

GRAPHICAL ENUMERATION

Frank Harary

UNIVERSITY OF MICHIGAN ANN ARBOR

Edgar M. Palmer

MICHIGAN STATE UNIVERSITY EAST LANSING

Academic Press New York and London 1973

Ф. Харари, Э. Палмер

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ГРАФОВ

Перевод с английского Г. П. Гаврилова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва 1977

Монография по современному, бурно развивающемуся разделу дискретной математики — теории перечисления графических объектов. Имя первого автора хорошо известно по переводам его статей и книги «Теория графов» («Мир», 1973). В предлагаемой работе наряду с классическими результатами Редфилда, Пойа и де Брёйна представлены сравнительно новые факты, установленные Робинсоном, Байнеке и авторами. Последняя глава содержит интересный обзор решенных и нерешенных задач перечисления графов. Изложение систематичное и достаточно подробное.

Книга заинтересует математиков, физиков, экономистов и специалистов, работающих в тех областях знания, где используются идеи и методы комбинаторного анализа.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Известно немало задач в физике, химии, биологии, экономике, статистике и лингвистике, сводящихся к подсчету числа графических объектов, обладающих заданными свойствами. Некоторые из таких задач были решены около ста лет назад, другие не решены до настоящего времени. Найти в явной форме число соответствующих объектов, как правило, не удастся. Однако, используя перечислительные теоремы Пойа, де Брёйна и Робинсона, можно получить ряд тонких соотношений между различными числовыми характеристиками изучаемых объектов, оценить порядок роста этих характеристик.

На русском языке очень мало литературы по перечислению графических объектов. Советский читатель имел возможность познакомиться с методами и задачами перечисления графов по двум статьям Харари [12, 15], по главе 15 его книги [1], а также по статье де Брёйна [2]. Однако составить четкое представление о разнообразных подходах, схемах, идеях теории перечисления графических объектов по этим работам невозможно.

Предлагаемая книга известных американских математиков Ф. Харари и Э. Палмера является первой в мировой литературе монографией, содержащей достаточно последовательное и подробное изложение наиболее важных разделов теории перечисления графов. Наряду с классическими результатами Редфилда, Пойа и де Брёйна в книге представлены сравнительно новые факты, установленные Робинсоном, Байнеке и самими авторами.

В конце книги дан интересный обзор решенных и нерешенных задач перечисления графов.

Первые шесть глав книги являются хорошим введением в теорию перечисления графов. Книга послужит не только математикам — много ценных примеров и сведений найдут в ней также физики, экономисты и вообще все специалисты, работающие в тех областях знания, которые переплетаются с комбинаторным анализом.

Работы советских авторов в списке литературы не приводятся. Мы сочли необходимым дать дополнительный список, в который включили наиболее примечательные работы по перечислительной тематике теории графов, принадлежащие нашим соотечественникам.

Г. П. Габрилов

Enumerate, count, number, call over, run over, take an account of, call the roll, muster, poll, sum up, cast up, tell off, cipher, reckon, reckon up, estimate, compute, calculate.

Roget, «Thesaurus»¹

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Сколько существует графов?» — таков первый вопрос, задаваемый многими студентами, слушающими курс теории графов. Это также первая задача, которую мы пытаемся решить. Упомянем об одном обстоятельстве: мы узнали окольным путем, что Джордж Пойа уже подсчитал число графов с заданными числами вершин и ребер. Отправляясь от его формул, сравнительно просто удалось перечислить корневые графы, связанные графы и ориентированные графы. Впоследствии мы решили задачи перечисления для других разнообразных типов графов. А когда были временно исчерпаны все легкие перечислительные задачи, мы опубликовали статью, содержащую 27 нерешенных задач перечисления. К настоящему времени почти половина этих задач решена, а последовательные пересмотры первоначального списка 27 нерешенных задач перечисления регулярно публиковались. Современное состояние дел в этой области отражено в заключительной главе данной книги.

Хотя Эйлер и решил ряд задач перечисления для некоторых типов триангулированных многоугольников, расположенных на плоскости, все же существенные шаги в теории перечисления графов были сделаны лишь в девятнадцатом столетии. Кэли решил перечислительные задачи для трех типов деревьев: помеченных, корневых и обычных. Несколько раньше всемирно известный инженер-электрик Кирхгоф нашел в неявной форме число остовов произвольного заданного связного графа, а значит, в частности, — число помеченных деревьев. Далее следует указать обширный трактат майора П. А. Мак-Магона, в котором немного затронуты задачи перечисления графов, — это один из наиболее ранних примеров поддержки военными исследований в области комбинаторики (если не считать работ Архимеда). До Пойа был еще один кудесник, в совершенстве владеющий искусством комбинаторных

¹ Приведены всевозможные синонимы слов «перечислять», «считать», «подсчитывать», «пересчитывать» и т. д. — *Прим. перев.*

вычислений. Это — невоспетый герой Дж. Говард Редфилд, который написал всего лишь одну статью на тему о перечислении графических объектов, однако в ней он предвосхитил многие более поздние методы и результаты. Его статья долгое время была почти совсем неизвестна. И только после появления знаменитой работы Пойа, послужившей толчком для многочисленных современных научных исследований в теории перечисления графов, были по достоинству оценены заслуги Редфилда.

Хотя мы ограничиваемся рассмотрением задач перечисления различных видов графов, существует много других типов конфигураций, которые можно перечислить описываемыми методами. Автоматы, конечные топологии, булевы функции, ожерелья и химические изомеры — все эти структуры при беглом взгляде нельзя отнести к теоретико-графовым. Однако с помощью искусных превращений все они преобразуются в графы и подграфы, и это позволяет решить для них соответствующие задачи перечисления.

На тему каждой из десяти глав нашей книги можно написать отдельную книгу; более того, уже издана целая книга по тематике одного из параграфов первой главы — это хотя и формально написанная, но обстоятельная монография Джона Муна под названием «Перечисление помеченных деревьев». Ясно, что выбор материала для каждой главы определялся личными вкусами.

План книги таков. Мы рассматриваем сначала (в гл. 1) помеченные графы, так как они лежат в стороне от наших главных интересов и, кроме того, их значительно проще перечислять. Затем в гл. 2 мы устанавливаем основную теорему перечисления Пойа. С ее помощью мы перечисляем в главе 3 очень много разнообразных совокупностей деревьев, а потом — в гл. 4 и 5 — различные виды графов и орграфов. Глава 6 содержит доказательство мощной теоремы перечисления степенной группы; там же показано, как применять эту теорему. Глава 7, названная «Суперпозиция», посвящена задачам перечисления таких конфигураций, которые могут быть построены путем «наложения одних объектов на другие». Затем в гл. 8 решается задача перечисления неразложимых графов, называемых также блоками; здесь широко используются остроумные методы, разработанные покорителем нерешенных перечислительных задач Р. В. Робинсоном.

Некоторые математики полагают, что знание порядка величины, представляющей собой число конфигураций определенного типа, является более важным, чем абсолютно точное представление числа таких конфигураций в форме, непригодной для вычислений. Мы считаем, что лучше не приводить нижние и верхние оценки, а дать асимптотику числа конфигураций для нескольких различных графических структур. Глава 9 как раз и содержит ряд результатов по асимптотике теоретико-графовых объектов. Эти

результаты по необходимости носят иллюстративный характер, так как и по теоретико-графовой асимптотике можно написать целую книгу. Наконец, еще одна отличительная особенность книги: мы даем в заключительной главе новый обширный список нерешенных задач перечисления графов.

Степень трудности упражнений меняется в широких пределах — от весьма простых задач до очень сложных и тонких проблем. Поэтому не все упражнения предназначены для того, чтобы читатель дал детальные решения их. Довольно часто перечислительные формулы приводятся в упражнениях лишь с целью включения соответствующей информации в книгу. Чрезвычайно много упражнений, не помеченных как таковые, содержится и в основном тексте книги; они представлены в виде результатов, доказательства которых опущены. Мы нумеруем формулы упорядоченными тройками. Например, формула (3.1.7) представляет собой соотношение 7 в § 1 гл. 3. Полагаем, что читатель простит нам использование таких сложных обозначений. Конец доказательства отмечается символом ■.

Мы надеемся и верим, что настоящая книга сделает перечислительную технику более доступной и более унифицированной. Это в свою очередь послужит стимулом для исследования открытых вопросов теории перечисления графов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы весьма признательны следующим машинисткам отделения математики Университета штата Мичиган, которые были чрезвычайно любезны, деловиты, точны и быстры при подготовке нескольких вариантов рукописи этой книги: Фриде Мартин, Глендоре Миллиган, Дарлен Робел, Терри Шаулл, Нэнси Супер, Кэти Требилкотт, Мэри Троянович и в особенности Мэри Рэйнолдс.

Мы благодарны ряду организаций за финансовую поддержку, оказанную нам в то время, когда мы занимались исследованиями, связанными с перечислениями различных объектов. Хотя мы упомянем об этом вскользь, но очень приятно отметить, что один из нас пользовался субсидией Ведомства военно-морских исследований, когда мы в 1966/67 г. приступили к работе над книгой в Лондонском университетском колледже, где нас радушно принимал К. А. Роджерс. В самое последнее время мы получали в летние периоды финансовую помощь от Ведомства научных исследований при ВВС и Национального научного фонда.

Мы благодарны всем тем, о ком упоминается в ссылках. Полезные критические замечания были в разное время сделаны Б. Манвелом, Р. К. Ридом, П. К. Стокмейером, Р. В. Робинсоном и А. Дж. Швенком. Особую благодарность мы выражаем Джону Риордану, уделившему самое пристальное внимание всей книге

и давшему много полезных советов. Отметим специально, что каждый из нас благодарит другого.

Наконец, мы признательны издательству Academic Press за его энтузиазм и эффективную поддержку, оказываемую им теории графов и комбинаторной теории. Реальное выражение этой поддержки можно обнаружить в выходных данных тех книг, которые помещены в списке литературы, а также в существовании первого журнала, посвященного этому пленительному направлению в математике, Journal of Combinatorial Theory, выходящему под редакцией Ф. Харари и Дж.-К. Рота.

Мы готовы заплатить десять центов за всякую опечатку¹ (по курсу американского доллара) каждому, кто первый сообщит о ней любому из нас. Не в пример Гилберту и Сулливану после этого не перестанем разговаривать друг с другом, а в отличие от Аллендорфера и Оукли не будем сваливать вину за опечатки один на другого, а просто объединим усилия, чтобы свалить все на издателя.

Анн Арбор Мичиган
Западный Лансинг,
Мичиган

Фрэнк Харари
Эдвар М. Палмер

¹ Английского оригинала. — Прим. перес.

*Как я тебя люблю?
Дозволь мне перечесть.*

Элизабет Баррет Браунинг

Посвящается Джейн и Джени

*Не полагайся без сомнений
Ты на любые ярлыки:
Они от истинных суждений
Порою очень далеки.*

Ч. Х. Спурджен

Глава 1

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Мы рассматриваем в первую очередь задачи перечисления помеченных объектов; эти задачи всегда решаются значительно легче, чем соответствующие задачи для непомеченных объектов. Например, число помеченных графов немедленно находится с помощью элементарных соображений, тогда как определение числа непомеченных графов требует использования мощных средств из комбинаторной теории, включая теорему Пойа.

Мы представим в этой главе избранные образцы некоторых выдающихся и интересных решений ряда задач перечисления помеченных объектов в теории графов, включая нахождение числа помеченных графов, связанных графов, блоков, эйлеровых графов, k -раскрашенных графов, ациклических орграфов, деревьев и эйлеровых колтуров в эйлеровом орграфе. Часто будут даваться несколько различных решений одной и той же задачи, так что читатель сможет познакомиться с большим разнообразием полезных приемов, методов, подходов и схем. Например, мы увидим, что когда имеешь дело с задачами перечисления помеченных объектов, то экспоненциальные производящие функции оказываются естественным средством для запоминания информации, достаточной для решения. С другой стороны, исследуя незначительное количество данных, можно часто найти очень быстро требуемую формулу, истинность которой можно затем установить по индукции.

1.1. ЧИСЛО СПОСОБОВ, КОТОРЫМИ МОЖНО ПОМЕТИТЬ ГРАФ

Граф G порядка p состоит из конечного непустого множества $V = V(G)$, содержащего p вершин, и множества X из q неупорядоченных пар различных вершин; при таком определении автоматически исключаются *петли* (ребра, соединяющие вершину с ней самой) и кратные (параллельные) ребра. Пара $x = \{u, v\}$ вершин, принадлежащая множеству X , называется *ребром* графа G и говорят, что ребро x *соединяет* вершины u и v . Вершины u и v называются при этом *смежными*; вершина u и ребро x , так же как вершина v и ребро x , называются *инцидентными* друг другу. Граф с p вершинами и q ребрами называется (p, q) -графом. Наша терминология согласуется с той, которая принята в книге Харари [1]. Однако мы предполагаем дать большую часть определений.

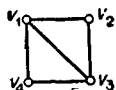


Рис. 1.1.1 Граф с четырьмя вершинами и пятью ребрами.

Значительно удобнее и нагляднее представлять графы диаграммами. Рассмотрим граф G , выбранный случайным образом, с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и множеством ребер

$$X = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}\}.$$

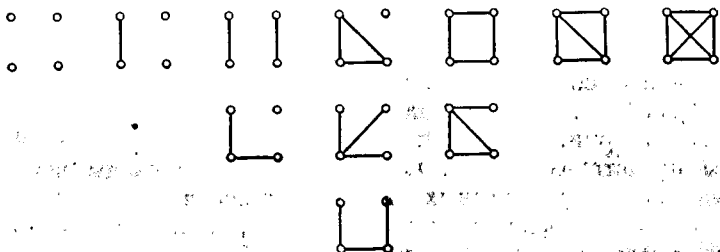


Рис. 1.1.2 11 графов четвертого порядка,

Его изображение диаграммой дано на рис. 1.1.1. На этой диаграмме буквами обозначены только вершины. Пять ребер графа G представлены отрезками прямых, которые соединяют на рисунке соответствующие пары вершин. Диаграммы всех графов четвертого порядка, расположенные в соответствии с числом ребер в них, приведены на рис. 1.1.2. В дальнейшем, допуская некоторое злоупотребление языком, мы будем называть такие диаграммы графами, и это не приведет к путанице.

В *помеченном графе* порядка p вершинам приписываются целые числа от 1 до p . Например, граф, изображенный на рис. 1.1.1, может быть помечен шестью различными способами, которые указаны на рис. 1.1.3.

Таким образом, два помеченных графа G_1 и G_2 считаются одинаковыми и называются *изоморфными* тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение множества $V(G_1)$ на множество $V(G_2)$, сохраняющее не только смежность, но и распределение пометок. Легко убедиться в том, что на рис. 1.1.3 представлены *все* различные распределения пометок у графа, изображенного на рис. 1.1.1.

Возникают два естественных вопроса. Первый: «Сколько существует помеченных графов порядка p ?» Второй: «Сколько существует графов порядка p ?» Первый вопрос настолько легок,

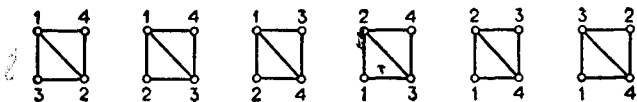


Рис. 1.1.3 Шесть различных распределений пометок в графе.

что мы его обсудим сейчас же. Второй вопрос значительно труднее и будет исследоваться в гл. 4.

Мы ответим на легкий вопрос, незначительно обобщив задачу следующим образом: найти число помеченных графов с данным числом вершин и ребер. Пусть $G_p(x)$ — многочлен, у которого коэффициент при x^k равен числу помеченных графов порядка p , имеющих ровно k ребер. Такой многочлен обычно называется производящей функцией для помеченных графов с данным числом вершин и ребер. Если V — множество из p вершин, то суще-

ствует $\binom{p}{2}$ различных неупорядоченных пар этих вершин. В каждом помеченном графе с множеством вершин V любая пара вершин является либо смежной, либо нет. Следовательно, число

помеченных графов с k ребрами равно $\binom{\binom{p}{2}}{k}$.

Теорема. Производящая функция $G_p(x)$ для помеченных графов порядка p задается соотношением

$$G_p(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m, \quad \text{где } m = \binom{p}{2}. \quad (1.1.1)$$

Так как $G_p(x) = (1+x)^m$ и число G_p помеченных графов порядка p равно $G_p(1)$, то

$$G_p = 2^{\binom{p}{2}}. \quad (1.1.2)$$

Для $p = 3$ эта формула ярко иллюстрируется рис. 1.1.4. Таким образом, существуют восемь помеченных графов порядка 3 и только четыре (непомеченных) графа порядка 3. Существуют 64 помеченных графа порядка 4, но только 11 графов порядка 4. Тогда возникает вопрос: «Сколькими способами можно пометить данный граф?» Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны рассмотреть симметрии, или автоморфизмы, графа. Взаимно однозначное отображение α множества $V(G)$ на множество $V(G_1)$, сохраняющее смежность, обычно называется *изоморфизмом*. Если $G_1 = G$,

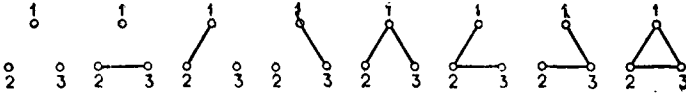


Рис. 1.1.4 Восемь помеченных графов третьего порядка.

то α является *автоморфизмом* графа G . Совокупность *всех* автоморфизмов графа G , обозначаемая $\Gamma(G)$, образует группу, называемую *группой графа* G . Таким образом, элементы группы $\Gamma(G)$ являются *подстановками*, действующими на множестве V . Например, граф G , изображенный на рис. 1.1.1, имеет в точности четыре автоморфизма, так что $\Gamma(G)$ содержит следующие подстановки, записанные здесь с использованием обычного представления в виде произведения циклов:

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4), \quad (v_1)(v_3)(v_2v_4), \quad (v_1v_3)(v_2)(v_4), \quad (v_1v_3)(v_2v_4).$$

Пусть $s(G) = |\Gamma(G)|$ — порядок группы $\Gamma(G)$, обозначающий число симметрий графа G . Тогда ответ на задачу распределения пометок, поставленную выше, содержится в следующей теореме.

Теорема. Число способов распределения пометок в данном графе G порядка p равно

$$l(G) = p! / s(G). \quad (1.1.3)$$

Доказательство этого утверждения наиболее легко получается, если использовать теоретико-групповые результаты из гл. 2 и 4 (см. Харари, Палмер, Рид [1]). Для иллюстрации теоремы мы просто заметим, что граф G на рис. 1.1.1 имеет $p! / s(G) = 4! / 4 = 6$ распределений пометок и шесть различных помеченных гра-

фов, показанных на рис. 1.1.3, полностью подтверждают формулу (1.1.3) для этого графа G .

Хотя эта теорема сформулирована только для графов, подобные ей утверждения справедливы для любых конечных структур с заданными группами автоморфизмов, таких, как графы с корнями, оргграфы, другие отношения различных типов, симплициальные комплексы, функции и т. д.

Ориентированный граф, или *оргграф*, D порядка p состоит из конечного непустого множества V различных объектов, называемых *вершинами*, вместе с заданным множеством X , содержащим

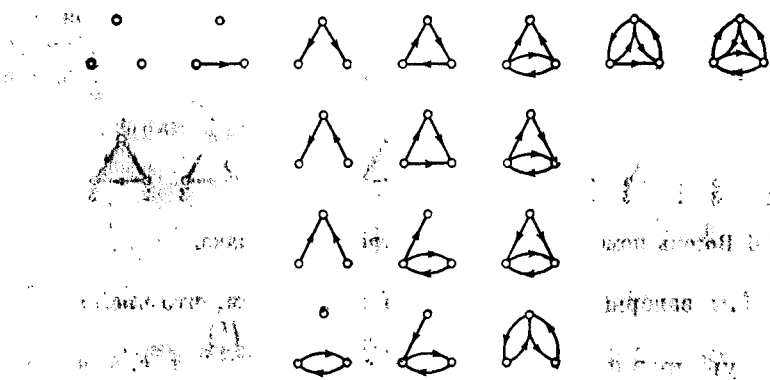


Рис. 1.1.5 16 оргграфов третьего порядка.

q упорядоченных пар различных вершин из множества V . Пара $x = (u, v)$ точек из множества X называется *дугой* оргграфа D , и говорят, что вершина u смежна к вершине v ; вершина u и дуга x являются *инцидентными* друг другу, так же как вершина v и дуга x . *Полустепенью исхода* вершины u называется число дуг, для которых вершина u является первой вершиной; *полустепенью захода* вершины u называется число дуг, для которых вершина u является второй вершиной. Диаграммы всех оргграфов порядка 3 показаны на рис. 1.1.5. Как и в случае графов, мы обращаемся с диаграммами оргграфов, как с самими оргграфами.

В помеченных оргграфах порядка p вершинам приписываются целые числа от 1 до p , и *группа оргграфа* D , обозначаемая $\Gamma(D)$, состоит из всех подстановок множества вершин $V(D)$ оргграфа D , сохраняющих смежность. Так как число помеченных оргграфов порядка p , имеющих в точности k ребер, равно $\binom{p(p-1)}{k}$, то получаем следующие результаты, которые соответствуют формулам (1.1.1) и (1.1.2).

Теорема. Производящая функция $D_p(x)$ для помеченных орграфов порядка p задается соотношением

$$D_p(x) = \sum_{k=0}^{p(p-1)} \binom{p(p-1)}{k} x^k = (1+x)^{p(p-1)}. \quad (1.1.4)$$

Очевидно, что $D_p(x) = G_p^2(x)$, так что

$$D_p(1) = 2^{p(p-1)} = G_p^2(1). \quad (1.1.5)$$

В круговом турнире заданное множество игроков ведут игру, правилами которой запрещен ничейный исход. Любые два игрока встречаются между собой только один раз, и лишь один из них одерживает победу. Следовательно, *турнир* представляет собой орграф, в котором каждая пара вершин соединяется только одной

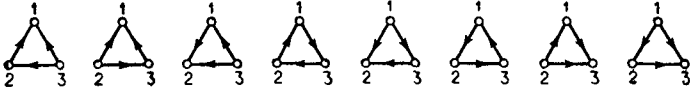


Рис. 1.1.6 Восемь помеченных турниров третьего порядка.

дугой. Мы завершим этот параграф замечанием, что число помеченных турниров порядка p равно в точности $2^{\binom{p}{2}}$, т. е. такое же, как и число помеченных графов порядка p , определяемое по формуле (1.1.2). Это наблюдение подтверждается для $p = 3$ рисунками 1.1.4 и 1.1.6. Более того, естественное соответствие между этими двумя классами графов указывается тем порядком, в котором графы размещены на этих двух рисунках. Каждый помеченный турнир соответствует тому помеченному графу, в котором вершины с пометками i и j смежны тогда и только тогда, когда $i < j$ и дуга (i, j) имеется в турнире.

1.2. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Пусть G — граф и $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ — последовательность вершин графа G , такая, что вершина v_i смежна с вершиной v_{i+1} при $i = 0, 1, \dots, n-1$. Такая последовательность вместе с n ребрами $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i \leq n-1$, называется *маршрутом длины n* . Если ребра в маршруте различные, то он называется *цепью*. Если в маршруте различны все вершины (а следовательно, и ребра), то он называется *простой цепью*. *Связным графом* называется граф, в котором любые две различные вершины соединены простой цепью (рис. 1.2.1). Число помеченных связных графов порядка 4 может быть вычислено тривиальным образом, если мы применим формулу (1.1.3) к каждому из шести графов, изо-

браженных на рис 1.2.1 Порядки групп этих графов, если идти слева направо, равны соответственно 2, 6, 2, 8, 4, 24. Поэтому из формулы (1.1.3) следует, что число помеченных связных графов четвертого порядка равно 38. Этот результат не дал никакого указания, которое помогло бы найти формулу для C_p — числа связных помеченных графов порядка p . Чтобы достичь этой цели, нам потребуется несколько определений.

Подграф H графа G имеет $V(H) \subseteq V(G)$ и $X(H) \subseteq X(G)$. *Компонента* графа представляет собой максимальный связный подграф. *Граф с корнем* (или *корневой граф*) имеет одну выделенную вершину, называемую *корнем*. Два корневых графа называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначная функция, отображающая множество вершин одного графа на множество вершин другого графа, которая сохраняет не только смежность, но и корни¹. Аналогичное требование накладывается и при описании корневых помеченных графов. Эти понятия можно

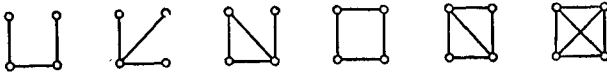


Рис. 1.2.1 Шесть связных графов четвертого порядка.

сейчас использовать для получения следующей рекурсивной формулы.

Теорема. Число C_p связных помеченных графов удовлетворяет соотношению

$$C_p = 2^{\binom{p}{2}} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k}{2}} C_k. \quad (1.2.1)$$

Чтобы доказать (1.2.1), заметим, что если в помеченном графе делать корнями разные вершины, то получатся разные корневые помеченные графы. Следовательно, число корневых помеченных графов порядка p равно pC_p . Число корневых помеченных графов, в которых корень находится в компоненте, содержащей в точности k вершин, равно $kC_k \binom{p}{k} G_{p-k}$. Суммируя эти произведения по k от 1 до p , мы опять получаем выражение для числа корневых помеченных графов, а именно

$$\sum_{k=1}^p k \binom{p}{k} C_k G_{p-k}. \quad \blacksquare$$

¹ То есть переводит корень одного графа в корень другого графа, — Прим. перев.

Значения C_p , приведенные в табл. 1.2.1, помещены в книге Слоуэна [1].

Таблица 1.2.1

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_p	1	1	4	38	728	26 704	1 866 256	251 548 592	66 296 291 072

Важно иметь наготове понятие экспоненциальной производящей функции и несколько свойств такой функции. Мы поэтому введем сейчас эти функции и воспользуемся ими, чтобы получить другой вид формулы (1.2.1).

Для всякого $k = 1, 2, 3, \dots$ обозначим через a_k число способов, которыми можно пометить все графы порядка k , обладающие некоторым свойством $P(a)$. Тогда формальный степенной ряд

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k / k! \quad (1.2.2)$$

называется экспоненциальной производящей функцией для класса всех графов, рассматриваемых нами в данном случае. Предположим также, что

$$b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k / k! \quad (1.2.3)$$

другая экспоненциальная производящая функция для класса графов, удовлетворяющих свойству $P(b)$.

Следующая лемма дает полезную интерпретацию коэффициентов произведения $a(x)b(x)$ этих двух производящих функций.

Лемма пересчета помеченных графов. Коэффициент при $x^k/k!$ в $a(x)b(x)$ равен числу упорядоченных пар (G_1, G_2) двух непересекающихся графов, где G_1 обладает свойством $P(a)$, G_2 обладает свойством $P(b)$, k — число вершин в $G_1 \cup G_2$ и метки от 1 до k распределены на графе $G_1 \cup G_2$.

Для иллюстрации этой леммы положим, что $C(x)$ — экспоненциальная производящая функция для помеченных связных графов:

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k / k!. \quad (1.2.4)$$

Тогда $C(x)C(x)$ является производящей функцией для упорядоченных пар помеченных связных графов. Разделив этот ряд на 2, получаем производящую функцию для помеченных графов, име-

ющих в точности две компоненты. Аналогично, $C^n(x)/n!$ имеет при $x^k/k!$ коэффициент, равный числу помеченных графов порядка k , содержащих в точности n компонент. Если через $G(x)$ обозначим экспоненциальную производящую функцию для помеченных графов, то тогда

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C^n(x)/n!. \quad (1.2.5)$$

Таким образом, мы имеем следующее экспоненциальное соотношение между $G(x)$ и $C(x)$, найденное Ридделом [1].

Теорема. *Экспоненциальные производящие функции $G(x)$ и $C(x)$ для помеченных графов и помеченных связных графов удовлетворяют соотношению*

$$1 + G(x) = e^{C(x)}. \quad (1.2.6)$$

Заметим, что (1.2.6) остается справедливым и для мультиграфов (Гилберт [1]). Риордан обратил внимание на замечательное равенство: $C_p = J_p(2)$, где $J_p(x)$ — функция, перечисляющая деревья с помощью числа инверсий (см. Моллоус и Риордан [1]), и, таким образом, получил следующее рекуррентное соотношение для C_p :

$$C_p = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{p-k}. \quad (1.2.7)$$

Кроме того, очевидно, что если известна экспоненциальная производящая функция для некоторого класса графов, то экспоненциальная производящая функция для соответствующих связных графов получается формальным логарифмированием первого ряда, точно так же как в (1.2.6) для всех графов.

Поэтому мы можем сформулировать следующий общий результат.

Следствие. *Если $\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m\right)$, то для $m \geq 1$*

$$a_m = A_m - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} k a_k A_{m-k}. \quad (1.2.8)$$

1.3 БЛОКИ

Удаление вершины v из графа G приводит к подграфу $G - v$ графа G , состоящему из всех вершин графа G , за исключением вершины v , и всех ребер графа G , не инцидентных вершине v . Точкой сочленения графа называется такая его вершина, удаление

которой повышает число компонент. *Блокс*, или *неразложимым графом*, называется связный нетриангуляционный граф, не имеющий точек сочленения. Мы будем следовать методике Риддела [1] и Форда и Уленбека [1] при установлении взаимосвязи между производящими функциями для помеченных блоков и помеченных связных графов. Применяемый здесь подход успешен только в случае помеченных объектов. В гл. 8 мы увидим, что для перечисления непомеченных блоков требуется гораздо более сложный метод.

Так как мы занимаемся задачей перечисления помеченных объектов, то будем использовать экспоненциальные производя-

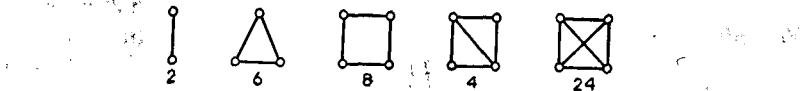


Рис. 1.3.1 Наименьшие блоки и их числа симметрий.

щие функции. Пусть $B(x)$ обозначает ряд для помеченных блоков, так что

$$B(x) = \sum_{p=2}^{\infty} B_p x^p / p!, \quad (1.3.1)$$

где B_p — число блоков с p вершинами. Как следует из формулы (1.1.3), приведенной в теореме о числе способов распределения пометок в графе, коэффициент при x^p в $B(x)$ равен сумме величин, обратных к порядкам групп (непомеченных) блоков с p вершинами. Следовательно, используя рис. 1.3.1, на котором изображены наименьшие блоки вместе с порядками их групп, мы получаем несколько первых членов ряда $B(x)$:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{5}{12} x^4 + \dots = \\ &= 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 10 \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать следующую теорему, где $C'(x)$ и $B'(x)$ обозначают обычные формальные производные.

Теорема. *Экспоненциальные производящие функции $B(x)$ и $C(x)$ для помеченных блоков и связных графов удовлетворяют соотношению*

$$\ln C'(x) = B'(xC(x)). \quad (1.3.3)$$

Чтобы проверить это тождество, обозначим через $R(x)$ экспоненциальную производящую функцию для *корневых связных поме-*

ченных графов, так что коэффициент при x^p в $R(x)$ есть $R_p/p!$. Так как $R_p = pC_p$ для всех p , то мы имеем равенство

$$R(x) = x dC(x)/dx. \quad (1.3.4)$$

Обозначим через $R_n(x)$ экспоненциальный ряд для корневых связанных помеченных графов, в которых точно n блоков содержат корень. Таким образом, $R_0(x) = x$ и

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x). \quad (1.3.5)$$

Кроме того, $R_1(x)$ перечисляет корневые связанные помеченные графы, у которых только один блок инцидентен корню. Предположим, что $S(x)$ — соответствующий ряд для того случая, когда корень не помечен, т. е. коэффициент при $x^p/p!$ равен числу корневых связанных графов с $p+1$ вершинами, у которых корень не помечен. Тогда из леммы пересчета помеченных графов следует, что $R_1(x) = xS(x)$ и, следовательно, $S(x) = R_1(x)/x$.

По этой же лемме ряд $(R_1(x)/x)^n/n!$ перечисляет n -множества таких графов, причем каждый корень не помечен. Если эти n корней отождествить и ввести для них одну пометку, то будем иметь перечисление корневых помеченных связанных графов, у которых точно n блоков примыкают к корню. Восстановление помеченного корня завершается просто умножением на x :

$$R_n(x) = x (R_1(x)/x)^n/n!. \quad (1.3.6)$$

Комбинируя две последние формулы, получаем соотношение

$$R(x) = x \exp(R_1(x)/x). \quad (1.3.7)$$

Теперь мы попытаемся выразить $R_1(x)$ через $B(x)$ и $R(x)$. Замечаем, что ряд $(R(x)/x)^{k-1}$ перечисляет наборы из $k-1$ корневых помеченных связанных графов, причем в этих наборах $k-1$ корней не помечаются и не включаются в число подсчитываемых вершин. Другими словами, коэффициент при $x^p/p!$ в этом ряду представляет собой число наборов, каждый из которых состоит из $k-1$ корневых графов; корни графов не помечены, и общее число вершин в наборе, включая и корни, равно $p+k-1$. Умножая этот ряд на kB_k , получаем ряд, перечисляющий корневые связанные графы, у которых к корню примыкает один блок и для пометки этого блока используются только числа от 1 до k . Наконец, чтобы учесть распределение всех пометок, нам нужно только умножить все на $x^k/k!$. Следовательно, ряд $xB_k(R(x))^{k-1}/(k-1)!$ перечисляет корневые помеченные связанные графы, у которых

к корню примыкает точно один блок порядка k . Суммируя по k , получаем соотношение

$$R_1(x) = x \sum_{k=2}^{\infty} B_k (R(x))^{k-1} / (k-1)!. \quad (1.3.8)$$

Комбинируя две последние формулы, каждая из которых содержит $R_1(x)$, получаем следующий результат:

$$\ln(R(x)/x) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k (R(x))^{k-1} / (k-1)!. \quad (1.3.9)$$

Для завершения доказательства надо подставить $R(x) = x \cdot C'(x)$ из (1.3.4) в (1.3.9). ■

Сравнивая коэффициенты при x^p в выражениях, стоящих в левой и правой частях формулы (1.3.3), мы можем прийти к рекурсивной формуле для B_p . Коэффициент при x^p в левой части формулы (1.3.3) может быть выражен через коэффициенты функции $C(x)$, если использовать соотношение (1.2.8). Для удобства обозначим через $h(p, k)$ коэффициент при x^p в $(xC'(x))^k$, так что коэффициент при x^p в правой части формулы (1.3.3) есть

$$\sum_{k=2}^p B_k h(p, k-1) / (k-1)!. \quad (1.3.10)$$

Следовательно, число B_p помеченных блоков может быть выражено через числа C_p помеченных связных графов, если использовать соотношение (1.3.3). Описанный здесь метод можно без особых затруднений расширить так, чтобы включить в качестве второго параметра число ребер.

1.4. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

В этом параграфе мы выведем, следуя довольно точно методике Рида [5], производящую функцию для помеченных эйлеровых графов. *Степенью* вершины v (обозначается через $\text{deg } v$) в графе G называется число ребер графа G , инцидентных вершине v . Если каждая вершина графа G имеет четную степень, то граф называется *четным*. *Эйлеров граф* — это связный четный граф.

Пусть W_p — число помеченных четных графов порядка p . Тогда имеет место следующий несколько неожиданный результат.

Теорема. Число помеченных четных графов порядка p равно числу помеченных графов порядка $p-1$:

$$W_p = 2 \binom{p-1}{2}. \quad (1.4.1)$$

Чтобы доказать этот результат, мы сейчас установим взаимно однозначное соответствие между этими двумя классами графов. Рассмотрим произвольный помеченный граф G порядка $p - 1$. Граф G должен иметь четное число вершин нечетной степени. Добавим к нему вершину v , которой припишем пометку p . Наконец, из графа G и вершины v строим граф G' , соединяя вершину v с каждой вершиной графа G , имеющей нечетную степень. Этот граф G' является помеченным четным графом порядка p . Легко видеть, что описанное соответствие является взаимно однозначным и что каждый помеченный четный граф порядка p может быть получен таким способом из некоторого помеченного графа порядка $p - 1$. ■

Чтобы получить формулу для числа помеченных эйлеровых графов, мы будем использовать производящие функции. Итак, пусть $W(x)$ — экспоненциальная производящая функция для помеченных четных графов, так что

$$W(x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{\binom{p-1}{2}} x^p / p!. \quad (1.4.2)$$

Далее, пусть U_p — число помеченных эйлеровых графов порядка p , так что

$$U(x) = \sum_{p=1}^{\infty} U_p x^p / p! \quad (1.4.3)$$

является соответствующей экспоненциальной производящей функцией.

Теорема. *Экспоненциальная производящая функция $U(x)$ для помеченных эйлеровых графов удовлетворяет соотношениям*

$$U(x) = \ln(W(x) + 1) \quad (1.4.4)$$

и

$$U_p = 2^{\binom{p-1}{2}} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k-1}{2}} U_k. \quad (1.4.5)$$

Формула (1.4.4) следует из того факта, упомянутого после равенства (1.2.6), что если известна производящая функция для произвольного класса графов, то производящая функция для соответствующих связанных графов получается с помощью формального логарифмирования первого ряда. Рекуррентное соотношение (1.4.5) для U_p является следствием формул (1.4.4) и (1.2.8). ■

Для нескольких первых членов ряда $U(x)$ имеем равенство

$$U(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{38x^5}{5!} + \dots \quad (1.4.6)$$

Четыре эйлеровых графа порядка 5 показаны на рис. 1.4.1 вместе с порядками их групп. Согласно формуле (1.1.3), величины, обратные к этим числам, должны дать в сумме число $\frac{38}{5!}$, которое представляет собой коэффициент при x^5 в ряде $U(x)$. И они в самом деле дают это число.

Далее мы рассмотрим более трудную задачу — определение числа помеченных эйлеровых графов с заданным числом вершин и ребер. Попытаемся установить следующий результат Рида [5].

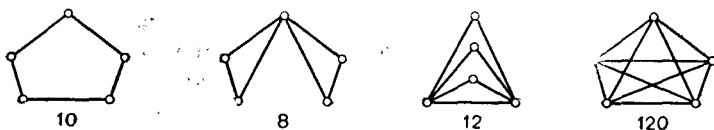


Рис. 1.4.1 Четыре эйлеровых графа пятого порядка.

Теорема. Многочлен $w_p(x)$, у которого коэффициент при x^q равен числу помеченных графов, имеющих p вершин четной степени и q ребер, задается формулой

$$w_p(x) = \frac{1}{2^p} (1+x)^{\binom{p}{2}} \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n(p-n)}. \quad (1.4.7)$$

Для малых значений p находим, что

$$w_1(x) = w_2(x) = 1, \quad w_3(x) = 1 + x^3 \quad \text{и} \quad w_4(x) = 1 + 4x^3 + 3x^4.$$

Доказательство. Пусть L — множество всех помеченных графов порядка p , имеющих в точности q ребер. Рассмотрим какой-либо граф G из множества L и произвольным образом умножим каждую из пометок $1, \dots, p$ на $+1$ или -1 . Так как пометки будут положительными и отрицательными, то каждую вершину можно рассматривать как «положительную» или «отрицательную» в зависимости от знака ее пометки. Каждому ребру приписывается тогда число $+1$ или -1 , равное произведению знаков вершин, инцидентных этому ребру. Знак графа G (обозначается через $\sigma(G)$) тогда определяется как произведение знаков его ребер. Очевидно, что существует 2^p способов, которыми могут быть приписаны знаки пометкам данного графа. С другой стороны, предположим, что знаки уже распределены по p целым числам, которые служат пометками; тогда существует $\binom{p}{2}$ разных графов с q ребрами и с такими p вершинами, знаки которых определены в соответствии с данным распределением знаков в множестве пометок. Эти понятия проиллюстрированы на рис. 1.4.2.

Так как $\sigma(G)$ есть знак произведения положительных и отрицательных чисел, отвечающих смежным вершинам, то положительные вершины в этом произведении можно опустить. Таким образом,

$$\sigma(G) = (-1)^a, \quad (1.4.8)$$

где a — сумма степеней отрицательных вершин. С другой стороны, очевидно, что

$$\sigma(G) = (-1)^b, \quad (1.4.9)$$

где b — число отрицательных ребер графа G , каждое из которых соединяет отрицательную вершину с положительной вершиной.

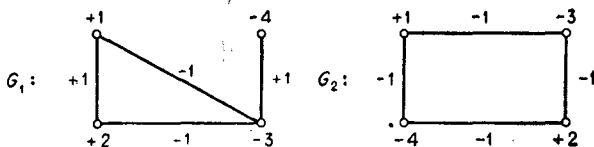


Рис. 1.4.2 Два графа, имеющие один и тот же знак.

Далее рассмотрим сумму $\sum \sigma(G)$, где суммирование ведется по всем помеченным графам из множества L и по множеству S , состоящему из 2^p возможных распределений чисел $+1$ и -1 по пометкам, сопоставленным вершинам. Как следует из выражений (1.4.8) и (1.4.9), эту сумму можно записать двумя различными способами:

$$\sum_{G \in L} \left\{ \sum_S (-1)^a \right\} = \sum_S \left\{ \sum_{G \in L} (-1)^b \right\}. \quad (1.4.10)$$

Сначала рассмотрим левую часть соотношения (1.4.10). Если G — четный граф, то a — четное число при любых распределениях из множества S . Следовательно, $\sum (-1)^a = 2^p$ и граф G вносит 2^p в левую часть соотношения (1.4.10). Если граф G не является четным, то хотя бы одна его вершина v имеет нечетную степень. Подмножество распределений из S , для которых пометка вершины v является положительной, и подмножество распределений из S , для которых она отрицательна, равнозначны и вносят в сумму $\sum (-1)^a$ разные по знаку и одинаковые по величине количества. Следовательно, граф G ничего не вносит в левую часть равенства (1.4.10). Таким образом, левая часть соотношения (1.4.10) равна 2^p , взятому столько раз, сколько четных графов в множестве L .

Далее мы сосредоточим внимание на правой части равенства (1.4.10) и рассмотрим такое распределение из множества S , для

которого n вершин положительны и $m = p - n$ отрицательны. Существует $\binom{p}{n}$ таких распределений. Если выбираются k ребер, соединяющих положительные вершины с отрицательными, то это можно сделать $\binom{nm}{k}$ различными способами. Удаление $q - k$ ребер можно осуществить

$$\binom{\binom{n}{2} + \binom{m}{2}}{q-k} \quad (1.4.11)$$

разными способами. Суммируя по k от 0 до q , получаем выражение

$$\sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{nm}{k} \binom{n(n-1)/2 + m(m-1)/2}{q-k}, \quad (1.4.12)$$

которое вносится в правую часть соотношения (1.4.10) каждым распределением (из множества S) с данными n и m . Это выражение представляет собой коэффициент при x^q в многочлене

$$(1-x)^{nm} (1+x)^{n(n-1)/2 + m(m-1)/2}. \quad (1.4.13)$$

Поэтому правая часть равенства (1.4.10) является коэффициентом при x^q в сумме

$$\sum_{n=0}^p \binom{p}{n} (1-x)^{nm} (1+x)^{n(n-1)/2 + m(m-1)/2} \quad (1.4.14)$$

и этот коэффициент равен 2^p , взятому столько раз, сколько четных графов в L . Замечая, что

$$\binom{n}{2} + \binom{m}{2} = \binom{p}{2} - n(p-n), \quad (1.4.15)$$

мы получаем окончательный результат: искомое число четных графов равно коэффициенту при x^q в выражении, стоящем в правой части формулы (1.4.7). ■

Заметим, кстати, что общее число помеченных четных графов равно числу $w_p(1)$, которое получается из (1.4.7), если положить $x = 1$ и принять соглашение, что $y^0 = 1$, даже когда $y = 0$:

$$w_p(1) = 2^{\binom{p-1}{2}}, \quad (1.4.16)$$

которое подтверждается формулой (1.4.1).

Можно воспользоваться формулой (1.4.7), чтобы получить многочлен

$$w_5(x) = 1 + 10x^3 + 15x^4 + 12x^5 + 15x^6 + 10x^7 + x^{10}, \quad (1.4.17)$$

а 64 помеченных четных графа, перечисляемых многочленом $w_5(x)$, можно построить, исходя из семи четных графов, изображенных на рис. 1.4.3.

Экспоненциальная производящая функция $w(x, y)$, перечисляющая все помеченные четные графы, задается соотношением

$$w(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} w_p(x) y^p / p!. \quad (1.4.18)$$

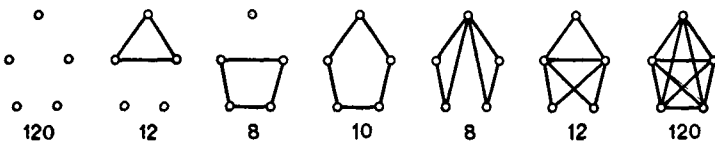


Рис. 1.4.3 Четные графы пятого порядка и их числа симметрий.

Чтобы получить производящую функцию $u(x, y)$ для помеченных эйлеровых графов, имеющих данное число вершин и ребер, нам нужно только прологарифмировать ряд $1 + w(x, y)$:

$$u(x, y) = \ln(1 + w(x, y)). \quad (1.4.19)$$

Это замечание следует из варианта леммы пересчета помеченных графов для случая двух переменных.

1.5. ЧИСЛО k -РАСКРАШЕННЫХ ГРАФОВ

Раскрашенный граф состоит из графа G с множеством вершин V и такого отношения эквивалентности на множестве V , что любые смежные вершины не эквивалентны. k классов эквивалентности рассматриваются как различные цвета и граф G называется k -раскрашенным. Два k -раскрашенных графа *изоморфны*, если существует взаимно однозначное соответствие между их множествами вершин, которое сохраняет не только смежность, но и цвета. Заметим, что цвета не закреплены постоянно, а являются взаимозаменяемыми. Данный граф может быть k -раскрашен многими способами. Например, все 3-раскраски некоторого помеченного графа порядка 6 показаны на рис. 1.5.1, где буквы a, b и c обозначают цвета, а натуральные числа обозначают метки.

Следуя Риду [2], и обобщая результат Гилберта [1], мы найдем формулу для числа помеченных k -раскрашенных графов порядка p .

Пусть p_1, \dots, p_k — целые положительные числа, образующие упорядоченное разбиение числа p , так что

$$\sum_{i=1}^k p_i = p. \quad (1.5.1)$$

Если через $\{p\}$ обозначить произвольное решение уравнения (1.5.1), то теорему (и формулу) Рида можно записать в следующей форме.

Теорема. Число $C_p(k)$ k -раскрашенных помеченных графов порядка p равно

$$C_p(k) = \frac{1}{k!} \sum_{\{p\}} \binom{p}{p_1, \dots, p_k} 2^{(p^2 - \sum p_i^2)/2}. \quad (1.5.2)$$

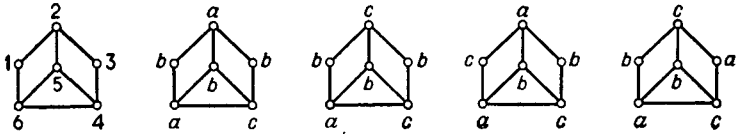


Рис. 1.5.1 Все 3-раскраски графа.

Доказательство. Заметим, что число k -раскрашенных помеченных графов порядка p , в которых цвета фиксированы, равно $k!C_p(k)$. Поэтому мы сейчас рассмотрим k фиксированных цветов. Каждое решение $\{p\}$ уравнения (1.5.1) определяет упорядоченное разбиение числа p на k частей, и поэтому мы ищем число помеченных графов, у которых p_i вершин имеют i -й цвет. Число способов, которыми могут быть выбраны пометки для вершин, дается полиномиальным коэффициентом

$$\binom{p}{p_1, p_2, \dots, p_k}.$$

Очевидно, что существуют

$$\binom{p}{2} = \sum_{i=1}^k \binom{p_i}{2} \quad (1.5.3)$$

пар вершин, имеющих различные цвета. Так как каждая такая пара может быть либо смежной, либо нет, то, возводя 2 в степень, равную выражению (1.5.3), и используя равенство (1.5.1), мы получаем для общего числа графов с p_i вершинами цвета i в точности то выражение, которое стоит под знаком суммы в формуле (1.5.2).

Суммируя по всем решениям $\{p\}$ уравнения (1.5.1), получаем произведение $k! C_p(k)$. Тем самым формула (1.5.2) доказана. ■

Заметим, что коэффициент при x^q в многочлене

$$\frac{1}{k!} \sum_{\{p\}} \binom{p}{p_1, \dots, p_k} (1+x)^{(p^2 - \sum p_i^2)/2}$$

равен числу k -раскрашенных помеченных (p, q) -графов. Применяя, например, это утверждение в случае $p = 4$, $q = 5$ и $k = 3$, получим число шесть — число 3-раскрашенных помеченных $(4, 5)$ -графов. В справедливости этого результата легко убедиться непосредственно, ибо существует лишь один непомеченный $(4, 5)$ -граф и он может быть помечен шестью способами, как это показано на рис. 1.1.3.

Рекурсивную формулу для $C_p(k)$ нетрудно получить как следствие:

$$C_p(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{p-1} \binom{p}{n} 2^{n(p-n)} C_n(k-1). \quad (1.5.4)$$

Проверку формулы (1.5.4) можно осуществить, выразив производящую функцию для $C_p(k)$ через производящую функцию $C_p(k-1)$. Значения произведения $k! C_p(k)$ для $p \leq 7$ приводятся у Рида [2] и были использованы нами при составлении табл. 1.5.1.

Таблица 1.5.1

$p \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0
3	1	12	8	0	0	0	0
4	1	80	192	64	0	0	0
5	1	720	5 120	5 120	1 024	0	0
6	1	9 152	192 000	450 560	24 576	32 768	0
7	1	165 312	10 938 368	56 197 120	64 225 280	22 020 096	2 097 152

Заметим, что формула (1.2.8) не позволяет ¹ выразить производящую функцию для связных k -раскрашенных графов в терминах производящей функции для k -раскрашенных графов.

¹ Рид сообщил Райту, что и он (см. Рид [2]), и Райт [1] допустили ошибку. Затем Рид и Райт, чтобы исправить положение вещей, указали в совместной работе (см. Рид и Райт [1]) на допущенную ранее ошибку. Возможно, что все это выглядело несколько иначе, ибо Райт утверждает, что он первый написал Риду.

1.6. АЦИКЛИЧЕСКИЕ ОРГРАФЫ

*Маршрут*¹ длины n в орграфе D определяется последовательностью своих вершин v_0, v_1, \dots, v_n , в которой вершина v_i смежна к вершине v_{i+1} при $i < n$. В *замкнутом маршруте* начальная и конечная вершины совпадают. *Контур*² представляет собой нетривиальный замкнутый маршрут, все вершины которого, исключая первую и последнюю, различны. *Ациклический* орграф не имеет контуров. Перечисление помеченных ациклических орграфов довольно легко сейчас осуществить, следуя работе Робинсона [4]. В то же время случай непомеченных ациклических орграфов требует более мощной техники, которая развивается в гл. 8.

Орграф E называется *расширением* орграфа D , если D является ориентированным подграфом орграфа E , порожденным подмножеством тех вершин орграфа E , которые имеют положительные

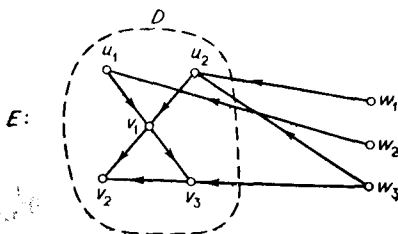


Рис. 1.6.1 Расширение ациклического орграфа.

полустепени захода. Каждый ациклический орграф должен содержать по крайней мере одну вершину с нулевой полустепенью захода (см. Харари, Норман, Картрайт [1], стр. 64). Следовательно, всякий ациклический орграф, имеющий хотя бы одну дугу, является расширением единственного собственного ориентированного подграфа. Кроме того, каждый ациклический орграф имеет много расширений, но все они должны быть ациклическими орграфами.

Предположим, что D — ациклический орграф, имеющий в точности $n \geq 1$ вершин u_i , полустепень захода которых равна нулю, и s остальных вершин v_i . Мы можем построить расширение E орграфа D , содержащее ровно k вершин с нулевой полустепенью захода: добавляем k новых вершин w_i и новые дуги, такие, что каждая из n вершин u_i является смежной из некоторой новой вершины w_i (однако каждая вершина w_i может быть смежной к

¹ Точнее, *ориентированный маршрут*. Однако всюду, где из контекста ясно, что речь идет об ориентированных объектах, слово «ориентированный» мы будем опускать. — *Прим. перев.*

² В оригинале — *cycle*. — *Прим. перев.*

любой вершине v орграфа D). На рис. 1.6.1 новые (добавленные) вершины обозначены через w_1, w_2 и w_3 ; каждая старая вершина u_1 и u_2 с нулевой полустепенью захода является смежной из некоторой вершины w_i .

Таким образом, все ациклические орграфы порядка p могут быть получены с помощью расширения ациклических орграфов, порядок которых меньше p . Детальнее, пусть a_p — число помеченных ациклических орграфов порядка p и $a_{p,k}$ — число таких же орграфов, у которых ровно k вершин имеют нулевую полустепень захода. Если $k = p$, то, конечно, $a_{p,p} = 1$, так как в этом случае подходит только вполне несвязный орграф. Очевидно, что для всех p

$$a_p = \sum_{k=1}^p a_{p,k}. \quad (1.6.1)$$

Сейчас мы покажем, как может быть выражено $a_{p,k}$ через $a_{p-k,n}$ при $n \leq p - k$. Сначала мы докажем, что всевозможные расширения всех $a_{p-k,n}$ орграфов с $p - k$ вершинами, из которых в точности n вершин имеют нулевую полустепень захода, вносят в значение $a_{p,k}$ число, равное

$$(2^k - 1)^n 2^{k(p-n-k)} \binom{p}{k} a_{p-k,n}. \quad (1.6.2)$$

Мы ищем число помеченных расширений E всех $a_{p-k,n}$ помеченных ациклических орграфов D . Для каждого из $\binom{p}{k}$ способов расставить пометки у k новых вершин w_i в расширении E существуют $a_{p-k,n}$ распределений пометок в орграфах D , подлежащих расширению. Это объясняет множитель $\binom{p}{k} a_{p-k,n}$ в выражении (1.6.2). Каждая из n вершин с нулевой полустепенью захода в орграфе D должна быть смежна по крайней мере из одной новой вершины w_i ($1 \leq i \leq k$). Следовательно, существуют $2^k - 1$ возможностей направить дуги в каждую из этих n вершин, что дает $(2^k - 1)^n$ для всех вершин. Каждая новая вершина может либо быть, либо не быть смежной ко всякой из $p - n - k$ вершин, имеющих в орграфе D положительную полустепень захода. Значит, существуют 2^{p-n-k} возможных комбинаций для каждой из новых вершин и, следовательно, $(2^{p-n-k})^k$ комбинаций для всех таких вершин. Перемножая все эти выражения, получаем (1.6.2). Суммируя (1.6.2) по всем n , имеем соотношение для $a_{p,k}$.

Теорема. Число $a_{p, k}$ помеченных ациклических орграфов порядка p , имеющих ровно k вершин с нулевой полустепенью захода, удовлетворяет соотношению

$$a_{p, k} = \sum_{n=1}^{p-k} (2^k - 1)^n 2^{k(p-n-k)} \binom{p}{k} a_{p-k, n}. \quad (1.6.3)$$

Таким образом, для нахождения a_p можно использовать формулы (1.6.1) и (1.6.3). Эти результаты можно также выразить в терминах производящих функций. Пусть в ряде $a(x, y)$ коэффициент при $x^k y^{p-k}$ равен числу помеченных ациклических орграфов с p вершинами, из которых в точности k вершин имеют нулевую



Рис. 1.6.2 Два ациклических орграфа третьего порядка, у которых по две вершины имеют нулевую полустепень захода.

полустепень захода. Тогда несколько первых членов ряда $a(x, y)$ даются выражением

$$\begin{aligned} a(x, y) = & x + x^2 + 2xy + x^3 + 9x^2y + 15xy^2 + x^4 + 28x^3y + \\ & + 198x^2y^2 + 316xy^3 + x^5 + 75x^4y + 1610x^3y^2 + \\ & + 10710x^2y^3 + 16885xy^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Например, существуют шесть способов расставить пометки в ациклическом орграфе D_1 и три способа расставить пометки в ациклическом орграфе D_2 , изображенных на рис. 1.6.2. Всего — девять способов, что соответствует члену $9x^2y$ в ряде $a(x, y)$.

1.7. ДЕРЕВЬЯ

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов (см. Харари [1], гл. 4). Хорошо известно, что всякое нетривиальное дерево имеет не менее двух висячих вершин (вершин степени 1). Это следует из того, что если T — дерево с p вершинами и q ребрами, то

$$q = p - 1. \quad (1.7.1)$$

Все деревья с не более чем пятью вершинами показаны на рис. 1.7.1 (вместе с числом способов, которыми они могут быть помечены). Отсюда вытекает, что число t_p помеченных деревьев с p вершинами имеет следующие наименьшие значения: 1, 1, 3, 16,

125. Многие авторы справедливо предполагали, исходя из этой последовательности значений, что формула для подсчета помеченных деревьев дается следующей теоремой.

Теорема (Кэли). Число t_p помеченных деревьев порядка p равно

$$t_p = p^{p-2}. \quad (1.7.2)$$

Мы дадим наброски только четырех доказательств, принадлежащих Кэли, Прюферу, Пойа и Кирхгофу, хотя существует много других не менее интересных, чем эти, доказательств. Собрание таких доказательств может быть найдено в статье Муна [1], для которой как бы продолжением является целая книга Муна [4], посвященная подсчету различных типов помеченных деревьев.

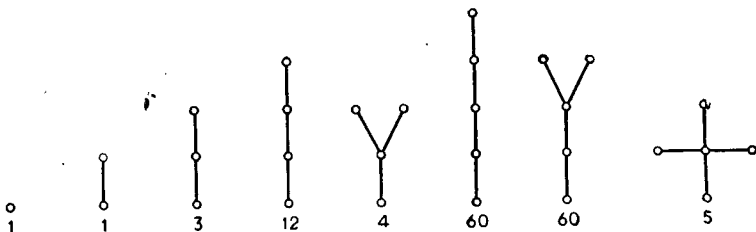


Рис. 1.7.1 Деревья, порядки которых не выше 5, и число способов распределения пометок у каждого из этих деревьев.

Кэли [1] высказал мысль, что существует соответствие между помеченными деревьями и функциями, отображающими множество из $p - 2$ объектов в множество из p объектов. Например, если $p = 5$, то существует 5^3 функций из $\{a, b, c\}$ в $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Эти функции перечисляются многочленом

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)^3. \quad (1.7.3)$$

Слагаемые этого многочлена сопоставляются функциям естественным образом. Например, v_4^3 соответствует постоянной функции $f(x) = v_4$, слагаемое $3v_1v_3^2$ отвечает трем функциям, которые отображают только один элемент в v_1 , а два других — в v_3 , и $6v_2v_3v_5$ дает шесть функций, отображающих по одному элементу в v_2 , v_3 и v_5 . Теперь, умножая многочлен (1.7.3) на $v_1v_2v_3v_4v_5$ и получая

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)^3 v_1v_2v_3v_4v_5, \quad (1.7.4)$$

устанавливаем тем самым соответствие между слагаемыми из этого произведения и помеченными деревьями порядка 5. Это соответствие с использованием слагаемого $3v_1^2v_2v_3^3v_4v_5 = 3v_1v_3^2(v_1v_2v_3v_4v_5)$

демонстрируется на рис. 1.7.2. Заметим, что в деревьях, соответствующих слагаемому $v_1^2 v_2 v_3^3 v_4 v_5$, степень вершины, помеченной числом k , равна показателю степени у v_k . Справедливость этого высказывания может быть установлена и в общем случае. Следовательно, число помеченных деревьев, у которых вершины, помеченные числом k , имеют степень d_k , равно полиномиальному коэффициенту

$$\binom{p-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_p-1}. \quad (1.7.5)$$

Кэли [1] проиллюстрировал это соответствие для $p = 6$ и не стал рассматривать другие случаи, заметив: «Сразу видно,

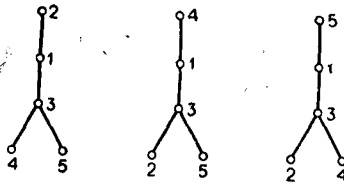


Рис. 1.7.2 Помеченные деревья, перечисляемые членом $v_1^2 v_2 v_3^3 v_4 v_5$.

что доказательство, данное для этого частного случая, применимо при любом значении p ».

Приюфер [1] получил соответствие между помеченными деревьями порядка p и наборами из $p - 2$ элементов $(a_1, a_2, \dots, a_{p-2})$, где каждое a_k является целым числом от 1 до p , причем в наборах допускаются повторения. Таким образом, имеется p^{p-2} таких наборов. В заданном помеченном дереве T возьмем висющую вершину v , имеющую наименьшую пометку, и выберем пометку a_1 вершины, смежной с v . Далее, проделав такой же шаг для дерева $T - v$, находим пометку a_2 (дерево $T - v$ получено из дерева T удалением вершины v и ребра, инцидентного вершине v). Этот процесс оборвется, когда останутся только две смежные вершины. Заметим, что дерево, изображенное на рис. 1.7.3, соответствует последовательности $(2, 4, 1, 2, 4, 4)$.

Так как каждое помеченное дерево порядка p дает единственный набор длины $p - 2$, то $t_p \leq p^{p-2}$.

Чтобы показать, что $t_p \geq p^{p-2}$, опишем некоторую процедуру, позволяющую однозначным образом строить по каждому набору $(a_1, a_2, \dots, a_{p-2})$ помеченное дерево. Следуя Муну [4, стр. 5], обозначим через b_1 наименьшее целое положительное число, не встречающееся в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_{p-2})$, и пусть (c_2, \dots, c_{p-2}) обозначает набор длины $p - 3$, получающийся

из набора (a_2, \dots, a_{p-2}) уменьшением всех его координат, больших, чем b_1 , на 1. Тогда набор (c_2, \dots, c_{p-2}) состоит из чисел, принадлежащих множеству $\{1, \dots, p-1\}$, и мы можем предположить, что существует соответствующее дерево T порядка $p-1$. Изменим распределение пометок у вершин дерева T ,

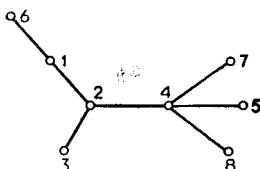


Рис. 1.7.3 Помеченное дерево восьмого порядка.

прибавляя 1 к каждой пометке, превосходящей $b_1 - 1$. Затем введем p -ю вершину с пометкой b_1 и соединим ее с вершиной, помеченной числом a_1 в дереве T . Таким образом, получили единственное помеченное дерево, соответствующее данному набору длины $p-2$.

Далее рассмотрим метод Пойа [1] для нахождения числа помеченных деревьев. Так как число корневых помеченных деревьев

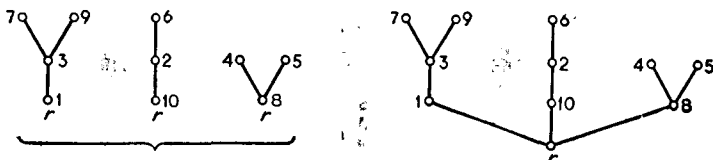


Рис. 1.7.4 3-множество корневых деревьев и соответствующее ему дерево, корень которого имеет степень 3.

порядка p равно $p \cdot t_p$, то экспоненциальная производящая функция для этих деревьев дается выражением

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} p t_p x^p / p!. \quad (1.7.6)$$

Пойа нашел функциональное уравнение для y и затем для нахождения t_p применил формулу обращения Лагранжа.

Это функциональное уравнение для y будет сейчас выведено. Из леммы пересчета помеченных графов следует, что $y^n/n!$ является экспоненциальной производящей функцией для n -множества корневых помеченных деревьев. Эти n -множества соответствуют в точности тем корневым помеченным деревьям, в которых корень имеет степень n и не помечен. Более точно, это соответствие получается так: сначала добавляем к каждому n -множеству новую вершину, не помечая ее, а затем соединяем эту новую вершину

с каждым из старых корней. Описанная идея иллюстрируется рис. 1.7.4. Умножение выражения $y^n/n!$ на x отвечает приписыванию пометки новому корню и включению его в число пересчитываемых вершин. Таким образом, $xy^n/n!$ перечисляет корневые помеченные деревья, в которых корень имеет степень n . Суммируя по n , получаем

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} xy^n/n!, \quad (1.7.7)$$

и, следовательно, мы приходим к функциональному уравнению

$$y = xe^y. \quad (1.7.8)$$

Чтобы найти решение уравнения (1.7.8), выразив y как функцию от x , мы применим весьма полезный частный случай формулы Лагранжа, приведенный в работе Муна [4, стр. 26] (см. также Поля [1]).

Формула обращения Лагранжа. Если функция $\varphi(y)$ аналитична в некоторой окрестности точки $y = 0$ и $\varphi(0) \neq 0$, то уравнение

$$x = y/\varphi(y) \quad (1.7.9)$$

имеет единственное решение, задаваемое производящей функцией

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad (1.7.10)$$

коэффициенты которой определяются по формуле

$$c_k = (1/k!) \{ (d/dy)^{k-1} (\varphi(y))^k \}_{y=0}. \quad (1.7.11)$$

Применяя эту формулу обращения к уравнению (1.7.8), где $\varphi(y) = e^y$, находим

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} k^{k-1} x^k / k! \quad (1.7.12)$$

и, сравнивая это выражение с (1.7.6), снова получаем формулу (1.7.2) для t_p .

При решении некоторых задач перечисления помеченных объектов (см. упражнения 1.13а, б и 1.14) удобно использовать обобщенные формулы (1.7.11), принадлежащие Лагранжу. В дополнение к условиям, наложенным на функцию φ , предположим, что дана еще одна функция $f(y)$, аналитическая в некоторой окрестности точки $y = 0$. Обобщенная формула Лагранжа утверждает, что

функция $f(y)$ может быть выражена степенным рядом по x следующим образом:

$$f(y) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left\{ \left(\frac{d}{dy} \right)^{k-1} [f'(y) \varphi^k(y)] \right\}_{y=0}. \quad (1.7.13)$$

При $f(y) = y$ эта формула приводит к выражениям (1.7.10) и (1.7.11). Доказательство формулы (1.7.13) можно найти у Гурса и Хедрика [1].

Более интересный и полезный результат, обычно называемый «Матричная теорема о деревьях», содержится в работе Кирхгофа [1]. Число помеченных деревьев может быть быстро получено как простое следствие этого результата. Матрицей смежности $A = A(G) = [a_{ij}]$ помеченного графа G порядка p называется $(p \times p)$ -матрица, в которой $a_{ij} = 1$, если вершины i и j смежны, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между помеченными графами порядка p и симметрическими двоичными $(p \times p)$ -матрицами с нулевыми диагональными элементами. Пусть $M(G)$ обозначает матрицу, которая получается из матрицы $-A$ с помощью подстановки на место i -го диагонального элемента в ней числа $\deg v_i$. Подграф H графа G покрывает граф G , если каждая вершина графа G является вершиной подграфа H (рис. 1.7.5).



Рис. 1.7.5 Граф и три его остова.

Матричная теорема о деревьях для графов. Для всякого связного помеченного графа G все кофакторы ² матрицы $M(G)$ равны друг другу и их общее значение представляет собой число остовных деревьев ³ графа G .

Доказательство этой теоремы можно найти у Харари [1, стр. 181]. Для иллюстрации сформулированного утверждения рассмотрим

¹ Такой подграф называют остовным. — Прим. перев.

² В другой терминологии — алгебраическое дополнение. — Прим. перев.

³ Остовное дерево называют также остовом или каркасом. — Прим. перев.

граф G , изображенный на рис. 1.7.5. Он имеет три остова, так как, например, кофактор, соответствующий элементу a_{14} матрицы

$$M(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ равен } - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Полный граф K_p , в котором любые две вершины смежны, может быть помечен только одним способом, и каждый его остов соответствует своему помеченному дереву. Следовательно, число помеченных деревьев порядка p получается в результате применения матричной теоремы о деревьях к графу K_p . Каждый главный кофактор¹ матрицы $M(K_p)$ есть определитель порядка $p-1$:

$$\begin{vmatrix} p-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & p-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & p-1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из каждой другой и прибавляя последние $p-2$ столбцов к первому, получаем верхнюю треугольную матрицу, определитель которой равен p^{p-2} .

1.8. ЭЙЛЕРОВЫ КОНТУРЫ В ОРГРАФАХ

В параграфе 1.7 мы показали, что матричная теорема о деревьях для графов дает один из нескольких методов подсчета помеченных деревьев, основанный на определении числа остовов помеченного графа K_p . Сейчас мы приведем только формулировку утверждения, распространяющего эту теорему на оргграфы и дающего число остовов данного оргафа D , каждый из которых ориентирован по направлению к некоторой своей вершине.

Предметом данного параграфа является применение этой матричной теоремы о деревьях для оргграфов к помеченному эйлерову оргграфу D с целью получения точной формулы для числа эйлеровых контуров в оргграфе D .

Входящее дерево получается из корневого дерева T с корнем v ориентированием всех его ребер по направлению к вершине v . *Выходящее дерево* является ориентированно-двойственным к выходящему. Ясно, что оба эти множества ориентированных деревьев

¹ То есть кофактор, соответствующий диагональному элементу матрицы. — *Прим. перев.*

находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством корневых деревьев.

Рассмотрим оргграф D , который изображен на рис. 1.8.1 и вершины которого помечены числами 1, 2, 3, 4, 5. Существуют ровно четыре остовных дерева, выходящих из вершины 1, и два остовных дерева, входящих в вершину 1 (как показано на рис. 1.8.1, б и в).

Пусть D — оргграф с матрицей смежности A . Определим диагональную матрицу M_{out} , у которой (i,i) -элемент равен $od\ v_i$ —

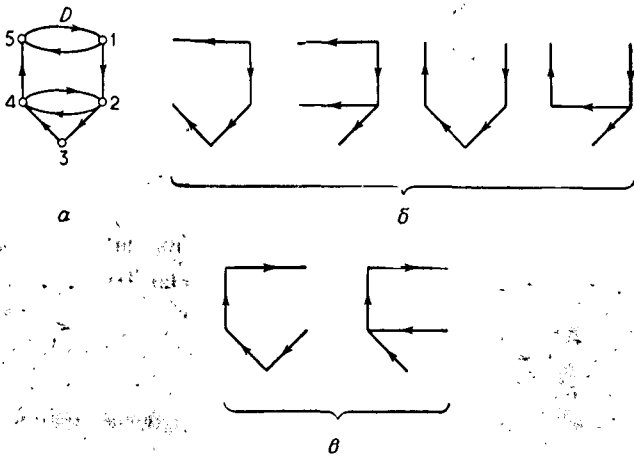


Рис. 1.8.1 Остовы орграфа D , выходящие и входящие в вершину, помеченную цифрой 1.

полустепени исхода вершины v_i . Затем положим $C_{out} = M_{out} - A$. Таким образом, сумма всех элементов матрицы C_{out} , стоящих в одной и той же строке, равна нулю, но необязательно это будет выполняться для столбцов. В действительности, как мы увидим вскоре, сумма элементов матрицы C_{out} , стоящих в одном и том же столбце, равна также нулю тогда и только тогда, когда D — эйлеров оргграф. Аналогично определяется матрица $C_{in} = M_{in} - A$. Следующий важный результат был найден Боттом и Мейберри [1] и доказан Таттом [1].

(1.8.1). Матричная теорема о деревьях для оргграфов. Все кофакторы i -й строки матрицы C_{out} равны друг другу, и их общее значение есть число остовов орграфа D , входящих в вершину v_i . Двойственным образом, общее значение кофакторов i -го столбца матрицы C_{in} равно числу остовов, выходящих из вершины v_i .

Мы опускаем доказательство, но эту теорему легко проиллюстрировать на примере орграфа D , изображенного на рис. 1.8.1, для которого две матрицы, упомянутые в теореме, имеют вид

$$C_{out} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{in} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Используя их, убеждаемся сразу, исходя из первой строки матрицы C_{out} и из первого столбца матрицы C_{in} , что орграф D имеет

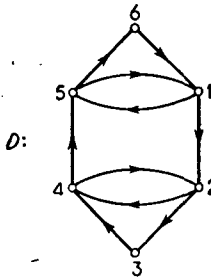


Рис. 1.8.2 Эйлеров орграф.

в точности четыре остова, выходящих из вершины 1, и два остова, входящих в эту вершину (как показано на рис. 1.8.1).

Орграф называется *эйлеровым*, если существует замкнутый остовный ориентированный маршрут, проходящий через каждую дугу точно один раз. Такой маршрут называется *эйлеровым контуром*. Один критерий эйлеровости орграфа состоит в следующем (см. Харари [1], стр. 240): орграф должен быть связным, и для всякой его вершины полустепень исхода равна полустепени захода. Например, орграф, показанный на рис. 1.8.1, не является эйлеровым, а орграф D , изображенный на рис. 1.8.2, эйлеров.

