}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right\} = 0. \quad (18.12)$$

Таким образом мы получили уравнение сверхтекучего движения. Сравнив (18.12) с (8.25), убеждаемся в том, что химический потенциал μ равен

$$\mu = \mu_0 + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_p; \quad (18.13)$$

второй член в этой формуле обязан вкладу возбуждений.

Получим теперь выражение для вектора потока энергии \mathbf{Q} . Для этого вычислим производную по времени от полной энергии системы и выразим все производные по времени с помощью уравнений движения, уравнения непрерывности и кинетического уравнения через координатные производные. Затем, сгруппировав все члены под знаком div , получим выражение для \mathbf{Q} . Полная энергия E складывается из кинетической энергии (8.9)

$$E_k = \rho \frac{v_s^2}{2} + v_s \overline{np}, \quad (18.14)$$

внутренней энергии газа возбуждений

$$E_b = \overline{n\varepsilon} \quad (18.15)$$

и нулевой энергии E_0 (при $T=0$), определяемой тождеством

$$dE_0 = \mu_0 d\rho. \quad (18.16)$$

Производная по времени от кинетической энергии, согласно (18.4), (18.8) и (18.12), равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_k = & -(\rho v_{si} + \overline{np}_i) \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\mu_0 + \frac{\overline{\partial \varepsilon n}}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) - \\ & - \frac{v_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho v_{si} + \overline{np}_i) - v_{si} \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np}_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right) - \\ & - v_{si} \left(n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} + \overline{np}_k \frac{\partial v_{sk}}{\partial r_i} \right). \end{aligned} \quad (18.17)$$

Для нахождения производной от внутренней энергии умножаем левую и правые части кинетического уравнения на ε и интегрируем по всему пространству. Интеграл от правой части при этом равен нулю, поскольку при соударениях энергия сохраняется, и мы получаем

$$\varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial n}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \varepsilon \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} = 0, \quad (18.18)$$

или, после несложного преобразования,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n\varepsilon + \frac{\partial}{\partial r_k} n\varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right) - v_{sk} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k} - \\ - n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} p_i \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{np}_k + \rho v_{sk}) = 0. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Используя уравнения (18.16), (18.17) и (18.19), находим производную по времени от полной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ (\overline{np}_k + \rho v_{sk}) \left(\mu_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + n H \frac{\partial}{\partial p_k} H \right\}. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Таким образом, вектор потока энергии \mathbf{Q} равен

$$\mathbf{Q} = (\overline{np} + \rho v_s) \left(\mu_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) + n H \frac{\partial}{\partial p} H. \quad (18.21)$$

Кинетические коэффициенты

Функция распределения для возбуждений в движущемся равномерно и находящемся в равновесии сверхтекучем гелии равна

$$n_0 = \left[\exp \left(\frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (18.22)$$

Равновесная функция n_0 удовлетворяет кинетическому уравнению, обращая интеграл столкновений в нуль. В случае, когда равновесие нарушено, функция распределения n отличается от равновесного значения и должна быть найдена решением кинетического уравнения. Эта в общем случае неразрешимая задача упрощается для слабо неравновесных состояний, в которых отклонение от состояния равновесия мало. Отклонение от состояния равновесия в этом случае полностью определяется заданием первых производных от скоростей v_n и v_s и термодинамических переменных по координатам, величины которых предполагаются малыми. Другими словами, скорости v_n и v_s и термодинамические переменные медленно меняются вдоль системы, так что в кинетическом уравнении всеми старшими производными и степенями первых производных можно пренебречь.

Рассмотрим слабо неравновесное состояние системы. Тогда можно считать, что в каждом данном небольшом участке системы имеется приближенно локальное равновесие, т. е. что функция распределения может быть представлена в виде

$$n = n_0 + n_1, \quad (18.23)$$

где $n_1 \ll n_0$ и n_0 есть равновесная функция (18.22), зависящая от локальных значений скоростей и термодинамических переменных. При подстановке в кинетические уравнения (18.1) функции распределения (18.22) в левой части достаточно ограничиться дифференцированием функции n_0 , так как малая добавка n_1 сама содержит первые производные, и ее дифференцирование приводит к появлению старших производных, которыми можно пренебречь. Правая же часть — интеграл столкновений — при подстановке функций распределения вида n_0 обращается в нуль, и в ней в первом приближении можно ограничиться

линейными по n_1 членами. Таким образом, задача линеаризуется — мы получаем линейное интегральное уравнение, левая часть которого задана и выражается через первые производные от скоростей и термодинамических переменных. Подставим функцию распределения n_0 в левую часть кинетического уравнения. При этом, наряду с малостью пространственных производных, будем считать малой разность скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Последнее обстоятельство несколько не ограничивает задачу, поскольку разность скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ должна быть мала по сравнению со скоростью звука (первого и второго). Как известно, сверхтекучесть нарушается значительно раньше, чем этот предел может быть достигнут. Вычислим сначала производную по времени; согласно (18.1) имеем*)

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = n' \left\{ \frac{1}{kT} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \rho \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) - \frac{\varepsilon}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} \right\}. \quad (18.24)$$

Выбираем в качестве независимых переменных плотность ρ и энтропию S . Выразим производные по времени через пространственные производные; в линейном приближении, согласно (8.22) — (8.25), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{j}, & \frac{\partial S}{\partial t} &= -S \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \\ \rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) &= -S \nabla T. \end{aligned} \quad (18.25)$$

С учетом (18.25) преобразуем (18.24) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} &= \frac{n'}{kT} \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) + \right. \\ &+ \operatorname{div} \mathbf{v}_n \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] + \left. \frac{ST}{\rho_n} \rho \frac{\nabla T}{T} \right\}. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Далее вычисляем скобку Пуассона в левой части кинетического уравнения:

$$\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \rho} - \frac{\partial n}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{n'}{kT} \left\{ -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla (\rho \mathbf{v}_n) - \frac{\nabla T}{T} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right\}. \quad (18.27)$$

*) Штрихом обозначаем дифференцирование функции по аргументу $n' = -n(1+n)$.

Собрав все члены (18.26) и (18.27), получаем кинетическое уравнение в интересующем нас приближении:

$$\begin{aligned} \frac{n'}{kT} \left\{ \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. + \frac{\nabla T}{T} \left(\rho \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla (\rho \mathbf{v}_n) \right\} = I(n_1). \quad (18.28) \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно выделить из последнего члена в фигурной скобке $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla (\rho \mathbf{v}_n)$ члены вида $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$, а остающуюся часть симметризовать, после чего окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{n'}{kT} \left\{ \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. + \frac{\nabla T}{T} \left(\rho \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} p_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{in} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right) \right\} = I(n_1). \quad (18.29) \end{aligned}$$

Анализ уравнения (18.29) показывает, что в полном соответствии с § 9 члены, содержащие $\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)$ и $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$, определяют вторую вязкость в сверхтекучей жидкости (всего три коэффициента); член с градиентом температуры ∇T — теплопроводность и, наконец, последний член — первую вязкость. Вычисление соответствующих кинетических коэффициентов мы и произведем ниже, используя общее уравнение (18.29).

19. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ [16]

При наличии градиента температуры в сверхтекучем гелии возникает макроскопическое движение жидкости, характер которого определяется уравнениями движения. Макроскопическое движение нормальной части жидкости сопровождается обратимым переносом тепла. Однако,

кроме макроскопического потока тепла, согласно проведенному в § 9 анализу, при этом имеет место некоторый необратимый поток тепла

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (19.1)$$

величина которого существенно определяется коэффициентом теплопроводности κ . Для вычисления коэффициента теплопроводности необходимо решить кинетическое уравнение, которое при наличии градиента температуры, согласно (18.29), имеет следующий вид:

$$\frac{n'}{kT} \nabla T \left(\mathbf{p} \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) = I(n_1). \quad (19.2)$$

Рассматриваемое явление теплопроводности имеет много общего с теплопроводностью классической жидкости. Однако имеются и специфические особенности, связанные с тем, что в данном случае эффект связан с возбуждениями и их необычным характером энергетического спектра. Так, для чисто фононного газа левая часть уравнения (19.2) тождественно равна нулю и, следовательно, соответствующий коэффициент теплопроводности должен был бы быть равным нулю.

Дальнейшие вычисления произведем, разбив поток (19.1) на две части, обязанные соответственно ротонам и фононам. Коэффициент теплопроводности κ при этом складывается также из двух частей — ротонной (κ_r) и фононной (κ_{ph}):

$$\kappa = \kappa_r + \kappa_{ph}.$$

Ротонная часть коэффициента теплопроводности

Ротонная часть коэффициента теплопроводности κ_r определяется в основном процессами рассеяния ротонов ротонами. Взаимодействие ротонов с фононами оказывается несущественным в области относительно более высоких температур (выше $0,9^\circ \text{K}$). При более же низких температурах это взаимодействие начинает играть существенную роль. Однако поскольку основной вклад в теплопроводность в этой области температур вносят, как мы видим, фононы, то соответствующим ротонным эффектом можно просто пренебречь. Вычисление κ_r мы производим лишь

по порядку величины и выясняем при этом температурную зависимость этого коэффициента. Более точные вычисления не имеют смысла, поскольку характер взаимодействия ротонов друг с другом неизвестен (см. § 7). В таком случае можно также упростить задачу, заменив интеграл столкновений на величину

$$I(n) \rightarrow -\frac{n - n_0}{t_r}, \quad (19.3)$$

где t_r есть некоторое характерное время, которое мы в дальнейшем отождествим со временем соударения ротонов, определенным формулой (7.40). Подставив выражение (19.3) в правую часть (19.2) и решив уравнение относительно $n - n_0$, получим

$$n - n_0 = -\frac{n'}{kT^2} \nabla T \left(p \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) t_r. \quad (19.4)$$

Далее, вычисляем поток энергии:

$$q = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \varepsilon (n - n_0) d\tau_p. \quad (19.5)$$

Сравнив (19.5) с (19.1), находим выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\kappa_r = t_r \frac{1}{3kT^2} \int n' \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \left(p \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) d\tau_p. \quad (19.6)$$

Вычисление интеграла (19.6) с функцией распределения для ротонов вида (1.14) дает следующий результат:

$$\kappa_r = \frac{\Delta^2 t_r N_2}{3\mu T} \left(1 - \frac{3SS_r T^2 \mu}{\rho n N_r} \right). \quad (19.7)$$

Второй член в скобке в формуле (19.7) практически всегда мал, и им можно пренебречь. Подставив в (19.7) выражение (7.40) для t_r , окончательно получаем

$$\kappa_r = \frac{\Delta^2 \hbar^4}{12\rho_0 \mu^2 |U_0|^2} \frac{1}{T}. \quad (19.8)$$

Таким образом, ротонная часть коэффициента теплопроводности медленно растет с понижением температуры, как обратная степень T .

Фононная часть коэффициента теплопроводности

При рассмотрении фононного вклада в теплопроводность самым существенным оказывается процесс рассеяния фононов ротонами.

При решении кинетического уравнения большие упрощения возникают благодаря тому, что установление равновесия по энергиям в фононном газе происходит быстрее указанных выше процессов. Установление энергетического равновесия осуществляется при рассеянии фононов друг другом на малые углы; соответствующие времена были вычислены в § 7. Такой процесс не дает вклада в явления переноса (теплопроводность, вязкость), однако обеспечивает установление энергетического равновесия для фононов с заданным направлением импульса. Это позволяет для описания фононов пользоваться равновесными функциями, характеризуя фононы, движущиеся в каждом данном направлении, своей температурой.