Из определения эйлерова орграфа следует, что матрицы C_{out} и C_{in} имеют одинаковые диагонали и поэтому равны. Для орграфа D , данного на рис. 1.8.2, эта матрица имеет вид

$$C = C_{out} = C_{in} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Первый шаг в доказательстве матричной теоремы о деревьях для графов состоит в замечании, что если в матрице сумма элементов

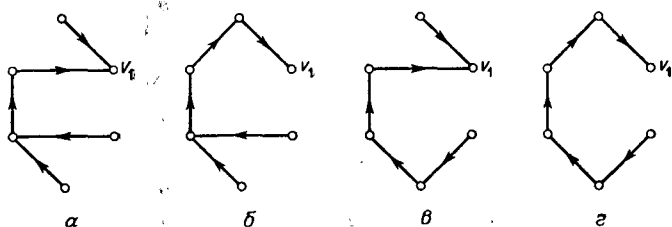


Рис. 1.8.3 Остовы, входящие в вершину v_i , у орграфа, изображенного на рис. 1.8.2.

любой строки, так же как и сумма элементов любого столбца, равна нулю, то всякий кофактор матрицы имеет одно и то же значение. Следовательно, в силу теоремы 1.8.1, каждый эйлеров орграф имеет одно и то же число остовов, входящих в каждую вершину и выходящих из каждой вершины. Например, в приведенной выше матрице все кофакторы равны 4, так что существует по четыре остовных входящих дерева для каждой вершины орграфа (как показано на рис. 1.8.3).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы применить матричную теорему о деревьях для орграфов к выводу формулы для числа эйлеровых контуров в данном орграфе. При доказательстве мы будем придерживаться изящного изложения Кастелейна [1]. Этот результат впервые был получен де Брёйном и ван Ардене-Эренфест [1], хотя частный случай был рассмотрен еще раньше в работе Смита и Татта [1]. Так как для каждой вершины v_i эйлерова орграфа D выполняется равенство $od\ v_i = id\ v_i$, то мы можем обозначить это число через d_i .

Теорема. Число $e(D)$ эйлеровых контуров в помеченном эйлеровом орграфе D , у которого общее значение кофакторов матрицы $C = C_{\text{out}} = C_{\text{in}}$ равно c , задается формулой

$$e(D) = c \prod_i (d_i - 1)!. \quad (1.8.2)$$

Доказательство. Пусть v_1 — произвольная вершина эйлерова орграфа D . Покажем, что каждый эйлеров контур E орграфа D определяет единственный остов T , входящий в вершину v_1 , и что каждый такой остов T определяет в точности $\prod (d_i - 1)!$ эйлеровых контуров. А так как мы уже видели, что число остовов орграфа D , входящих в каждую вершину, равно c , то тем самым формула (1.8.2) будет доказана.

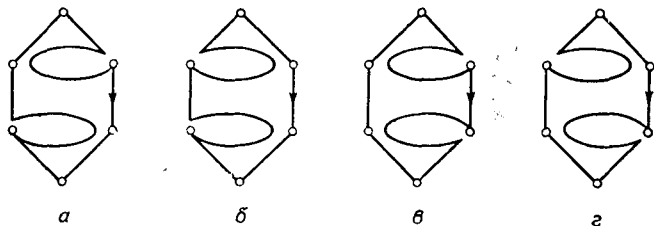


Рис. 1.8.4 Эйлеровы контуры в орграфе, изображенном на рис. 1.8.2.

Чтобы построить остов, входящий в вершину v_1 и определяемый данным эйлеровым контуром E в орграфе D , назовем *последней дугой* любой вершины $v_i \neq v_1$ такую дугу, выходящую из v_i , которая проходится последней при движении по контуру E , если началом (и концом) контура является вершина v_1 . Таким образом, только вершина v_1 не имеет последней дуги. Остов T определяется тогда как такой ориентированный остовный подграф орграфа D , у которого все дуги являются последними дугами. Так как в подграфе T полустепень исхода вершины v_1 равна 0, а полустепени исхода всех других вершин равны 1, то он должен быть деревом, входящим в вершину v_1 (см. Харари, Норман, Карп-райт [1], стр. 283, теорема 10.12).

Пусть теперь T — некоторый остов, входящий в вершину v_1 (один из c таких остовов). Чтобы построить все эйлеровы контуры E , связанные с остовом T , мы действуем так же, как и в предыдущем абзаце, т. е. последними дугами контура E относительно вершины v_1 будут дуги остова T . Так как орграф D эйлеров, то, как мы уже отмечали, $od v_i = id v_i = d_i$. При построении контура E из остова T одна из дуг, выходящих из произвольной вершины $v_i \neq v_1$, сначала не учитывается, так как позднее исполь-

зается как последняя дуга этой вершины; кроме того, одна дуга, выходящая из вершины v_1 , резервируется для использования в качестве первой дуги контура E . Итак, для каждой вершины v_i (включая вершину v_1) существует ровно $(d_i - 1)!$ различных упорядочений дуг, выходящих из v_i , по их появлению в контуре E . Так как эти выборки независимы, то, перемножая факториалы, получаем число эйлеровых контуров, определяемых остовом T . Но существует s таких остовов, что и доказывает формулу (1.8.2). ■

(1.8.3). Следствие. Если в эйлеровом орграфе каждое d_i равно либо 1, либо 2, то число эйлеровых контуров равно числу s остовов, входящих в произвольную вершину.

Утверждение мгновенно следует из того, что каждый $(d_i - 1)! = 1$. Проиллюстрируем это следствие на примере орграфа D , который изображен на рис. 1.8.2 и в котором каждое d_i равно либо 1, либо 2. Из вычисления кофакторов, которое предшествовало рис. 1.8.3, мы знаем, что орграф D имеет в точности четыре эйлеровых контура. Они представлены на рис. 1.8.4 в соответствии с остовными входящими деревьями, показанными на рис. 1.8.3.

УПРАЖНЕНИЯ 1

1.1. Связные помеченные орграфы.

1.2. Помеченные ориентации данного (p, q) -графа, число симметрий которого равно s .

1.3. Направленные помеченные графы и знаковые помеченные графы, в которых каждое ребро либо положительно, либо отрицательно.

1.4. Помеченные (p, q) -графы, не имеющие изолированных вершин. (Гилберт [1])

1.5. (а) Помеченные связные (p, q) -графы

$$\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\{p\}} \frac{p!}{\prod p_i!} \binom{m}{q},$$

где $m = \sum_{i=1}^k \binom{p_i}{2}$ и вторая сумма берется по всем разбиениям

$p_1 + \dots + p_k = p$ числа p на k частей, $p_i > 0$.

(б) Помеченные (p, q) -блоки. (Риддел [1])

1.6. Помеченный граф с множеством вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$ называется *звездным многоугольником*, если из смежности вершин v_0 и v_i следует, что для всех $k = 1, \dots, p - 1$ вершина v_k смежна

¹ Всякий раз, когда в упражнении упоминается некоторый класс графов, это надо понимать так: читателю предлагается найти перечислительную формулу для указанного класса графов.

с v_{k+l} , где индексы берутся по модулю p . Существует $2^{(p-1)/2}$ звездных многоугольников порядка p . (Тёрнер [1])

1.7. Помеченные четные общие графы (см. § 7.5). (Рид [5])

1.8. Связные графы, у которых не помечены только висячие вершины. (Мун [3])

1.9. Помеченные деревья, у которых каждая вершина имеет степень

(а) 1 или 3,

(б) 1 или n , где $n > 3$.

1.10. Помеченные 2-раскрашенные деревья с m вершинами одного цвета и n вершинами — другого:

$$n^{m-1}m^{n-1}. \quad (\text{Скойнс [1]})$$

1.11. Помеченные гомеоморфно несводимые деревья:

$$(p-2)! \sum_{k=2}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k^{k-2}}{(k-2)!}. \quad (\text{Рид [9]})$$

1.12. Помеченные деревья с непомеченными висячими вершинами. (Указание. Используйте числа Стирлинга второго рода.)

(Харари, Мовшовиц, Риордан [1])

1.13. (а) Помеченные 2-деревья (см. § 3.5):

$$\binom{p}{2} (2p-3)^{p-4}. \quad (\text{Байнеке и Мун [1]})$$

(б) Помеченные k -деревья:

$$\binom{p}{k} (kp - k^2 + 1)^{p-k-2}. \quad (\text{Байнеке и Пипперт [1]})$$

(с) Реберно-помеченные 2-деревья:

$$\frac{(2p-3)!}{2(p-2)!} (2p-3)^{p-4}. \quad (\text{Палмер [1]})$$

1.14. *Плоским графом* называется такой граф, который уложен на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются. Помеченные плоские 2-деревья:

$$p(p-1)^2 \frac{(5p-10)!}{(4p-6)!}. \quad (\text{Палмер и Рид [1]})$$

1.15. (а) Помеченные связные функциональные орграфы (см. § 3.4):

$$\sum_{k=1}^p \frac{p!}{(p-k)!} p^{p-k+1}. \quad (\text{Рабин и Ситгривс})$$

(b) Помеченные связные унициклические графы. (Мун [4])
 1.16. Помеченные графы:

(a) Не имеющие висячих вершин.

(b) С заданным числом висячих вершин. (Рид. [9])

1.17. Помеченные кактусы (см. § 3.4), имеющие c_2 ребер, не лежащих на простых циклах, c_3 треугольников, c_4 четырехугольников, ..., c_n простых циклов, содержащих по n вершин:

$$\frac{p! p^c}{\prod_{k=2}^p ((k-1)!)^{c_k} c_k!},$$

где $c = \sum_{k=2}^p c_k - 2$.

(Харари и Уленбек [1])

1.18. (a) Число c_3 треугольников в помеченном графе равно $\frac{1}{6} \text{tr}(A^3)$, где A — матрица смежности графа; число c_4 четырехугольников и число c_5 пятиугольников также выражается в терминах матрицы A . (Харари и Манвел [1])

(b) Число простых цепей, содержащих три, четыре и пять вершин, может быть выражено в терминах матрицы A .

(Картрайт и Глисон [1], Харари и Росс [1])

1.19. Число способов, которыми можно так расположить 2^n двоичных цифр в круговую таблицу, что все 2^n последовательностей, получающихся с помощью разнообразных выборок n последовательных цифр в этой таблице, различны:

$$2^{2^n - 1 - n}.$$

(Указание: применить теорему (1.8.2) к эйлеровым орграфам (используемый термин не является точным, так как при этом допускаются петли), получающимся из универсального отношения $S \times S$ на 2-множестве $S = \{0, 1\}$ с помощью итерированных реберных орграфов (определение см. в § 10.3)). (де Брёйн [1])

Умение решать задачи — практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепиано: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь. Не ищите в этой книге чудодейственного ключа, который откроет перед вами все двери — научит решать все задачи. Однако вы найдете в ней хорошие образцы для подражания и множество благоприятных возможностей попрактиковаться. Если хотите научиться плавать — нужно войти в воду, а если желаете научиться решать задачи — решайте их.

Джордж Пойа, Математическое открытие ¹

Глава 2 ТЕОРЕМА ПОЙА

Для подсчета числа непомеченных графов задачу переформулируют так, чтобы ответ можно было получить, найдя число орбит некоторой подходящей группы подстановок. Тогда можно воспользоваться леммой Бернсайда и выразить число орбит на языке числа объектов, неподвижных относительно подстановок из рассматриваемой группы. Каждой группе подстановок отвечает свой многочлен, называемый цикловым индексом. Это понятие может быть прослежено еще у Фробениуса как частный случай соответствующей формулировки в терминах групповых характеров. Рудволис и Снаппер [1] указали на связь между этими обобщенными характерами и теоремами де Брёйна [2] и Фоулкса [1]. Редфилд [1], открывший цикловые индексы независимо, изобрел искусные схемы (гл. 7), которые позволили ему путем составления специального произведения цикловых индексов найти число классов некоторых матриц. В доказательстве его теоремы перечисления содержалась в неявной форме лемма Бернсайда. Методы Редфилда дали ему возможность решать задачи перечисления для многочисленных интересных комбинаторных структур при условии, что задачу перечисления в процессе ее рассмотрения можно было преобразовать в матричную форму, требуемую его теоремой, и при условии, что для получающихся цикловых индексов можно было вывести необходимые формулы. Хотя для решения одних задач этот метод был приспособлен превосходно, однако его применение к другим задачам сопряжено с определен-

¹ Есть русский перевод этой книги: Дж. Пойа, Математическое открытие, изд-во «Наука», М., 1970.

ными трудностями, так как структуры, для которых решаются задачи пересчета, должны быть истолкованы как матрицы. Напротив, классическая теорема пересчета, принадлежащая Пойа, может быть рассмотрена как средство для пересчета функций, и поэтому ее много легче применять к большинству задач теории графов. В своей наибольшей общности теорема Пойа включает лемму Бернсайда и часто позволяет выражать полную производящую функцию для класса графов в терминах подходящего циклового индекса и многочлена, называемого пересчитывающим рядом для фигур. Таким образом, именно общность, универсальность и легкость при его использовании делают метод Пойа наиболее мощным инструментом в пересчитывающем анализе.

2.1. ГРУППЫ И ГРАФЫ

Изучение групп подстановок лучше вести параллельно с изучением графов, ибо граф воспроизводит «картину» своей группы автоморфизмов. Таким образом, теоретико-групповые понятия, необходимые в этой главе, значительно легче усвоить, используя их толкование в теории графов.

Рассмотрим множество $X = \{1, 2, \dots, n\}$, и пусть A — некоторая совокупность подстановок множества X , замкнутая

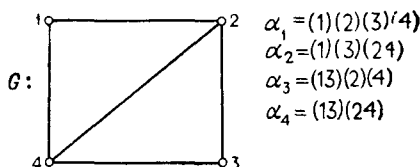


Рис. 2.1.1 Граф и его группа.

относительно операции умножения. Тогда A является группой подстановок на множестве объектов X . Порядок группы A , обозначаемый $|A|$, есть число подстановок в A , а степень группы A — это число n элементов в множестве объектов X . Например, рассмотрим граф G , изображенный на рис. 2.1.1 и выбранный, как обычно, наугад. Его четыре вершины составляют множество X целых чисел 1, 2, 3, 4. Заметим, что список подстановок, приведенных на рисунке, включает все подстановки множества X , сохраняющие отношение смежности в графе G . К примеру, вершины 1 и 4 смежны в G . Подстановка $(13)(2)(4)$ преобразует вершины 1 и 4 в вершины 3 и 4, и эти образы, 3 и 4, также являются смежными. Таким образом, подстановка $(13)(2)(4)$ сохраняет смежность вершин 1 и 4. Так как совокупность подстановок в этом списке замкнута относительно умножения, то она образует группу. Как уже отмечалось,

совокупность $\Gamma(G)$ всех подстановок на множестве $V(G)$, сохраняющих смежность, называется *группой графа G* , или *группой автоморфизмов графа G* , а ее подстановки называются *автоморфизмами*. Таким образом, группа графа является группой подстановок, объектами которых являются вершины графа.

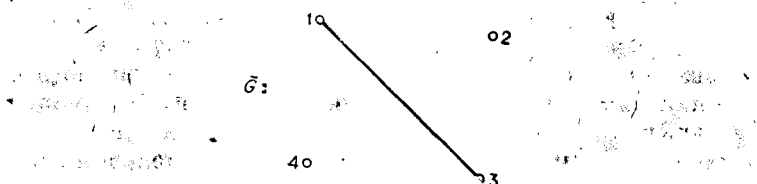


Рис. 2.1.2 Дополнение графа, изображенного на рис. 2.1.1.

Дополнение \bar{G} графа G имеет то же самое множество вершин, что и граф G , и две вершины u и v смежны в \bar{G} тогда и только тогда, когда они не смежны в G . Дополнение четырехвершинного графа, показанного на рис. 2.1.1, изображено на рис. 2.1.2. Подстановки, сохраняющие отношение смежности в графе, приведенном на рис. 2.1.2, — те же самые, что и у графа, данного на рис. 2.1.1. В действительности для всякого графа G подстановки,

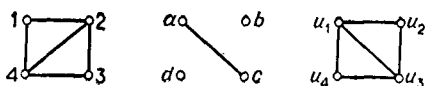


Рис. 2.1.3 Три графа с одинаковыми группами.

сохраняющие в нем смежность, сохраняют также несмежность, а поэтому

$$\Gamma(\bar{G}) = \Gamma(G). \quad (2.1.1)$$

Чтобы решить, одинаковы ли две группы подстановок, нам теперь требуется более тонкий критерий, чем групповой изоморфизм. Рассмотрим три помеченных графа, представленных на рис. 2.1.3. Они имеют абсолютно одинаковые группы. Различие между ними заключается лишь в «дополнительности» и пометках. Удобно поэтому отождествлять группы подстановок, у которых подстановки отличаются только «названиями» переставляемых объектов. Исходя из этого, дадим следующие определения. Две группы подстановок A и B с множествами объектов X и Y соответственно называются *изоморфными* (и это записывается в виде

$A \cong B$), если существует функция h из A на B , такая, что для всех подстановок α_1 и α_2 из группы A выполняется равенство

$$h(\alpha_1\alpha_2) = h(\alpha_1)h(\alpha_2). \quad (2.1.2)$$

Если существует, кроме того, взаимно однозначное отображение φ из X на Y , такое, что для каждой подстановки α из A и каждого элемента x из X справедливо равенство

$$\varphi(\alpha x) = h(\alpha)\varphi(x), \quad (2.1.3)$$

то группы A и B называются *идентичными* и мы пишем: $A = B$. Таким образом, отображение φ просто заменяет пометки, или названия, объектов, в которых действует группа A , пометками, отвечающими группе B . Теперь легко видеть, что группы всех трех графов изображенных на рис. 2.1.3, идентичны.

2.2. ЦИКЛОВОЙ ИНДЕКС ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

Пусть A — группа подстановок с множеством объектов $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Хорошо известно, что каждая подстановка α из A может быть единственным образом представлена в виде произведения непересекающихся циклов. Для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ через $j_k(\alpha)$ обозначим число циклов длины k в разложении подстановки α в произведение непересекающихся циклов. Тогда *цикловой индекс* группы A , обозначаемый $Z(A)$ (буква Z от слова *Zykluszeiger* использовалась Пойа [1]), представляет собой многочлен от переменных s_1, s_2, \dots, s_n , определяемый формулой

$$Z(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=1}^n s_k^{j_k(\alpha)}. \quad (2.2.1)$$

Когда необходимо указывать переменные, мы будем вместо $Z(A)$ писать $Z(A; s_1, s_2, \dots, s_n)$. Редфилд [1] называл этот многочлен «group-reduction function», а Пойа [1], который ввел это понятие независимо, назвал его «цикловым индексом».

В качестве примера рассмотрим симметрическую группу S_n , действующую на множестве из n объектов. Для $n = 3$ замечаем, что тождественная подстановка (1) (2) (3) имеет три единичных цикла, дающих слагаемое s_1^3 . Три подстановки (1) (23), (2) (13) и (3) (12) имеют каждая по одному единичному циклу и по одному циклу длины 2, так что получается одно слагаемое $3s_1s_2$. Наконец, две подстановки (123) и (132) вносят $2s_3$. Таким образом, имеем

$$Z(S_3) = (1/3!) (s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3). \quad (2.2.2)$$

На протяжении всей оставшейся части этой книги очень часто будут использоваться явные формулы для цикловых индексов пяти известных групп подстановок: симметрической, знакопеременной, циклической, диэдральной и единичной. И Редфилд [1], и Пойа [1] выразили $Z(S_n)$ на языке разбиений числа n . Заметим, что каждая подстановка α на n объектах может быть связана с определенным разбиением числа n , имеющим для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ точно $j_k(\alpha)$ частей, равных числу k . Будем задавать разбиение числа n посредством вектора $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, где j_k — число частей разбиения, равных k . Итак,

$$n = \sum_{k=1}^n k j_k. \quad (2.2.3)$$

Пусть $h(j)$ — число подстановок в группе S_n , разложение которых на непересекающиеся циклы определяется разбиением (j) , так что для каждого k $j_k = j_k(\alpha)$. Тогда легко видеть, что

$$h(j) = n! \prod_k k^{j_k} \cdot j_k!. \quad (2.2.4)$$

Таким образом, цикловой индекс $Z(S_n)$ имеет вид, приводимый в следующей теореме.

Теорема. *Цикловой индекс симметрической группы дается формулой*

$$Z(S_n) = (1/n!) \sum_{(j)} h(j) \prod_{k=1}^n s_k^{j_k}, \quad (2.2.5)$$

где сумма берется по всем разбиениям (j) числа n и $h(j)$ задается выражением (2.2.4).

Цикловой индекс знакопеременной группы A_n , состоящей из всех четных подстановок группы S_n , выражается в следующем виде.

Следствие. *Цикловой индекс знакопеременной группы дается формулой*

$$Z(A_n) = Z(S_n) + Z(S_n; s_1, -s_2, s_3, -s_4, \dots). \quad (2.2.6)$$

Для иллюстрации этого следствия заметим, что из (2.2.2) мы имеем

$$Z(S_3; s_1, -s_2, s_3) = (1/3!) (s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3), \quad (2.2.7)$$

а учитывая (2.2.2) и (2.2.7), получаем

$$Z(A_3) = \frac{1}{3} (s_1^3 + 2s_3). \quad (2.2.8)$$

Часто бывает удобно выразить $Z(S_n)$ через $Z(S_k)$, $k < n$. Для этой цели полагаем по определению $Z(S_0) = 1$. Тогда рекурсивная формула, доказательство которой получается непосредственно по индукции, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. *Цикловой индекс симметрической группы удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$Z(S_n) = n^{-1} \sum_{k=1}^n s_k Z(S_{n-k}). \quad (2.2.9)$$

Циклическая группа степени n , обозначаемая C_n , порождается циклом $(123 \dots n)$. Редфилд вывел следующую формулу для $Z(C_n)$, используя φ -функцию Эйлера.

Теорема. *Цикловой индекс циклической группы C_n дается формулой*

$$Z(C_n) = n^{-1} \sum_{k|n} \varphi(k) \cdot s_k^{n/k}. \quad (2.2.10)$$

Диэдральная группа степени n , обозначаемая D_n , порождается циклом $(123 \dots n)$ и отражением $(1n)(2(n-1))(3(n-2)) \dots$. Ее цикловой индекс может быть выражен через $Z(C_n)$.

Следствие. *Цикловой индекс диэдральной группы D_n дается формулой*

$$Z(D_n) = \frac{1}{2} Z(C_n) + \begin{cases} \frac{1}{2} s_1 s_2^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{1}{4} (s_2^{n/2} + s_1^2 s_2^{(n-2)/2}), & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Для иллюстрации этих утверждений можно использовать (2.2.10) и (2.2.11), чтобы получить $Z(C_3)$ и $Z(D_3)$, но заметим, что $C_3 = A_3$ и $D_3 = S_3$. Поэтому $Z(C_3)$ и $Z(D_3)$ даются также формулами (2.2.8) и (2.2.2) соответственно. Наши обозначения групп завершаются введением символа E_n для *единичной группы*, действующей на множестве из n объектов, так что

$$Z(E_n) = s_1^n. \quad (2.2.12)$$

Заметим далее, что цикловой индекс не определяет однозначно группу подстановок. Именно, две группы подстановок A и B не обязательно идентичны, если их цикловые индексы одинаковы. В действительности они могут быть даже не изоморфны и все-таки иметь один и тот же цикловой индекс, как это демонстрируется

в следующем довольно точном переводе отрывка из работы Пойа [1, стр. 176]:

Весьма интересно заметить, что две комбинаторно эквивалентные группы подстановок (имеющие одинаковые цикловые индексы) не обязательно идентичны. На самом деле, они даже не обязаны быть изоморфными. Действительно, пусть p — нечетное простое число и $m \geq 3$ — целое положительное число ($p = m = 3$ — простейший пример). Хорошо известно (см. Бернсайд [1, стр. 143]), что существует некоммутативная группа порядка p^m , в которой каждый элемент, кроме единичного, имеет порядок p . Пусть B — регулярное представление этой группы, рассматриваемое как группа подстановок. Пусть A — регулярное представление абелевой группы порядка p^m и типа (p, p, \dots, p) . Тогда A и B являются группами подстановок, у которых порядок и степень равны $p^m = d$ и один и тот же цикловой индекс

$$d^{-1} (s_1^d + (d-1) s_p^{d/p}),$$

так как каждая подстановка из A и B , отличная от единичной, содержит в точности p^{m-1} циклов длины p .

Этот параграф мы завершим рассмотрением двуместной операции на группах подстановок, а также формулы для соответствующего циклового индекса. Пусть A и B — группы с непересекающимися множествами объектов X и Y соответственно. Тогда *произведением*¹ групп A и B , обозначаемым AB , называется группа подстановок с множеством объектов $X \cup Y$, такая, что каждая пара подстановок α из A и β из B определяет подстановку $\alpha\beta$ из AB , действующую по правилу: для каждого z из $X \cup Y$

$$\alpha\beta(z) = \begin{cases} \alpha z, & z \in X, \\ \beta z, & z \in Y. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Таким образом, группа AB имеет степень $|X| + |Y|$ и порядок $|A| \cdot |B|$. Обозначим произведение $AA \dots A$ из m копий группы A через A^m . Пойа [1] отметил элементарный, но важный факт, что цикловой индекс произведения равен произведению цикловых индексов групп-сомножителей.

Теорема. *Цикловой индекс произведения AB дается формулой*

$$Z(AB) = Z(A) \cdot Z(B). \quad (2.2.14)$$

Группа полного графа K_n с n вершинами равна, естественно, S_n . Кроме того, граф G , компонентами которого являются графы K_n

¹ Ранее (см. Харари [1]) мы называли это произведение суммой и обозначали $A \dot{+} B$.

и K_m с $n \neq m$, имеет группу $\Gamma(G) = S_n S_m$. Следовательно, из (2.2.14) получаем $Z(\Gamma(G)) = Z(S_n) \cdot Z(S_m)$. Когда будет необходимо говорить о цикловом индексе группы некоторого графа, мы будем часто упрощать обозначение и писать $Z(G)$ вместо $Z(\Gamma(G))$. Например, $Z(K_n)$ дается формулами (2.2.4) и (2.2.5).

2.3. ЛЕММА БЕРНСАЙДА

Три леммы, обсуждаемые ниже, составляют основу разнообразных подходов к задачам перечисления непомеченных графов. Хотя, по-видимому, они были известны еще Фробениусу, Шуру и другим математикам, мы называем их леммами Бернсайда [1]. Пусть A — группа подстановок с множеством объектов $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда элементы x и y из X называются *A-эквивалентными* или *подобными*, если существует подстановка α из A , такая, что $\alpha x = y$. Классическим и немедленно получающимся результатом является утверждение о том, что введенное нами отношение есть эквивалентность. Классы эквивалентности называются *орбитами*, или *системами транзитивности* группы A .

Для каждого x из X положим

$$A(x) = \{\alpha \in A \mid \alpha x = x\}. \quad (2.3.1)$$

Так определенное множество $A(x)$ называется *стабилизатором* элемента x . Заметим, что всякий раз, когда элементы x и y принадлежат одной и той же орбите, множества $A(x)$ и $A(y)$ являются сопряженными подгруппами группы A и, следовательно, $|A(x)| = |A(y)|$. Сейчас мы покажем, что для любого элемента y из орбиты Y группы A выполняется соотношение

$$|A| = |A(y)| \cdot |Y|, \quad (2.3.2)$$

т. е. число элементов в орбите, содержащей элемент y , равно индексу стабилизатора элемента y в группе A . Чтобы убедиться в этом, мы сначала разложим группу A в объединение правых классов смежности по подгруппе $A(y)$:

$$A = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i A(y).$$

Теперь остается только указать естественное взаимно однозначное соответствие между этими классами смежности и элементами орбиты Y . Для каждого $i = 1, \dots, m$ сопоставляем классу смежности $\alpha_i A(y)$ элемент $\alpha_i y$ из Y . Если $i \neq j$, то $\alpha_i y \neq \alpha_j y$, так как иначе бы подстановка $\alpha_j^{-1} \alpha_i$ принадлежала подгруппе $A(y)$ и, следовательно, подстановка α_i являлась бы элементом множества $\alpha_j A(y)$, что противоречит соотношению $\alpha_i A(y) \cap \alpha_j A(y) =$

$= \emptyset$. Значит, указанное соответствие является взаимно однозначным. Для всякого объекта y' из Y при некоторой подстановке α из A выполняется равенство $\alpha y = y'$. Из разложения группы A на классы смежности следует, что $\alpha = \alpha_i \gamma$, если $\gamma \in A(y)$. Следовательно, $y' = \alpha_i y$ и, таким образом, каждый элемент орбиты Y соответствует некоторому классу смежности. Значит, m есть число элементов в орбите Y и формула (2.3.2) доказана.

Теперь мы подготовлены к доказательству первой леммы, в которой дается формула, выражающая число $N(A)$ орбит группы A как среднее арифметическое числа неподвижных точек всех подстановок группы A .

Лемма Бернсайда. Число $N(A)$ орбит группы A дается формулой

$$N(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha). \quad (2.3.3)$$

Доказательство. Пусть X_1, X_2, \dots, X_m — орбиты группы A , и для каждого $i = 1, \dots, m$ пусть x_i — элемент i -й орбиты X_i . Тогда из формулы (2.3.2) имеем

$$N(A) \cdot |A| = \sum_{i=1}^m |A(x_i)| \cdot |X_i|. \quad (2.3.4)$$

Мы видели, что если x и x_i принадлежат одной и той же орбите, то $|A(x)| = |A(x_i)|$. Следовательно, соотношение (2.3.4) можно иначе записать так:

$$N(A) \cdot |A| = \sum_{x \in X} |A(x)|, \quad (2.3.5)$$

или, в других обозначениях,

$$N(A) \cdot |A| = \sum_{x \in X} \sum_{\alpha \in A(x)} 1. \quad (2.3.6)$$

Теперь, меняя порядок суммирования в правой части формулы (2.3.6) и изменяя соответствующим образом индексы суммирования, имеем

$$N(A) |A| = \sum_{\alpha \in A} \sum_{x=\alpha x} 1. \quad (2.3.7)$$

Но $\sum_{x=\alpha x} 1$ есть в точности $j_1(\alpha)$. Таким образом, для завершения доказательства надо обе части разделить на $|A|$. ■

Для иллюстрации этой леммы рассмотрим граф G , изображенный на рис. 2.3.1. Используя обозначения, относящиеся к произведению групп, можно представить группу графа G в виде: $\Gamma(G) = S_1^3 S_2^2$. Порядок этой группы равен 4, и каждая ее под-

становка оставляет неподвижными три точки: 3, 5 и 7. Пусть подстановки обозначены так:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7), & \alpha_2 &= (12)(3)(4)(5)(6)(7), \\ \alpha_3 &= (46)(1)(2)(3)(5)(7), & \alpha_4 &= (12)(46)(3)(5)(7). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Тогда $j_1(\alpha_1) = 7, j_1(\alpha_2) = j_1(\alpha_3) = 5$ и $j_1(\alpha_4) = 3$. Таким образом, $N(\Gamma(G)) = \frac{1}{4}(7 + 5 + 5 + 3) = 5$. Ясно, конечно, что орбитами этой группы являются множества $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{1, 2\}$ и $\{4, 6\}$. Заметим, что число орбит в точности совпадает с числом способов получения из графа G различных непомеченных корневых графов. Чтобы получить все такие графы, нужно просто

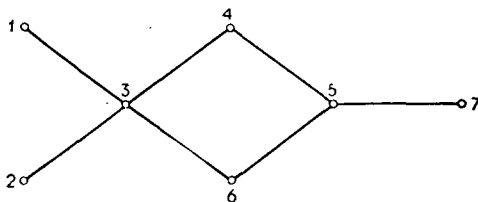


Рис. 2.3.1 Граф с тремя неподвижными вершинами.

выбирать в качестве корня по одной вершине (точке) из каждой орбиты.

Изредка нам нужно будет ограничивать действие группы A на некоторое подмножество Y множества X , где Y — объединение каких-либо орбит группы A . Поэтому обозначим через $A|Y$ множество подстановок, действующих на Y и получающихся с помощью ограничения на подмножество Y соответствующих подстановок группы A . Для каждой подстановки α из группы A число элементов в Y , неподвижных относительно подстановки α , обозначим через $j_1(\alpha|Y)$. Тогда мы можем сформулировать следствие формулы (2.3.3).

Ограниченная форма леммы Бернсайда.

$$N(A|Y) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha|Y). \quad (2.3.9)$$

Далее мы дадим незначительное обобщение формулы (2.3.3), называемое взвешенной формой леммы Бернсайда. Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, содержащее множество всех рациональных чисел, и w — некоторая функция, называемая *весовой функцией*, отображающая множество объектов X группы A в кольцо R . В практических приложениях весовая функция является постоянной на каждой орбите группы A . Следовательно,

в этом случае мы можем определить вес любой орбиты X_i как вес произвольного ее элемента. Для каждой орбиты X_i обозначим ее вес через $w(X_i)$ и определим его соотношением $w(X_i) = w(x)$ для всякого элемента x из X_i .

Взвешенная форма леммы Бернсайда. Сумма весов орбит группы A дается формулой

$$\sum_{i=1}^m w(X_i) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{x=\alpha x} w(x). \quad (2.3.10)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству формулы (2.3.3), и мы его опускаем.

Чтобы проиллюстрировать сформулированную лемму и представить сумму цикловых индексов в таком виде, который будет эффективно использоваться в гл. 8, рассмотрим опять граф G , изображенный на рис. 2.3.1. Вес $w(k)$ каждой вершины k графа G определим как цикловой индекс стабилизатора вершины k в группе $\Gamma(G)$. Итак,

$$w(1) = \frac{1}{2} (s_1^7 + s_1^5 s_2) \quad (2.3.11)$$

и

$$w(3) = \frac{1}{4} (s_1^7 + 2s_1^5 s_2 + s_2^2 s_3). \quad (2.3.12)$$

Заметим, что

$$w(1) = w(2) = w(4) = w(6) \quad \text{и} \quad w(3) = w(5) = w(7); \quad (2.3.13)$$

таким образом, в частности, функция w на каждой орбите постоянна.

Для этого примера дадим набросок проверки формулы (2.3.10), заметив, что сумма весов орбит равна $w(1) + w(3) + w(4) + w(5) + w(7) = 2w(1) + 3w(3)$. В нашем случае правая часть формулы (2.3.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \sum_{x=\alpha_i x} w(x) &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{x=\alpha_1 x} w(x) + \dots + \sum_{x=\alpha_4 x} w(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k=1}^7 w(k) + \sum_{k=3}^7 w(k) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

где две суммы, не выписанные в последних фигурных скобках, немедленно находятся после внимательного рассмотрения под-

становок α_3 и α_4 из (2.3.8). Используя (2.3.13), можно эту сумму переписать так: $2w(1) + 3w(3)$, что, как мы видели, есть сумма весов орбит. Проверка закончена.

Аналогично, сумма цикловых индексов по всем различным корневым графам, получающимся из некоторого графа G , может быть выражена через веса неподвижных точек (вершин) группы $\Gamma(G)$.

2.4. ТЕОРЕМА ПОЙА

Поскольку в большинстве приложений основной перечислительной теоремы Пойа требуется только вариант с одной переменной и поскольку в этом случае теорема Пойа понимается к тому же значительно легче, мы не будем приводить детали трафаретного обобщения ее на n переменных.

Сначала введем понятие степенной группы (см. Харари и Палмер [4]), с которым мы позднее то и дело будем сталкиваться в этой книге. Пусть A — группа подстановок с множеством объектов $X = \{1, 2, \dots, n\}$, и пусть B — конечная группа подстановок со счетным множеством объектов Y , содержащим не менее двух элементов. Тогда *степенная группа*, обозначаемая B^A , имеет в качестве множества объектов совокупность Y^X всех функций, действующих из X в Y . Подстановками группы B^A являются все упорядоченные пары подстановок α из A и β из B , записываемые в виде $(\alpha; \beta)$. Образ произвольной функции f из Y^X при действии на нее подстановки $(\alpha; \beta)$ дается формулой

$$((\alpha; \beta)f)(x) = \beta f(\alpha x) \quad (2.4.1)$$

при всех x из X .

Для того чтобы привести классическую формулу перечисления Пойа, мы возьмем $B = E$ — единичной группе на множестве Y . Рассмотрим теперь степенную группу E^A , действующую на множестве Y^X . Пусть $w: Y \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ — функция, область значений которой является множеством неотрицательных целых чисел и для которой $|w^{-1}(k)| \leq \infty$ при всех k^1 . В частности, для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ пусть

$$c_k = |w^{-1}(k)| \quad (2.4.2)$$

будет числом «фигур» веса k .

¹ Здесь через $w^{-1}(k)$ обозначен полный прообраз числа k при отображении w . — Прим. перев.

Тогда об элементе y из Y , для которого $w(y) = k$, говорят, что он имеет вес k , а функцию w называют *весовой функцией*. Далее, ряд

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (2.4.3)$$

относительно переменной x , который перечисляет элементы множества Y в соответствии с их весами, называют ¹ «перечисляющим рядом для фигур».

Вес функции f из Y^X определяется формулой

$$w(f) = \sum_{x \in X} w(f(x)), \quad (2.4.4)$$

и тогда нетрудно показать, что функции, принадлежащие одной и той же орбите степенной группы E^A , имеют одинаковые веса. Следовательно, *весом $w(F)$ орбиты F группы E^A является вес любой функции f из орбиты F* . Так как $|w^{-1}(k)| < \infty$ для всякого $k = 0, 1, 2, \dots$, то существует только конечное число орбит каждого веса. Поэтому обозначим через C_k число орбит веса k . Тогда ряд

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \quad (2.4.5)$$

относительно переменной x назовем «перечисляющим рядом для функций», или, следуя работе Пойа [1], «перечисляющим рядом для конфигураций»². Теперь мы можем, наконец, сформулировать основную теорему этой книги, выражающую ряд $C(x)$ в терминах циклового индекса $Z(A)$ и ряда $c(x)$. В приводимой ниже формуле $Z(A, c(x))$ является сокращением для $Z(A; c(x), c(x^2), c(x^3), \dots)$.

Теорема (теорема пересчета Пойа). *Ряд $C(x)$, перечисляющий функции, получается с помощью подстановки в цикловой индекс $Z(A)$ на место каждой переменной s_k ряда $c(x^k)$, перечисляющего фигуры. Символически:*

$$C(x) = Z(A, c(x)). \quad (2.4.6)$$

Этот результат используется настолько часто при пересчете графов, что мы вместо «теорема пересчета Пойа» будем обычно писать для краткости «теорема Пойа».

¹ Или «рядом, перечисляющим фигуры». — *Прим. перев.*

² Мы его будем называть также «рядом, перечисляющим функции». — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть ε — тождественная подстановка на Y . Тогда для всякой подстановки α из A и любого $k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим через $\varphi(\alpha, k)$ число функций веса k , неподвижных относительно подстановки $(\alpha; \varepsilon)$. Ограничивая для каждого k действие степенной группы E^A на множество функций веса k и применяя ограниченную форму леммы Бернсайда (2.3.9), имеем

$$C_k = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha, k). \quad (2.4.7)$$

Следовательно,

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha, k) \cdot x^k \quad (2.4.8)$$

и, меняя порядок суммирования, получаем

$$C(x) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha, k) \cdot x^k. \quad (2.4.9)$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha, k) \cdot x^k$ перечисляет все функции, неподвижные относительно подстановки $(\alpha; \varepsilon)$, и мы постараемся найти другую форму для этого ряда.

Предположим, что функция f из Y^X неподвижна относительно подстановки $(\alpha; \varepsilon)$. Тогда $((\alpha; \varepsilon) f)(x) = f(x)$ для всех x из X и, в силу формулы (2.4.1), имеем $((\alpha; \varepsilon) f)(x) = \varepsilon f(\alpha x)$. Таким образом, для всех x должно выполняться равенство $f(\alpha x) = f(x)$, т. е. функция f должна быть постоянной на непересекающихся циклах подстановки α . Обратно, все функции, постоянные на циклах подстановки α , неподвижны относительно подстановки $(\alpha; \varepsilon)$.

Пусть z_r — цикл длины r в подстановке α . Если функция f отображает элементы цикла z_r в один из c_k элементов множества Y , имеющих вес k , то цикл z_r вносит в вес функции f значение $r \cdot k$. Тогда легко видеть, что для каждого k коэффициент при x^{rk} в ряду

$$c(x^r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{rk} \quad (2.4.10)$$

равен числу способов, которыми можно определить функцию f на элементах цикла z_r так, чтобы она была неподвижна относительно подстановки $(\alpha; \varepsilon)$ и чтобы вклад в вес $w(f)$ составлял $r \cdot k$. Отсюда следует, что ряд $[c(x^r)]^{1/r(\alpha)}$ перечисляет в соответствии с их весами различные способы определения функций, постоянных на всех циклах длины r подстановки α .

Рассматривая все циклы подстановки α , мы можем выразить ряд для функций, постоянных на циклах, в виде произведения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha, k) x^k = \prod_{k=1}^n [c(x^k)]^{j_k(\alpha)}. \quad (2.4.11)$$

Теперь (2.4.6) следует из (2.4.9), (2.4.11) и определения $Z(A)$. ■

Для иллюстрации теоремы рассмотрим «проблему ожерелья». На рис. 2.4.1 показаны два ожерелья, каждое с четырьмя бусинками. Каждая из бусинок помечена числом из множества $X = \{1, 2, 3, 4\}$, и две бусинки ожерелья — белые, а две другие — черные. Ясно, что число помеченных ожерелья с четырьмя бусинками, не содержащих бусинки иного цвета, чем белый и черный,

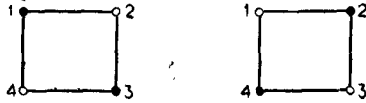


Рис. 2.4.1 Два помеченных ожерелья.

равно 48. Для того чтобы получить число непомеченных ожерелья, мы должны отождествлять ожерелья такие, как изображенные на рис. 2.4.1, когда одно ожерелье получается из другого только отражением или вращением нитки с бусинками. Если положим $Y = \{a, b\}$, то каждая функция f из X в Y соответствует некоторому помеченному ожерелью, в котором бусинка с номером $k \in X$ имеет «цвет» $f(k)$. Таким образом, ожерелье, представимое функцией f , имеет $|f^{-1}(a)|$ бусинок одного цвета и $|f^{-1}(b)|$ бусинок другого цвета. Пусть теперь единичная группа E_2 действует на множестве Y . Два ожерелья будут тождественны после удаления пометок в том случае, когда соответствующие им функции содержатся в одной и той же орбите степенной группы $E_2^{D_4}$. Если определим $w(a) = 0$ и $w(b) = 1$, то $1 + x$ будет перечисляющим рядом для Y и функция веса k будет представлять ожерелье с $4 - k$ белыми и k черными бусинками. Следовательно, перечисляющий ряд для функций $C(x)$ в этом случае перечисляет непомеченные ожерелья и коэффициент при x^k равен числу таких с k черными бусинками. Тогда, в силу формулы (2.4.6) из теоремы Пойа,

$$C(x) = Z(D_4, 1 + x). \quad (2.4.12)$$

Из (2.2.11) имеем

$$Z(D_4) = \frac{1}{8} (s_1^4 + 2s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 2s_4). \quad (2.4.13)$$

Тогда выполнив детали, связанные с подстановкой перечисляющего ряда для фигур $1 + x$ в цикловой индекс $Z(D_4)$, получаем

$$C(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4. \quad (2.4.14)$$

Шесть непомятых ожерелий с четырьмя бусинками двух цветов показаны на рис. 2.4.2.

Общее число ожерелий равно, конечно, $C(1)$, и, значит, общее число их может быть получено с помощью вычисления значения ряда $1 + x$, перечисляющего фигуры, при $x = 1$ и подстановки 2 вместо каждой переменной s_k в цикловой индекс $Z(D_4)$. Вообще, когда ряд $c(x)$, перечисляющий фигуры, является многочленом, то ряд $C(x)$, перечисляющий функции, — тоже многочлен. В этом случае число орбит функций (без учета

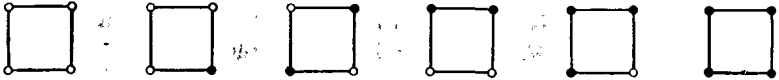


Рис. 2.4.2 Ожерелья с четырьмя бусинками.

их весов), равное $C(1)$, получается подстановкой $c(1)$ вместо каждой переменной в соответствующий цикловой индекс.

Следствие. Число орбит, определяемых степенной группой E_m^A , получается путем подстановки числа m вместо каждой переменной в $Z(A)$:

$$N(E_m^A) = Z(A, m). \quad (2.4.15)$$

Для n переменных мы дадим только формулировку теоремы перечисления Пойа. Доказательство этой теоремы проводится так же, как в случае одной переменной. Пусть N — множество целых неотрицательных чисел и $N^n = N \times \dots \times N$ — декартово произведение n копий множества N . Как и раньше, множество объектов степенной группы E^A является множеством Y^X и весовая функция $w: Y \rightarrow N^n$ обладает тем свойством, что для каждого $z \in N^n$ выполняется неравенство $|w^{-1}(z)| \leq \infty$. Покомпонентная аддитивность в N^n , веса функций из Y^X и орбиты, индуцированные группой E^A , определяются как прежде. Коэффициент при $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ у ряда $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$, перечисляющего фигуры, равен по определению $|w^{-1}(r_1, r_2, \dots, r_n)|$. Коэффициент при $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ у ряда $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, перечисляющего функции, равен числу орбит веса (t_1, t_2, \dots, t_n) . Через $Z(A, c(x_1, x_2, \dots, x_n))$ обозначаем ряд, который получается с помощью подстановки вместо каждой переменной s_k в $Z(A)$

ряда $c(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$. Тогда более общий результат, даваемый теоремой перечисления Пойа для n переменных, может быть сформулирован так.

Теорема. Если $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — перечисляющий ряд для фигур множества Y , то орбиты функций в Y^X , определяемые степенной группой E^A , перечисляются в соответствии со своими весами рядом $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = Z(A, c(x_1, x_2, \dots, x_n)). \quad (2.4.16)$$

Для иллюстрации этой теоремы вернемся к проблеме ожерелья. На этот раз мы хотим найти перечисляющий ряд для ожерелий с четырьмя бусинками и тремя допустимыми цветами. Поэтому мы положим $Y = \{a, b, c\}$ и будем рассматривать произвольную функцию f из X в Y как представление ожерелья с $|f^{-1}(a)|$ красными, $|f^{-1}(b)|$ белыми и $|f^{-1}(c)|$ голубыми бусинками. Если мы положим $w(a) = (0, 0)$, $w(b) = (1, 0)$ и $w(c) = (0, 1)$, то

$$w(f) = \sum_{x \in X} w(f(x)) \quad (2.4.17)$$

и $w(f)$ является упорядоченной парой, у которой первая координата равна числу белых бусинок, а вторая координата — числу голубых. Число красных бусинок, естественно, равно в точности разности между $|X|$ и числом белых и голубых бусинок. Теперь в соответствии с определением перечисляющий ряд для фигур есть $c(x) = 1 + x_1 + x_2$. Следовательно, на основании теоремы перечисляющий ряд для ожерелий имеет вид

$$C(x_1, x_2) = Z(D_4, 1 + x_1 + x_2). \quad (2.4.18)$$

Выполнив действия, связанные с подстановкой перечисляющего ряда для фигур в цикловой индекс $Z(D_4)$, получаем

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2) = & 1 + x_1 + 2x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 + x_2 + 2x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 + 2x_1x_2 + \\ & + 2x_1^2x_2 + x_1^3x_2 + 2x_1x_2^2 + x_1x_2^3 + 2x_1^2x_2^2. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Заметим, что сумму коэффициентов многочлена $C(x_1, x_2)$ можно легко вычислить, найдя значение $Z(D_4, 3)$, которое равно 21; затем сравните с (2.4.19).

2.5. РЯД $1 + x$ — СПЕЦИАЛЬНЫЙ РЯД ДЛЯ ФИГУР

Существует довольно естественное следствие теоремы Пойа, которое обуславливает важность коэффициентов многочлена, получаемого в результате подстановки ряда $1 + x$ в цикловой индекс произвольной группы подстановок A . Хотя это утверждение устанавливается совсем легко, оно является исключительно

важным, так как каждая перечислительная формула, получаемая из теоремы Пойа с использованием ряда $1 + x$ в качестве ряда для фигур, неизбежно представляет собой частный случай этого следствия. Среди таких результатов будут формулы для подсчета числа ожерелий, графов, орграфов, корневых графов и бихроматических графов. Мы пока отложим подобные приложения формулируемого ниже следствия до соответствующих глав книги.

Мы отметим сейчас значение этого результата для пяти специальных групп, цикловые индексы которых даются формулами (2.2.5), (2.2.6), (2.2.10) — (2.2.12). Подобно отдельным элементам множества X , два r -подмножества $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ и $S' = \{x'_1, \dots, x'_r\}$ из X называются A -эквивалентными, если при некоторой подстановке $\alpha \in A$ выполняется равенство $\alpha S = S'$.

(2.5.1). Следствие теоремы перечисления Пойа. Коэффициент при x^r в $Z(A, 1 + x)$ равен числу A -эквивалентных классов r -подмножеств множества X .

Доказательство. В ряде $1 + x$, перечисляющем фигуры, слагаемое $1 = x^0$ можно толковать как отсутствие объекта из X , а слагаемое $x = x^1$ — как наличие этого объекта. Поэтому x^r означает, что r различных объектов, образующих r -подмножество, присутствуют в нем. Утверждение теперь следует непосредственно из теоремы Пойа. ■

Используя данное следствие, видим, что группа подстановок A является транзитивной тогда и только тогда, когда коэффициент при x в $Z(A, 1 + x)$ равен 1. Кроме того, коэффициенты этого многочлена, равноотстоящие от его концов, всегда равны, так как число классов r -подмножеств совпадает с числом классов $(n - r)$ -подмножеств. Для симметрической группы, как следует из определения S_n , существует подстановка, отображающая данное r -подмножество на произвольное другое r -подмножество. Для группы A_n это также справедливо, но только необходимо отметить, что требуемое отображение осуществляет четная подстановка. Следующие две формулы могут быть также получены с помощью тривиальной подстановки двучлена $1 + x$ в соответствующие цикловые индексы:

$$Z(S_n, 1 + x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \quad (2.5.2)$$

$$Z(A_n, 1 + x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n. \quad (2.5.3)$$

Единичная группа, естественно, порождает биномиальные коэффициенты:

$$Z(E_n, 1 + x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r. \quad (2.5.4)$$

С циклической и диэдральной группами дело обстоит не сколько сложнее. Обычным образом осуществляя формальную подстановку двучлена $1 + x^k$ вместо переменной s_k в формулу (2.2.10), получим

$$Z(C_n, 1 + x) = n^{-1} \sum_{k|n} \varphi(k) (1 + x^k)^{n/k}. \quad (2.5.5)$$

Однако подобная подстановка в формулу (2.2.11) приводит к соотношению, менее элегантному по форме. Чем выписывать эту формулу механически, лучше заметим, что мы уже сталкивались с ней в случае $n = 4$ (см. формулу (2.4.14), в которой приведен многочлен, перечисляющий ожерелья с четырьмя бусинками окрашенными в два цвета). Тогда для произвольного n соответствующий результат дает число типов двухцветных¹ ожерелий с n бусинками.

2.6. ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Теперь удобно с логической точки зрения иметь в своем распоряжении такую теорему Пойа, которая выражала бы число взвешенных взаимно однозначных функций через цикловые индексы симметрических и знакопеременных групп и перечисляющие ряды для фигур. Мы будем использовать этот результат позднее при установлении взаимосвязи между производящими функциями для деревьев и для корневых деревьев.

Пусть $c(x)$ — ряд, перечисляющий элементы некоторого множества Y в соответствии с их весами, и пусть единичная группа E имеет Y в качестве множества объектов. Рассмотрим ограничение степенной группы E^A на подмножество всех взаимно однозначных функций из Y^X . Если $C(x)$ — перечисляющий ряд для орбит, состоящих из взаимно однозначных функций и определяемых группой E^A , то наша задача формулируется так: выразить $C(x)$ «на языке» $c(x)$. Сначала рассмотрим случай $A = S_n$; после этого решение общей задачи находится быстро. Заметим, что орбиты взаимно однозначных функций, определяемые группой E^{S_n} , соответствуют n -сочетаниям, или n -подмножествам, элементов из Y . Следуя Пойа, мы используем выражение $Z(A_n - S_n)$ в качестве сокращения для $Z(A_n) - Z(S_n)$ и полагаем $Z(A_0 - S_0) = 1$.

Теорема. *Производящая функция $C(x)$, которая перечисляет взаимно однозначные функции, отображающие множество из n*

¹ Точнее, 2-раскрашенных, — Прим. перев.

взаимозаменяемых элементов в совокупность объектов с перечисляющим рядом для фигур $c(x)$, дается формулой

$$C(x) = Z(A_n - S_n, c(x)). \quad (2.6.1)$$

Прежде чем доказывать эту теорему, мы проиллюстрируем ее использование на одном примере для $n = 3$. Пусть $c(x)$ — производящая функция для множества Y связных графов, так что коэффициент при x^p в $c(x)$ равен числу связных графов порядка p . Известно, что несколько первых членов ряда $c(x)$ имеют вид

$$c(x) = x + x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 21x^5 + 112x^6 + \dots \quad (2.6.2)$$

Далее, пусть $C(x)$ — производящая функция для графов, имеющих в точности три компоненты, причем все компоненты в графе разные. Рассмотрим степенную группу E^{S_3} с множеством объектов Y^X . В этом случае орбиты взаимно однозначных функций, определяемые группой E^{S_3} , соответствуют как раз графам, перечисляемым функцией $C(x)$. Более того, вес каждой орбиты равен порядку того графа, который соответствует этой орбите.

Формула для циклового индекса $Z(A_3 - S_3)$ уже встречалась в (2.2.7). Поэтому, подставляя $c(x^k)$ вместо каждой переменной s_k в эту формулу, находим несколько первых членов ряда $C(x)$:

$$C(x) = 2x^6 + 7x^7 + 34x^8 + \dots \quad (2.6.3)$$

Предлагаем читателю убедиться в правильности некоторых из этих коэффициентов, построив соответствующие графы.

Доказательство. Для доказательства соотношения (2.6.1) напомним, что ряд $c(x)$ перечисляет элементы некоторого множества Y в соответствии с их весами и что группа E^{S_n} имеет множество Y^X в качестве множества объектов. Из теоремы Пойа следует, что ряд, перечисляющий орбиты *всех* функций, определяемые группой E^{S_n} , есть просто $Z(S_n, c(x))$. Поэтому достаточно показать, что ряд $Z(A_n, c(x))$ считает дважды те орбиты, которые состоят из взаимно однозначных функций, а все остальные орбиты — только по одному разу.

Заметим сначала, что если функции взаимно однозначно отображают множество X на себя, то число орбит, состоящих из всех таких функций и определяемых группой $E_n^{A_n}$, равно 2. Это немедленно следует из следующего легко доказываемого факта: две взаимно однозначные функции находятся в одной и той же орбите группы $E_n^{A_n}$ тогда и только тогда, когда они обе либо четные, либо нечетные¹. Таким образом, ряд $Z(A_n, c(x))$ считает

¹ Понимаемые как подстановки множества X . — Прим. перев.

дважды те орбиты группы E^{S_n} , которые состоят из взаимно однозначных функций.

Далее мы покажем, что орбиты группы E^{S_n} , состоящие из функций, не являющихся взаимно однозначными, считаются только один раз. Для этого рассмотрим некоторую такую орбиту и две функции f и g в ней. Тогда существует подстановка α в S_n , такая, что для всех x из X выполняется равенство $f(x) = g(\alpha x)$. Необходимо показать, что f и g принадлежат одной и той же орбите группы E^{A_n} . В случае четной подстановки α это следует из равенства $f(x) = g(\alpha x)$. Предположим теперь, что α — нечетная подстановка. Так как функция f не является взаимно однозначной, то для некоторых x_1 и x_2 из X , таких, что $x_1 \neq x_2$, имеем $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть β — подстановка, переставляющая между собой x_1 и x_2 и оставляющая неподвижными другие элементы из X . Так как β — транспозиция, то она является нечетной подстановкой. Тогда $\alpha\beta$ — четная подстановка и для всякого x из X $f(x) = g(\alpha\beta x)$. Значит f и g принадлежат одной и той же орбите группы E^{A_n} и, следовательно, ряд $Z(A_n, c(x))$ считает орбиты группы E^{S_n} , состоящие из функций, не являющихся взаимно однозначными, только один раз. ■

В приведенном ниже следствии рассматривается общий случай, в котором орбиты взаимно однозначных функций на n объектах определяются не симметрической группой S_n , а произвольной группой A степени n .

Следствие. Производящая функция $C(x)$, которая перечисляет взаимно однозначные функции, определяемые перечисляющим рядом для фигур $c(x)$ и произвольной группой подстановок A степени n , дается формулой

$$C(x) = \frac{n!}{|A|} Z(A_n - S_n, c(x)). \quad (2.6.4)$$

Доказательство. Напомним, что $c(x)$ перечисляет элементы множества Y в соответствии с их весами и что $Z(A_n - S_n, c(x))$ перечисляет в соответствии с их весами подмножества множества Y , состоящие из n элементов. Как обычно, E обозначает единичную группу с множеством объектов Y и A обозначает группу подстановок степени n с множеством объектов X . Рассмотрим произвольное n -подмножество Y_1 множества Y . Мы намереваемся установить, что число орбит группы E_n^A , ограниченной на взаимно однозначные функции в Y_1^X , равно $n!/|A|$. Но это заключение следует немедленно из ограниченной формы леммы Бернсайда, так как в группе E_n^A единственной подстановкой, оставляющей неподвижной произвольную взаимно однозначную функцию в

Y_1^X , является тождественная подстановка, которая оставляет неподвижными все $n!$ таких функций. ■

В наших приложениях этой теоремы часто необходимо будет суммировать многочлены $Z(A_n - S_n)$. Мы иногда пишем $Z(A_\infty - S_\infty)$ вместо $\sum_{n=0}^{\infty} Z(A_n - S_n)$. Риордан [1] вывел следующую формулу, аналогичную формуле (3.1.1):

$$Z(A_\infty - S_\infty, f(x)) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f(x^k)/k \right\}. \quad (2.6.5)$$

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Доказать лемму Бернсайда (2.3.3), дающую число орбит, определенных произвольной группой, представленной в виде группы подстановок. Детальнее, пусть A — произвольная (абстрактная) группа, и положим $\varphi: A \rightarrow B$ — гомоморфизм из A в группу подстановок B . Тогда число $N(B)$ орбит группы B дается формулой

$$N(B) = |A|^{-1} \cdot \sum_{\alpha \in A} j_1(\varphi(\alpha)).$$

2.2. Сколько орбит функций определяются степенной группой $E_n^{S_m}$? Сколько орбит определяются группой E_n^A , если $A = A_m, C_m$ или D_m ?

2.3. Найти две неизоморфные группы подстановок A и B , имеющие наименьший порядок и удовлетворяющие условию $Z(A) = Z(B)$. (Пойа [1])

2.4. Доказать, что множество подстановок степенной группы B^A замкнуто относительно операции умножения.

2.5. Сколько существует ожерелий с пятью бусинками, если допускаются бусинки трех цветов?

2.6. Если при раскраске вершин куба используются три разных цвета, то сколько возможно различных кубов?

2.7. Если при раскраске граней куба используются четыре разных цвета, то сколько получится различных кубов?

2.8. Если допустимы пять разных цветов и каждое ребро графа, изображенного на рис. 2.3.1, окрашено одним из этих цветов, то сколько возможно различных раскрашенных графов?

2.9. Пусть G — произвольный граф. Как можно интерпретировать коэффициенты ряда $Z(\Gamma(G), 1+x)$? Проиллюстрируйте это, используя граф, приведенный на рис. 2.3.1.

2.10. Когда множество объектов степенной группы B^A ограничивается взаимно однозначными функциями, то группу обозначают через B^{A^*} . Найти формулу для циклового индекса $Z(B^{A^*})$.

(Харари и Палмер [5])

2.11. Найти две изоморфные, но не идентичные группы подстановок степени 6 и порядка 4, которые имеют одинаковый цикловой индекс. (Редфилд [1])

2.12. Цикловой индекс знакопеременной группы A_n , даваемый формулой (2.2.6), может быть выражен в следующей форме:

$$Z(A_n) = \sum_{(j)} \frac{[1 + (-1)^{j_2 + j_4 + \dots}]}{\prod_k k^{j_k} \cdot j_k!} \prod_k s_k^{j_k}.$$

2.13.
$$\sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) \right].$$

*Лесоруб! Это дерево ты пощади,
От ветвей его острый топор отведи.
Находил я под ним и приют и покой,
А теперь за него готов выдержать бой.*

Дж. П. Моррис¹

Глава 3 | ДЕРЕВЬЯ

В первой главе мы познакомились с несколькими методами определения числа помеченных деревьев порядка p , числа, равного p^{p-2} . Теперь мы рассмотрим более трудную задачу: нахождение числа *непомеченных* деревьев, т. е. нахождение числа изоморфных классов деревьев с данным числом вершин. Техника, которую мы будем использовать, может быть легко приспособлена не только к нахождению производящей функции для деревьев, обладающих различными указанными свойствами, но также к подсчету древо-видных структур.

Например, в этой главе мы найдем производящие функции для корневых деревьев, деревьев, лесов, ориентированных деревьев, гомеоморфно несводимых деревьев, асимметрических деревьев, униклических графов, функциональных орграфов, кактусов и 2-деревьев. Несколько первых коэффициентов многих из этих производящих функций можно также найти в книге Слоуэна [1], посвященной последовательностям.

3.1. КОРНЕВЫЕ ДЕРЕВЬЯ

По-видимому, невозможно перечислить деревья, не перечислив сначала корневые деревья. Поэтому мы начнем с применения метода Пойа, описанного в предыдущей главе, к нахождению производящей функции для корневых деревьев. Затем мы воспользуемся данной Оттером [1] «теоремой о характеристике неподобия», чтобы установить взаимосвязь между этой функцией и рядом, перечисляющим деревья.

¹ Моррис Джордж Поуп (1802—1867) — американский поэт и журналист. — *Прим. перев.*

Мы используем хорошо известное тождество, в котором просуммированы цикловые индексы всех симметрических групп:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n, f(x)) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f(x^k)/k \right\}. \quad (3.1.1)$$

Доказательство формулы (3.1.1) опускается; самое простое из доказательств этого соотношения состоит в сравнении коэффициентов обеих частей (см. упражнение 2.13).

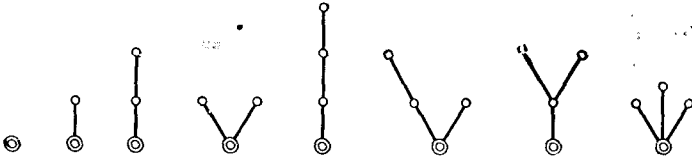


Рис. 3.1.1 Наименьшие корневые деревья.

Полагаем для удобства $Z(S_0) = 1$ и используем запись $Z(S_{\infty})$ вместо $\sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n)$. Тогда левая часть формулы (3.1.1) может быть обозначена через $Z(S_{\infty}, f(x))$.

Пусть теперь

$$T(x) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p x^p \quad (3.1.2)$$

— производящая функция для корневых деревьев. Таким образом, T_p представляет собой число корневых деревьев порядка p . Корневые деревья не выше четвертого порядка показаны на рис. 3.1.1. Поэтому четыре первых слагаемых производящей функции $T(x)$ даются соотношением

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \dots \quad (3.1.3)$$

Следующий результат Пойа [1] можно использовать для вычисления коэффициентов функции $T(x)$.

Теорема. *Перечисляющий ряд $T(x)$ для корневых деревьев удовлетворяет соотношению*

$$T(x) = x \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} T(x^k)/k \right\}. \quad (3.1.4)$$

Доказательство. Сначала найдем производящую функцию, перечисляющую такие корневые деревья, корень которых имеет степень n . Замечаем, что каждое из таких деревьев естественным

образом соответствует некоторому «сочетанию с повторениями» из n корневых деревьев. Это соответствие для $n = 4$ проиллюстрировано на рис. 3.1.2. Более подробно: пусть дана некоторая совокупность из n корневых деревьев; новое корневое дерево строится путем добавления одной новой вершины и установления смежности этой вершины с каждым из корней n первоначальных корневых деревьев. Ясно, что все деревья, у которых корни имеют степень n , могут быть построены указанным способом. Чтобы найти число таких деревьев, рассмотрим степенную группу E^{S_n} с множеством объектов Y^X , где E — единичная группа, $X = \{1, \dots, n\}$ и Y — множество всех корневых деревьев. Тогда каждая функция из Y^X соответствует некоторому упорядоченному набору, состоящему из n корневых деревьев. Определим вес произвольного корневого дерева из Y как число вершин

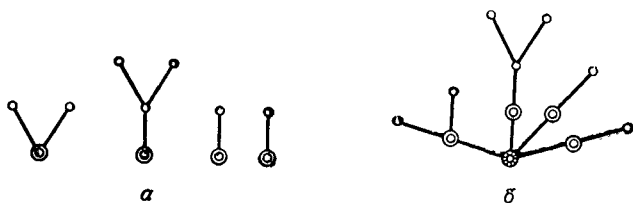


Рис. 3.1.2 Четыре корневых дерева и соответствующее им дерево, корень которого имеет степень 4.

в этом дереве. Тогда $T(x)$ перечисляет элементы Y в соответствии с их весами и называется «рядом, перечисляющим фигуры», для множества Y . Таким образом, вес каждой функции из Y^X , определенной в соответствии с формулой (2.4.4), представляет собой общее число вершин в n корневых деревьях из того набора длины n , которому соответствует взятая функция.

Так как группа S_n состоит из всех подстановок множества X , то орбиты степенной группы E^{S_n} соответствуют в точности корневым деревьям, у которых корни имеют степень n . Заметим, что вес каждой орбиты, который является весом и любой функции, содержащейся в этой орбите, ровно на единицу меньше общего числа вершин в корневом дереве, сопоставленном орбите. Поэтому, взяв в теореме Пойа $A = S_n$ и в качестве ряда, перечисляющего фигуры, производящую функцию $T(x)$, получаем ряд, перечисляющий функции: $Z(S_n, T(x))$. Коэффициент при x^p в $Z(S_n, T(x))$ представляет собой число корневых деревьев порядка $p + 1$, у которых корень имеет степень n . Умножение ряда $Z(S_n, T(x))$ на x «подправляет» веса так, что коэффициент при x^p в $x \cdot Z(S_n, T(x))$ равен числу этих деревьев с p вершинами.

Затем, суммируя по всем возможным значениям n , получаем само $T(x)$:

$$T(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n, T(x)). \quad (3.1.5)$$

Доказательство завершается применением тождества (3.1.1) к сумме цикловых индексов, стоящей в правой части соотношения (3.1.5). ■

Из этой теоремы следует, что $T(x)$ однозначно определяется функциональным уравнением (3.1.4), так как формула (1.2.8) дает способ определения коэффициентов функции $T(x)$ по индукции. Чтобы увидеть это, положим

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = \sum_{k=1}^{\infty} T(x^k)/k. \quad (3.1.6)$$

Следовательно,

$$a_m = m^{-1} \sum_{d|m} d \cdot T_d \quad (3.1.7)$$

и из формулы (1.2.8) следует, как у Оттера [1], что

$$T_{p+1} = p^{-1} \sum_{k=1}^p k a_k T_{p-k+1}. \quad (3.1.8)$$

Комбинируя (3.1.7) и (3.1.8), выражаем T_{p+1} через T_1, \dots, T_p :

$$T_{p+1} = p^{-1} \sum_{k=1}^p \left(\sum_{d|h} d \cdot T_d \right) T_{p-k+1}. \quad (3.1.9)$$

Значительно раньше Кэли [1] нашел следующую формулу для $T(x)$, которая легко выводится из соотношения (3.1.4):

$$T(x) = x \prod_{p=1}^{\infty} (1 - x^p)^{-T_p}. \quad (3.1.10)$$

Наоборот, формула (3.1.10) позволяет установить соотношение (3.1.4). Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что

$$\ln(T(x)/x) = \sum_{k=1}^{\infty} T(x^k)/k. \quad (3.1.11)$$

Это осуществляется в три шага: сначала логарифмируются обе части формулы (3.1.10), затем используется тождество

$$\ln(1 - x^p) = - \sum_{k=1}^{\infty} x^{pk}/k \quad (3.1.12)$$

и, наконец, меняется порядок суммирования.

Числа корневых деревьев порядка p для $p \leq 26$ найдены Риорданом (см. Риордан [1], стр. 164) и для $p \leq 39$ — Швенком с использованием формулы (3.1.4). Здесь представлены несколько первых членов ряда $T(x)$:

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + \\ + 115x^8 + 286x^9 + 719x^{10} + \dots \quad (3.1.13)$$

Коэффициенты ряда $T(x)$ для $p \leq 26$ приведены в приложении I.

3.2. НЕКОРНЕВЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Для перечисления некорневых деревьев нам сейчас требуется только частный случай (при $n = 2$) утверждения из параграфа 2.6 о возможности перечисления всех взаимно однозначных функций, заданных на множестве из n объектов. Пусть

$$t(x) = \sum_{p=1}^{\infty} t_p x^p \quad (3.2.1)$$

— производящая функция для деревьев, так что t_p есть число деревьев порядка p . Соотношение (3.2.4), приводимое в основной теореме данного параграфа, является наиболее изящной из возможных формул, выражающих ряд $t(x)$ для деревьев через ряд $T(x)$ для корневых деревьев. Доказательство формулы (3.2.4) зависит не только от теоремы перечисления взаимно однозначных функций, но и от следствия из устанавливаемой ниже теоремы о характеристике неподобия.

Для произвольного графа G обозначим через p^* число неподобных вершин, т. е. число орбит, состоящих из вершин и определяемых группой $\Gamma(G)$. Группа графа G определяет также классы подобных блоков. Пусть p_i^* — число неподобных вершин в i -м классе блоков среди b^* неподобных блоков. Тогда p^* и p_i^* связываются формулой (3.2.2), приводимой в следующей теореме. Оттер [1] первым получил это утверждение для деревьев, но, подобно многим теоремам, оно доказывается проще для более общего случая (см. Харари и Норман [2]). Поэтому мы рассматриваем произвольные блоки (вместо обычных ребер, как это имеет место в деревьях).

Теорема (о характеристике неподобия для графов). Для всякого графа G

$$p^* - 1 = \sum_{i=1}^{b^*} (p_i^* - 1). \quad (3.2.2)$$

Для иллюстрации теоремы рассмотрим граф порядка 18, изображенный на рис. 3.2.1. Вершины этого графа помечены так,

что подобные вершины имеют одинаковые пометки. Таким образом, $p^* = 4$. Существует три класса блоков, поэтому $b^* = 3$; первый класс состоит из мостов, второй — из 4-цикла, а третий содержит треугольники. В каждом классе существуют две подобные вершины, так что $p_1^* = p_2^* = p_3^* = 2$. Таким образом, и $p^* - 1 = 3$, и $p_1^* - 1 + p_2^* - 1 + p_3^* - 1 = 3$

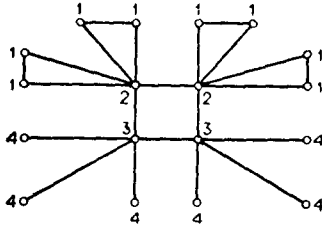


Рис. 3.2.1 Граф с тремя неподобными блоками.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по числу классов блоков. Пусть G — произвольный граф. Если существует точно один класс блоков, т. е. $b^* = 1$, то $p^* = p_1^*$ и формула (3.2.2), очевидно, справедлива. В ином случае рассмотрим произвольный блок графа G , имеющий в точности одну точку сочленения, и предположим, что этот блок принадлежит

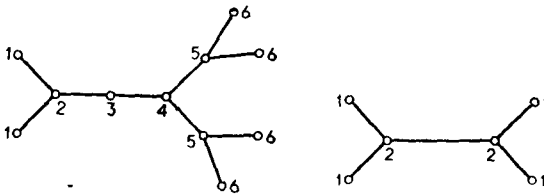


Рис. 3.2.2 а) Дерево, не имеющее симметричных ребер, и б) дерево, обладающее симметричным ребром.

классу, номер которого равен единице. Удалим из графа G вершины всех блоков, входящих в этот класс, оставив только точки сочленения. Граф G' , полученный в результате такой операции, имеет $b^* - 1$ классов блоков и $p^* - (p_1^* - 1)$ классов вершин. Применяя индуктивное предположение к графу G , имеем формулу (3.2.2) для графа G' . ■

Чтобы применить эту теорему к деревьям, обозначим числа неподобных вершин и ребер произвольного дерева T соответственно через p^* и q^* . Ребро дерева T называется *симметричным*, если его концевые вершины подобны. Пусть s — число симметричных ребер графа. Дерево, изображенное на рис. 3.2.2, а, не имеет

симметричных ребер, в то время как дерево, показанное на рис. 3.2.2, б, содержит одно симметричное ребро. Для первого из этих деревьев $p^* = 6$ и каждый из его пяти классов блоков имеет две неподобные вершины. Следовательно, $5 = p^* - 1 = \sum_{i=1}^5 (2 - 1) = 5$. Для второго дерева $p^* = 2$ и один класс блоков имеет две неподобные вершины, в то время как другой класс, соответствующий симметричному ребру, содержит только одну вершину. Следовательно, $1 = p^* - 1 = (2 - 1) + (1 - 1) = 1$. Найденная Оттером теорема о характеристике неподобия для деревьев формулируется в виде следствия.

Следствие (теорема о характеристике неподобия для деревьев). Число s симметричных ребер произвольного дерева равно 0 или 1 и

$$p^* - (q^* - s) = 1. \quad (3.2.3)$$

Доказательство. Сначала замечаем, что $s = 1$ тогда и только тогда, когда дерево бицентрально и две его центральные вершины подобны, а иначе $s = 0$ (см. Харари [1], стр. 52). Затем обращаем внимание на то, что q^* есть число неподобных блоков, так что $b^* = q^*$. Далее, $p_i^* = 2$ для каждого класса блоков (ребер), кроме класса с симметричным ребром. Для последнего класса $p_i^* = 1$ в силу определения. Итак, правая часть формулы (3.2.2) равна $q^* - s$ и доказательство следствия завершено. ■

Теперь мы в состоянии закончить наш вывод элегантной формулы Оттера для ряда $t(x)$.

Теорема. Ряд $t(x)$, перечисляющий деревья, выражается через ряд $T(x)$ для корневых деревьев с помощью формулы

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2}(T^2(x) - T(x^2)). \quad (3.2.4)$$

Доказательство. На первом шаге доказательства просуммируем формулу (3.2.3) по всем деревьям, имеющим точно p вершин. Получаем

$$\sum 1 = \sum p^* - \sum (q^* - s). \quad (3.2.5)$$

$\sum 1 = t_p$ и $\sum p^* = T_p$. Кроме того, $\sum (q^* - s)$ равна числу L_p деревьев, у которых одно ребро, не являющееся симметричным, выделено как корневое. Следовательно, $t_p = T_p - L_p$; поэтому если $L(x)$ — ряд, перечисляющий реберно-корневые деревья, у которых корневое ребро не является симметричным, то

$$t(x) = T(x) - L(x). \quad (3.2.6)$$

На данном этапе для выражения $L(x)$ через $T(x)$ мы можем применить формулу (2.6.1) из нашей теоремы о взаимно однозначных функциях. Заметим, что любые два *различные* корневые дерева определяют реберно-корневое дерево с несимметричным корневым ребром и это соответствие, проиллюстрированное на рис. 3.2.3, может быть специфицировано посредством соединения двух корней штриховым ребром. Таким образом, деревья, перечисляемые рядом $L(x)$, могут быть интерпретированы как 2-подмножества, состоящие из графов, перечисляемых рядом $T(x)$.

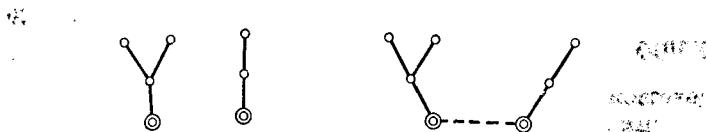


Рис. 3.2.3 Два корневых дерева и соответствующее им **реберно-корневое** дерево.

Следовательно, мы можем применить формулу (2.6.1) при $n = 2$. Получаем соотношение

$$L(x) = Z(A_2 - S_2, T(x)). \quad (3.2.7)$$

Далее, $Z(A_2 - S_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2)$, и, положив $s_1 = T(x)$, $s_2 = T(x^2)$, из формул (3.2.7) и (3.2.6) выводим формулу Оттера для $t(x)$. ■

Кэли предвосхитил и результат Пойа о функции $T(x)$, и результат Оттера о функции $t(x)$. В самом деле, несложным упражнением представляется вывод соотношения (3.2.4) из первоначальной формулы Кэли или из формулы Пойа для t_p ; и Кэли, и Пойа нашли степенные выражения для t_p в виде суммы чисел t'_p и t''_p , представляющих собой числа деревьев с одной и двумя центральными вершинами соответственно. Проверка завершается выписыванием суммы $\sum t_p x^p$ и использованием поговорки: «Всякий раз, когда видишь повторное суммирование, поменяй знаки местами».

Значения t_p для $p \leq 26$ вычислены Риорданом [1, стр. 164] с использованием формулы (3.2.4). Несколько первых коэффициентов ряда $t(x)$ даны ниже, а остальные известные значения t_p приводятся в приложении I:

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + \\ + 23x^8 + 47x^9 + 106x^{10} + \dots \quad (3.2.8)$$

Лесом называется граф, компоненты которого являются деревьями. Теперь, когда перечислены деревья, перечисление лесов

осуществляется легко. Пусть перечисляющим многочленом для лесов с p вершинами будет функция

$$f_p(x) = \sum_{q=0}^{p-1} f_{p,q} x^q, \quad (3.2.9)$$

где $f_{p,q}$ — число лесов с p вершинами и q ребрами. Тогда производящая функция для лесов имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} y^p \cdot f_p(x). \quad (3.2.10)$$

Чтобы получить формулы для $f_p(x)$ и $f(x, y)$, воспользуемся перечисляющим рядом для деревьев. В статье Харари [4] формула для $f(x, y)$ получена путем подходящего применения теоремы перечисления Пойа и обобщения формулы (3.1.1) на случай произвольной функции $g(x, y)$, зависящей от двух переменных. Таким образом, число лесов выражается через число деревьев с помощью следующей формулы:

$$1 + f(x, y) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (t_k/n) (x^{k-1} y^k)^n \right\}. \quad (3.2.11)$$

Используя логарифмы, легко показать, что эта формула может быть выражена также в виде

$$1 + f(x, y) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{k-1} y^k)^{-t_k}, \quad (3.2.12)$$

напоминающем формулу Кэли [1] для числа корневых деревьев. Сейчас мы дадим более явную формулу (см. Харари и Палмер [11]) для $f_p(x)$, выражающую многочлен $f_p(x)$ через числа t_k .

Теорема. Перечисляющий многочлен для лесов с p вершинами имеет вид

$$f_p(x) = \sum_{(j)} \prod_{k=1}^p \binom{t_k + j_k - 1}{j_k} x^{(k-1) j_k}, \quad (3.2.13)$$

где сумма берется по всем разбиениям (j) числа p .

Доказательство. Используя хорошо знакомую формулу для числа сочетаний с повторениями (см. Риордан [1], стр. 15), находим, что число лесов, состоящих в точности из j_k k -вершинных деревьев, равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{t_k + j_k - 1}{j_k}.$$

Так как каждое из этих деревьев имеет $k - 1$ ребер, то для любого $q = 0, 1, \dots, p - 1$

$$f_{p,q} = \sum_{(j)} \prod_{k=1}^p \binom{t_k + j_k - 1}{j_k}, \quad (3.2.14)$$

где сумма берется по таким разбиениям $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_p)$ числа p , которые удовлетворяют соотношению

$$q = \sum_{k=1}^p (k-1)j_k. \quad (3.2.15)$$

Формула (3.2.13) для $f_p(x)$ может быть получена теперь путем суммирования по *всем* разбиениям числа p . ■

Пример: используя ряд $t(x)$ для деревьев и формулу (3.2.13) при $p = 6$, легко находим

$$f_6(x) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 6x^5. \quad (3.2.16)$$

Умножая соотношение (3.2.13) на y^p и суммируя по всем возможным целым положительным числам p , можно получить после несложных манипуляций формулы (3.2.11) и (3.2.12).

3.3. ДЕРЕВЬЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Многие классы деревьев могут быть перечислены с помощью той процедуры, которая изложена в предыдущих параграфах этой главы. Обычно сначала с помощью теоремы перечисления Пойа находят производящую функцию для корневых многообразий. Затем «теорема о характеристике неподобия» обеспечивает нас средством, позволяющим выразить ряд для некорневых деревьев через ряд для корневых деревьев. В этом параграфе мы рассмотрим несколько задач, которые могут быть успешно решены указанным способом.

Первая задача относится к перечислению ориентированных деревьев. *Ориентированное дерево* представляет собой дерево, в котором каждое ребро ориентировано. Пусть $r(x)$ и $R(x)$ — перечисляющие ряды для ориентированных деревьев и для корневых ориентированных деревьев соответственно. Все восемь ориентированных деревьев четвертого порядка показаны на рис. 3.3.1 и удостоверяют тот факт, что коэффициент при x^4 в $r(x)$ равен 8.

Следующий результат из статьи Харари и Принса [1] полезен при нахождении числа ориентированных деревьев.

Теорема. *Перечисляющие ряды $r(x)$ и $R(x)$ для ориентированных деревьев и корневых ориентированных деревьев удовлетворяют соотношениям*

$$R(x) = x \left(\exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} R(x^k)/k \right\} \right)^2 \quad (3.3.1)$$

и

$$r(x) = R(x) - R^2(x). \quad (3.3.2)$$

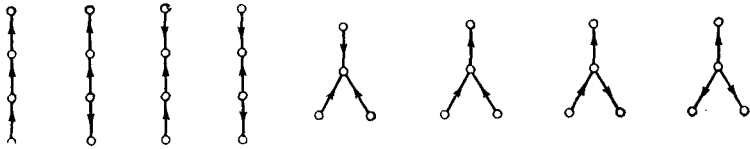


Рис. 3.3.1 Ориентированные деревья четвертого порядка.

В частности, мы находим

$$r(x) = x + x^2 + 3x^3 + 8x^4 + 27x^5 + 91x^6 + \dots \quad (3.3.3)$$

Первые 21 коэффициента рядов $r(x)$ и $R(x)$ найдены Риорданом [1, стр. 164].

Доказательство. Определим *дерево с висячим корнем* как такое корневое дерево, у которого корень имеет степень 1. Пусть $\bar{R}(x)$ — перечисляющий ряд для ориентированных деревьев с висячими

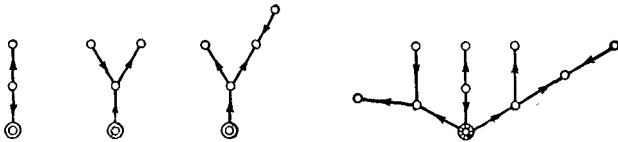


Рис. 3.3.2 Три ориентированных дерева с висячими корнями и соответствующее им дерево.

корнями. Всякое n -подмножество таких деревьев соответствует корневому ориентированному дереву, в котором ровно n дуг инцидентны корню (см. рис. 3.3.2). Применяя теорему Пойа к симметрической группе S_n с использованием ряда $\bar{R}(x)/x$ в качестве перечисляющего ряда для фигур, получаем ряд $Z(S_n, \bar{R}(x)/x)$, перечисляющий функции и такой, что коэффициент при x^{p-1} в нем равен числу корневых ориентированных деревьев порядка p , причем корни в этих деревьях инцидентны n дугам. Использование здесь ряда $\bar{R}(x)/x$ в качестве перечисляющего ряда для фигур осуществляет назначение нулевых весов корням деревьев

с висячими корнями, а следовательно, и корням корневых деревьев. Необходимая корректировка поэтому достигается умножением ряда $Z(S_n, \bar{R}(x)/x)$ на x . Затем, суммируя по всем неотрицательным целым числам n , выражаем ряд $R(x)$ через $\bar{R}(x)$ в следующем виде:

$$R(x) = xZ(S_\infty, \bar{R}(x)/x). \quad (3.3.4)$$

Но для каждого корневого дерева порядка p мы можем построить два различных дерева порядка $p + 1$ с висячими корнями, добавляя новую дугу, входящую в корень или исходящую из корня. Так как все деревья с висячими корнями можно получить указанным способом однозначно, то

$$\bar{R}(x) = 2xR(x). \quad (3.3.5)$$

Подставляя это выражение для $\bar{R}(x)$ в соотношение (3.3.4) и применяя тождество (3.1.1), убеждаемся в справедливости формулы (3.3.1).

Чтобы выразить $r(x)$ через $R(x)$, заметим, что у ориентированных деревьев, не имеющих симметричных ребер, $s = 0$. Следовательно, уравнение характеристики неподобия для таких деревьев есть просто

$$1 = p^* - q^*. \quad (3.3.6)$$

Как и в случае обычных деревьев, из (3.3.6) вытекает, что

$$r(x) = R(x) - L(x), \quad (3.3.7)$$

где $L(x)$ является перечисляющим рядом¹ для таких ориентированных деревьев, у которых одна из дуг выделена (и названа корневой дугой). Эти деревья (с корневыми дугами) соответствуют в точности функциям, отображающим множество $\{1, 2\}$ в множество корневых ориентированных деревьев. Если задана такая функция f , то соответствующее дерево с корневой дугой получается путем добавления корневой дуги, ориентированной из корня дерева $f(1)$ к корню дерева $f(2)$. В этом случае перечисляющий ряд для функций равен просто $R^2(x)$, ибо ряд, перечисляющий фигуры, есть $R(x)$. Заметим, что тот же самый результат получается и с помощью теоремы перечисления Пойа, именно $Z(E_2, R(x))$. Таким образом, $L(x) = R^2(x)$ и доказательство

¹ Мы уже использовали $L(x)$ в предыдущем параграфе для реберно-корневых деревьев, не имеющих симметричных ребер. В параграфе 3.5 то же самое обозначение $L(x)$ будет использовано в аналогичной ситуации для 2-деревьев. Мы надеемся, что конкретный смысл обозначения будет всегда ясен из контекста.

завершается после подстановки выражения для $L(x)$ в формулу (3.3.7). ■

Следующими будут рассмотрены *гомеоморфно несводимые* деревья, т. е. деревья, не имеющие вершин степени 2. Все такие деревья не выше восьмого порядка показаны на рис. 3.3.3. Пусть $h(x)$, $H(x)$ и $\bar{H}(x)$ обозначают перечисляющие ряды для следующих трех классов гомеоморфно несводимых деревьев: а) «обычных» деревьев, б) корневых деревьев и в) деревьев с висячими корнями. Коэффициенты этих рядов могут быть вычислены с использованием

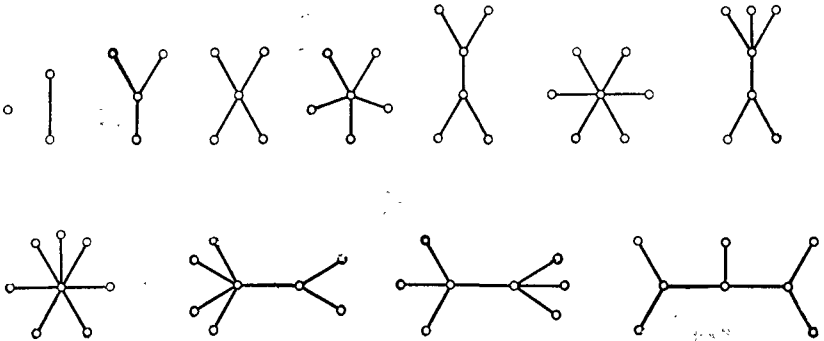


Рис. 3.3.3 Наименьшие гомеоморфно несводимые деревья.

соотношений, приводимых в следующей теореме (см. статью Харари и Принса [1]).

Теорема. *Перечисляющие ряды $\bar{H}(x)$, $H(x)$ и $h(x)$ для гомеоморфно несводимых деревьев удовлетворяют соотношениям*

$$\bar{H}(x) = \frac{x^2}{1+x} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{H}(x^k)}{kx^k} \right\}, \quad (3.3.8)$$

$$H(x) = \frac{1+x}{x} \bar{H}(x) - \frac{1}{2x} (\bar{H}^2(x) + \bar{H}(x^2)), \quad (3.3.9)$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x} H(x) + \frac{1+x}{x^2} \bar{H}(x). \quad (3.3.10)$$

В более явной форме

$$h(x) = x + x^2 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 5x^9 + \\ + 10x^{10} + 14x^{11} + 26x^{12} + \dots \quad (3.3.11)$$

Доказательство. Мы начнем с замечания о том, что n -подмножества деревьев с висячими корнями соответствуют таким

деревьям с висячими корнями, у которых вершина, смежная с корнем, имеет степень n . Это соответствие демонстрируется на рис. 3.3.4, где корни трех деревьев с висячими корнями отождествляются, а новая вершина вводится как висячий корень у нового дерева. Беря $\bar{H}(x)/x$ в качестве перечисляющего ряда для фигур, получаем ряд $Z(S_n, \bar{H}(x)/x)$, который перечисляет «новые»

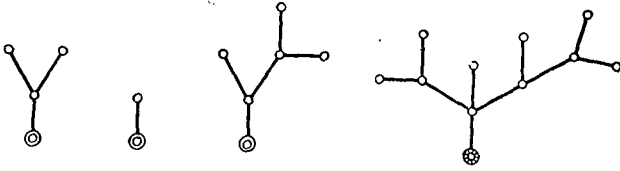


Рис. 3.3.4 Три дерева с висячими корнями и соответствующее им дерево порядка 11, также имеющее висячий корень.

деревья с висячими корнями. Однако в этом перечислении не учитываются ни новые корни, ни отождествленные вершины. Надлежащая корректировка осуществляется умножением на x^2 . Затем, суммируя по всем $n \geq 2$, снова получаем $\bar{H}(x)$, но при этом нужно добавить x^2 , чтобы учесть дерево порядка 2, имеющее висячий корень:

$$\bar{H}(x) = x^2 + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} Z(S_n, \bar{H}(x)/x). \quad (3.3.12)$$



Рис. 3.3.5 Два дерева с висячими корнями и соответствующее им реберно-корневое дерево.

Теперь, чтобы получить формулу (3.3.8), можно применить тождество (3.1.1) к соотношению (3.3.12). С помощью формулы (3.3.8) очевидно, могут быть вычислены коэффициенты ряда $\bar{H}(x)$.

Далее мы проверим соотношение (3.3.9), выражающее корневые деревья через деревья с висячими корнями. Имеем: ряд $Z(S_2, \bar{H}(x))$ перечисляет такие деревья с висячими корнями, в которых вершина, смежная с корнем, имеет степень 3; ряд $x(H(x) - \bar{H}(x))$ перечисляет деревья с висячими корнями, у которых вершина, смежная с корнем, имеет степень, либо рав-

ную 1, либо большую 3. Следовательно, ряд $\bar{H}(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{H}(x) = x(H(x) - \bar{H}(x)) + Z(S_2, \bar{H}(x)). \quad (3.3.13)$$

Осуществив подстановку ряда $\bar{H}(x)$ в цикловой индекс $Z(S_2)$ и разрешая полученное уравнение относительно $H(x)$, приходим к формуле (3.3.9).

Наконец, нам необходим перечисляющий ряд $L(x)$ для гомеоморфно несводимых реберно-корневых деревьев, у которых корневое ребро не является симметричным. Имея такой ряд, мы сможем применить теорему о характеристике неподобия и

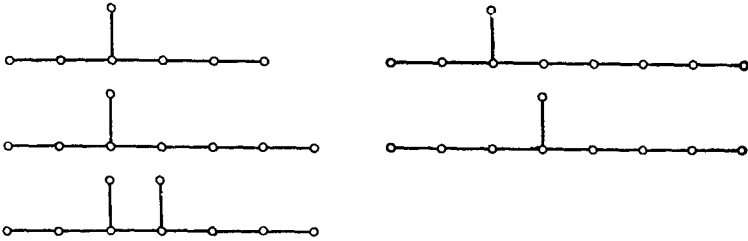


Рис. 3.3.6 Асимметрические деревья с небольшим числом вершин.

выразить $h(x)$ через $H(x)$ и $\bar{H}(x)$. Чтобы осуществить этот план, заметим, что каждая пара различных деревьев с висячими корнями, содержащая k вершин, соответствует реберно-корневому дереву, у которого $k - 2$ вершины и корневое ребро — несимметричное. Указанное взаимно однозначное соответствие реализуется путем соединения вершин, смежных с корнями, корневым ребром и отбрасыванием корней у исходных деревьев с висячими корнями (см. рис. 3.3.5). Снова используя формулу (2.6.1) из теоремы о взаимно однозначных функциях, получаем ряд $Z(A_2 - S_2, \bar{H}(x))$, перечисляющий пары различных деревьев с висячими корнями. Разделив на x^2 , подправляем надлежащим образом веса и, применяя уравнение (3.2.3) характеристики неподобия, выводим соотношение

$$h(x) = H(x) - x^2 Z(A_2 - S_2, \bar{H}(x)). \quad (3.3.14)$$

Осуществив подстановку ряда $\bar{H}(x)$ в цикловой индекс $Z(A_2 - S_2)$, получаем формулу (3.3.10). ■

Далее рассмотрим *асимметрические деревья*, т. е. такие деревья, группы автоморфизмов которых являются единичными группами. Асимметрические деревья порядков 7, 8 и 9 показаны

на рис. 3.3.6. Единственным асимметрическим деревом, порядка которого меньше 7, является тривиальное дерево¹.

Абсолютно корневого или реберно-корневого дерева T (обозначение: $|T|$) называется некорневое дерево с теми же самыми вершинами и ребрами, что и у дерева T . Ясно, что если $\Gamma(|T|)$ — единичная группа, то такой же будет и группа $\Gamma(T)$. Обратное не верно. Наименьшие корневые асимметрические деревья показаны на рис. 3.3.7. Заметим, что группы их абсолютов, вообще говоря, не являются единичными.

Следующая теорема из работы Харари и Принса [1] устанавливает взаимосвязь между рядами для корневых и некорневых асимметрических деревьев.

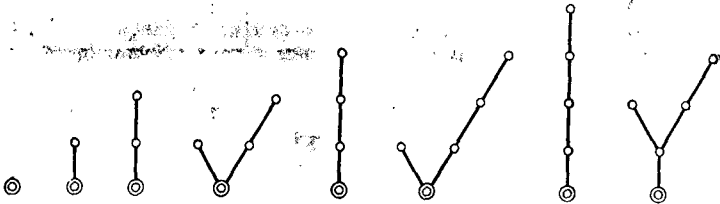


Рис. 3.3.7 Асимметрические корневые деревья с небольшим числом вершин.

Теорема. Пусть $u(x)$ и $U(x)$ — перечисляющие ряды для деревьев и корневых деревьев с единичными группами автоморфизмов. Тогда

$$U(x) = x \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} U(x^k)/k \right\}, \quad (3.3.15)$$

$$u(x) = U(x) - \frac{1}{2}(U^2(x) + U(x^2)). \quad (3.3.16)$$

Доказательство. Проверка соотношения (3.3.15) осуществляется прямым методом. Применяя формулу (2.6.1) из теоремы Пойа о взаимно однозначных функциях, видим, что ряд $xZ(A_n - S_n, U(x))$ перечисляет корневые деревья с тривиальной группой и с корнем степени $n \geq 1$. После суммирования этого ряда по всем n соотношение (2.6.5) дает формулу для $U(x)$.

Так как в рассматриваемых нами деревьях симметричных ребер нет, то уравнение характеристики неподобия есть просто $1 = p^* - q^* = p - q$. Поэтому, чтобы выразить $u(x)$ через $U(x)$, мы найдем производящие функции, перечисляющие числа способов, которыми асимметрические деревья могут быть оснащены либо корнями, либо корневыми ребрами. Подробнее, пусть

¹ То есть дерево, имеющее только одну вершину. — Прим. перев.

$U_1(x)$ и $U_2(x)$ — соответствующие перечисляющие ряды для корневых и реберно-корневых деревьев, абсолюты которых имеют единичные группы. Тогда

$$u(x) = U_1(x) - U_2(x). \quad (3.3.17)$$

Пытаясь выразить $U_1(x)$ и $U_2(x)$ через $u(x)$, мы введем первым делом две производящие функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ — соответственно для корневых деревьев и для реберно-корневых деревьев, причем рассматриваются только такие деревья, которые обладают следующим свойством: группа $\Gamma(T)$ дерева T является единичной, а группа $\Gamma(|T|)$ его абсолюта — не единична. Тогда можем написать

$$U_1(x) = U(x) - V_1(x) \quad (3.3.18)$$

и

$$U_2(x) = Z(A_2 - S_2, U(x)) - V_2(x). \quad (3.3.19)$$

И вот теперь мы замечаем, что так как

$$u(x) = U(x) - Z(A_2 - S_2, U(x)) + V_2(x) - V_1(x), \quad (3.3.20)$$

то нам необходимо найти разность между $V_1(x)$ и $V_2(x)$, выразив ее через $U(x)$. Мы покажем сейчас, что

$$V_1(x) - V_2(x) = U(x^2). \quad (3.3.21)$$

Рассмотрим все деревья T , у которых группы не являются единичными. Возможны два случая в зависимости от вклада этих деревьев в разность $V_1(x) - V_2(x)$.

Случай 1. Дерево T не имеет симметричных ребер. Выясним, сколько корневых деревьев T' и реберно-корневых деревьев T'' , обладающих единичной группой автоморфизмов, имеют своим абсолютном дерево T . Если существуют некоторые такие деревья T' или T'' , то группа $\Gamma(T)$ имеет в точности одну нетождественную подстановку и эта подстановка должна переставлять две ветви, исходящие из одной и той же вершины v_1 дерева T . Каждая из двух таких ветвей, исходящих из вершины v_1 , рассматриваемая как корневое дерево, имеет единичную группу. Если в каждой из этих ветвей содержится $n + 1$ вершин, то существуют точно n корневых деревьев T' , абсолют которых совпадает с T . Кроме того, реберно-корневые деревья T'' , получаемые путем выделения в качестве корневого ребра любого из n ребер, принадлежащих

какой-либо из этих двух ветвей, также имеют своим абсолютом дерево T . Отсюда делаем вывод, что для всех таких деревьев T число корневых деревьев с единичной группой и абсолютом T равно числу реберно-корневых деревьев с единичной группой и тем же самым абсолютом T . Следовательно, вклад таких деревьев в разность $V_1(x) - V_2(x)$ равен 0.

Случай 2. В дереве T есть симметричное ребро. Тогда порядок группы $\Gamma(T)$ не меньше 2. Если существуют корневые деревья T' или реберно-корневые деревья T'' с единичными группами и абсолютом T , то группа $\Gamma(T)$ имеет порядок 2 и нетождественная подстановка группы переставляет две центральные вершины дерева T . Следовательно, если T имеет $2n$ вершин, то существуют n корневых деревьев T' , таких, что $|T'| = T$, и $n - 1$ реберно-корневых деревьев T'' , у которых $|T''| = T$. Таким образом, для каждого дерева T с симметричным ребром и группой порядка 2 число корневых деревьев с абсолютом T на единицу больше числа реберно-корневых деревьев с тем же абсолютом T . Значит, каждое такое дерево порядка p вносит 1 в коэффициент при x^p в разности $V_1(x) - V_2(x)$.

Следовательно, мы можем сделать заключение, что $V_1(x) - V_2(x)$ является производящей функцией для деревьев, у которых существует симметричное ребро и группа имеет порядок 2. Но ряд $U(x^2)$ как раз перечисляет такие деревья, что устанавливает справедливость соотношения (3.3.21). Для завершения доказательства нужно подставить $-U(x^2)$ вместо $V_2(x) - V_1(x)$ в выражение (3.3.20). ■

Формулы (3.3.15) и (3.3.16) доказанной теоремы использованы для получения следующих коэффициентов:

$$u(x) = x + x^7 + x^8 + 3x^9 + 6x^{10} + 15x^{11} + 29x^{12} + \dots \quad (3.3.22)$$

В дополнение к ориентированным, гомеоморфно несводимым и асимметрическим деревьям в статье Харари и Принса [1] можно найти формулы для многочисленных других типов деревьев, включая следующие:

- 1) деревья с данным разбиением (или с данной степенной спецификацией);
- 2) деревья с данным диаметром;
- 3) *смешанные деревья*¹, т. е. деревья, в которых каждое ребро либо ориентировано, либо нет²;

¹ В оригинале — «*directed trees*». — Прим. перев.

² В оригинале — «...ориентировано в одном или в двух направлениях». — Прим. перев.

4) *деревья, снабженные знаками*, т. е. деревья, в которых каждому ребру приписан плюс или минус;

5) *деревья мощности s* , т. е. деревья¹, у которых любые две вершины соединены не более чем s ребрами;

6) *деревья с данным весом*, т. е. деревья, у которых вершинам сопоставлены целые положительные веса и вес дерева определяется как сумма весов всех его вершин.

Все эти задачи перечисления деревьев решались способом, аналогичным тому, который использовался для решения трех задач перечисления, рассмотренных выше. Подобным образом можно перечислить деревья, степени вершин которых равны 1 или n ($n \geq 3$). Пойа [1] решил эту задачу в случае $n = 4$, определив, таким образом, производящую функцию для предельных углеводородов C_nH_{2n+2} .

Так как деревья допускают укладку на плоскости, то возникает вопрос о числе *плоских деревьев*² порядка p (см. рис. 3.3.8).

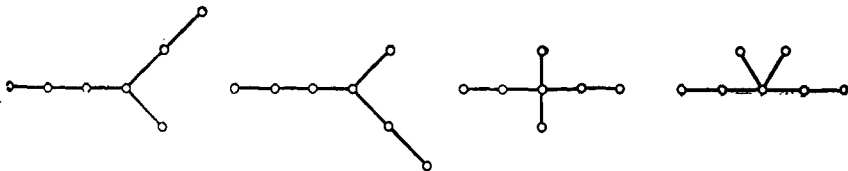


Рис. 3.3.8 Четыре различных плоских дерева седьмого порядка.

Когда корневое дерево уложено на плоскости, все его ребра, инцидентные корню, циклически упорядочиваются. Как показали Харари, Принс и Татт [1], производящая функция $P(x)$ для плоских корневых деревьев может быть представлена в виде суммы цикловых индексов циклических групп с использованием ряда $\bar{P}(x)$, перечисляющего плоские деревья с n корнями. Установлено также, что ряд $p(x)$ для плоских деревьев находится с помощью рядов $P(x)$ и $\bar{P}(x)$. Более того, коэффициенты ряда $\bar{P}(x)$ можно определить в явной форме из первого соотношения, приводимого в следующей теореме.

¹ Точнее: ...связные мультиграфы, не имеющие простых циклов длины $n > 2$. — Прим. перев.

² Плоское дерево — это дерево, вложенное в евклидову плоскость. Два плоских дерева называются изоморфными, если существует гомеоморфное отображение плоскости на себя, сохраняющее ориентацию, и такое, что оно отображает одно из этих деревьев на другое. — Прим. перев.

Теорема. Если $\bar{P}(x)$, $P(x)$ и $p(x)$ — перечисляющие ряды для соответствующих трех типов плоских деревьев: с висячими корнями, корневыми и просто деревьев, то

$$\bar{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n+1}, \quad (3.3.23)$$

$$P(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} Z(C_n, \bar{P}(x)/x), \quad (3.3.24)$$

$$p(x) = P(x) - (1/2x^2) [\bar{P}^2(x) - \bar{P}(x^2)]. \quad (3.3.25)$$

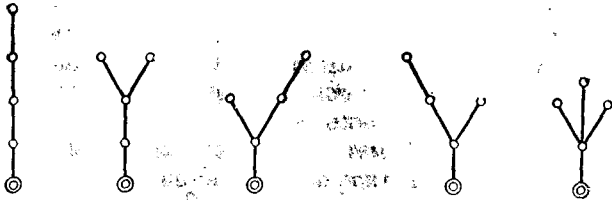


Рис. 3.3.9 Пять плоских деревьев пятого порядка, обладающих висячими корнями.

Несколько первых членов ряда $p(x)$ имеют вид

$$p(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 14x^7 + \dots \quad (3.3.26)$$

Любопытно, что ряд $\bar{P}(x)$ является перечисляющим рядом также для таких плоских деревьев с висячими корнями, у которых каждая вершина имеет степень 1 или 3. Точнее, число плоских

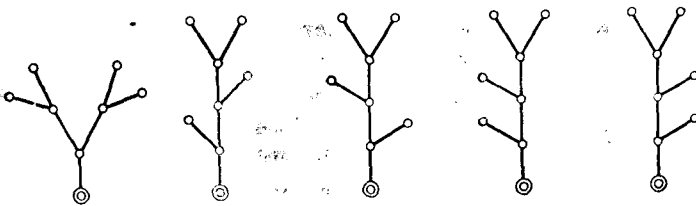


Рис. 3.3.10 Пять плоских деревьев с висячими корнями, имеющие только вершины первой и третьей степени.

деревьев порядка p , имеющих висячие корни, совпадает с числом плоских деревьев с висячими корнями, обладающих $p - 2$ вершинами степени 3 и $p - 1$ вершинами степени 1. Этот факт для случая $p = 5$ иллюстрируется на рис. 3.3.9 и 3.3.10. Двойственным утверждением к рассмотренному является такое: ряд $\bar{P}(x)$

перечисляет число способов триангулирования выпуклого n -угольника, в котором одна из сторон выделена как корень и ориентирована; триангулирование при этом осуществляется путем проведения диагоналей, не имеющих точек пересечения, отличных от вершин n -угольника. Пять пятиугольников, соответствующих деревьям, изображенным на рис. 3.3.10, приведены на рис. 3.3.11. Браун В. [2] указал, что этот результат перестраивался многократно и встречается еще у Эйлера [1].

Коэффициенты ряда $\bar{P}(x)$, называемые обычно числами Каталана, подсчитывают также число неассоциативных произведений

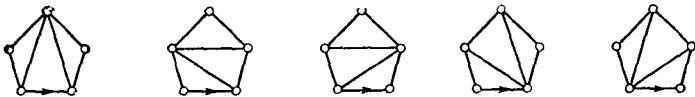


Рис. 3.3.11 Пять триангулированных пятиугольников, каждый из которых имеет ориентированное граничное ребро.

с n сомножителями. Связь деревьев с такими скобочными схемами превосходно раскрыта в книге Комте [1, стр. 64].

Список решенных задач перечисления деревьев весьма обширный, и поэтому значительная часть их включена в упражнения.

3.4. ДРЕВОВИДНЫЕ ГРАФЫ

Техника этой главы может быть приспособлена и к нахождению производящих функций для многих классов таких графов, которые либо похожи на деревья, либо содержат деревья, как порожденные подграфы. Мы рассмотрим достаточно подробно задачи перечисления униклических графов, функциональных орграфов, деревьев блоков и точек сочленения, графов блоков и кактусов.

Сначала осуществим перечисление униклических графов, потому что подход, используемый при их перечислении, может быть приспособлен к перечислению функциональных орграфов. *Униклический граф* является связным графом, имеющим только один простой цикл. Если G — униклический граф и его простой цикл имеет длину n , то G можно рассматривать как граф, имеющий корневые деревья, возможно тривиальные, прикрепленные к каждой из n вершин его цикла. Поэтому обозначим через Y множество корневых деревьев с перечисляющим рядом $T(x)$, задаваемым уравнением (3.1.4). Если степенная группа E^{D_n} имеет множество объектов Y^X , то орбиты, состоящие из функций множества Y^X , соответствуют в точности униклическим графам. Следовательно, теорема перечисления Пойа дает такой результат.

Теорема. *Перечисляющий ряд $U_n(x)$ для унциклических графов, у которых простой цикл имеет длину n , дается соотношением*

$$U_n(x) = Z(D_n, T(x)). \quad (3.4.1)$$

Значения коэффициентов при x^k в $U_n(x)$ с $n \leq 10$ и $k \leq 10$ можно найти в книге Риордана [1, стр. 178].

Орграф называется *функциональным*, если полустепень исхода каждой его вершины равна 1. Понятие функционального орграфа возникает в психологическом контексте при изучении структуры такой группировки людей, в которой каждый член проявляет ровно одну черту в своем отношении к другому члену. Сейчас нашей целью является нахождение такой производящей функции, коэффициенты которой дают числа попарно неизоморфных функциональных орграфов с заданными числами вершин (см. Харари [10]). Мы увидим, что эти орграфы соответствуют функциям, не имеющим неподвижных точек. Дэвис [1] нашел явную формулу для числа типов функций, заданных на конечном множестве (см. также Палмер [2]). Его методы могут быть легко использованы для решения и этой разновидности задачи. Однако в процессе вывода производящей функции мы выявим некоторые структурные свойства функциональных орграфов, представляющие самостоятельный интерес. В частности, функциональный орграф можно построить из ориентированных циклов и корневых деревьев.

Если Z — ориентированный цикл функционального орграфа D , то через $D - Z$ мы обозначаем орграф, который получается из D удалением всех дуг, принадлежащих циклу Z . Напомним, что дерево, входящее в вершину u , получается из корневого дерева с корнем u путем ориентирования каждого его ребра по направлению к вершине u . Теперь мы подготовлены к тому, чтобы охарактеризовать функциональные орграфы; доказательство нижеследующего утверждения можно найти у Харари, Нормана и Картрайта [1, стр. 325].

Теорема. *Орграф D является функциональным тогда и только тогда, когда каждая его слабая компонента состоит в точности из одного ориентированного цикла Z и для каждой вершины u цикла Z слабая компонента $R(u)$ орграфа $D - Z$, содержащая вершину u , является деревом, входящим в вершину u .*

Из этой теоремы и теоремы перечисления Пойа следует, что перечисляющий ряд $v(x)$ для функциональных орграфов (с n_k циклами длины k) дается формулой

$$v(x) = \sum_{k=2}^{\infty} Z(S_{n_k}, Z(C_k, T(x))), \quad (3.4.2)$$

где суммирование ведется по каждому n_k от 0 до ∞ . Меняя местами знаки суммы и произведения, получаем

$$v(x) + 1 = \prod_{k=2}^{\infty} Z(S_{\infty}, Z(C_k, T(x))). \quad (3.4.3)$$

Используя формулу (3.1.1) для суммирования цикловых индексов симметрических групп, приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Перечисляющий ряд $v(x)$ для функциональных орграфов дается формулой*

$$v(x) + 1 = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \sum_{k=2}^{\infty} Z(C_k, T(x^n)) \right\}. \quad (3.4.4)$$

Искусными алгебраическими преобразованиями Рид [3] свел эту формулу к такой:

$$v(x) + 1 = \frac{x}{T(x)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - T(x^n))^{-1}. \quad (3.4.5)$$

Единственное различие между функциями и функциональными орграфами состоит в том, что последние не имеют петель (или, в другой терминологии, неподвижных точек). Таким образом, $v(x)$ перечисляет функции (точнее, типы изоморфизмов функций), не имеющие неподвижных точек. Требуется лишь несложно модифицировать формулу (3.4.3), чтобы перечислить общее число функций. Имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty} Z(S_{\infty}, Z(C_k, T(x))). \quad (3.4.6)$$

В этой формуле коэффициент при x^n представляет собой формулу «fcp (n)» из статьи Дэвиса [1]. Рид [3] нашел числа функциональных орграфов и функций, представленные в табл. 3.4.1.

Таблица 3.4.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Функциональные орграфы	0	1	2	6	13	40	100	291	797	2 273	6 389
Функции	1	3	7	19	47	130	343	951	2 615	7 348	20 491

Часто можно заметить, что связный граф с достаточно большим числом точек сочленения похож на дерево. Мы сейчас реализуем это представление в явной форме, сопоставив каждому связному графу G дерево $bc(G)$, которое отражает указанное сходство (см. Харари и Принс [3]). *Дерево блоков и точек сочленения* графа G (обозначение: $bc(G)$) представляет собой граф, у которого множество вершин есть объединение множества блоков и множества точек сочленения графа G и две вершины смежны, если одна из них соответствует блоку графа G , а другая — точке сочленения графа G , принадлежащей этому блоку. Легко показать, что если G — связный граф, то граф $bc(G)$ действительно является деревом.

Определим теперь *bc-дерево*, как 2-раскрашенное дерево, у которого все висячие вершины окрашены в один цвет, например в голубой, в то время как другой цвет пусть будет коралловым. Таким образом, расстояние между любыми двумя висячими вершинами — четное. Отсюда следует (см. Харари [1, стр. 54]), что каждое *bc-дерево* есть дерево блоков и точек сочленения некоторого связного графа и наоборот. Поэтому, чтобы перечислить деревья блоков и точек сочленения, нам нужно только перечислить *bc-деревья*. Пусть

$$t(x, y) = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} t_{m,n} x^m y^n, \quad (3.4.7)$$

где $t_{m,n}$ — число *bc-деревьев* с m голубыми и n коралловыми вершинами. Аналогично, пусть $T(x, y)$, $T_B(x, y)$ и $T_C(x, y)$ — перечисляющие ряды соответственно для корневых *bc-деревьев* для корневых *bc-деревьев* с голубым корнем и для корневых *bc-деревьев* с коралловым корнем.

Теорема. *Перечисляющие ряды для bc-деревьев удовлетворяют соотношениям*

$$T_C(x, y) = y(Z(S_{\infty}, T_B(x, y)) - T_B(x, y) - 1), \quad (3.4.8)$$

$$T_B(x, y) = xZ(S_{\infty}, T_C(x, y)) + yT_B(x, y), \quad (3.4.9)$$

$$T(x, y) = T_B(x, y) + T_C(x, y), \quad (3.4.10)$$

$$t(x, y) = T(x, y) - T_B(x, y)(T_C(x, y) + yT_B(x, y)). \quad (3.4.11)$$

Доказательство этой теоремы можно найти у Харари и Принса [3]. В явной форме

$$t(x, y) = x + x^2y + x^3(y + y^2) + x^4(y + y^2 + 2y^3) + \\ + x^5(y + 2y^2 + 3y^3 + 3y^4) + \dots \quad (3.4.12)$$

Граф блоков данного графа G , обозначаемый $B(G)$, имеет своими вершинами блоки графа G и две вершины в нем смежны,

если соответствующие блоки имеют общую вершину. Норман [1] получил производящую функцию для связных графов, в которых каждый блок является полным графом. Такими графами как раз являются графы блоков (см. Харари [1, стр. 45]). Учитывая это соответствие, можно воспользоваться формулой из предыдущей теоремы и получить ряд, перечисляющий графы блоков (см. Харари и Принс [3]).

Следствие. Ряды $\bar{B}(x)$ и $B(x)$, перечисляющие связные корневые и некорневые графы блоков, удовлетворяют соотношениям

$$\bar{B}(x) = T_B(x, 1) = x + x^2 + 3x^3 + 8x^4 + 25x^5 + \dots, \quad (3.4.13)$$

$$B(x) = t(x, 1) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + \dots \quad (3.4.14)$$

Правильность первых четырех коэффициентов в формуле (3.4.14) подтверждается рис. 3.4.1.

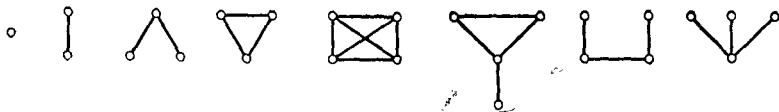


Рис. 3.4.1 Наименьшие графы блоков.

Кактус представляет собой связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Эти графы раньше назывались «деревьями Хусими», и их определение¹ было дано Уленбеком (см. Уленбек и Форд [1]) и Ридделом [1], которые следовали статье Хусими [1] о групповых интегралах в теории конденсации в статистической механике. Для перечисления кактусов нам потребуется подходящий вариант теоремы о характеристике неподобия (см. Харари и Норман [1]), но здесь мы проиллюстрируем его использование только для подсчета *треугольных кактусов* (см. Харари и Норман [1]), в которых каждое ребро принадлежит треугольнику².

Пусть дан кактус H . Обозначим через p^* , q^* и r^* числа неподобных вершин, неподобных ребер и неподобных простых циклов соответственно. Через s обозначим число симметричных ребер, не принадлежащих простым циклам. Пусть C — произвольный простой цикл кактуса H , содержащий n ($n \geq 3$) вершин. Тогда $A = \Gamma(H)|_C$ есть ограничение группы кактуса H на цикл C , и поэтому A — подгруппа группы D_n . Предположим теперь, что n — четное и $|A| = 2$. Тогда для нетождественной подстановки α

¹ Этот термин подвергался большой критике, потому что деревья Хусими не обязательно являются деревьями.

² То есть простому циклу C_3 . — Прим. перев.

из A имеются две возможности: либо α оставляет неподвижными две вершины цикла C , либо она оставляет неподвижными два ребра цикла C . В первом случае назовем C *циклом типа 1*, во втором — *циклом типа 2*. Пусть r_i^* — число классов подобия циклов типа i ($i = 1, 2$). Теперь нужная нам теорема может быть сформулирована следующим образом (заметим, что для всех кактусов имеет место частный случай формулы Эйлера — Пуанкаре: $p - q + r = 1$).

Теорема (характеристика неподобия для кактусов). Для произвольного кактуса числа классов вершин, ребер и простых циклов удовлетворяют соотношению

$$1 = p^* - (q^* - s) + (r^* - r_1^* + r_2^*). \quad (3.4.15)$$

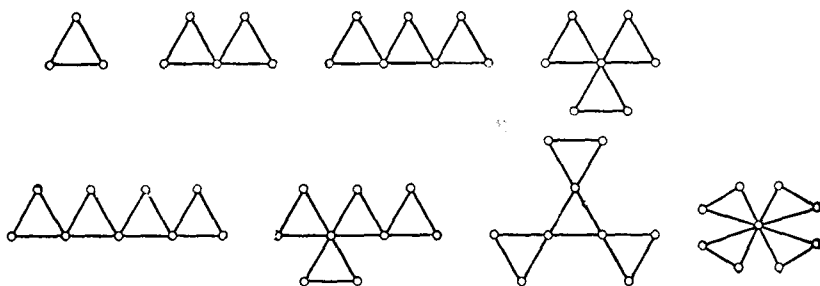


Рис. 3.4.2 Треугольные кактусы с небольшим числом вершин.

Детали доказательства можно найти в работе Харари и Нормана [1].

Треугольный кактус будем называть для краткости Δ -кактусом. Применяя формулу (3.4.15) к Δ -кактусам, находим

$$1 = p^* - q^* + r^*. \quad (3.4.16)$$

Следовательно, чтобы перечислить Δ -кактусы, нужно построить производящие функции для следующих трех классов Δ -кактусов: кактусов, у которых в качестве корня выделяется либо вершина, либо ребро, либо треугольник. Для удобства условимся считать, что граф, состоящий из одной вершины, является Δ -кактусом. Пусть $D(x)$ — производящая функция для корневых Δ -кактусов, т. е. коэффициент при x^n представляет собой число корневых деревьев, составленных из n треугольников. Если корень имеет степень 2, то перечисляющий ряд совпадает как раз с $xZ(S_2, D(x))$ и, следовательно,

$$D(x) = Z(S_\infty, xZ(S_2, D(x))). \quad (3.4.17)$$

Далее, перечисляющий ряд для реберно-корневых Δ -кактусов имеет вид $x D(x) Z(S_2, D(x))$, а для Δ -кактусов, корнями которых являются треугольники, $x Z(S_3, D(x))$. Суммируя теперь формулу (3.4.16) по всем Δ -кактусам, получаем соотношение (3.4.19), выражающее перечисляющий ряд $d(x)$ для Δ -кактусов¹ через ряд $D(x)$ для корневых Δ -кактусов.

Теорема. Ряды $D(x)$ и $d(x)$ для корневых и некорневых треугольных кактусов удовлетворяют соотношениям

$$D(x) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k} (D^2(x^k) + D(x^{2k})) \right\}, \quad (3.4.18)$$

$$d(x) = D(x) - \frac{x}{3} (D^3(x) - D(x^3)). \quad (3.4.19)$$

В частности, из (3.4.18) находим

$$D(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 13x^4 + 37x^5 + \\ + 111x^6 + 345x^7 + 1105x^8 + \dots \quad (3.4.20)$$

Из (3.4.19) следует, что

$$d(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 19x^6 + 48x^7 + 126x^8 + \dots; \quad (3.4.21)$$

значения нескольких первых коэффициентов ряда согласуются с графами, изображенными на рис. 3.4.2. Для подробного ознакомления со свойствами кактусов, состоящих только из четырехугольников, можно обратиться к статье Харари и Уленбека [1].

3.5. 2-ДЕРЕВЬЯ

В этом параграфе изучаются некоторые понятия, относящиеся к деревьям и связанные со структурами достаточно высокой размерности. Для того чтобы перечислить специальные двумерные структуры, называемые 2-деревьями, приходится дополнительно развить теорию характеристики неподобия и применять теоремы перечисления Пойа. Наши методы можно приспособить к перечислению таких 2-деревьев, которые уложены на плоскости, и, таким образом, предлагается новый подход к старой задаче о нахождении числа триангуляций многоугольника.

¹ Коэффициент при x^n в $d(x)$ (соответственно в $D(x)$) равен числу Δ -кактусов (соответственно корневых Δ -кактусов), имеющих в точности n треугольников. — Прим. перев.

В статье Харари и Палмера [12] мы определили n -плекс как n -мерный симплициальный комплекс, в котором каждый k -симплекс¹ ($k < n$) содержится в некотором n -симплексе. Мы будем оперировать только с 2-плексами и для удобства называем 0-симплексы, 1-симплексы и 2-симплексы соответственно *вершинами*, *ребрами* и *ячейками*. *Двумерные деревья*, называемые также *2-деревьями*, теперь можно определить по индукции. 2-плекс с тремя вершинами есть 2-дерево, и 2-дерево с $p + 1$ вершинами получается из 2-дерева с p вершинами добавлением новой вершины w , смежной с каждой из каких-либо двух смежных вершин u и v ,

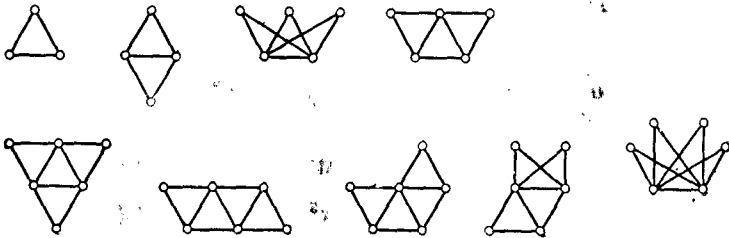


Рис. 3.5.1 Графы 2-деревьев с небольшим числом вершин.

и добавлением еще «сопутствующей им» ячейки $\{u, v, w\}$. Определение k -дерева при $k > 2$ дается подобным образом. Для перечисления 2-деревьев нужно только рассмотреть их 1-скелеты, или что то же самое, соответствующие им графы, которые для случая $p \leq 6$ изображены на рис. 3.5.1.

Как обычно, число r^* неподобных вершин 2-дерева означает число орбит на множестве вершин 2-дерева; аналогичные определения даются для числа q^* неподобных ребер и для числа r неподобных ячеек.

Теорема (характеристика неподобия для 2-деревьев). Если 2-дерево имеет q^* неподобных ребер, r^* неподобных ячеек, s_1 неподобных ячеек с двумя подобными ребрами, s_2 неподобных ячеек с тремя подобными ребрами, причем $s = s_1 + 2s_2$, то имеет место соотношение

$$q^* + s - 2r^* = 1. \quad (3.5.1)$$

Теперь мы приступим к построению производящей функции для 2-деревьев. Пусть t_n — число² 2-деревьев с n

¹ То есть k -мерный симплекс, — Прим. перев.

² Мы используем здесь тот же символ t_n , который раньше применяли для деревьев, а еще раньше — для помеченных деревьев. Но мы истощили свой запас букв и уповаем лишь на то, что подобное повторение не вызовет чрезмерно большой путаницы.

ячейками. **Перечисляющий** ряд для 2-деревьев обозначим через

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n. \quad (3.5.2)$$

Чтобы получить формулу для t_n , воспользуемся соответствующими рядами для различных видов корневых 2-деревьев. Сначала введем в рассмотрение два ряда: $M_1(x)$ и $N_1(x)$ для реберно-корневых 2-деревьев, у которых корневое ребро является соответственно симметричным и несимметричным торцевым¹ ребром. Далее, пусть $M(x)$ и $N(x)$ — ряды для реберно-корневых 2-деревьев соответственно с симметричным и несимметричным корневым ребром². Следующие два уравнения выражают ряды $M_1(x)$ и $N_1(x)$ через ряды $M(x)$ и $N(x)$:

$$M_1(x) = x(1 + M(x^2) + 2N(x^2)), \quad (3.5.3)$$

$$N_1(x) = xZ(A_2 - S_2, 1 + M(x) + 2N(x)). \quad (3.5.4)$$

Затем выражаем ряд $M(x)$ через ряды $M_1(x)$ и $N_1(x)$:

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n, M_1(x^n) + N_1(x^{2n})). \quad (3.5.5)$$

Используя тождество (3.1.1), можно записать уравнение (3.5.5) в следующем виде:

$$1 + M(x) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) [M_1(x^n) + N_1(x^{2n})] \right\}. \quad (3.5.6)$$

Теперь заметим, что перечисляющий ряд для реберно-корневых 2-деревьев, у которых корневое ребро ориентировано, является просто суммой рядов: $M(x) + 2N(x)$. Учитывая этот факт, получаем соотношение

$$M(x) + 2N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n, M_1(x^n) + 2N_1(x^n)). \quad (3.5.7)$$

¹ В оригинале — «end-line». Имеется в виду такое ребро, которое принадлежит ровно одному треугольнику. — Прим. перев.

² Все ряды в этом параграфе перечисляют различные 2-деревья в соответствии с числом ячеек в них. — Прим. перев.

Снова применяя тождество (3.1.1), можно уравнение (3.5.7) записать в таком виде:

$$1 + M(x) + 2N(x) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) [M_1(x^n) + 2N_1(x^n)] \right\}. \quad (3.5.8)$$

Соотношения (3.5.6) и (3.5.8) можно использовать для представления ряда $N(x)$ через ряды $M_1(x)$ и $N_1(x)$. Применяя все четыре формулы (3.5.3), (3.5.4), (3.5.6) и (3.5.8), можно вычислить коэффициенты рядов $M(x)$ и $N(x)$. Для нескольких первых членов этих рядов имеем следующие представления:

$$M(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 6x^5 + \dots, \quad (3.5.9)$$

$$N(x) = x^2 + 4x^3 + 18x^4 + 77x^5 + \dots \quad (3.5.10)$$

Ряд для реберно-корневых 2-деревьев обозначим через $L(x)$, и так как $L(x) = M(x) + N(x)$, то немедленно получаем

$$L(x) = x + 2x^2 + 6x^3 + 21x^4 + 83x^5 + \dots \quad (3.5.11)$$

Обозначим через $\Delta(x)$ ряд для корневых 2-деревьев, в каждом из которых в качестве корня выделена ячейка (треугольник). Можно показать, что

$$\Delta(x) = xZ(S_3, 1 + M(x) + 2N(x) - xN(x)(1 + M(x^2) + 2N(x^2))). \quad (3.5.12)$$

Имея это выражение для $\Delta(x)$, подставим в него соотношения (3.5.9) и (3.5.10) и получим несколько первых членов ряда $\Delta(x)$:

$$\Delta(x) = x + x^2 + 3x^3 + 10x^4 + 39x^5 + \dots \quad (3.5.13)$$

Следуя обозначениям формулы (3.5.1) из теоремы о характеристике неподобия для 2-деревьев, положим: $s_1(x)$ — перечисляющий ряд для корневых 2-деревьев, у которых корнем является ячейка с двумя подобными ребрами; $s_2(x)$ — перечисляющий ряд для корневых 2-деревьев, у которых корневая ячейка имеет три подобных ребра. Оба эти ряда легко выражаются через ряды $M_1(x)$, $M(x)$ и $N(x)$:

$$s_1(x) = M_1(x)(1 + M(x)) - x(1 + M(x^3)), \quad (3.5.14)$$

$$s_2(x) = x(1 + M(x^3) + N(x^3)). \quad (3.5.15)$$

Делая соответствующие подстановки, получаем

$$s_1(x) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 7x^5 + \dots, \quad (3.5.16)$$

$$s_2(x) = x + x^4 + 2x^7 + 6x^{10} + \dots \quad (3.5.17)$$

Чтобы вывести формулу для ряда $t(x)$, перечисляющего 2-деревья, воспользуемся теоремой о характеристике неподобия для 2-деревьев и формулой (3.5.1) абсолютно так же, как поступил Оттер при перечислении деревьев.

Теорема (теорема перечисления для 2-деревьев). *Перечисляющий ряд для 2-деревьев дается соотношением*

$$t(x) = L(x) + s_1(x) + 2s_2(x) - 2\Delta(x). \quad (3.5.18)$$

Подставляя в эту формулу выражения (3.5.11), (3.5.13), (3.5.16) и (3.5.17), получаем

$$t(x) = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 12x^5 + \dots \quad (3.5.19)$$

Заметим, что эта теорема может быть использована для перечисления 2-деревьев, обладающих специальными свойствами, при условии, что найдены выражения для рядов $L(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ и $\Delta(x)$, перечисляющих соответствующие корневые 2-деревья (имеющие те же свойства).

Триангуляция многоугольника представляет собой граф, получающийся из регулярного n -угольника путем добавления непересекающихся хорд до тех пор, пока каждая внутренняя область не станет треугольником. Очевидно, что для получения $n - 2$ треугольников нужно провести $n - 3$ хорд. Производящая функция для числа различных триангуляций n -угольника, т. е. для числа неизоморфных триангуляций, рассматриваемых как графы, была найдена Брауном В. [1], но нашей целью здесь является изложение совершенно иного подхода к нахождению такой производящей функции. Мы переформулируем задачу (замечая, что триангуляции многоугольников соответствуют как раз планарным 2-деревьям) в утверждение, относящееся к двумерным симплициальным комплексам. После этого перейдем к перечислению планарных 2-деревьев теми же методами, которые использовались при перечислении 2-деревьев.

Для иллюстрации конфигураций, подлежащих перечислению, мы приводим на рис. 3.5.2 единственные триангуляции треугольника, квадрата и правильного пятиугольника, а также три различные триангуляции правильного шестиугольника. Заметим, что эти графы не рассматриваются ни как корневые, ни как помеченные. Обратим внимание также на соответствие между ними и планарными 2-деревьями с одной, двумя, тремя и четырьмя ячейками.

Перечисление планарных 2-деревьев может быть выполнено с помощью почти тех же формул, которые уже использовались для 2-деревьев. Поэтому мы несущественно изменим обозначения, которые применялись для 2-деревьев, — будем добавлять черту

над буквой для указания на то, что рассматривается производящая функция для планарных 2-деревьев.

Итак, пусть, $\bar{M}_1(x)$ и $\bar{N}_1(x)$ — ряды для планарных реберно-корневых 2-деревьев, имеющих в качестве корневого ребра соответственно симметричное и несимметричное торцевое ребро. Тогда

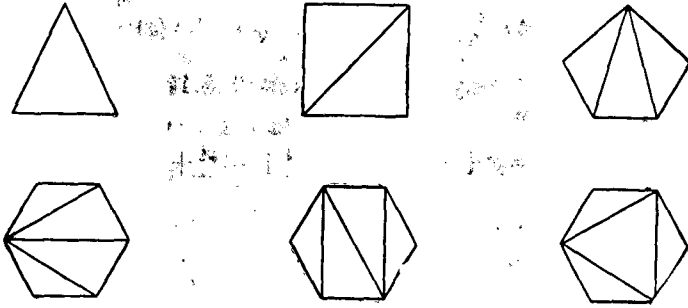


Рис. 3.5.2 Триангуляции n -угольников, $n = 3, 4, 5, 6$.

следующие две формулы (сравните с формулами (3.5.3) и (3.5.4.)) устанавливают связь между $\bar{M}_1(x)$ и $\bar{N}_1(x)$:

$$\bar{M}_1(x) = x(1 + \bar{M}_1(x^2) + 2\bar{N}_1(x^2)), \quad (3.5.20)$$

$$\bar{N}_1(x) = xZ(A_2 - S_2, 1 + \bar{M}_1(x) + 2\bar{N}_1(x)). \quad (3.5.21)$$

Эти два соотношения можно использовать для получения коэффициентов рядов $\bar{M}_1(x)$ и $\bar{N}_1(x)$. Однако, как отмечалось при перечислении плоских деревьев, формула Эйлера (см. рис. 3.3.11 и уравнение (3.3.23)) показывает, что число триангуляций корневого $(n+2)$ -угольника, корневое ребро которого снабжено ориентацией и является граничным, дается соотношением

$$f_n = \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}. \quad (3.5.22)$$

Следовательно,

$$\bar{M}_1(x) + 2\bar{N}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} x^n. \quad (3.5.23)$$

Теперь из формулы (3.5.23) и уравнения (3.5.20) для $\bar{M}_1(x)$ имеем

$$\bar{M}_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} x^{2n+1}. \quad (3.5.24)$$

Несколько первых членов рядов $\bar{M}_1(x)$ и $\bar{N}_1(x)$ приводятся ниже:

$$\bar{M}_1(x) = x + x^3 + 2x^5 + 5x^7 + 14x^9 + \dots, \quad (3.5.25)$$

$$\bar{N}_1(x) = x^2 + 2x^3 + 7x^4 + 20x^5 + 66x^6 + 212x^7 + 715x^8 + \dots \quad (3.5.26)$$

Ряд для планарных реберно-корневых 2-деревьев обозначается через $\bar{L}(x)$ и может быть выражен через ряды $\bar{M}_1(x)$ и $\bar{N}_1(x)$:

$$\bar{L}(x) = Z(S_2, 1 + \bar{M}_1(x) + \bar{N}_1(x)) + Z(S_2, \bar{N}_1(x)) - 1. \quad (3.5.27)$$

Подстановка выражений (3.5.25) и (3.5.26) в соотношение (3.5.27) дает

$$\bar{L}(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + 12x^4 + 34x^5 + 111x^6 + 360x^7 + 1226x^8 + \dots \quad (3.5.28)$$

Учитывая тот факт, что уравнения и процедуры, относящиеся к планарным 2-деревьям, в сущности совпадают с уравнениями и процедурами для 2-деревьев, мы просто приведем список формул для $\bar{\Delta}(x)$, $\bar{s}_1(x)$, $\bar{s}_2(x)$ и $\bar{t}(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) &= xZ(S_3, 1 + \bar{M}_1(x) + 2\bar{N}_1(x)) - \\ &\quad - x\bar{N}_1(x)(1 + \bar{M}_1(x^2) + 2\bar{N}_1(x^2)), \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

$$\bar{s}_1(x) = \bar{M}_1(x)(1 + \bar{M}_1(x)) - x(1 + \bar{M}_1(x^3)), \quad (3.5.30)$$

$$\bar{s}_2(x) = x\bar{N}_1(x^3) + x(1 + \bar{M}_1(x^3)) \quad (3.5.31)$$

и, как прежде,

$$\bar{t}(x) = \bar{L}(x) + \bar{s}_1(x) + 2\bar{s}_2(x) - 2\bar{\Delta}(x), \quad (3.5.32)$$

которая получается навешиванием черты на производящие функции в уравнении (3.5.18), относящемся к теореме перечисления для 2-деревьев.

Подставляя выражения (3.5.25) и (3.5.26) для рядов $\bar{M}_1(x)$ и $\bar{N}_1(x)$ в эти формулы, получаем ряд $\bar{t}(x)$ для планарных 2-деревьев. Р. К. Гай (чтобы скоротать время в Сингапуре) с помощью карандаша, бумаги и настольной счетной машины получил (неопубликованная работа) первые 23 коэффициента ряда, приведенные в табл. 3.5.1.

Таблица 3.5.1

Планарные 2-деревья

n	\bar{t}_n	n	\bar{t}_n
1	1	13	24 834
2	1	14	83 898
3	1	15	285 357
4	3	16	1 046 609
5	4	17	3 412 420
6	12	18	11 944 614
7	27	19	42 080 170
8	82	20	149 197 152
9	228	21	532 883 768
10	733	22	1 905 930 975
11	2 282	23	6 861 221 666
12	7 528		

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. *Разбиение* дерева представляет собой последовательность целых неотрицательных чисел (a_1, a_2, a_3, \dots) , где a_m равно числу вершин степени m . Деревья с данным разбиением.

(Харари и Принс [1])

3.2. *Диаметр* дерева есть длина наибольшей простой цепи. Деревья с данным диаметром.

(Харари и Принс [1])

3.3. *Взвешенное дерево* — это такое дерево, каждой вершине которого сопоставлено некоторое целое положительное число, называемое *весом* вершины. *Вес* дерева равен сумме весов всех его вершин. Деревья с p вершинами и весом m .

(Харари и Принс [1])

3.4. *Дерево, снабженное знаками*, — это такое дерево, в котором каждому ребру приписан плюс или минус. Деревья, снабженные знаками.

(Харари и Принс [1])

3.5. Дерево имеет *мощность* s , если по крайней мере одна пара его вершин соединена s ребрами, но не существует двух вершин в нем, которые соединены более чем s ребрами. Деревья с мощностью, не превосходящей s .

(Харари и Принс [1])

3.6. (а) Связные, (б) односторонние, (с) сильные функциональные орграфы.

(Харари [10])

3.7. Кактусы, в которых каждый блок — четырехугольник.

(Харари и Уленбек [1])

3.8. Триангуляции многоугольника, содержащие n внутренних вершин.

(Браун В. [1])

3.9. Деревья с данным числом висячих вершин.

3.10. Производящая функция $U(x)$ для **корневых асимметрических** деревьев удовлетворяет соотношению

$$U(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)^{U_n}.$$

3.11. Деревья, вершины которых имеют степени 1 или 4 (предельные углеводороды). (Пойа [1])

3.12. Корневое дерево имеет *высоту* k , если расстояние от корня до наиболее удаленной вершины равно k . Корневые деревья с заданной высотой. (Риордан [2])

3.13. Плоские корневые деревья

$$\frac{1}{2q} \sum_{d|q} \varphi\left(\frac{q}{d}\right) \binom{2d}{d}.$$

(Уолкап [1])

3.14. Леса с q ребрами, не имеющие изолированных вершин.

Прекрасна правда и правдиво
Прекрасное — и этого довольно!

Дж. Китс, Ода греческой вазе¹

Глава 4 ГРАФЫ

Решение пленительной задачи о нахождении числа графов порядка p было впервые опубликовано, по-видимому, в 1927 году. Автором замечательной статьи, содержащей этот интригующий результат, был Дж. Г. Редфилд² [1]. Почти тридцать лет эта пионерская работа оставалась фактически незамеченной, а тем

¹ Перевод О. Чухонцева. — *Прим. перев.*

² Приводим целиком письмо К. Оукли к Ф. Харари, датированное 19 декабря 1963 года.

Говард Редфилд окончил Хаверфордский колледж в 1899 году. Был он человеком с разносторонними интересами, и мы не имеем подробного списка того, что он сделал. Сразу после окончания колледжа он работал инженером. В колледже изучал несколько языков и математику. (В те дни там даже не было кафедры математики). Окончив Хаверфорд со степенью бакалавра, он получил степень бакалавра в МТИ и магистра искусств и доктора философии (по математике) в Гарварде. В течение 1907—1908 годов он изучал романскую филологию в Парижском университете. В 1908—1909 годах он был преподавателем математики в Вустерском политехническом институте (Вустер, штат Массачусетс). В 1910—1911 годах он преподавал французский язык в Свортморском колледже, а в течение 1912—1914 годов он был ассистентом профессора романских языков в Принстонском университете. С 1916 года до самой своей смерти в 1944 году он работал инженером в Уэйне, штат Пенсильвания.

Я был знаком с ним приблизительно с 1938 по 1944 год. Помню, как в 1940 году он приехал в Хаверфордский колледж и прочитал там несколько лекций по электронным вычислительным машинам (это было немного раньше Экерта и Моучли). Зная его, как я в те последние годы, можно хорошо понять, почему он не стал знаменитым педагогом. Он всегда витал в облаках, никогда не смотрел на вас, говорил тихо, уставив глаза в пол; читая лекцию, часто поворачивался к вам спиной, чтобы написать что-то на доске. Однако его записи на доске были безупречны. Их можно было фотографировать и печатать фотоофсетным способом — настолько они были совершенны.

Он часто навещался в Хаверфорд, чтобы побеседовать в нашем математическом клубе, и всегда у него было что-нибудь новое. Он был настолько скромн, что вы никогда не знали, было ли то, о чем он рассказывал, его собственным результатом или принадлежало кому-либо другому.

Это почти все, что я знаю о нем, за исключением того, что был у него очень известный брат (Альфред Редфилд) в Вудсколле, штат Массачусетс.

временем успешно и независимо друг от друга за решение задачи брались другие математики, включая Р. Л. Дэвиса [1], А. М. Глисона, С. Голомба, Д. Слепяна и, конечно, Дж. Пойа. Уже в 1937 году, когда появилась его теорема перечисления, Пойа мог применить ее к задаче нахождения производящей функции, перечисляющей графы в соответствии с числами их вершин и ребер. В письме Дж. Пойа к Ф. Харари, poslanном в 1951 году, содержится формула (4.1.9), приводимая ниже, с подставленным в нее рядом $1 + x$, и она проиллюстрирована для случая $p = 4$. Но об этом не было известно до появления статьи Харари [4] в 1955 году, в которой отражены детали доказательства.

В гл. 3 мы уже видели, как может быть применена теорема Пойа к задачам перечисления деревьев и древовидных структур. Настоящая глава содержит дальнейшее подтверждение широкой применимости его метода. Мы займемся перечислением графов, корневых графов, связных графов, 2-раскрашенных графов, локально ограниченных графов, раскрашенных графов, булевых функций и эйлеровых графов.

4.1. ГРАФЫ

Эффективный метод Пойа для перечисления графов требует построения группы подстановок, орбиты которой соответствуют в точности изоморфным классам помеченных графов с p вершинами и q ребрами. После получения явной формулы для соответствующего циклового индекса, применив теорему Пойа с рядом $1 + x$ в качестве перечисляющего ряда для фигур, находим перечисляющий многочлен, в котором коэффициент при x^q равен числу (p, q) -графов.

Более точно, пусть

$$g_p(x) = \sum_{q=0}^m g_{p,q} x^q, \quad (4.1.1)$$

где $m = \binom{p}{2}$ и $g_{p,q}$ — число (p, q) -графов. Например, если взглянуть на рис. 1.1.2, можно убедиться, что

$$g_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6. \quad (4.1.2)$$

Заметим, что коэффициенты в этих многочленах всегда «симметричны относительно концов», ибо число (p, q) -графов равно числу $(p, m-q)$ -графов, дополнительных к первоначальным.

Так как теорема Пойа перечисляет орбиты функций, то мы сначала установим естественное соответствие между графами и функциями. Пусть $X = \{1, \dots, p\}$, в то время как $X^{(2)}$ обозначает все 2-подмножества множества X . Тогда, если $Y = \{0, 1\}$,

то функции из $X^{(2)}$ в Y представляют помеченные графы порядка p . Каждая функция f соответствует тому графу $G(f)$, у которого множество вершин есть X и вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда $f\{i, j\} = 1$. Таким образом, две функции f и h представляют один и тот же граф, если существует некоторая подстановка α на множестве X , такая, что всякий раз, когда i и j — смежные вершины в $G(f)$, вершины αi и αj смежны в графе $G(h)$. Следовательно, графы $G(f)$ и $G(h)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для некоторой подстановки α , действующей на множестве X ,

$$f\{i, j\} = h\{\alpha i, \alpha j\} \quad (4.1.3)$$

для всех пар $\{i, j\}$ из множества $X^{(2)}$. Это уравнение подсказывает следующую унарную операцию на группах подстановок, которая приводит к группе, требуемой для перечисления графов.

Пусть A — группа подстановок с множеством объектов $X = \{1, 2, \dots, p\}$. Парная группа группы A , обозначаемая $A^{(2)}$, есть группа подстановок, индуцируемая группой A и действующая на множестве $X^{(2)}$. Точнее, каждая подстановка α группы A индуцирует подстановку α' группы $A^{(2)}$, такую, что для каждого элемента $\{i, j\}$ множества $X^{(2)}$

$$\alpha'\{i, j\} = \{\alpha i, \alpha j\}. \quad (4.1.4)$$

Таким образом, степень группы $A^{(2)}$ равна $\binom{p}{2}$ и $A \cong A^{(2)}$, если A отлична от S_2 . Чтобы пояснить это определение, введем реберную группу графа — понятие, которое будет также достаточно полезным и в дальнейшем. Пусть G — граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $X(G)$. Каждая подстановка α группы $\Gamma(G)$ индуцирует подстановку α' , действующую на множестве $X(G)$ следующим образом. Если u и v — смежные в G вершины, так что $\{u, v\}$ — ребро графа G , то

$$\alpha'\{u, v\} = \{\alpha u, \alpha v\}. \quad (4.1.5)$$

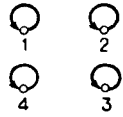
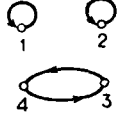
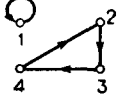
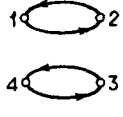
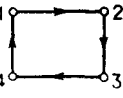
Эта совокупность подстановок на множестве $X(G)$ образует группу, обозначаемую $\Gamma_1(G)$ и называемую *реберной группой графа G* . Например, реберная группа полного графа порядка p и парная группа симметрической группы степени p идентичны, т. е.

$$\Gamma_1(K_p) = S_p^{(2)}. \quad (4.1.6)$$

Теперь, учитывая формулы (4.1.3) и (4.1.4), заключаем, что две функции f и h представляют один и тот же граф тогда и только тогда, когда существует подстановка α на множестве X , такая, что для всех z из $X^{(2)}$

$$f(z) = h(\alpha' z). \quad (4.1.7)$$

Таблица 4.1.1

Слагаемое из $Z(S_4)$	Подстановка из S_4	Диаграмма этой подстановки
s_1^4	(1) (2) (3) (4)	
$s_1^2 s_2$	(1) (2) (34)	
$s_1 s_3$	(1) (234)	
s_2^2	(12) (34)	
s_4	(1234)	

Но это условие совпадает в точности с требованием, чтобы f и h содержались в одной и той же орбите степенной группы $E_2^{S_p^{(2)}}$. Следовательно, орбиты этой степенной группы соответствуют различным непомеченным графам порядка p , т. е. изоморфным классам помеченных графов. Применение теоремы Пойа к перечислению этих орбит в соответствии с их весами приводит к следующей разновидности формулы Пойа для перечисления графов.