Второе обстоятельство, которое следует иметь в виду, связано с процессом установления равновесия по числу фононов, который осуществляется пятифононным механизмом. Пятифононный процесс (2 фонона \rightleftharpoons 3 фонона), как мы видели, также происходит без изменения направления сталкивающихся фононов. При $T > 0,9^\circ \text{K}$ времена, характеризующие этот процесс, сравнимы с временами, характеризующими рассеяние фонона ротонном. При $T < 0,9^\circ \text{K}$, благодаря быстрому выходу из игры ротонов, процесс установления равновесия по числу фононов оказывается более быстрым, чем рассеяние фононов. В связи с этим вторым обстоятельством функция распределения для фононов заданного направления содержит некоторый химический потенциал (функцию направления; ниже $0,9^\circ \text{K}$ эту функцию можно считать равной нулю). Таким образом, функция распределения фононов, движущихся в заданном направлении, может быть представлена в виде

$$n = \left[\exp \left(\alpha' + \frac{pc}{kT'} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (19.9)$$

где α' — некоторая функция направления — аналог химического потенциала, а T' — температура. Отклонение

функции распределения от равновесного значения, согласно (19.9), равно

$$n - n_0 = -n_0(n_0 + 1) \left\{ \alpha' - \frac{pc}{kT} \frac{T' - T}{T} \right\} \quad (19.10)$$

(T — равновесная температура фононного газа). Выберем ось z по направлению ∇T ; тогда левая часть кинетического уравнения (19.2) содержит в виде множителя $\cos \vartheta$, где ϑ — угол между импульсом фонона и осью. Поскольку уравнение (19.9) линейное, угловая зависимость функций α' и $\frac{T' - T}{T}$ очевидна:

$$\alpha' = \alpha \cos \vartheta, \quad \frac{T' - T}{T} = \beta \cos \vartheta. \quad (19.11)$$

Интеграл столкновений в правой части уравнения (19.9) складывается из четырех частей, обязанных соответственно рассеянию: I_{rph} — фононов ротонами, I_{pp} — фононов фононами, I_{IV} — фононов фононами на малые углы и I_V — двух фононов, сопровождаемому рождением третьего (пятифононный процесс). Проинтегрируем уравнение (19.9) слева и справа по всем фононам и по всем энергиям фононов ($\int I p^2 dp$ и $\int I \epsilon p^2 dp$). При этом, согласно сказанному выше, интегралы

$$\int I_{IV} p^2 dp, \quad \int I_{IV} \epsilon p^2 dp, \quad \int I_V \epsilon p^2 dp$$

равны нулю.

Что касается интеграла I_{pp} , то, как можно показать, он тождественно равен нулю. Это очевидно из физических соображений, поскольку при соударениях фононов импульс сохраняется, и поэтому не может возникнуть поток.

Далее, согласно (7.44), имеем

$$\frac{1}{kT} \int I_V d\tau_p = \alpha \Gamma_{ph}. \quad (19.12)$$

Вычисление интеграла I_{rph} производится несложным образом с использованием формулы (7.31) для дифференциаль-

ного эффективного сечения рассеяния фонона ротонном:

$$I_{rph} = \cos \vartheta N_r c \int d\sigma(p, \psi) (1 - \cos \psi) \times \\ \times \left(\alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) n_0 (n_0 + 1).$$

Отсюда после интегрирования по телесному углу $d\sigma$ получаем

$$I_{rph} = n_0 (n_0 + 1) \left(\alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) \cos \vartheta \frac{1}{6! \theta} \left(\frac{pc}{kT} \right)^4, \quad (19.13)$$

где θ — величина, имеющая размерность времени и характеризующая рассеяние фонона ротонном:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{6! N_2}{4\pi c} \left[\frac{p_0 (kT/c)^2}{\hbar^2 \rho} \right]^2 \left\{ \frac{4}{45} + \frac{1}{25} \left(\frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2}{9} \frac{p_0}{\mu c} A + A^2 \right\}. \quad (19.14)$$

Воспользуемся формулами (19.10) — (19.13) после усреднения по всем фононам и по всем энергиям фононов (при заданном направлении ϑ); получим из кинетического уравнения два уравнения, определяющих величину α и β :

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{4\pi^4}{15} \left(c - \frac{ST}{\rho n c} \right) = \frac{7}{\theta} (\alpha - 8\beta), \\ \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{36}{5} \left(c - \frac{ST}{\rho n c} \right) = \frac{1}{\theta} (\alpha - 7\beta) + \frac{1}{\theta_{ph}} \alpha; \quad (19.15)$$

здесь θ_{ph} есть время, характеризующее пятифононный процесс:

$$\frac{1}{\theta_{ph}} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi (kT/c)^3} kT \Gamma_{ph}. \quad (19.16)$$

Зная величины α и β , а тем самым, согласно (19.10), и неравновесную часть функции распределения, мы без труда можем вычислить поток энергии и, следовательно, величину фононной части коэффициента теплопроводности.

Заметим, однако, что в полученном виде решение кинетического уравнения (19.10) не удовлетворяет условию $\int \mathbf{p} (n - n_0) d\tau = 0$. В действительности поэтому при наличии градиента температуры в гелии возникает некоторое

макроскопическое движение жидкости с относительной скоростью $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, такой, что $\int \mathbf{p}(n - n_0) d\tau + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = 0$.

Поэтому равновесные функции распределения фононов и ротонов будут зависеть не просто от энергии ε , а от комбинации $\varepsilon - (\mathbf{p}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$. Разлагая равновесные функции в ряд по $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, получим добавки $-\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} (\mathbf{p}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$, где $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ находится из предыдущего условия. Таким образом, полная добавка к функции распределения фононов равна

$$\delta_n = (n - n_0) + \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\rho_n} \mathbf{p} \int (n - n_0) \mathbf{p}' d\tau',$$

где разность $n - n_0$ определяется формулой (19.10).

Аналогичным образом для функции распределения ротонов имеем добавку

$$\delta N = \frac{\partial N}{\partial E} \frac{1}{\rho_n} \mathbf{p} \int (n - n_0) \mathbf{p}' d\tau'.$$

Это обстоятельство приводит к следующему выражению для потока энергии, обязанного фононам (и ротонам):

$$\begin{aligned} Q &= \int \delta n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau + \int \delta N \cdot E \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} d\tau = \\ &= \left(1 - \frac{ST}{\rho_n c^2}\right) \int (n - n_0) \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда после несложных вычислений получаем окончательный результат:

$$\kappa_{ph} \approx 2 \cdot \theta N_{phk} \left(1 - \frac{ST}{\rho_n c^2}\right)^2 \left(\frac{10 + 8\theta/\theta_{ph}}{1 + 8\theta/\theta_{ph}}\right). \quad (19.17)$$

Время θ , благодаря экспоненциальной зависимости от температуры числа ротонов N_r , быстро возрастает с убыванием температуры, таким образом, κ_{ph} в основном изменяется с температурой по закону $e^{\Delta/kT}$, причем ниже 1,4° К фононная часть коэффициента теплопроводности κ_{ph} уже заметно превосходит ротонную часть (κ_r). При температурах ниже 0,9° К, как указывалось, $\theta \gg \theta_{ph}$, и последняя скобка в (19.17) может быть заменена на единицу.

20. ПЕРВАЯ ВЯЗКОСТЬ [24]

Задача о вычислении коэффициента первой вязкости очень сходна с рассмотренной выше задачей о теплопроводности. Рассмотрим сверхтекучий гелий, в котором нормальная скорость \mathbf{v}_n является функцией координат.

Кинетическое уравнение для задачи о вязкости, согласно (18.29), имеет следующий вид:

$$-\frac{n'}{kT} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} p_k - \frac{1}{3} \delta_{lk} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial v_{nl}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_l} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) = I(n). \quad (20.1)$$

Для нахождения коэффициента вязкости необходимо вычислить возникающий поток импульса, который мы разобьем на две части — ротонную и фононную.

Для вычисления ротонной части коэффициента вязкости η_r заменяем $I(n)$ на (сравни § 19)

$$-\frac{n - n_0}{t_r}. \quad (20.2)$$

Стоящее здесь время t_r , вообще говоря, не совпадает со временем t_r , использованным в § 19 для вычисления ротонной части коэффициента теплопроводности. Лишь при условии, что вероятность рассеяния ротона ротонном имеет острый максимум при рассеянии на малые углы, оба времени совпали бы. Поскольку, однако, нас будет интересовать лишь температурная зависимость η_r , приближение (20.2) является достаточным. Подставив (20.2) в (20.1) вместо $I(n)$, найдем затем $n - n_0$ и вычислим тензор потока импульса; получаем:

$$\pi_{lm} = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} p_m (n - n_0) d\tau_p = \\ = -\frac{t_r}{15kT} \int n' \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 p^2 d\tau_p \left(\frac{\partial v_{nl}}{\partial r_m} + \frac{\partial v_{nm}}{\partial r_l} - \frac{2}{3} \delta_{lm} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right). \quad (20.3)$$

Выполнив необходимое интегрирование в (20.3), находим ротонную часть коэффициента вязкости:

$$\eta_r = \frac{p_0^2 t_r N_r}{15\mu} = \frac{\hbar^4 p_0}{60\mu^2 |U_0|^2}. \quad (20.4)$$

Выражение (20.4) содержит только не зависящие от температуры величины, поэтому η_r является константой.

Вычисление фоновой части коэффициента вязкости η_{ph} производится совершенно аналогично вычислению фоновой части коэффициента теплопроводности. Отличие состоит лишь в двух пунктах. Во-первых, благодаря другой симметрии задачи величины α' и $\frac{T' - T}{T}$ (формула (19.10)) ищем в виде

$$\alpha' = \alpha P_2(\cos \vartheta), \quad \frac{T' - T}{T} = \beta P_2(\cos \vartheta). \quad (20.5)$$

Во-вторых, рассеяние фононов фононами на большие углы дает вклад при температурах ниже $0,9^\circ \text{K}$ (интеграл I_{pp} не равен нулю).

Не останавливаясь на подробных вычислениях, приведем окончательный результат

$$\eta_{ph} \approx 0,4 N_{ph} k T \bar{\theta} \begin{cases} \frac{10 + 8\bar{\theta}/\theta_{ph}}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_{ph}} \\ 1 \\ \frac{1}{1 + \bar{\theta}/56\tau_{ph}} \end{cases}. \quad (20.6)$$

Здесь время θ_{ph} определяется формулой (19.16), время $\bar{\theta}$ несколько отличается от θ (формула (19.14)):

$$\frac{1}{\bar{\theta}} = \frac{N_r 6!}{4\pi r} \left[\frac{p_0 (k\pi c)^2}{\hbar^2 \rho} \right]^2 \times \left\{ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left(\frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{4A}{75} \left(\frac{p_0}{\mu c} \right) + A^2 \right\} \quad (20.7)$$

и наконец, время τ_{ph} , характеризующее четырехфононный процесс, равно

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{3 \cdot 13! (u + 2)^4}{5 \cdot 2^{19} (2\pi)^3 \hbar^7 \rho^2 c} \left(\frac{kT}{c} \right)^9, \quad u = \frac{2\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho}. \quad (20.8)$$

Численный анализ формулы (20.6) дает следующий результат: фоновая часть коэффициента вязкости возрастает с убыванием температуры по экспоненциальному закону $e^{\Delta/kT}$; при температурах ниже $0,7^\circ \text{K}$, когда существенным является только эффект рассеяния фононов фононами, этот закон заменяется законом T^{-5} . При температурах ниже $1,4^\circ \text{K}$ постоянный вклад ротонной вязкости пренебрежимо мал по сравнению с фоновым.

21. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВТОРОЙ ВЯЗКОСТИ ГЕЛИЯ II [11]

Уравнения движения гелия II с учетом второй вязкости, согласно (9.14) и (9.15), записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p + \mathbf{v}_s \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s) \operatorname{div} \mathbf{v}_n + (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_n \nabla) (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) = \nabla \{ \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}, \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) = \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}. \quad (21.2)$$

Необычный характер гидродинамики гелия II приводит к появлению четырех вторых коэффициентов вязкости. Согласно принципу Онзагера коэффициенты ζ_1 и ζ_4 равны. Выясним зависимость коэффициентов второй вязкости от температуры и других термодинамических величин. При этом мы исходим из того, что вторая вязкость в гелии II обусловлена процессами, связанными с изменением общего числа фононов N_{ph} и ротонов N_r .

Пусть N_r и N_{ph} есть числа соответственно ротонов и фононов в единице объема гелия II, а μ_r и μ_{ph} — их химические потенциалы. В состоянии равновесия, когда μ_r и μ_{ph} равны нулю, число ротонов и фононов являются функциями плотности ρ и энтропии S гелия и равны соответственно N_{r0} и N_{ph0} . В выведенной из состояния равновесия системе числа N_r и N_{ph} будут изменяться со временем, стремясь принять равновесные значения N_{r0} и N_{ph0} . Рассмотрим малые отклонения от состояния равновесия, при которых плотность и энтропия мало отличаются от постоянных равновесных значений. Без ограничения общности будем предполагать малыми также скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s . Уравнения, характеризующие приближение системы к состоянию равновесия, можно написать, разлагая скорости изменения числа частиц \dot{N}_r и \dot{N}_{ph} по степеням химических потенциалов. Если ограничиться линейными по μ_r и μ_{ph} членами, то указанные уравнения принимают вид

$$\dot{N}_r + \operatorname{div} N_r \mathbf{v}_n = -\gamma_{rr} \mu_r + \gamma_{rph} \mu_{ph}, \quad (21.3)$$

$$\dot{N}_{ph} + \operatorname{div} N_{ph} \mathbf{v}_n = \gamma_{phr} \mu_r - \gamma_{pp} \mu_{ph}, \quad (21.4)$$

где γ_{rr} , γ_{rph} , γ_{phr} и γ_{pp} — кинетические коэффициенты, симметричные по индексам r и ph . Члены вида Nv_n в уравнениях (21.3) и (21.4) учитывают то обстоятельство, что фононы и ротонны участвуют в движении нормальной части гелия II со скоростью v_n . Пренебрегая в уравнениях (21.3) и (21.4) квадратичными эффектами, получаем

$$\dot{N}_r + N_r \operatorname{div} v_n = -\gamma_{rr}\mu_r + \gamma_{rph}\mu_{ph}, \quad (21.5)$$

$$\dot{N}_{ph} + N_{ph} \operatorname{div} v_n = \gamma_{rph}\mu_r - \gamma_{pp}\mu_{ph}. \quad (21.6)$$

Изменение термодинамических величин ρ , S со временем определяется уравнениями непрерывности для плотности и энтропии, которые в рассматриваемом случае, подобно уравнениям (21.5) и (21.6) после линеаризации приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \operatorname{div} j &= 0, \\ \dot{S} + S \operatorname{div} v_n &= 0. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Числа ротоннов N_r и фононов N_{ph} зависят от трех переменных: ρ , S , μ_r или μ_{ph} . Для достаточно медленных процессов отклонения от состояния равновесия указанные числа ротоннов и фононов успевают следовать за изменением термодинамических величин. В этом случае производные \dot{N}_r и \dot{N}_{ph} выражаются через производные $\dot{\rho}$ и \dot{S} . Учитывая (21.7), перепишем уравнения (21.5) и (21.6) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_r}{\partial \rho} \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \left(N_r - \frac{\partial N_r}{\partial S} S - \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} v_n = \\ = -\gamma_{rr}\mu_r + \gamma_{rph}\mu_{ph}, \end{aligned} \quad (21.8)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_{ph}}{\partial \rho} \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \left(N_{ph} - \frac{\partial N_{ph}}{\partial S} S - \frac{\partial N_{ph}}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} v_n = \\ = \gamma_{rph}\mu_r - \gamma_{pp}\mu_{ph}. \end{aligned} \quad (21.9)$$

Полученные уравнения (21.9) и (21.10) определяют величины химических потенциалов μ_r и μ_{ph} через $\operatorname{div} (j - \rho v_n)$ и $\operatorname{div} v_n$ для случая медленных неравновесных процессов в гелии.

Встречающиеся в уравнениях кинетические коэффициенты просто выражаются через коэффициенты Γ , вычисленные в § 7 для конкретных процессов. Сравнивая (21.5) и (21.6) с (7.40) и (7.42) и учитывая определение Γ , находим

$$\gamma_{rr} = \Gamma_r + \Gamma_{rph}, \quad \gamma_{rph} = \gamma_{phr} = \Gamma_{rph}, \quad \gamma_{pp} = \Gamma_{ph} + \Gamma_{rph}. \quad (21.10)$$

Коэффициент Γ_r мал по сравнению с Γ_{rph} и Γ_{ph} и им можно пренебречь. Соотношения (21.8) и (21.9) тогда дают

$$\begin{aligned} \mu_r = & \frac{1}{\Gamma_{ph}} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \right. \\ & \left. - \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\} + \frac{1}{\Gamma_{rph}} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \left(N_r - \frac{\partial N_r}{\partial S} S - \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\}, \end{aligned} \quad (21.11)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ph} = & \frac{1}{\Gamma_{ph}} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \right. \\ & \left. - \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\}. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Дополнительные члены в уравнениях движения (21.1) и (21.2) обусловлены процессами, связанными с изменением общего числа ротонов N_r и фононов N_{ph} . Таким образом, указанные члены обязаны зависимости давления p и потенциала μ от химических потенциалов μ_{ph} и μ_r и равны соответственно

$$\nabla \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_r} \mu_r + \frac{\partial p}{\partial \mu_{ph}} \mu_{ph} \right), \quad \nabla \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} \mu_r + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_{ph}} \mu_{ph} \right).$$

Приравняв правые части уравнения (21.1) и (21.2) указанным выражениям и подставив выражения (21.11) и (21.12) для μ_r и μ_{ph} получаем два равенства. Поскольку полученные равенства должны выполняться при любых

значениях $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_n$ и $\operatorname{div} (\boldsymbol{j} - \rho \boldsymbol{v}_n)$, то из них следует:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{\Gamma_{ph}} \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_r} + \frac{\partial p}{\partial \mu_{ph}} \right) \frac{\partial N}{\partial \rho} - \frac{1}{\Gamma_{rph}} \frac{\partial p}{\partial \mu_r} \frac{\partial N_r}{\partial \rho}, \quad (21.13)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & -\frac{1}{\Gamma_{ph}} \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_r} + \frac{\partial p}{\partial \mu_{ph}} \right) \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) + \\ & + \frac{1}{\Gamma_{rph}} \frac{\partial p}{\partial \mu_r} \left(N_r - \frac{\partial N_r}{\partial S} S - \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \rho \right), \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$\zeta_3 = -\frac{1}{\Gamma_{ph}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_{ph}} \right) \frac{\partial N}{\partial \rho} - \frac{1}{\Gamma_{rph}} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} \frac{\partial N_r}{\partial \rho}, \quad (21.15)$$

$$\begin{aligned} \zeta_4 = & -\frac{1}{\Gamma_{ph}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_{ph}} \right) \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) + \\ & + \frac{1}{\Gamma_{rph}} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} \left(N_r - \frac{\partial N_r}{\partial S} S - \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \rho \right). \end{aligned} \quad (21.16)$$

Определим с помощью следующего тождества функцию E_0 :

$$dE_0 = T dS + \mu dp - N_r d\mu_r - N_{ph} d\mu_{ph}. \quad (21.17)$$

Функция E_0 является аналогом энергии и при постоянных химических потенциалах обращается в энергию единицы объема жидкости. Давление p выражается через функцию E_0 с помощью соотношения

$$p = -E_0 + ST + \mu_r. \quad (21.18)$$

Из (21.17) и (21.18) следуют выражения для производных $\frac{\partial p}{\partial \mu_r}$ и $\frac{\partial p}{\partial \mu_{ph}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mu_r} &= N_r - S \frac{\partial N_r}{\partial S} - \rho \frac{\partial N_r}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial p}{\partial \mu_{ph}} &= N_{ph} - S \frac{\partial N_{ph}}{\partial S} - \rho \frac{\partial N_{ph}}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (21.19)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} = -\frac{\partial N_r}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mu_{ph}} = -\frac{\partial N_{ph}}{\partial \rho}. \quad (21.20)$$

Воспользовавшись соотношениями (21.22) и (21.23), перепишем выражения для коэффициентов второй вязкости

гелия II в следующем виде:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{\Gamma_{ph}} \frac{\partial N}{\partial \rho} \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) - \frac{1}{\Gamma_{rph}} \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \left(N_r - \frac{\partial N_r}{\partial S} S - \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \rho \right), \quad (21.21)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{\Gamma_{ph}} \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right)^2 + \frac{1}{\Gamma_{rph}} \left(N_r - \frac{\partial N_r}{\partial S} S - \frac{\partial N_r}{\partial \rho} \rho \right)^2, \quad (21.22)$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{\Gamma_{ph}} \left(\frac{\partial N}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\Gamma_{rph}} \left(\frac{\partial N_r}{\partial \rho} \right)^2, \quad (21.23)$$

$$\zeta_4 = \zeta_1. \quad (21.24)$$

Коэффициенты ζ_1 и ζ_4 оказались равными, как и следовало ожидать из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Производные, входящие в выражения для коэффициентов второй вязкости, вычисляются с помощью известных выражений для чисел ротоннов и фононов и энтропии гелия II.

Поглощение первого звука в гелии II определяется величиной коэффициента ζ_2 (см. § 12). Экспериментальные значения коэффициента поглощения первого звука в гелии II для области температур $1,57-2,0^\circ \text{K}$ позволяют с удовлетворительной степенью точности вычислить неизвестные коэффициенты a и b в формулах для Γ_{ph} и Γ_{rph} . Таким образом, находим

$$\Gamma_{ph} \approx 1 \cdot 10^{43} T^{11}, \quad \Gamma_{rph} \approx 4 \cdot 10^{50} e^{-2\Delta/T}. \quad (21.25)$$

Полученное значение для Γ_{rph} , естественно, оказалось меньше верхнего предела, даваемого формулой (7.47).

22. ЗВУК В ЖИДКОМ ГЕЛИИ II ВБЛИЗИ АБСОЛЮТНОГО НУЛЯ [25]

Рассмотрим явление распространения звука в жидком гелии II вблизи абсолютного нуля.

Вблизи абсолютного нуля длина свободного пробега возбуждений быстро возрастает и может превосходить

длину волны звука. В этой области температур существенную роль играют только фононы, а вкладом ротоннов можно пренебречь. Очевидно, что в таких условиях уравнения гидродинамики для газа возбуждений уже неприемлемы. Свойства такого газа описываются кинетическим уравнением, в котором столкновительный член пренебрежимо мал. Таким образом, функция распределения фононов $n(p, r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial r} = 0; \quad (22.1)$$

здесь $H = \varepsilon(p) + p\mathbf{v}_s$, ε — энергия фонона, зависящая от плотности, с учетом дисперсии равная

$$\varepsilon(p) = cp(1 - \gamma p^2). \quad (22.2)$$

Величины ρ и \mathbf{v}_s , играющие роль внешних условий для фононов, определяются двумя уравнениями (см. (18.13), (18.8)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \mathbf{v}_s + \int p n d\tau_p \right) = 0, \quad (22.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu_0 + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} n d\tau_p \right) = 0, \quad (22.4)$$

где μ_0 — значение химического потенциала при абсолютном нуле, а p — импульс возбуждения в системе отсчета, в которой $\mathbf{v}_s = 0$. Положим $n = n_0 + n'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, n_0 и ρ_0 — равновесные значения, а n' , ρ' и \mathbf{v}_s — малые величины, изменяющиеся по закону $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}r)$. Линеаризовав уравнение (22.1), (22.3) и (22.4), получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} (\omega - k\mathbf{v}) n' + \mathbf{v}k \frac{\partial n_0}{\partial E} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho' + p\mathbf{v}_s \right) &= 0, \\ \omega \rho' - k\mathbf{v}_s \rho_0 - k \int p n' d\tau &= 0, \\ -\omega \mathbf{v}_s + k \left(\frac{c^2}{\rho} + \int n_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} d\tau \right) \rho' + k \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} n' d\tau &= 0. \end{aligned} \right\} (22.5)$$

Здесь $v = \partial \epsilon / \partial p$ и использован тот факт, что, согласно тождеству (8.26), $d\mu_0 = dp_0/\rho = c^2 dp/\rho^*$.

Обозначим угол между векторами k и p через θ и разрешим первое из уравнений (22.5) относительно n' :

$$n' = -\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} p \frac{v \cos \theta}{\omega/k - v \cos \theta} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \rho' + v_s \cos \theta \right). \quad (22.6)$$

Подставив n' в два других уравнения (22.5), после интегрирования по θ получим

$$\left. \begin{aligned} & \left[-\frac{\omega}{k} - \frac{\partial c}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left(\frac{\omega}{kv} \right)^2 \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] v_s + \\ & + \left[\frac{c^2}{\rho} - \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)^2 \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left(\frac{\omega}{kv} \right) \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] \rho' = 0, \\ & \left[\rho - \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left(\frac{\omega}{kv} \right)^3 \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] v_s - \\ & - \left[\frac{\omega}{k} + \frac{\partial c}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left(\frac{\omega}{kv} \right)^2 \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] \rho' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

При этом мы сохраняем лишь большие логарифмические члены; логарифм окажется большим, как мы увидим, поскольку $\omega \approx kc$, а $v \approx c$.