Теорема. Многочлен $g_p(x)$, перечисляющий графы порядка p в соответствии с числом ребер в них, дается соотношением

$$g_p(x) = Z(S_p^{(2)}, 1+x), \tag{4.1.8}$$

где

$$Z(S_p^{(2)}) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{k^j j!} \prod_k s_{2k+1}^{k j_{2k+1}} \prod_k (s_k s_{2k}^{k-1})^{j_{2k}} s_k^{j_{2k}} \prod_{r < t} s_{[r, t]}^{j_r j_t}. \tag{4.1.9}$$

Доказательство. Определим весовую функцию w на множестве $Y = \{0, 1\}$, положив $w(0) = 0$ и $w(1) = 1$. Тогда вес функции, действующей из $X^{(2)}$ в Y , и вес орбиты, которой она принадлежит, определяются обычным образом, как в соотношении (2.4.4).

Значит, вес орбиты, задаваемой группой $E_2^{S_p^{(2)}}$, есть просто число ребер в соответствующем графе. Тогда формула (4.1.8) следует из теоремы Пойа.

Теперь получим формулу (4.1.9) для $Z(S_p^{(2)})$, проиллюстрировав ее вначале для случая $p = 4$. В цикловом индексе

$$Z(S_4) = \frac{1}{24} (s_1^4 + 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 + 6s_4) \tag{4.1.10}$$

каждое слагаемое может быть представлено одной из отвечающих ему подстановок, как это показано в табл. 4.1.1.

Каждый из пяти типов подстановок, принадлежащих группе S_4 , индуцирует некоторую подстановку из парной группы $S_4^{(2)}$. Таблица 4.1.2 содержит все слагаемые циклового индекса $Z(S_4^{(2)})$, индуцируемые соответствующими слагаемыми из $Z(S_4)$.

Таблица 4.1.2

Слагаемое из $Z(S_4)$	Индуцируемое слагаемое из $Z(S_4^{(2)})$
s_1^4	s_1^6
$s_1^2 s_2$	$s_1^2 s_2^2$
$s_1 s_3$	s_3^2
s_2^2	$s_1^2 s_2^2$
s_4	$s_2 s_4$

Одно из этих слагаемых иллюстрируется на рис. 4.1.1, где 2-подмножества обозначены ради краткости следующим образом: $\{1, 2\} = 12$ и т. д. Приводя подобные члены, находим, что

$$Z(S_4^{(2)}) = \frac{1}{24} (s_1^6 + 9s_1^2s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2s_4). \quad (4.1.11)$$

Подставляя $1 + x$ в этот цикловой индекс, имеем, как и в формуле (4.1.2),

$$Z(S_4^{(2)}, 1 + x) = g_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6. \quad (4.1.12)$$

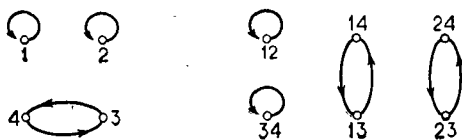


Рис. 4.1.1 Подстановка (1)(2)(34) и индуцируемая ею подстановка в $S_4^{(2)}$.

Мы указываем соответствие между слагаемыми, входящими в цикловые индексы групп S_p и $S_p^{(2)}$, записывая

$$s_1^4 \rightarrow s_1^6, \quad s_1^2s_2 \rightarrow s_1^2s_2^2$$

и т. д. Чтобы получить выражение для $Z(S_p^{(2)})$, мы должны найти отсутствующий член в соотношении

$$s_1^i s_2^j \dots s_p^p \rightarrow ? \quad (4.1.13)$$

Пусть α — подстановка из S_p , которой в цикловом индексе $Z(S_p)$ соответствует слагаемое $\Pi s_k^{j_k}$. Существуют два различных вклада, которые делаются подстановкой α' в соответствующее слагаемое циклового индекса $Z(S_p^{(2)})$. Первый вклад определяется парами таких элементов множества $X = \{1, 2, \dots, p\}$, которые принадлежат общему циклу подстановки α ; второй — парами тех элементов множества X , которые содержатся в разных циклах подстановки α .

Сейчас мы определим первый из этих вкладов. Пусть $z_k = (12 \dots k)$ — цикл длины k подстановки α . На рис. 4.1.2 показана подстановка из парной группы, индуцируемая циклом z_k при $k = 2, 3, \dots, 6$. Очевидно, что если k — нечетно, то цикл z_k индуцирует $(k-1)/2$ циклов одной и той же длины, т. е.

$$s_k \rightarrow s_k^{(k-1)/2}.$$

С другой стороны, когда k — четное, то находим

$$s_k \rightarrow s_{k/2} s_k^{(k-2)/2}.$$

Таким образом, так как существуют j_k циклов длины k в подстановке α , то пары элементов, лежащих в общих циклах, порождают соответствие

$$s_k^{j_k} \rightarrow s_k^{j_k (k-1)/2} \quad (4.1.14)$$

для нечетных k и

$$s_k^{j_k} \rightarrow (s_{k/2} s_k^{(k-2)/2})^{j_k} \quad (4.1.15)$$

для четных k .

Чтобы вычислить второй вклад, рассмотрим два цикла z_r и z_t в подстановке α . Пусть, как обычно, $[r, t]$ и (r, t) обозначают

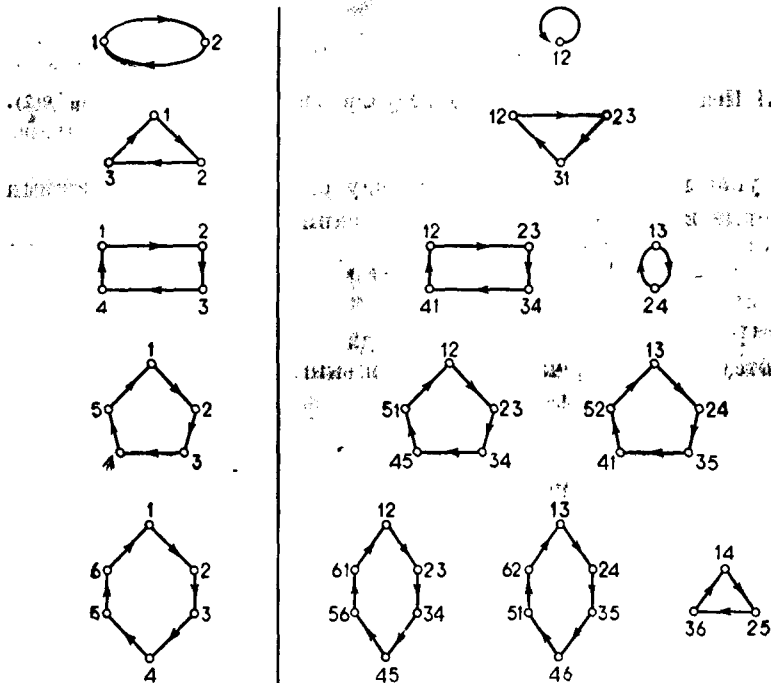


Рис. 4.1.2 Циклы в S_p и индуцируемые ими подстановки в $S_p^{(2)}$.

соответственно наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел r и t . Тогда циклы z_r и z_t индуцируют на парах таких элементов, один из которых принадлежит циклу z_r , а другой — циклу z_t , ровно (r, t) циклов длины $[r, t]$. В частности,

когда $r = t = k$, то соответствующий «взнос» состоит из k циклов длины k . Итак, когда $r \neq t$, то имеем

$$s_r^{j_r} s_t^{j_t} \rightarrow s_{[r, t]}^{(r, t) j_r j_t}, \quad (4.1.16)$$

а если $r = t = k$, то

$$s_k^{j_k} \rightarrow s_k^k \binom{j_k}{2}. \quad (4.1.17)$$

Теперь, перемножая правые части соотношений (4.1.14) — (4.1.17) по всем подходящим случаям, получаем отсутствующий член в правой части формулы (4.1.13). Таким образом, справедливость формулы (4.1.9) установлена. ■

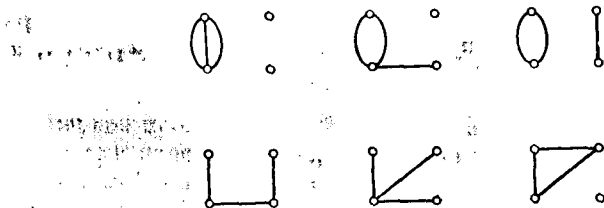


Рис. 4.1.3 Шесть мультиграфов четвертого порядка с тремя ребрами.

Формулы (4.1.8) и (4.1.9) были использованы (см. Риордан [1], стр. 173) для нахождения многочленов $g_p(x)$ при $p \leq 9$. Коэффициенты для $p \leq 10$ приведены в приложении I. Цикловые индексы $Z(S_p^{(2)})$ при $p \leq 10$ даны в приложении III, и мы увидим, что они играют важную роль в перечислении некоторых видов графов.

В мультиграфе две вершины могут быть соединены более чем одним ребром (см. рис. 4.1.3). Пусть $m_p(x)$ — производящая функция для мультиграфов, так что коэффициент при x^q есть число мультиграфов с p вершинами и q ребрами. Следующая теорема из статьи Харари [4] получена видоизменением перечисляющего ряда для фигур, который использовался при перечислении графов.

Теорема. Производящая функция $m_p(x)$ для мультиграфов порядка p дается формулой

$$m_p(x) = Z(S_p^{(2)}, 1/(1-x)). \quad (4.1.18)$$

Для $p=4$ находим

$$m_4(x) = 1 + x + 3x^2 + 6x^3 + 11x^4 + 18x^5 + 32x^6 + \\ + 48x^7 + 75x^8 + 111x^9 + 160x^{10} + \dots \quad (4.1.19)$$

Правильность коэффициента при x^8 подтверждается рис. 4.1.3.

Следуя Партасарати [1] и Харари и Палмеру [3], мы можем описать перечисление локально ограниченных графов. Это по существу сводится к дальнейшему уточнению циклового индекса парной группы $S_r^{(2)}$. Разбиение графа представляет собой последовательность степеней его вершин, обычно записываемую в порядке невозрастания. Локально ограниченный граф — это граф с данным разбиением. Производящая функция, перечисляющая локально ограниченные графы с p вершинами, является многочленом $N(x_1, x_2, \dots, x_p)$, таким, что каждое слагаемое $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_p^{e_p}$ удовлетворяет условию

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_p.$$

Коэффициент при таком слагаемом есть число графов с разбиением e_1, e_2, \dots, e_p . К примеру, слагаемое в $N(x_1, \dots, x_5)$,

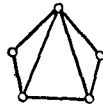


Рис. 4.1.4 Граф со степенной последовательностью (4, 3, 3, 2, 2).

отвечающее графу, изображенному на рис. 4.1.4, имеет вид: $x_1^4 x_2^3 x_3^3 x_4^2 x_5^2$, ибо последовательность степеней, соответствующая этому графу, такова: 4, 3, 3, 2, 2.

Чтобы получить формулу для производящей функции, воспользуемся естественным представлением, даваемым подходящей степенной группой. Полагая, как раньше, $Y = \{0, 1\}$, рассмотрим функцию W , которая отображает множество $Y^{X^{(2)}}$ в кольцо многочленов, зависящих от переменных x_i , и определяется формулой

$$W(f) = \prod_{(i, j) \in X^{(2)}} (x_i x_j)^{f(i, j)}. \quad (4.1.20)$$

Тогда в графе, соответствующем функции f , степень вершины i дается показателем степени у переменной x_i в выражении для $W(f)$. Введем для удобства линейный оператор θ , действующий на $W(f)$ в соответствии с правилом: θ переупорядочивает показатели степеней так, чтобы они шли в порядке невозрастания, в то время как сами переменные располагаются в порядке возрастания индексов (слева направо). Например,

$$\theta(x_3^4 x_1^3 x_2^3 x_4) = x_1^4 x_2^3 x_3^3 x_4.$$

Применяя «взвешенный» вариант леммы Бернсайда и формулу (2.3.10), приходим к следующему результату, который был получен Партасарати в несколько иной форме.

Теорема. Производящая функция, перечисляющая локально ограниченные графы, имеет вид

$$N(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\gamma \in E_{2p}^{S_p(2)}} \theta \left(\sum_{f \in \gamma} W(f) \right), \quad (4.1.21)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \gamma} W(f) &= \prod_{z_r z_s} \left(1 + \prod_{i \in z_r} x_i^{s/(r,s)} \prod_{i \in z_s} x_i^{r/(r,s)} \right)^{(r,s)} \times \\ &\times \prod_{\substack{z_r \\ r\text{-четное}}} \left(1 + \prod_{i \in z_r} x_i \right) \left(1 + \prod_{i \in z_r} x_i^2 \right)^{(r-2)/2} \times \\ &\times \prod_{\substack{z_r \\ r\text{-нечетное}}} \left(1 + \prod_{i \in z_r} x_i^2 \right)^{(r-1)/2}, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

здесь первое произведение берется по всем различным парам циклов z_r и z_s в подстановке α , а два других произведения — по всем циклам такой подстановки из группы S_p , которая соответствует подстановке γ . Далее, применяя эту теорему, имеем

$$\begin{aligned} N(x_1, x_2, x_3) &= (1/3!) \{ \theta((1+x_1x_2)(1+x_2x_3)(1+x_1x_3)) + \\ &+ 3\theta((1+x_1x_2x_3^2)(1+x_1x_2)) + 2\theta(1+x_1^2x_2^2x_3^2) \} = \\ &= (1/3!) \{ (1+3x_1x_2+3x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2) + \\ &+ 3(1+x_1x_2+x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2) + 2(1+x_1^2x_2^2x_3^2) \} = \\ &= 1+x_1x_2+x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2. \end{aligned}$$

Мы должны ясно представлять себе, что указанный метод дает только формальное решение и не подходит для получения точных значений или порядков искомых величин.

4.2. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Как и в случае помеченных графов, мы убедимся в том, что производящие функции для графов и связных графов тесно связаны некоторым соотношением, содержащим экспоненциальную функцию. Кроме того, связные графы с указанными свойствами часто могут быть перечислены аналогичным способом в терминах общего числа графов с теми же свойствами.

Пусть $g(x)$ — производящая функция для графов, так что

$$g(x) = \sum_{p=1}^{\infty} g_p x^p, \quad (4.2.1)$$

где g_p — число графов порядка p , и пусть $c(x)$ — соответствующая производящая функция для связанных графов, т. е.

$$c(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p x^p. \quad (4.2.2)$$

Теперь можно сформулировать теорему Риддела [1], связывающую эти два степенных ряда.

Теорема. Производящие функции $g(x)$ и $c(x)$ для графов и связанных графов удовлетворяют соотношению

$$1 + g(x) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c(x^k)/k \right\}. \quad (4.2.3)$$

Доказательство. Из теоремы Пойа вытекает, что ряд $Z(S_n, c(x))$ перечисляет графы, состоящие ровно из n компонент. Следовательно, суммируя этот ряд по всем n , получаем

$$1 + g(x) = Z(S_{\infty}, c(x)). \quad (4.2.4)$$

Формула (4.2.3) выводится из формулы (4.2.4) и тождества (3.1.1). ■

Кэдоган [1] разработал эффективный метод подсчета числа связанных графов порядка p , неявно содержащийся в формуле (4.2.3). Сначала полагаем

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p = \ln(1 + g(x)). \quad (4.2.5)$$

Тогда из формулы (1.2.8) следует, что

$$p a_p = p g_p - \sum_{k=1}^{p-1} k a_k g_{p-k}. \quad (4.2.6)$$

В табл. 4.2.1 представлены значения для $p a_p$ ($p \leq 9$), вычисленные с использованием уравнения (4.2.6) и значений величин g_p .

Таблица 4.2.1

Число связанных графов

p	g_p	$p a_p$	c_p
1	1	1	1
2	2	3	1
3	4	7	2
4	11	27	6
5	34	106	21
6	156	681	112
7	1044	5972	853
8	12346	88963	11117
9	274668	2349727	261080

Мы далее увидим, как выражаются значения коэффициентов c_p через величины a_p .

Так как

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p = \sum_{k=1}^{\infty} c(x^k)/k, \quad (4.2.7)$$

то, сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, имеем

$$p a_p = \sum_{d|p} d c_d. \quad (4.2.8)$$

Обращая это соотношение с использованием функции Мёбиуса $\mu(d)$, выражаем числа c_p через a_p :

$$c_p = \sum_{d|p} \frac{\mu(d)}{d} a_{p/d}. \quad (4.2.9)$$

Эта формула Кэдогана была использована для вычисления значений коэффициентов c_p ($p \leq 9$), помещенных в табл. 4.2.1. Всякий раз, когда две произвольные производящие функции удовлетворяют соотношению (4.2.3) из теоремы, их коэффициенты связаны уравнениями (4.2.6) и (4.2.9). Это часто случается, когда производящие функции для графов со специальным свойством и для связанных графов с тем же свойством удовлетворяют соотношению (4.2.3). Следовательно, рассматриваемые связанные графы можно перечислить, используя формулы (4.2.6) и (4.2.9). Например, если $w(x)$ — производящая функция для четных графов, определенных в гл. 1, и функция $u(x)$ перечисляет связанные четные графы, то

$$1 + w(x) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u(x^k)/k \right\}. \quad (4.2.10)$$

Следовательно, коэффициенты функции $u(x)$ можно вычислить, используя коэффициенты функции $w(x)$ и соотношения, подобные тем, которые даются формулами (4.2.6) и (4.2.9). Связные четные графы — это как раз эйлеровы графы. Подробности, относящиеся к перечислению таких графов, мы рассмотрим в последнем параграфе данной главы.

Кэдоган [1] развил свой метод так, чтобы можно было в качестве параметра при перечислении включить не только число вершин, но и число ребер. Сейчас набросаем детали этого процесса. Пусть $g_{p,q}$ и $c_{p,q}$ — числа (p,q) -графов и связанных (p,q) -графов соответственно. Положим

$$g(x, y) = \sum g_{p,q} x^p y^q, \quad (4.2.11)$$

$$c(x, y) = \sum c_{p,q} x^p y^q. \quad (4.2.12)$$

Тогда из теоремы перечисления Пойа для случая двух переменных следует, что

$$1 + g(x, y) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c(x^k, y^k)/k \right\}. \tag{4.2.13}$$

Пусть для всякого $p \geq 1$ многочлен $b_p(y)$ от переменной y определяется формулой

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p(y) x^p = \ln(1 + g(x, y)). \tag{4.2.14}$$

Можно показать (так же, как для случая соотношения (4.2.6)), что

$$pb_p(y) = pg_p(y) - \sum_{k=1}^{p-1} kb_k(y)g_{p-k}(y). \tag{4.2.15}$$

Коэффициенты многочлена $b_p(y)$ можно вычислить, используя коэффициенты многочлена $g_p(y)$ и выражение (4.2.15). Положим для удобства

$$b_p(y) = \sum b_{p,q}y^q. \tag{4.2.16}$$

Имеем также соотношение

$$\sum b_p(y) x^p = \sum_{k=1}^{\infty} c(x^k, y^k)/k. \tag{4.2.17}$$

Приравнявая коэффициенты при $x^p y^q$ и используя обращение Мёбиуса, получаем формулу

$$c_{p,q} = \sum_{r|(p,q)} b_{p/r, q/r} \mu(r)/r. \tag{4.2.18}$$

Таблица 4.2.2

Число связанных (p, q) -графов

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1													
2		1												
3			1	1										
4				2	2	1	1							
5					3	5	5	4	2	1	1			
6						6	13	19	22	20	14	9	5	2
7							11	33	67	107	132	138	126	95
8								23	89	236	486	814	1169	1454

Значения коэффициентов $c_{p,q}$, приводимые в табл. 4.2.2, вычислены Кэдоганом с помощью формулы (4.2.18).

Ясно, что этот подход можно также использовать для нахождения числа связных (p, q) -графов с указанными свойствами.

4.3. 2-РАСКРАШЕННЫЕ ГРАФЫ

В гл. 1 мы видели, что вершины k -раскрашенного графа разбиваются на k множеств так, что смежные вершины всегда находятся в разных множествах. Вершины каждого множества рассматриваются тогда как имеющие одинаковый цвет. В этом параграфе мы сосредоточим свое внимание на *2-раскрашенных графах*, для которых $k = 2$.

Подставляя (4.1.6) в (4.1.8), получаем

$$g_p(x) = Z(\Gamma_1(K_p), 1+x). \quad (4.3.1)$$

Теперь весьма плодотворным оказывается обобщение этого уравнения путем замены K_p произвольным графом G порядка p (см. Харари [11]). Из следствия (2.5.1) теоремы Пойа, которое интерпретирует ряд $Z(A, 1+x)$, вытекает, что ряд $Z(\Gamma_1(G), 1+x)$ перечисляет $\Gamma_1(G)$ -эквивалентные классы множеств, состоящих из ребер графа G . Эти классы эквивалентности в точности соответствуют таким остовным подграфам графа G , каждые два из которых содержатся в одном и том же классе лишь тогда, когда существует автоморфизм графа G , переводящий один из этих подграфов в другой. Если два подграфа не принадлежат одному и тому же классу, то они называются *неподобными*.

Теорема. Число неподобных остовных подграфов графа G , содержащих q ребер, равно коэффициенту при x^q в

$$Z(\Gamma_1(G), 1+x). \quad (4.3.2)$$

Для иллюстрации этой теоремы рассмотрим (4,5)-граф G , показанный на рис. 4.3.1. Трафаретные вычисления дают формулу

$$Z(\Gamma_1(G)) = \frac{1}{4} (s_1^5 + 3s_1s_2^2). \quad (4.3.3)$$

Следовательно,

$$Z(\Gamma_1(G), 1+x) = 1 + 2x + 4x^2 + 4x^3 + 2x^4 + x^5. \quad (4.3.4)$$

Правильность коэффициентов в этом многочлене подтверждается рис. 4.3.1. На этом рисунке штриховые ребра используются для указания на отсутствие ребра в подграфе, чтобы подчеркнуть эквивалентность относительно группы графа G . Заметим, что многочлен (4.3.4) дает также числа 2-раскрасок ребер графа G («сплошным» и «штриховым» цветами). Мы обнаружим, что эта

интерпретация многочлена $Z(\Gamma_1(G), 1+x)$ весьма полезна, в частности при перечислении 2-раскрашенных графов, которые рассматриваются ниже.

Полный двудольный граф $K_{m,n}$ имеет $m+n$ вершин, из которых m окрашены в один цвет, а n — в другой, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они окрашены в разные цвета. Так как 2-раскрашенные графы с m вершинами одного цвета и n вершинами другого цвета соответствуют в точности остовным подграфам графа $K_{m,n}$, то из теоремы (4.3.2) немедленно следует, что

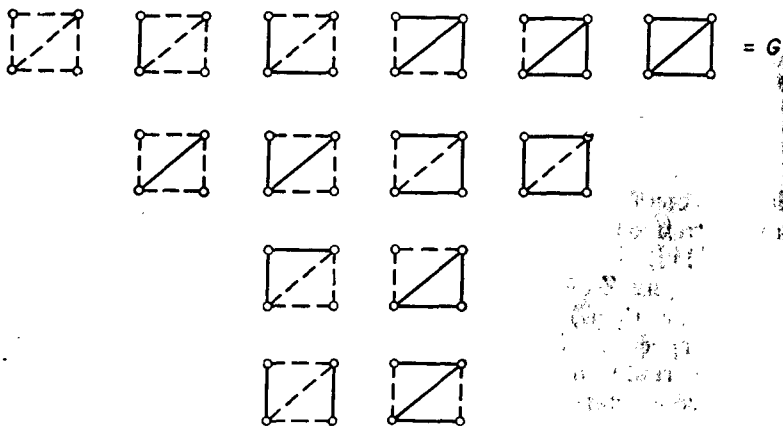


Рис. 4.3.1 Остовные подграфы некоторого графа.

многочлен $b_{m,n}(x)$, перечисляющий эти 2-раскрашенные графы, удовлетворяет соотношению

$$b_{m,n}(x) = Z(\Gamma_1(K_{m,n}), 1+x). \quad (4.3.5)$$

Например,

$$b_{2,2}(x) = 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + x^5 + x^6 \quad (4.3.6)$$

и рис. 4.3.2 подтверждает правильность этих коэффициентов. Заметим, что коэффициенты этих многочленов всегда симметричны «относительно концов».

Теперь, следуя Харари [7], найдем цикловой индекс реберной группы графа $K_{m,n}$. Проще всего начать со случая, когда $m \neq n$. Предположим, что X — множество из m вершин одного цвета в графе $K_{m,n}$, а Y — множество из n вершин другого цвета. Тогда упорядоченные пары (x, y) из декартова произведения $X \times Y$ в точности соответствуют ребрам графа $K_{m,n}$. Таким образом, подстановки из группы $\Gamma_1(K_{m,n})$ состоят из таких подстановок на множестве пар (x, y) , которые индуцируются подстановками

множеств X и Y . Это наводит на мысль ввести следующую бинарную операцию на группах подстановок. Пусть A и B — группы подстановок с множествами объектов X и Y соответственно. *Декартовым произведением групп A и B* , обозначаемым $A \times B$, называется группа подстановок с множеством объектов $X \times Y$, состоящая из всех упорядоченных пар (α, β) подстановок α из A

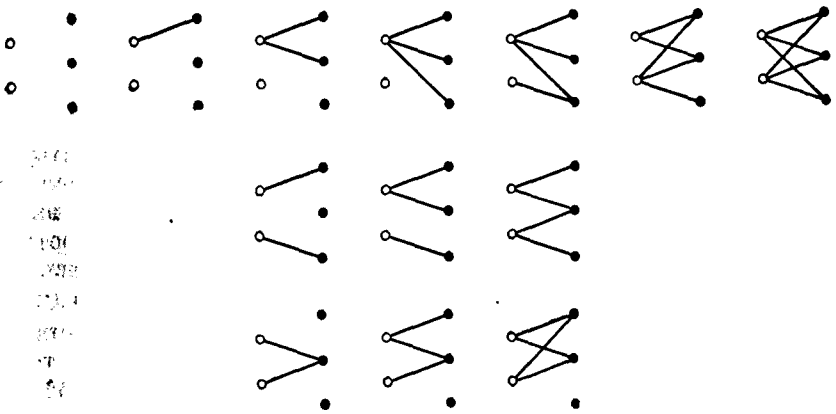


Рис. 4.3.2 2-раскрашенные графы с тремя вершинами одного цвета и двумя вершинами другого цвета.

и β из B . Образ каждого элемента (x, y) из $X \times Y$, определяемый подстановкой (α, β) , имеет вид

$$(\alpha, \beta)(x, y) = (\alpha x, \beta y). \tag{4.3.7}$$

Следовательно, для $m \neq n$

$$\Gamma_1(K_{m,n}) = S_m \times S_n \tag{4.3.8}$$

и, подставляя это выражение в формулу (4.3.5), получаем теорему (см. Харари [7]) о перечислении таких 2-раскрашенных графов.

Теорема. Многочлен $b_{m,n}(x)$, перечисляющий 2-раскрашенные графы, при $m \neq n$ дается формулой

$$b_{m,n}(x) = Z(S_m \times S_n, 1 + x), \tag{4.3.9}$$

где

$$Z(S_m \times S_n) = \frac{1}{m!n!} \sum_{(\alpha, \beta)} \prod_{r,t=1}^{m,n} s_{(r,t)}^{(r,t)} I_r^{(\alpha)} I_t^{(\beta)}. \tag{4.3.10}$$

На самом деле мы уже вычисляли цикловой индекс группы $S_m \times S_n$, когда обосновывали формулу (4.1.9) для $Z(S_p^{(2)})$. В частности, соотношение (4.1.16) дает в точности то выражение, которое стоит под знаками суммы и произведения в формуле (4.3.10).

Для иллюстрации теоремы воспользуемся формулами (4.3.9) и (4.3.10), чтобы установить вид многочлена $b_{3,2}(x)$, который уже приводился раньше в соотношении (4.3.6). Сначала с помощью формулы (4.3.10) найдем цикловой индекс декартова произведения $S_3 \times S_2$. В этой группе содержится двенадцать подстановок, но цикловая структура любой из них, скажем (α, β) , зависит только от цикловых структур подстановок α и β . Цикловые структуры этих конкретных подстановок получаются из формулы (2.2.5), которая выражает $Z(S_n)$ через разбиения числа n . Существуют только три разбиения числа 3 и только два разбиения числа 2; поэтому нам нужно рассмотреть ровно шесть различных видов пар подстановок. Например, если подстановка α из S_3 соответствует произведению $s_1 s_2$ в $Z(S_3)$, а β из S_2 является транспозицией, то, как следует из формулы (4.3.10), подстановка (α, β) дает вклад s_2^3 в цикловой индекс $Z(S_3 \times S_2)$. Так как существуют три подстановки с такой же цикловой структурой, как у α , то их общий вклад в цикловой индекс $Z(S_3 \times S_2)$, когда они находятся в паре с подстановкой β , составляет $3s_2^3$. Таблица 4.3.1 отражает

Таблица 4.3.1

Члены циклового индекса $Z(S_3 \times S_2)$

Подстановка	α	β	(α, β)
Член циклового индекса	s_1^3	s_1^2	s_1^6
	$s_1 s_2$	s_1^2	$s_1^2 s_2^2$
	s_3	s_1^2	s_3^2
	s_1^3	s_2	$s_1^3 s_2$
	$s_1 s_2$	s_2	$s_1 s_2^2$
	s_3	s_2	s_6

все вклады, которые вносят в цикловой индекс $Z(S_3 \times S_2)$ пары из декартова произведения $S_3 \times S_2$. Следовательно, формула для этого циклового индекса имеет вид

$$Z(S_3 \times S_2) = \frac{1}{12} (s_1^6 + 3s_1^2 s_2^2 + 2s_3^2 + 4s_2^3 + 2s_6). \quad (4.3.11)$$

Подставляя $1 + x^k$ вместо s_k в правую часть выражения (4.3.11), получаем многочлен $b_{3,2}(x)$, указанный в формуле (4.3.6).

Займемся теперь перечислением 2-раскрашенных графов для того более тонкого случая, когда $m = n$. Соответствующий перечисляющий многочлен обозначим через $b_n(x)$, а не через $b_{n,n}(x)$. Нетрудно, например, убедиться в том, что

$$b_3(x) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 2x^7 + x^8 + x^9. \quad (4.3.12)$$

Рис. 4.3.3 подтверждает, что коэффициент при x^4 и, следовательно, при x^5 равен 5. Стоит заметить, что мы не получаем дополнительных изоморфных классов этих графов, если считаем, что цвета взаимозаменяемы.

Как и прежде, мы должны найти формулу для циклового индекса реберной группы графа $K_{n,n}$. Для этой цели удобно определить дополнительные операции на группах подстановок.

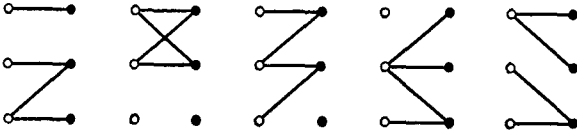


Рис. 4.3.3 Пять 2-раскрашенных (6,4)-графов с тремя вершинами каждого цвета.

Пусть A и B — группы подстановок с множествами объектов $X = \{x_1, \dots, x_d\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_e\}$ соответственно. Композиция группы A относительно группы B обозначается через $A[B]$ и имеет в качестве множества объектов декартово произведение $X \times Y$. Это понятие было определено Пойа [1] и другими математиками и иногда называлось «веночным произведением» («wreath product»). Для каждой подстановки α из A и каждой последовательности β_1, \dots, β_d из d подстановок, принадлежащих группе B , существует подстановка из $A[B]$, обозначаемая через $[\alpha; \beta_1, \dots, \beta_d]$ и такая, что для всякой упорядоченной пары $(x_i, y_j) \in X \times Y$ выполняется равенство

$$[\alpha; \beta_1, \dots, \beta_d](x_i, y_j) = (\alpha x_i, \beta_j y_j). \quad (4.3.13)$$

Основанием для того, чтобы назвать эту группу композицией групп A и B , является то, что ее цикловой индекс есть композиция цикловых индексов $Z(A)$ и $Z(B)$, как это проиллюстрировано в следующем примере. Возьмем $A = C_3$ и $B = S_2$. Используя различные буквы для переменных в $Z(A)$ и $Z(B)$, имеем

$$Z(A) = \frac{1}{3}(s_1^3 + 2s_3), \quad Z(B) = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2),$$

$$Z(A[B]) = \frac{1}{3} \left(\left[\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2) \right]^3 + 2 \left[\frac{1}{2}(t_3^2 + t_6) \right] \right).$$

Теперь ясно, в каком смысле следует понимать, что цикловой индекс композиции двух групп представляет собой композицию их цикловых индексов. Пойа доказал, что $Z(A[B])$ есть многочлен, получающийся из $Z(A)$ заменой каждой переменной s_k цикловым индексом $Z(B; s_k, s_{2k}, s_{3k}, \dots)$. Таким образом, $Z(B)$ нужно подставить в цикловой индекс группы A , чтобы получить цикловой индекс их композиции. Эту процедуру мы часто обозначаем через

$$Z(A[B]) = Z(A)[Z(B)]. \quad (4.3.14)$$

Кроме того, для любых двух групп подстановок A и B и произвольного степенного ряда $f(x)$ мы имеем

$$Z(A[B], f(x)) = Z(A, Z(B, f(x))). \quad (4.3.15)$$

Наиболее типичный пример композиции двух групп подстановок получается при рассмотрении графа, состоящего из m непересекающихся экземпляров графа K_n . Группа такого графа идентична группе $S_m[S_n]$. Как указывалось в соотношении (2.1.1), граф G и его дополнение \bar{G} имеют одну и ту же группу автоморфизмов. Поэтому для описания группы графа $K_{n,n}$ мы используем тот факт, что дополнение графа $K_{n,n}$ состоит из двух экземпляров графа K_n , и получаем формулу

$$\Gamma(K_{n,n}) = S_2[S_n]. \quad (4.3.16)$$

Так как группа $\Gamma_1(K_{n,n})$ индуцируется группой $\Gamma(K_{n,n})$, то для нахождения циклового индекса $Z(\Gamma_1(K_{n,n}))$ можно теперь воспользоваться соотношением (4.3.16). Подстановки из группы $\Gamma(K_{n,n})$, относительно которых два n -множества разного цвета инвариантны, соответствуют тем слагаемым в цикловом индексе $Z(S_2[S_n])$, которые получаются с помощью замены переменной s_1 в $Z(S_2)$ цикловым индексом $Z(S_n)$. Их вклад в $Z(\Gamma_1(K_{n,n}))$ составляет в точности $Z(S_n \times S_n)$. Те подстановки из $\Gamma(K_{n,n})$, которые взаимозаменяют два n -множества, вносят $Z(S_n; s_2, s_4, s_6, \dots)$ в цикловой индекс $Z(\Gamma(K_{n,n}))$. Таким образом, они состоят из циклов четной длины, которые всегда заменяют вершины одного цвета вершинами другого цвета. Их вклад в $Z(\Gamma_1(K_{n,n}))$, как показано в статье Харари [7], равен

$$Z'_n = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} \frac{n!}{\prod_k j_k!} \prod_{k-\text{нечетное}} s_k^{j_k} \prod_k s_{2k}^{\binom{j_k}{2} + [k/2] j_k} \prod_{r < t} s_2^{(r,t) j_r j_t}. \quad (4.3.17)$$

Эту формулу можно проверить так: рассматриваем циклы, составленные из вершин чередующихся цветов; затем выясняем, как эти циклы перемещают все ребра, соединяющие вершины разного цвета.

Итак, мы нашли, что

$$Z(\Gamma_1(K_{n,n})) = \frac{1}{2}(Z(S_n \times S_n) + Z'_n), \quad (4.3.18)$$

и можем написать формулу для этого циклового индекса, используя выражения (4.3.10) и (4.3.17). Однако существует еще одна полезная операция на группах подстановок (см. Харари [9]), которая в частном случае дает группу, идентичную группе $\Gamma_1(K_{n,n})$. Пусть A и B — группы подстановок с множествами объектов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_e\}$, как и выше, но только теперь мы считаем, что $e > 1$. Экспоненциацией $[B]^A$ группы A относительно группы B называется такая группа подстановок с множеством объектов Y^X , у которой подстановки строятся следующим образом. Каждая подстановка α из A и всякая последовательность β_1, \dots, β_d подстановок из B определяют ровно одну подстановку $(\alpha; \beta_1, \dots, \beta_d)$, принадлежащую группе $[B]^A$, и эта подстановка преобразует функцию f в функцию f^* , определяемую для всех $x_i \in X$ правилом

$$f^*(x_i) = \beta_i f(\alpha x_i). \quad (4.3.19)$$

Можно легко показать, что различные наборы подстановок $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_d$ приводят к разным подстановкам на множестве Y^X и что эти подстановки образуют группу. Кроме того, если взять $A = S_2$ и $B = S_n$, то функции из множества Y^X соответствуют в точности ребрам графа $K_{n,n}$ и

$$\Gamma_1(K_{n,n}) = [S_n]^{S_2}. \quad (4.3.20)$$

Поэтому теорема перечисления (см. Харари [7]) может быть дана в следующей форме.

Теорема. Многочлен $b_n(x)$, перечисляющий 2-раскрашенные графы с n вершинами каждого цвета, дается формулой

$$b_n(x) = Z([S_n]^{S_2}, 1+x), \quad (4.3.21)$$

где

$$Z([S_n]^{S_2}) = \frac{1}{2}(Z(S_n \times S_n) + Z'_n). \quad (4.3.22)$$

Как отмечалось выше, эта теорема перечисляет 2-раскрашенные графы с n вершинами каждого цвета, в которых цвета взаимозаменяемы. Простейший случай, когда цвета вершин неизменны, уже представлен формулой (4.3.9) — нужно положить $m = n$, даже хотя в той теореме предполагалось, что $m \neq n$.

Теперь проиллюстрируем теорему о многочлене $b_n(x)$, построив формулы, необходимые для нахождения $b_3(x)$. Цикловой индекс

группы $S_3 \times S_3$, получаемый с помощью соотношения (4.3.10), имеет вид:

$$Z(S_3 \times S_3) = \frac{1}{36} (s_1^9 + 6s_1^3s_2^3 + 8s_3^3 + 9s_1s_2^4 + 12s_3s_6). \quad (4.3.23)$$

Из формулы (4.3.17) следует, что

$$Z'_3 = \frac{1}{6} (s_1^3s_2^3 + 3s_1s_2^4 + 2s_3s_6). \quad (4.3.24)$$

Комбинируя эти два соотношения, имеем:

$$Z(|S_3|^{S_2}) = \frac{1}{72} (s_1^9 + 12s_1^3s_2^3 + 8s_3^3 + 9s_1s_2^4 + 18s_1s_2^4 + 24s_3s_6). \quad (4.3.25)$$

Теперь, подставляя в это выражение $1 + x^k$ вместо s_k , получаем формулу (4.3.12), дающую многочлен $b_3(x)$.

Граф называется *2-раскрашиваемым*, если он может быть 2-раскрашен. Мы только укажем, как могут быть перечислены такие графы. В статье Харари и Принса [2] установлено, что число связных 2-раскрашенных графов порядка p равно числу связных 2-раскрашиваемых графов порядка p . Имея перечисление 2-раскрашенных графов, мы можем перечислить связные 2-раскрашенные графы, используя метод, отражаемый формулой (4.2.3), и, таким образом, определить, кроме того, число связных 2-раскрашиваемых графов.

4.4. КОРНЕВЫЕ ГРАФЫ

Корневые помеченные графы были без особых усилий пересчитаны в процессе доказательства формулы (1.2.1). Перечисление корневых (непомеченных) графов является чуть менее очевидным (см. Харари [4]). Оно связано с построением парной группы путем незначительной переделки соответствующей симметрической группы. Эта модификация легко обобщается на корневые графы, у которых корень представляет собой произвольный порожденный подграф (см. Харари и Палмер [1]), могущий быть и графом, и орграфом, и мультиграфом.

В настоящем параграфе доказывается только одна теорема, а именно, теорема, дающая формулу для перечисления корневых графов G порядка p , у которых корнем является специальный порожденный подграф H , и при этом в графе G имеются q ребер, кроме тех, которые принадлежат подграфу H . Как проиллюстрировано в следствиях из этой теоремы, мы получим формулы для корневых графов, реберно-корневых графов, корневых графов, у которых в качестве корней выделены треугольники, корневых графов, у которых корнем является ориентированное ребро, и корневых графов с корнем, представляющим собой циклическую

тройку. Например, все корневые (6,5)-графы, у которых в качестве корня взят треугольник $H = K_3$, представлены на рис. 4.4.1; здесь штриховыми ребрами выделен треугольник, являющийся корнем. Таким образом, в силу принятого выше соглашения, $p = 6$ и $q = 2$, ибо существуют два дополнительных ребра.

Пусть S — произвольное множество вершин графа G . Порожденный подграф $\langle S \rangle$ — это максимальный подграф графа G , имеющий S своим множеством вершин. Таким образом, подграф $\langle S \rangle$ содержит все ребра графа G , соединяющие две любые вершины множества S . Мы пытаемся найти число корневых графов G порядка p , у которых в качестве корня взят порожденный подграф H

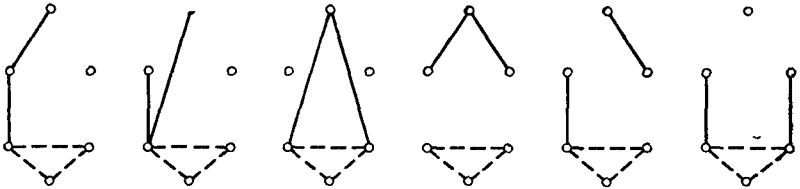


Рис. 4.4.1 (6,5)-графы, корнями которых являются треугольники.

порядка $n < p$. Это означает, что в графе G нет ребер, которые соединяли бы две несмежные вершины подграфа H .

Группу подстановок, которая необходима нам для применения теоремы перечисления Пойа (в форме следствия (2.5.1)), будем обозначать через $\Gamma(H) \circ S_{p-n}$. Эта группа определяется следующим образом: положим $G = H \cup K_{p-n}$ и заметим, что произведение $\Gamma(H) S_{p-n}$ является подгруппой группы $\Gamma(G)$, оставляющей подграф H неподвижным. Нам требуется ограничение парной группы $(\Gamma(H) S_{p-n})^{(2)}$ на такие неупорядоченные пары $\{u, v\}$ вершин графа G , в которых обе вершины не принадлежат подграфу H . Результирующая группа подстановок как раз и обозначается через $\Gamma(H) \circ S_{p-n}$.

Если вклад некоторой подстановки в цикловой индекс $Z(S_p)$ составляет Πs_k^k , то соответствующий вклад в цикловой индекс $Z(S_p^{(2)})$ обозначается через $(\Pi s_k^k)^{(2)}$. Теперь, когда все необходимые обозначения введены, можно сформулировать общий результат (см. Харари и Палмер (1)).

Теорема. Многочлен $h_p(x)$, перечисляющий корневые графы порядка p , у которых корнем является порожденный подграф H порядка $n < p$, дается формулой

$$h_p(x) = Z(\Gamma(H) \circ S_{p-n}, 1+x), \quad (4.4.1)$$

где

$$Z(\Gamma(H) \circ S_{p-n}) = \frac{1}{|\Gamma(H)|(p-n)!} \sum_{(\alpha, \beta)}^{n, p-n} \prod_{r, t=1}^{(r, t)} J_r(\alpha) J_t(\beta) (\prod S_k^{j_k(\beta)})^{(2)} \quad (4.4.2)$$

и суммирование ведется по всем парам подстановок $\alpha \in \Gamma(H)$ и $\beta \in S_{p-n}$.

Доказательство. Подстановки группы $\Gamma(H) \circ S_{p-n}$ индуцируются парами (α, β) подстановок α из $\Gamma(H)$ и β из S_{p-n} . Вклад в цикловой индекс $Z(\Gamma(H) \circ S_{p-n})$, вносимый произвольной парой, можно рассматривать как произведение двух сомножителей. В первом сомножителе мы просто отражаем тот факт, что подстановка (α, β) индуцирует подстановку на множестве ребер, соединяющих подграф H с графом K_{p-n} , абсолютно так, как это имело место в декартовом произведении (см. теорему (4.3.10)). Второй сомножитель есть $(\prod S_k^{j_k(\beta)})^{(2)}$, он описывает структуру подстановки β , индуцированной на парах вершин в графе K_{p-n} . ■

Теперь мы можем извлечь несколько следствий из этой теоремы, выбирая в качестве подграфа H подграфы частных типов. В нашем первом приложении мы рассмотрим корневые графы порядка p . Таким образом, $H = K_1$, так что $\Gamma(H) = S_1$ и, очевидно, $\Gamma(H) \circ S_{p-n} = (S_1 S_{p-1})^{(2)}$. Подставляя это выражение в формулу (4.4.1), получаем производящую функцию $G_p(x)$ для корневых графов:

$$G_p(x) = Z((S_1 S_{p-1})^{(2)}, 1+x), \quad (4.4.3)$$

которая, естественно, совпадает с соответствующим результатом, приводимым в статье Харари [4].

Рассматривая только три вершины, быстро находим

$$\begin{aligned} G_3(x) &= Z((S_1 S_2)^{(2)}, 1+x) = \frac{1}{2} [(1+x)^3 + (1+x)(1+x^2)] = \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Чтобы проиллюстрировать полученный результат для случая $p = 4$, замечаем, что

$$Z(S_1 S_3) = (1/3!) (s_1^4 + 3s_1^2 s_2 + 2s_1 s_3). \quad (4.4.4)$$

Простое использование табл. 4.1.2 дает

$$Z((S_1 S_3)^{(2)}) = (1/3!) (s_1^6 + 3s_1^2 s_2^2 + 2s_3^2). \quad (4.4.5)$$

Подставляя $1+x$ в этот цикловой индекс, получаем многочлен

$$G_4(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 4x^4 + 2x^5 + x^6, \quad (4.4.6)$$

в правильности которого легко убедиться, просматривая графы четвертого порядка, изображенные на рис. 1.1.2. В общем случае для получения циклового индекса $Z((S_1 S_{p-1})^{(2)})$ можно, насколько это приемлемо, использовать формулы для цикловых индексов из приложения III.

В нашей следующей иллюстрации возьмем $H = K_2$, так что $h_p(x)$ перечисляет реберно-корневые графы:

$$h_p(x) = Z(S_2 \circ S_{p-2}, 1+x). \quad (4.4.7)$$

Тождество

$$Z(S_2 \circ S_{p-2}) = (\partial/\partial s_1) Z(S_p^{(2)}) \quad (4.4.8)$$

можно быстро проверить. Поэтому мы можем воспользоваться формулами для цикловых индексов, помещенными в приложении III, чтобы при $p = 5$ получить соотношение

$$Z(S_2 \circ S_3) = \frac{1}{12} (s_1^9 + 4s_1^3 s_2^3 + 2s_3^3 + 3s_1 s_2^4 + 2s_3 s_6). \quad (4.4.9)$$

Подставляя $1+x$, находим

$$h_5(x) = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 16x^4 + 16x^5 + 12x^6 + 6x^7 + 2x^8 + x^9. \quad (4.4.10)$$

Так же легко получается и многочлен, перечисляющий корневые графы, у которых корнями являются треугольники. Приведем детали, относящиеся к перечислению таких графов с шестью вершинами. Так как $\Gamma(H) = S_3$, то, используя формулу (4.4.2), получаем

$$Z(S_3 \circ S_3) = \frac{1}{36} (s_1^{12} + 3s_1^4 s_2^4 + 6s_3^4 + 3s_1^6 s_2^3 + 9s_1^2 s_2^5 + 6s_3^2 s_6 + 2s_3^3 s_1^3 + 6s_1 s_2 s_3 s_6). \quad (4.4.11)$$

Из формулы (4.4.1) следует, что

$$h_6(x) = 1 + 2x + 6x^2 + 15x^3 + 21x^4 + 38x^5 + 44x^6 + 38x^7 + 21x^8 + 15x^9 + 6x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Графы, перечисляемые коэффициентом при x^2 в этом многочлене, показаны на рис. 4.4.1; здесь для ребер треугольника, являющегося корнем, использованы штриховые линии.

Наша теорема справедлива также в том случае, когда H представляет собой орграф. Например, если H — ориентированное ребро, то $\Gamma(H) = E_2$, и поэтому

$$h_p(x) = Z(E_2 \circ S_{p-2}, 1+x). \quad (4.4.12)$$

Выражение для этого циклового индекса получается из формулы (4.4.2). Для каждой подстановки β из S_{p-2} обозначим через $\Pi s_k^{i_k}$ вклад, вносимый ею в цикловой индекс $Z(S_{p-2})$. Тогда

$$Z(E_2 \circ S_{p-2}) = \frac{1}{(p-2)!} \sum_{\beta} (\Pi s_k^{i_k})^2 (\Pi s_k^{i_k})^{(2)}, \quad (4.4.13)$$

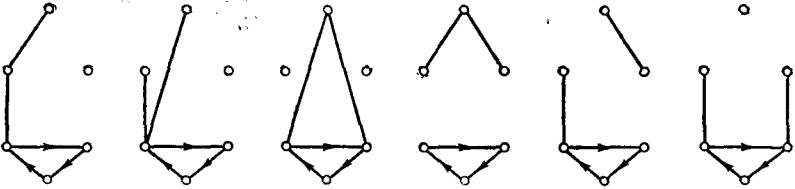


Рис. 4.4.2 (6,5)-графы, корнями которых являются циклические тройки.

где сумма берется по всем подстановкам β из S_{p-2} . Чтобы проиллюстрировать использование формулы (4.4.13) в случае $p = 5$, напомним, что $Z(S_3^{(2)}) = Z(S_3)$. Имеем

$$Z(E_2 \circ S_3) = (1/3!) ((s_1^3)^2 s_1^3 + 3(s_1 s_2)^2 s_1 s_2 + 2(s_3)^2 s_3). \quad (4.4.14)$$

Тогда из формулы (4.4.12) следует, что

$$h_5(x) = 1 + 3x + 9x^2 + 20x^3 + 27x^4 + 27x^5 + 20x^6 + 9x^7 + 3x^8 + x^9. \quad (4.4.15)$$

Графы, перечисляемые коэффициентами этого многочлена, можно построить без особого труда.

Наконец, мы найдем перечисляющий многочлен для корневых графов с шестью вершинами, у которых в качестве корня берется циклическая тройка. В этом случае

$$\Gamma(H) = \frac{1}{3} (s_1^3 + 2s_3). \quad (4.4.16)$$

Из формулы (4.4.2) получаем

$$Z(\Gamma(H) \circ S_3) = \frac{1}{18} (s_1^{12} + 3s_1^4 s_2^4 + 2s_1^3 s_3^3 + 6s_1 s_2 s_3 s_6 + 6s_3^4), \quad (4.4.17)$$

а из формулы (4.4.1) следует, что

$$h_6(x) = 1 + 2x + 6x^2 + 18x^3 + 34x^4 + 52x^5 + 62x^6 + 52x^7 + 34x^8 + 18x^9 + 6x^{10} + 2x^{11} + x^{12}. \quad (4.4.18)$$

Соответствующие графы с $q = 2$ показаны на рис. 4.4.2.

Конечно, в качестве корня-подграфа H может быть выбрано много других графов. В частности, всякий раз когда граф или орграф H имеет единичную группу E_n , формула (4.2.2) принимает вид

$$Z(E_n \circ S_{p-n}) = \frac{1}{(p-n)!} \sum_{\beta} (\prod s_k^{j_k})^n (\prod s_k^{j_k})^{(2)}, \quad (4.4.19)$$

где, подобно тому, как это делалось в формуле (4.4.13), суммирование ведется по всем подстановкам β из группы S_{p-n} .

4.5. НАДГРАФЫ И РАСКРАШЕННЫЕ ГРАФЫ

Перечислению 2-раскрашенных графов был посвящен § 4.3, а корневые графы, у которых в качестве корня выделялся некоторый порожденный подграф, изучались в предыдущем параграфе. Предметом данного параграфа является распространение этих исследований на случай перечисления таких корневых графов, у которых в качестве корня берется не обязательно порожденный подграф; затем предполагается применить полученные выводы к перечислению m -раскрашенных графов. Приводимые ниже результаты представляют собой искусное сочетание довольно прозаического подхода из работы Харари [5] с изящной методологией Робинсона [1].

Если H — подграф графа G , то G называется *надграфом* графа H . Вместо утомительной фразы «корневые графы G , у которых в качестве корня берется подграф H , не обязательно являющийся порожденным подграфом», мы предпочитаем говорить «надграфы графа H », что обеспечивает более эффективную мнемоническую схему.

Мы начнем с вывода формулы для числа неподобных p -вершинных надграфов графа H , также имеющего порядок p . Мы увидим в нижеследующем уравнении, что эта формула включает в себя цикловой индекс реберной группы дополнения графа H . Из метода, рассмотренного в предыдущем параграфе при перечислении корневых графов с корнями, представляющими собой порожденные подграфы H порядка n , следует, что группа подстановок, необходимая для исследования надграфов графа H , может быть получена расширением множества объектов группы $\Gamma(H) \circ S_{p-n}$ путем включения ребер из дополнения \bar{H} . В частности, если H — граф порядка p , то многочлен $r_p(x)$, перечисляющий корневые надграфы графа H , дается формулой

$$r_p(x) = Z(\Gamma_1(\bar{H}), 1+x). \quad (4.5.1)$$

Интересен частный случай (см. Харари [5]) формулы (4.5.1), когда граф H представляет собой цикл C_p порядка p . В этом

случае получаем формулу для подсчета общего числа неподобных гамильтоновых циклов, встречающихся во всех (гамильтоновых) графах порядка p . Реберную группу $\Gamma_1(\bar{C}_p)$ можно выразить на языке веночных произведений (композиций). Например, если $p = 2n + 1$, то имеем соотношение

$$\Gamma_1(\bar{C}_{2n+1}) = D_{2n+1}[E_{n-1}], \quad (4.5.2)$$

исходя из которого можно вычислить, используя формулы (2.2.11) и (4.3.14), цикловой индекс $Z(\Gamma_1(\bar{C}_{2n+1}))$. Если p — четное, то $Z(\Gamma_1(\bar{C}_{2n}))$ можно вычислить, умножая каждое слагаемое из $Z(D_{2n}[E_{n-2}])$ на соответствующее слагаемое из $Z(D_n)$.

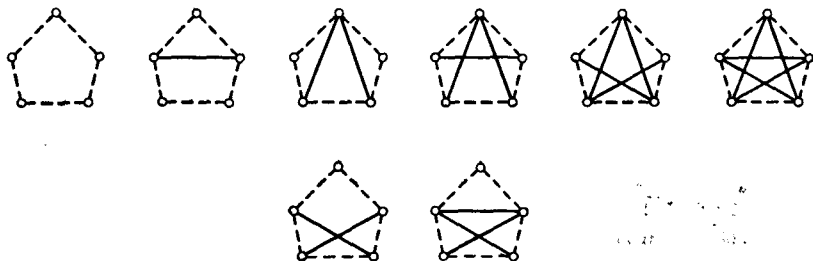


Рис. 4.5.1 Восемь графов пятого порядка, корнями которых являются остовные циклы.

В случае $p = 5$ формула (4.5.2) дает $\Gamma_1(\bar{C}_5) = D_5[E_1] = D_5$ и, в силу (2.2.11), имеем

$$Z(D_5) = \frac{1}{10}(s_1^5 + 4s_5 + 5s_1s_2^2). \quad (4.5.3)$$

Затем, применяя соотношение (4.5.1), получаем

$$r_5(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5. \quad (4.5.4)$$

Правильность этого многочлена подтверждается графами, изображенными на рис. 4.5.1; здесь корень C_5 представляет собой цикл со штриховыми ребрами.

Вернемся теперь к общему методу перечисления надграфов. Пусть H — произвольный подграф порядка n полного графа K_p . Тогда произведение $\Gamma(H)S_{p-n}$ есть группа, состоящая из всех таких подстановок группы $\Gamma(K_p) = S_p$, которые оставляют подграф H неподвижным, т. е. они могут переставлять вершины подграфа H только между собой. Группа, необходимая для перечисления надграфов графа H , является ограничением парной группы $(\Gamma(H)S_{p-n})^{(2)}$ на такие пары вершин, которые не смежны в H . Обозначим это ограничение через $\Gamma_1(\bar{H}, K_p)$. Заметим, что если

H имеет p вершин, то $\Gamma_1(\bar{H}, K_p) = \Gamma_1(\bar{H})$. Кроме того, если H — связный граф, то $\Gamma_1(\bar{H}, K_p)$ является в точности реберной группой дополнения графа H относительно графа K_p .

Мы пока только имеем теорему (см. Харари [5]), дающую принципиальную возможность найти число надграфов данного графа, но у нас нет эффективного метода вычисления необходимого циклового индекса. Такой алгоритм был предложен Робинсоном [1]. Как только эта процедура будет развита, мы тем самым докажем соответствующую теорему. Следовательно, при подобном положении дел чрезвычайно удобно в противоположность мудрому предостережению Уленбека сначала представить доказательство, а затем уже сформулировать теорему. Чтобы вычислить цикловой индекс группы $\Gamma_1(\bar{H}, K_p)$, мы определяем *вершинно-реберную группу* графа G , которая обозначается через $\Gamma_{0,1}(G)$, как группу подстановок, индуцированную группой $\Gamma(G)$ и переставляющую и вершины, и ребра графа G . Записывая цикловой индекс этой группы, мы будем различать циклы, составленные из разных переставляемых объектов, используя для этого два множества переменных: s_k — для вершин и t_k — для ребер. Например, если G — (4,5)-граф $K_4 - x$, то

$$Z(\Gamma_{0,1}(K_4 - x)) = \frac{1}{4} (s_1^4 t_1^5 + 2s_1^2 s_2 t_1 t_2^2 + s_2^2 t_1 t_2^2). \quad (4.5.5)$$

Из формулы (2.2.14) следует, что цикловой индекс группы $\Gamma(H) S_{p-n}$ дается соотношением

$$Z(\Gamma(H) S_{p-n}) = Z(\Gamma(H)) Z(S_{p-n}). \quad (4.5.6)$$

Аналогично, $Z(\Gamma_{0,1}(H)) Z(S_{p-n})$ есть цикловой индекс группы, которая индуцируется группой $\Gamma(H) S_{p-n}$, действующей на множестве вершин графа K_p и множестве ребер графа H . Каждая подстановка $\alpha \in \Gamma(H) S_{p-n}$ вносит в $Z(\Gamma_{0,1}(H)) Z(S_{p-n})$ произведение $(\prod s_k^{j_k}) (\prod t_k^{i_k})$. Соответствующий вклад подстановки α в $Z(S_p^{(2)})$ обозначим, как обычно, через $(\prod s_k^{j_k})^{(2)}$. Далее, — и выделим особо этот тонкий прием, осуществленный Робинсоном, — подстановка α вносит в цикловой индекс группы $\Gamma_1(\bar{H}, K_p)$ произведение $(\prod s_k^{j_k})^{(2)} \prod s_k^{-i_k}$, ибо умножение на $\prod s_k^{-i_k}$ соответствует исключению тех членов в выражении $(\prod s_k^{j_k})^{(2)}$, которые возникают при рассмотрении пар вершин, являющихся смежными в графе H . Поэтому мы определяем линейный оператор ρ (такое обозначение отражает заслуги Робинсона) для вершинно-реберных цикловых индексов, задавая его для произведений таким образом:

$$\rho((\prod s_k^{j_k}) (\prod t_k^{i_k})) = (\prod s_k^{j_k})^{(2)} \prod s_k^{-i_k}. \quad (4.5.7)$$

Теперь утверждение о перечислении надграфов формулируется в следующем виде.

Теорема. Многочлен $r_p(x)$, перечисляющий надграфы порядка p произвольного графа H порядка $n \leq p$, дается формулой

$$r_p(x) = Z(\Gamma_1(\bar{H}, K_p), 1+x), \quad (4.5.8)$$

где

$$Z(\Gamma_1(\bar{H}, K_p)) = \rho(Z(\Gamma_{0,1}(H))Z(S_{p-n})). \quad (4.5.9)$$

Заметим, что если H является графом порядка p , как было в (4.5.1), то формула (4.5.9) приобретает такой вид:

$$Z(\Gamma_1(\bar{H})) = \rho Z(\Gamma_{0,1}(H)). \quad (4.5.10)$$

Таким образом, оператор ρ дает нам возможность получить реберный цикловой индекс произвольного графа, исходя из вершинно-реберного циклового индекса его дополнения.

Мы проиллюстрируем эту теорему для случая $H = C_6$, т. е. взяв простой цикл порядка 6, и положим $p = 6$. Вершинно-реберный цикловой индекс произвольного циклического графа C_p легко вычисляется с использованием формулы (2.2.11), дающей выражение для $Z(C_p)$. Если $p = 6$, то имеем

$$Z(\Gamma_{0,1}(C_6)) = \frac{1}{12} (s_1^6 t_1^6 + s_2^3 t_2^3 + 2s_3^2 t_3^2 + 2s_6 t_6 + 3s_1^2 s_2^2 t_2^3 + 3s_2^3 t_1^2 t_2^2). \quad (4.5.11)$$

Применяя оператор ρ к соотношению (4.5.11), находим

$$\begin{aligned} Z(\Gamma_1(\bar{C}_6)) &= \frac{1}{12} (s_1^{15} s_1^{-6} + s_1^3 s_2^6 s_2^{-3} + 2s_3^5 s_3^{-2} + 2s_3 s_6^2 s_6^{-1} + \\ &+ 3s_1^3 s_2^6 s_2^{-3} + 3s_1^3 s_2^6 s_1^{-2} s_2^{-2}) = \\ &= \frac{1}{12} (s_1^9 + 4s_1^3 s_2^3 + 2s_3^3 + 2s_3 s_6 + 3s_1 s_2^4). \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Из (4.5.8) и (4.5.12) с помощью простых преобразований получаем явное выражение для $r_6(x)$:

$$\begin{aligned} r_6(x) &= 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 16x^4 + 16x^5 + \\ &+ 12x^6 + 6x^7 + 2x^8 + x^9. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Этот многочлен, естественно, можно также получить, используя соотношения, подобные (4.5.2), (4.5.3) и (4.5.4). Правильность коэффициента при x^2 подтверждается рис. 4.5.2.

Сосредоточим теперь свое внимание на m -раскрашенных графах и на нижеследующем утверждении Робинсона [1]; при

этом мы будем использовать теорему, связанную с формулой (4.5.8). Как следует из определения, вершины m -раскрашенного графа разбиваются на m множеств так, что смежные вершины всегда принадлежат разным множествам. Вершины одного и того

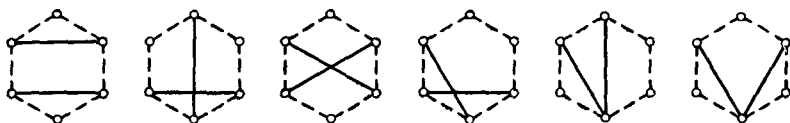


Рис. 4.5.2 Все шесть (6,8)-графов, корнями которых являются остовные циклы.

же множества имеют одинаковый цвет. Например, 3-раскрашенные графы, изображенные на рис. 4.5.3, содержат по две вершины каждого цвета и вершины, соединенные штриховыми ребрами, имеют одинаковый цвет.

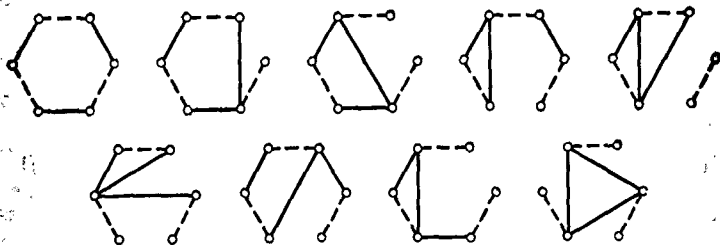


Рис. 4.5.3 Все девять 3-раскрашенных (6,3)-графов с двумя вершинами каждого цвета.

Как и в § 4.3 при перечислении 2-раскрашенных графов, мы ищем число m -раскрашенных графов для специального разбиения (j) числа p на m частей:

$$m = \sum_{k=1}^p j_k, \quad (4.5.14)$$

где, как обычно, $\sum_{k=1}^p kj_k = p$. Пусть $b_p((j), x)$ — многочлен, перечисляющий m -раскрашенные графы порядка p , для которых разбиение (j) является цветным¹. Например, если $p=6$ и разбиение

¹ То есть любое подмножество разбиения множества вершин состоит из вершин одинакового цвета и разные подмножества разбиения «имеют разный цвет». — *Прим. перев.*

имеет вид $2 + 2 + 2$, т. е. $j_2 = 3$, то многочлен $b_6((j), x)$ перечисляет 3-раскрашенные графы порядка 6, имеющие по две вершины каждого цвета. Мы покажем, что для этого разбиения числа 6 многочлен $b_6((j), x)$ имеет вид

$$b_6((j), x) = 1 + x + 4x^2 + 9x^3 + 18x^4 + 24x^5 + 30x^6 + \\ + 24x^7 + 18x^8 + 9x^9 + 4x^{10} + x^{11} + x^{12}. \quad (4.5.15)$$

Рис. 4.5.3 подтверждает тот факт, что коэффициент при x^3 в соотношении 4.5.15 равен 9.

Мы определяем *полный m -дольный граф* $K(j)$ для произвольного разбиения (j) числа p на m частей как дополнение объединения m полных графов:

$$K(j) = \overline{\bigcup_{k=1}^m j_k K_k}. \quad (4.5.16)$$

Как и прежде, m -раскрашенные графы, которые мы хотим подсчитать, являются остовными подграфами графа $K(j)$. Из формулы (4.3.2) следует, что

$$b_p((j), x) = Z(\Gamma_1(K(j)), 1 + x), \quad (4.5.17)$$

и поэтому мы должны найти метод для определения циклового индекса группы $\Gamma_1(K(j))$. Но остовные подграфы полного m -дольного графа $K(j)$ являются как раз надграфами графа $\bar{K}(j)$. Этот факт подсказывает идею: выразить цикловой индекс группы $\Gamma_1(K(j))$ на языке оператора ρ и циклового индекса $Z(\Gamma_{0,1}(\bar{K}(j)))$, взяв в формуле (4.5.10) $\bar{H} = K(j)$. Таким образом, достаточно найти способ вычисления циклового индекса группы $\Gamma_{0,1}(\bar{K}(j))$, и это мы сейчас сделаем.

Обозначим через nG граф, состоящий из n попарно непересекающихся экземпляров связного графа G . Как следует из определения веночного произведения (см. Харари [1], стр. 196),

$$\Gamma(nG) = S_n[\Gamma(G)]. \quad (4.5.18)$$

Поэтому, в силу соотношения (4.3.14), цикловой индекс для этой группы равен

$$Z(\Gamma(nG)) = Z(S_n)[Z(\Gamma(G))]. \quad (4.5.19)$$

Уравнение (4.5.19) легко обобщить и получить выражение

$$Z(\Gamma_{0,1}(nG)) = Z(S_n)[Z(\Gamma_{0,1}(G))]. \quad (4.5.20)$$

Рассмотрим тот же самый пример, который привел нас к многочлену (4.5.15). Полагая $G = K_2$ и $n = 3$ и используя формулу (4.5.20), имеем

$$Z(\Gamma_{0,1}(3K_2)) = Z(S_3)[Z(\Gamma_{0,1}(K_2))]. \quad (4.5.21)$$

Далее, $Z(\Gamma_{0,1}(K_2)) = \frac{1}{2}(s_1^2 t_1 + s_2 t_1)$, и если вместо каждого s_k в цикловом индексе $Z(S_3)$ мы подставим выражение $(1/2)(s_k^2 t_k + s_{2k} t_k)$, получающееся из $Z(\Gamma_{0,1}(K_2))$ умножением каждого индекса у s_i и t_j на число k , то найдем

$$\begin{aligned} Z(\Gamma_{0,1}(3K_2)) &= \frac{1}{48} s_1^6 t_1^3 + \frac{1}{16} s_1^4 s_2 t_1^3 + \frac{1}{16} s_1^2 s_2^2 t_1^3 + \frac{1}{48} s_2^3 t_1^3 + \\ &+ \frac{1}{8} s_1^2 s_2^2 t_1 t_2 + \frac{1}{8} s_1^2 s_4 t_1 t_2 + \frac{1}{8} s_2^3 t_1 t_2 + \\ &+ \frac{1}{8} s_2 s_4 t_1 t_2 + \frac{1}{6} s_3^2 t_3 + \frac{1}{6} s_6 t_3. \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

В общем случае, при рассмотрении графа $\overline{K(j)}$, компоненты которого являются полными графами, группа $\Gamma(\overline{K(j)})$ может быть представлена в виде произведения (см. Харари [1], стр. 196)

$$\Gamma(\overline{K(j)}) = \prod_k S_{j_k}[\Gamma(K_k)]. \quad (4.5.23)$$

Из (4.5.20) следует, что

$$Z(\Gamma_{0,1}(\overline{K(j)})) = \prod_k Z(S_{j_k}) [Z(\Gamma_{0,1}(K_k))]. \quad (4.5.24)$$

Обозначим для удобства группу $\Gamma_{0,1}(K_n)$ через $S_n^{(1,2)}$ и заметим, что вершинно-реберный цикловый индекс легко получается из циклового индекса $Z(S_n^{(2)})$. Как отмечалось выше, $\overline{K(j)} = 3K_2$, если $p = 6$ и $j_2 = 3$. Таким образом, формула (4.5.22) дает цикловой индекс вершинно-реберной группы дополнения такого полного 3-дольного графа шестого порядка, который имеет по две вершины каждого цвета.

Теперь мы можем резюмировать метод Робинсона [1] для перечисления t -раскрашенных графов.

Теорема. Многочлен $b_p((j), x)$, перечисляющий t -раскрашенные графы порядка p , отвечающие разбиению (j) , имеет вид

$$b_p((j), x) = Z(\Gamma_1(K(j)), 1+x), \quad (4.5.25)$$

где

$$Z(\Gamma_1(K(j))) = \rho \left(\prod_k Z(S_{j_k}) [Z(S_k^{(1,2)})] \right). \quad (4.5.26)$$

В том примере, который нами рассматривался, мы уже нашли выражение для $Z(S_3)[Z(S_2^{(1,2)})]$ (см. формулу (4.5.22)). Из определения оператора ρ в случае $j_2 = 3$ следует, что

$$\begin{aligned} Z(\Gamma_1(K(j))) &= \frac{1}{48} s_1^{15} s_1^{-3} + \frac{1}{16} s_1^7 s_2^4 s_1^{-3} + \frac{1}{16} s_1^3 s_2^6 s_1^{-3} + \\ &+ \frac{1}{48} s_1^3 s_2^6 s_1^{-3} + \frac{1}{8} s_1^3 s_2^6 s_1^{-1} s_2^{-1} + \\ &+ \frac{1}{8} s_1 s_2 s_4^3 s_1^{-1} s_2^{-1} + \frac{1}{8} s_1^3 s_2^6 s_1^{-1} s_2^{-1} + \\ &+ \frac{1}{8} s_1 s_2 s_4^3 s_1^{-1} s_2^{-1} + \frac{1}{6} s_3^5 s_3^{-1} + \frac{1}{6} s_3 s_3^3 s_3^{-1}. \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

Упрощая это выражение, имеем

$$\begin{aligned} Z(\Gamma_1(K(j))) &= \frac{1}{48} s_1^{12} + \frac{1}{16} s_1^4 s_2^4 + \frac{1}{12} s_3^6 + \frac{1}{4} s_1^2 s_3^4 + \\ &+ \frac{1}{4} s_4^3 + \frac{1}{6} s_3^4 + \frac{1}{6} s_3^2. \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

Наконец, делая подстановку $s_k = 1 + x^k$ в правую часть соотношения (4.5.28), получаем формулу (4.5.15). Используя эту теорему, Робинсон нашел число 3-раскрашенных графов для значений $p \leq 9$ и для всевозможных разбиений.

Мы должны особо подчеркнуть, что, в то время как перечисление 2-раскрашиваемых графов выполнимо (об этом говорилось в § 4.3), задача перечисления m -раскрашиваемых графов при $m \geq 3$ остается нерешенной (см. гл. 10).

4.6. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Булеву функцию n переменных можно рассматривать как отображение множества всех n -последовательностей из нулей и единиц в множество $\{0, 1\}$. Другими словами, булева функция представляет собой подмножество вершин n -куба Q_n . Нашей целью является подсчет числа типов булевых функций с отношением эквивалентности, определяемым группой n -куба Q_n .