Условие совместности уравнений (22.7) дает нам дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{\omega}{ck} \right)^2 - 1 = - \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3 \rho} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \left(\frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} + 1 \right)^2. \quad (22.8)$$

*) Вообще говоря, подобно тому как это имеет место в теории ферми-жидкости, существует зависимость функционального вида энергии возбуждения от плотности возбуждений: $\delta \epsilon = \int f \delta n \, d\tau$. Однако в данном случае этот эффект мал. Его вклад в интересующие нас результаты будет порядка $f N_{ph}/kT$. Простая же оценка дает $f N_{ph}/kT \sim (\tau kT/\hbar)^{-1/2} \ll 1$, поскольку $\omega \tau \gg 1$, а $kT/\hbar \gg \omega$.

Отсюда для низких температур после несложного интегрирования получим

$$\delta c = \frac{\omega}{k} - c = \frac{\pi^2}{30\hbar^3\rho} \left(\frac{kT}{c}\right)^4 \left(\frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} + 1\right)^2 \ln \left[\frac{2}{27\gamma} \left(\frac{c}{kT}\right)^2 \right]. \quad (22.9)$$

Таким образом, скорость звука при низких температурах больше, чем при абсолютном нуле, на величину δc , определяемую формулой (22.9).

23. ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ И ГЕЛИЕМ II [26]

Теплопередача между твердым телом и жидким гелием отличается рядом особенностей, обязанных большому теплоспротивлению границы между указанными средами. Наличие большого теплоспротивления приводит к возникновению на такой границе скачка температуры при наличии потока тепла от одной среды к другой. Величина этого скачка пропорциональна величине потока тепла и изменяется по закону T^{-3} с температурой.

Затрудненность теплообмена между твердым телом и гелием II можно качественно понять, если учесть значительное различие в скоростях звука в твердом теле и жидком гелии II (скорость звука в гелии II на порядок меньше скорости звука в твердых телах). Благодаря такому различию импульсы фононов в твердом теле и жидком гелии той же температуры будут заметно отличаться. Последнее обстоятельство не позволяет фононам из твердого тела переходить в жидкий гелий (и обратно), так как при произвольных углах падения фонона невозможно удовлетворить одновременно законам сохранения импульса и энергии*).

Рассмотрим границу твердого тела и жидкого гелия, через единицу площади которой протекает поток Q , и найдем связь между величиной этого потока и скачком температуры на границе δT . Мы будем считать, что гелий

*) По тем же причинам еще более затруднительным оказывается процесс превращения ротоннов в фононы твердого тела.

находится в равновесном состоянии с температурой T , твердое тело — с температурой $T + \delta T$, и вычислим поток тепла от твердого тела к гелию.

Выберем систему координат так, чтобы ось z была нормальна к границе раздела, причем область $z > 0$ заполнена жидким гелием. Рассмотрим отражение плоской звуковой волны, падающей из жидкости. Поле скоростей в жидкости можно задать с помощью скалярного потенциала φ так, что

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi. \quad (23.1)$$

В твердом теле вектор \mathbf{u} (\mathbf{u} — вектор смещения) можно представить в виде суммы градиента некоторого скаляра Φ и ротора некоторого вектора ψ :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \psi. \quad (23.2)$$

Пусть волновой вектор \mathbf{k} падающей волны лежит в плоскости xz . Выберем потенциал ψ таким образом, чтобы $\psi_x = \psi_z = 0$, и обозначим $\psi_y = \psi$. Пусть, далее, угол падения звука θ , частота ω . Имеем тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_0 e^{ik(x \sin \theta - z \cos \theta) - i\omega t} + A e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta) - i\omega t}, \\ \Phi &= A_l e^{ik_l(x \sin \theta_l - z \cos \theta_l) - i\omega t}, \\ \psi &= A_t e^{ik_t(x \sin \theta_t - z \cos \theta_t) - i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $k_l = \frac{\omega}{c_l}$, $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ и в силу однородности задачи в направлении x

$$\frac{\sin \theta}{c} = \frac{\sin \theta_l}{c_l} = \frac{\sin \theta_t}{c_t}.$$

Здесь c — скорость звука в жидкости, c_l , c_t — скорости продольного и поперечного звука в твердом теле. Для простоты мы предполагаем, что твердое тело является изотропным.

Так как, если $\psi = 0$, то $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, а $\text{div } \mathbf{u} = 0$ при $\Phi = 0$, то коэффициенты A_l и A_t есть соответственно амплитуды продольных и поперечных колебаний в твердом теле.

На границе раздела, т. е. при $z = 0$, должны выполняться условия непрерывности нормальных смещений и напряжений.

Первое условие можно записать в виде

$$-k_l \cos \theta_l A_l + k_t \sin \theta_l A_t = k \cos \theta (A - A_0). \quad (23.4)$$

Учитывая, что в жидкости тензор напряжений σ_{ik} равен $-p\delta_{ik}$, где давление $p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, а в твердом теле

$$\sigma_{ik} = 2Dc_t^2 u_{ik} + D(c_l^2 - 2c_t^2) u_{ii} \delta_{ik}, \quad u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i} \right), \quad (23.5)$$

запишем условия непрерывности напряжений:

$$k_t^2 \cos^2 \theta_l A_l + k_l^2 \sin^2 \theta_l A_t = 0, \quad (23.6)$$

$$\left(1 - 2 \frac{c_l^2}{c_t^2} \sin^2 \theta_l \right) A_l - \sin^2 \theta_l A_t = \frac{\rho}{D} (A + A_0), \quad (23.7)$$

ρ — плотность жидкости, D — плотность твердого тела.

Система уравнений (23.4) — (23.7) при заданном A_0 имеет следующее решение:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{Z_l \cos^2 2\theta_l + Z_t \sin^2 2\theta_l - Z}{Z_l \cos^2 2\theta_l + Z_t \sin^2 2\theta_l + Z}, \quad (23.8)$$

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{\rho}{D} \frac{2Z_l \cos 2\theta_l}{Z_l \cos^2 2\theta_l + Z_t \sin^2 2\theta_l + Z}, \quad (23.9)$$

$$\frac{A_t}{A_0} = -\frac{\rho}{D} \frac{2Z_t \sin 2\theta_l}{Z_l \cos^2 2\theta_l + Z_t \sin^2 2\theta_l + Z}, \quad (23.10)$$

где

$$Z_l = \frac{Dc_l}{\cos \theta_l}, \quad Z_t = \frac{Dc_t}{\cos \theta_l}, \quad Z = \frac{\rho c}{\cos \theta}.$$

Напишем теперь выражение для коэффициента прохождения ω звуковой волны, определяемого как отношение средней энергии, проходящей в единицу времени в твердое тело, к энергии, падающей на поверхность металла с падающей волной. Первая из них равна работе сил давления жидкости, т. е.

$$p \bar{v}_z = i\omega r \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (23.11)$$

вторая

$$\frac{\rho k^2}{2} c \cos \theta |A_0|^2.$$

Учитывая, что в формуле (23.11) под φ следует понимать вещественную часть соответствующего комплексного выражения (23.3), приведем (23.11) к виду

$$\frac{\omega\rho}{4} \overline{(\varphi + \varphi^*)} \left(i \frac{\partial\varphi}{\partial z} - i \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \frac{\omega\rho}{2} \operatorname{Re} \left(i \frac{\partial\varphi}{\partial z} \varphi^* \right).$$

Подставив сюда (23.3), получим

$$\omega = \operatorname{Re} \left\{ \left(1 - \frac{A}{A_0} \right) \left(1 + \frac{A^*}{A_0^*} \right) \right\}. \quad (23.12)$$

Формулы (23.12) и (23.8) можно применить для вычисления потока тепла от жидкости к твердому телу ω . Замечая, что при попадании на границу одного фонона с энергией $\hbar\omega$ в твердое тело переносится энергия $\hbar\omega\omega$, получаем

$$W = \int n \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right) c \cos \theta \hbar\omega \cdot \omega \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (23.13)$$

где интегрирование по углам проводится в пределах $0 \leq \cos \theta \leq 1$, а n — функция Планка для фононов. Подстановка сюда (23.12) дает

$$W = \operatorname{Re} \int_0^\infty n \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right) \hbar\omega c \times \\ \times \frac{2\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} \int_0^1 \cos \theta \left(1 - \frac{A}{A_0} \right) \left(1 + \frac{A^*}{A_0^*} \right) d \cos \theta. \quad (23.14)$$

Интеграл по частотам легко вычисляется, и в результате получаем

$$W = \frac{\rho}{D} c \frac{4\pi^5}{15} \frac{T^4}{(2\pi\hbar c)^3} F, \quad (23.15)$$

где

$$F = \frac{1}{2} \frac{D}{\rho} \left(\frac{c_t}{c} \right)^3 \operatorname{Re} \int_0^1 \cos \theta \left(1 - \frac{A}{A_0} \right) \left(1 + \frac{A^*}{A_0^*} \right) d \cos \theta. \quad (23.16)$$

Входящий в формулу (23.16) интеграл разобьем на три части:

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{1-c^2/c_t^2}} \cos \theta \left(1 - \frac{A}{A_0}\right) \left(1 + \frac{A^*}{A_0^*}\right) d \cos \theta, \quad (23.17)$$

$$I_2 = \int_{\sqrt{1-c^2/c_t^2}}^1 \cos \theta \left(1 - \frac{A}{A_0}\right) \left(1 + \frac{A^*}{A_0^*}\right) d \cos \theta, \quad (23.18)$$

$$I_3 = \int_0^1 \cos \theta \left(1 - \frac{A}{A_0}\right) \left(1 + \frac{A^*}{A_0^*}\right) d \cos \theta. \quad (23.19)$$

Подставляя значение $\frac{A}{A_0}$ из (23.8) и учитывая, что в области $0 \leq \cos \theta \leq \sqrt{1-c^2/c_t^2}$ величины $\cos \theta_l$ и $\cos \theta_t$ чисто мнимы, причем $\cos \theta_{l,t} = i |\cos \theta_{l,t}|$, а в области $\sqrt{1-c^2/c_t^2} \leq \cos \theta \leq 1$ $\cos \theta_l$ действителен, но $\cos \theta_t$ мнимый, получаем

$$I_1 = 4\rho c \int_0^{\sqrt{1-c^2/c_t^2}} \frac{Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t}{(Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t)^2 - Z^2} d \cos \theta, \quad (23.20)$$

$$I_2 = 4\rho c \int_{\sqrt{1-c^2/c_t^2}}^1 \frac{Z_t \sin^2 2\theta_t}{|Z_l|^2 \cos^4 2\theta_t + Z_t^2 \sin^4 2\theta_t} d \cos \theta, \quad (23.21)$$

$$I_3 = 4\rho c \int_0^1 \frac{Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t}{(Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t)^2} d \cos \theta. \quad (23.22)$$

В знаменателях подынтегральных выражений в (23.21) и (23.22) мы пренебрегли величиной Z по сравнению с $Z_{l,t}$, что законно, так как отношение $\rho c/Dc_t$ весьма мало.

Рассмотрим первый интеграл I_1 . Поскольку в области интегрирования Z_i и Z_t чисто мнимы, этот интеграл, взятый формально по действительной оси в комплексной плоскости переменной $\cos \theta$, также представляет собой чисто мнимую величину и поэтому не дает вклада в (23.16). Существенно, однако, что подынтегральное выражение I_1 имеет полюс, расположенный в верхней полуплоскости очень близко от действительного значения $\cos \theta = \cos \theta_1$, где $\cos \theta_1$ определяется из условия обращения в нуль величины $Z_t \cos^2 2\theta_t + Z_i \sin^2 2\theta_t - Z$. Последнее условие соответствует поверхностным волнам Рэлея на свободной поверхности твердого тела. Значение $\cos \theta$ в полюсе является корнем уравнения

$$Z_t \cos^2 2\theta_t + Z_i \sin^2 2\theta_t - Z = 0, \quad (23.23)$$

что, как видно из (23.8), эквивалентно условию равенства нулю амплитуды отраженной волны. Полюсу соответствует, таким образом, решение, представляющее собой почти

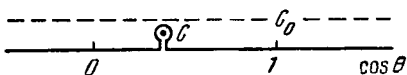


Рис. 7.