Мы видели, что цикловой индекс реберной группы графа G позволяет подсчитывать остовные подграфы. В данном параграфе мы исследуем возможности циклового индекса вершинной группы графа G и увидим, что он полезен при подсчете неподобных множеств вершин. Наиболее интересное применение этой техники будет состоять в перечислении типов булевых функций.

Чтобы подготовиться к подсчету булевых функций, мы интерпретируем утверждение (2.5.1) о цикловом индексе $Z(A, 1+x)$ в случае, когда A есть группа $\Gamma(G)$ данного графа G .

(4.6.1). Теорема. Коэффициент при x^r в $Z(\Gamma(G), 1+x)$ равен числу неподобных множеств, состоящих в точности из r вершин, при условии, что эквивалентность определяется группой автоморфизмов графа G .

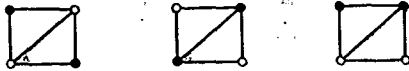


Рис. 4.6.1 Неподобные 2-множества вершин в некотором графе.

Для иллюстрации теоремы рассмотрим граф G , изображенный на рис. 4.3.1. Цикловой индекс его группы дается соотношением

$$Z(\Gamma(G)) = \left[\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2) \right]^2 = \frac{1}{4} (s_1^4 + 2s_1^2 s_2 + s_2^2), \quad (4.6.2)$$

так что

$$Z(\Gamma(G), 1+x) = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4. \quad (4.6.3)$$

Правильность среднего слагаемого этого многочлена подтверждается рис. 4.6.1, на котором пары вершин, образующие неподобные подмножества, обозначены темными точками. Пойа [2] обнаружил, что ранние работы Джевонса [1] и Клиффорда [1] о перечислении типов булевых функций приводят к таким числовым результатам, которые не являются полностью правильными. Задача состояла в нахождении числа «разных» высказываний, построенных из n предложений¹, таких, что каждое из них имеет два значения истинности: 0 или 1. Используя широко известные символы \vee (или) и \wedge (и) для дизъюнкции и конъюнкции, можно из предложений P_1, P_2 и P_3 составить высказывание $P_1 \vee (P_2 \wedge P_3)$. Далее, если 1 и 0 — два значения истинности, то сложные высказывания соответствуют естественным образом булевым функциям. Например, высказывание $P_1 \vee (P_2 \wedge P_3)$ соответствует функции f , отображающей тройки $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$ в 0, а все остальные тройки — в 1. Однако мы хотим рассматривать два сложных высказывания как эквивалентные не только тогда, когда они соответствуют равным булевым функциям, но и в том случае, когда одно из этих высказываний может быть получено из другого перестановкой предложений или заменой нескольких предложений их отрицаниями. Так, например,

¹ Элементарных высказываний. — Прим. перев.

высказывание $P_1 \vee (P_2 \wedge P_3)$ рассматривается как эквивалентное высказыванию $(P_3 \vee) (\neg P_1) \wedge (P_3 \vee P_2)$, что можно обосновать, используя дистрибутивный закон для дизъюнкции относительно конъюнкции.

Пойа обнаружил, что рассматриваемая задача состоит в определении числа способов, которыми можно раскрасить 2^n вершин n -куба Q_n двумя разными цветами. Это следует из того, что группа n -куба Q_n идентична группе, переставляющей произвольным образом n предложений и заменяющей предложения их отрицаниями. Мы можем выразить эту группу через симметрические группы, воспользовавшись операцией экспоненциации (см. Харари [9]):

$$\Gamma(Q_n) = [S_2]^{S_n}. \quad (4.6.4)$$

В этом соотношении группа S_n указывает на то, что n предложений P_i можно переставлять как угодно, а группа S_2 учитывает

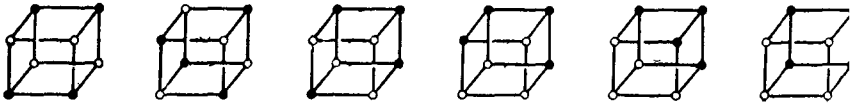


Рис. 4.6.2 Кубы с четырьмя вершинами каждого цвета.

возможность навешивания отрицания на предложения P_i после того, как они переставлены. Применяя теорему (4.6.1) для этой группы подстановок, можно получить основной результат данного параграфа. Цикловой индекс этой группы был впервые найден Слепяном [1], но представлен он был в довольно сложной форме, в которой невозможно узнать экспоненциацию как таковую.

(4.6.5). Теорема. Число $N(n, r)$ различных булевых функций, зависящих от n переменных и принимающих r ненулевых значений, равно коэффициенту при x^r в $Z([S_2]^{S_n}, 1 + x)$.

Для иллюстрации теоремы мы приводим на рис. 4.6.2 шесть способов раскраски вершин куба Q_3 , отвечающих тому случаю, когда в кубе имеется по четыре вершины каждого цвета. Этим самым мы проверяем значение коэффициента при x^4 в $Z([S_2]^{S_3}, 1 + x)$. Заметим, что ожерелья, изображенные на рис. 2.4.2, соответствуют в точности булевым функциям от двух переменных, ибо всякое допустимое преобразование ожерелья с четырьмя бусинками можно заменить соответствующим преобразованием на 2-кубе.

Используя тот факт, что группа $\Gamma(Q_n)$ абстрактно изоморфна вечноному произведению $S_n [S_2]$, Пойа вычислил цикловые индексы $Z(\Gamma(Q_n))$ для $n \leq 4$. Применяя сформулированную выше теорему, он нашел значения величины $N(n, r)$, представленные в табл. 4.6.1.

Таблица 4.6.1

Число булевых функций

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Общее число функций
1	1	1	1							3
2	1	1	2	1	1					6
3	1	1	3	3	6	3	3	1	1	22
4	1	1	4	6	19	27	50	56	74	402

Тесная связь, существующая между булевыми алгебрами и переключательными схемами, как раз явилась причиной, побудившей Слепяна [1] вычислить общее число булевых функций для $n = 5$ и 6. Довольно сложный метод нахождения циклового индекса $Z([B]^{S_n})$ был предложен Харрисоном и Хаем [1], которые использовали этот метод для подсчета числа некоторых классов функций алгебры логики¹. Наиболее компактные формулы для $Z([B]^A)$ были найдены Робинсоном и Палмером, как сообщалось об этом в работе Палмера [3]. Мы дадим набросок некоторых деталей их подхода, чтобы снабдить читателя приемлемым средством вычисления циклового индекса, встречающегося в теореме (4.6.5).

Сначала определяем произведение для одночленов, обозначая его через \times (сравните с соотношением (4.1.16)):

$$\prod s_k^{j_k} \times \prod s_k^{t_k} = \prod_{r,t} s_{[r,t]}^{(r,t)j_r t_t}. \quad (4.6.6)$$

Как показано в работе Харари [7], если это произведение распространить на многочлены по линейному закону, то цикловой индекс $Z(A \times B)$ декартова произведения можно представить в виде

$$Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B). \quad (4.6.7)$$

Для каждого целого положительного числа r определяется новый оператор J_r . Сначала определяем его на одночленах:

$$J_r \left(\prod_{k=1}^n s_k^{j_k} \right) = \prod_{v=1}^{n^r} s_v^{i_v}, \quad (4.6.8)$$

где

$$\sum_{w|v} w i_w = \left(\sum_{k|v/(r,v)} k j_k \right)^{(r,v)}. \quad (4.6.9)$$

¹ В оригинале — «...функций Поста». — Прим. перев.

Ясно, что оператор J_1 является тождественным. Применяя к соотношению (4.6.9) формулу обращения Мёбиуса, можем написать

$$i_v = \frac{1}{v} \sum_{w|v} \mu(v/w) \left(\sum_{k|w/(r, w)} kj_k \right)^{(r, w)}. \quad (4.6.10)$$

Затем оператор J_r распространяется по линейному закону на многочлены. Приведенные только что пять формул можно использовать для выражения циклового индекса $Z([B]^A)$ через цикловые индексы $Z(A)$ и $Z(B)$, где A и B — произвольные группы подстановок. Как это делается, станет ясно из рассмотрения примера, в котором $A = S_3$ и $B = S_2$, т. е. при вычислении циклового индекса группы куба Q_3 . Самой трудной частью является вычисление операторов J_r . Сначала вместо каждой переменной s_r в цикловом индексе $Z(S_3)$ подставим оператор J_r . Получим такое выражение:

$$Z(S_3; J_1, J_2, J_3) = \frac{1}{6} (J_1^3 + 3J_1J_2 + 2J_3). \quad (4.6.11)$$

Далее, слагаемые из (4.6.11) действуют на $Z(S_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1^3(Z(S_2)) &= J_1(Z(S_2)) \times J_1(Z(S_2)) \times J_1(Z(S_2)), \\ J_1J_2(Z(S_2)) &= J_1(Z(S_2)) \times J_2(Z(S_2)). \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

В силу определения операторов J_r , имеем

$$J_1(Z(S_2)) = Z(S_2) = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2), \quad (4.6.13)$$

$$J_2(Z(S_2)) = \frac{1}{2} (J_2(s_1^2) + J_2(s_2)) = \frac{1}{2} (s_1^2s_2 + s_4), \quad (4.6.14)$$

$$J_3(Z(S_2)) = \frac{1}{2} (J_3(s_1^2) + J_3(s_2)) = \frac{1}{2} (s_1^2s_3^2 + s_2s_6). \quad (4.6.15)$$

Из соотношений (4.6.12) с учетом формул (4.6.7), (4.6.13) и (4.6.14) получаем равенства

$$\begin{aligned} J_1^3(Z(S_2)) &= \frac{1}{2^3} (s_1^8 + 7s_2^4), & J_1J_2(Z(S_2)) &= \frac{1}{2^2} (s_1^4s_2^2 + s_2^4 + 2s_4^2). \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Наконец, подставляя многочлены из (4.6.15) и (4.6.16) в формулу (4.6.11) на место соответствующих слагаемых, находим выражение для циклового индекса $Z([S_2]^{S_3})$ в форме, напоминающей уравнения из работы Поля [2]:

$$Z([S_2]^{S_3}) = \frac{1}{6} \left(\frac{s_1^8 + 7s_2^4}{2^3} + 3 \frac{s_1^4s_2^2 + s_2^4 + 2s_4^2}{2^2} + 2 \frac{s_1^2s_3^2 + s_2s_6}{2} \right). \quad (4.6.17)$$

Таким образом, как показано в работе Палмера [3], цикловой индекс $Z([B]^A)$ произвольной экспоненциации может быть выражен как образ циклового индекса $Z(B)$ при воздействии на него оператора $Z(A; J_1, J_2, \dots)$. На таком пути могут быть в принципе решены все задачи перечисления, в которых группа конфигураций может трактоваться как экспоненциация.

4.7. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Четные графы (у которых каждая вершина имеет четную степень) и эйлеровы графы (т. е. четные связные графы) были перечислены в том случае, когда они представляли собой помеченные объекты, — в § 1.4. Более тонкая задача — для непомеченных графов — была решена лишь тогда, когда Робинсон [2] увидел это препятствие именно с присущей его исследованиям перспективой. Чтобы перечислить эйлеровы графы с p вершинами, он сначала пересчитывает четные p -вершинные графы, а затем применяет обычную технику для выражения числа связных конфигураций через общее число конфигураций.

Настоящий параграф содержит главным образом доказательство формулы Робинсона для числа четных графов порядка p . Эта формула очень похожа на аналогичную формулу для перечисления графов, в которой использовался цикловой индекс (4.1.9) парной группы, порожденной симметрической группой. Это сходство не случайное, ибо теорема Робинсона базируется на упомянутом результате.

Теорема. Число w_p четных графов порядка p дается формулой

$$w_p = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod_k k^{j_k} j_k!} 2^{e(j)}, \quad (4.7.1)$$

где

$$e(j) = \sum_{r < t} (r, t) j_r j_t + \sum_{k \geq 1} k \cdot \binom{j_k}{2} + \sum_{k \geq 1} (k-1)(j_{2k} + j_{2k+1}) + \operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq 0} j_{2k+1} \right); \quad (4.7.2)$$

здесь $\operatorname{sgn} x$ равно 1 при $x > 0$ и равно 0 при $x = 0$.

Доказательство. Следуя Робинсону, мы применим тот вариант леммы Бернсайда, в котором рассматривается ограничение группы на подходящее подмножество объектов (см. соотношение (2.3.9)).

Мы видели, что орбиты степенной группы $E_2^{S_p^{(2)}}$ соответствуют графам порядка p . Ограничим эту группу на множество F таких функций, которые представляют четные графы. Тогда мы сможем

применить формулу (2.3.9), чтобы выразить w_p через функции из множества F , остающиеся неподвижными при воздействии на них подстановок из этой степенной группы. Другими словами, для каждой подстановки α из S_p мы ищем число функций f из множества F , таких, что

$$f\{i, j\} = f\{\alpha i, \alpha j\}. \quad (4.7.3)$$

Таким образом, для доказательства теоремы мы должны показать, что если циклы подстановки α определяют разбиение (j) числа p , то число функций в множестве F , удовлетворяющих условию (4.7.3), равно $2^{e(j)}$, где $e(j)$ дается формулой (4.7.2).

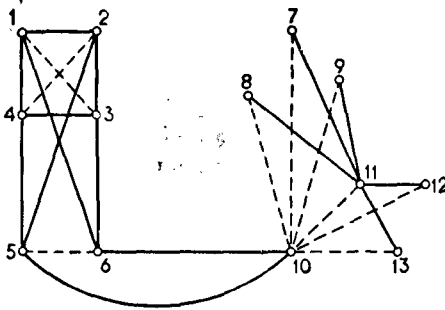


Рис. 4.7.1 Четный граф, неподвижный относительно подстановки $(1234)(56)(789)(10)(11)(12)(13)$.

Прежде чем погрузиться в детали этого доказательства, мы постараемся сделать трактовку более прозрачной, рассмотрев для этого четный граф (см. рис. 4.7.1), который соответствует функции f из множества F , удовлетворяющей условию (4.7.3) для конкретной подстановки α степени 13, а именно

$$\alpha = (1234)(56)(789)(10)(11)(12)(13).$$

Допуская лишь незначительную вольность речи, мы говорим, что данный граф неподвижен относительно α . Сплошные и штриховые ребра применяются для того, чтобы более ярко отразить действие подстановки α на ребра графа. Смысл того, почему одни ребра изображены сплошными, а другие — штриховыми, станет, надемся, ясным в процессе доказательства.

Сначала находим вклад, который вносит подстановка α в множитель $2^{e(j)}$ в том случае, когда ее циклы рассматриваются индивидуально. Если $z_k = (1\ 2\ 3\ \dots\ k)$ — произвольный нечетный цикл подстановки α , то мы знаем, что z_k индуцирует $(k-1)/2$ циклов 2-подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. Любая вершина цикла z_k инцидентна ровно

двум ребрам в каждом из этих циклов (см., например, рис. 4.7.2, а). Следовательно, каждый из этих $(k-1)/2$ циклов может либо входить, либо нет в четный граф, являющийся неподвижным относительно подстановки α . Поэтому вклад в $e(j)$, вносимый всеми нечетными циклами при их индивидуальном рассмотрении, равен $\sum_{k=1}^p j_k(k-1)/2$ (ср. с (4.1.14)).

Аналогично, если k — четное, то вклад в $e(j)$ равен $\sum_{k=2}^p j_k(k-2)/2$ (ср. с (4.1.15)). Заметим, что любой цикл C длины $k/2$, состоящий

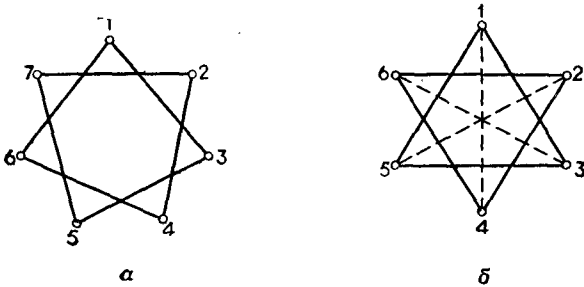


Рис. 4.7.2 Графы, неподвижные относительно нечетной и четной циклических подстановок.

из 2-подмножеств, не входит в четный граф, так как каждая вершина цикла z_k инцидентна только одному из 2-подмножеств, содержащихся в цикле C . Например, на рис. 4.7.2, б соответствующий цикл показан штриховыми ребрами и он вносит нечетный вклад (единицу) в степень каждой вершины, изображенной на рисунке.

Так же как при перечислении графов (см. § 4.1), мы рассмотрим далее пары циклов z_r и z_t из подстановки α и такие 2-подмножества, которые имеют по одной вершине в каждом из этих циклов. При нахождении циклового индекса парной группы мы видели, что циклы z_r и z_t индуцируют (r, t) циклов длины $[r, t]$, действующих на указанных выше 2-подмножествах (ср. с (4.1.16)). Таким образом, каждая вершина цикла z_r принадлежит $[r, t]/r$ 2-подмножествам, содержащимся в одном из таких циклов длины $[r, t]$. Заметим, что если t — четное и r — нечетное, то каждая вершина цикла z_r находится в четном числе таких 2-подмножеств. Памятуя об этом, мы теперь рассмотрим все пары циклов z_r и z_t , у которых либо r , либо t — четное. Пусть U — произвольная совокупность циклов таких 2-подмножеств, в которых содержится ровно по одной вершине из этих двух различных циклов

z_r и z_t . Тогда каждая вершина нечетного цикла принадлежит четному числу 2-подмножеств, входящих в циклы из U . Каждая вершина четного цикла z_k может содержаться либо в четном, либо в нечетном числе этих 2-подмножеств. Итак, мы видим, что циклы из совокупности U могут определить четный граф — надо только либо добавлять, либо исключать (смотря по тому, что необходимо) циклы длин $k/2$, индуцированные циклами z_k .

Различая два случая: $r \neq t$ и $r = t$, мы видим, что общее число циклов в совокупностях U равно

$$\sum_{r < t} (r, t) j_r j_t + \sum_{k \geq 1} 2k \binom{j_{2k}}{2},$$

где по меньшей мере одно из чисел r и t — четное. Следовательно, полученное выражение представляет собой вклад в $e(j)$, вносимый парами, объекты которых принадлежат двум любым циклам подстановки α , причем хотя бы один из циклов является четным. Заметим, что на рис. 4.7.1 для получения четного графа нужно включить и штриховые ребра цикла (1234), и штриховое ребро цикла (56).

Мы пока еще не рассматривали 2-подмножества, содержащие по одной вершине в каждом из двух различных нечетных циклов. Выделим один конкретный нечетный цикл, скажем z , и обозначим через W совокупность всех таких циклов 2-подмножеств, которые получаются посредством выбора для каждого нечетного цикла $z_r \neq z$ одного какого-либо цикла 2-подмножеств, вершины которого лежат в z и в z_r . Таким образом, совокупность W будет иметь $\left(\sum_{k \geq 0} j_{2k+1}\right) - 1$ циклов. Для каждой выборки, состоящей из тех циклов 2-подмножеств, которые не принадлежат совокупности W , мы можем теперь определить четный граф. Это достигается либо включением, либо исключением (в зависимости от необходимости) каждого цикла, принадлежащего W , для того, чтобы всякая вершина из нечетного цикла, отличного от z , находилась в четном числе 2-подмножеств. Тогда (так как Эйлер доказал, что число вершин нечетной степени в любом графе должно быть четным) вершины цикла z тоже будут лежать в четном числе 2-подмножеств. Число таких циклов, не принадлежащих совокупности W , при нечетных r и t равно

$$\sum_{r < t} (r, t) j_r j_t + \sum_{k \geq 0} (2k + 1) \binom{j_{2k+1}}{2} - (m - 1),$$

где m — число нечетных циклов, если таковые существуют, и $m = 1$, если нечетных циклов нет. На рис. 4.7.1 мы проиллюстрировали это при $z = (10)$; здесь W состоит из циклов, содержащих штриховые ребра, исходящие из вершины 10. После соединения вершины 11 с вершинами 7, 8, 9, 12 и 13 это необходимо в данном

случае для того, чтобы включить все ребра из совокупности W , получаем четный граф.

Объединяя все эти рассуждения и суммируя различные «вклады», убеждаемся в справедливости формулы (4.7.2). Таким образом, четные графы перечислены. ■

Робинсон использовал эти формулы для вычисления числа w_p четных графов при $p \leq 8$:

$$w(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 + 16x^6 + 54x^7 + 283x^8 + \dots \quad (4.7.4)$$

Семь четных графов пятого порядка, показанных на рис. 1.4.3, когда перечислялись четные помеченные графы, подтверждают

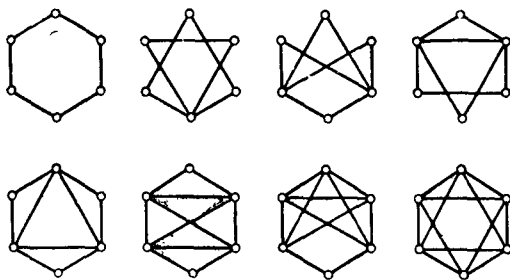


Рис. 4.7.3 Восемь эйлеровых графов шестого порядка.

правильность коэффициента при x^5 . Производящая функция $u(x)$ для эйлеровых графов может быть получена обычным способом, если снова применить формулу (4.2.3), которая перечисляет связанные графы «на языке» всех графов. Несколько первых членов функции $u(x)$ имеют вид

$$u(x) = x + x^3 + x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 37x^7 + 184x^8 + \dots \quad (4.7.5)$$

Значение коэффициента при x^6 подтверждается рис. 4.7.3.

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Найти многочлен, перечисляющий число способов, которыми можно раскрасить, используя три цвета, ребра: (а) (5,9)-графа, (б) графа $K_{3,3}$. (Указание: см. теорему (4.3.2).)

4.2. Найти цикловые индексы $Z(S_2 [C_3])$, $Z(C_3 [S_2])$ и $Z(S_3 [D_4])$.

4.3. Найти цикловой индекс для графа с четырьмя компонентами, если: (а) каждая компонента является треугольником, (б) две компоненты являются треугольниками, а две другие — изолированными вершинами.

4.4. *Чистые двумерные симплициальные комплексы* (каждый такой комплекс состоит из конечного множества X и некоторой совокупности 3-подмножеств множества X).

(Харари [4])

4.5. *Мультиграфы мощности s* , т. е. мультиграфы, в которых любая пара вершин соединяется не более чем s ребрами.

4.6. *Графы, снабженные знаками*, т. е. графы, в которых ребрам приписаны знаки плюс и минус.

(Харари [3])

4.7. *Сбалансированные графы*, т. е. графы, снабженные знаками и не содержащие циклов с нечетным числом отрицательных ребер.

(Харари и Палмер [10])

4.8. *Вершинно-симметрические графы простого порядка p* , группы которых транзитивны.

(Тёрнер [1])

*Лорд Рональд вскачил на коня
и бешеным галопом помчался во
все стороны.*

Ликок С.¹

Глава 5 ОРГРАФЫ

В этой главе, состоящей из четырех параграфов, перечисляются оргграфы, турниры, ориентации данного графа и «смешанные графы» (т. е. графы, в которых могут встречаться и дуги, и неориентированные ребра). Кроме всех оргграфов, мы перечисляем в первом параграфе отношения и связные оргграфы. Из решения задачи перечисления турниров выводится в качестве следствия теорема о перечислении сильных турниров. Наша формула для числа смешанных графов включает как частные случаи формулы, подсчитывающие числа графов, оргграфов, направленных графов, полных оргграфов и турниров (эти формулы легко могут быть представлены в явной форме).

Несколько слов о методах перечисления, используемых ниже. Подсчет оргграфов осуществляется с помощью несложной модификации метода Пойа, применявшегося при перечислении графов. Это достигается путем введения новой унарной операции на группах подстановок. Результатом операции является группа, называемая редуцированной упорядоченной парной группой, которая предназначена для того, чтобы действовать на множестве упорядоченных пар различных объектов, тех самых объектов, на множестве которых действует первоначальная группа подстановок.

Цикловой индекс редуцированной упорядоченной парной группы, порожденной группой S_p , используется для подсчета оргграфов. Затем, чтобы дать возможность перечислить турниры, этот цикловой индекс модифицируется путем введения ограничения на область действия соответствующей степенной группы. Применяя эту идею к редуцированной упорядоченной парной группе произвольного графа и используя в результирующем цикловом индексе два множества переменных, мы далее получаем возможность подсчитать число ориентаций графа. Кульминацией в при-

¹ Стивен Ликок (1869—1944) — канадский юморист, — *Прим. перев.*

ложении этих методов является общая теорема перечисления смешанных графов. Она доказывается с использованием того же циклового индекса, который применяется для перечисления орграфов, снова с двумя множествами переменных и со специальным перечисляющим рядом для фигур.

5.1. ОРГРАФЫ

В этом параграфе продолжена аналогия между выводом многочлена $g_p(x)$, перечисляющего графы, и выводом соответствующего циклового индекса парной группы, порожденной группой S_p . В то время как существует только 11 графов четвертого порядка, число всех орграфов четвертого порядка равно 218. Трудно выполнимая задача, связанная с изображением всех 218 орграфов, все же была решена, и диаграммы этих орграфов можно найти в приложении II в книге Харари [1], стр. 262—265.

Пусть $d_p(x)$ — перечисляющий многочлен для орграфов порядка p , так что, например,

$$d_3(x) = 1 + x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 + x^5 + x^6. \quad (5.1.1)$$

Значения этих коэффициентов подтверждаются рис. 1.1.5.

Мы сейчас покажем, следуя Харари [11], как можно использовать теорему перечисления Пойа для нахождения $d_p(x)$.

Пусть $X = \{1, 2, \dots, p\}$, и пусть $X^{[2]}$ обозначает все упорядоченные пары различных элементов из X . Если $Y = \{0, 1\}$ то функции из $X^{[2]}$ в Y представляют помеченные орграфы порядка p . Каждая функция f соответствует тому орграфу $D(f)$ с множеством вершин X , в котором существует дуга, идущая из вершины i в вершину j , тогда и только тогда, когда $f(i, j) = 1$. Таким образом, две функции f и g представляют один и тот же орграф, если существует подстановка α множества X , такая, что из смежности вершины i к вершине j в орграфе $D(f)$ следует смежность вершины αi к вершине αj в орграфе $D(g)$. Значит, орграфы $D(f)$ и $D(g)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для всех пар $(i, j) \in X^{[2]}$ выполняется равенство

$$f(i, j) = g(\alpha i, \alpha j). \quad (5.1.2)$$

Это соотношение подсказывает мысль о введении следующей унарной операции на группах подстановок. Если A — группа подстановок с множеством объектов X , то *редуцированная упорядоченная парная группа* группы A , обозначаемая $A^{[2]}$, имеет в качестве множества объектов множество $X^{[2]}$ и индуцируется группой A . То есть для всякой подстановки α из A найдется подстанов-

ка α' из $A^{[2]}$, такая, что образ любой пары $(i, j) \in X^{[2]}$ при воздействии на нее подстановкой α' дается формулой

$$\alpha'(i, j) = (\alpha i, \alpha j). \quad (5.1.3)$$

Мы теперь можем вывести формулу для числа орграфов.

Теорема. *Перечисляющий многочлен $d_p(x)$ для орграфов порядка p дается следующим выражением:*

$$d_p(x) = Z(S_p^{[2]}, 1+x), \quad (5.1.4)$$

где

$$Z(S_p^{[2]}) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod k^{j_k} j_k!} \prod_{k=1}^p S_k^{(k-1)j_k+2k} \binom{j_k}{2} \prod_{r < t} S_{[r,t]}^{2(r,t)j_r j_t}. \quad (5.1.5)$$

Доказательство. Уравнение (5.1.4) является вариантом следствия (2.5.1) из теоремы перечисления Пойа. Мы покажем, что редуцированная упорядоченная парная группа, порожденная группой S_p , как раз и является требуемой группой конфигураций. Две функции f и g , действующие из $X^{[2]}$ в $\{0, 1\}$, представляют один и тот же орграф тогда и только тогда, когда существует подстановка α в S_p , такая, что

$$f(z) = g(\alpha'z) \quad (5.1.6)$$

для каждой пары z из $X^{[2]}$. Следовательно, орбиты степенной группы $E_2^{S_p^{[2]}}$ соответствуют разным орграфам.

Перечисляющим рядом для фигур является ряд $1+x$, ибо, как и в случае графов, дуга (i, j) либо присутствует в орграфе, либо нет. Таким образом, используя обычные определения (2.4.4) весов функций и орбит, убеждаемся, что вес орбиты группы $E_2^{S_p^{[2]}}$ равен числу дуг в соответствующем орграфе. Это доказывает равенство (5.1.4).

Теперь нашей целью является вывод формулы (5.1.5) для циклового индекса $Z(S_p^{[2]})$, но сначала мы проиллюстрируем соответствующий прием для случая $p=4$, чтобы сделать ясным вывод более общего циклового индекса. Каждая из подстановок группы S_4 индуцирует некоторую подстановку из редуцированной упорядоченной парной группы $S_4^{[2]}$. В табл. 5.1.1 приведены слагаемые циклового индекса группы $S_4^{[2]}$, индуцированные соответствующими слагаемыми из $Z(S_4)$.

Таблица 5.1.1

Слагаемое из $Z(S_4)$	Индукцированное слагаемое из $Z(S_4)^{[2]}$
s_1^4	s_1^{12}
$s_1^2 s_2$	$s_1^2 s_2^5$
$s_1 s_3$	s_3^4
s_2^2	s_2^6
s_4	s_4^3

Одно из этих слагаемых будет сейчас проиллюстрировано. На рис. 5.1.1 упорядоченные пары указываются для краткости следующим образом: $(1,2) = 12$ и т. д.

Собирая все слагаемые, получаем

$$Z(S_4^{[2]}) = \frac{1}{24} (s_1^{12} + 6s_1^2 s_2^5 + 8s_3^4 + 3s_2^6 + 6s_4^3), \quad (5.1.7)$$

а поэтому

$$Z(S_4^{[2]}, 1+x) = d_4(x) = 1 + x + 5x^2 + 13x^3 + 27x^4 + 38x^5 + 48x^6 + 38x^7 + 27x^8 + 13x^9 + 5x^{10} + x^{11} + x^{12}. \quad (5.1.8)$$

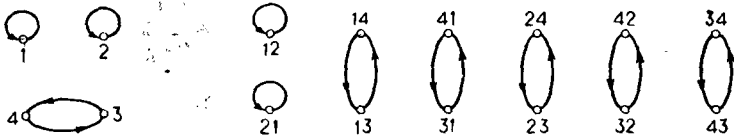


Рис. 5.1.1 Подстановка (1) (2) (34) и индуцируемая ею подстановка из $S_4^{[2]}$.

Мы указываем соответствие между слагаемыми цикловых индексов групп S_p и $S_p^{[2]}$, используя следующую запись (для определенности положили $p = 4$):

$$s_1^4 \rightarrow s_1^{12}, \quad s_1^2 s_2 \rightarrow s_1^2 s_2^5$$

и т. д. Чтобы получить выражение для $Z(S_p^{[2]})$, нам нужно найти недостающий член в правой части соотношения

$$s_1^i s_2^j \dots s_p^l \rightarrow ? \quad (5.1.9)$$

Точно так же, как при выводе выражения для $Z(S_p^{(2)})$, в случае, когда рассматривается более чем один цикл в одной и той же

подстановке α из S_p , существуют два различных вклада в соответствующее слагаемое из $Z(S_p^{[2]})$. Первый вклад вносится такими парами элементов из X , в которых оба элемента принадлежат одному и тому же циклу подстановки α ; второй вклад дают пары элементов, лежащих в двух различных циклах подстановки α (каждый элемент принадлежит «своему» циклу).

Для нахождения первого из этих вкладов рассмотрим цикл z_k длины k , содержащийся в подстановке α . В множестве $X^{[2]}$ существует $k(k-1)$ пар, составленных из элементов, принадлежащих циклу z_k . Эти пары переставляются подстановкой α^r в циклах, длина которых равна k . Следовательно, подстановка α^r переставляет их в $k-1$ циклах и длина каждого из этих циклов равна k . Таким образом, если существует j_k циклов длины k , то пары элементов, лежащих в «общих» циклах, дают вклад

$$s_k^{j_k} \rightarrow s_k^{(k-1)j_k}. \quad (5.1.10)$$

Далее рассмотрим два произвольных цикла подстановки α , скажем z_r и z_t длины r и t соответственно. В множестве $X^{[2]}$ существует $2rt$ пар (i, j) , в которых i переставляется циклом z_r , а j — циклом z_t . Эти пары переставляются подстановкой α^r в циклах, длина которых равна $[r, t]$. Следовательно, подстановка α^r переставляет их в $2(r, t)$ циклах и длина каждого из этих циклов равна $[r, t]$. Таким образом, вклад, вносимый парами различных циклов, длина одного из которых равна r , а другого $t \neq r$, описывается следующим соотношением:

$$s_r^j s_t^i \rightarrow s_{[r, t]}^{2(r, t) j r i t}. \quad (5.1.11)$$

Наконец, вклад, вносимый парами циклов, имеющими одинаковую длину k , будет таким:

$$s_k^{j_k} \rightarrow s_k^{2k \binom{j_k}{2}}. \quad (5.1.12)$$

Теперь правая часть соотношения (5.1.9), а следовательно и правая часть формулы (5.1.5), получается путем перемножения правых частей выражений (5.1.10), (5.1.11) и (5.1.12) по всем подходящим индексам. ■

Формулы из доказанной теоремы были использованы для подсчета числа d_p орграфов порядка $p \leq 8$ (см. приложение I и табл. 5.1.2). Эти результаты согласуются с теми, которые приведены в статье Обершельна [1] и которые были найдены с помощью тех же самых формул.

Петли в орграфах не допускаются, ибо орграфы определяются как иррефлексивные отношения. Для подсчета числа p -вершинных отношений, которые могут содержать петли, нам необходимо

расширить множество объектов группы $S_p^{[2]}$ путем введения *всех* упорядоченных пар из множества $X \times X$. Получаемая при этом группа подстановок называется *упорядоченной парной группой* группы S_p и обозначается через S_p^2 . Ее цикловой индекс получается видоизменением формулы (5.1.5) для $Z(S_p^{[2]})$: нужно умно-

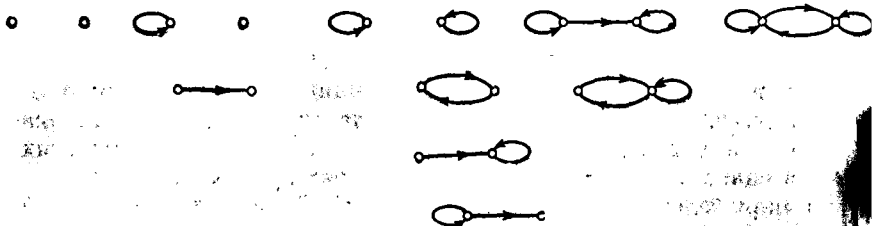


Рис. 5.1.2 Отношения на множестве из двух элементов.

жить каждое слагаемое на Πs_k^k . Тогда многочлен $r_p(x)$, перечисляющий отношения, дается формулой

$$r_p(x) = Z(S_p^2, 1+x). \quad (5.1.13)$$

Из этого уравнения при $p=2$ находим

$$r_2(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 2x^3 + x^4. \quad (5.1.14)$$

Правильность коэффициентов многочлена $r_2(x)$ проверяется по рис. 5.1.2.

Орграф называется *связным*, если, игнорируя все ориентации на его дугах, получаем связный мультиграф. В книге Харари, Нормана и Картрайта [1] такие орграфы названы «слабо связными». Связные орграфы перечисляются «на языке» всех орграфов с помощью метода, идентичного методу, основанному на формуле

Таблица 5.1.2

Связные орграфы

p	d_p	ra_p	c_p
1	1	1	1
2	3	5	2
3	16	40	13
4	218	801	199
5	9 608	46 821	9 364
6	1 540 944	9 185 102	1 530 843
7	882 033 440	6 163 297 995	880 471 142
8	1 793 359 192 848	14 339 791 693 249	1 792 473 955 306

(4.2.3) и использованному при перечислении связных графов. Мы завершим наши рассуждения замечанием, что если в формуле (4.2.6) заменить g_p числом d_p орграфов порядка p , то уравнение (4.2.9), включающее параметры a_p , можно использовать для подсчета числа связных орграфов. Результаты такого подсчета при $p \leq 8$ приводятся в табл. 5.1.2.

5.2. ТУРНИРЫ

Число помеченных турниров (см. рис. 1.1.6) равно числу помеченных графов; для непомеченных турниров это совсем не так. Все турниры с 2, 3 и 4 вершинами показаны на рис. 5.2.1. Первый на этом рисунке турнир с тремя вершинами называется *транзитивной тройкой*,

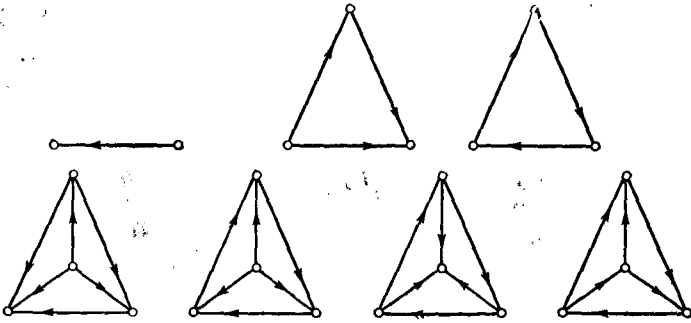


Рис. 5.2.1 Наименьшие турниры.

тивной тройкой, а второй — циклической тройкой. Для конкретного всестороннего ознакомления с тематикой турниров можно обратиться к превосходной монографии Муна [2].

Перечисление турниров осуществлено Дэвисом [1] (см. также Мун [2], стр. 84).

Теорема. Число $T(p)$ турниров порядка p дается формулой

$$T(p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)}^* \frac{p!}{\prod k! j_k!} 2^{t(j)}, \quad (5.2.1)$$

где звездочка у знака суммы указывает на то, что суммирование ведется только по таким разбиениям (j) , у которых $j_k = 0$ при всех четных k и где

$$t(j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m, n=1}^p (m, n) j_m j_n - \sum_{k=1}^p j_k \right). \quad (5.2.2)$$

Доказательство. Сначала убедимся в правильности формулы (5.2.1). Как и в доказательстве теоремы, связанной с формулой

(5.1.4), замечаем, что орбиты степенной группы $E_2^{S_p^{[2]}}$ соответствуют орграфам порядка p . Ограничивая эту группу на множество F функций f , представляющих турниры, а именно тех функций f , для которых $f(i, j) \neq f(j, i)$, можем применить вариант (2.3.9) леммы Бернсайда. Тогда $T(p)$ может быть выражено через число функций из множества F , которые неподвижны относительно подстановок, принадлежащих той же самой степенной группе. Таким образом, для каждой подстановки α из группы S_p мы ищем число функций f из множества F , таких, что

$$f(i, j) = f(\alpha i, \alpha j) \quad (5.2.3)$$

для всех пар $(i, j) \in X^{[2]}$. Функции, удовлетворяющие соотношению (5.2.3), являются как раз теми функциями, которые неподвижны относительно подстановки, принадлежащей степенной группе и индуцируемой подстановкой α . Допуская незначительную вольность речи, будем говорить, что эти функции являются «неподвижными относительно α ». Следовательно, если циклы подстановки α определяют разбиение (j) числа p , то нам надо показать, что число функций из F , неподвижных относительно α , равно $2^{t(i)}$.

Пусть снова α' — подстановка группы $S_p^{[2]}$, индуцируемая подстановкой α . Определим *обращение* произвольного данного цикла z' , содержащегося в некотором разложении подстановки α' на непересекающиеся циклы: обращением цикла z' является цикл, который переставляет все упорядоченные пары (i, j) , такие, что пары (j, i) переставляются циклом z' . Цикл z' подстановки α' называется *самообратным*, если пара (i, j) переставляется циклом z' всякий раз, когда переставляется пара (j, i) .

Чтобы найти вклад, вносимый в $t(j)$ подстановкой α , когда циклы подстановки α рассматриваются индивидуально, положим, что f представляет турнир, неподвижный относительно α , так что выполняется соотношение (5.2.3). Следовательно, функция f на циклах подстановки α' постоянна.

Теперь мы дадим обоснование «использованию звездочки» у знака суммы в формуле (5.2.1). Если $z_k = (123 \dots k)$ — произвольный четный цикл подстановки α , то подстановка α' имеет самообратный цикл z' , а именно цикл, действующий и на пару $(1, (k/2) + 1)$, и на пару $((k/2) + 1, 1)$. Но если f постоянна на этом самообратном цикле z' , то f не является турниром. Итак, не существует турниров, неподвижных относительно α , если α содержит некоторый четный цикл. Формула (5.2.1) доказана.

Для завершения доказательства теоремы осталось получить формулу (5.2.2). Если z_k — нечетный цикл, то он индуцирует $k - 1$ циклов на множестве пар, содержащихся в $X^{[2]}$. Эти $k - 1$ циклов образуют $(k - 1)/2$ пар взаимно обратных циклов. Напом-

ним, что произвольный турнир f , неподвижный относительно α , является константой на циклах подстановки α' . Следовательно, в каждой из $(k - 1)/2$ пар взаимно обратных циклов должны быть выбраны только элементы одного цикла, чтобы получился турнир, неподвижный относительно α . Но это значит, что вклад в $t(j)$, вносимый всеми нечетными циклами подстановки α , равен $\sum j_k (k - 1)/2$, где суммирование ведется по всем нечетным k .

Теперь рассмотрим два цикла z_m и z_n подстановки α и такие пары из множества $X^{[2]}$, которые имеют по одной вершине в каждом из этих двух циклов. При вычислении циклового индекса $Z(S_p^{[2]})$ мы видели, что два таких цикла индуцируют $2(m, n)$ циклов, состоящих из объектов (упорядоченных пар) множества $X^{[2]}$. Эти последние циклы образуют (m, n) пар взаимно обратных циклов. В турнир, неподвижный относительно α , должны быть включены только такие объекты из $X^{[2]}$, которые порождают в точности один цикл в каждой из (m, n) пар взаимно обратных циклов. Значит, вклад в $t(j)$, вносимый всеми парами циклов z_m и z_n при $m \neq n$, равен $\sum_{m < n} j_m j_n (m, n)$. Вклад, вносимый парами

циклов, имеющих одну и ту же длину, равен $\sum k \binom{j_k}{2}$. Суммируя эти три вклада, получаем формулу (5.2.2) для $t(j)$. ■

Значения для $T(p)$ при $p \leq 12$, взятые из книги Муна [2], стр. 87, приведены в табл. 5.2.1.

Таблица 5.2.1

Число турниров

p	T_p
1	1
2	1
3	2
4	4
5	12
6	56
7	456
8	6 880
9	191 536
10	9 733 056
11	903 753 248
12	154 108 311 168

Орграф называется *сильно связным*, или *сильным*, если любая пара его вершин взаимно достижима с использованием ориен-

тированных цепей¹. Хорошо известно (см. Харари, Норман и Картрайт [1], стр. 306), что турнир является сильным тогда и только тогда, когда он гамильтонов, т. е. содержит остовный ориентированный цикл. Приведем (см. рис. 5.2.2.) все сильные турниры с пятью вершинами, используя при их изображении искусный прием, предложенный Муном [2], стр. 92: всякий раз,

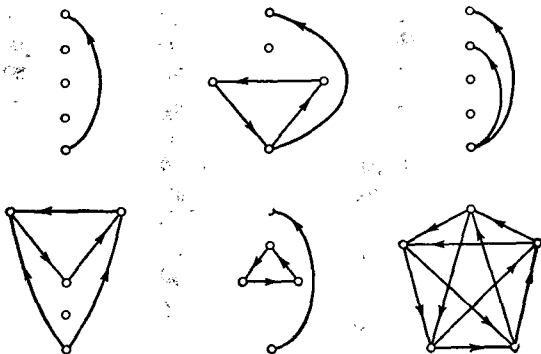


Рис. 5.2.2 Сильные турниры пятого порядка.

когда дуга на диаграмме отсутствует, это означает, что дуга ориентирована в соответствии с направлением силы тяжести — из верхней вершины в нижнюю.

Число сильных турниров просто выражается через число всех турниров с помощью производящих функций (см. Мун [2], стр. 88). Для доказательства этого факта требуется ввести несколько определений. *Сильная компонента* орграфа D представляет собой максимальный сильный подграф. *Конденсация* D^* орграфа D имеет в качестве своих вершин сильные компоненты орграфа D , а дуги индуцируются дугами² орграфа D . Как отмечено в книге Харари, Нормана и Картрайта [1], стр. 298, конденсация любого турнира является транзитивным турниром, т. е. индуцирует на множестве своих вершин линейный порядок.

Теорема. Пусть $T(x)$ и $S(x)$ — производящие функции для турниров и сильных турниров соответственно. Тогда

$$S(x) = \frac{T(x)}{1+T(x)}. \quad (5.2.4)$$

¹ Другими словами, всякую вершину орграфа можно соединить выходящей из нее ориентированной цепью с любой другой вершиной орграфа. — Прим. перев.

² Другими словами, дуги, соединяющие сильные компоненты орграфа, «полностью переносятся» в конденсацию, — Прим. перев.

Доказательство. Чтобы получить $S(x)$, обозначим через $T_n(x)$ производящую функцию для турниров, имеющих в точности n сильных компонент. Тогда, в силу приведенных выше рассмотрений, $T_n(x) = S^n(x)$ и $T(x) = \sum T_n(x)$, что доказывает соотношение (5.2.4). ■

5.3. ОРИЕНТАЦИИ ГРАФА

Ориентация графа G представляет собой приписывание стрелок всем ребрам графа G , т. е. упорядочение всех пар его смежных вершин. *Направленным графом* называется орграф, в котором никакая пара вершин не соединена симметричной парой дуг. Таким образом, всякая ориентация графа порождает направленный граф. Каждый граф G обладает инвариантом $o(G)$, представляющим собой число различных ориентаций графа G . Легко проверить, что $o(C_3) = 2$, $o(C_4) = o(C_5) = 4$ и $o(C_6) = 9$.

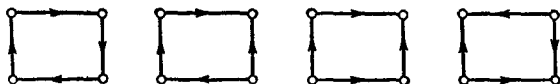


Рис. 5.3.1 Ориентации цикла четвертого порядка.

Нашей целью здесь является развитие перечислительного метода (см. Харари и Палмер [2]) для определения числа $o(G)$ ориентаций данного графа G . Чтобы достичь этой цели, нам нужно только обобщить некоторые рассуждения из предыдущего параграфа. Там мы нашли число $T(p)$ турниров порядка p , которое является просто $o(K_p)$ — числом ориентаций полного графа.

Как и в случае графа K_p , формула для $o(G)$ может быть получена путем применения леммы Бернсайда. Получающееся при этом выражение можно упростить, используя специальный цикловой индекс, зависящий от переменных двух типов. Положим, как обычно, что группа $\Gamma(G)$ действует на множестве $X = \{1, 2, \dots, p\}$. Удобно определить *орграф* $D(G)$, *соответствующий графу* G . Вершины орграфа $D(G)$ совпадают с вершинами графа G , а множество U дуг орграфа $D(G)$ состоит из всех упорядоченных пар (i, j) , таких, что вершины i и j смежны в графе G . Таким образом, ориентация графа G получается путем выбора в точности одной дуги из каждой пары симметричных дуг, принадлежащих орграфу $D(G)$.

Редуцированная упорядоченная парная группа $\Gamma(G)^{[2]}$ действует на множестве *всех* упорядоченных пар (i, j) , у которых i и j принадлежат X , $i \neq j$ и вершины i и j являются смежными в графе G . Нам, таким образом, требуется ограничение группы

подстановок $\Gamma(G)^{[2]}$, именно группа $\Gamma(G)^{[2]}|U$, которая действует только на дугах из U . Цикловой индекс этой группы обозначим через $Z(\Gamma(G)^{[2]}|U)$. Чтобы различать между собой разные виды встречающихся здесь циклов, удобно использовать переменные t_k для самообратных циклов и переменные s_k для пар взаимно обратных циклов. Таким образом, это различие проявляется в самом определении многочлена $Z(\Gamma(G)^{[2]}|U; s_k, t_k)$. Заметим, что, как и в случае турниров, переменные t_k возникают только из четных циклов длины k , содержащихся в автоморфизмах графа G . Приводимая ниже теорема следует из ограниченной формы леммы Бернсайда (см. соотношение (2.3.9)).

Теорема. Число ориентаций графа G дается формулой

$$o(G) = Z(\Gamma(G)^{[2]}|U; \sqrt{2}, 0). \quad (5.3.1)$$

Заметим, что радикал $\sqrt{2}$ после подстановки исчезает, ибо взаимно обратные циклы встречаются только попарно. Кроме того, довольно странный перечисляющий ряд для фигур, целиком состоящий из 0, служит вполне определенной цели: он указывает на отсутствие симметричных пар дуг.

Мы можем только в принципе вычислить число $o(G)$ для произвольного графа G , потому что цикловой индекс, указанный в формуле (5.3.1), найти непросто. Однако, если $G = C_p$ — цикл порядка p , то можно получить точную формулу для соответствующего циклового индекса. Так как $\Gamma(C_p) = \Gamma_1(C_p) = D_p$ — диэдральная группа, то мы можем видоизменить формулу (2.2.11) для $Z(D_p)$, чтобы получить выражение для $Z(\Gamma(C_p)^{[2]}|U; s_k, t_k)$. Учитывая тот факт, что переменные t_k вносятся только обращениями, имеем

$$Z(\Gamma(C_p)^{[2]}|U; s_k, t_k) = \frac{1}{2p} \sum_{d|p} \varphi(d) s_d^{2p/d} + \begin{cases} \frac{1}{2} s_2^{p-1} t_2, & \text{если } p \text{ — нечетное,} \\ \frac{1}{4} (s_2^p + s_2^{p-2} t_2^2), & \text{если } p \text{ — четное.} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Следовательно, мы можем написать

$$o(C_p) = \frac{1}{2p} \sum_{d|p} \varphi(d) 2^{2p/d} + \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ — нечетное,} \\ 2^{(p-4)/2}, & \text{если } p \text{ — четное.} \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Наш подход можно также приспособить к перечислению направленных графов (см. Харари [6]), но этот результат будет представлен как частный случай перечисления смешанных графов, которое рассматривается в следующем параграфе.

5.4. СМЕШАННЫЕ ГРАФЫ

Смешанный граф может содержать как неориентированные ребра, так и ориентированные. Например, граф, изображенный на рис. 5.4.1, является смешанным графом с двумя неориентированными и тремя ориентированными ребрами. Неориентированный

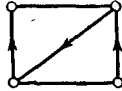


Рис. 5.4.1 Смешанный граф четвертого порядка.

граф можно трактовать как смешанный граф, не имеющий ориентированных ребер. Далее орграф можно рассматривать как смешанный граф, заменяя для этого каждую симметричную пару ориентированных ребер неориентированным ребром.

Нашей целью является получение формулы, перечисляющей смешанные графы с p вершинами в соответствии с числом неориентированных и ориентированных ребер в них (см. Харари и Палмер [7]).

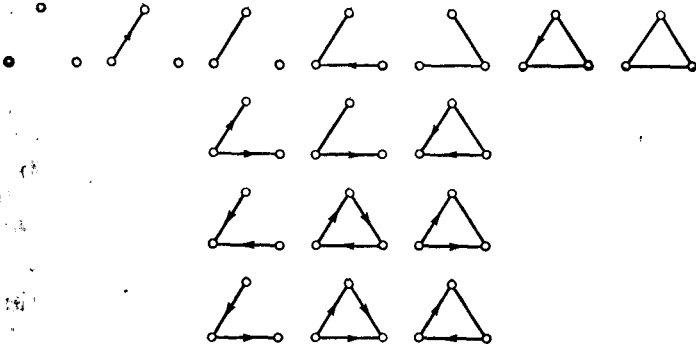


Рис. 5.4.2 16 смешанных графов третьего порядка.

Пусть m_{pqr} — число смешанных графов с p вершинами, q ориентированными ребрами и r неориентированными ребрами. Тогда многочлен $m_p(x, y)$, перечисляющий смешанные графы с p вершинами в соответствии как с числом неориентированных, так и с числом ориентированных ребер, определяется формулой

$$m_p(x, y) = \sum_{q, r} m_{pqr} x^q y^r, \quad (5.4.1)$$

где $q + r \leq \binom{p}{2}$. Из рис. 5.4.2 следует, что при $p=3$ эта формула имеет вид

$$m_3(x, y) = 1 + x + 3x^2 + 2x^3 + y + 2xy + 3x^2y + y^2 + xy^2 + y^3. \quad (5.4.2)$$

Чтобы вывести формулу для $m_p(x, y)$, мы воспользуемся слабо модифицированной формой теоремы Пойа. В этой модификации оба вида перечисляющих рядов для фигур применяются совместно со специальным цикловым индексом, зависящим от переменных двух типов и рассмотренным в предыдущем параграфе. Используя обозначения, введенные в § 5.3, получаем равенство

$$\Gamma(K_p)^{[21]} | U = S_p^{[2]}. \quad (5.4.3)$$

Таким образом, $Z(S_p^{[21]}; s_k, t_k)$ является цикловым индексом редуцированной упорядоченной парной группы $S_p^{[21]}$, в котором переменные s_k используются для пар взаимно обратных циклов, а переменные t_k — для самообратных циклов. Мы увидим, что, подставляя в это выражение вместо каждой переменной s_k функцию $(1 + 2x^k + y^k)^{1/2}$, а вместо каждой переменной t_k функцию $1 + y^{k/2}$, получим многочлен $m_p(x, y)$.

Теорема. *Перечисляющий многочлен для смешанных графов порядка p дается соотношением*

$$m_p(x, y) = Z(S_p^{[21]}; (1 + 2x + y)^{1/2}, 1 + y^{1/2}), \quad (5.4.4)$$

где

$$Z(S_p^{[21]}; s_k, t_k) = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} \frac{p!}{\prod k^{i_k} i_k!} \prod_{k \text{ нечетное}} s_k^{(k-1) i_k} \times \\ \times \prod_{k \text{ четное}} (s_k^{k-2} t_k)^{i_k} \prod_k s_k^{2k} \binom{i_k}{2} \prod_{r < w} s_{[r, w]}^{2(r, w) i_{[r, w]}}. \quad (5.4.5)$$

В качестве примера приведем некоторые детали для случая $p=3$. Сначала получаем формулу для циклового индекса:

$$Z(S_3^{[21]}; s_k, t_k) = (1/3!) (s_1^3 + 3s_2^2 t_2 + 2s_3^2). \quad (5.4.6)$$

Подставляя перечисляющие ряды для фигур: $(1 + 2x + y)^{1/2}$ и $1 + y^{1/2}$, приходим к выражению

$$m_3(x, y) = \frac{1}{6} ((1 + 2x + y)^3 + 3(1 + y)(1 + 2x^2 + y^2) + 2(1 + 2x^3 + y^3)), \quad (5.4.7)$$

которое полностью согласуется с формулой (5.4.2), а соответствующие ему смешанные графы показаны на рис. 5.4.2.

Соотношение (5.4.5) не требует комментариев, кроме замечания о том, что оно получается из формулы (5.1.5) с помощью ее модификации в соответствии с той частью доказательства формулы

(5.2.1), где показывается, что каждый четный цикл подстановки из S_p индуцирует самообратный цикл.

Здесь представлен краткий набросок доказательства формулы

(5.4.4). Как обычно, степенная группа $E_2^{S^{121}}$ действует на функциях из множества $Y^{X^{121}}$. Так как каждая такая функция f представляет оргграф, скажем, с q ориентированными ребрами и r симметричными парами дуг, то f можно также трактовать как смешанный граф с q ориентированными и r неориентированными ребрами. Очевидно, что любые две функции из множества $Y^{X^{121}}$ принадлежат одной и той же орбите степенной группы тогда и только тогда, когда соответствующие им смешанные графы изоморфны. Наконец, функциям обычным образом приписываются веса и, применяя взвешенный вариант леммы Бернсайда (см. формулу (2.3.10)), получают соотношение (5.4.4).

Идея использования выражения $1 + 2x + y$ состоит в следующем: слагаемое 1 соответствует парам несмежных вершин, в то время как $2x$ указывает на две возможные ориентации, а y — на неориентированное ребро. Радикал в выражении $(1 + 2x + y)^{1/2}$ исчезает в $m_p(x, y)$, потому что каждая переменная s_k встречается только в четной степени, ибо взаимно обратные циклы обязательно появляются парами. Аналогично двучлен $1 + y$ отражает, как обычно, отсутствие ребра и наличие неориентированного ребра (ориентированные ребра просто запрещены для самообратных циклов). Радикал в $1 + y^{1/2}$ также исчезает в $m_p(x, y)$, ибо, как показано в формуле (5.4.5), в единственном ее произведении, содержащем t_k , индексы k — четные. Это в свою очередь справедливо потому, что каждый самообратный цикл имеет четную длину. ■

Перечисляющие многочлены $g_p(x)$ и $d_p(x)$ для графов и оргграфов были уже выведены раньше. Многочлен $o_p(x)$ для направленных графов найден Харари [6]. Заметим, что каждый из этих многочленов легко получается из $m_p(x, y)$, который является, таким образом, одновременным обобщением всех трех указанных перечислительных формул:

$$d_p(x) = m_p(x, x^2), \quad o_p(x) = m_p(x, 0), \quad g_p(y) = m_p(0, y). \quad (5.4.8)$$

Для $p=3$ находим, используя соотношение (5.4.7):

$$\begin{aligned} d_3(x) &= m_3(x, x^2) = 1 + x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 + x^5 + x^6, \\ o_3(x) &= m_3(x, 0) = 1 + x + 3x^2 + 2x^3, \\ g_3(y) &= m_3(0, y) = 1 + y + y^2 + y^3. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Правильность этих выражений легко установить с помощью рис. 5.4.2.

Полный оргграф имеет для каждой пары вершин либо ориентированное ребро, либо симметричную пару ребер, соединяющих эти вершины. Оргграф на рис. 5.4.3 является полным оргграфом с пятью вершинами, тремя парами симметричных дуг и семью ориентированными ребрами.

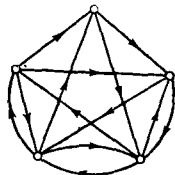


Рис. 5.4.3 Полный оргграф пятого порядка.

Пусть c_{pqr} — число полных оргграфов с p вершинами, имеющих в точности q ориентированных ребер и r симметричных пар. Многочлен $c_p(x, y)$, который перечисляет полные оргграфы с p вершинами

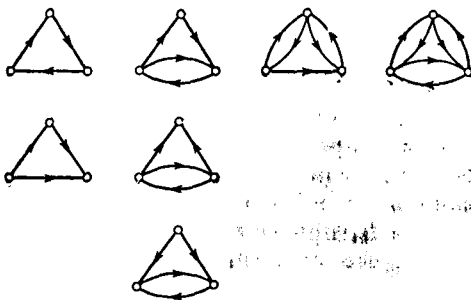


Рис. 5.4.4 Полные оргграфы третьего порядка.

в соответствии и с числом ориентированных ребер, и с числом симметричных пар, определяется формулой

$$c_p(x, y) = \sum c_{pqr} x^q y^r, \quad (5.4.10)$$

где $q + r = \binom{p}{2}$.

Из рис. 5.4.4 следует, что при $p = 3$ формула имеет вид $c_3(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3$.

Перечислительная формула для $c_p(x, y)$ легко получается путем модификации формулы для смешанных графов. Число 1 в каждом из двух перечисляющих рядов для фигур $(1 + 2x + y)^{1/2}$ и $1 + y^{1/2}$ — отражает возможность отсутствия ребра, соединяющего пару вершин. Но в полном оргграфе всегда существует либо ориентированное ребро, либо симметричная пара,

соединяющие пару вершин. Поэтому подходящими перечисляющими рядами для фигур являются ряды $(2x + y)^{1/2}$ и $y^{1/2}$.

Следствие. Перечисляющий многочлен для полных орграфов с p вершинами дается формулой

$$c_p(x, y) = Z(S_p^{[2]}; (2x + y)^{1/2}, y^{1/2}). \quad (5.4.11)$$

Из этого следствия немедленно выводим, что число турниров с p вершинами равно

$$T(p) = c_p(1, 0). \quad (5.4.12)$$

Используя (5.4.12) и (5.4.5), с помощью несложных преобразований получаем в явной форме формулы (5.2.1) и (5.2.2).

Общее число c_p полных орграфов, если не фиксировать число ориентированных ребер и симметричных пар, есть

$$c_p = c_p(1, 1). \quad (5.4.13)$$

Например, рис. 5.4.4 показывает, что $c_3 = 7$.

Используя формулу (5.4.5), получаем следующее выражение для c_p .

Теорема. Число полных орграфов порядка p есть

$$c_p = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod k^{j_k} j_k!} 3^{a(j)}, \quad (5.4.14)$$

где

$$a(j) = \sum_{k=1}^p \left(\left[\frac{k-1}{2} \right] j_k + k \binom{j_k}{2} \right) + \sum_{r < s} (r, s) j_r j_s. \quad (5.4.15)$$

Первые пять значений величины c_p таковы:

p	1	2	3	4	5
c_p	1	2	7	42	582

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Число полных орграфов порядка p равно числу направленных графов порядка p .

5.2. Орграфы, у которых полустепень исхода любой вершины равна 2.

(К. П. Лозе)

5.3. Вершинно-симметрические орграфы порядка p , где p — простое число. (Указание: используйте метод Тёрнера [1] для графов.)

5.4. Число турниров порядка $p \geq 5$, в которых допускается точно по одному гамильтонову циклу, равно

$$1 + \sum_{k=1}^{p-3} \sum_{n=0}^m 2^{p-k-n-4} \left[2 \binom{p-k-3}{n} \binom{k-1}{n+1} + \binom{p-k-4}{n} \binom{k-1}{n} \right],$$

где $m = \min(k-1, p-k-3)$.

(Дуглас [1])

5.5. Написать в явном виде формулу для циклового индекса $Z(S_p^2)$ и использовать ее для получения многочлена, перечисляющего 4-местные отношения.

Удачные обозначения обладают
уточненностью и будят мысль, порой
делая это, кажется, почти так же, как
искусный учитель.

Бертран Рассел¹

Глава 6 ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ГРУППЫ

Если $c(x)$ — ряд, перечисляющий элементы множества Y , и A — группа подстановок с множеством объектов X , то, как мы видели в гл. 2, теорема Пойа дает метод для выражения ряда $C(x)$, перечисляющего взвешенные орбиты в множестве Y^X степенной группы E^A , в терминах $Z(A)$ и $c(x)$. Существует обширный класс задач, для решения которых весьма важно уметь перечислять орбиты в множестве Y^X степенной группы B^A , когда группа B не является единичной. Метод, позволяющий достичь этого обобщения теоремы Пойа, был впервые найден де Брёйном [2]. В настоящей главе мы обсудим другой, более естественный метод (см. Харари и Палмер [4]), который упрощает вычисление посредством устранения ненужных дифференциальных операторов и путем явного описания группы подстановок, действующей на множестве функций (именно, степенной группы). По этой причине упомянутый результат де Брёйна мы в дальнейшем предпочитаем называть теоремой перечисления степенной группы. В качестве приложений этой теоремы приводятся решения задач перечисления самополнительных графов и орграфов, графов с раскрашенными ребрами, конечных автоматов и самообратных орграфов.

6.1. ТЕОРЕМА ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ГРУППЫ

Рассмотрим степенную группу B^A с множеством объектов Y^X , где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Начнем с нахождения формулы для числа орбит группы B^A . Чтобы получить желаемый результат, мы, используя только определение циклового индекса, напомним сначала следующую формулу:

$$Z(B^A) = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \sum_{\gamma \in B^A} \prod_{k=1}^{n^m} s_k^{j_k(\gamma)}. \quad (6.1.1)$$

¹ Рассел, Бертран (1872—1970) — английский философ и математик.

Для каждой подстановки $\gamma = (\alpha; \beta)$ из B^A выражение $j_k(\gamma)$ через числа $j_k(\alpha)$ и $j_k(\beta)$ дается двумя нижеследующими соотношениями. Сперва покажем, что

$$j_1(\alpha; \beta) = \prod_{k=1}^m \left(\sum_{s|k} s j_s(\beta) \right)^{j_k(\alpha)}, \quad (6.1.2)$$

где $\left(\sum_{s|k} s j_s(\beta) \right)^{j_k(\alpha)} = 1$ всякий раз, когда $j_k(\alpha) = 0$.

Затем, при $t > 1$ мы воспользуемся обращением Мёбиуса и получим формулу

$$j_t(\alpha; \beta) = (1/t) \sum_{s|t} \mu(t/s) j_1(\alpha^s; \beta^s). \quad (6.1.3)$$

Для обоснования соотношений (6.1.2) и (6.1.3) рассмотрим произвольную подстановку $\gamma = (\alpha; \beta)$ из степенной группы B^A . Пусть z_k — цикл длины k в разложении подстановки α на непересекающиеся циклы. Пусть S — подмножество тех k элементов из X , которые переставляются циклом z_k . Тогда $(z_k; \beta)$ есть подстановка, действующая на множестве Y^S . Определим $c_k(\beta)$ как число функций из Y^S , неподвижных относительно подстановки $(z_k; \beta)$. Тогда ясно, что

$$j_1(\alpha; \beta) = \prod_{k=1}^m (c_k(\beta))^{j_k(\alpha)}, \quad (6.1.4)$$

где $(c_k(\beta))^{j_k(\alpha)} = 1$ всякий раз, когда $j_k(\alpha) = 0$.

Все значения функции f , неподвижной относительно подстановки $(z_k; \beta)$, должны принадлежать множеству таких элементов, которые переставляются одним отдельным циклом z_s длины s , содержащимся в разложении подстановки β на непересекающиеся циклы. Положим для такой функции, что $f(x) = y$ при некотором x из z_k и некотором y из z_s . Тогда $(z_k; \beta)^s f(x) = \beta^s f(z_k^s x) = f(z_k^s x)$. Но так как f неподвижна относительно $(z_k; \beta)$, то она неподвижна и относительно $(z_k; \beta)^s$. Следовательно, $(z_k; \beta)^s f(x) = f(x)$ и, значит, $y = f(z_k^s x)$. Аналогично, для всех i имеем $y = f(z_k^{is} x)$. Далее, $f(z_k x) = \beta^{-1} y$, а поэтому уравнения, связывающие между собой x и y , справедливы также для $z_k x$ и $\beta^{-1} y$. Теперь мы сосредоточим свое внимание на цикле z_s , содержащем элемент y , и рассмотрим часть $(z_k; z_s)$ подстановки $(z_k; \beta)$. Дальнейшее использование функции f предполагает некоторую совместимость длин циклов z_k и z_s , что, как легко видеть, сводится к выполнимости соотношения: $s|k$. Так как y — произвольный элемент цикла z_s , то для каждого цикла z_s существуют в точности s таких функций. Таким образом,

$c_k(\beta) = \sum_{s|k} s j_s(\beta)$ и, подставляя это выражение в формулу (6.1.4), получаем (6.1.2).

Заметим теперь, что если вклад подстановки α в цикловой индекс $Z(A)$ равен $\prod_{k=1}^m s_k^{j_k(\alpha)}$, то вклад подстановки α^t есть

$$\prod_{k=1}^m s_{k/(k,t)}^{(k,t) j_k(\alpha)}. \quad (6.1.5)$$

Так как $(\alpha; \beta)^k = (\alpha^k; \beta^k)$, то, используя (6.1.5), получаем равенство

$$j_1(\alpha^t; \beta^t) = \sum (k, t) j_k(\alpha; \beta), \quad (6.1.6)$$

где суммирование ведется по всем k , таким, что $k = (k, t)$, т. е. по всем делителям k числа t . Таким образом,

$$j_1(\alpha^t; \beta^t) = \sum_{k|t} k j_k(\alpha; \beta) \quad (6.1.7)$$

и обращение Мёбиуса дает соотношение (6.1.3).

Нижеследующая теорема используется так часто, что удобно называть ее короче: ТПСГ (по начальным буквам слов, входящих в название теоремы). Эта теорема дает возможность находить число орбит степенной группы B^A , если даны цикловые индексы $Z(A)$ и $Z(B)$. Ее доказательство можно получить, либо применяя лемму Бернсайда в форме (2.3.3) к формуле (6.1.2), либо, как у Харари и Палмера [4], используя $Z(B^A)$ совместно с теоремой Пойа в форме (2.4.6). Мы не будем вдаваться здесь в детали, ибо приводимая сейчас теорема представляет собой константную форму ТПСГ, а ее обобщение — ТПСГ в форме степенного ряда — дается в дальнейшем.

Теорема (теорема перечисления степенной группы, константная форма). Число орбит, состоящих из функций множества Y^X и определяемых степенной группой B^A , дается соотношением

$$N(B^A) = |B|^{-1} \sum_{\beta \in B} Z(A; c_1(\beta), \dots, c_m(\beta)), \quad (6.1.8)$$

где

$$c_k(\beta) = \sum_{s|k} s j_s(\beta). \quad (6.1.9)$$

Мы хотим подчеркнуть, что константная форма ТПСГ равносильна применению леммы Бернсайда к степенной группе.

Для иллюстрации этой теоремы положим в (6.1.8) $A = D_4$ — диэдральная группа четвертой степени, и $B = S_2$. Получающийся

при этом результат можно истолковать разнообразными способами, но использование ожерелий приведет, по-видимому, к наилучшему пониманию. Итак, указанная подстановка групп D_4 и S_2 в (6.1.8) дает число ожерелий, содержащих точно четыре бусинки двух *взаимозаменяемых* цветов. Из (2.4.13) имеем

$$Z(D_4) = \frac{1}{8} (s_1^4 + 3s_2^2 + 2s_1^2s_2 + 2s_4).$$

Если подстановка β из группы S_2 является тождественной, то из (6.1.9) получаем $c_k(\beta) = 2$ при всех k . Если β — транспозиция,

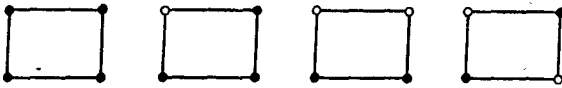


Рис. 6.1.1 Четырехбусинные ожерелья с двумя взаимозаменяемыми цветами,

то $c_k(\beta)$ есть либо 0, либо 2 в соответствии с тем, нечетно или четно k . Используя (6.1.8), имеем

$$N(S_2^{D_4}) = \frac{1}{2} \{Z(D_4; 2, 2, 2, 2) + Z(D_4; 0, 2, 0, 2)\}. \quad (6.1.10)$$

Сразу находим, что $Z(D_4; 2, 2, 2, 2) = 6$, а $Z(D_4; 0, 2, 0, 2) = 2$; следовательно, в силу (6.1.10), число орбит группы $S_2^{D_4}$ равно 4. Это действительно так, ибо существует только одно ожерелье, в котором все четыре бусинки с взаимозаменяемыми цветами имеют одинаковый цвет; существует лишь одно ожерелье, в котором в точности три бусинки имеют один и тот же цвет, и существуют два ожерелья, в которых точно две бусинки имеют одинаковый цвет (см. рис. 6.1.1). Число таких классов ожерелий с n бусинками и m цветами равно просто числу орбит группы $S_m^{D_n}$.

6.2. САМОДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Теперь воспользуемся константной формой ТПСГ для нахождения числа самодополнительных графов с p вершинами. Дополнение графа G , обозначаемое через \bar{G} , имеет те же самые вершины, что и граф G , и две вершины смежны в \bar{G} тогда и только тогда, когда они не являются смежными в G . Граф G называется *самодополнительным*, если G и \bar{G} изоморфны. Напомним (см. Харари [1], стр. 39), что число вершин p в самодополнительном графе G сравнимо по mod 4 либо с 0, либо с 1, так как число ребер в графе G должно быть равно $\frac{1}{2} \binom{p}{2}$ и является целым неотрицательным числом. Кроме тривиального графа, в число трех наи-

меньших самодополнительных графов включаются 4-вершинная простая цепь и 5-вершинный простой цикл.

Рид [6] показал, как можно подсчитать число самодополнительных графов, первым применив теорему де Брёйна [2] к подсчету графов с точностью до их взаимной дополнителности. Чтобы описать метод Рида, будем называть два графа *эквивалентными относительно дополнителности*, если они изоморфны или один из них изоморфен дополнению другого. Выразим теперь эту эквивалентность на языке степенной группы.