плоскую волну в жидкости, падающую на поверхность, и волну, близкую к рэлеевской, в твердом теле. Расстояние полюса от действительной оси весьма мало (по порядку величины оно равно отношению акустических сопротивлений жидкость — твердое тело: $\rho c / D c_t \sim 10^{-2}$), поэтому относительно небольшое смещение контура интегрирования в верхнюю полуплоскость (такое смещение может быть обусловлено реально всегда существующим затуханием) приводит к тому, что полюс оказывается расположенным между контуром и действительной осью. Таким образом, интегрирование в (23.20) следует проводить по контуру, изображенному на рис. 7 (контур C_0). Этот контур удобно деформировать в контур C . Интеграл по той части контура C , которая совпадает с действительной осью, как уже указывалось выше, не дает вклада в (23.16). Оставшаяся часть выражается известным образом через вычет

подынтегрального выражения в полюсе. В результате имеем

$$I_1 = -4\pi\rho c \left\{ \frac{d}{d \cos \theta} [Z_t \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t]_{\cos \theta = \cos \theta_t} \right\}^{-1}. \quad (23.24)$$

Производя в (23.24) дифференцирование и полагая $\theta = \theta_t$, получим

$$I_1 = \frac{\pi\rho c^3}{2Dc_t^3} \left\{ (2 \sin^2 \theta_t - 1) \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 \theta_t - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_t - c_t^2/c_l^2}} \right) + \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} \frac{2 \sin^2 \theta_t - c_t^2/c_l^2}{2(\sin^2 \theta_t - c_t^2/c_l^2)} \right\}_{\theta=\theta_t}^{-1}, \quad (23.25)$$

где учтено, что отношение c^2/c_t^2 мало.

Введем обозначение $\zeta (c_l/c_l) = \frac{1}{\sin \theta_t} \Big|_{\theta=\theta_t}$, $\eta = c_l/c_t$ и перепишем (23.25) в виде

$$I_1 = \frac{\pi\rho c^3}{2Dc_t^3} \left\{ \left(\frac{2}{\zeta} - \zeta \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2/\eta^2}} \right) + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \frac{2-\zeta^2/\eta^2}{2(1-\zeta^2/\eta^2)} \right\}^{-1}. \quad (23.26)$$

Рассмотрим теперь интеграл I , определяемый формулой (23.21). Переходя от переменной интегрирования $\cos \theta$ к $\cos \theta_t$, получим

$$I_2 = \frac{2\rho c^3}{D} \frac{1}{2c_t^3} \int_0^{\sqrt{1-c_t^2/c_l^2}} d \cos \theta_t \frac{4c_t^4 \cos^2 \theta_t |\sin^2 2\theta_t|}{c_t^4 \cos^4 2\theta_t + c_t^4 \sin^2 2\theta_t |\sin^2 2\theta_t|}. \quad (23.27)$$

Интеграл I_3 в (23.22) разобьем на две части:

$$I_3 = 4\rho c \int_0^1 d \cos \theta \frac{Z_l \cos^2 2\theta_t}{(Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t)^2} + 4\rho c \int_0^1 d \cos \theta \frac{Z_t \sin^2 2\theta_t}{(Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_t \sin^2 2\theta_t)^2}. \quad (23.28)$$

В первом интеграле (23.28) перейдем к переменной интегрирования $\cos \theta_t$, во втором — $\cos \theta_t$. Тогда

$$I_3 = \frac{2\rho c^3}{D} \left\{ \frac{1}{2c_t^3} \int_{\sqrt{1-c_t^2/c_t^2}}^1 \frac{4c_t^4 \cos^2 \theta_t \sin^2 2\theta_t}{(c_t^2 \cos^2 2\theta_t + c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_t)^2} d \cos \theta_t + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c_t^3} \int_0^1 d \cos \theta_t \frac{4c_t^4 \cos^2 \theta_t \cos^2 2\theta_t}{(c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_t + c_t^2 \cos^2 2\theta_t)^2} \right\}. \quad (23.29)$$

Сумму $I_2 + I_3$ можно несколько упростить, введя в качестве переменной интегрирования $y = \sin^2 \theta_t$ в (23.27) и в первом из интегралов (23.29) и $y = \sin^2 2\theta_t$ во втором интеграле (23.29):

$$I_2 + I_3 = \frac{4\rho c^3}{Dc_t^3} \left\{ \int_0^{1/\eta^2} \frac{\sqrt{1-y\eta^2} dy}{\eta(1-2y^2) + 4y\sqrt{(1-y)(1-y\eta^2)}} + \right. \\ \left. + \int_{1/\eta^2}^1 \frac{4y(y\eta^2-1) dy}{(1-2y^2)^4 \eta^2 + 16y^2(1-y)(y\eta^2-1)} \right\}. \quad (23.30)$$

Путем несложного преобразования этому выражению можно придать иной вид:

$$I_2 + I_3 = \frac{4\rho c^3}{Dc_t^3} \left\{ \int_0^1 \frac{4y\sqrt{1-y}(y\eta^2-1) dy}{\eta^2(1-2y^2)^2 + 16y^2(1-y)(y\eta^2-1)} + \right. \\ \left. + \int_0^{1/\eta^2} \frac{\eta\sqrt{1-y\eta^2}(1-2y)^2 dy}{\eta^2(1-2y^2)^2 + 16y^2(1-y)(y\eta^2-1)} \right\}. \quad (23.31)$$

Наконец, подставляя (23.31) и (23.26) в (23.16), получим для потока тепла W от жидкости к твердому телу

формулу (23.15), где

$$\begin{aligned}
 F = & 2 \int_0^1 \frac{4y\sqrt{1-y}(y\eta^2-1)dy}{\eta^2(1-2y)^4+16y^2(1-y)(y\eta^2-1)} + \\
 & + 2 \int_0^{1/\eta^2} \frac{\eta\sqrt{1-y\eta^2}(1-2y)dy}{\eta^2(1-2y)^4+16y^2(1-y)(y\eta^2-1)} + \\
 & + \frac{\pi}{4} \left\{ \left(\frac{2}{\xi} - \xi \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2/\eta^2}} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\xi} \sqrt{1-\xi^2} \frac{2-\xi^2/\eta^2}{2(1-\xi^2/\eta^2)} \right\}^{-1}. \quad (23.32)
 \end{aligned}$$

Численное значение функции F зависит от упругих констант твердого тела, однако она изменяется в небольших пределах, оставаясь порядка единицы.

Если температура жидкости T равна температуре твердого тела, то поток тепла W компенсируется таким же по величине потоком, но направленным от твердого тела к жидкости. Если же имеется малая разность температур δT , то результирующий тепловой поток Q равен

$$Q = \frac{\partial W}{\partial T} \delta T.$$

Произведя дифференцирование в (23.15), получим окончательно связь между скачком температуры на границе δT и потоком тепла через границу:

$$Q = \frac{\rho c}{D} \frac{16\pi^5}{15} \frac{T^3 \delta T}{(2\pi\hbar c)^3} F. \quad (23.33)$$

Таким образом, тепловое сопротивление границы оказывается пропорциональным T^{-3} , т. е. довольно быстро возрастает при понижении температуры.

24. РАСТВОРЫ ПОСТОРОННИХ ЧАСТИЦ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ II [27, 28]

Свойства слабых растворов посторонних частиц в сверхтекучем гелии могут быть выяснены на основе самых общих соображений. Под посторонними частицами подразумеваются атомы изотопа He^3 , электроны, ионы атомов He^4

и т. д. В слабом растворе растворенные частицы практически не будут взаимодействовать друг с другом. Обладая большой длиной волны, они не будут локализованы в определенном месте жидкости. Взаимодействие примесей с атомами He^4 приведет к появлению дополнительных энергетических уровней. Состояние примесей можно классифицировать по значению непрерывной переменной импульса. Таким образом, каждой частице примеси соответствует некоторое элементарное возбуждение, характеризующееся энергией — функцией импульса. Логически возможны различные типы спектров. Однако фактически мы имеем дело с самым простым случаем, когда энергия ε есть просто квадратичная функция импульса p с некоторой эффективной массой m^* :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{p^2}{2m^*} \quad (24.1)$$

(ε_0 — некоторая постоянная «нулевая энергия»).

Так, для случая, когда посторонними частицами являются атомы изотопа He^3 , имеет место спектр типа (24.1) с эффективной массой $m^* \approx 2,8m_{\text{He}^3}$. По-видимому, спектр (24.1) имеет место также для случая электронов и ионов. До тех пор, пока скорость примесных частиц p/m^* меньше скорости звука в сверхтекучем гелии, такая частица не способна излучать фононы. Излучение ротона также невозможно, если энергия примеси $p^2/2m^*$ не превосходит энергию ротона Δ . Таким образом, примесные частицы, движущиеся с «дозвуковыми» скоростями, не будут взаимодействовать со сверхтекучей частью жидкости. Однако примесные частицы будут сталкиваться и взаимодействовать с фононами и ротонами и, естественно, будут увлекаться их движением. Поэтому в условиях слабого раствора примесные частицы увлекаются нормальным движением жидкости. Следует подчеркнуть, что полученный вывод об участии примесей в нормальном движении несколько не связан с тем: сверхтекучи или несверхтекучи атомы примеси сами по себе. Так, атомы маложивущего изотопа He^6 , способные сами по себе образовывать сверхтекучую жидкость, в слабом растворе в He^4 будут участвовать только в нормальном движении. Распределение атомов примеси по энергиям определится в области не очень

низких температур статистикой Больцмана. В области же низких температур необходимо учитывать вырождение примесного газа и взаимодействие частиц примеси друг с другом. Если спин частиц s полуцелый, то температура вырождения T_0 равна

$$T_0 = \frac{\hbar^2 N_0^{2/3} c^{2/3}}{km^*} \left(\frac{3\pi^2}{\sqrt{2}(2s+1)} \right)^{2/3}; \quad (24.2)$$

для примесей с целым спином имеем

$$T_0 = \frac{\hbar^2 N_0^{2/3} c^{2/3}}{km^*} \frac{\pi^{3/2}}{2(2s+1)^{2/3}}. \quad (24.3)$$

Здесь $N_0 = \rho/m$ — число атомов He^4 в 1 см^3 , m — масса атома He^4 .

Для случая, когда примесью являются атомы He^3 , при $c < 10^{-2}$, $T_0 < 0,1^\circ \text{К}$. Следует иметь также в виду, что при низких температурах становится существенным взаимодействие атомов примеси между собой. Энергия такого взаимодействия порядка Uc , где U — характеристическая энергия, для случая He^3 порядка нескольких градусов.

В классической области (при $T > T_0$) можно легко получить термодинамические функции для слабых растворов. Поскольку примеси участвуют в нормальном движении, они дают вклад в нормальную плотность ρ_{ni} , который может быть вычислен по общей формуле (2.22) *

$$\rho_{ni} = -\frac{1}{3} \int p^2 \frac{\partial n}{\partial \epsilon} d\tau.$$

Подставив сюда больцмановскую функцию распределения

$$n = N_0 c (2\pi m^* kT)^{-3/2} e^{-p^2/2m^*kT}, \quad (24.4)$$

получаем очевидный результат

$$\rho_{ni} = \frac{\rho c m^*}{m} \quad (24.5)$$

(c — атомная концентрация). При достаточно низких температурах вклад элементарных возбуждений — фононов и

*) Все дальнейшие вычисления производим для физически интересного случая, когда спектр имеет вид (24.1).

ротон — в нормальную плотность ρ_{n0} быстро убывает, и постоянный вклад примесей ρ_{ni} может превосходить первый. При концентрации $c \sim 10^{-2}$ $\rho_{n0} \approx \rho_{ni}$ при температуре $T \approx 1^\circ \text{K}$.

Энтропия. Применение общих формул термодинамики слабых растворов дает для энтропии 1 см^3 раствора следующее выражение:

$$S = S_0 + kN_0c \ln \left[\frac{(2s+1)}{N_0c} \left(\frac{m^*kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right]; \quad (24.6)$$

S_0 — энтропия чистого гелия.