Пусть парная группа $S_p^{(2)}$ действует на множестве $X^{(2)}$, состоящем из всех 2-подмножеств множества $X = \{1, 2, \dots, p\}$, и пусть $Y = \{0, 1\}$ будет множеством объектов группы S_2 . Каждая функция f , отображающая $X^{(2)}$ в Y , представляет граф G , у которого множеством вершин является множество X и вершины i и j смежны лишь тогда, когда $f(\{i, j\}) = 1$. Таким образом, элементы 0 и 1 из множества Y используются для указания соответственно на существование или отсутствие ребра в графе. Рассмотрим степенную группу B^A , у которой $A = S_p^{(2)}$ и $B = S_2$. Ясно, что графы, представимые двумя функциями, эквивалентны относительно дополнителности тогда и только тогда, когда эти две функции принадлежат одной и той же орбите рассматриваемой степенной группы B^A . Поэтому если подстановка $(\alpha; (0) (1))$ из этой группы преобразует функцию f в функцию g , то f и g представляют изоморфные графы. А если f преобразуется в g подстановкой $(\alpha; (0, 1))$, то две функции представляют взаимно дополнителные графы. Следовательно, число a_p p -вершинных графов, подсчитываемых с точностью до их взаимной дополнителности, равно числу орбит указанной выше степенной группы. Поэтому мы можем применить константную формулу ТПСГ, полагая $A = S_p^{(2)}$ и $B = S_2$. Рассмотрим две подстановки $(0) (1)$ и (01) из S_2 . Если $\beta = (0) (1)$, то $j_1(\beta) = 2$ и $j_s(\beta) = 0$ при $s > 1$; значит, $c_k(\beta) = 2$ для всех k . Для $\beta = (01)$ имеем $j_2(\beta) = 1$ и $j_s(\beta) = 0$ при $s \neq 2$; следовательно, $c_k(\beta) = 2$ для четных k и $c_k(\beta) = 0$ для нечетных k . Таким образом, в силу формулы (6.1.9), число p -вершинных графов, подсчитываемых с точностью до их взаимной дополнителности, равно

$$a_p = \frac{1}{2} \{Z(S_p^{(2)}; 2, 2, \dots) + Z(S_p^{(2)}; 0, 2, 0, 2, \dots)\}. \quad (6.2.1)$$

Затем Рид заметил, что $2a_p$ есть число p -вершинных графов, если каждый самодополнительный граф считать дважды, а несамодополнительный — только один раз. Отсюда следует, что число самодополнительных графов удовлетворяет соотношению

$$\bar{g}_p = 2a_p - g_p, \quad (6.2.2)$$

где g_p , как и в соотношении (4.2.1), есть число графов с p вершинами. Из результата Пойа (см. формулу (4.1.8)) нам известно, что $g_p = Z(S_p^{(2)}; 2, 2, \dots)$. Подставляя это выражение в (6.2.2), находим формулу для \bar{g}_p , которая приводится в следующей теореме.

Теорема. Число \bar{g}_p самодополнительных графов с p вершинами равно

$$\bar{g}_p = Z(S_p^{(2)}; 0, 2, 0, 2, \dots). \quad (6.2.3)$$

Так как $\bar{g}_p > 0$ только при $p \equiv 0 \pmod{4}$ или $p \equiv 1 \pmod{4}$, то в табл. 6.2.1, взятой из статьи Рида [6], приводятся значения \bar{g}_p лишь для таких p .

Таблица 6.2.1

Число самодополнительных графов

p	4	5	8	9	12	13	16	17
\bar{g}_p	1	2	10	36	720	5 600	703 760	11 220 000

Формула (6.2.3) в указанных двух случаях может быть записана так:

$$\bar{g}_{4n} = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} \frac{n!}{\prod k^{j_k} \cdot j_k!} 2^{c(j)} \quad (6.2.4)$$

и

$$\bar{g}_{4n+1} = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} \frac{n!}{\prod k^{j_k} \cdot j_k!} 2^{c(j) + \sum_k j_k}, \quad (6.2.5)$$

где сумма берется по всем разбиениям (j) числа n и

$$c(j) = 2 \sum_{k=1}^n j_k (kj_k - 1) + 4 \sum_{1 \leq r < t \leq n} (r-t) j_r j_t. \quad (6.2.6)$$

Дополнение \bar{D} орграфа D имеет те же самые вершины, что и орграф D , и вершина u смежна к v в орграфе \bar{D} тогда и только тогда, когда u не является смежной к v в орграфе D . Число \bar{d}_p самодополнительных орграфов можно найти с помощью приема, аналогичного описанному выше для случая графов.

Теорема. Число \bar{d}_p самодополнительных орграфов с p вершинами дается формулой

$$\bar{d}_p = Z(S_p^{[2]}; 0, 2, 0, 2, \dots). \quad (6.2.7)$$

Рассматривая число \bar{d}_{2n} орграфов четного порядка, получаем, следуя Риду, любопытный результат:

$$\bar{d}_{2n} = \bar{g}_{2n}. \quad (6.2.8)$$

Однако еще не найдено пока естественного взаимно однозначного соответствия между этими самодополнительными графами и орграфами. Таким образом, \bar{d}_4 , \bar{d}_6 и \bar{d}_8 можно найти, используя данные для $p = 8, 12$ и 16 , помещенные в табл. 6.2.1. Эти и другие наименьшие значения величины \bar{d}_p показаны в табл. 6.2.2.

Таблица 6.2.2

Число самодополнительных орграфов

p	2	3	4	5	6	7	8
\bar{d}_p	1	4	10	136	720	44 224	703 760

Формула (6.2.7) в случае нечетного индекса имеет вид

$$\bar{d}_{2n+1} = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} \frac{n!}{\prod k^{j_k} \cdot j_k!} 2^{c(j) + 2 \sum_k j_k}, \quad (6.2.9)$$

где сумма, как и прежде, берется по всем разбиениям числа n .

6.3. ВЗВЕШЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Существует много задач перечисления, в которых функциям назначаются полные веса так, что все функции одной и той же орбиты степенной группы имеют одинаковый вес. Мы попытаемся выразить необходимый результат с помощью производящей функции

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots, \quad (6.3.1)$$

в которой C_i есть число орбит веса i .

Рассмотрим теперь степенную группу B^A , действующую на множестве Y^X ; здесь множества A , X и B — конечные, а Y может быть счетным (чтобы иметь возможность брать в качестве весов любые целые неотрицательные числа). Пусть w — функция, отображающая множество Y в множество $\{0, 1, 2, \dots\}$. Как

обычно, w называется *весовой функцией* и для каждой функции f из Y^X мы определяем *вес* функции f , обозначаемый $w(f)$, с помощью соотношения

$$w(f) = \sum_{x \in X} w(f(x)). \quad (6.3.2)$$

Так как по предположению множество X — конечное, то сумма в формуле (6.3.2) определена. Если для каждой орбиты группы B^A все функции, принадлежащие этой орбите, имеют одинаковый вес, то мы можем определить *вес орбиты*, положив его равным весу произвольной функции этой орбиты. Кроме того, если для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$ число элементов множества Y , имеющих вес i , — конечно, то мы можем поставить вопрос о числе орбит произвольного фиксированного веса. Итак, мы рассматриваем две функции как «одинаковые» тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же орбите. Пусть C_k — число различных функций веса k , определяемых заданной степенной группой. Тогда нахождение ряда $C(x)$, указанного в (6.3.1), обеспечивает получение числа орбит данного веса.

Попытаемся теперь сформулировать условия, которые гарантировали бы равенство весов у функций, принадлежащих одной и той же орбите группы B^A . Для этого обозначим через $Y_i = = w^{-1}(i)$ множество всех элементов на Y , имеющих вес i . Мы видим, что для того, чтобы число функций произвольного конкретного веса было конечно, необходимо, чтобы каждое множество Y_i было конечным. Через $B(Y_i)$ обозначим то подмножество множества Y , которое состоит из всех объектов $\beta(y)$, где $\beta \in B$, $y \in Y_i$. Требуемое условие можно теперь сформулировать следующим образом.

Лемма. *Все функции из одной и той же орбиты степенной группы B^A имеют равные веса тогда и только тогда, когда $B(Y_i) = = Y_i$ для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$.*

Доказательство. Для доказательства достаточности предположим, что f и g принадлежат одной и той же орбите группы B^A . Тогда для некоторой подстановки $(\alpha; \beta)$ из B^A имеем равенство $(\alpha; \beta) f = g$, так что $\beta f(\alpha x) = g(x)$ для всех x из X . Заметим, что $B(Y_i) = Y_i$ влечет соотношение $w(\beta f(\alpha x)) = w(f(\alpha x))$. Следовательно,

$$w(g) = \sum_{x \in X} w(\beta f(\alpha x)) = \sum_{x \in X} w(f(\alpha x)) = w(f).$$

Чтобы установить необходимость, предположим, что существуют элемент y из Y и подстановка β из B , такие, что $w(y) \neq w(\beta y)$. Пусть f и g — функции из Y^X , определяемые соотношениями $f(x) = y$ и $g(x) = \beta y$ для всех x из X . Тогда f и g при

надлежат одной и той же орбите группы B^A и в то же время $w(f) \neq w(g)$. ■

Начиная с этого момента, мы предполагаем, что условие, фигурирующее в лемме, выполняется, а именно, что $B(Y_i) = Y_i$ для всякого $i = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае каждая подстановка β из B может быть записана в виде произведения

$$\beta = \prod \beta_i, \quad (6.3.3)$$

где для каждого y из Y имеем $\beta(y) = \beta_i(y)$, если $y \in Y_i$.

Чтобы получить производящую функцию $C(x)$, нам теперь нужно только видоизменить переменные $c_k(\beta)$, встречающиеся в соотношении (6.1.8) из ТПСГ. Пусть $\gamma = (\alpha; \beta)$ — произвольная подстановка степенной группы B^A . Предположим, что z_k — некоторый цикл длины k из разложения подстановки α на непересекающиеся циклы. Пусть снова S обозначает множество всех элементов из X , переставляемых циклом z_k . Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$ определяем $c_i^k(\beta)$ как число функций f из Y^S , неподвижных относительно подстановки $(z_k; \beta)$ и удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{x \in S} w(f(x)) = i. \quad (6.3.4)$$

Для удобства введем производящую функцию

$$c_k(\beta, x) = \sum_i c_i^k(\beta) x^{ki}. \quad (6.3.5)$$

Заметим, что $c_k(\beta, 1) = c_k(\beta)$, определенному формулой (6.1.9). Требуемая производящая функция $C(x)$ дается соотношением

$$C(x) = |B|^{-1} \sum_{\beta \in B} Z(A; c_1(\beta, x), c_2(\beta, x), \dots, c_m(\beta, x)). \quad (6.3.6)$$

Используя прием, аналогичный примененному при выводе формулы (6.1.2) для $j_1(\alpha; \beta)$, получаем

$$c_1(\beta, x) = \sum_i j_1(\beta_i) x^i, \quad (6.3.7)$$

$$c_2(\beta, x) = \sum_i (j_1(\beta_i) + 2j_2(\beta_i)) x^{2i}, \quad (6.3.8)$$

$$c_3(\beta, x) = \sum_i (j_1(\beta_i) + 3j_3(\beta_i)) x^{3i} \quad (6.3.9)$$

и в общем случае

$$c_k(\beta, x) = \sum_i \left(\sum_{s|k} s \cdot j_s(\beta_i) \right) x^{ki}. \quad (6.3.10)$$

Собирая вместе эти замечания, получаем следующий результат:

Теорема (теорема перечисления степенной группы, форма степенного ряда.) Ряд $C(x)$, перечисляющий в соответствии с весами классы эквивалентных функций, причем эквивалентность определяется степенной группой B^A , имеет вид

$$C(x) = |B|^{-1} \sum_{\beta \in B} Z(A; c_1(\beta, x), c_2(\beta, x), \dots, c_m(\beta, x)), \quad (6.3.11)$$

где

$$c_k(\beta, x) = \sum_i \left(\sum_{s|k} s j_s(\beta_i) \right) x^{ki}. \quad (6.3.12)$$

По аналогии с замечанием, приведенным после формулировки константной формы ТПСГ, обратим внимание на то, что форма степенного ряда ТПСГ включает в себя как существенную часть приложение теоремы Пойа к цикловому индексу степенной группы.

Теорема Пойа немедленно получается из только что сформулированной теоремы, если в качестве B взять единичную группу, действующую на множестве Y . В этом случае B состоит из одной тождественной подстановки β , действующей на Y ; поэтому $j_1(\beta_i) = |Y_i|$ для каждого i , а $j_s(\beta_i) = 0$ при всех $s \neq 1$. Таким образом, $\sum_{s|k} s j_s(\beta_i) = |Y_i|$ для любого i и $c_k(\beta, x) = \sum_i |Y_i| x^{ki}$ для каждого $k = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, подставляя $c(x^k)$ вместо $c_k(\beta, x)$, имеем

$$C(x) = Z(A; c(x), c(x^2), \dots, c(x^m)). \quad (6.3.13)$$

Как показано Харари и Палмером [4], разница между выражением для $C(x)$ в ТПСГ (в форме степенного ряда) и выражением, включающим частные производные и приведенным в утверждении де Брёйна, относящемся к тому же самому результату, является чисто формальной. Это можно обосновать естественным изменением обозначений и несложными алгебраическими преобразованиями (см. упражнение 6.15).

Для иллюстрации теоремы вернемся к задаче об ожерельях, рассмотренной уже в § 6.1. Пусть D_4 действует на $X = \{1, 2, 3, 4\}$, и предположим, что $Y = \{1, 2, 3\}$ и $w(1) = 0$, $w(2) = w(3) = 1$. Группа B будет состоять из подстановок (1) (2) (3) и (1) (23). Тогда для получения ряда $C(x)$ можно применить ТПСГ в форме степенного ряда; при этом коэффициент, стоящий при x^k , можно толковать как число четырехбусинных ожерелий, в которых 4 — k бусинок имеют цвет 1, а k бусинок имеют взаимозаменяемые цвета 2 и 3.

Чтобы иметь возможность применить теорему, рассмотрим сначала подстановку $\beta = (1) (2) (3)$; тогда $c_k(\beta, x) = 1 + 2x^k$ для каждого k . Если же $\beta = (1) (23)$, то $c_k(\beta, x) = 1$ в случае

нечетного k и $c_k(\beta, x) = 1 + 2x^k$ в случае четного k . Использование формулы (6.3.11) дает

$$C(x) = \frac{1}{2} \{Z(D_4, 1 + 2x) + Z(D_4; 1, 1 + 2x^2, 1, 1 + 2x^4)\}.$$

Подстановка соответствующих выражений в $Z(D_4)$ дает многочлен

$$C(x) = 1 + x + 4x^2 + 3x^3 + 4x^4.$$

Рассматривая рис. 6.3.1, убеждаемся в том, что коэффициент при x^3 действительно равен 3; числа 2 и 3 поставлены около вер-

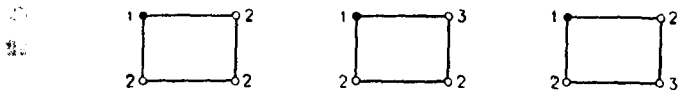


Рис. 6.3.1 Ожерелья с одним фиксированным цветом и двумя взаимозаменяемыми цветами.

шин, имеющих взаимозаменяемые цвета, а 1 стоит у вершины с фиксированным цветом.

Заметим, что коэффициент при x^4 в приведенном выше многочлене равен числу четырехбусинных ожерелий с двумя взаимозаменяемыми цветами. Мы уже знаем из рис. 6.1.1, что это число равно 4.

Теорему перечисления степенной группы легко приспособить к решению таких задач, в которых область значений весовой функции принадлежит произвольному коммутативному кольцу, содержащему множество всех рациональных чисел. Однако нельзя сказать, что интуитивно интересные задачи такого уровня общности существуют в изобилии.

6.4. ГРАФЫ С РАСКРАШЕННЫМИ РЕБРАМИ

Рид [7] получил производящую функцию, перечисляющую r -вершинные графы, у которых ребра раскрашиваются с использованием m взаимозаменяемых цветов. ТПСГ в форме степенного ряда обеспечивает нам простой подход к задаче нахождения этой функции.

Пусть A будет парной группой $S_p^{(2)}$ с множеством объектов $X^{(2)}$. Пусть $Y = \{0, 1, \dots, m\}$, и рассмотрим симметрическую группу S_{m+1} , действующую на Y . В качестве B мы берем подгруппу группы S_{m+1} , которая оставляет неподвижным элемент 0 из множества Y , так что $Z(B) = s_1 Z(S_m)$. Далее, мы определяем весовую функцию w , отображающую Y в множество $\{0, 1\}$:

$w(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$. В этом случае каждая функция f , отображающая $X^{(2)}$ в Y , представляет граф с $f^{-1}(i)$ ребрами «цвета i » при $i = 1, \dots, m$. Кроме того, вес $w(f)$, определенный в соответствии с формулой (6.3.2), есть число ребер в графе, представимом функцией f . Отсюда следует, что производящая функция $N_p^n(x)$, которую мы ищем, получается с помощью применения соотношения (6.3.11) к нашей степенной группе B^A .

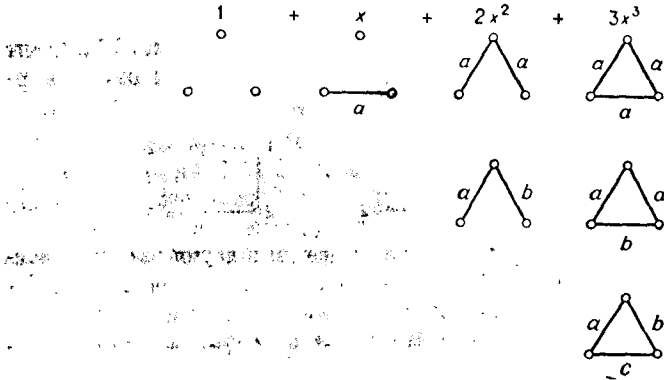


Рис. 6.4.1 Графы с ребрами, окрашенными во взаимозаменяемые цвета.

Для иллюстрации приведем некоторые детали в случае $m = 3$. В соответствии с данными выше обозначениями имеем $Y_0 = \{0\}$ и $Y_1 = \{1, 2, 3\}$. Для каждой подстановки β из B мы должны вычислить $c_k(\beta, x)$, используя формулу (6.3.10). Напомним, что для $i = 0, 1$ коэффициент при x^{ki} в $c_k(\beta, x)$ равен $\sum_{s|k} s j_s(\beta_i)$. Существуют три случая, по одному для каждого типа подстановки.

Случай 1. $\beta = (0) (1) (2) (3)$.

Имеем $\beta_0 = (0)$ и $\beta_1 = (1) (2) (3)$. Следовательно, $j_1(\beta_0) = 1$ и $j_1(\beta_1) = 3$. Значит, $c_k(\beta, x) = 1 + 3x^k$ для всех k .

Случай 2. $\beta = (0) (12) (3)$.

Так как $\beta_0 = (0)$ и $\beta_1 = (12) (3)$, то $j_1(\beta_0) = 1$, $j_1(\beta_1) = 1$ и $j_2(\beta_1) = 1$. Поэтому $\sum_{s|k} s j_s(\beta_1)$ равна $j_1(\beta_1)$ или $j_1(\beta_1) + 2j_2(\beta_1)$ в зависимости от того, нечетно или четно k . Следовательно, $c_k(\beta, x)$ есть $1 + x^k$ или $1 + 3x^k$ в соответствии с тем, нечетно или четно число k .

Случай 3. $\beta = (0) (123)$.

Так как $\beta_0 = (0)$ и $\beta_1 = (123)$, то $j_1(\beta_0) = 1$ и $j_3(\beta_1) = 1$. Значит, $\sum_{s|k} s j_s(\beta_1)$ равна 0 или $3j_3(\beta_1)$ в зависимости от того, $3 \nmid k$ или $3|k$. Поэтому $c_k(\beta, x)$ равно 1 или $1 + 3x^k$ в соответствии с тем, $3 \nmid k$ или $3|k$.

Если $\beta = (0) (13) (2)$ или $\beta = (0) (23) (1)$, то, естественно, $c_k(\beta, x)$ дается случаем 2. Из (6.3.11) имеем

$$\begin{aligned} N_p^3(x) = & \frac{1}{6} (Z(S_p^{(2)}; 1 + 3x, 1 + 3x^2, \dots) + \\ & + 3Z(S_p^{(2)}; 1 + x, 1 + 3x^2, 1 + x^3, \dots) + \\ & + 2Z(S_p^{(2)}; 1, 1, 1 + 3x^3, \dots)). \end{aligned}$$

Следовательно, для $p=3$ получаем

$$N_3^3(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3.$$

Это соотношение проиллюстрировано рис. 6.4.1; на нем изображены все 3-вершинные графы, ребрам которых приписаны взаимозаменяемые цвета a, b, c .

6.5. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

Харрисон [1] первым решил задачу о нахождении числа разных автоматов. Если использовать ТПСГ, то, как показано в статье Харари и Палмера [9], задача о подсчете числа автоматов с заданными начальными и конечными состояниями может быть решена весьма просто.

Чтобы подготовить почву, мы сначала перечисляем упорядоченные пары функций относительно произведения двух степенных групп. После этого вполне конкретно определяем конечные автоматы — как специальные упорядоченные пары функций. Осуществив перечисление автоматов естественным способом с использованием степенной группы, мы затем распространяем этот результат, чтобы предусмотреть также начальные и заключительные состояния.

Для получения теоремы перечисления упорядоченных пар функций рассмотрим две группы подстановок: B_1 и B_2 . Пусть $A_1 = C_1 \times D_1$ и $A_2 = C_2 \times D_2$ — два произведения групп, причем степени групп C_i и D_i равны соответственно c_i и d_i ($i = 1, 2$). Воспользовавшись формулой (4.3.10), дающей цикловой индекс декартова произведения двух групп, равенством (6.1.2), позволяющим найти число объектов, неподвижных относительно данной подстановки из степенной группы, и соотношением (2.3.3) из леммы Берсайда, можно получить следующую теорему.

Теорема. Число орбит, определяемых произвольной подгруппой F группы $(B_1^{C_1 \times D_1}) \times (B_2^{C_2 \times D_2})$, дается формулой

$$N(F) = |F|^{-1} \sum_{i=1}^* \prod_{i=1}^{c_i} \prod_{q=1}^{d_i} \left\{ \prod_{s \in [p, q]} s \cdot j_s(\beta_i) \right\}^{l_p^{(v_i)} l_q^{(d_i)} \cdot (p, q)}, \quad (6.5.1)$$

где звездочка у знака суммы указывает на то, что суммирование ведется по всем подстановкам $((\gamma_1, \delta_1); \beta_1), ((\gamma_2, \delta_2); \beta_2)$ из F .

Существует много способов определения конечных автоматов. Для наших целей наиболее удобно сформулировать это понятие на языке упорядоченных пар функций. Пусть X , Y и S — три множества с мощностями k , t и n соответственно. Элементы из S будем называть *состояниями*; множества X и Y назовем соответственно *входным* и *выходным алфавитами*. Автоматом называется упорядоченная пара функций (f_1, f_2) , где $f_1: S \times X \rightarrow S$ и $f_2: S \times X \rightarrow Y$. отображение f_1 называется *функцией переходов*, а отображение f_2 — *функцией выходов*. В соответствии с традиционной

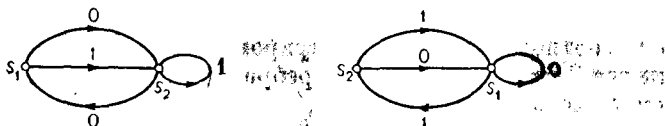


Рис. 6.5.1 Два изоморфных автомата.

терминологией можно сказать, что если автомат находится в произвольном заданном состоянии и на его вход подается некоторый входной символ, то функция f_1 указывает следующее состояние, а функция f_2 — выходной символ.

Харрисон [1] описал три типа эквивалентности автоматов, но мы рассмотрим здесь только один из этих трех типов, а именно *изоморфизм*; другие типы эквивалентности могут быть исследованы аналогичным образом. Пусть S_k , S_m и S_n — симметрические группы с множествами объектов X , Y и S соответственно. Таким образом, имеется n состояний, k входных символов и t выходных символов. Два автомата (f_1, f_2) и (g_1, g_2) называются *изоморфными*, если существуют подстановки α из S_n , β из S_k и γ из S_m , такие, что для всех $s \in S$ и $x \in X$ выполняются равенства

$$f_1(s, x) = \alpha^{-1} g_1(\alpha s, \beta x) \quad (6.5.2)$$

и

$$f_2(s, x) = \gamma^{-1} g_2(\alpha s, \beta x). \quad (6.5.3)$$

Таким образом, равенство (6.5.2) соответствует переименованию состояний, а (6.5.3) — перестановке входных символов. На рис. 6.5.1 показаны два автомата, которые представляют одну и ту же функцию переходов, если отношением эквивалентности является определенный выше изоморфизм. Символы 0 и 1 использованы для входного алфавита. Пометки обоих состояний и оба входных символа предполагаются взаимозаменяемыми.

Чтобы дать подходящую трактовку решаемой задачи на языке теории графов, введем следующее понятие. *Сетью* назовем ориентированный граф, в котором допускаются и петли, и кратные дуги (см. Харари, Норман и Картрайт [1], стр. 5). Если полустепень исхода каждой вершины равна k и каждой из k дуг, исходящих из вершины, сопоставлены разные пометки (символы) из входного алфавита X , то такая сеть реализует функцию переходов некоторого автомата. Мы помечаем и вершины сети как состояния расширяемого автомата.

Чтобы сделать более ясным данное выше определение изоморфных автоматов, рассмотрим равенство (6.5.2), устанавливающее эквивалентность функций переходов f_1 и g_1 . В помеченной сети, реализующей функцию f_1 , существует дуга, помеченная буквой x , исходящая из произвольного состояния s и входящая в состояние $f_1(s, x)$. Аналогично, в сети, реализующей функцию g_1 , существует дуга, помеченная символом βx , исходящая из произвольного состояния αs и входящая в состояние $g_1(\alpha s, \beta x)$. Таким образом, подстановка $((\alpha, \beta); \alpha^{-1})$ из степенной группы $S_n^{S_n \times S_k}$ отображает функцию переходов g_1 в функцию f_1 и просто переименовывает состояния вместе с соответствующим переименованием входных символов на дугах сети.

Для перечисления автоматов мы должны взять

$$C_1 = C_2 = S_n, \quad D_1 = D_2 = S_k, \quad B_1 = S_n \quad \text{и} \quad B_2 = S_m.$$

Применим затем константную форму ТПСГ, беря в качестве F такую подгруппу группы $(S_n^{S_n \times S_k}) \times (S_m^{S_n \times S_k})$, которая состоит из всех подстановок вида $(((\alpha, \beta); \alpha^{-1}), ((\alpha, \beta); \gamma))$. Так как порядок подгруппы F равен $n!k!m!$, то получаем следующее утверждение.

Следствие. Число $a(n, k, m)$ автоматов с n состояниями, k входными и m выходными символами дается формулой

$$a(n, k, m) = (1/(n!k!m!)) \sum I(\alpha, \beta, \alpha) I(\alpha, \beta, \gamma), \quad (6.5.4)$$

где сумма берется по всем подстановкам из подгруппы F , а

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^k \left(\sum_{s \in [p, q]} s j_s(\gamma) \right)^{j_p^{(\alpha)} j_q^{(\beta) \cdot (p, q)}}. \quad (6.5.5)$$

Очевидно, что соотношение (6.5.4) можно видоизменить, используя для этого формулу, дающую число подстановок симметрической группы, обладающих заданным разбиением.

В качестве иллюстрации следствия приведем некоторые детали, относящиеся к нахождению числа $a(2, 2, 1)$ автоматов с двумя состояниями, двумя входными и одним выходным символами.

Так как существует только одна функция выходов, то формула (6.5.4) несколько упрощается:

$$\begin{aligned}
 a(2, 2, 1) &= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^2 \prod_{q=1}^2 \left(\sum_{s \in [p, q]} s j_s(\alpha) \right)^{i_p(\alpha) j_q(\beta)(p, q)} = \\
 &= \frac{1}{4} (2^4 + 2^2 + 2^2 + 2^2) = 7.
 \end{aligned}
 \tag{6.5.6}$$

В автомате обычно выделяют одно из состояний, называя его *начальным состоянием*, или *источником*. Кроме того, может быть выделено несколько других состояний, называемых *заключительными состояниями*. Таким образом, чтобы перечислить эти автоматы, мы должны перечислить подходящие корневые сети.

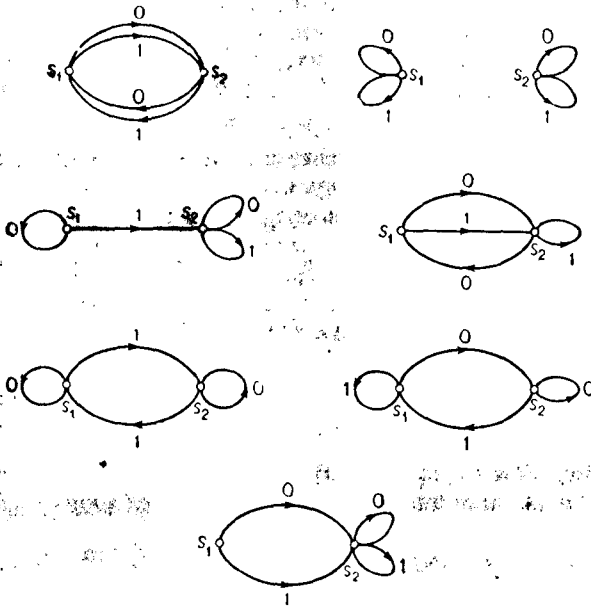


Рис. 6.5.2 Семь автоматов, соответствующих соотношению (6.5.6).

Конкретнее, мы перечислим сети с одним начальным и t заключительными состояниями. Соответствующий метод состоит в применении степенной группы в первоначальном перечислении корневых графов, данном Харари [4].

Для полного описания группы подстановок, позволяющей осуществить требуемое перечисление, воспользуемся теми операциями на группах подстановок, которые дают степенную группу,

произведение и декартово произведение групп. Пусть H — группа подстановок:

$$H = \{(E_1 S_{n-t-1} S_t)^{(E_1 S_{n-t-1} S_t) \times S_k} \} \times \{S_m^{(E_1 S_{n-t-1} S_t) \times S_k}\},$$

действующая на множестве $S^{S \times X} \times Y^{S \times X}$.

Обозначим через $a(n, k, m, t)$ число автоматов с n состояниями, включая одно начальное и t заключительных состояний, с k входными и m выходными символами. Пусть F — подгруппа группы H , состоящая из всех подстановок, представленных заранее в форме $((\alpha, \beta); \alpha^{-1}), ((\alpha, \beta); \gamma)$. Тогда порядок подгруппы F равен $(n-t-1)! t! k! m!$. Как и раньше, число таких автоматов находится с помощью формулы (6.5.1).

Следствие. Число автоматов с одним начальным и t заключительными состояниями равно

$$a(n, k, m, t) = [1/((n-t-1)! t! k! m!)] \sum I(\alpha, \beta, \alpha) I(\alpha, \beta, \gamma), \quad (6.5.7)$$

где суммирование ведется по всем таким подстановкам из H , которые имеют вид $((\alpha, \beta); \alpha^{-1}), ((\alpha, \beta); \gamma)$, и $I(\alpha, \beta, \gamma)$ дается формулой (6.5.5).

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда и число m выходных символов, и число t заключительных состояний равно 1, а число входных символов равно 2. Тогда имеем

$$a(n, 2, 1, 1) = [1/((n-2)! 2)] \sum_{p=1}^{n-2} \prod_{q=1}^2 \left(\sum_{s|p, q} s \cdot j_s(\alpha) \right)^{i_p(\alpha) i_q(\beta) (p, q)}. \quad (6.5.8)$$

Теперь легко подсчитать, что для $n = 2$ $a(2, 2, 1, 1) = 10$ (см. таблицу 6.5.1 и рис. 6.5.3). В таблице 6.5.1 приведены значения величины $a(n, 2, 1, t)$ для малых n и $t = 1, 2, \dots, n-1$. Равные значения попадают потому, что $a(n, 2, 1, t) = a(n, 2, 1, n-t-1)$ для $t = 1, 2, \dots, n-2$. Заметим, что из формулы перечисления (6.5.7) следует, что t рассматриваемых заключительных

Числа $a(n, 2, 1, t)$ Таблица 6.5.1

$n \backslash t$	1	2	3	4
2	10			
3	378	198		
4	16 576	16 576	5 614	
5	819 420	1 226 900	819 420	206 495

$n-t-1$) для $t = 1, 2, \dots, n-2$. Заметим, что из формулы перечисления (6.5.7) следует, что t рассматриваемых заключительных

состояний отличны от начального состояния. Чтобы допустить и такую ситуацию, когда начальное состояние само является одним из заключительных состояний, надо каждое вхождение t в фор-

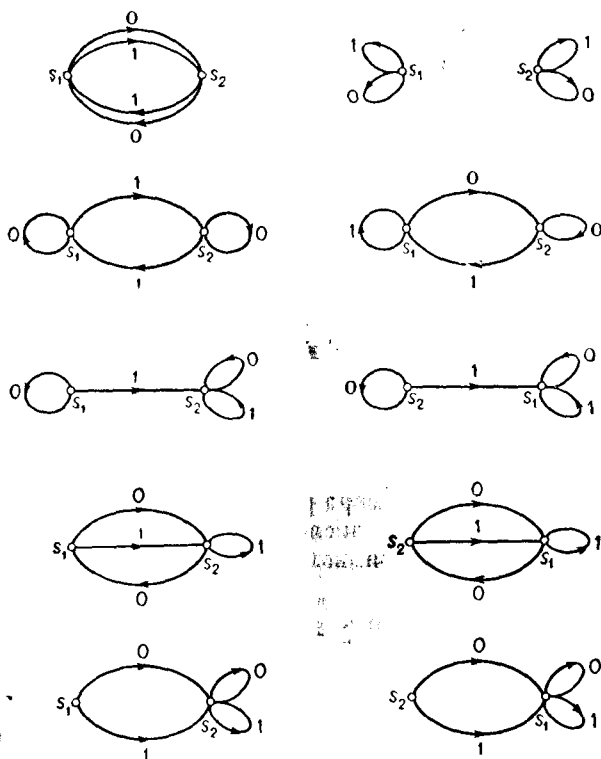


Рис. 6.5.3 Десять автоматов, подтверждающих значение величины $a(2, 2, 1, 1)$.

муле (6.5.7) заменить на $t-1$. Легко перечисляются автоматы с произвольным числом r начальных состояний и числом t заключительных состояний; точно так же нетрудно учесть и число состояний, которые являются одновременно начальными и заключительными.

6.6. САМООБРАТНЫЕ ОРГРАФЫ

Нашей целью является вывод формулы для перечисляющего многочлена $d_p(x)$, в котором коэффициент при x^q равен числу самообратных орграфов с p вершинами и q дугами (см. Харари и Палмер [5]). Такой орграф D обладает тем свойством, что обратный ему орграф D' , получаемый из D изменением ориентации всех

его дуг, изоморфен D . По причинам, указанным ниже, при выводе требуемой формулы теорема Пойа применяется к такому ограничению степенной группы, в котором подстановки действуют на взаимно однозначные функции. Прямой проверкой убеждаемся в том, что перечисляющий многочлен $d'_3(x)$ для самообратных орграфов с тремя вершинами имеет вид (ср. с рис. 6.6.1):

$$d'_3(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6. \quad (6.6.1)$$

Напомним, что дополнение \bar{D} орграфа D имеет то же самое множество вершин, что и орграф D , и вершина u смежна к вершине v в орграфе \bar{D} тогда и только тогда, когда она не является

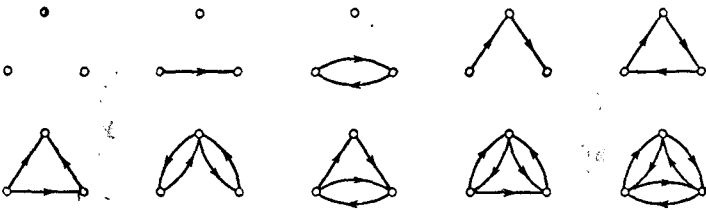


Рис. 6.6.1 Десять самообратных орграфов с тремя вершинами.

смежной к v в орграфе D . Легко видеть, что $(\bar{D})' = \bar{D}'$, т. е. операции обращения и взятия дополнения орграфа коммутативны. Это замечание объясняет «концевую» симметрию коэффициентов многочлена $d'_p(x)$, которая, например, явно выражена в соотношении (6.6.1) при $p = 3$.

Два орграфа D_1 и D_2 с одним и тем же множеством вершин называются *эквивалентными относительно обращения*, если либо $D_1 \cong D_2$, либо $D_1' \cong D_2'$. (Отметим аналогию с понятием эквивалентности графов относительно свойства дополненности.) Мы теперь хотим получить формулу для многочлена $c_p(x)$, перечисляющего p -вершинные орграфы с точностью до их взаимной обратимости. Для осуществления этого мы должны найти, как и в случае графов, подходящую группу подстановок, к которой можно было бы применить теорему Пойа.

Пусть S_2 действует на $\{1, 2\}$ и рассмотрим степенную группу $S_p^{S_2}$, действующую на множестве $X^{(1, 2)}$ всех функций, отображающих множество $\{1, 2\}$ в X . Легко заметить естественное соответствие между элементами из $X^{(1, 2)}$ (представляющими упорядоченные пары различных элементов из X) и взаимно однозначными функциями из $X^{(1, 2)}$. Каждая упорядоченная пара (i, j) из $X^{(1, 2)}$ соответствует такой взаимно однозначной функции, которая отображает 1 в i , а 2 в j . Значит, мы можем рассмотреть ограниченную степенную группу $S_p^{S_2^*}$, где ограничение осуществляется

на множество всех взаимно однозначных функций, но которые как бы действуют на элементах множества $X^{[2]}$. Более конкретно, подстановки из $S_p^{S_2^*}$ состоят из таких упорядоченных пар $(\alpha; \beta)$ подстановок $\alpha \in S_2$ и $\beta \in S_p$, что для всякой пары (i, j) из $X^{[2]}$ выполняется соотношение

$$(\alpha; \beta)(i, j) = \begin{cases} (\beta i, \beta j), & \text{если } \alpha = (1)(2), \\ (\beta j, \beta i), & \text{если } \alpha = (12). \end{cases} \quad (6.6.2)$$

Пусть теперь E_2 — единичная группа, действующая на множестве $Y = \{0, 1\}$. Рассмотрим степенную группу B , которая представляет собой степенную группу с основанием E_2 и показателем $S_p^{S_2^*}$ и действует на множестве $Y^{X^{[2]}}$ всех функций, отображающих $X^{[2]}$ в множество Y . Каждая такая функция f представляет орграф, вершинами которого являются элементы множества $X = \{1, 2, \dots, p\}$, где i смежна к j только тогда, когда $f(i, j) = 1$. Таким образом, элементы 0 и 1 из множества Y указывают на отсутствие или на принадлежность дуги орграфу.

Пусть f_1 и f_2 — две из этих функций, и пусть представленные ими орграфы будут соответственно D_1 и D_2 . Имеем $D_1 \cong D_2$ или $D_1 \cong D_2$ тогда и только тогда, когда существует подстановка γ из B , такая, что $\gamma f_1 = f_2$. Это вытекает из того факта, что для подстановки $\gamma = ((\alpha; \beta); \varepsilon)$ орграф, представленный функцией γf_1 , изоморфен D_1 или D_1' в соответствии с тем, является α подстановкой (1) (2) или (12).

Итак, эквивалентность орграфов относительно обращения соответствует эквивалентности функций из множества $Y^{X^{[2]}}$, определяемой с помощью степенной группы B .

Применяя теперь теорему Пойа (это мы вправе делать, потому что основанием степенной группы является группа E_2), мы получаем следующий результат, который требуется для перечисления самообратных графов.

Теорема. Многочлен $c_p(x)$, перечисляющий орграфы с точностью до взаимной обратимости, дается формулой

$$c_p(x) = Z(S_p^{S_2^*}, 1 + x). \quad (6.6.3)$$

Существуют формулы, которые могут быть использованы для выражения циклового индекса произвольной ограниченной степенной группы B^{A^*} , где ограничение осуществляется на множество тех взаимно однозначных функций, которые рассматриваются в данной задаче. Однако в частном случае, когда $A = S_2$ и $B = S_p$, может быть дана более явная формула для циклового индекса. Какова бы ни была подстановка α из S_p , обозначим, как и раньше, разбиение числа p , определяемое подстановкой α ,

через $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_p)$, где j_k равно числу попарно непересекающихся циклов длины k в подстановке α . Тогда вклад в $Z(S_p^{S_2^*})$, вносимый подстановкой $((12); \alpha)$, равен

$$I(\alpha) = \prod_{k=1}^p s_{[2, k]}^{(2, k)k} \binom{j_k}{2}. \prod_{\substack{1 \leq r \leq t \leq p \\ k=[r, t]}} s_{[2, k]}^{(2, k)(r, t)} j_r j_t \times \\ \times \prod_{k \text{ нечетное}} s_{2k}^{((k-1)/2)j_k} \cdot \prod_{k \text{ четное}} s_k^{(k-2)j_k} s_{k/2}^{\eta(k) \cdot 2j_k} s_k^{(1-\eta(k)) \cdot j_k}, \quad (6.6.4)$$

где $\eta(k) = 1$, если $k/2$ — нечетное число, и $\eta(k) = 0$ в ином случае.

Следовательно, цикловой индекс группы $S_p^{S_2^*}$ можно выразить в виде

$$Z(S_p^{S_2^*}) = (1/2p!) \left(p! Z(S_p^{[2]}) + \sum_{\alpha \in S_p} I(\alpha) \right). \quad (6.6.5)$$

Сделаем теперь простое замечание, касающееся самообратных графов и подобное тому, которое было сделано Ридом относительно самодополнительных графов. Именно, многочлен $2c_p(x)$ подсчитывает каждый самообратный орграф дважды, а каждый несамообратный — только один раз. Следовательно, многочлен $2c_p(x) - d_p(x)$ подсчитывает каждый самообратный орграф в точности один раз. Итак, мы имеем

$$d'_p(x) = 2c_p(x) - d_p(x). \quad (6.6.6)$$

Это соотношение вместе с формулами (5.1.4) и (6.6.3) дает следующий результат.

Теорема. Перечисляющий многочлен $d'_p(x)$ для самообратных орграфов равен

$$d'_p(x) = 2Z(S_p^{S_2^*}, 1+x) - Z(S_p^{[2]}, 1+x). \quad (6.6.7)$$

Для упрощения записи соотношения (6.6.7) положим

$$F(S_p^{S_2^*}) = (1/p!) \sum_{\alpha \in S_p} I(\alpha).$$

Хотя это выражение не связано явно с группой подстановок, мы все же определяем подстановку в него $1+x$, имея в виду построение многочлена, получаемого путем замены каждой переменной s_k в $F(S_p^{S_2^*})$ двучленом $1+x^k$. Комбинируя соотношение (6.6.7) и формулу (6.6.5) для $Z(S_p^{S_2^*})$, приходим к равенству

$$d'_p(x) = F(S_p^{S_2^*}, 1+x). \quad (6.6.8)$$

Для иллюстрации построим многочлен $d'_3(x)$, перечисляющий самообратные орграфы с тремя вершинами. Цикловой индекс симметрической группы S_3 имеет вид

$$Z(S_3) = \frac{1}{6} (s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3). \quad (6.6.4)$$

Из этого соотношения и формулы (6.6.4) для $I(\alpha)$ получаем

$$F(S_3^{S_2^4}) = \frac{1}{6} (s_2^3 + 3s_1^2s_2 + 2s_6). \quad (6.6.10)$$

Формула (6.6.8) дает для $p=3$

$$\begin{aligned} d'_3(x) &= \frac{1}{6} ((1+x^2)^3 + 3(1+x)^2(1+x^2)^2 + 2(1+x^6)) = \\ &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6, \end{aligned} \quad (6.6.11)$$

а для $p=4$

$$\begin{aligned} d'_4(x) &= \frac{1}{24} ((1+x^2)^6 + 6(1+x)^2(1+x^2)^5 + 8(1+x^6)^2 + \\ &+ 3(1+x)^4(1+x^2)^4 + 6(1+x^4)^3) = \\ &= 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 9x^4 + 10x^5 + 12x^6 + \\ &+ 10x^7 + 9x^8 + 5x^9 + 3x^{10} + x^{11} + x^{12}. \end{aligned} \quad (6.6.12)$$

Коэффициенты этих многочленов можно обстоятельно проверить с помощью рассмотрения диаграмм четырехвершинных орграфов; такие диаграммы приводятся в статье Харари и Палмера [6] и в книге Харари [1] (см. приложение II, стр. 262—265). На рис. 6.6.2 показаны все пять самообратных орграфов с четырьмя вершинами и тремя дугами.

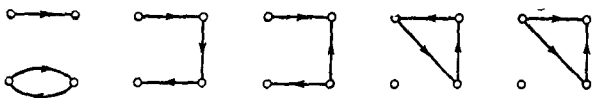


Рис. 6.6.2 Пять самообратных орграфов.

Несложная модификация формулы (6.6.7) приводит к многочлену $r'_p(x)$, перечисляющему самообратные орграфы, в которых допускаются петли. Допуская в орграфах существование петель, мы получаем, естественно, графы, соответствующие отношениям. Нетрудно видеть, как можно использовать степенную группу $S_p^{S_2}$, чтобы подсчитать число отношений с точностью до их взаимной обратимости. Напомним, что упорядоченная парная группа S_p^2 действует на всех упорядоченных парах (где элементы в парах

необязательно различны), как группа, индуцированная симметрической группой S_p . Как показано в (5.1.13), многочлен $r_p(x)$, перечисляющий отношения, имеет вид

$$r_p(x) = Z(S_p^2, 1+x). \quad (6.6.13)$$

Но тогда многочлен $r'_p(x)$ дается формулой

$$r'_p(x) = 2Z(S_p^{S_2}, 1+x) - Z(S_p^2, 1+x). \quad (6.6.14)$$

Для использования соотношения (6.6.14) удобно ввести следующее обозначение для каждой подстановки α из S_p :

$$J(\alpha) = I(\alpha) \sum_{k=1}^p s_k^{j_k}. \quad (6.6.15)$$

Тогда цикловой индекс степенной группы $S_p^{S_2}$ можно записать так:

$$Z(S_p^{S_2}) = \frac{1}{2p!} \left(p! Z(S_p^2) + \sum_{\alpha \in S_p} J(\alpha) \right). \quad (6.6.16)$$

Пусть теперь

$$H(S_p^{S_2}) = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha \in S_p} J(\alpha). \quad (6.6.17)$$

Тогда формулу для $r'_p(x)$ можно представить в следующем виде:

$$r'_p(x) = H(S_p^{S_2}, 1+x). \quad (6.6.18)$$

Пусть d'_p — общее число самообратных орграфов с p вершинами. Тогда, принимая во внимание соотношение (6.6.7), видим, что $d'_p = d'_p(1)$. Чтобы выразить формулу для d'_p в относительно приемлемой форме, введем следующие обозначения. Для каждой подстановки α из S_p положим

$$\begin{aligned} e(\alpha) = & \sum_{k=1}^p \left[(2, k) \left(\frac{k-1}{2} j_k + k \binom{j_k}{2} \right) + \eta(k) j_k \right] + \\ & + \sum_{1 \leq r \leq t \leq p} (2, [r, t]) (r, t) j_r j_t. \end{aligned} \quad (6.6.19)$$

Так как замена на 2 каждого вхождения s_k в $F(S_p^{S_2}^*)$ (см. формулы (6.6.8) и (6.6.4)) дает $d'_p(1)$, то имеем

$$d'_p = (1/p!) \sum_{\alpha \in S_p} 2^{e(\alpha)}, \quad (6.6.20)$$

Аналогичная формула легко получается и для общего числа r_p^r самообратных отношений с p вершинами. В табл. 6.6.1 приведены значения d_p^r и r_p^r для $p = 1, 2, \dots, 6$.

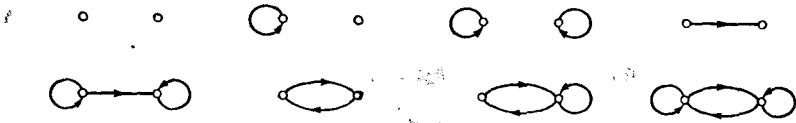


Рис. 6.6.3 Самообратные отношения на двух вершинах.

Восемь самообратных отношений с двумя вершинами изображены на рис. 6.6.3.

Таблица 6.6.1

Число самообратных орграфов и самообратных отношений с p вершинами

p	1	2	3	4	5	6
d_p^r	1	3	10	70	708	15 248
r_p^r	2	8	44	436	7 176	222 368

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. (а) Рассмотрим множество всех функций, отображающих множество из m элементов в множество из n элементов. Сколько существует орбит в этом множестве, определяемых степенными группами $E_n^{E_m}$, $E_n^{S_m}$ и $S_n^{E_m}$?

(б) Сколько орбит функций, отображающих множество из m элементов на множество из n элементов, определяются этими степенными группами? (Указание: используйте биномиальные коэффициенты или числа Стирлинга второго рода.)

(Палмер [2])

6.2. Найти формулы для $Z(S_3^{C_3})$, $Z(C_3^{S_3})$, $Z(S_3^{C_3^*})$ и $Z(C_3^{S_3^*})$.

(Рид [6])

6.3. $\bar{g}_p = \sum_q (-1)^q g_{p,q}$

(Фрухт и Харари [1])

6.4. Найти такой ряд $C(x, y)$, в котором коэффициент при $x^r y^s$ равен числу шестибусинных ожерелий, имеющих r бусинок двух взаимозаменяемых цветов, s бусинок двух других взаимозаменяемых цветов и $6 - r - s$ красных бусинок.

6.5. Найти ряд $N(x, y)$, в котором коэффициент при $x^r y^s$ равен числу графов с четырьмя вершинами, r ребрами двух взаимо-

заменяемых цветов и s ребрами трех других взаимозаменяемых цветов.

6.6. Каким числом способов можно раскрасить грани куба, используя три цвета, два из которых взаимозаменяемые?

6.7. Каким числом способов можно раскрасить грани куба, используя два взаимозаменяемых цвета?

6.8. Найти формулу для $Z(S_2^{S_n})$.

6.9. Самодополнительные эйлеровы графы. (Робинсон [2])

6.10. Самообратные направленные графы и самодополнительные направленные графы. (Шридхаран [1])

6.11. Число самодополнительных турниров порядка $2n$ равно

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{(j)}^* \frac{(2n)!}{\prod k^{j_k} j_k!} \prod_k 2^{k j_k^2 / 2} \prod_{r < t} 2^{(r, t) / r! t!},$$

где звездочка у знака суммы указывает на то, что суммирование ведется по всем разбиениям (j) числа $2n$, таким, что $j_k \neq 0$ только тогда, когда k четное и $4 \nmid k$. Самодополнительные турниры нечетного порядка.

6.12. Отношения, не имеющие транзитивных троек, а также орграфы, не имеющие транзитивных троек. (Шарп [1])

6.13. Орграфы, у которых обращение изоморфно дополнению. (Палмер [6])

6.14. Рассмотрим граф, ребрам которого сопоставлены плюсы и минусы. Такой граф называется *самонегативным*, если он изоморфен графу, который получается из него путем замены плюсов на минусы и, наоборот, минусов — на плюсы. Самонегативные графы. (Рид [7])

6.15. Для формулировки полиномиальной формы ТПСГ, данной де Брёйном [2], удобно положить $B = \prod_{i=0}^r B_i$, где B_i действует на Y_i . Во многих приложениях группа B имеет такой вид. Пусть

$$Z(B_i) = \frac{1}{|B_i|} \sum_{\beta \in B_i} \prod_k b_{i,k}^{j_k(\beta)}.$$

Тогда многочлен $C(x)$, перечисляющий орбиты степенной группы B^A , имеет вид

$$C(x) = \left[Z \left(A; \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m} \right) Z(B) \right]_{z_k=0};$$

здесь предполагается, что в $Z(B)$, полученном из $Z(B_i)$, $i=0, 1, \dots, r$, осуществлена замена

$$b_{i,k} = \exp \left\{ k \sum_{s=1}^{[m/k]} z_{ks} x^{iks} \right\}.$$

Нашу маслом не испортишь.

Пословица ¹

За вином они обычно обсуждают самые важные дела. Решение, принятое на таком совещании, на следующий день хозяин дома, где они находятся, еще раз предлагает [на утверждение] гостям уже в трезвом виде. Если они и трезвыми одобряют это решение, то выполняют. И наоборот: решение, принятое трезвыми, они еще раз обсуждают во здравие.

Геродот о персах ².

Глава 7 СУПЕРПОЗИЦИЯ

Существует несколько естественных способов определить объединение совокупности графов. В каждом случае мы будем называть соответствующее объединение «суперпозицией». Три из таких суперпозиций проиллюстрированы на рис. 7.0.1. Задача нахождения числа «разных» суперпозиций, которые могут быть получены

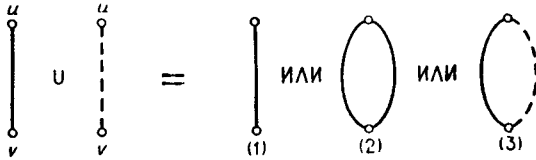


Рис. 7.0.1 Три различные суперпозиции.

с использованием данного множества графов, решается для многих интересных частных случаев. Редфилд [1] первым получил такое решение. Его теорема перечисления, если ее соединить с его же «теоремой декомпозиции», пригодна также для перечисления графов и орграфов. Предметом данной главы является изложение перечислительных методов Редфилда в современных обозначениях и терминологии (см. Харари и Палмер [8], Палмер [4], Фоулкс [2]).

7.1. ТЕОРЕМА ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ РЕДФИЛДА

Операции \cap и \cup над цикловыми индексами были использованы Редфилдом для формулировки результатов, заключенных

¹ В оригинале: «If it tastes good already, it will taste even better with paprika on it»; Old Hungarian saying. — Прим. перев.

² Геродот, История, Изд-во «Наука», Ленинград, 1972, пер. Г. А. Стратоновского. — Прим. перев.

в его «теореме перечисления» и в его «теореме декомпозиции». Эти операции были применены Ридом [1] для вывода его «суперпозиционной теоремы» и были интерпретированы Фоулксом [1] как скалярные произведения определенной группы характеров. Обе эти операции можно ввести в весьма общей форме.

Обозначим через R кольцо рациональных многочленов от переменных s_1, s_2, \dots, s_d . Операция \cap сначала определяется для последовательности $s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_d^{i_d}, s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_d^{j_d}, \dots$ из $m \geq 2$ мономов, принадлежащих кольцу R :

$$(s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_d^{i_d}) \cap (s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_d^{j_d}) \cap \dots = \left(\prod_{k=1}^d k^{i_k j_k} \right)^{m-1}, \quad (7.1.1)$$

если $i_k = j_k = \dots$ для всех k , и равно 0 в ином случае ($b^0 = 1$ даже тогда, когда $b = 0$). Затем операцию \cap можно распространить по линейному закону на произвольные многочлены от этих переменных.

Вторая операция — операция \cup , определяется для мономов «на языке» операции \cap :

$$\begin{aligned} & (s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_d^{i_d}) \cup (s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_d^{j_d}) \cup \dots = \\ & = [(s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_d^{i_d}) \cap (s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_d^{j_d}) \cap \dots] s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_d^{i_d}. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Эта операция также распространяется линейным образом на произвольные многочлены от рассматриваемых переменных.

Итак, результат применения операции \cap представляет собой число, в то время как применение операции \cup приводит к многочлену. На практике эти операции применяются только к цикловым индексам m групп подстановок одинаковой степени. Для иллюстрации приведем детали вычислений в случае, когда $m = 2$ и соответствующими группами являются циклическая и диэдральная группы степени 4:

$$Z(C_4) = \frac{1}{4} (s_1^4 + s_2^2 + 2s_4), \quad (7.1.3)$$

$$Z(D_4) = \frac{1}{8} (s_1^4 + 2s_1^2 s_2 + 3s_2^2 + 2s_4), \quad (7.1.4)$$

$$\begin{aligned} Z(C_4) \cap Z(D_4) &= \frac{1}{32} [(s_1^4 \cap s_1^4) + 3(s_2^2 \cap s_2^2) + \\ &+ 4(s_4 \cap s_4)] = \frac{1}{32} (24 + 24 + 16) = 2, \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

$$Z(C_4) \cup Z(D_4) = \frac{1}{32} (24s_1^4 + 24s_2^2 + 16s_4). \quad (7.1.6)$$

Таким образом, $Z(C_4) \cap Z(D_4)$ есть в точности сумма всех коэффициентов из $Z(C_4) \cup Z(D_4)$.

Пусть W — совокупность всех $(m \times n)$ -матриц, в которых элементы каждой строки попарно различны и являются объектами некоторого множества S , содержащего ровно n элементов. Таким образом, в W входят $(n!)^m$ матриц. Две матрицы из W называются *эквивалентными по столбцам* (или *колонно-эквивалентными*), если они могут быть получены друг из друга перестановкой столбцов. Легко видеть, что существует $(n!)^{m-1}$ соответствующих классов эквивалентности. Далее определяем еще одно отношение эквивалентности — уже для упомянутых классов эквивалентности (для классов эквивалентности по столбцам). Пусть C_1 и C_2 — два таких класса, и пусть B_1, B_2, \dots, B_m — группы подстановок с множеством объектов S . Тогда C_1 и C_2



Рис. 7.1.1 Суперпозиции двух циклов.

называются *эквивалентными относительно* (B_1, B_2, \dots, B_m) , если существуют набор подстановок $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, где $\beta_i \in B_i$, для каждого i , и матрица $[w_{ij}] \in C_1$, такие, что $[\beta_i w_{ij}] \in C_2$. Другими словами, подстановка β_i переставляет элементы i -й строки в некоторой матрице из C_1 , $i = 1, 2, \dots, m$, и в результате этого получается матрица из класса C_2 . Теорема перечисления Редфилда выражает число этих классов «на языке» цикловых индексов групп B_i и операции \cap .

Теорема (теорема перечисления Редфилда). Число $N[B_1, B_2, \dots, B_m]$ классов $(m \times n)$ -матриц, эквивалентных относительно групп подстановок (B_1, B_2, \dots, B_m) , дается формулой

$$N[B_1, B_2, \dots, B_m] = Z(B_1) \cap Z(B_2) \cap \dots \cap Z(B_m). \quad (7.1.7)$$

Этот результат можно обосновать, построив сначала группу подстановок, орбиты которой представляют собой классы матриц, подлежащие перечислению. Формула (7.1.7) следует затем из леммы Бернсайда (см. (2.3.3)), которую надо применить к построенной группе.

Покажем сейчас, как можно использовать эту теорему для подсчета числа суперпозиций произвольного множества графов. Пусть G_1, G_2, \dots, G_m — m графов, каждый из которых имеет одно и то же множество вершин, содержащее n элементов. Пусть, кроме того, для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ ребра графа G_i помечены числом i (или раскрашены цветом i). *Суперпозиция* этих графов имеет то же самое множество вершин, и всякие две из них,

например u и v , смежны по ребру i в том случае, если u и v смежны в графе G_i . Таким образом, ребра суперпозиции помечены, а вершины — нет. Для иллюстрации мы приводим на рис. 7.1.1 все суперпозиции, которые могут быть построены из двух циклов порядка 5. Для указания двух цветов использованы сплошные и штриховые ребра.

Редфилд [1] и Рид [1] заметили, что число различных суперпозиций равно просто числу классов $(m \times n)$ -матриц, эквивалентных относительно $(\Gamma(G_1), \Gamma(G_2), \dots, \Gamma(G_m))$. Таким образом, мы можем найти число суперпозиций при условии, что нам известны цикловые индексы $Z(G_i)$ групп $\Gamma(G_i)$ рассматриваемых графов. Используемая здесь запись $Z(G)$ вместо $Z(\Gamma(G))$ хотя и противоречит принятым обозначениям, однако является удобной.

Следствие. Число различных суперпозиций m графов G_i , каждый из которых имеет одно и то же множество непомяченных вершин, равно

$$Z(G_1) \cap Z(G_2) \cap \dots \cap Z(G_m). \quad (7.1.8)$$

Например, чтобы найти число суперпозиций двух циклов порядка n , мы можем вычислить $Z(D_n) \cap Z(D_n)$, так как группа такого цикла есть D_n . Если $n = 5$, то, используя формулу (2.2.11), имеем

$$Z(D_5) = \frac{1}{10} (s_1^5 + 4s_5 + 5s_1s_2^2). \quad (7.1.9)$$

Из определения операции \cap следует, что

$$\begin{aligned} Z(D_5) \cap Z(D_5) &= \frac{1}{100} ((s_1^5 \cap s_1^5) + 16 (s_5 \cap s_5) + \\ &+ 25 (s_1s_2^2 \cap s_1s_2^2)) = \frac{1}{100} (120 + 80 + 200) = 4, \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

что согласуется с числом суперпозиций, изображенных на рис. 7.1.1. Теорема перечисления Редфилда может быть использована для подсчета числа суперпозиций и в тех случаях, когда «конституэнты» являются орграфами или когда среди конституэнт имеются и графы, и орграфы. Сам Редфилд проиллюстрировал свою теорему, строя суперпозиции циклов и ориентированных циклов, которые он использовал и отдельно друг от друга, и совместно. На рис. 7.1.2 показаны две суперпозиции ориентированного и неориентированного циклов порядка 4, что подтверждает соотношение (7.1.5).

Наконец, предположим, что граф G имеет n вершин и только одно ребро. Тогда число суперпозиций, построенных с исполь-

зованием m экземпляров графа G , равно числу мультиграфов, у которых по n вершин и каждое ребро раскрашено в свой цвет.

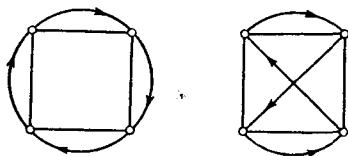


Рис. 7.1.2 Две суперпозиции ориентированного и неориентированного цикла

Так как $Z(G) = Z(S_2)Z(S_{n-2})$, то соответствующее число равно \cap -произведению длины m :

$$Z(S_2)Z(S_{n-2}) \cap \dots \cap Z(S_2)Z(S_{n-2}).$$

При $m = n = 3$ значение этого произведения равно 5. Соответствующие суперпозиции показаны на рис. 7.1.3, где сплошные штриховые и пунктирные ребра относятся к разным экземпляра графа G .

7.2. ТЕОРЕМА ДЕКОМПОЗИЦИИ РЕДФИЛДА

Теорема декомпозиции \cup -произведений не используется непосредственно для целей перечисления, но она может применяться при нахождении циклового индекса парной группы $S_p^{(2)}$ и редуцированной упорядоченной парной группы $S_p^{[2]}$. Кроме

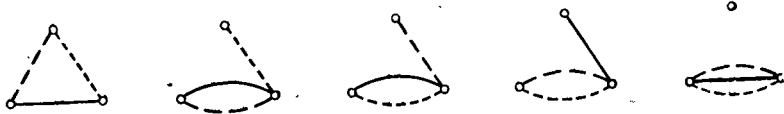


Рис. 7.1.3 Суперпозиции трех ребер на трех вершинах.

того, она предлагает способ получения формулы для суммы цикловых индексов групп всех графов. Последняя формула, как установлено Робинсоном [3], играет важную роль в перечислении блоков.

Чтобы сформулировать теорему, мы сначала свяжем естественным образом с каждым из $N [B_1, B_2, \dots, B_m]$ классов матриц, перечисляемых в соответствии с формулой (7.1.7), группу подстановок. Предположим, что $[w_{ij}]$ — $(m \times n)$ -матрица из k -го класса. Тогда группа подстановок A_k , ассоциируемая с этим классом, состоит из всех подстановок γ , таких, что γ является элементом каждой группы B_i и матрицы $[w_{ij}]$ и $[\gamma^{w_{ij}}]$ принадлежат одному и тому же классу, т. е. эти матрицы эквивалентны

по столбцам. При применении теоремы декомпозиции Редфилда к графам классы матриц соответствуют суперпозициям. Следовательно, каждая суперпозиция ассоциируется со своей группой подстановок. Соответствующая группа состоит из всех таких подстановок на множестве вершин суперпозиции, которые сохраняют отношение смежности в каждом составляющем (конституэнтном) графе. Например, группами суперпозиций, изображенных на рис. 7.1.2, являются циклическая группа C_4 и вечноное произведение $S_2 [E_2]$.

Теорема (теорема декомпозиции Редфилда). Пусть B_1, B_2, \dots, B_m — m групп подстановок степени n , и пусть N будет число классов $(m \times n)$ -матриц, эквивалентных относительно (B_1, B_2, \dots, B_m) . Тогда N групп подстановок H_1, H_2, \dots, H_N , ассоциируемых с этими классами, удовлетворяют условию

$$Z(B_1) \cup Z(B_2) \cup \dots \cup Z(B_m) = \sum_{k=1}^N Z(H_k). \quad (7.2.1)$$

Таким образом, $Z(C_4) \cup Z(D_4)$ равно сумме цикловых индексов $Z(C_4) + Z(S_2 [E_2])$ суперпозиций, изображенных на рис. 7.1.2.

Доказательство. Для доказательства теоремы мы воспользуемся простым теоретико-групповым тождеством, называемым леммой Редфилда, которое будет иметь широкую область применения. Пусть A — группа, A' — ее представление в виде группы подстановок с множеством объектов Y . Для каждого $\alpha \in A$ обозначим через α' образ элемента α в группе A' при рассматриваемом представлении. Пусть φ — функция, отображающая группу A в некоторое кольцо многочленов над полем рациональных чисел, причем эта функция постоянна на классах сопряженных элементов группы A . Как обычно, функцию φ назовем *функцией класса* для группы A . Тогда она является также функцией класса и для A' . Предположим, что группа A' имеет N орбит. Пусть y_1, y_2, \dots, y_N — элементы из Y , взятые по одному из каждой орбиты. Положим для каждого $k = 1, 2, \dots, N$

$$A_k = \{\alpha \in A \mid \alpha' y_k = y_k\}. \quad (7.2.2)$$

Тогда имеем следующее обобщение леммы Бернсайда.

Лемма Редфилда.

$$|A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha') \varphi(\alpha) = \sum_{k=1}^N |A_k|^{-1} \cdot \sum_{\alpha \in A_k} \varphi(\alpha). \quad (7.2.3)$$

Проверка соотношения (7.2.3) осуществляется аналогично доказательству взвешенной формы леммы Бернсайда (см. формулу

(2.3.10)) и поэтому нами опускается. Заметим, что если выбрать $\varphi(\alpha) = 1$ для всех α , то соотношение (7.2.3) преобразуется в равенство (2.3.3) из леммы Бернсайда.

Возьмем в качестве элементов группы A все наборы $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, где $\beta_i \in B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Умножение в A определяется покомпонентно. Подстановка α' действует следующим образом на классы эквивалентности, определяемые отношением эквивалентности по столбцам. Класс, содержащий матрицу $[w_{ij}]$, преобразуется подстановкой α' в класс, которому принадлежит матрица $[\beta_i w_{ij}]$. Наконец, $\varphi(\alpha) = \prod_{k=1}^n s_k^{j_k}$, если каждая компо-

нента β_i определяет одно и то же разбиение (j) числа n , и $\varphi(\alpha) = 0$ в ином случае. Доказательство равенства (7.2.4) теперь может быть завершено применением леммы Редфилда (см. соотношение 7.2.3). ■

Декомпозиция \cup -произведений необязательно является однозначной, но существуют несколько случаев, важных для нас, в которых декомпозиция осуществляется однозначным образом (см. Редфилд [1] и особенно Фоулкс [1] для полного ознакомления с затронутым вопросом). Теперь мы займемся цикловыми индексами циклических групп. Пусть α — подстановка на множестве из n объектов, имеющая порядок r . Пусть $Z(\alpha)$ обозначает цикловой индекс циклической группы, порожденной подстановкой α . Тогда имеем

$$Z(\alpha) = r^{-1} \sum_{i=1}^r \prod_{k=1}^n s_{k/(k,i)}^{(k,i) j_k(\alpha)}, \quad (7.2.4)$$

а если α состоит только из единственного цикла длины r , то формула Редфилда для $Z(\alpha)$ легко проверяется:

$$Z(\alpha) = r^{-1} \sum_{d|r} \varphi(d) s_d^{r/d}, \quad (7.2.5)$$

где φ — эйлерова φ -функция. Следующий результат является следствием теоремы декомпозиции и приводится в работе Редфилда [1], но в совершенно иной форме.

Следствие. Если B является группой подстановок степени n и α — произвольная подстановка на множестве из n символов, имеющая порядок r , то

$$Z(B) \cup Z(\alpha) = \sum_{k|r} i_k Z(\alpha^k), \quad (7.2.6)$$

где i_k — однозначно определяемые неотрицательные целые числа.

Из теоремы декомпозиции (см. формулу (7.2.4)) следует, что $Z(B) \cup Z(\alpha)$ равно сумме цикловых индексов групп, являющихся подгруппами и группы B , и циклической группы, поро-

жденной подстановкой α . Коэффициент i_k определяется однозначно, так как цикловые индексы $Z(\alpha^k)$ независимы. Кроме того, сформулированное следствие можно использовать для вычисления циклового индекса производной группы двух групп подстановок, которая вводится следующим образом.

Пусть группы A и B имеют одно и то же множество объектов $X = \{1, 2, \dots, n\}$, которое является также множеством объектов симметрической группы S_n ; пусть B — подгруппа группы A . Производная группа групп A и B обозначается через A/B и имеет в качестве множества объектов совокупность всех правых смежных классов группы A по подгруппе B . Для каждой подстановки α из A существует подстановка α' из A/B , такая, что, каков бы ни был правый смежный класс βB из группы A , его образ, определяемый подстановкой α' , равен $\alpha\beta B$, т. е. справедливо соотношение

$$\alpha'(\beta B) = \alpha\beta B. \quad (7.2.7)$$

Таким образом, подстановками производной группы A/B являются все те подстановки на множестве смежных классов, которые индуцируются группой A при левостороннем умножении. Следовательно, группа A/B является гомоморфным образом группы A и ее степень равна $|A|/|B|$. Цикловой индекс $Z(S_n/B)$ можно получить с помощью следующего следствия.

Следствие. Пусть α — подстановка из S_n , имеющая порядок g . Если S_n/B — производная группа, то для каждого $k|g$ подстановка α^k из S_n/B содержит i_k циклов длины k , где i_k — коэффициент при $Z(\alpha^k)$ в декомпозиции \cup -произведения $Z(B) \cup Z(\alpha)$.

Итак, вклад подстановки α^k в $Z(S_n/B)$ равен $\prod_{k|g} s_k^{i_k}$. Для иллюстрации мы, следуя Редфилду, найдем с помощью этого следствия цикловой индекс $Z(S_5/(S_2S_3))$.

Из формул (2.2.4) и (2.2.5) имеем

$$Z(S_5) = (1/5!) (s_1^5 + 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 + 30s_1s_4 + 20s_2s_3 + 24s_5), \quad (7.2.8)$$

$$Z(S_2)Z(S_3) = \frac{1}{12} (s_1^5 + 4s_1^3s_2 + 2s_1^2s_3 + 3s_1s_2^2 + 2s_2s_3). \quad (7.2.9)$$

Теперь предположим, что α является подстановкой из S_5 с цикловой структурой s_2s_3 , так что $j_2(\alpha) = j_3(\alpha) = 1$ и порядок α равен 6. Так как делителями числа 6 являются числа 1, 2, 3 и 6, то формула (7.2.6) влечет равенство

$$Z(S_2)Z(S_3) \cup Z(\alpha) = i_1Z(\alpha) + i_2Z(\alpha^2) + i_3Z(\alpha^3) + i_6Z(\alpha^6). \quad (7.2.10)$$

С другой стороны, так как из (7.2.4) следует, что

$$Z(\alpha) = \frac{1}{6} (s_1^5 + 2s_2s_3 + 2s_1^2s_3 + s_1^3s_2), \quad (7.2.11)$$

то находим

$$Z(S_2)Z(S_3) \cup Z(\alpha) = \frac{5}{3} s_1^5 + \frac{1}{3} s_2 s_3 + \frac{1}{3} s_1^2 s_3 + \frac{2}{3} s_1^3 s_2. \quad (7.2.12)$$

Объединяя соотношения (7.2.10) и (7.2.12), получаем

$$\sum_{k|6} i_k Z(\alpha^k) = \frac{5}{3} s_1^5 + \frac{1}{3} s_2 s_3 + \frac{1}{3} s_1^2 s_3 + \frac{2}{3} s_1^3 s_2. \quad (7.2.13)$$

Член $s_2 s_3$ в левой части равенства (7.2.13) принадлежит только слагаемому $i_1 Z(\alpha)$. Значит, коэффициент при $s_2 s_3$ в левой части (7.2.13) есть $i_1/3$. Но этот же коэффициент в правой части соотношения (7.2.13) равен $1/3$; следовательно, $i_1 = 1$. Вычитая $Z(\alpha)$ из обеих частей формулы (7.2.13), приходим к равенству

$$i_2 Z(\alpha^2) + i_3 Z(\alpha^3) + i_6 Z(\alpha^6) = \frac{3}{2} s_1^5 + \frac{1}{2} s_1^3 s_2. \quad (7.2.14)$$

Член $s_1^3 s_2$ в левой части соотношения (7.2.14) входит только в слагаемое $i_2 Z(\alpha^2)$, а так как он не содержится в правой части, то $i_2 = 0$. Далее, коэффициент при $s_1^3 s_2$ в левой части равенства (7.2.14) есть $i_3/2$, в правой — $1/2$; поэтому $i_3 = 1$. Вычитая $Z(\alpha^3)$ из обеих частей формулы (7.2.14), получаем

$$i_6 Z(\alpha^6) = s_1^5$$

и, следовательно, $i_6 = 1$. Таким образом, цикловая структура подстановки α' из $S_5/(S_2 S_3)$ описывается одночленом $s_1 s_3 s_6$. Значит, все 20 подстановок из S_5 , имеющих структуру $s_2 s_3$, вносят в $Z(S_5/(S_2 S_3))$ вклад, равный $(20/5!) s_1 s_3 s_6$. Далее, замечаем, что α^2 имеет структуру $s_1^2 s_3$, и так как $(\alpha^2)^\alpha = (\alpha')^2$, то все 20 подстановок, обладающих структурой $s_1^2 s_3$, вносят в цикловой индекс производной группы общий вклад $(20/5!) s_1 s_3^3$. Аналогично, подстановка α^3 имеет структуру $s_1^3 s_2$ и все подстановки с такой структурой дают член $(10/5!) s_1^4 s_2^3$. Мы можем продолжать в том же духе, чтобы найти вклады, вносимые в цикловой индекс производной группы другими подстановками из S_5 (соответствующие вклады определяются путем выбора таких элементов, которые порождают максимальные циклические подгруппы). После завершения всех вычислений имеем

$$\begin{aligned} Z(S_5/(S_2 S_3)) = & (1/5!) (s_1^{10} + 10s_1^4 s_2^3 + 15s_1^2 s_2^4 + 20s_1 s_3^3 + \\ & + 20s_1 s_3 s_6 + 30s_2 s_4^2 + 24s_5^2). \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

Редфилд [1], стр. 451—453, использовал эту процедуру, чтобы найти цикловые индексы $Z(S_n/(S_2 S_{n-1}))$ для $n \leq 7$.