Теплоемкость. Теплоемкость 1 см^3 гелия, содержащего примеси, равна

$$C = C_0 + \frac{3}{2} N_0ck; \quad (24.7)$$

C_0 — теплоемкость чистого гелия.

Вклад примесей в теплоемкость оказывается менее заметным, чем в энтропию и в нормальную плотность.

Уравнение гидродинамики растворов [12, 29]

Основное свойство растворов, которое используется при выводе уравнений гидродинамики, это полное увлечение примесей нормальным движением. Для слабых растворов это утверждение строго доказано. Можно привести ряд аргументов в пользу того, что и для концентрированных растворов имеет место такая же ситуация, т. е. примеси при всех концентрациях участвуют только в нормальном движении. Строгое теоретическое доказательство этого утверждения отсутствует. Однако для наиболее интересного случая, когда примесями являются атомы изотопа He^3 , эксперимент по измерению нормальной плотности раствора подтверждает это. Здесь следует сделать несколько оговорок. По-видимому, такая ситуация имеет место лишь в том случае, если примеси не могут сами по себе образовывать сверхтекучую жидкость. Как известно, в He^3 при очень низких температурах, ниже $0,01^\circ \text{K}$, по-видимому, возможно спаривание с моментом, не равным нулю, и возникновение свойства сверхтекучести. Аналогичное явление спаривания возможно и

в растворах, однако при еще более низких температурах. Поэтому утверждение об участии примесей только в нормальном движении не должно распространяться на столь низкие температуры, где возможна сверхтекучесть примесей *).

Кроме того, для тех же растворов He^3 в He^4 на фазовой диаграмме ниже $0,8^\circ\text{K}$ имеется область расслоения на две фазы. Мы будем рассматривать растворы вне этой области.

Итак, пусть примеси участвуют только в нормальном движении, тогда, наряду с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (24.8)$$

выражающим закон сохранения вещества для всей жидкости, можно написать уравнение непрерывности для примесей

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho c + \text{div } \rho c \mathbf{v}_n = 0. \quad (24.9)$$

Уравнение (24.9) представляет собой закон сохранения массы примесей, переносимых с нормальной скоростью \mathbf{v}_n .

Далее, записываем уравнение непрерывности для энтропии, учитывая тот факт, что энтропия также переносится только нормальным движением

$$S + \text{div } S \mathbf{v}_n = 0. \quad (24.10)$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik}, \quad (24.11)$$

выражающее закон сохранения импульса \mathbf{j} раствора, сохраняет такой же вид, как и в чистом сверхтекучем гелии, поскольку давление, а следовательно, и тензор Π_{ik} для раствора и для чистого гелия Π определяются одинаковым образом.

*) Для смеси двух сверхтекучих жидкостей принципиально возможна ситуация, при которой в жидкости будут происходить три независимых движения: нормальное со скоростью \mathbf{v}_n и два сверхтекучих со скоростями \mathbf{v}'_s и \mathbf{v}''_s . Уравнения такой трехскоростной гидродинамики получены в работе [30].

Наконец, уравнение сверхтекучего движения, помня, что $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, запишем в виде

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \varphi \right) = 0, \quad (24.12)$$

где φ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Далее, как и в случае чистого гелия II, воспользуемся законом сохранения энергии. Вычисляем производную от полной энергии раствора по времени и выражаем с помощью уравнений (24.8) — (24.12) все временные производные от термодинамических величин и скоростей через производные по координатам. При этом следует иметь в виду, что термодинамическое тождество, определяющее внутреннюю энергию E_0 , содержит дополнительную переменную — концентрацию c

$$dE_0 = T dS + \mu d\rho + Z dc + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, d\mathbf{j}_0)^*. \quad (24.13)$$

Сгруппировав полученные таким образом члены под знаком дивергенции, находим выражение для вектора потока энергии

$$\mathbf{Q} = \mathbf{j} \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) + Zc\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n \mathbf{j}_0), \quad (24.14)$$

а из требования, чтобы члены, не имеющие вида дивергенции, тождественно равнялись нулю, выясняется неизвестная функция φ в уравнении (24.12)

$$\varphi = \mu - \frac{Z}{\rho} c. \quad (24.15)$$

Таким образом, уравнение сверхтекучего движения окончательно приобретает вид

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \mu - \frac{Z}{\rho} c \right) = 0. \quad (24.16)$$

Выразим встречающиеся в формулах настоящего параграфа потенциалы μ и Z через химические потенциалы μ_4 гелия II и растворенных частиц μ_3 в растворе. Из соображений аддитивности свободную энергию раствора можно

*) Потенциал Z ниже будет выражен через химические потенциалы посторонних частиц и гелия в растворе.

представить в виде

$$F = (N_3 m_3 + N_4 m_4) f \left(T, \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4}, \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \right). \quad (24.17)$$

Здесь N_4 и N_3 — числа атомов гелия II и растворенного вещества, m_4 и m_3 — массы соответствующих атомов, V — объем, занимаемый раствором.

Свободная энергия F единицы объема раствора, очевидно, равна

$$F = \rho f. \quad (24.18)$$

Химический потенциал μ_4 гелия II в растворе равен

$$\mu_4 = \frac{\partial F}{m_4 \partial N_4} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v - \frac{\partial f}{\partial c} c. \quad (24.19)$$

Аналогичным образом для растворенных частиц находим

$$\mu_3 = \frac{\partial F}{m_3 \partial N_3} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v + (1 - c) \frac{\partial f}{\partial c}, \quad (24.20)$$

$$c = \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \text{ — концентрация раствора,}$$

$$v = \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4} = \frac{1}{\rho} \text{ — удельный объем.}$$

Дифференцируя выражения (24.18) и учитывая соотношения (24.19) и (24.20), находим искомую связь:

$$Z = \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right)_{\rho, T} = \rho (\mu_3 - \mu_4), \quad (24.21)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_{T, c} = c \mu_3 + (1 - c) \mu_4. \quad (24.22)$$

При помощи (24.22) находим выражение для энтропии единицы массы раствора

$$\sigma = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_p = -c \frac{\partial \mu_3}{\partial T} - (1 - c) \frac{\partial \mu_4}{\partial T}. \quad (24.23)$$

В общем случае, ввиду наличия взаимодействия между частицами растворенного вещества и гелия II, выражения для химических потенциалов μ_3 и μ_4 не могут быть напи-

саны. Единственный случай, когда можно написать выражения для μ_3 и μ_4 , есть случай идеального раствора:

$$\mu_3 = \mu_{30} + \frac{kT}{m_3} \ln c, \quad (24.24)$$

$$\mu_4 = \mu_{40} + \frac{kT}{m_4} \ln(1 - c) \quad (24.25)$$

(μ_{30} и μ_{40} — химические потенциалы частиц растворенного вещества и гелия II). Для энтропии σ имеем, согласно (24.23),

$$\sigma = (1 - c)\sigma_{40} + c\sigma_{30} - \frac{k}{m_4}(1 - c) \ln(1 - c) - \frac{k}{m_3}c \ln c. \quad (24.26)$$

Согласно (8.21) и (24.13) для термодинамического потенциала раствора имеет место тождество

$$\rho d\mu = -S dT + dp + Z dc - j_0 d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (24.27)$$

Из тождества (24.27) для случая небольших значений разности скоростей ($\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$) (см. § 8) следует интегральное соотношение

$$\mu = \mu_c(p, T, c) - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (24.28)$$

где потенциал μ_c удовлетворяет тождеству

$$\rho d\mu_c = -S dT - dp + Z dc. \quad (24.29)$$

Комбинация потенциалов μ и Z , содержащаяся в уравнении движения (24.26), согласно (24.21) и (24.22) выражается через химические потенциалы:

$$\mu - \frac{Z}{\rho}c = c\mu_3 + (1 - c)\mu_4 - c(\mu_3 - \mu_4) = \mu_4. \quad (24.30)$$

Для слабых растворов и небольших значений разности ($\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$), согласно (24.25), указанная комбинация равна

$$\mu - \frac{Z}{\rho}c = \mu_{40} - \frac{kTc}{m_4} = \mu_0(p, T) - \frac{kTc}{m_4}. \quad (24.31)$$

В этом случае уравнение (24.16) приобретает вид

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left\{ \mu_0(p, T) + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 - \frac{kTc}{m_4} \right\} = 0. \quad (24.32)$$

Из уравнений (24.11) и (24.16) следуют условия равновесия для растворов. В состоянии равновесия, когда $v_n = v = 0$, имеем

$$p = \text{const.} \quad (24.33)$$

$$\mu - \frac{Z}{\rho} c = \text{const.} \quad (24.34)$$

Для слабых растворов условие (24.34) записывается в виде

$$\mu_0(p, T) - \frac{kTc}{m_4} = \text{const.}$$

или в дифференциальной форме ($dp = 0$):

$$-\sigma_0 dT - \frac{k}{m_4} d(cT) = 0. \quad (24.35)$$

Таким образом, в растворе, в отличие от чистого гелия II, можно в стационарных условиях создать градиент температуры; при этом автоматически возникает градиент концентрации. Уже при небольшом градиенте температуры в слабом растворе почти все примеси соберутся на холодном конце.

Диссипативные процессы в растворах

Остановимся на диссипативных процессах в растворах; при выяснении этого вопроса действуем совершенно аналогично тому, как это делалось для чистого гелия II. В этом случае имеем дополнительные члены в уравнениях движения и в уравнении непрерывности для растворенных частиц:

$$\frac{\partial j_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0 \quad (\tau_{ik} = \tau \delta_{ik} + \mu_{ik}), \quad (24.36)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} + h \right) = 0, \quad (24.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c) + \text{div} (\rho c v_n + g) = 0. \quad (24.38)$$

Дополнительные члены учитывают возможные диссипативные процессы. Затем из закона сохранения энергии получаем выражение потока энергии

$$Q = j \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) + Zc v_n + ST v_n + v_n (v_n j_0) + \\ + h (j - \rho v_n) + \tau v_n + q + v \quad (v_k = v_{ni} \mu_{ik}) \quad (24.39)$$

и уравнение, определяющее скорость изменения энтропии,

$$T \left\{ \dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{g}Z}{\rho T} \right) \right\} = \\ = - \left\{ h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu_{ik} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) + \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T} + \mathbf{g} T \nabla \frac{Z}{\rho T} \right\}. \quad (24.40)$$

Далее, из положительности диссипативной функции заключаем, что неизвестные коэффициенты должны иметь вид

$$\tau = -\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \quad (24.41)$$

$$h = -\zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \quad (24.42)$$

$$\mu_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right), \quad (24.43)$$

$$\mathbf{g} = -\alpha \nabla \frac{Z}{\rho T} - \beta \frac{1}{T^2} \nabla T, \quad (24.44)$$

$$\mathbf{q} = -\gamma \nabla \frac{Z}{\rho T} - \delta \frac{1}{T^2} \nabla T. \quad (24.45)$$

В силу принципа симметрии кинетических коэффициентов имеют место два соотношения:

$$\zeta_1 = \zeta_4, \quad \beta = \gamma. \quad (24.46)$$

Коэффициенты ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_4 имеют смысл коэффициентов второй вязкости раствора; η — коэффициент первой вязкости раствора. В выражении для теплового потока \mathbf{q} удобно исключить $\nabla \frac{Z}{\rho T}$, выразив эту величину через поток примесей \mathbf{g} и ∇T :

$$-\mathbf{q} = \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{g} + \left(\delta - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right) \frac{\nabla T}{T^2}. \quad (24.47)$$

Коэффициент теплопроводности определяем таким образом, чтобы при равном нулю потоке \mathbf{g} поток тепла равнялся бы $-\kappa \nabla T$. Таким образом имеем

$$\kappa = \left(\delta - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{T^2}. \quad (24.48)$$

Далее, аналогично тому, как это делается в обычных растворах, переходим в выражении для потока примесей \mathbf{g}

к обычным переменным p , T и c и вводим обозначения:

$$D = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho T} \right), \quad (24.49)$$

$$\rho D k_T = \alpha T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Z}{\rho T} \right) + \frac{\beta}{T}, \quad (24.50)$$

$$k_p = \frac{p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Z}{\rho T} \right)}{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho T} \right)}. \quad (24.51)$$

После этого потоки \mathbf{g} и \mathbf{q} приобретают вид

$$-\mathbf{g} = \rho D \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right), \quad (24.52)$$

$$-\mathbf{q} = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho T} - \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right) \mathbf{g} + \kappa \nabla T. \quad (24.53)$$

Величина D является коэффициентом диффузии, а $k_T D$ — коэффициентом термодиффузии. Величину $k_p D$ называют коэффициентом бародиффузии. Этот последний существен лишь при наличии градиента давления. Он не зависит от кинетики и полностью определяется термодинамическими свойствами раствора.