Далее мы покажем, что леммой Редфилда (см. (7.2.3)) можно воспользоваться для получения формулы Робинсона (см. Робинсон [3]), дающей сумму цикловых индексов группы всех графов. В следующей главе мы увидим, что формула (7.2.18), которая будет выведена сейчас, является существенно важной при перечислении блоков. Пусть, как обычно, S_p обозначает симметрическую группу, действующую на множестве $X = \{1, 2, \dots, p\}$, а парная группа $S_p^{(2)}$ имеет в качестве множества объектов $X^{(2)}$ — совокупность всех 2-подмножеств из X . Обозначим через $S_p^{(1, 2)}$ группу, индуцированную группой S_p и действующую на множестве $X \cup X^{(2)}$. При $p > 2$ обе группы $S_p^{(2)}$ и $S_p^{(1, 2)}$ абстрактно изоморфны группе S_p . В формуле для циклового индекса группы $S_p^{(1, 2)}$ мы используем два множества переменных, s_k и t_k , чтобы различать между собой циклы 1-подмножеств и 2-подмножеств (буква s применяется для единичных подмножеств, а буква t — для двухэлементных подмножеств). Это различие отражено в записи $Z(S_p^{(1, 2)}; s_k, t_k)$ циклового индекса группы $S_p^{(1, 2)}$. Итак, если подстановка α из S_p индуцирует подстановку α' из $S_p^{(2)}$, то вклад подстановки α в $Z(S_p^{(1, 2)})$ можно записать в виде

$$\left(\prod_{k=1}^p s_k^{j_k(\alpha)} \right) \left(\prod_{k=1}^r t_k^{i_k(\alpha')} \right),$$

где $r = \binom{p}{2}$.

Пусть E_2 — единичная группа подстановок, действующая на множестве $Y = \{0, 1\}$. Функция класса для группы S_p определяется соотношением

$$\varphi(\alpha) = \prod s_k^{i_k(\alpha)}. \quad (7.2.16)$$

Применяем лемму Редфилда (см. формулу (7.2.3)) к представлению $E_2 S_p^{(2)}$ группы S_p . Тогда правая часть формулы (7.2.3) равна $\sum Z(G)$, где суммирование ведется по всем (неизоморфным) графам с p вершинами.

Для каждой подстановки из $E_2 S_p^{(2)}$, имеющей вид $(\alpha'; (0)(1))$, выполняется равенство

$$j_1(\alpha'; (0)(1)) = \prod_{k=1}^r 2^{i_k(\alpha')}. \quad (7.2.17)$$

Следовательно, левая часть соотношения (7.2.3) равна

$$(1/p!) \sum_{\alpha \in S_p} \prod_{k=1}^r 2^{i_k(\alpha')} \prod_{k=1}^p s_k^{j_k(\alpha)}.$$

Но это выражение есть просто $Z(S_p^{(1, 2)}; s_k, 2)$. И мы пришли к утверждению, полученному Робинсоном [3].

Теорема. Сумма цикловых индексов всех графов с p вершинами дается формулой

$$\sum Z(G) = Z(S_p^{(1, 2)}; s_k, 2). \quad (7.2.18)$$

Еще один вариант формулы (7.2.18) получается в том случае, когда каждое t_k в $Z(S_p^{(1, 2)})$ заменяется на $1 + t_k$. Мы имеем сумму цикловых индексов вершинно-реберных групп $\Gamma_{0,1}(G)$ всех графов с p вершинами:

$$\sum Z(\Gamma_{0,1}(G)) = Z(S_p^{(1, 2)}; s_k, 1 + t_k). \quad (7.2.19)$$

7.3. ГРАФЫ И ОРГРАФЫ

В этом параграфе мы покажем, как графы и орграфы можно рассматривать в виде «суперпозиций» и, следовательно, как их можно перечислять с помощью теоремы перечисления Редфилда. Сначала мы заметим, что формулу (7.1.7) можно использовать для подсчета некоторых взаимно однозначных функций. Напомним (см. параграф 6.6), что B^{A^*} обозначает ограничение степенной группы B^A на подмножество всех взаимно однозначных функций.

Следствие. Если A и B — группы подстановок степени n , то число орбит, определяемых ограничением степенной группы B^{A^*} , равно $Z(A) \cap Z(B)$.

Доказательство получается с использованием соотношения (7.1.7) для $m = 2$. В самом деле, каждый класс эквивалентности $(2, n)$ -матриц, эквивалентных по столбцам, является взаимно однозначной функцией, отображающей одно множество объектов (первую строку матрицы) в другое (во вторую строку матрицы). Такие классы эквивалентности являются эквивалентными относительно групп A и B тогда и только тогда, когда соответствующие им взаимно однозначные функции принадлежат одной и той же орбите группы B^{A^*} . ■

Найдем теперь число $g_{p,q}$ графов с p вершинами и q ребрами. Чтобы достичь этого, обозначим, как обычно, через $S_p^{(2)}$ парную группу с множеством объектов $X^{(2)}$, где $X = \{1, 2, \dots, p\}$. Пусть также $Y = Y_1 \cup Y_2$ будет множеством, состоящим из

$r = \binom{p}{2}$ целых положительных чисел, причем $Y_1 = \{1, 2, \dots, q\}$

и $Y_2 = \{q + 1, \dots, r\}$. Если у группы S_q множеством объектов является Y_1 , а у группы S_{r-q} — множество Y_2 , то мы можем образовать произведение $S_q S_{r-q}$, имеющее цикловой индекс $Z(S_q) Z(S_{r-q})$. Взяв $A = S_p^{(2)}$ и $B = S_q S_{r-q}$, можно показать,

что орбиты ограниченной степенной группы являются как раз изоморфными классами графов с p вершинами и q ребрами. Каждая взаимно однозначная функция $f: X^{(2)} \rightarrow Y$ представляет граф с множеством вершин X , и в этом графе вершины i и j смежны только в том случае, когда $f\{i, j\}$ есть элемент множества Y_1 . Ясно, что эти функции принадлежат одной и той же орбите группы B^{A^*} тогда и только тогда, когда они представляют изоморфные графы. Следовательно, как заметил Редфилд, графы могут быть перечислены с помощью \cap -произведений.

Теорема. Число (p, q) -графов равно

$$g_{p,q} = Z(S_p^{(2)}) \cap Z(S_q) Z(S_{r-q}), \quad (7.3.1)$$

где $r = \binom{p}{2}$.

Редфилд, используя формулу, подобную (7.3.1), смог вычислить числа p -вершинных графов ($p \leq 7$), не имеющих изолированных вершин. Он, если применять терминологию Уайтхеда и Рассела [1], рассматривал p -вершинные графы как «симметричные антирефлексивные двоичные отношения над областями из p элементов». Точной формулы, такой, как (4.1.9), для $Z(S_p^{(2)})$ он не получил. Но парную группу можно представить в виде производной группы. Поэтому Редфилд имел возможность воспользоваться следствиями из своей теоремы декомпозиции, чтобы вывести подходящую формулу для циклового индекса $Z(S_p^{(2)})$. Для парной группы справедливо соотношение

$$S_p^{(2)} = S_p / (S_2 S_{p-2}). \quad (7.3.2)$$

Доказательство этой формулы мы опускаем, но заметим, что степень каждой ее части равна $\binom{p}{2}$ (ср. с формулой (7.2.15) для $Z(S_5 / (S_2 S_3))$). Таким образом, теорема декомпозиции была основной частью перечислительной техники Редфилда. Сделаем краткие замечания, относящиеся к выводу соответствующих формул для ориентированных графов. Так как

$$S_p^{[2]} = S_p / (E_2 S_{p-2}), \quad (7.3.3)$$

то цикловой индекс $Z(S_p^{[2]})$ редуцированной упорядоченной парной группы можно найти с помощью двух следствий из теоремы декомпозиции. После этого получается формула для числа $d_{p,q}$ орграфов с p вершинами и q дугами:

$$d_{p,q} = Z(S_p^{[2]}) \cap Z(S_q) Z(S_{r-q}), \quad (7.3.4)$$

где $r = p(p-1)$.

7.4. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ РЕДФИЛДА

В этом параграфе мы построим более общую группу подстановок, чем та, которая требовалась при доказательстве теоремы перечисления Редфилда, и дадим точную формулу для числа орбит в этой новой группе. Полученный результат позволит нам перечислить графы, являющиеся суперпозициями взаимозаменяемых экземпляров одного и того же графа (см. Палмер и Робинсон [1, 2]), а также даст новый подход к перечислению мультиграфов (см. Палмер [4]).

Пусть A и B — группы подстановок с множествами объектов $X = \{1, 2, \dots, m\}$ и $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ соответственно, и пусть W — совокупность всех $(m \times n)$ -матриц, в которых элементы каждой строки попарно различны и являются объектами множества Y . Матричная группа $[A; B]$ групп A и B действует на множестве всех классов эквивалентности, определяемых эквивалентностью по столбцам, рассматриваемой на совокупности W . Это действие осуществляется в соответствии со следующим правилом. Для каждой подстановки α из A и каждого набора $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ из m подстановок, принадлежащих группе B , существует подстановка в $[A; B]$, обозначаемая $[\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]$, такая, что класс эквивалентности, содержащий матрицу $[w_{ij}]$, преобразуется этой подстановкой в класс, которому принадлежит матрица $[\beta_i w_{\alpha i, j}]$. Другими словами, сначала подстановка α переставляет строки, а затем каждая подстановка β_i переставляет элементы в i -й строке. Например, пусть $A = S_2$ и $B = S_2 [E_2]$, так что матричная группа $[S_2; S_2 [E_2]]$ преобразует $(2, 4)$ -матрицы. Если возьмем $\alpha = (12)$, $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)$ и $\beta_2 = (12)(34)$, то подстановка $[\alpha; \beta_1, \beta_2]$ преобразует класс, содержащий матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

в класс, которому принадлежит матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Из определения следует, что если $A = E_m$ — единичная группа подстановок, то число $N [E_m; B]$ орбит матричной группы равно \cap -произведению, примененному к m экземплярам циклового индекса $Z(B)$. Значит, если B является группой графа G , имеющего порядок n , то $N [E_m; \Gamma(G)]$ есть число суперпозиций, составленных из m экземпляров графа G . С другой стороны, $N [S_m; \Gamma(G)]$ есть число суперпозиций, в которых копии графа G взаимозаменяемы. Для иллюстрации рассмотрим простую цепь P_4 порядка 4. Все восемь графов, являющихся суперпозициями двух экземпляров цепи P_4 , даны на рис. 7.4.1. Сплошные и штриховые ребра используются для того, чтобы можно было отличить друг от друга

два экземпляра цепи P_4 . Если в графах, изображенных на рисунке, взаимозаменить сплошные и штриховые ребра, то два последних графа на рис. 7.4.1 «поменяются местами», а остальные «перейдут» в себя. Итак, рис. 7.4.1 подтверждает, что $N[E_2; \Gamma(P_4)] = 8$ и $N[S_2; \Gamma(P_4)] = 7$; это последнее число вычислено ниже (см. формулу (7.4.13)).

Чтобы сформулировать теорему, дающую формулу для числа $N[A; B]$ орбит матричной группы $[A; B]$, нам потребуются несколько определений. Как обычно, R обозначает кольцо полиномов, зависящих от переменных s_1, s_2, \dots, s_n . Для каждого целого положительного числа r определим функцию $J_r: R \rightarrow R$.

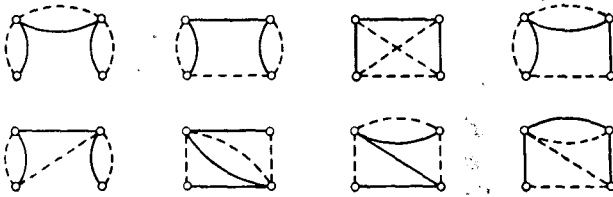


Рис. 7.4.1 Суперпозиции двух простых цепей четвертого порядка.

Удобно сначала определить последовательность функций d_1, d_2, \dots , зависящую от целых чисел r и $k \geq 1$. Для каждого i положим

$$d_i = \begin{cases} s_{ki}/k, & \text{если } i|r \text{ и } (r/i, k) = 1, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases} \quad (7.4.1)$$

Используя, как обычно, S_j для обозначения симметрической группы j -й степени, определим $J_r(s_k^j)$ с помощью равенства

$$J_r(s_k^j) = j! k^j Z(S_j; d_1, d_2, \dots, d_j). \quad (7.4.2)$$

Заметим, что для произвольного простого числа p формула (7.4.2) может быть переписана в следующем виде:

$$J_p(s_k^j) = \begin{cases} 0, & \text{если } p|k \text{ и } p \nmid j, \\ (j! k^{j(p-1)/p} s_{pk}^{j/p}) / ((j/p)! p^{j/p}), & \text{если } p|k \text{ и } p|j, \\ \sum_{t=0}^{[j/p]} (j! k^{(p-1)t} s_{kp}^t s_k^{j-tp}) / ((j-tp)! t! p^t), & \text{если } p \nmid k. \end{cases} \quad (7.4.3)$$

Затем определяем функцию J_r для одночленов $s_1^j s_2^j \dots s_n^j$:

$$J_r(s_1^j s_2^j \dots s_n^j) = \prod_{k=1}^n J_r(s_k^j). \quad (7.4.4)$$

Далее функция J_r распространяется по линейному закону на все кольцо R . В частности,

$$J_r(Z(B)) = |B|^{-1} \sum_{\beta \in B} J_r \left(\prod_{k=1}^n s_k^{j_k(\beta)} \right) \quad (7.4.5)$$

и

$$J_1(Z(B)) = Z(B). \quad (7.4.6)$$

Теперь мы определяем произведение для всей совокупности функций -- $\{J_r\}$:

$$J_1^{i_1} J_2^{i_2} \dots J_m^{i_m}(Z(B)) = J_1^{i_1}(Z(B)) \cup J_2^{i_2}(Z(B)) \cup \dots \cup J_m^{i_m}(Z(B)), \quad (7.4.7)$$

где каждое $J_r^{i_r}(Z(B))$ представляет собой сокращение для \cup -произведения длины i_r , т. е. $J_r^{i_r}(Z(B)) = J_r(Z(B)) \cup \dots \cup J_r(Z(B))$ и «сомножитель» $J_r(Z(B))$ берется i_r раз.

Теорема. Число орбит $N[A; B]$, определяемых матричной группой $[A; B]$, равно

$$N[A; B] = [Z(A; J_1, J_2, \dots, J_m)Z(B)]_{s_k=1}. \quad (7.4.8)$$

Применим эту теорему к нахождению числа $N[S_2; \Gamma(P_4)]$ графов, являющихся суперпозициями двух взаимозаменяемых экземпляров цепи P_4 .

Цикловые индексы групп $\Gamma(P_4)$ и S_2 имеют вид

$$Z(\Gamma(P_4)) = \frac{1}{2}(s_1^4 + s_2^2), \quad (7.4.9)$$

$$Z(S_2; J_1, J_2) = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2). \quad (7.4.10)$$

Из (7.4.6) следует, что $J_1(Z(\Gamma(P_4))) = Z(\Gamma(P_4))$, а из (7.4.3) получаем

$$J_2(Z(\Gamma(P_4))) = \frac{1}{2}(s_1^4 + 6s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 2s_4). \quad (7.4.11)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} Z(S_2; J_1, J_2) \left(\frac{1}{2}(s_1^4 + s_2^2) \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4}(24s_1^4 + 8s_2^2) + \frac{1}{2}(s_1^4 + 6s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 2s_4) \right\}. \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Полагая в этом выражении $s_k = 1$ для всех k , приходим к равенству

$$N[S_2; \Gamma(P_4)] = 7, \quad (7.4.13)$$

которое согласуется с рис. (7.4.1).

Таблица 7.4.1

Суперпозиции циклов

n	$N [E_2; D_n]$	$N [S_2; D_n]$	$N [E_3; D_n]$	$N [S_3; D_n]$
3	1	1	1	1
4	2	2	5	3
5	4	4	24	9
6	12	10	391	89

Числа суперпозиций двух и трех циклов порядков $n \leq 6$ даны в табл. 7.4.1. Заметим, что если составляющие (конституэнтные) циклы взаимозаменяемы, то существуют две пары эквивалентных суперпозиций двух циклов шестого порядка.

Используя матричную группу, можно также подсчитать число $m_{p,q}$ мультиграфов с p вершинами и q ребрами. Пусть G является объединением $K_2 \cup \bar{K}_{p-2}$ двух непересекающихся (по вершинам) графов. Тогда суперпозиции, построенные с использованием q взаимозаменяемых экземпляров графа G , соответствуют в точности указанным выше мультиграфам. Так как $\Gamma(G) = S_2 S_{p-2}$, то мы получаем следующее утверждение из статьи Палмера [4].

Теорема. Число $m_{p,q}$ мультиграфов с p вершинами и q ребрами дается формулой

$$m_{p,q} = [Z(S_q; J_1, J_2, \dots, J_q)(Z(S_2)Z(S_{p-2}))]_{s_k=1}. \quad (7.4.14)$$

Сейчас мы набросаем некоторые детали, относящиеся к нахождению числа $m_{5,4}$. Прежде всего формула (7.2.9) дает произведение $Z(S_2)Z(S_3)$, а $Z(S_4; J_1, J_2, J_3, J_4)$ получается из соотношения (4.1.10). Используя далее равенства (7.4.1), ..., (7.4.5), имеем

$$J_2(Z(S_2)Z(S_3)) = \frac{1}{12}(s_1^5 + 10s_1^3s_2 + 15s_1s_2^2 + 2s_1^2s_3 + 2s_2s_3 + 6s_1s_4),$$

$$J_3(Z(S_2)Z(S_3)) = \frac{1}{12}(s_1^5 + 20s_1^2s_3 + 4s_1^3s_2 + 8s_2s_3 + 3s_1s_2^2), \quad (7.4.15)$$

$$J_4(Z(S_2)Z(S_3)) = \frac{1}{12}(s_1^5 + 10s_1^3s_2 + 15s_1s_2^2 + 30s_1s_4 + 2s_1^2s_3 + 2s_2s_3).$$

Применяя формулу (7.4.7), определяющую произведения, находим

$$[J_1^4(Z(S_2)Z(S_3))]_{s_k=1} = 107,$$

$$[6J_1^2J_2(Z(S_2)Z(S_3))]_{s_k=1} = 162,$$

$$[8J_1 J_3 (Z(S_2) Z(S_3))]_{s_k=1} = 40, \quad (7.4.16)$$

$$[3J_2^2 (Z(S_2) Z(S_3))]_{s_k=1} = 69,$$

$$[6J_4 (Z(S_2) Z(S_3))]_{s_k=1} = 30.$$

Следовательно, $m_{5,4} = \frac{1}{24} (107 + 162 + 40 + 69 + 30) = 17$.

Существенным преимуществом описанного метода является то, что, во-первых, при его использовании нужны только формулы для цикловых индексов симметрических групп, а, во-вторых, числа m_p, q вычисляются непосредственно.

7.5. ОБЩИЕ ГРАФЫ

В *общем графе* допускаются и кратные ребра, и кратные петли. По определению каждая петля вносит в степень соответствующей вершины вклад, равный 2. В данном параграфе мы покажем, как Рид [1] смог перечислить общие графы со специальной последовательностью степеней вершин (он осуществил это, найдя взаимно однозначное соответствие между указанными графами и некоторыми суперпозициями).

Сначала нам понадобится формула для числа 2-раскрашенных мультиграфов, т. е. таких мультиграфов, у которых множество



Рис. 7.5.1 Два двудольных графа.

вершин разбито на два подмножества — одно подмножество состоит только из красных вершин, а другое — из синих, причем каждое ребро графа соединяет некоторую красную вершину с синей вершиной. На рис. 7.5.1 показаны 2-раскрашенные графы с двумя красными вершинами, имеющими степень 3, и тремя синими вершинами, имеющими степень 2. Следующая теорема дает формулу для числа 2-раскрашенных графов со специальными степенями вершин.

Теорема. Число 2-раскрашенных графов, которые для каждого целого положительного числа k имеют ровно r_k красных вершин степени k и ровно b_k синих вершин степени k , дается формулой

$$Z \left(\prod_k S_{r_k} [S_k] \right) \cap Z \left(\prod_k S_{b_k} [S_k] \right). \quad (7.5.1)$$

Например, легко показать, что $Z(S_3 | S_2) \cap Z(S_2 | S_3) = 2$. Это согласуется с рис. 7.5.1.

Доказательство. Пусть G_1 — граф, содержащий для каждого k ровно r_k компонент связности, представляющих собой полные графы с k вершинами. Аналогично, пусть граф G_2 имеет для каждого k ровно b_k компонент, являющихся полными графами порядка k . Замечаем, что число ребер в 2-раскрашенных графах, подлежащих перечислению, равно $q = \sum_k kr_k = \sum_k kb_k$. Следовательно, графы G_1 и G_2 имеют одно и то же число вершин, а именно q . Если компоненты графа G_1 интерпретировать как красные вершины, а компоненты графа G_2 — как синие вершины, то каждая суперпозиция графов G_1 и G_2 соответствует, очевидно, некоторому 2-раскрашенному графу. Это соответствие является, как легко видеть, взаимно однозначным, и, следовательно, число 2-раскрашенных графов равно $Z(G_1) \cap Z(G_2)$. Далее группы $\Gamma(G_1)$ и $\Gamma(G_2)$ могут быть представлены в виде произведения вечночных произведений; это приводит к формуле (7.5.1). ■

Перейдем к поиску формулы, дающей число таких общих графов, которые для всякого целого k имеют ровно d_k вершин степени k . Следовательно, число ребер в каждом из этих графов равно $q = \frac{1}{2} \sum k d_k$. Предположим, что все вершины в таком графе раскрашены в красный цвет, и затем на каждом ребре поставим новую синюю вершину. Получим 2-раскрашенный граф, в котором все q синих вершин имеют степень 2. Указанное соответствие между общими графами и 2-раскрашенными графами является, очевидно, взаимно однозначным. Поэтому мы приходим к следующему результату.

Следствие. Число общих графов, которые для каждого k имеют в точности d_k вершин степени k , дается формулой

$$Z\left(\prod_k S_{d_k} | S_k\right) \cap Z(S_q | S_2). \quad (7.5.2)$$

Например, число общих графов с двумя вершинами степени 3 равно $Z(S_2 | S_3) \cap Z(S_3 | S_2) = 2$. Соответствующие этому числу два общих графа можно получить путем изъятия вершин¹ степени 2 у графов, изображенных на рис. 7.5.1.

Формулы для подсчета общих однородных графов и общих кубических графов получаются сразу же, как частные случаи формулы (7.5.2).

¹ Вершина выбрасывается, а «концы» ребер, инцидентных ей, «склеиваются»; из двух ребер получается при этом одно ребро. — Прим. перев.

Следствие. Число общих n -вершинных графов, являющихся однородными графами степени k , равно

$$Z(S_n [S_k]) \cap Z(S_{nk/2} [S_2]). \quad (7.5.3)$$

Следствие. Число общих кубических графов с $2n$ вершинами находится по формуле

$$Z(S_{2n} [S_3]) \cap Z(S_{3n} [S_2]). \quad (7.5.4)$$

В формулах, выведенных выше, мы имели дело с перечислением непомеченных графов. Рид [1] с большим успехом применил суперпозиционную теорию к перечислению различных типов помеченных графов. Из формулы (7.5.4), например, довольно просто следует, что число общих кубических графов с $2n$ помеченными вершинами равно

$$Z(E_{2n} [S_3]) \cap Z(S_{3n} [S_2]). \quad (7.5.5)$$

Нашей следующей целью является получение формул для перечисления помеченных кубических графов, не имеющих петель и кратных ребер. Соответствующий результат будет выражен в форме, удивительно напоминающей соотношение (7.5.4). Сначала мы докажем более общие результаты; после чего случай кубических графов получается мгновенно.

Как и в формуле (2.6.1), разность $Z(A_k) - Z(S_k)$ будем обозначать через $Z(A_k - S_k)$. Будем также использовать обозначения из гл. 4, относящиеся к цикловому индексу веночного произведения. В частности, если P_1 и P_2 — многочлены от переменных s_1, s_2, \dots , то $P_1 [P_2]$ обозначает многочлен, получаемый путем замены каждой переменной s_k , принадлежащей многочлену P_1 , таким многочленом, который строится из P_2 с помощью следующей процедуры: индексы всех переменных, входящих в P_2 , умножаются на k . Значит, выражения вида $Z(S_q) [Z(A_2 - S_2)]$ и $Z(S_{3n}) [Z(A_2 - S_2)]$ уже определены.

Три нижеследующих утверждения получаются путем применения теоремы перечисления Пойа с подходящими группами и перечисляющими рядами для фигур и, кроме того, путем представления соответствующих коэффициентов в виде \cap -произведений (подробности см. у Рида [1]). Эти три результата и их следствия позволяют перечислить три вида помеченных графов с заданным разбиением и три вида помеченных кубических графов: (1) мультиграфы, (2) общие графы, не имеющие кратных ребер, (3) графы.

Теорема. Число помеченных мультиграфов с d_k вершинами степени k и, следовательно, с $q = \frac{1}{2} \sum k d_k$ ребрами дается формулой

$$Z\left(\prod_k E_{d_k} [S_k]\right) \cap Z(S_q) [Z(A_2 - S_2)]. \quad (7.5.6)$$

Применим теперь эту теорему для кубических графов с $2n$ вершинами. Получаем следующее утверждение.

Следствие. Число помеченных кубических мультиграфов с $2n$ вершинами равно

$$Z(E_{2n} [S_3]) \cap Z(S_{3n}) [Z(A_2 - S_2)]. \quad (7.5.7)$$

Исключая кратные ребра, но допуская петли, получаем еще одну теорему.

Теорема. Число помеченных общих графов, которые не имеют кратных ребер и содержат ровно q ребер и d_k вершин степени k , дается формулой

$$Z\left(\prod_k E_{d_k} [S_k]\right) \cap Z(A_q - S_q) [Z(S_2)]. \quad (7.5.8)$$

Применив эту формулу к кубическим графам, получаем

Следствие. Число помеченных общих кубических графов с $2n$ вершинами и без кратных ребер равно

$$Z(E_{2n} [S_3]) \cap Z(A_{3n} - S_{3n}) [Z(S_2)]. \quad (7.5.9)$$

Наконец, запрещая и петли, и кратные ребра, выводим следующие утверждения.

Теорема. Число помеченных графов с q ребрами и d_k вершинами степени k равно

$$Z\left(\prod_k E_{d_k} [S_k]\right) \cap Z(A_q - S_q) [Z(A_2 - S_2)]. \quad (7.5.10)$$

Следствие. Число помеченных кубических графов с $2n$ вершинами и, следовательно, с $3n$ ребрами находится по формуле

$$Z(E_{2n} [S_3]) \cap Z(A_{3n} - S_{3n}) [Z(A_2 - S_2)]. \quad (7.5.11)$$

Вычисление выражений (7.5.7), (7.5.9) и (7.5.11) сопряжено со значительным количеством выкладок. Однако Риду [1] удалось получить несколько общих результатов, относящихся к преобразованию этих соотношений и к их оценке. Например, в случае формулы (7.5.11) он доказал следующее утверждение.

Следствие. Число помеченных кубических графов с $2n$ вершинами равно

$$\frac{(2n)!}{6^n} \sum_{j, k} \frac{(-1)^j (6k-2j)! 6^j}{(3k-j)! (2k-j)! j! (n-k)!} 48^k \sum_i \frac{(-1)^i j!}{(j-2i)! i!}; \quad (7.5.12)$$

кроме того, при достаточно больших значениях n это число асимптотически равно

$$\frac{(6n)! e^{-2}}{288^n (3n)!}. \quad (7.5.13)$$

Дальнейшее обсуждение проблемы вычисления \cap -произведений, а также рассмотрение методов, использующих S -функции можно найти у Рида [8]. Другие асимптотические результаты излагаются в гл. 9.

УПРАЖНЕНИЯ

- 7.1. Сколько суперпозиций можно получить, используя три ориентированных цикла шестого порядка?
- 7.2. Найти две группы подстановок A и B , таких, чтобы декомпозиция \cup -произведения $Z(A) \cup Z(B)$ (в сумму цикловых индексов) была неоднозначной. (Редфилд [1])
- 7.3. Выразить $Z(A; J_1, \dots, J_m)Z(B)$ в виде суммы $N[A; B]$ цикловых индексов. (Палмер и Робинсон [2])
- 7.4. Сколько орбит, состоящих из взаимно однозначных функций, определяют ограниченные степенные группы $E_n^{E^*m}$, $E_n^{S^*m}$ и $S_n^{E^*m}$?
- 7.5. Парная группа $S_p^{(2)}$ и производная группа $S_p/(S_2S_{p-2})$ идентичны.
- 7.6. Используя соотношение (7.2.6), вычислить $Z(S_6/(S_2S_4))$.
- 7.7. Сколько существует графов, являющихся суперпозициями трех взаимозаменяемых экземпляров ориентированного цикла шестого порядка?
- 7.8. Вычислить число (а) общих кубических графов порядков 4, 6 и 8, (б) помеченных кубических графов тех же порядков.
- 7.9. Нарисовать 12 суперпозиций двух циклов шестого порядка и 10 суперпозиций с взаимозаменяемыми циклами.
- 7.10. Коэффициент при x^m в $Z(S_n/B, 1/(1-x))$ равен $N[S_m; B]$. Следовательно, производящая функция для суперпозиций, построенных с использованием взаимозаменяемых экземпляров произвольного графа G порядка p , равна $Z(S_p/\Gamma(G), 1/(1-x))$.

*Not merely a chip of the old
block, but the old block itself.*

Edmund Burke¹

Глава 8 | БЛОКИ

В 1950 году на заседании Американского Математического общества физик-теоретик Г. Э. Уленбек прочитал лекцию, посвященную памяти Гиббса. Лекция называлась «Нерешенные задачи статистической механики», и наряду с другими задачами в ней была сформулирована задача перечисления блоков. Впоследствии Риддел [1] и Форд с Уленбеком [1] перечислили помеченные блоки (см. § 1.3). Однако лишь Робинсону [3] удалось решить задачу перечисления непомеченных блоков.

Так как в гл. 4 мы уже перечислили связанные графы, то для перечисления блоков достаточно найти число связанных графов, имеющих хотя бы одну точку сочленения. Обычные производящие функции для этой цели не подходят: они не несут достаточного количества информации о структуре графов. Подходящая в этом случае техника включает использование сумм цикловых индексов группы графов (см. § 7.2). Подобный прием неявно содержался еще в редфилдовской теореме декомпозиции (см. Редфилд [1]), но был полностью развит только Робинсоном в его решении задачи перечисления непомеченных блоков. Метод Робинсона можно также использовать для перечисления графов с данными блоками, связанных графов без висячих вершин, ациклических орграфов и других видов графов. Материал данной главы возник по существу благодаря работам Робинсона.

8.1. ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММЫ РЕДФИЛДА

Для доказательства теоремы композиции, содержащейся в § 8.3, нам нужно несложное обобщение леммы Редфилда (см. формулу (7.2.3)). Пусть A — группа подстановок с множеством объектов X , и пусть R — коммутативное кольцо, содержащее кольцо

¹ Не просто копия отца, а сам живой отец (Эдмунд Бёрк). — *Прим., перев.*

рациональных чисел. Пусть функция φ отображает декартово произведение $A \times X$ в R и удовлетворяет следующему условию: для любых подстановок α и β из A и любого объекта x из X

$$\text{если } \alpha x = \beta y = x, \text{ то } \varphi(\alpha, x) = \varphi(\beta \alpha^{-1}, y). \quad (8.1.1)$$

Орбиту, определяемую группой A и содержащую объект x , обозначим через \tilde{x} . Положим $A(x) = \{\alpha \in A | \alpha x = x\}$. Тогда новая лемма может быть сформулирована следующим образом.

Лемма. Для всякой функции φ , удовлетворяющей условию (8.1.1), справедливо тождество

$$|A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{x = \alpha x} \varphi(\alpha, x) = \sum_{\tilde{x}} |A(x)|^{-1} \sum_{\alpha \in A(x)} \varphi(\alpha, x). \quad (8.1.2)$$

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и доказательство формулы (7.2.3): надо поменять порядок суммирования в левой части соотношения (8.1.2). Условие (8.1.1) позволяет тогда вместо суммирования по всем элементам из X применить суммирование по орбитам, определяемым группой A в множестве X . ■

Заметим, что тождество (8.1.2) справедливо и в том случае, когда X — бесконечное счетное множество; при этом требуется, чтобы все участвующие в рассмотрении суммы были определены. Если ψ — функция класса для группы A , то $\varphi(\alpha, x) = \psi(\alpha)$ и условие (8.1.1), очевидно, выполняется; соотношение (8.1.2) переходит тогда в формулу (7.2.3) из леммы Редфилда.

8.2. КОМПОЗИЦИЯ ГРУПП

Чтобы сформулировать теорему композиции, приводимую в § 8.3, необходимо обобщить определение композиции (или веночного произведения) групп подстановок. Мы дадим также формулу для циклового индекса этой новой группы, обобщив формулу Пойа (см. соотношение (4.3.15)).

Как отмечается в книге Харари [1], стр. 196, любой граф G можно представить в виде: $G = n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_r G_r$, где n_i — число компонент графа G , изоморфных графу G_i . В этом случае группу графа G можно записать как произведение композиций соответствующих групп:

$$\Gamma(G) = \prod_{k=1}^r S_{n_k} [\Gamma(G_k)]. \quad (8.2.1)$$

Например, граф $2K_{1,2} \cup 3K_2$, изображенный на рис. 8.2.1, имеет следующую группу автоморфизмов:

$$\Gamma(2K_{1,2} \cup 3K_2) = (S_2 [S_1 S_2]) (S_3 [S_2]). \quad (8.2.2)$$

Пусть $G_1 = K_{1,2}$ и $G_2 = K_2$. Тогда всякая функция f , отображающая множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ в $Y = \{1, 2\}$, соответствует естественным образом некоторому графу, компонентами которого являются графы $K_{1,2}$ и K_2 . Например, любая функция f , отображающая два элемента из X в 1, а остальные три — в 2, соответствует графу $2G_1 \cup 3G_2$. Положим $f(1) = f(2) = 1$ и $f(3) = f(4) = f(5) = 2$. Тогда подстановки α , действующие на X и такие, что

$$f(x) = f(\alpha x) \quad (8.2.3)$$

для всех x из X , образуют группу, идентичную произведению $S_2 S_3$. Эта группа обозначается через $S_5(f)$, потому что она со-



Рис. 8.2.1 Граф $2K_{1,2} \cup 3K_2$.

стоит из таких подстановок группы S_5 , которые оставляют неподвижной функцию f . Группа $S_5(f)$ показывает, какие компоненты графа $2G_1 \cup 3G_2$ можно переставлять друг с другом. Памятуя об этом примере, мы сейчас займемся обобщением композиции групп.

Пусть A — группа подстановок с множеством объектов $X = \{1, 2, \dots, n\}$, и пусть f — функция, действующая из X в $Y = \{1, 2, \dots, m\}$. Подгруппа $A(f)$ группы A определяется следующим образом:

$$A(f) = \{\alpha \in A \mid \forall x \in X (f(x) = f(\alpha x))\}. \quad (8.2.4)$$

Если для каждого i из Y положить $X_i = f^{-1}(i)$, то $\alpha(X_i) = X_i$ при всяком $i \in Y$ и любой подстановке $\alpha \in A(f)$. Пусть B_i , $i = 1, \dots, m$, обозначает некоторую группу подстановок с множеством объектов Y_i . Тогда обобщенная композиция групп, обозначаемая через $A(f)[B_1, \dots, B_m]$, имеет своим множеством объектов объединение $\bigcup_{i=1}^m (X_i \times Y_i)$. Для любой подстановки $\alpha \in A(f)$ и любого набора τ_1, \dots, τ_m функций, таких, что $\tau_i: X_i \rightarrow B_i$, $i = 1, \dots, m$ (т. е. $\tau_i(x)$ является подстановкой группы B_i), существует подстановка в группе $A(f)[B_1, \dots, B_m]$, обозначаемая $(\alpha; \tau_1, \dots, \tau_m)$ и действующая на упорядоченные пары (x, y) в соответствии с правилом:

$$(\alpha; \tau_1, \dots, \tau_m)(x, y) = (\alpha x, \tau_i(x)y), \quad (8.2.5)$$

всякий раз, когда (x, y) принадлежит $X_i \times Y_i$. Нетрудно проверить, что так определенные подстановки действительно образуют группу относительно умножения. Группа $A(f)[B_1, \dots, B_m]$,

если говорить образно, переставляет экземпляры множеств Y_i , $i = 1, \dots, m$, причем для каждого элемента множества X_i берется по одному экземпляру. Экземпляры множества Y_i переставляются между собой с помощью подстановок из $A(f)$, в то время как элементы каждого экземпляра переставляются независимо, с использованием групп B_i .

Так как для каждого i выполняется равенство: $\alpha(X_i) = X_i$, то при всяком k мы можем определить $j_k(\alpha, X_i)$ — число циклов длины k , содержащихся в ограничении подстановки α на множество X_i . Обобщение формулы (4.3.15) можно тогда дать в следующей форме.

Теорема. Цикловой индекс обобщенной композиции групп дается соотношением

$$Z(A(f) [B_1, \dots, B_m]) = |A(f)|^{-1} \sum_{\alpha \in A(f)} \prod_{i=1}^m \prod_k (Z(B_i, s_k, s_{2k}, s_{3k}, \dots))^{j_k(\alpha, X_i)}. \quad (8.2.6)$$

Заметим, что если $m = 1$, то $Z(A(f) [B_1]) = Z(A(f) [Z(B_1)])$ и формула (8.2.6) преобразуется в формулу (4.3.15). Доказательство соотношения (4.3.15) можно приспособить для доказательства равенства (8.2.6).

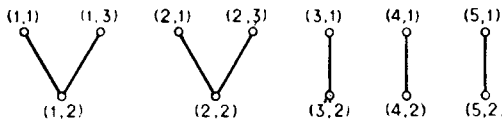


Рис. 8.2.2 Граф $2K_{1,2} \cup 3K_2$ с множеством вершин $(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$.

Для того чтобы проиллюстрировать теорему, вернемся к примеру, рассмотренному выше, в котором $A = S_5$, $f(1) = f(2) = 1$ и $f(3) = f(4) = f(5) = 2$. В этом случае $X_1 = \{1, 2\}$ и $X_2 = \{3, 4, 5\}$. Возьмем $B_1 = \Gamma(K_{1,2}) = S_1 S_2$ и $B_2 = \Gamma(K_2) = S_2$ с множествами объектов $Y_1 = \{1, 2, 3\}$ и $Y_2 = \{1, 2\}$ соответственно. Тогда множеством объектов группы $S_5(f) [S_1 S_2, S_2]$ будет множество $(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$ и упорядоченные пары из него сопоставляются вершинам графа $2K_{1,2} \cup 3K_2$ так, как указано на рис. 8.2.2.

Каждая функция $\tau_1: X_1 \rightarrow \Gamma(K_{1,2})$ связывает с каждым экземпляром графа $K_{1,2}$ некоторую подстановку из $\Gamma(K_{1,2})$; функция $\tau_2: X_2 \rightarrow \Gamma(K_2)$ делает то же самое с графом K_2 . Предположим, что $(\alpha; \tau_1, \tau_2) \in S_5(f) [S_1 S_2, S_2]$. Из равенства (8.2.5) следует, что $\tau_1(1)$ и $\tau_1(2)$ переставляют вершины двух экземпляров графа $K_{1,2}$, а $\tau_2(3)$, $\tau_2(4)$ и $\tau_2(5)$ переставляют вершины трех

экземпляров графа K_2 . Тогда α переставляет компоненты графа $2K_{1,2} \cup 3K_2$ между собой. Таким образом, мы видим, что

$$\Gamma(2K_{1,2} \cup 3K_2) = S_5(f) [S_1 S_2, S_2]. \quad (8.2.7)$$

Наконец, из формулы (8.2.6) следует, что цикловой индекс группы этого графа имеет вид

$$Z(S_5(f) [S_1 S_2, S_2]) = (1/2! 3!) \{ (Z(S_1 S_2))^2 + Z(S_1 S_2; s_2, s_4) \} \times \\ \times \{ (Z(S_2))^3 + 3Z(S_2) Z(S_2; s_2, s_4) + 2Z(S_2; s_3, s_6) \}.$$

Справедливость приведенного соотношения легко доказать, применив формулы (4.3.14), (2.2.14) и (8.2.2).

8.3. ТЕОРЕМА КОМПОЗИЦИИ

Для всякого множества \mathcal{H} графов будем обозначать через $Z(\mathcal{H})$ сумму цикловых индексов групп всех графов из множества \mathcal{H} (ср. с формулой (7.2.18), в которой рассматривалась сумма цикловых индексов групп всех графов порядка p). В частном случае каждая из этих групп может быть обобщенной композицией групп, построенной из подгруппы группы A и последовательности групп B_1, B_2, B_3, \dots . Мы покажем здесь, как получается $Z(\mathcal{H})$, если известны цикловые индексы $Z(A)$ и $Z(B_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Рассмотрим важный частный случай. Пусть A — группа подстановок с множеством объектов $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть Y — непустое подмножество множества целых положительных чисел. Для каждого $i \in Y$ возьмем группу подстановок B_i с множеством объектов Y_i . Практически это означает, что каждый элемент i из Y соответствует некоторому графу с группой B_i и множеством вершин Y_i . В наших рассуждениях мы требуем, чтобы в совокупности $\{Y_i\}$ одна и та же фиксированная мощность была не более чем у конечного числа множеств Y_i , так что сумма $\sum Z(B_i)$, взятая по всем $i \in Y$, определена.

Для каждой функции $f: X \rightarrow Y$ определяем, как и выше, подгруппу $A(f)$ группы A . Далее, на множестве таких функций (из X в Y) вводим отношение эквивалентности: две функции f и g называются *эквивалентными относительно группы A* , и это записывается в виде $f \sim g$, если для некоторой подстановки α из A и для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$f(x) = g(\alpha x). \quad (8.3.1)$$

Другими словами, $f \sim g$ означает, что функции f и g принадлежат одной и той же орбите степенной группы E^A . Обозначим множество классов эквивалентности (множество орбит) через \mathcal{F} . Свяжем

теперь с каждой функцией f некоторую обобщенную композицию групп: если $f(X) = \{i_1, \dots, i_m\}$, то соответствующая группа строится из групп $A(f)$ и B_{i_1}, \dots, B_{i_m} и может быть обозначена через $A(f) [B_{i_1}, \dots, B_{i_m}]$. Если f и g эквивалентны, то $A(f)$ и $A(g)$ являются идентичными группами подстановок. Действительно, если $f(x) = g(\gamma x)$ для некоторой подстановки γ из A и при всех $x \in X$, то $\gamma A(f)\gamma^{-1} = A(g)$, т. е. группы $A(f)$ и $A(g)$ — сопряженные. Более того, группы $A(f) [B_{i_1}, \dots, B_{i_m}]$ и $A(g) [B_{i_1}, \dots, B_{i_m}]$ — также идентичны. Значит, цикловые индексы этих групп совпадают и мы можем естественным образом определить цикловой индекс $Z(F)$ произвольного класса эквивалентности F , принадлежащего множеству \mathcal{F} : полагаем $Z(F)$ равным цикловому индексу обобщенной композиции групп, определяемой произвольной функцией f из F . Введем обозначение: $Z(\mathcal{F}) = \sum_{f \in \mathcal{F}} Z(F)$. Тогда основной результат, содержащийся в нижеследующей теореме, связывает $Z(\mathcal{F})$ с $Z(A)$ и $Z(B_i)$. Напомним, что через $Z(A) [\sum Z(B_i)]$ мы обозначаем степенной ряд, получаемый путем замены каждой переменной s_k в цикловом индексе $Z(A)$ на

$$\sum Z(B_i; s_k, s_{2k}, s_{3k}, \dots),$$

где сумма берется по всем $i \in Y$.

Теорема композиции. Сумма $Z(\mathcal{F})$ цикловых индексов получается посредством образования композиции циклового индекса $Z(A)$ относительно $\sum Z(B_i)$:

$$Z(\mathcal{F}) = Z(A) [\sum Z(B_i)], \quad (8.3.2)$$

где суммирование ведется по всем $i \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим представление группы A в виде степенной группы E^A с множеством объектов Y^X , т. е. $A' = E^A$ и для каждой подстановки α из A существует подстановка α' из A' , такая, что

$$(\alpha' f) x = f(\alpha x) \quad (8.3.3)$$

при любой функции $f \in Y^X$ и при всех $x \in X$.

Пусть R — кольцо степенных рядов, зависящих от переменных s_1, s_2, s_3, \dots и рассматриваемых над полем рациональных чисел. Определим отображение $\varphi: A' \times Y^X \rightarrow R$ с помощью формулы

$$\varphi(\alpha', f) = \prod_k \prod_{i \in I(X)} (Z(B_i; s_k, s_{2k}, \dots))^{i_k(\alpha', X_i)}. \quad (8.3.4)$$

Можно убедиться в том, что φ удовлетворяет условию (8.1.1). Но тогда, применяя лемму из § 8.1, имеем

$$|A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{f \in \alpha} \varphi(\alpha', f) = \sum_f |A(f)|^{-1} \sum_{\alpha \in A(f)} \varphi(\alpha', f), \quad (8.3.5)$$

где первая сумма, стоящая в правой части, берется по всем классам F из \mathcal{F} , а f есть некоторый элемент из F . Заметим, что, хотя лемма из § 8.1 сформулирована только для того случая, когда суммы конечны, она справедлива и в более общем случае: когда все суммы определены. В соотношении (8.3.5) все суммы определены, ибо мы ранее потребовали, чтобы одинаковая степень была не более чем у конечного числа групп B_i .

Используя формулы (8.3.4) и (8.2.6), легко заметить, что правая часть равенства (8.3.5) равна $Z(\mathcal{F})$. Нетрудно также проверить, что для всякой подстановки α из A

$$\sum_{f \in \alpha} \varphi(\alpha', f) = \prod_k \left(\sum_{i \in Y} Z(B_i; s_k, s_{2k}, \dots) \right)^{i_k(\alpha)}. \quad (8.3.6)$$

Этим доказательство теоремы завершается. ■

8.4. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Целью нашей является представление суммы цикловых индексов всех связных графов в виде функции от суммы цикловых индексов всех графов. Этого можно достичь с помощью теоремы композиции. Если \mathcal{G} — множество всех графов, то из формулы (7.2.18) следует, что

$$Z(\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n^{(1, 2)}; s_k, 2). \quad (8.4.1)$$

Поэтому мы можем считать, что $Z(\mathcal{G})$ нам известно. Теперь применим еще один подход к нахождению $Z(\mathcal{G})$, а именно такой подход, который был применен при получении производящей функции для связных графов. Пусть \mathcal{C} — множество всех связных графов, а множество \mathcal{G}_n состоит из всех графов, имеющих ровно n компонент. Рассмотрим симметрическую группу S_n , действующую на множестве X , и все функции $f: X \rightarrow \mathcal{C}$. Каждая такая функция представляет тот элемент из \mathcal{G}_n , который имеет $|f^{-1}(G)|$ компонент, изоморфных связному графу G из \mathcal{C} . Ясно, что функции, эквивалентные относительно S_n , представляют один и тот же граф из \mathcal{G}_n . Каждой функции $f: X \rightarrow \mathcal{C}$ можно сопоставить обобщенную композицию групп, являющаяся как раз группой графа, представляемого функцией f . Для получения суммы $Z(\mathcal{G}_n)$ цикловых индексов всех неэквивалентных функций можем применить теорему композиции; приходим к следующему равенству:

$$Z(\mathcal{G}_n) = Z(S_n) [Z(\mathcal{C})]. \quad (8.4.2)$$

Суммируя его по всем n , имеем

$$Z(\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n) [Z(\mathcal{C})]. \quad (8.4.3)$$

Но так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} s_k/k \right\} \quad (8.4.4)$$

см. формулу (3.1.1), то

$$1 + Z(\mathcal{G}) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [Z(\mathcal{C})] \right\}. \quad (8.4.5)$$

Используя идею Кэдогана [1], мы можем с помощью обращения Мёбиуса разрешить соотношение (8.4.5) относительно $Z(\mathcal{C})$ (подробности см. у Робинсона [3]). Получаем следующее утверждение.

Теорема. Если \mathcal{G} и \mathcal{C} — соответственно множество всех графов и множество всех связанных графов, то

$$Z(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} s_i^j [Z(\mathcal{G})]. \quad (8.4.6)$$

Применяя формулу (8.4.1), можем написать несколько первых членов ряда $Z(\mathcal{G})$:

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{G}) = & s_1 + s_1^2 + s_2 + \frac{4}{3} s_1^3 + 2s_1s_2 + \frac{2}{3} s_3 + \frac{8}{3} s_1^4 + 4s_1^2s_2 + \\ & + 2s_2^2 + \frac{4}{3} s_1s_3 + s_4 + \dots \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Подставляя это выражение в (8.4.6), имеем

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{C}) = & s_1 + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_2 + \frac{2}{3} s_1^3 + s_1s_2 + \frac{1}{3} s_3 + \frac{19}{12} s_1^4 + \\ & + 2s_1^2s_2 + \frac{5}{4} s_2^2 + \frac{2}{3} s_1s_3 + \frac{1}{2} s_4 + \dots \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Заметим, что, полагая $s_k = 1$ в тех частях рядов $Z(\mathcal{G})$ и $Z(\mathcal{C})$, которые состоят только из слагаемых с общей «степенью» сомножителей, не превосходящей 4, получаем числа 18 и 10; это соответственно число графов и число связанных графов с не более чем 4 вершинами. Стоит также подчеркнуть, что, хотя формула (8.4.6) дает точное выражение для $Z(\mathcal{C})$, много проще вычислять $Z(\mathcal{C})$ непосредственно, используя равенство (8.4.5). Сделаем еще одно замечание. Пусть \mathcal{C}_p — множество всех связанных p -вершинных графов и $\mathcal{G}(p)$ — множество всех таких графов, каждая

компонента которых содержит не менее p вершин. Тогда $\mathcal{G}(1) = \mathcal{G}$ и $Z(\mathcal{C}_p)$ состоит как раз из тех слагаемых, входящих в $Z(\mathcal{G}(p))$, которые имеют порядок p . Применяя теорему композиции, имеем

$$1 + Z(\mathcal{G}(p+1)) = (1 + Z(\mathcal{G})) \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [Z(\mathcal{C}_p)] \right\}. \quad (8.4.9)$$

Значит, $Z(\mathcal{C}_p)$ можно найти последовательно для каждого p .

8.5. СУММЫ ЦИКЛОВЫХ ИНДЕКСОВ КОРНЕВЫХ ГРАФОВ

Сейчас мы установим взаимосвязь между суммами цикловых индексов для некоторой совокупности графов и соответствующей совокупности корневых графов. Граф G можно сделать корневым, взяв в качестве корня произвольную из его вершин. Поэтому корневым граф можно рассматривать как упорядоченную пару (G, u) , где u — вершина графа G . Два корневых графа (G, u) и (G, v) являются одинаковыми (изоморфными) тогда и только тогда, когда вершины u и v принадлежат одной и той же орбите группы графа G . Множество автоморфизмов графа (G, u) состоит из всех автоморфизмов графа G , оставляющих вершину u неподвижной. Однако для удобства мы не будем включать корень в множество объектов, на котором действует группа рассматриваемого корневого графа. Обозначим через \mathcal{H} произвольное множество графов, а через \mathcal{H}^* — множество всех различных корневых графов, которые могут быть получены путем указания корня в графах из \mathcal{H} . Несколько злоупотребляя обозначениями, мы снова будем использовать запись $Z(\mathcal{H})$ и $Z(\mathcal{H}^*)$ для сумм цикловых индексов всех графов из \mathcal{H} и всех корневых графов из \mathcal{H}^* . Для установления взаимосвязи между $Z(\mathcal{H})$ и $Z(\mathcal{H}^*)$ можно применить лемму Редфилда (см. формулу (7.2.3)).

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{H}^*)$ цикловых индексов для корневых графов равна частной производной от $Z(\mathcal{H})$ по первой переменной:

$$Z(\mathcal{H}^*) = \partial Z(\mathcal{H}) / \partial s_1. \quad (8.5.1)$$

Доказательство. Легко видеть, что достаточно доказать теорему для того случая, когда \mathcal{H} состоит из одного графа G . Применяем лемму Редфилда к группе графа G , беря в качестве функции класса

$$\varphi(\alpha) = \prod s_k^{j_k(\alpha)}, \quad (8.5.2)$$

где α — произвольная подстановка из группы графа G . Тогда левая часть формулы (7.2.3) дает $s_1 \cdot \partial Z(G) / \partial s_1$, а правая часть равна $s_1 Z(\mathcal{H}^*)$. ■

Рассмотрим в качестве примера полный граф K_n . Его группа есть S_n . Этот граф можно сделать корневым только одним спосо-

бом, и группой соответствующего корневого графа является S_{n-1} . Следовательно, справедливо равенство

$$\partial Z(S_n)/\partial s_1 = Z(S_{n-1}), \quad (8.5.3)$$

которое можно также провернуть с помощью соотношения (2.2.5).

8.6. БЛОКИ

Сначала найдем сумму цикловых индексов всех корневых блоков. Другими словами, если \mathcal{B} — множество всех блоков, то мы ищем выражение для $Z(\mathcal{B}')$. Этого можно достичь, представив $Z(\mathcal{C}')$ через $Z(\mathcal{B}')$, а затем обращая полученное соотношение. Используя теорему композиции, замечаем, что сумма цикловых индексов всех связных корневых графов, у которых корни не являются точками сочленения, дается формулой

$$Z(\mathcal{B}') [s_1 Z(\mathcal{C}')].$$

Применяя еще раз теорему композиции, видим, что сумма цикловых индексов всех связных корневых графов, у которых корень инцидентен в точности n блокам, равна

$$Z(S_n) [Z(\mathcal{B}') [s_1 Z(\mathcal{C}')]].$$

Суммируя это выражение по всем n и используя равенство (8.4.4), получаем

$$Z(\mathcal{C}') = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [Z(\mathcal{B}') [s_1 Z(\mathcal{C}')]] \right\}. \quad (8.6.1)$$

Так как $Z(\mathcal{C}') = \partial Z(\mathcal{C})/\partial s_1$, то, обращая формулу (8.6.1), можем найти $Z(\mathcal{B}')$. Однако, как и в случае определения $Z(\mathcal{C})$, легче, пожалуй, для получения $Z(\mathcal{B}')$ применять экспоненциальное соотношение (8.6.1) непосредственно, как это продемонстрировано дальше.

Обозначим через $\mathcal{C}'(p)$ множество всех корневых связных графов, у которых всякий блок, содержащий корень, имеет не менее p вершин. Так как у одновершинного графа нет блоков, то

$$Z(\mathcal{C}'(2)) = Z(\mathcal{C}'). \quad (8.6.2)$$

Если \mathcal{B}_p — множество всех p -вершинных блоков, то $Z(\mathcal{B}'_p)$ состоит из всех таких слагаемых, входящих в $Z(\mathcal{C}'(p))$, порядок которых равен $p-1$.

Пусть теперь \mathcal{H}'_p будет множеством всех корневых связных p -вершинных графов, каждый блок в которых содержит корень. Действуя таким же способом, как при получении формулы (8.6.1), находим

$$Z(\mathcal{H}'_p) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [Z(\mathcal{B}'_p) [s_1 Z(\mathcal{C}')]] \right\}. \quad (8.6.3)$$

Ясно, что

$$Z(C'(p+1))Z(\mathcal{B}'_p) = Z(C'(p)). \quad (8.6.4)$$

Комбинируя соотношения (8.6.3) и (8.6.4), имеем

$$Z(C'(p+1)) = Z(C'(p)) \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [Z(\mathcal{B}'_p) |_{s_1} Z(C')] \right\}. \quad (8.6.5)$$

Следовательно, если известны $Z(\mathcal{B}'_p)$ и $Z(C'(p))$, то формулу (8.6.5) можно использовать для получения $Z(C'(p+1))$. Но $Z(\mathcal{B}'_{p+1})$ состоит из всех слагаемых, входящих в $Z(C'(p+1))$ и имеющих порядок p . Поэтому $Z(\mathcal{B}'_p)$ можно определять последовательно для всех $p \geq 2$. Наконец,

$$Z(\mathcal{B}') = \sum_{p=2}^{\infty} Z(\mathcal{B}'_p) \quad (8.6.6)$$

и суммирование начинается с $p = 2$ потому, что одновершинный граф, в силу нашего соглашения, исключается из множеств \mathcal{B} и \mathcal{B}' .

Пусть $Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0}$ — ряд, который получается из $Z(\mathcal{B}_p)$ заменой каждого вхождения переменной s_1 нулем; другими словами, $Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0}$ является таким вкладом в $Z(\mathcal{B}_p)$, который вносят все автоморфизмы, не имеющие неподвижных вершин. Применяя это обозначение, можем записать такое равенство:

$$Z(\mathcal{B}_p) = \int_0^{s_1} Z(\mathcal{B}'_p) ds_1 + Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0}. \quad (8.6.7)$$

Следовательно, нам осталось найти $Z(\mathcal{B}'_p) |_{s_1=0}$. Нам понадобится следующее утверждение из работы Робинсона [3].

Теорема. Пусть у связного графа G существует автоморфизм, не имеющий неподвижных вершин. Тогда граф G содержит единственный блок, вершины которого при любом автоморфизме графа G переставляются только между собой.

Мы имеем также равенство

$$Z(C) = \int_0^{s_1} Z(C') ds_1 + Z(C) |_{s_1=0} \quad (8.6.8)$$

и, применяя теорему композиции, заключаем, что сумма цикловых индексов всех связных корневых графов, корнями которых являются блоки, равна $Z(\mathcal{B}) |_{s_1} Z(C')$.

Следовательно, в силу теоремы (8.5.1), вклад, вносимый в $Z(C)$ всеми автоморфизмами, не имеющими неподвижных

вершин, равен в точности выражению, получающемуся из $Z(\mathcal{B}) [s_1 Z(C')]$ в результате подстановки $s_1 = 0$:

$$Z(C) |_{s_1=0} = Z(\mathcal{B}) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0}. \quad (8.6.9)$$

На практике, конечно, можно пользоваться равенством

$$(Z(\mathcal{B}) |_{s_1=0}) [s_1 Z(C')] = Z(\mathcal{B}) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0}. \quad (8.6.10)$$

Для последовательного определения $Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0}$ при всех $p \geq 2$ обозначим через $\mathcal{B}(p)$ множество всех неразложимых графов (блоков), имеющих не менее чем p вершин. Заметим, что $\mathcal{B}(2) = \mathcal{B}$ и что $Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0}$ состоит из всех слагаемых порядка p , входящих в $Z(\mathcal{B}(p)) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0}$. Так как $\mathcal{B}(2) = \mathcal{B}$, то формула (8.6.9) приводит к соотношению

$$Z(\mathcal{B}(2)) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0} = Z(C) |_{s_1=0}. \quad (8.6.11)$$

Кроме того, очевидно, что

$$Z(\mathcal{B}_2) |_{s_1=0} = s_2/2. \quad (8.6.12)$$

Следующее утверждение вытекает из того факта, что $\mathcal{B}(p)$ разбивается на два непересекающихся подмножества \mathcal{B}_p и $\mathcal{B}(p+1)$:

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{B}(p+1)) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0} &= Z(\mathcal{B}(p)) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0} - \\ &- Z(\mathcal{B}_p) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0}. \end{aligned} \quad (8.6.13)$$

Его можно доказать индукцией по числу p . В частности, если $Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0}$ и $Z(\mathcal{B}(p)) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0}$ известны, то из (8.6.13) можно найти $Z(\mathcal{B}(p+1)) [s_1 Z(C')] |_{s_1=0}$, в котором слагаемые порядка $p+1$ являются как раз слагаемыми из $Z(\mathcal{B}_{p+1}) |_{s_1=0}$.

Наконец, имеем

$$Z(\mathcal{B}) |_{s_1=0} = \sum_{p=2}^{\infty} Z(\mathcal{B}_p) |_{s_1=0} \quad (8.6.14)$$

и теорема Робинсона, позволяющая перечислить блоки, может быть сформулирована в следующей форме.

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{B})$ цикловых индексов всех блоков дается формулой

$$Z(\mathcal{B}) = \int_0^{s_1} Z(\mathcal{B}^*) ds_1 + Z(\mathcal{B}) |_{s_1=0}, \quad (8.6.15)$$

где $Z(\mathcal{B}^*)$ определяется из соотношения (8.6.1), а $Z(\mathcal{B}) |_{s_1=0}$ находится с помощью формул (8.6.11) и (8.6.13).

Таблица 8.6.1

Число блоков порядка p

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_p	0	1	1	3	10	56	468	7123	194 066

Для читателя может быть поучительным использование этого метода для нахождения всех слагаемых в $Z(\mathcal{B})$, имеющих порядок не выше четвертого. Приведем эти члены:

$$Z(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{6} s_1^3 + \frac{1}{2} s_1 s_2 + \frac{1}{3} s_3 + \frac{5}{12} s_1^4 + s_1^2 s_2 + \\ + \frac{3}{4} s_2^2 + \frac{1}{3} s_1 s_3 + \frac{1}{2} s_4 + \dots \quad (8.6.16)$$

Число p -вершинных блоков равно, естественно, сумме коэффициентов многочлена $Z(\mathcal{B}_p)$.

Описанный метод перечисления блоков был запрограммирован Остервейлом [1], и результаты вычислений для графов с небольшим числом вершин приведены в табл. 8.6.1.

8.7. ГРАФЫ С ДАННЫМИ БЛОКАМИ

Часто класс графов можно описать на языке блоков, содержащихся в графах из этого класса. Например, деревья являются такими связными графами, все блоки которых изоморфны графу K_2 ; у графов блоков *все* блоки представляют собой полные графы¹; кактусы являются связными графами, у которых блоки — либо ребра, либо циклы; множество всех связных графов, не имеющих висячих вершин, совпадает в точности с множеством всех нетривиальных связных графов, у которых концевые блоки не изоморфны графу K_2 . Для того чтобы перечислить некоторые из этих классов графов, мы обобщим ряд результатов из предыдущего параграфа. Мы приведем также обобщенную форму метода, предложенного Норманом [1] для подсчета числа графов с данными блоками. В своем изложении мы опять будем следовать работе Робинсона [3]!

Пусть \mathcal{D} — класс блоков и \mathcal{H} — множество всех таких связных графов, у которых блоками являются только графы из класса \mathcal{D} . Первый результат, выражающий $Z(\mathcal{H}^n)$ через $Z(\mathcal{D})$, можно установить способом, аналогичным примененному для проверки соотношения (8.6.1).

¹ См., например, Харари [1], стр. 45. — Прим. перев.

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{K}')$ цикловых индексов связных корневых графов, блоки которых принадлежат множеству \mathcal{D} , дается формулой

$$Z(\mathcal{K}') = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [Z(\mathcal{D}) |s_1 Z(\mathcal{K}')]| \right\}. \quad (8.7.1)$$

Если $Z(\mathcal{D})$ известно, то $Z(\mathcal{D}') = \partial Z(\mathcal{D})/\partial s_1$ и формулу (8.7.1) можно использовать для получения $Z(\mathcal{K}')$. Следующая теорема выражает $Z(\mathcal{K})$ через $Z(\mathcal{K}')$.

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{K})$ цикловых индексов связных графов, блоки которых принадлежат множеству \mathcal{D} , дается формулой

$$Z(\mathcal{K}) = \int_0^{s_1} Z(\mathcal{K}') ds_1 + (Z(\mathcal{D}) |_{s_1=0}) [s_1 Z(\mathcal{K}')]. \quad (8.7.2)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соотношения (8.6.9). Заметим, что мы могли бы использовать эту теорему для вывода формулы (8.6.9), ибо при $\mathcal{K} = \mathcal{C}$ и $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ формула (8.7.2) влечет равенство (8.6.9). Для того чтобы проиллюстрировать использование соотношения (8.7.2), мы покажем, как можно получить сумму цикловых индексов деревьев. Пусть \mathcal{T} — множество всех деревьев, а класс \mathcal{D} состоит только из полного графа K_2 . Таким образом, $Z(\mathcal{D}') = s_1$, и в силу (8.7.1), имеем

$$Z(\mathcal{T}') = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (s_k/k) [s_1 Z(\mathcal{T}')]| \right\}. \quad (8.7.3)$$

Далее, $Z(\mathcal{T}')$ можно определить из этого равенства рекурсивно. Например, слагаемые в $Z(\mathcal{T}')$, имеющие порядок ниже пятого, выглядят так:

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{T}') = & 1 + s_1 + \frac{3}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_2 + \frac{8}{3} s_1^3 + s_1 s_2 + \frac{1}{3} s_3 + \frac{125}{24} s_1^4 + \\ & + \frac{9}{4} s_1^2 s_2 + \frac{5}{8} s_2^2 + \frac{2}{3} s_1 s_3 + \frac{1}{4} s_4 + \dots \end{aligned} \quad (8.7.4)$$

Эти слагаемые соответствуют корневым деревьям, порядки которых меньше 6. Из (8.7.3) и (3.1.1) следует, что

$$Z(\mathcal{T}') = 1 + \sum_{k=1}^5 Z(\mathcal{S}_k) [s_1 Z(\mathcal{T}')]| + \dots \quad (8.7.5)$$

Поэтому слагаемые пятого порядка в $Z(\mathcal{T}')$ могут быть вычислены с помощью следующих пяти соотношений:

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{S}_1) [s_1 Z(\mathcal{T}')]| = & \dots + \frac{125}{24} s_1^5 + \frac{9}{4} s_1^3 s_2 + \frac{5}{8} s_1 s_2^2 + \\ & + \frac{2}{3} s_1^2 s_3 + \frac{1}{4} s_1 s_4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(S_2) [s_1 Z(\mathcal{T}')] &= \dots + \frac{25}{6} s_1^5 + \frac{3}{2} s_1^3 s_2 + \frac{1}{2} s_1^2 s_3 + \dots, \\
Z(S_3) [s_1 Z(\mathcal{T}')] &= \dots + \frac{5}{4} s_1^5 + s_1^3 s_2 + \frac{3}{4} s_1 s_2^2 + \dots, \\
Z(S_4) [s_1 Z(\mathcal{T}')] &= \dots + \frac{1}{6} s_1^5 + \frac{1}{2} s_1^3 s_2 + \frac{1}{3} s_1^2 s_3 + \dots, \\
Z(S_5) [s_1 Z(\mathcal{T}')] &= \frac{1}{120} s_1^5 + \frac{1}{12} s_1^3 s_2 + \frac{1}{8} s_1 s_2^2 + \frac{1}{6} s_1^2 s_3 + \frac{1}{4} s_1 s_4 + \\
&\quad + \frac{1}{6} s_2 s_3 + \frac{1}{5} s_5 + \dots.
\end{aligned} \tag{8.7.6}$$

Собирая вместе все эти слагаемые, имеем

$$\frac{54}{5} s_1^5 + \frac{16}{3} s_1^3 s_2 + \frac{3}{2} s_1 s_2^2 + \frac{3}{2} s_1^2 s_3 + \frac{1}{2} s_1 s_4 + \frac{1}{6} s_2 s_3 + \frac{1}{5} s_5.$$

Далее, $Z(\mathcal{D})|_{s_1=0} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2)|_{s_1=0} = s_2/2$, и поэтому из (8.7.2) вытекает равенство

$$Z(\mathcal{T}) = \int_0^{s_1} Z(\mathcal{T}') ds_1 + (s_2/2) [s_1 Z(\mathcal{T}')]. \tag{8.7.7}$$

Используя (8.7.4), можем вычислить несколько первых членов второго слагаемого, стоящего в правой части формулы (8.7.7):

$$\frac{1}{2} s_2 [s_1 Z(\mathcal{T}')] = \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{3}{4} s_2^3 + \frac{1}{4} s_2 s_4 + \dots \tag{8.7.8}$$

Интегрируя $Z(\mathcal{T}')$ и прибавляя к получаемому выражению соответствующие члены из (8.7.8), находим все слагаемые в $Z(\mathcal{T})$ порядка не выше шестого:

$$\begin{aligned}
Z(\mathcal{T}) &= s_1 + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{2} s_1^3 + \frac{1}{2} s_1 s_2 + \frac{2}{3} s_1^4 + \frac{1}{2} s_1^2 s_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{3} s_1 s_3 + \frac{25}{24} s_1^5 + \frac{3}{4} s_1^3 s_2 + \frac{5}{8} s_1 s_2^2 + \\
&\quad + \frac{1}{3} s_1^2 s_3 + \frac{1}{4} s_1 s_4 + \frac{9}{5} s_1^6 + \frac{4}{3} s_1^4 s_2 + \frac{3}{4} s_1^2 s_2^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} s_1^3 s_3 + \frac{3}{4} s_2^3 + \frac{1}{4} s_1^2 s_4 + \frac{1}{4} s_2 s_4 + \frac{1}{6} s_1 s_2 s_3 + \\
&\quad + \frac{1}{5} s_1 s_5 + \dots.
\end{aligned} \tag{8.7.9}$$

Правильность полученного соотношения можно проверить, просуммировав все коэффициенты в нем и сравнив найденный

результат с числом деревьев, у которых меньше семи вершин (см. формулу (3.2.8)).

Ниже приводится робинсоновское обобщение метода Нормана [1], позволяющего найти число графов с данными блоками.

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{K})$ цикловых индексов графов, блоки которых принадлежат множеству \mathcal{D} , дается формулой

$$Z(\mathcal{K}) = (s_1 + Z(\mathcal{D}) - s_1 Z(\mathcal{D}')) [s_1 Z(\mathcal{K})]. \quad (8.7.10)$$

Заметим, что в соотношениях (8.7.1) и (8.7.10) $Z(\mathcal{K}')$ и $Z(\mathcal{K})$ можно заменить производящими функциями. Однако этого нельзя делать в равенстве (8.7.2). Кроме того, когда требуются суммы цикловых индексов, то значительно легче использовать не формулу (8.7.10), а формулу (8.7.2).

В заключение этого параграфа применим развитую здесь технику к перечислению связных графов без висячих вершин. Следующая теорема Робинсона [3] дает возможность получить соответствующую сумму цикловых индексов (путем обращения приведенной в ней формулы).

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{M})$ цикловых индексов для множества \mathcal{M} , состоящего из всех связных графов без висячих вершин, удовлетворяет соотношению

$$Z(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{F}) + Z(\mathcal{M}) [s_1 Z(\mathcal{F}')]. \quad (8.7.11)$$

Доказательство этого утверждения использует теорему композиции и тот факт, что связные графы, не являющиеся деревьями, соответствуют перечисляемым здесь графам с приспаянными им корневыми деревьями. Последнее соответствие годится также в качестве основы для подсчета числа помеченных графов, получаемых из графов множества \mathcal{M} .