Выясним теперь, как выглядят потоки \mathbf{g} и \mathbf{q} в стационарных условиях. Согласно уравнениям (24.33) и (24.34) в стационарных условиях (при малых градиентах)

$$p = \text{const.},$$

$$\mu - \frac{Z}{\rho} c = \text{const.}$$

С помощью термодинамического тождества (24.27) находим связь между градиентами концентрации и температуры в стационарных условиях:

$$\nabla c \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = - \left[\frac{S}{\rho c} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right] \nabla T = \nabla T \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{S}{\rho c} \right). \quad (24.54)$$

В стационарных условиях полный поток растворенных частиц равен нулю:

$$\mathbf{g} + \rho c \mathbf{v}_n = 0. \quad (24.55)$$

а полный поток тепла равен выделяемой на единицу поверхности гелия мощности Q :

$$Q = (Zc + ST) v_n + q. \quad (24.56)$$

Скорость v_n в стационарных условиях не равна нулю; из уравнения (24.11) следует в этом случае равенство нулю только полного импульса. Согласно (24.54) и (24.55) оба потока g и q и скорость v_n в стационарных условиях пропорциональны градиенту температуры. Мы выразим их через ∇T и подставим в формулу (24.56). Таким путем находим

$$Q = -\kappa \nabla T - \rho D \frac{T}{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right)} \left\{ c \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{S}{\rho c} \right) + \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right\}^2 \nabla T. \quad (24.57)$$

Теперь видно, что для характеристики растворов удобно ввести некоторую эффективную теплопроводность $\kappa_{\text{эфф}}$, которая является определенной комбинацией коэффициентов диффузии, термодиффузии и теплопроводности и равна

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa + \rho D \frac{T}{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right)} \left\{ c \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{S}{\rho c} \right) + \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right\}^2. \quad (24.58)$$

Эффективная теплопроводность $\kappa_{\text{эфф}}$ связывает ∇T с выделяемой в растворе мощностью:

$$Q = -\kappa_{\text{эфф}} \nabla T. \quad (24.59)$$

С помощью формул (24.21), (24.22) вычислим $\kappa_{\text{эфф}}$ для слабых растворов:

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa + \frac{\rho D m_3}{k c} \left\{ \left(\sigma_0 + \frac{k c}{m_3} \right) - \frac{k}{m_3} k_T \right\}^2 \quad (24.60)$$

(σ_0 — энтропия единицы массы чистого гелия II). Для достаточно слабых растворов второй член в формуле (24.60) обратно пропорционален концентрации раствора и превосходит коэффициент теплопроводности κ . Заметим здесь, что в чистом гелии II при наличии ∇T отсутствует стационарное решение уравнений гидродинамики. В стационарном случае из постоянства давления p и потенциала μ следует постоянство температуры в гелии.

Запишем теперь в окончательном виде уравнения гидродинамики растворов в гелии II с диссипативными членами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \\ \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} &= \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\partial v_{kl}}{\partial r_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial r_i} \{ \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho c + \operatorname{div} \rho c \mathbf{v}_n &= \\ &= \operatorname{div} \left\{ \rho D \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right) \right\}, \\ \dot{v}_s + \nabla \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) &= \\ &= \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}. \end{aligned} \right\} \quad (24.61)$$

Согласно тем же соотношениям уравнение возрастания энтропии приобретает вид

$$T \left\{ \dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q} - \frac{Zg}{\rho}}{T} \right) \right\} = R, \quad (24.62)$$

$$\begin{aligned} R &= \zeta_3 [\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)]^2 + \zeta_2 [\operatorname{div} \mathbf{v}_n]^2 + \\ &\quad + 2\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_{nl}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right)^2 + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T} + \\ &\quad + \rho D \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \left[\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right]^2. \end{aligned} \quad (24.63)$$

Звук в растворах посторонних частиц
в гелии II

Воспользуемся системой уравнений (24.8) — (24.12) и получим формулы, определяющие скорость звука в растворах произвольной концентрации. Указанная система,

будучи так линеаризована, запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \rho \sigma \operatorname{div} \mathbf{v}_n &= 0, & \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \rho c \operatorname{div} \mathbf{v}_n &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.65)$$

Исключим из системы (24.65) скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s ; в результате получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_n}{\rho_s} \ddot{\sigma} &= \sigma \Delta T + c \Delta \frac{Z}{\rho}, \\ \ddot{\rho} &= \Delta p, & \dot{c} &= \dot{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (24.66)$$

Выберем в качестве независимых переменных температуру T , давление p и концентрацию c . В звуковой волне эти величины можно представить в виде сумм постоянных равновесных значений и небольших добавок, которые мы будем обозначать теми же буквами со штрихом. Ищем решение системы (24.66), соответствующее плоской волне; в этом случае указанные небольшие добавки изменяются по закону $\exp\left(-i\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right)$ (x — направление распространения волны, a — скорость звука). Представив все величины в системе (24.66) в таком виде, получаем

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 - \sigma - c \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho} \right\} T' + \\ + \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} u^2 - c \frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho} \right\} p' + \\ + \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial c} u^2 - c \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} \right\} c' = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial T} u^2 T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 - 1 \right) p' + \frac{\partial \rho}{\partial c} u^2 c' = 0, \\ c \frac{\partial \sigma}{\partial T} T' + c \frac{\partial \sigma}{\partial p} p' + \left(c \frac{\partial \sigma}{\partial c} - \sigma \right) c' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.67)$$

Условие совместности полученной системы дает уравнение, определяющее скорость звука в растворе:

$$u^4 \frac{\rho_n}{\rho_s} \left\{ \frac{d\sigma}{dT} \frac{d\rho}{dp} - \frac{d\sigma}{dp} \frac{d\rho}{dT} \right\} - u^2 \left\{ \frac{d\rho}{dp} \left(\sigma + c \frac{d}{dT} \frac{Z}{\rho} \right) \sigma + \right. \\ \left. + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{d\sigma}{dT} - \frac{d\rho}{dT} \frac{d}{dp} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \sigma c \right\} + \sigma \left(\sigma + c \frac{d}{dT} \frac{Z}{\rho} \right) = 0. \quad (24.68)$$

Для краткости мы ввели полные производные

$$\frac{df}{dT} = \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T}, \quad \frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}, \quad (24.69)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \frac{\partial \sigma}{\partial c} \quad (24.70)$$

(f есть одна из трех термодинамических функций σ , ρ , Z/ρ). Уравнение (24.68) мало пригодно для исследования ввиду его чрезвычайной громоздкости. Воспользуемся упрощающим обстоятельством, состоящим в том, что производная $\partial\rho/\partial T$ практически оказывается всегда чрезвычайно малой. Пренебрегаем в (24.68) всеми членами, содержащими указанную производную, кроме того, воспользуемся соотношениями, вытекающими из термодинамического тождества

$$d\mu = \frac{1}{\rho} dp - \sigma dT + \frac{Z}{\rho} dc,$$

а именно:

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho} = - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial c} = - \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho}. \quad (24.71)$$

В результате уравнение (24.68) приобретает вид

$$u^4 - u^2 \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{\sigma^2}{\partial \sigma} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right] + \frac{\left[1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)^2 \right]}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} \right\} + \\ + \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{\sigma^2}{\partial \sigma} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right]}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} = 0. \quad (24.72)$$

Решим это уравнение относительно u^2 и воспользуемся тем, что один из корней u_1^2 , определяющий скорость первого звука, значительно превосходит по величине второй u_2^2 , определяющий скорость второго звука; в результате находим ($u_2^2 \ll u_1^2$)

$$u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{c, T} \left[1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{c}{\rho} \right)^2 \right], \quad (24.73)$$

$$u_2^2 = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\bar{\sigma}^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_{c, \rho} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right]}{\left[1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{c}{\rho} \right)^2 \right]}. \quad (24.74)$$

В первом приближении при малых значениях концентрации c скорость первого звука не зависит от концентрации*). Скорость же второго звука содержит линейные по концентрации c члены $\bar{\sigma}$ и $c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho}$ (потенциал Z зависит от концентрации c по логарифмическому закону). Величины $\bar{\sigma}$ и $\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right)$, определяющие скорость второго звука (24.74), для идеального раствора равны

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \frac{\partial \sigma}{\partial c} = \sigma_{40} - \frac{k}{m_4} [c + \ln(1 - c)] + \frac{k}{m_3} c, \quad (24.75)$$

$$c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = kT \left[\frac{c^2}{m_4(1 - c)} + \frac{c}{m_3} \right]. \quad (24.76)$$

Для слабых растворов выражения (24.75) и (24.76) обращаются в

$$\bar{\sigma} = \sigma_{40} + \frac{kc}{m_3}, \quad c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = \frac{kTc}{m_3},$$

а формула (24.74) — в

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{\partial T}{\partial \sigma} \left(\sigma_{40} + \frac{kc}{m_3} \right)^2 + \frac{kTc}{m_3} \right]^{**}. \quad (24.77)$$

*) Подчеркнем, что этот результат получается только в предположении, что $\partial \rho / \partial T = 0$, так как точное выражение для u_1^2 , вытекающее из уравнения (24.68), содержит члены, линейные по концентрации и пропорциональные произведению $(\partial \rho / \partial T)(\partial \rho / \partial c)$.

***) Молярная концентрация $\epsilon = \frac{N_3}{(N_3 + N_4)}$ связана с концентрацией c , фигурирующей в наших формулах, соотношением $\frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{m_3}{m_4} \left(\frac{1}{c} - 1 \right)$.

25. ДИФФУЗИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СЛАБЫХ РАСТВОРАХ He³ В ГЕЛИИ II [31]

Для вычисления кинетических коэффициентов растворов необходимо найти функции распределения возбуждений в растворе при наличии небольших градиентов термодинамических величин и скоростей. Очевидно, что такая задача может быть решена лишь для слабых растворов, когда примесные возбуждения можно рассматривать как некоторый идеальный газ. Мы ограничимся рассмотрением явлений диффузии и теплопроводности, которые, согласно (24.60), тесно связаны между собой и вместе определяют теплопередачу в растворах. Кинетическое уравнение, определяющее функцию распределения возбуждений n , в растворе имеет обычный вид (18.1)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial r} = I(n). \quad (25.1)$$

Гамильтониан возбуждения, согласно (18.2), равен

$$H = \varepsilon + p v_s, \quad (25.2)$$

где ε — энергия возбуждения в системе координат, в которой $v_s = 0$; при наличии двух движений со скоростями v_n и v_s равновесные функции распределения зависят от аргумента $(\varepsilon - p v_n + p v_s)/kT$. Функции распределения фононов и ротоннов даются формулами (1.13) и (1.14). Функция же распределения примесных возбуждений равна

$$n_i = \left(\frac{c\rho}{m_3}\right) (2\pi m^* kT)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT}\right) \quad (25.3)$$

(индексом i отмечаем все величины, относящиеся к примесям).

Пусть в растворе имеются градиенты температуры ∇T и концентрации ∇c . Неравновесные функции распределения в этом случае будут определяться решением кинетического уравнения. Мы будем предполагать, как это обычно делается, что в каждом данном месте системы имеется локальное равновесие, т. е. в каждом данном месте функция распределения в первом приближении равна равновесной функции с локальными значениями температуры и концентрации. При малых значениях градиентов ∇T и ∇c изме-

нения других величин будут определяться уравнениями гидродинамики растворов в линейном приближении. Подставив в левую часть кинетического уравнения (25.1) функции распределения примесей (25.3) и выразив все производные по времени с помощью уравнений гидродинамики через соответствующие градиенты, получим интересное нас кинетическое уравнение

$$-\frac{n_i}{kT} \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_n} \frac{kT}{m_3} p_i - \frac{kT}{c} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial p_i} \right) \nabla T + \left[\frac{\rho}{\rho_n} \left(\sigma_0 + \frac{kc}{m_3} \right) p_i + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial p_i} \left(\frac{3}{2} k - \frac{\varepsilon_i}{T} \right) \right] \nabla T \right\} = I(n). \quad (25.4)$$

Таким же образом выводятся уравнения для функций распределения фононов и ротонов:

$$\frac{n'}{kT} \left\{ \frac{\rho}{\rho_n} \frac{kT}{m_3} p \nabla c + \left[\frac{\rho}{\rho_n} \left(\sigma_0 + \frac{kc}{m_3} \right) p - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right] \nabla T \right\} = I(n); \quad (25.5)$$

здесь n' — производная от функции распределения фононов или ротонов по аргументу. Для решения системы кинетических уравнений (25.4) — (25.5) необходимо знать, как взаимодействуют элементарные возбуждения — фононы, ротоны и примеси — между собой. Вычисление соответствующих дифференциальных и полных эффективных сечений производится аналогично тому, как это было сделано в § 7 для случая взаимодействия фононов и ротонов.

Рассеяние примеси ротоном

Энергия взаимодействия примеси с ротоном выбирается в виде δ -функции расстояния между ними

$$U = U_{01} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \quad (25.6)$$

Вычисление по формулам теории возмущений дает следующие выражения для среднего по углам эффективного сечения:

$$\sigma_{ir} = \frac{(|U_{01}|^2 m^*/2\pi\hbar^4) m^* \mu}{m^* + \mu}. \quad (25.7)$$

Здесь m^* — эффективная масса примеси, μ — эффективная масса ротона.

Рассеяние примеси примесью

Энергия взаимодействия двух примесей также выбирается в виде δ -функции, но со своей амплитудой U_{02} , отличной, естественно, от U_{01} . Вычисления по теории возмущений дают сечение рассеяния примеси примесью:

$$\sigma_{ii} = \frac{|U_{02}|^2 m^{*2}}{4\pi\hbar^4}. \quad (25.8)$$

Рассеяние фонона на примеси

Поскольку длина волны фонона больше дебройлевской длины волны примеси, то внутренняя структура примеси несущественна. Можно рассматривать примесь как некоторую частицу, находящуюся в фононном поле. Энергия возмущения рассматриваемой задачи тогда равна

$$U = -\frac{1}{2}(\mathbf{p}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{p}) + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho} \rho' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \rho^2} \rho'^2; \quad (25.9)$$

\mathbf{p} — оператор импульса примеси, \mathbf{v} — скорость среды, ρ' — отклонение плотности раствора от равновесного значения при наличии в нем фонона, ε_0 — нулевая энергия примесного возбуждения.

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния фонона примесью на угол ψ , вычисленное с энергией возмущения (25.9), имеет следующий вид:

$$d\sigma_{phi} = \left(\frac{pk^2}{4\pi\hbar^2\rho c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos \psi) \cos^2 \psi + \right. \\ \left. + \frac{p}{3\mu c} (A + B) (1 + \cos^2 \psi) + (A + B)^2 \right\} d\theta_\psi, \quad (25.10)$$

$$A = \frac{\rho^2}{\rho c} \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho} \right) \frac{1}{\mu c^2} \cos \psi + \\ + \frac{\rho^2}{\rho c} \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho} \right) \frac{1}{\rho^2} \left[(1 - \cos \psi) \frac{c^2}{\rho} - \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right], \quad B = \frac{\rho^2}{\rho c} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \rho^2}.$$

k — импульс фонона, c — скорость звука.

Д и ф ф у з и я

Вычисление коэффициента диффузии производится в нескольких предельных случаях, для которых возможно решение кинетического уравнения. Вначале рассматривается

область относительно высоких температур, когда в чистом гелии играют основную роль ротоны. В этой области температур удается решить кинетическое уравнение для очень малых концентраций, когда число частиц примеси много меньше числа ротонов, и в обратном предельном случае, когда число ротонов мало по сравнению с числом частиц примеси. Затем рассматриваются относительно низкие температуры, когда ротонов мало и существенно лишь взаимодействие фононов с примесями. В этой области температур задача решается также для двух предельных случаев, когда число примесных частиц мало по сравнению с числом фононов и наоборот.

Мы не будем останавливаться на довольно громоздких вычислениях и приведем окончательную формулу для коэффициента диффузии

$$D = \left(\frac{\rho_{n0}}{\rho_n} \right)^2 \frac{kT}{m_3} t_i, \quad (25.11)$$

которая представляет собой интерполяцию между результатами, полученными для указанных предельных случаев. Здесь ρ_n — полная нормальная плотность, ρ_{n0} — вклад в нормальную плотность, обязанный ротонам и фононам, t_i — среднее время соударения примеси с фононами и ротонами, равное

$$t_i = \left\{ \overline{\sigma_{ir} v_i N_r} + \overline{\sigma_{phi} c N_{ph}} \frac{4kT}{m^* c^2} \frac{1 + \frac{8t_{phi}}{\theta_{ph}}}{1 - \frac{8t_{phi}}{\theta_{ph}}} \right\}. \quad (25.12)$$

Среднее время соударения фонона с примесью

$$t_{phi} \approx \frac{2}{\overline{\sigma_{phi} c N_i}}. \quad (25.13)$$

Наконец, время θ_{ph} характеризует установление равновесия в фононном газе по числу фононов. Оно было введено нами ранее при вычислении кинетических коэффициентов в чистом гелии (формула (19.16)). Смысл формулы (25.11) хорошо понятен, так как, не считая безразмерного множителя $(\rho_{n0}/\rho)^2$, остальные множители получаются из простых газодинамических соображений, согласно которым

$$D \sim v_i l_i \sim v_i^2 t_i \sim \frac{kT}{m_3} t_i.$$

Термодиффузия

Термодиффузионное отношение k_T играет роль при вычислении потока примесей

$$g = -\rho D \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T \right) \quad (25.14)$$

лишь при относительно больших концентрациях раствора, когда число примесных возбуждений велико по сравнению с числами фононов и ротоннов. Рассмотрение этого явления производится аналогично явлению диффузии и приводит к следующему результату:

$$k_T = c \left(1 - \frac{\rho_{nl}}{\rho_{no}} \frac{\sigma_0 m_3}{k c} \right). \quad (25.15)$$

Теплопроводность

В растворах, так же как и в чистом гелии II, при наличии градиента температуры возникает добавочный поток тепла, величина которого определяется коэффициентом теплопроводности κ . Этот коэффициент в растворе складывается из ротонной, фононной и примесной частей. Вычисления, аналогичные произведенным при рассмотрении теплопроводности гелия II, позволяют получить каждую из этих частей. Мы не будем приводить здесь соответствующих громоздких формул. Отметим лишь, что подобно чистому гелию II наиболее существенный вклад в κ дает фононная часть, в заметном температурном интервале изменяющаяся по экспоненциальному закону $e^{\Delta/kT}$. Быстрый рост κ_{ph} с понижением температуры объясняется происходящим при этом быстрым возрастанием длины свободного пробега фононов.

Эффективная теплопроводность растворов

При заданном градиенте температуры в растворе автоматически возникает градиент концентрации. Поэтому, как мы видели в § 24, возникающий при этом поток тепла в растворе в стационарных условиях определяется некоторой комбинацией из коэффициентов диффузии, термодиффузии и теплопроводности ($\kappa_{эфф}$), которую мы назвали

эффективной теплопроводностью (формула (24.60)). Подставив выражения для D и k_T , даваемые формулами (25.11) и (25.14), в формулу (24.60), получим эффективную теплопроводность слабого раствора

$$\kappa_{\text{эфф}} = \frac{\rho T \sigma_0^2 i}{c} + \kappa \quad (25.16)$$

(σ_0 — энтропия раствора без примесного вклада).

Первое слагаемое в (25.16) обязано явлениям диффузии и термодиффузии. Среднее время соударений примесей с фононами и ротонами мало зависит от концентрации, поэтому вклад первого члена в $\kappa_{\text{эфф}}$ возрастает с уменьшением концентрации c по закону $1/c$. Что касается температурной зависимости первого слагаемого, то благодаря быстрому убыванию энтропии с понижением температуры величина его быстро убывает. Наоборот, второе слагаемое (κ), как мы указывали, растет с убыванием температуры. Поэтому эффективная теплопроводность ($\kappa_{\text{эфф}}$) имеет характерный минимум, который хорошо виден на приведенном в [31] рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, ЖЭТФ 11, 592 (1941).
 2. L. Landau, J. Physics 11, 91 (1947).
 3. L. Landau, Phys. Rev. 75, 884 (1949).
 4. D. Henshaw, A. Woods, Phys. Rev. 121, 1266 (1961).
 5. R. Feynman, Phys. Rev. 94, 262 (1954).
 6. Л. Питаевский, ЖЭТФ 31, 536 (1956).
 7. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 77 (1947).
 8. T. D. Li, C. N. Yang, Phys. Rev. 105, 1119 (1957).
 9. Л. Питаевский, ЖЭТФ 36, 1168 (1959).
 10. Л. Ландау, И. Халатников, ЖЭТФ 19, 637 (1949).
 11. И. Халатников, ЖЭТФ 20, 243 (1950).
 12. И. Халатников, ЖЭТФ 23, 169 (1952).
 13. И. Халатников, ЖЭТФ 23, 8 (1952).
 14. E. Lifschits, J. Physics 8, 110 (1944).
 15. В. Пешков, ЖЭТФ 18, 857 (1948).
 16. И. Халатников, ЖЭТФ 23, 21 (1952).
 17. И. Халатников, ЖЭТФ 23, 253 (1952).
 18. R. R. Atkins, Phys. Rev. 113, 962 (1958).
 19. И. Бекаревич, И. Халатников, ЖЭТФ 40, 920 (1961).
 20. R. Feynman, Progr. Low. Teor. Phys. 1, ch. 11, North Holland Publishing Co., 1955.
 21. H. Hall, Phil. Mag. Sup. 9, 89 (1960).
 22. Л. Питаевский, ЖЭТФ 35, 408 (1958).
 23. Л. Ландау, И. Халатников, ДАН 96, 469 (1954).
 24. Л. Ландау, И. Халатников, ЖЭТФ 19, 709 (1949).
 25. А. Андреев, И. Халатников, ЖЭТФ 44, 2058 (1963).
 26. И. Халатников, ЖЭТФ 22, 687 (1952).
 27. Л. Ландау, И. Померанчук, ДАН 59, 669 (1948).
 28. И. Померанчук, ЖЭТФ 19, 42 (1949).
 29. И. Халатников, ЖЭТФ 23, 265 (1952).
 30. Р. Архипов, И. Халатников, ЖЭТФ 33, 758 (1957).
 31. И. Халатников, В. Жарков, ЖЭТФ 32, 1108 (1957).
-

Исаак Маркович Халатников

Введение в теорию сверхтекучести

(Серия «Современные проблемы физики»)

М., 1965 г., 160 стр. с илл.

Редактор *В. Д. Козлов*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *М. Я. Липелис*

Сдано в набор 3/II 1965 г. Подписано к печати 22/V 1965 г. Бумага 84×108^{1/32}. Физ. печ. л. 8,2. Уч.-изд. л. 7,11 Тираж 4500 экз. Условн. печ. л. 8,2. Т-06950. Цена книги 36 коп. Заказ № 1166.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполнграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ ПО ФИЗИКЕ:

Бардин Дж., Шриффер Дж., Новое в изучении сверхпроводимости. Перевод с английского, 1962, 172 стр., 44 коп.

Белов К. П., Магнитные превращения, 1959, 260 стр., 87 коп.

Вульф Ю. В., Избранные работы по кристаллофизике и кристаллографии, 1952, 344 стр., 1 р. 03 к.

Китайгородский А. И., Рентгеноструктурный анализ мелкокристаллических и аморфных тел, 1952, 586 стр., 2 р. 42 к.

Кривоглаз М. А., Смирнов А. А., Теория упорядочивающихся сплавов, 1958, 388 стр., 1 р. 48 к.

Лесник А. Г., Модели межатомного взаимодействия в статистической теории сплавов, 1962, 98 стр., 25 коп.

Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются почтой наложенным платежом всеми областными, краевыми и республиканскими отделениями «Книга — почтой». В случае отсутствия книги в местных магазинах заказы следует направлять по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, В/О «Союзкнига», отдел научно-технической литературы.

ה ט ב נ י

פ ר י ת הפקולטה