Для обращения формулы (8.7.11) заметим, что $(p+1)$ -вершинный граф из класса \mathcal{C} либо принадлежит множеству \mathcal{M} , либо его максимальный подграф, не имеющий висячих вершин, содержит меньше, чем $p+1$, вершин. Далее, если \mathcal{M}_p — подмножество из \mathcal{M} , состоящее из всех тех графов, которые имеют не более p вершин, то слагаемые порядка $p+1$ в $Z(\mathcal{M}_p) [s_1 Z(\mathcal{F}')]$ соответствуют всем связным $(p+1)$ -вершинным графам, отличным от деревьев, но все же имеющим висячие вершины. Следовательно, слагаемые порядка $p+1$ в $Z(\mathcal{F}) + Z(\mathcal{M}_p) [s_1 Z(\mathcal{F}')]$ вносятся всеми связными $(p+1)$ -вершинными графами, содержащими хотя бы одну висячую вершину. Поэтому разность $Z(\mathcal{M}_{p+1}) - Z(\mathcal{M}_p)$ состоит из слагаемых порядка $p+1$, принадлежащих

$$Z(\mathcal{C}) - (Z(\mathcal{F}) + Z(\mathcal{M}_p) [s_1 Z(\mathcal{F}'])).$$

Например, чтобы найти $Z(\mathcal{M}_4) - Z(\mathcal{M}_3)$, мы начинаем с

$$Z(\mathcal{M}_3) = \frac{1}{6} s_1^3 + \frac{1}{2} s_1 s_2 + \frac{1}{3} s_3 \quad (8.7.12)$$

и, воспользовавшись соотношением (8.7.4), получаем

$$Z(\mathcal{M}_3) [s_1 Z(\mathcal{C})] = \frac{1}{6} s_1^3 + \frac{1}{2} s_1 s_2 + \frac{1}{3} s_3 + \frac{1}{2} s_1^4 + \frac{1}{2} s_1^2 s_2 + \dots \quad (8.7.13)$$

Затем из формул (8.4.8), (8.7.4) и (8.7.13) получаем равенство

$$Z(\mathcal{M}_4) - Z(\mathcal{M}_3) = \frac{5}{12} s_1^4 + s_1^2 s_2 + \frac{3}{4} s_2^2 + \frac{1}{3} s_1 s_3 + \frac{1}{2} s_4. \quad (8.7.14)$$

Сумма всех коэффициентов этой разности равна 3, и, действительно, существует в точности три связанных четырехвершинных графа, не имеющих висячих вершин.

8.8. АЦИКЛИЧЕСКИЕ ОРГРАФЫ

В § 1.6 мы видели, что всякий ациклический орграф содержит хотя бы одну вершину с нулевой полустепенью захода и что любое расширение ациклического орграфа также ациклично. Робинсон [4] использовал эти факты, чтобы перечислить и помеченные, и непомеченные ациклические орграфы. Однако он обнаружил, что для перечисления непомеченных ациклических орграфов необходимо объединить всю информацию о симметриях всех ациклических орграфов. Это объединение было достигнуто путем использования таких сумм цикловых индексов, в которых проводится различие между циклами вершин с нулевыми полустепенями захода и циклами остальных вершин. Тогда для цикловых индексов можно определить такую билинейную операцию, что сумма цикловых индексов, отвечающая всевозможным расширениям любого ациклического орграфа D , выражается через $Z(D)$ и $Z(S_n)$. Это приводит к рекурсивной формуле для суммы цикловых индексов всех ациклических орграфов порядка p .

Мы довольно часто применяли для записи цикловых индексов два множества переменных. Так, например, чтобы различать вершины и ребра, мы в § 4.4 и 7.2 использовали переменные s_k и t_k (при перечислении надграфов и при записи суммы цикловых индексов вершинно-реберных групп p -вершинных графов (см. формулу (7.2.19))). Кроме того, при перечислении смешанных графов в § 5.4 переменные s_k и t_k появились в цикловом индексе редуцированной упорядоченной парной группы (см. соотношение 5.4.5); переменные s_k соответствовали парам взаимно обратных циклов, а переменные t_k — самообратным циклам.

Здесь мы выражаем цикловой индекс группы орграфа D , используя два множества переменных: s_k — для циклов вершин с нулевыми полустепенями захода, а t_k — для циклов других вершин. В силу этого соглашения, ациклические орграфы D_1 и D_2 , изображенные на рис. 1.6.2, имеют следующие цикловые индексы: $Z(D_1) = s_1^2 t_1$ и $Z(D_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 t_1 + s_2 t_1)$.

Теперь можно воспользоваться леммой Редфилда (см. формулу (7.2.3)), чтобы получить другое представление для суммы цикловых индексов всех p -вершинных расширений ациклического орграфа D_0 порядка $p - n$. Пусть $A = S_n \times \Gamma(D_0)$. Группа A индуцирует группу A^* , множество объектов которой состоит из всех расширений орграфа D_0 , являющихся ациклическими орграфами и имеющих ровно по n вершин с нулевыми полустепенями захода. Это представление группы A может быть сделано явным, если использовать ограниченную степенную группу; но так как подобный подход мы применяли довольно часто, то приведенного указания вполне достаточно. Для каждой подстановки β из $\Gamma(D_0)$ обозначим через j_k число циклов длины k , содержащих только вершины с нулевыми полустепенями захода, а через m_k обозначим число циклов длины k , переставляющих другие вершины орграфа D_0 . Если α — подстановка из S_n , то пусть i_k — число циклов подстановки α , имеющих длину k . Такое обилие переменных может показаться излишним, но их наличие делает наши формулы менее беспорядочными. Для каждой подстановки (α, β) из A определяем функцию класса:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \prod s_k^{i_k} t_k^{j_k + m_k}. \quad (8.8.1)$$

Подстановку в A^* , индуцируемую подстановкой (α, β) , обозначим через $(\alpha, \beta)^*$, и пусть $j_1((\alpha, \beta)^*)$ — число расширений, неподвижных относительно $(\alpha, \beta)^*$. Применяя формулу (7.2.3), можем заключить, что

$$\sum Z(D) = n! |\Gamma(D_0)|^{-1} \sum_{(\alpha, \beta)} j_1((\alpha, \beta)^*) \varphi(\alpha, \beta), \quad (8.8.2)$$

где первая сумма берется по всем таким расширениям орграфа D_0 , которые имеют ровно n вершин с нулевыми полустепенями захода.

Число $j_1((\alpha, \beta)^*)$ зависит только от цикловой структуры подстановок α и β и может быть представлено в явной форме:

$$j_1((\alpha, \beta)^*) = \prod_r \left(2^{k \sum (k, r) i_k} - 1 \right)^{i_r} \cdot 2^{k \sum (k, r) i_k m_r}. \quad (8.8.3)$$

Обратите внимание на сходство правой части формулы (8.8.3) с вкладом

$$\prod_{r, k} s_{[r, k]}^{(r, k) (j_r + m_r) i_k},$$

вносимым подстановкой (α, β) в цикловой индекс декартова произведения $S_n \times \Gamma(D_0)$ (см. соотношение (4.3.10)). Заменяя в приведенном выражении каждую переменную $s_{[r, k]}$ на 2, получаем почти полностью правую часть формулы (8.8.3), за исключением слагаемого -1 в каждом сомножителе. Наличие -1 указывает на то, что в каждом орграфе, неподвижном относительно $(\alpha, \beta)^*$, все вершины, принадлежащие орграфу D_0 , имеют положительные полустепени захода.

Для формулировки теоремы перечисления исключительно на языке цикловых индексов определим билинейную операцию $*$, введя ее вначале для одночленов:

$$\prod_k s_k^{i_k} * \prod_k s_k^{j_k} t_k^{m_k} = f_1((\alpha, \beta)^*) \varphi(\alpha, \beta), \quad (8.8.4)$$

где правая часть определяется с помощью соотношений (8.8.1) и (8.8.3). Продолжив эту операцию по линейному закону, мы можем переписать равенство (8.8.2) в следующем виде:

$$\sum Z(D) = Z(S_n) * Z(D_0). \quad (8.8.5)$$

Наконец, суммируя это уравнение, получаем основное утверждение данного параграфа.

Теорема. Сумма $Z(\mathcal{H}_p)$ цикловых индексов множества \mathcal{H}_p всех ациклических орграфов порядка p удовлетворяет соотношению

$$Z(\mathcal{H}_p) = \sum_{n=1}^p Z(S_n) * Z(\mathcal{H}_{p-n}), \quad (8.8.6)$$

где $Z(\mathcal{H}_0) = 1$ по определению.

Робинсон предпочел выразить свою перечислительную формулу на языке суммы цикловых индексов множества \mathcal{H} всех ациклических орграфов. Равенство Робинсона получается путем суммирования соотношения (8.8.6) по всем p :

$$Z(\mathcal{H}) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n) * (Z(\mathcal{H}) + 1). \quad (8.8.7)$$

Однако для вычисления числа a_p ациклических орграфов порядка p удобнее применять равенство (8.8.6). Например, чтобы определить a_4 , нам нужны $Z(\mathcal{H}_1)$, $Z(\mathcal{H}_2)$ и $Z(\mathcal{H}_3)$. Их легко найти, если воспользоваться рис. 8.8.1:

$$Z(\mathcal{H}_1) = s_1,$$

$$Z(\mathcal{H}_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2) + s_1 t_1, \quad (8.8.8)$$

$$Z(\mathcal{H}_3) = \frac{1}{6}(s_1^3 + 3s_1 s_2 + 2s_3) + \frac{3}{2} s_1^2 t_1 + \frac{1}{2} s_1 t_2 + \frac{5}{2} s_1 t_1^2 + \frac{1}{2} s_2 t_1.$$

Используя формулы (8.8.1) и (8.8.3), как это предписано в определении билинейной операции* (см. соотношение (8.8.4)), имеем

$$\begin{aligned} Z(S_4) * Z(\mathcal{H}_0) &= Z(S_4), \\ Z(S_3) * Z(\mathcal{H}_1) &= \frac{7}{6} s_1^3 + \frac{3}{2} s_1 s_2 t_1 + \frac{1}{3} s_3 t_1, \\ Z(S_2) * Z(\mathcal{H}_2) &= \frac{33}{4} s_1^2 t_1^2 + \frac{3}{4} s_1^2 t_2 + \frac{5}{4} s_2 t_1^2 + \frac{8}{4} s_2 t_2, \\ Z(S_1) * Z(\mathcal{H}_3) &= \frac{79}{6} s_1 t_1^2 + \frac{5}{2} s_1 t_1 t_2 + \frac{1}{3} s_1 t_3. \end{aligned} \quad (8.8.9)$$

Складывая эти четыре равенства, получаем $Z(\mathcal{H}_4)$, сумма коэффициентов которого равна 31 — числу ациклических оргра-



Рис. 8.8.1. Ациклические орграфы третьего порядка.

фов порядка 4. Робинсон использовал описанный метод, чтобы вычислить числа, помещенные в табл. 8.8.1.

Таблица 8.8.1

Ациклические орграфы

p	1	2	3	4	5	6
a_p	1	2	6	31	302	5984

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Найти сумму цикловых индексов всех таких графов, которые состоят из треугольников и четырехвершинных циклов и имеют ровно четыре компоненты связности.

8.2. Найти сумму $Z(\mathcal{H}_k)$ цикловых индексов всех пятивершинных блоков (см. соотношение (8.6.16) для $Z(\mathcal{H}_k)$ с $k < 5$).

8.3. Найти несколько первых членов производящих функций, перечисляющих такие связные графы, блоки которых являются полными графами порядка: (а) 2, (б) 3, (с) 4 или (д) являются четырехвершинными циклами.

8.4. Используя методы данной главы, перечислить (а) кактусы и (б) графы блоков.

8.5. Изобразить все 31 ациклических орграфов четвертого порядка (см. табл. 8.8.1). (Указание: используйте приложение II из книги Харари [1].)

*Не дело ботаника вырывать сорняки.
Достаточно, если он может сказать,
как быстро они растут.*

С. Норткот Паркинсон¹

Глава 9 АСИМПТОТИКА

Имеются в основном два метода получения асимптотических формул для графов. И оба они по существу содержатся в опубликованных и неопубликованных работах Пойа (последняя — в виде письма, полученного нами в 1951 году). Выбор метода зависит от того, «древовидны» или нет те графы или структуры, которые подлежат перечислению.

Асимптотику числа графов, принадлежащих различным множествам, изучали и Риддел [1], и Пойа. Некоторые из их результатов были улучшены Обершельпом [1] и Райтом [3, 4]. В трех первых параграфах данной главы мы приводим детали методов, позволяющих найти асимптотику числа графов и числа орграфов. Эти методы, по-видимому, можно успешно применять к разнообразным классам графов (см., например, Палмер [5] и Харари [8]).

В § 9.4 мы рассматриваем асимптотические оценки для связанных графов и блоков. После этого результаты § 9.1 можно использовать для установления следующих утверждений: почти все графы — связанные и почти все графы являются блоками.

Пойа [1] нашел асимптотику для числа таких деревьев, которые представляют предельные углеводороды (в этих деревьях все вершины имеют только степени, равные 1 или 4). Его подход был усовершенствован и обобщен Оттером [1] и применен Фордом и Уленбеком [1] в серии работ, посвященных графам с данными блоками и, следовательно, кактусам, а также обычным деревьям. Параграф 9.5 содержит оттеровское решение этой задачи.

¹ С. Норткот Паркинсон (р. в 1909 г.) — английский писатель, историк и социолог, известный русскому читателю по переводам его сатирических произведений: «Закон Паркинсона или Пути прогресса», «Секрет Питера», «Зятья и прочие», «Закон отсрочки» и др. — *Прим. перев.*

9.1. ГРАФЫ

Пойа получил следующую формулу, дающую асимптотику числа g_p графов порядка p :

$$g_p \sim 2^{\binom{p}{2}} / p! \quad (9.1.1)$$

Из формулы (4.1.9) следует, что $2^{\binom{p}{2}} / p!$ является наибольшим членом, вносимым в число g_p , представленное в виде $Z(S_p^{(2)}, 2)$. Доминантность этого члена эвристически можно объяснить так: деление числа $2^{\binom{p}{2}}$ (равного числу помеченных графов порядка p) на величину $p!$ равносильно «устранению пометок». Формулу (9.1.1) можно улучшить (см. Обершельп [1]) и получить более точную аппроксимацию величины g_p , вводя члены порядка $(2^{\binom{p}{2}} p^k) / (p! 2^{p k / 2})$ при $k = 2, 3, \dots$. Следующая теорема дает одно из таких усовершенствований — для случая $k = 3$.

Теорема. Число g_p графов порядка p удовлетворяет соотношению

$$g_p = \frac{2^{\binom{p}{2}}}{p!} \left(1 + \frac{p^2 - p}{2^{p-1}} + O\left(\frac{p^3}{2^{3p/2}}\right) \right). \quad (9.1.2)$$

Доказательство. Напомним, что число подстановок в S_p , соответствующих разбиению (j) числа p , обозначается через $h(j)$ и дается формулой (2.2.4). Число $q(j)$ реберных циклов, определяемых каждой из этих подстановок¹, можно найти из формулы (4.1.9) для циклового индекса парной группы $S_p^{(2)}$:

$$q(j) = \sum_k \left[\frac{k}{2} \right] j_k + \sum_k k \binom{j_k}{2} + \sum_{r < t} (r, t) j_r j_t. \quad (9.1.3)$$

Обозначим через $g_p^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, p$, вклад в g_p , вносимый всеми такими разбиениями (j) , у которых ровно $p - k$ единичных частей, т. е.

$$g_p^{(k)} = (1/p!) \sum h(j) 2^{q(j)}, \quad (9.1.4)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям (j) с $j_1 = p - k$. Тогда, естественно,

$$g_p = \sum_{k=0}^p g_p^{(k)} \quad (9.1.5)$$

¹ Реберные циклы — это циклы подстановок соответствующей парной группы. — Прим. перев.

и из формул (9.1.3) и (9.1.4) сразу же следует, что

$$g_p^{(0)} = 2^{\binom{p}{2}} / p! \quad (9.1.6)$$

Рассмотрим при $k=2$ разбиение $(j) = (p-2, 1, 0, \dots, 0)$ с $j_1 = p-2$ и $j_2 = 1$. Соотношение (9.1.3) дает

$$q(p-2, 1, 0, \dots, 0) = (p^2 - 3p + 4)/2. \quad (9.1.7)$$

Следовательно, используя формулу (9.1.4), можем написать

$$g_p^{(2)} / g_p^{(0)} = 2p(p-1)/2p. \quad (9.1.8)$$

Аналогично, находим, что

$$g_p^{(3)} / g_p^{(0)} = 2^4 p(p-1)(p-2) / (3 \cdot 2^{2p}) \quad (9.1.9)$$

и

$$g_p^{(4)} / g_p^{(0)} = p(p-1)(p-2)(p-3)(2^3/2^{2p} + 2^8/2^{3p}). \quad (9.1.10)$$

Лемма. Для каждого целого положительного числа n выполняется асимптотическое равенство

$$g_p \sim \sum_{k=0}^{n-1} g_p^{(k)}. \quad (9.1.11)$$

Доказательство леммы. Сначала установим верхние оценки для величин $g_p^{(k)}$. Для каждого k рассмотрим все такие разбиения (j) числа p , у которых $j_1 = p - k$. Подставляя $j_1 = p - k$ и $j_2 = k/2$ в правую часть соотношения (9.1.3), получаем верхнюю оценку для $q(j)$:

$$q(j) \leq \binom{p}{2} + \frac{1}{2}(k - pk + k^2/2). \quad (9.1.12)$$

Далее, число подстановок, действующих на множестве из p объектов и оставляющих неподвижными в точности $p - k$ объектов, не превосходит $p! / (p - k)!$ (см. Риордан [1], стр. 72). Следовательно, можем написать

$$g_p^{(k)} \leq \frac{1}{p!} \cdot \frac{p!}{(p-k)!} 2^{\binom{p}{2} + (k - pk + k^2/2)/2}. \quad (9.1.13)$$

Так как отношение $p! / (p - k)!$ ограничено сверху величиной p^k , то граница для $g_p^{(k)}$ может быть увеличена следующим образом:

$$g_p^{(k)} \leq g_p^{(0)} p^k / (2^{(p-1-k/2)/2})^k. \quad (9.1.14)$$

В нашем случае $k \leq p$, поэтому

$$g_p^{(k)} \leq g_p^{(0)} (p / (2^{(p/4-1/2)}))^k. \quad (9.1.15)$$

Суммируя это неравенство по k , $n \leq k \leq p$, имеем

$$\sum_{k=n}^p g_p^{(k)} \ll g_p^{(0)} \sum_{k=n}^p (p\sqrt{2}/2^{p/4})^k. \quad (9.1.16)$$

Но сумма, стоящая в правой части последнего соотношения, является частной суммой геометрической прогрессии, причем знаменатель этой прогрессии стремится к нулю при возрастании p . Следовательно,

$$\sum_{k=n}^p g_p^{(k)} \ll c g_p^{(0)} (p\sqrt{2}/2^{p/4})^n, \quad (9.1.17)$$

где c превосходит единицу и при больших значениях p сколь угодно близко к ней.

Далее, так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_p^{(k)} \leq g_p \leq \sum_{k=0}^{n-1} g_p^{(k)} + g_p^{(0)} O(p^n/2^{pn/4}), \quad (9.1.18)$$

то имеем

$$1 \leq g_p / \sum_{k=0}^{n-1} g_p^{(k)} \leq 1 + O(p^n/2^{pn/4}), \quad (9.1.19)$$

что подтверждает соотношение (9.1.11). Лемма доказана.

Теперь мы можем продолжить доказательство теоремы. Для обеспечения требуемой оценки погрешности мы воспользуемся формулой (9.1.14) и положим в ней $k = n$; получаем

$$g_p^{(n)} \leq 2^{(n/2+n^2/4)} g_p^{(0)} p^n / 2^{pn/2}. \quad (9.1.20)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=n}^{2n} g_p^{(k)} = g_p^{(0)} O(p^n/2^{pn/2}). \quad (9.1.21)$$

Из неравенства (9.1.17) вытекает, что

$$\sum_{k=2n+1}^p g_p^{(k)} = g_p^{(0)} O((p\sqrt{2}/2^{p/4})^{2n+1}). \quad (9.1.22)$$

Но

$$O((p\sqrt{2}/2^{p/4})^{2n+1}) = O(p^n/2^{pn/2}), \quad (9.1.23)$$

поэтому, объединяя соотношения (9.1.21) и (9.1.22), находим

$$\sum_{k=n}^p g_p^{(k)} = g_p^{(0)} O(p^n/2^{pn/2}). \quad (9.1.24)$$

Для завершения доказательства теоремы и формулы (9.1.2) достаточно положить в (9.1.24) $n = 3$ и затем к обеим частям прибавить $g_p^{(0)} + g_p^{(2)}$. ■

Мы закончим этот параграф, приведя такое усовершенствование формулы для g_p , которое содержит $g_p^{(3)}$ и $g_p^{(4)}$. Из соотношений (9.1.9), (9.1.10) и (9.1.24) имеем

$$g_p = \frac{2^{\binom{p}{2}}}{p!} \left(1 + 2 \frac{p^2 - p}{2^p} + 8 \frac{p!}{(p-4)!} \frac{(3p-7)(3p-9)}{2^{2p}} + O\left(\frac{p^5}{2^{5p/2}}\right) \right). \quad (9.1.25)$$

Заметим, что в этом выражении вторая часть от $g_p^{(4)}$ включена в остаточный член. Формула (9.1.2) была использована Обершельпом [1] для получения значений первого и второго приближения величины g_p , помещенных в табл. 9.1.1; значения третьего приближения были вычислены им с помощью формулы (9.1.25).

Таблица 9.1.1

Приближения для числа графов

p	g_p	Приближение		
		первое	второе	третье
2	2	1	2	2
3	4	1,333	3,333	4
4	11	2,667	6,667	10
5	34	8,533	19,20	29,87
6	156	45,51	88,18	127,3
7	1 044	416,1	689,12	896,4
8	12 346	6 660	9 570	11 120

9.2. ОРГРАФЫ

Вывод асимптотических формул для числа орграфов аналогичен выводу соответствующих формул для графов. Поэтому мы приведем только набросок доказательства теоремы, дающей требуемую формулу и оценку ошибки аппроксимации. Из формулы (5.1.5) для циклового индекса редуцированной упорядоченной парной группы $S_p^{(2)}$ вытекает, что число $q(j)$ реберных циклов¹, определяемых каждой подстановкой, соответствующей разбиению (j) , равно

$$q(j) = \sum_k (kj_k^2 - j_k) + 2 \sum_{r < t} (r, t) j_r j_t. \quad (9.2.1)$$

Как и раньше, для каждого $k=0, 1, \dots, p$ положим

$$d_p^{(k)} = (1/p!) \sum h(j) 2^{q(j)}, \quad (9.2.2)$$

¹ См. примечание на стр. 232. — Прим. перев.

где суммирование ведется по всем разбиениям (j) с $j_1 = p - k$. Тогда число d_p орграфов порядка p равно сумме всех $d_p^{(k)}$. Имеем, в частности,

$$d_p^{(0)} = 2^{p^2-p}/p!, \quad (9.2.3)$$

$$d_p^{(2)}/d_p^{(0)} = 2^2 p(p-1)/2^{2p}, \quad (9.2.4)$$

$$d_p^{(3)}/d_p^{(0)} = 2^8 p(p-1)(p-2)/(3 \cdot 2^{4p}) \quad (9.2.5)$$

■

$$d_p^{(4)}/d_p^{(0)} = (p!(p-4)!)(2^7/2^{4p} + 2^{13}/2^{6p}). \quad (9.2.6)$$

Положив в правой части формулы (9.2.1) $j_1 = p - k$ и $j_2 = k/2$, получаем верхнюю оценку величины $q(j)$:

$$q(j) \leq p^2 - p + k(1 - 2p + k)/2 \quad (9.2.7)$$

всякий раз, когда $j_1 = p - k$.

Поэтому

$$d_p^{(k)} \leq d_p^{(0)} (p/2^{(2p-1-k)/2})^k. \quad (9.2.8)$$

Как и в случае графов, можно теперь показать, что

$$d_p \sim \sum_{k=0}^{n-1} d_p^{(k)} \quad (9.2.9)$$

■

$$\sum_{k=n}^p d_p^{(k)} = d_p^{(0)} O(p^n/2^{pn}). \quad (9.2.10)$$

Итак, имеем следующую теорему для орграфов.

Теорема. Число d_p орграфов порядка p удовлетворяет соотношению

$$d_p = \frac{2^{p^2-p}}{p!} \left(1 + \frac{4p(p-1)}{2^{2p}} + O\left(\frac{p^3}{2^{3p}}\right) \right). \quad (9.2.11)$$

Если же учесть величины $d_p^{(3)}$ и $d_p^{(4)}$, то получится такое равенство:

$$d_p = \frac{2^{p^2-p}}{p!} \left(1 + \frac{4p(p-1)}{2^{2p}} + 2^7 \frac{p!}{(p-4)!} \frac{(3p-7)(3p-9)}{2^{4p}} + O\left(\frac{p^5}{2^{5p}}\right) \right). \quad (9.2.12)$$

9.3. ГРАФЫ С ДАННЫМИ ЧИСЛАМИ ВЕРШИН И РЕБЕР

Мы видели, что член $2^{\binom{p}{2}}/p!$, вносимый в $Z(S_p^{(2)}, 2)$ тождественной подстановкой, асимптотически равен общему числу графов порядка p . Поэтому вполне возможно, что для получения аппроксимации числа $g_{p,q}(p, q)$ -графов надо найти вклад, вносимый тождественной подстановкой в коэффициенты при x^k многочлена $Z(S_p^{(2)}, 1+x)$. То, что указанный вклад равен

$\left(\binom{p}{2}\right)/q!$, можно увидеть, представив перечисляющий многочлен в следующем виде:

$$Z(S_p^{(2)}, 1+x) = \frac{(1+x)^{\binom{p}{2}}}{p!} (1+f(x)), \quad (9.3.1)$$

где $f(x)$ определяется этим же уравнением. Можно надеяться, что приведенная выше аппроксимация соответствует действи-

тельности, ибо $\left(\binom{p}{2}\right)/q!$ равно как раз, в силу формулы (1.1.1), числу помеченных (p, q) -графов, поделенному на $p!$ (последнее сделано для «устранения пометок»). Однако мы увидим, что это соображение может быть использовано лишь тогда, когда q не очень близко к концам своей области изменения. Например,

$g_{p,0} = 1$ для всех p , но $\left(\binom{p}{2}\right)/0! = 1/p!$ и стремится к нулю при возрастании p . На самом-то деле и при всяком фиксированном значении q

$$\left(\binom{p}{2}\right)/q! \sim 0. \quad (9.3.2)$$

Границы изменения величины q , для которых справедлива указанная выше оценка числа $g_{p,q}$, были установлены Пойа (об этом говорится в работе Форда и Уленбека [1]), а впоследствии эти границы были улучшены Обершельном [1], результат которого отражен в нижеследующей теореме. Райт [5] получил недавно необходимое и достаточное условие, обеспечивающее выполнимость соотношения (9.3.4) (см. упражнение 9.13).

Теорема. Если при некотором ε , таком, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, справедливо равенство

$$\left| \frac{1}{2} \binom{p}{2} - q \right| = O\left(p^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\right), \quad (9.3.3)$$

то число $g_{p,q}$ (p, q)-графов удовлетворяет соотношению

$$g_{p,q} \sim \frac{\binom{p}{2}}{q} p!. \quad (9.3.4)$$

Доказательство. Исходя из определения функции $f(x)$, задаваемой формулой (9.3.1), имеем для всех p и q следующие неравенства:

$$\frac{\binom{p}{2}}{q} p! \leq g_{p,q} \leq \frac{\binom{p}{2}}{q} p! + f(1) \cdot 2 \binom{p}{2} p!. \quad (9.3.5)$$

Следовательно, достаточно показать, что если q удовлетворяет условию (9.3.3), то

$$f(1) \cdot 2 \binom{p}{2} / \frac{\binom{p}{2}}{q} \sim 0. \quad (9.3.6)$$

Но из формулы (9.1.2), дающей асимптотику величины g_p , вытекает равенство

$$f(1) = O(p^2/2^p). \quad (9.3.7)$$

Поэтому нужно показать, что при соответствующих значениях q

$$F(p, q) = \left(2 \binom{p}{2}^{-p} p^2 \right) / \left(\frac{\binom{p}{2}}{q} \right) \sim 0. \quad (9.3.8)$$

Для этого установим существование положительных констант c и δ , таких, что $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ и при всех достаточно больших p неравенство

$$\left| \frac{1}{2} \binom{p}{2} - q \right| < cp^{1+\delta} \quad (9.3.9)$$

влечет за собой соотношение (9.3.8). И тогда можно подобрать ε так, что будет выполняться равенство (9.3.3).

Далее, функция $F(p, q)$, стоящая в левой части соотношения (9.3.8), достигает своего наибольшего значения для тех q , которые расположены у границы области изменения этого параметра. Таким образом, из (9.3.9) вытекает, что

$$F(p, q) \leq \frac{p^{22(p^2-3p)/2}}{\left[\frac{1}{2} \binom{p}{2} - cp^{1+\delta} \right]}. \quad (9.3.10)$$

Применяя формулу Стирлинга к факториалам, встречающимся в знаменателе правой части неравенства (9.3.10), получаем для

некоторой константы C_1 и достаточно больших значений p следующую оценку:

$$F(p, q) \leq C_1 \frac{p^{22(p^3-3p)/2}}{\binom{p}{2}^{+1/2}} a_p^{a_p} b_p^{b_p} (a_p b_p)^{1/2}, \quad (9.3.11)$$

где

$$a_p = \frac{1}{2} \binom{p}{2} - cp^{1+\delta} \quad (9.3.12)$$

и

$$b_p = \frac{1}{2} \binom{p}{2} + cp^{1+\delta}. \quad (9.3.13)$$

Так как $(a_p b_p)^{1/2} = O(p^2)$, то мы еще можем упростить оценку функции $F(p, q)$ и записать

$$F(p, q) \leq C_2 \frac{p^4}{2^p (p^2 - p)^{\binom{p}{2} + 1/2}} (p^2 - p - 4cp^{1+\delta})^{a_p} (p^2 - p + 4cp^{1+\delta})^{b_p}, \quad (9.3.14)$$

где C_2 — некоторая константа.

Проводя несложные преобразования и учитывая равенство $a_p + b_p = \binom{p}{2}$, имеем

$$\begin{aligned} F(p, q) &\leq C_2 \frac{p^4}{2^p (p^2 - p)^{\binom{p}{2} + 1/2}} (p^2 - p)^{a_p} \left(1 - \frac{4cp^{1+\delta}}{p^2 - p}\right)^{a_p} \times \\ &\quad \times (p^2 - p)^{b_p} \left(1 + \frac{4cp^{1+\delta}}{p^2 - p}\right)^{b_p} = \\ &= C_2 \frac{p^4}{2^p (p^2 - p)^{1/2}} \left(1 - \frac{4cp^{1+\delta}}{p^2 - p}\right)^{a_p} \left(1 + \frac{4cp^{1+\delta}}{p^2 - p}\right)^{b_p}. \end{aligned} \quad (9.3.15)$$

Для наших целей полезно представить полученное неравенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(p, q) &\leq C_2 \frac{p^4}{2^p (p^2 - p)^{1/2}} \left(\left(1 - \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2}\right) \left(1 + \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2}\right) \right)^{\binom{p}{2}} \times \\ &\quad \times \left(\left(1 + \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2}\right) \left(1 - \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2}\right) \right)^{cp^{1+\delta}}. \end{aligned} \quad (9.3.16)$$

Далее мы используем равенства

$$\left(\left(1 - \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2} \right) \left(1 + \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2} \right) \right)^{\binom{p}{2}/2} = \left(1 - \frac{c^2 p^{2+2\delta} / \left(\binom{p}{2} / 2 \right)}{\binom{p}{2}/2} \right)^{\binom{p}{2}/2} \quad (9.3.17)$$

$$\frac{\left(1 + \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2} \right)^{cp^{1+\delta}}}{\left(1 - \frac{cp^{1+\delta}}{\binom{p}{2}/2} \right)^{cp^{1+\delta}}} = \frac{\left(1 + \frac{c^2 p^{2+2\delta} / \left(\binom{p}{2} / 2 \right)}{cp^{1+\delta}} \right)^{cp^{1+\delta}}}{\left(1 - \frac{c^2 p^{2+2\delta} / \left(\binom{p}{2} / 2 \right)}{cp^{1+\delta}} \right)^{cp^{1+\delta}}} \quad (9.3.18)$$

Можно показать, что для всех $x, y > 0$

$$e^{xy/(y-x)} < (1+x/y)^y < e^x \quad (9.3.19)$$

и, кроме того, для $y \geq x > 0$

$$e^{-xy/(y-x)} < (1-x/y)^y < e^{-x}. \quad (9.3.20)$$

Применяя неравенства (9.3.19) и (9.3.20) к равенствам (9.3.17) и (9.3.18), имеем

$$F(p, q) \leq C_2 (p^4 / (2^p (p^2 - p)^{1/2})) \exp s(p), \quad (9.3.21)$$

где

$$s(p) = 4c^2 p^{2\delta} \left/ \left(1 - \frac{1+4cp^\delta}{p} \right) \right. \quad (9.3.22)$$

Если $\delta < 1$, то для некоторой константы $K > 4c^2$ выполняется неравенство

$$s(p) \leq K p^{2\delta} \quad (9.3.23)$$

при условии, что p достаточно большое.

Таким образом, для больших значений p

$$F(p, q) \leq C_2 p^4 e^{K p^{2\delta}} / (2^p (p^2 - p)^{1/2}), \quad (9.3.24)$$

где $K > 4c^2$ и $\delta < 1$. Если же выбрать $\delta \leq \frac{1}{2}$, то получим соотношение

$$F(p, q) = \left(\frac{e^K}{2} \right)^p \cdot O(p^4) \quad (9.3.25)$$

Поэтому $F(p, q) \sim 0$ при условии, что $K < \ln 2$. Для существования такого K нужно потребовать, чтобы

$$4c^2 < \ln 2. \quad (9.3.26)$$

Следовательно, если $c = 0,416$ и $\delta = \frac{1}{2}$, то из формулы (9.3.9) вытекает соотношение (9.3.8). Доказательство теоремы закончено. ■

Заметим, что рассматриваемая в теореме область изменения параметра q включает большинство p -вершинных графов, т. е.

$$\sum g_{p, q} \sim g_p, \quad (9.3.27)$$

где сумма берется по всем тем q , которые удовлетворяют условию (9.3.9).

Соответствующая теорема для орграфов такова:

Теорема. Если для некоторого ε , такого, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, выполняется соотношение

$$\left| \binom{p}{2} - q \right| = O\left(p^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\right), \quad (9.3.28)$$

то число $d_{p, q}$ орграфов с p вершинами и q дугами удовлетворяет равенству

$$d_{p, q} \sim \binom{p(p-1)}{q} / p!. \quad (9.3.29)$$

Доказательство подобно доказательству соотношения (9.3.4), и, выполнив все необходимые детали, находим, что если

$$\left| \binom{p}{2} - q \right| < 0,832p^{3/2}, \quad (9.3.30)$$

то справедливо равенство (9.3.29).

9.4. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ И БЛОКИ

Следуя Ридделу [1] и Форду с Уленбеком [1], мы сначала займемся рассмотрением помеченных графов, а потом получим соответствующие результаты для непомеченных графов, опираясь на то положение, что «большинство графов можно рассматривать как помеченные».

Теорема. Число G_p помеченных графов порядка p асимптотически равно числу C_p связанных помеченных графов того же порядка:

$$G_p \sim C_p. \quad (9.4.1)$$

Таким образом, почти все помеченные графы — связные.

Доказательство. Разделив обе части уравнения (1.2.1) на G_p , получаем

$$C_p/G_p = 1 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} G_{p-k} C_k/G_p. \quad (9.4.2)$$

Так как $C_p \leq G_p = 2^{\binom{p}{2}}$ для всех p , то мы можем написать неравенства

$$1 \geq C_p/G_p \geq 1 - F(p), \quad (9.4.3)$$

где

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} k 2^{-k(p-k)}. \quad (9.4.4)$$

Следовательно, чтобы установить соотношение (9.4.1), достаточно показать, что $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Так как $k/p \leq 1$, то имеем

$$F(p) \leq \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} 2^{-k(p-k)}. \quad (9.4.5)$$

Слагаемые, стоящие в правой части этого неравенства, симметричны относительно концов области изменения параметра k . Поэтому

$$F(p) \leq 2 \sum_{k=1}^{[p/2]} \binom{p}{k} 2^{-k(p-k)}. \quad (9.4.6)$$

Но $\binom{p}{k} \leq p^k$ и $p-k \geq p/2$. Следовательно,

$$F(p) \leq 2 \sum_{k=1}^{[p/2]} \left(\frac{p}{2^{p/2}} \right)^k. \quad (9.4.7)$$

Сумма в правой части этой формулы представляет собой частичную сумму геометрической прогрессии, знаменатель которой стремится к нулю при возрастании p . Поэтому $F(p) = O(p/2^{p/2})$. Но тогда $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ и доказательство тем самым завершено. ■

Райт [2] изучал асимптотическое поведение коэффициентов двух производящих функций $a(x)$ и $b(x)$, связанных соотношением $a(x) = \exp b(x)$. Приведенную выше теорему и ряд других фактов можно вывести из его результатов.

Наша следующая задача состоит в установлении такого же результата, как и соотношение (9.4.1), но для непомеченных графов. Сначала мы покажем, что большинство графов являются *асимметрическими*¹, т. е. обладают тривиальной группой авто-

¹ В оригинале — *тождественными (identity)*. — Прим. перев.

морфизмов. Этот факт, известный Ридделу [1], Форду с Уленбеком [1], Эрдёшу и Реньи [1] и другим исследователям, формулируется так.

Теорема. Число p -вершинных графов асимптотически равно числу p -вершинных асимметрических графов, т. е. большинство графов порядка p могут быть помечены точно $p!$ способами.

Доказательство. Возьмем равенство (1.1.3), дающее число способов распределения пометок для данного графа, и просуммируем это равенство по всем p -вершинным графам. Получим соотношение

$$\sum_p p! |\Gamma(G)| = 2^{\binom{p}{2}}. \quad (9.4.8)$$

Разделив обе части этого выражения на $p!$ и применив формулу (9.1.2), получаем

$$\sum |\Gamma(G)|^{-1} \sim g_p. \quad (9.4.9)$$

Так как вклад каждого графа в сумму из (9.4.9) не превосходит 1, то большинство графов должно вносить 1. Теорема доказана. ■

В качестве следствия из этой теоремы сформулируем одно замечание, обладающее широкой областью применения и позволяющее получить ряд асимптотических результатов для непомеченных графов из соответствующих результатов для помеченных графов и наоборот¹.

Метатеорема. Большинство помеченных графов обладает свойством «Р» тогда и только тогда, когда большинство непомеченных графов имеет свойство «Р».

Из этой метатеоремы и соотношения (9.4.1) выводится аналог теоремы, приведенной в начале параграфа.

Следствие. Почти все графы являются связными.

Для установления следующей теоремы мы воспользуемся некоторыми результатами из § 1.3, относящимися к помеченным блокам. Напомним, что B_p является числом помеченных блоков порядка p .

Теорема. Почти все помеченные графы являются блоками, т. е. $B_p \sim C_p$.

Доказательство. Как и в § 1.3, $R(x)$ обозначает экспоненциальную производящую функцию для корневых связных помеченных графов. Введем экспоненциальную производящую функцию

¹ В приводимой метатеореме речь идет, естественно, о таких свойствах, которые «отражают структуру» графов, а не «базируются на распределении пометок» в графах. Например, свойство «быть помеченным» в этой метатеореме рассматривать нельзя. — Прим. перев.

$H(x)$ с коэффициентами H_k , определив ее соотношением

$$H(x) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k (R(x))^{k-1} / (k-1)! \quad (9.4.10)$$

Из формулы (1.3.8) вытекает, что $H(x) = R_1(x)/x$. Подстановка в выражения (1.3.7) и (1.3.4) приводит к равенству

$$\ln \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} x^k / k! = H(x). \quad (9.4.11)$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при доказательстве соотношения (9.4.1), можно установить, что

$$C_{p+1} \sim H_p. \quad (9.4.12)$$

Из равенства $H(x) = R_1(x)/x$ вытекает также следующий результат: $(p+1)H_p$ равно числу таких корневых связанных $(p+1)$ -вершинных помеченных графов, в каждом из которых корень принадлежит в точности одному блоку. Поэтому можно ввести функцию $F(p)$ с помощью уравнения

$$H_p = B_{p+1} + F(p)/(p+1), \quad (9.4.13)$$

так что $F(p)$ представляет собой число корневых связанных $(p+1)$ -вершинных помеченных графов, у которых корень принадлежит только одному блоку, причем порядки блоков, содержащих корни, не выше p . Легко видеть, что для $F(p)$ справедлива оценка:

$$F(p) \leq \sum_{k=2}^p \binom{p+1}{k} k G_k G_{p+1-k} (p+1-k). \quad (9.4.14)$$

Для установления асимптотического равенства $B_p \sim C_p$, а следовательно равенства $B_p \sim G_p$, достаточно показать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) / \left((p+1) 2^{\binom{p+1}{2}} \right) = 0,$$

а это легко делается таким же способом, какой использовался в доказательстве соотношения (9.4.1). ■

Применяя метатеорему, получаем следующий результат.

Следствие. Почти все (непомеченные) графы являются блоками.

Мы не колеблясь формулируем следующее утверждение, хотя формальное доказательство его не известно.

Гипотеза. Для всякого целого положительного числа n почти все графы являются n -связными.

Используя общие методы и результаты данной главы, можно найти долю различных классов графов в том или другом множе-

стве графов. Например, применяя по существу тот же метод, что и в доказательстве формулы (9.1.2), можно, исходя из формул (6.2.3) и (6.2.7) для самодополнительных графов и орграфов, получить формулируемые ниже асимптотические результаты (см. Палмер [5]). Напомним, что число вершин в самодополнительном графе сравнимо с 0 или 1 по модулю 4.

Теорема. Числа \bar{g}_{4n} и \bar{g}_{4n+1} самодополнительных графов даются соотношениями

$$\bar{g}_{4n} = (2^{2n^2 - 2^n/n!})(1 + n(n-1)2^{5-4n} + O(n^3/2^{8n})) \quad (9.4.15)$$

и

$$\bar{g}_{4n+1} = (2^{2n^2 - n/n!})(1 + n(n-1)2^{4-4n} + O(n^3/2^{8n})). \quad (9.4.16)$$

Асимптотические результаты для самодополнительных орграфов резюмированы в приводимом ниже утверждении.

Теорема. Асимптотика числа самодополнительных орграфов может быть установлена с помощью соответствующих выражений для самодополнительных графов, ибо

$$\bar{d}_{2n} = \bar{g}_{4n} \quad \text{и} \quad \bar{d}_{2n+1} \sim 2^n \bar{g}_{4n+1}.$$

В заключение этого параграфа мы отметим естественно ожидаемый результат о том, что самодополнительные графы и орграфы встречаются относительно редко. Используя соотношение (9.3.4), находим асимптотику числа $g_{4n,r}$ графов с $4n$ вершинами и с $r = \binom{4n}{2}/2$ ребрами. Затем, принимая во внимание формулу (9.4.15), можем показать, что

$$\bar{g}_{4n}/g_{4n,r} \sim 0. \quad (9.4.17)$$

Соответствующие результаты справедливы для \bar{g}_{4n+1} и для орграфов. Имеет место такое утверждение.

Следствие. Не только почти все графы и орграфы не являются самодополнительными, но это верно даже и для всех $(p, p(p-1)/4)$ -графов и соответственно орграфов.

9.5. ДЕРЕВЬЯ

Пойа [1] нашел асимптотические формулы для числа предельных углеводородов и других химических соединений. Сделал он это, используя производящие функции и оперируя с ними как с обычными аналитическими функциями, так что коэффициенты могли быть подсчитаны с помощью интегральной формулы Коши. Оттер [1] заметил, что метод Пойа можно применить к обычным деревьям, а Форд и Уленбек [1] обнаружили, что этот метод пригоден также для подсчета числа различных древовидных

структур. В данном параграфе мы рассмотрим результаты Оттера для обычных деревьев и приведем достаточно много деталей соответствующих рассуждений, так что читатель сможет применить описанный метод и к другим типам деревьев.

Нам потребуется ряд лемм, первая из которых позволит оперировать с производящими функциями для всех деревьев и всех корневых деревьев как с аналитическими функциями.

Лемма. *Степенной ряд $T(x)$ для корневых деревьев сходится в круге радиуса $\eta \geq \frac{1}{4}$.*

Доказательство. Следующая формула для числа $(p+1)$ -вершинных корневых деревьев легко выводится из соотношения (3.1.9):

$$T_{p+1} = (1/p) \sum_{k=1}^p k T_k \sum_{\substack{s \\ k \leq ks \leq p}} T_{p+1-ks}. \quad (9.5.1)$$

Но поскольку коэффициенты T_i при x^i у ряда $T(x)$ с ростом i возрастают, то имеем

$$\sum_{\substack{s \\ k \leq ks \leq p}} T_{p+1-ks} \leq (p/k) T_{p+1-k} \quad (9.5.2)$$

и

$$T_{p+1} \leq \sum_{k=1}^p T_k T_{p+1-k}. \quad (9.5.3)$$

Теперь определим другой степенной ряд, который будем мажорировать ряд $T(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k x^k, \quad (9.5.4)$$

где $B_1 = 1$ и для $p \geq 1$

$$B_{p+1} = \sum_{k=1}^p B_k B_{p+1-k}. \quad (9.5.5)$$

Из неравенства (9.5.3) с помощью метода математической индукции можно вывести соотношение: $T_p \leq B_p$ при всех $p \geq 1$. Но функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y^2 - y + x = 0. \quad (9.5.6)$$

Поэтому, разрешая его относительно y , получаем

$$y = \frac{1}{2} (1 \pm (1 - 4x)^{1/2}), \quad (9.5.7)$$

а так как $f(0) = 0$, то получаем

$$f(x) = \frac{1}{2} (1 - (1 - 4x)^{1/2}). \quad (9.5.8)$$

Если разложить эту функцию в ряд Маклорена, то получающиеся коэффициенты в точности совпадают с коэффициентами ряда (3.3.23), перечисляющего плоские корневые деревья с висячими корнями (с таким же успехом можно привлечь для нашего случая и любые другие конфигурации, перечисляемые числами Каталана). Для каждого p

$$B_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^p (-1)^{p-1} 4^p, \quad (9.5.9)$$

и, таким образом, установлена оценка для коэффициентов T_p . Кроме того, из выражения (9.5.8) следует, что радиус сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} B_k x^k$ равен $\frac{1}{4}$, а поэтому радиус сходимости ряда $T(x)$ не меньше, чем $\frac{1}{4}$. ■

На основании формулы (3.2.4), выражающей ряд $t(x)$ для деревьев через ряд $T(x)$, мы немедленно заключаем, что ряды $T(x)$ и $t(x)$ имеют одинаковые радиусы сходимости! Вдобавок, ряды $T(x)$ и $t(x)$ мажорируют соответствующие ряды, перечисляющие деревья различных типов, а поэтому ряды для таких деревьев тоже сходятся. Эти результаты были впервые установлены Пойа [1].

Заметим, что так как все коэффициенты производящей функции $T(x)$ положительны, то $x = \eta$ является особой точкой ряда $T(x)$, а значит, и ряда $t(x)$. С другой стороны, оказывается, что в точке $x = \eta$ ряд $T(x)$ сходится. Для доказательства этого факта нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. Предел $T(x)$ при $x \rightarrow \eta - 0$ существует и равен $\sum_{k=1}^{\infty} T_k \eta^k$.

Доказательство. Так как $T(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению (3.1.4), то для всех $x \in (0, \eta)$ имеем равенство

$$\ln(T(x)/x) = T(x) + \sum_{k=2}^{\infty} T(x^k)/k. \quad (9.5.10)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{T(x)/x}{\ln(T(x)/x)} \leq \frac{1}{x} \quad (9.5.11)$$

и, следовательно, функция $T(x)$ ограничена на интервале $(0, \eta)$. Так как функция $T(x)$ — монотонная, то предел слева в точке η существует и мы полагаем

$$\lim_{x \rightarrow \eta - 0} T(x) = b_0. \quad (9.5.12)$$

А теперь немедленно получаем, что $b_0 = T(\eta)$. ■

Значение величины b_0 находится с помощью следующей леммы.

Лемма. Перечисляющий ряд $T(x)$ для корневых деревьев обладает таким свойством:

$$T(\eta) = 1. \quad (9.5.13)$$

Доказательство. Сначала мы определим комплекснозначную функцию $F(x, y)$, зависящую от комплексных переменных x и y :

$$F(x, y) = x \exp \left\{ y + \sum_{k=2}^{\infty} T(x^k)/k \right\} - y, \quad (9.5.14)$$

и рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (9.5.15)$$

Используя соотношение (3.1.4), можно показать, что $y = T(x)$ является единственным аналитическим решением уравнения (9.5.15). В то же время мы знаем, что это решение имеет особенность при $x = \eta$. В силу предыдущей леммы, $F(\eta, b_0) = 0$, и, кроме того, как легко видеть, функция $F(x, y)$ является аналитической отдельно по каждой переменной в окрестностях точек $x = \eta$ и $y = b_0$.

Дифференцируя равенство (9.5.14) по y , находим

$$\partial F / \partial y = F(x, y) + y - 1. \quad (9.5.16)$$

Так как $F(\eta, b_0) = 0$, то в точке (η, b_0) частная производная равна

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(\eta, b_0)} = b_0 - 1. \quad (9.5.17)$$

Кроме того, эта частная производная должна в точке (η, b_0) обращаться в нуль¹. Значит, $b_0 = 1$. С другой стороны, как следует из теоремы о неявной функции, уравнение (9.5.15) может иметь только одно решение: $y = f(x)$, аналитическое в окрестности точки η (и в частности, в самой точке η). Но таким решением может быть лишь функция $y = T(x)$, и мы знаем, что она не аналитична при $x = \eta$. Тем самым соотношение (9.5.13) доказано. ■

Заметим, что (как следует немедленно из формулы (9.5.16)) вторая производная от $F(x, y)$ по y в точке $(\eta, 1)$ отлична от 0.

Ниже приводится формулировка теоремы, представляющей собой некую комбинацию теоремы о неявной функции и замечаний Пойа, Оттера, Форда и Уленбека. Ради краткости изложения доказательство этой теоремы мы опускаем.

¹ Иначе решение $y = T(x)$ было бы аналитично в точке $x = \eta$. — Прим. перев.

Теорема. Пусть функция $F(x, y)$ аналитична отдельно по каждой своей переменной в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Предположим, что выполняются следующие условия:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) $y = f(x)$ аналитична при $|x| < |x_0|$ и точка x_0 является единственной особенностью на границе круга сходимости ряда для функции $f(x)$;

3) если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ есть разложение функции f в окрестности нуля, то $y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x_0^n$;

4) $F(x, f(x)) = 0$ при $|x| < |x_0|$;

5) $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$;

6) $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0$.

Тогда функция $f(x)$ может быть разложена в окрестности точки x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_0 - x)^{k/2}, \quad (9.5.18)$$

и если $a_1 \neq 0$, то

$$f_n \sim \frac{-a_1}{2\sqrt{\pi}} x_0^{-n + \frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}, \quad (9.5.19)$$

а если $a_1 = 0$, но $a_3 \neq 0$, то

$$f_n \sim \frac{3a_3}{4\sqrt{\pi}} x_0^{-n + \frac{3}{2}} n^{-\frac{5}{2}}. \quad (9.5.20)$$

Чтобы применить эту теорему, заметим, что функция, определенная формулой (9.5.14), удовлетворяет всем предположениям теоремы при $(x_0, y_0) = (\eta, 1)$ и $f(x) = T(x)$. Следовательно, функцию $T(x)$ можно разложить в ряд вида (9.5.18), и если $a_1 \neq 0$, то коэффициенты T_n ведут себя так, как показано в формуле (9.5.19). Остается доказать, что если

$$T(x) = 1 - b_1(\eta - x)^{1/2} + b_2(\eta - x) + b_3(\eta - x)^{3/2} + \dots, \quad (9.5.21)$$

то $b_1 \neq 0$ или $b_3 \neq 0$, и, естественно, нам нужна аппроксимация с b_1 и η .

Дифференцируя соотношение (9.5.21), получаем

$$T'(x) = \frac{1}{2} b_1 (\eta - x)^{-1/2} - b_2 + \dots, \quad (9.5.22)$$

где не приведены слагаемые, содержащие $\eta - x$ в степени не меньшей, чем $1/2$. Умножая обе части равенства (9.5.22) на разность

1 — $T(x)$, которая получается из формулы (9.5.21), имеем

$$T^s(x)(1 - T(x)) = \frac{1}{2} b_1^2 + \dots, \quad (9.5.23)$$

где снова опущены слагаемые, содержащие $\eta - x$ в степени не ниже, чем $1/2$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \eta - 0} T^s(x)(1 - T(x)) = \frac{1}{2} b_1^2. \quad (9.5.24)$$

Дифференцируя равенство (3.1.4), получаем

$$T^s(x) = T(x)/x + T(x) \sum_{k=1}^{\infty} T^s(x^k) \cdot x^{k-1}, \quad (9.5.25)$$

а значит,

$$T^s(x)(1 - T(x)) = T(x)/x + T(x) \sum_{k=2}^{\infty} T^s(x^k) x^{k-1}. \quad (9.5.26)$$

Таким образом, предел из формулы (9.5.24) можно также получить, применяя равенство (9.5.26), а поэтому

$$\frac{1}{2} b_1^2 = \frac{1}{\eta} + \sum_{k=2}^{\infty} T^s(\eta^k) \eta^{k-1}. \quad (9.5.27)$$

Стер установил, используя соотношения (3.1.4) и (9.5.13), что $\eta = 0,3383219\dots$. Затем из уравнения, аналогичного (9.5.27), он выразил b_1 и нашел, что

$$\frac{b_1 \eta^{1/2}}{2 \sqrt{\pi}} = 0,4399237 \dots, \quad (9.5.28)$$

а $b_1 = 2,681127\dots$. Следовательно, принимая во внимание формулу (9.5.19), мы можем сформулировать следующее утверждение, дающее оценку числа корневых деревьев.

Теорема. Число T_p p -вершинных корневых деревьев удовлетворяет равенству

$$T_p = 0,4399237 \frac{\eta^{-p}}{p^{3/2}} + O\left(\frac{\eta^{-p}}{p^{5/2}}\right). \quad (9.5.29)$$

Теперь рассмотрим ряд $t(x)$ для (некорневых) деревьев. Из соотношений (3.2.4) и (9.5.21) вытекает, что

$$t(x) = a_0 - a_1(\eta - x)^{1/2} + a_2(\eta - x) + a_3(\eta - x)^{3/2} + \dots, \quad (9.5.30)$$

а поэтому

$$t^s(x) = \frac{1}{2} a_1(\eta - x)^{-1/2} - a_2 - \frac{3}{2} a_3(\eta - x)^{1/2} + \dots \quad (9.5.31)$$

Дифференцируя (3.2.4), находим

$$t'(x) = T'(x)(1 - T(x)) + T'(x^2) \cdot x \quad (9.5.32)$$

и, учитывая равенство (9.5.24), заключаем, что $\lim_{x \rightarrow \eta-0} t'(x)$ существует. Следовательно, $a_1 = 0$. Далее мы двумя способами представим вторую производную $t''(x)$. Из (9.5.31) при $a_1 = 0$ имеем

$$t''(x) = \frac{3}{4} a_2 (\eta - x)^{-1/2} + \dots \quad (9.5.33)$$

Подставляя правую часть соотношения (9.5.26) в равенство (9.5.32) и дифференцируя получившееся выражение, находим, что

$$t''(x) = T'(x) \left\{ 1/x + \sum_{k=2}^{\infty} T^k(x^k) x^{k-1} \right\} + \dots, \quad (9.5.34)$$

где опущенные слагаемые ограничены в окрестности точки η . Принимая еще во внимание формулы (9.5.22) и (9.5.27), имеем

$$t''(x) = \frac{1}{4} b_1^3 (\eta - x)^{-1/2} + \dots, \quad (9.5.35)$$

а следовательно, $a_2 = b_1^3/3$. После этого, используя формулу (9.5.20), нетрудно найти оценки для числа деревьев. Так как $(b_1^3/4\sqrt{\pi})\eta^{3/2} = 0,5349485\dots$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема. Число t_p p -вершинных деревьев удовлетворяет равенству

$$t_p = 0,5349485 \frac{\eta^{-p}}{p^{5/2}} + O\left(\frac{\eta^{-p}}{p^{7/2}}\right). \quad (9.5.36)$$

В заключение приведем таблицу Оттера (см. табл. 9.5.1), в которой сравниваются значения величин t_p и T_p с приближенными

Таблица 9.5.1

Аппроксимация числа деревьев

p	T_p	\tilde{T}_p	t_p	\tilde{t}_p
1	1	1	1	2
2	1	1	1	1
3	2	2	1	1
4	4	4	2	2
5	9	9	3	2
10	719	708	106	86
15	87 811	86 965	7 741	7 050
18	1 721 159	1 708 440	123 867	114 875

значениями \bar{t}_p и \bar{T}_p этих же величин; последние получены по формулам (9.5.36) и (9.5.29) соответственно (без учета остаточных членов).

УПРАЖНЕНИЯ

- 9.1. (а) Отношения, асимптотически. (Обершельп [1])
 (б) Турниры, асимптотически. (Мун [2])
- 9.2. Связные (p, q) -графы (помеченные и непомеченные), асимптотически. (Эрдёш и Реньи [1], Райт [4])
- 9.3. Исследуя соотношение

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n \right),$$

найти, как быстро должны возрастать f_n , чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n/f_n = 1$.
 (Указание: см. статьи Райта.) (Райт [2])

9.4. Для всякого положительного k число g_p графов удовлетворяет равенству

$$g_p = \frac{2^{\binom{p}{2}}}{p!} \left(1 + \sum_{i=1}^k \varphi_i(p) \cdot 2^{-kp} + O \left(\frac{p^{2k}}{2^{kp}} \right) \right),$$

где $\varphi_i(p) = p(p-1) \dots (p-i) \Psi_i(p)$ и $\Psi_i(p)$ — многочлен от переменной p степени $i-1$. (Райт [3])

9.5. Число помеченных p -вершинных графов, не содержащих треугольников, асимптотически равно $2^{\binom{p-1}{2}} (1 + o(1))$.
 (Клейтман Д.)

9.6. (а) Число \bar{t}_{2n} самополнительных турниров равно $(2^{n^2-n}/n!) (1 + o(1))$.

(б) Самополнительные турниры нечетного порядка, асимптотически.

9.7. Почти все

- (а) турниры — сильные; (Мун и Мозер [1])
 (б) оргграфы — сильные; (Мун и Мозер [2])
 (с) оргграфы — гамильтоновы; (Мун [5])
 (д) графы — гамильтоновы. (Мун [5])

9.8. Число связных помеченных функциональных оргграфов порядка p асимптотически равно $(\pi/2)^{1/2} p^{p-1/2}$. (Реньи [2], Кац [1]).

9.9. Число чистых 2-мерных симплициальных комплексов¹ по-

¹ Двумерный симплициальный комплекс называется *чистым*, если каждый одномерный симплекс в нем является гранью некоторого двумерного симплекса. — Прим. перев.

рядка p асимптотически равно $2^{\binom{p}{2}}/p!$.

9.10. Вероятность того, что выбранная случайным образом вершина помеченного p -вершинного дерева является висячей, стремится к $1/e$ при возрастании p . (Реньи [1])

9.11. Почти все деревья имеют нетривиальные автоморфизмы. (Форд и Уленбек [1])

9.12. Для справедливости равенства (9.3.4) достаточно, чтобы

$$\min \left(q, \binom{p}{2} - q \right) \geq 3p \ln p. \quad (\text{Райт [5]})$$

9.13. Необходимым и достаточным условием для (9.3.4) является следующее:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \min \left(q, \binom{p}{2} - q \right) - \ln p}{p} \right) = \infty. \quad (\text{Райт [5]})$$

Не знаю, каким я предстаю перед человечеством, но самому себе я кажусь мальчиком, играющим на берегу моря и развлекающим сейчас самого себя, а потом — собирающим отшлифованные морем гальши или более красивые, чем обычно, раковины. А великий океан истины лежит предо мной абсолютно нетронутый!

Исаак Ньютон

Глава 10 | НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Хотя разнообразная, усложненная, малопонятная и специализированная терминология может затуманить истинное положение вещей, но факт остается фактом: очень многие модельные (схемные, структурные) и конфигурационные задачи становятся графическими по своей природе, если их соответствующим образом переформулировать. Более того, представив задачу на языке графов или родственных им образований, можно значительно легче выявить ее концептуальные трудности. Мы приводим здесь обширный набор задач перечисления графов, содержащий достаточный материал для изысканий специалистов нашего времени и последующих поколений.

Раньше существовали списки, включающие ровно двадцать семь нерешенных задач перечисления графов. Теперь мы снимем ограничение на число задач и представим здесь мириады все еще открытых вопросов теории перечисления графических объектов. В каждом параграфе данной главы мы помечаем символами П1.1, П1.2, . . . совокупности родственных по какому-либо признаку задач перечисления графов. В некоторых случаях соответствующая информация приводится в виде нескольких первых членов производящей функции.

Мы не выделили явно задачи, относящиеся к перечислениям различных типов деревьев, ибо, как нам кажется, существующих методов вполне достаточно для решения этих задач. О перечислении помеченных деревьев см. Мун [4] и гл. 1 данной книги, о перечислении непомеченных деревьев см. гл. 3.

10.1. ПОМЕЧЕННЫЕ ГРАФЫ

Последующие параграфы включают нерешенные задачи перечисления как помеченных, так и непомеченных графов. Обычно «помеченный случай» бывает более податливым, чем «непомечен-

ный случай», ибо связан с меньшей симметрией. Однако существуют два примечательных исключения, когда непомеченные конфигурации пересчитаны, а помеченные — нет:

П1.1. Помеченные самообратные орграфы.

Непомеченные самообратные орграфы были пересчитаны в гл. 6 с использованием теоремы перечисления степенной группы.

П1.2. Помеченные самодополнительные графы.

Число самодополнительных графов и орграфов было определено Ридом [6] (см. гл. 6).

«Помеченные случаи» обеих этих задач остаются нерешенными.

10.2. ОРГРАФЫ

Существует много таких нерешенных задач, относящихся к орграфам, которые лучше формулировать параллельно с соответствующими задачами для графов, что и будет сделано в последующих параграфах. Однако имеется ряд задач, которые стоит отдельно упомянуть здесь, ибо они связаны со структурными свойствами, присущими исключительно орграфам.

П2.1. Сильные орграфы.

Напомним (см. гл. 5), что орграф называется *сильным*, если каждая пара его вершин является взаимно достижимой с помощью ориентированных простых цепей. Нашему большому другу



Рис. 10.2.1. Сильные орграфы третьего порядка.

Р. Робинсону несколько лет назад удалось перечислить как помеченные, так и непомеченные сильные орграфы, но пока еще он не нашел времени подробно изложить эти интересные, важные и трудные результаты. Надеемся, что он осуществит это в течение текущего десятилетия. Его методы основаны на рассмотрении конденсации D^* произвольного орграфа D (вершинами конденсации D^* являются сильные компоненты орграфа D) и на использовании его же техники, базирующейся на суммах цикловых индексов и изложенной в гл. 8.

Все оргграфы четвертого порядка приведены в книге Харари [1], стр. 262—265. Как показано в работе Харари и Палмера [6], существуют 83 сильных оргграфа четвертого порядка. Значит, перечисляющий ряд для сильных оргграфов начинается так:

$$x + x^2 + 5x^3 + 83x^4 + \dots$$

П2.2. Односторонние оргграфы.

Оргграф называется *односторонне связным*, или *односторонним*, если для любых двух вершин по крайней мере одна достижима из другой. Хотя односторонние компоненты оргграфа не дают, вообще говоря, его разбиения, но все же метод Робинсона, упомянутый выше при рассмотрении задач перечисления сильных оргграфов, можно приспособить и к односторонним оргграфам. Перечисляющий ряд для односторонних оргграфов, как подсчитал Р. К. Рид, начинается такими слагаемыми:

$$x + 2x^2 + 11x^3 + 172x^4 + 8603x^5 + \dots$$

Справедлива теорема (см. Харари, Норман и Картрайт [1], стр. 66): оргграф является односторонним тогда и только тогда, когда его конденсация содержит единственную простую остовную цепь. Поэтому подходящая модификация метода перечисления сильных оргграфов может быть полезной при подсчете односторонних оргграфов. И Робинсон действительно реализовал это в своем подходе к задаче перечисления односторонних оргграфов, но пока еще полученные им результаты не только не опубликованы, но даже и не написаны.

П2.3. Оргграфы с источниками.

Вершина оргграфа называется *источником*, если все другие вершины оргграфа достижимы из нее. Двойственным образом определяется *сток*. Существует, естественно, одинаковое число оргграфов с источником и оргграфов со стоком; эти совокупности взаимно обратны. Перечисляющий ряд для описанных оргграфов начинается так:

$$x + 2x^2 + 12x^3 + 184x^4 + \dots$$

В сильном оргграфе каждая вершина является одновременно источником и стоком. Задача перечисления оргграфов, обладающих и источником, и стоком, также не решена. Робинсон и здесь заявляет, что он может пересчитывать эти виды оргграфов.

П2.4. Транзитивные оргграфы.

Оргграф называется *транзитивным*, если из принадлежности ему дуг uv и vw вытекает принадлежность ему дуги uw . Легко видеть, что транзитивные оргграфы порядка p соответствуют в точ-

ности конечным топологиям, определенным на множестве из p элементов. Конечные топологии перечислены только для «помеченного случая» (см. Эванс, Харари, Линн [1]) с использованием чисел Стирлинга второго рода.

Первые четыре слагаемых в перечисляющем ряду для непомеченных транзитивных орграфов имеют вид

$$x + 3x^2 + 9x^3 + 32x^4 + \dots$$

Не известен даже следующий член ряда. Для помеченного случая подсчитаны первые девять коэффициентов перечисляющего ряда; оказалось, что машинное время, необходимое для вычисления коэффициентов этого ряда, растет по экспоненте. Значения восьми первых коэффициентов приведены в табл. П6 приложения I.

П2.5. Орграфы, являющиеся одновременно самодополнительными и самообратными.

Существует только два орграфа порядка 3, которые одновременно и самодополнительные, и самообратные — это циклическая и транзитивная тройки. Перечисляющий ряд для описанных орграфов начинается так:

$$x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \dots$$

Задача перечисления указанных орграфов представляет собой новый интересный тип задачи, которая, по-видимому, требует для своего решения подходящего обобщения леммы Бернсайда.

П2.6. Эйлеровы орграфы.

Эйлеровы графы были также перечислены Робинсоном [2], однако та техника, которая использовалась при перечислении графов, не приспособлена для решения соответствующей задачи, относящейся к орграфам. Перечисляющий ряд для эйлеровых орграфов начинается так:

$$x + x^2 + 3x^3 + 12x^4 + 68x^5 + \dots$$

Кюциг обратил внимание на частный случай этой задачи: перечисление эйлеровых турниров; начальные члены соответствующего ряда таковы:

$$x + x^3 + x^5 + 3x^7 + \dots$$

10.3. ГРАФЫ С ДАННЫМИ СТРУКТУРНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Мы в этой книге уже показывали, как можно подсчитывать разнообразные графы со специальными структурными свойствами. Типичными примерами таких графов являются графы,

характеризуемые их циклической структурой: деревья, унициклические графы и функциональные оргграфы. Свойство связности мы рассматривали при перечислении связных графов, блоков и графов блоков. В данном параграфе мы коснемся следующих восьми категорий графов:

- a) гамильтоновы графы,
- b) эйлеровы (p, q) -графы,
- c) графы с локальными подграфами,
- d) асимметрические графы,
- e) симметрические графы,
- f) графы, обладающие квадратным корнем,
- g) реберные и тотальные графы,
- h) графы клик и графы интервалов.

Каждая из этих категорий содержит в свою очередь несколько отдельных задач перечисления, так что в данном параграфе представлено много разнообразных задач. Кроме того, всякий раз, когда в литературе по теории графов появляется новое структурное свойство, можно формулировать задачу о нахождении числа графов, обладающих этим свойством.

П3.1. Гамильтоновы графы.

Граф (или оргграф) называется *гамильтоновым*, если он содержит простой остовный цикл (соответственно остовный контур). Такие графы и оргграфы не подсчитаны пока ни для помеченного, ни для непомеченного случаев. Перечисляющий ряд для непомеченных гамильтоновых графов начинается так:

$$x^3 + 3x^4 + 8x^5 + 48x^6 + \dots,$$

а первые слагаемые перечисляющего ряда для непомеченных гамильтоновых оргграфов имеют вид

$$x^2 + 4x^3 + 60x^4 + \dots$$

Гамильтоновы графы являются наиболее известным частным случаем графов, содержащих специальный подграф, а именно простой остовный цикл. Можно также выделить еще некоторые классы графов, используя подграфы другого вида, такие, как 1-фактор, 1-базу, циклы данной длины или полные графы данного порядка. Мы будем подробно говорить на эту тему в § 10.6.

П3.2. Эйлеровы графы.

Робинсон [2] перечислил эйлеровы p -вершинные графы, не обращая внимания на число ребер в них (см. § 4.7). Более трудной является задача перечисления эйлеровых (p, q) -графов, когда число ребер также представляет собой перечислительный

параметр. Для эйлеровых графов шестого порядка **перечисляющий** полином имеет вид

$$x^6 + x^7 + 2x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12},$$

где показатели степеней указывают на число ребер.

Другим интересным параметром для эйлеровых графов является наименьшее число циклов, объединение которых дает исходный граф. Этот параметр появился благодаря следующей теореме (см. Харари [1]), стр. 83): связанный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда его множество ребер можно разбить на простые циклы.

П3.3. Локальные подграфы.

Пусть дан граф H . Требуется найти число таких графов порядка p , у которых каждая вершина принадлежит некоторому подграфу, изоморфному H . Например, если H — треугольник, то соответствующий ряд начинается так:

$$x^3 + 2x^4 + 7x^5 + 37x^6 + \dots$$

Аналогичная задача возникает и для числа графов, в которых каждое ребро принадлежит треугольнику. Подобные вопросы встают, естественно, и для орграфов.

П3.4. Асимметрические графы.

Не существует нетривиальных графов, порядок которых меньше 6 и которые имеют единичную группу автоморфизмов. При $p = 6$ существуют восемь асимметрических графов. В § 9.4 мы показали, что асимптотически большинство графов обладает единичной группой. Но точной формулы для числа асимметрических p -вершинных графов не известно. Аналогичная задача стоит и для асимметрических орграфов. Перечисляющий ряд для асимметрических орграфов начинается так:

$$x + x^2 + 7x^3 + 137x^4 + \dots$$

Асимметрические деревья были перечислены Харари и Принсом [1]. Стокмейер [1] перечислил асимметрические унициклические графы и асимметрические функциональные орграфы. В действительности Стокмейер получил формулу для числа графов (и орграфов) с данной группой автоморфизмов. Но ее использование предполагает знание всей решетки подгрупп симметрической группы S_p . Поэтому, несмотря на то что с теоретической точки зрения перечисление асимметрических графов и орграфов осуществлено, его нельзя, строго говоря, рассматривать как решение соответствующей задачи (см. табл. П10 в приложении II).

ПЗ.5. Симметрические графы.

В *вершинно-симметрическом* графе группа автоморфизмов транзитивна на множестве вершин. *Реберно-симметрический* граф определяется соответствующим образом. *Симметрический* граф является одновременно вершинно-симметрическим и реберно-симметрическим.

Тёрнер [1] подсчитал вершинно-симметрические графы порядка p для случая простого числа вершин. Чао [1] доказал, что однородный симметрический граф степени n и простого порядка p существует тогда и только тогда, когда n — четное и делит $p - 1$; более того, для каждой пары p, n такой граф единствен с точностью до изоморфизма. Других результатов о числе симметрических графов не известно.

ПЗ.6. Графы, обладающие квадратным корнем.

Квадрат G^2 графа G имеет то же множество вершин, что и граф G , и вершины u и v смежны в G^2 лишь тогда, когда расстояние между ними в графе G равно 1 или 2. Степени G^3, G^4, \dots определяются аналогично. Известна характеристика графов, обладающих квадратным корнем (см. Харари [1], стр. 38); подобные результаты для орграфов найдены Геллером [1]. Перечисление графов и орграфов, обладающих корнем n -й степени, может не оказаться нерешаемой задачей.

ПЗ.7. Реберные графы и тотальные графы.

У *реберного графа* $L(G)$ графа G множеством вершин является множество всех ребер графа G ; вершины в $L(G)$ смежны, если смежны соответствующие им ребра в G . Граф называется *реберным*, если он есть реберный граф некоторого графа. Это понятие было введено Уитни [1], который показал, что реберный граф H является реберным графом только одного графа, кроме того случая, когда $H = K_3$. Таким образом, число связных реберных графов порядка $p > 3$ равно в точности числу связных графов, имеющих p ребер. Используя таблицу из статьи Кэдогана [1], дающую число связных графов, получаем начальные слагаемые производящей функции для связных реберных графов с данным числом вершин:

$$x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 12x^5 + 30x^6 + 79x^7 + 227x^8 + \dots$$

Возникающая здесь задача состоит в следующем: найти более прямой метод, пригодный также и для подсчета реберных графов с данными числами вершин и ребер. Такой подход должен, вероятно, использовать одну из структурных теорем о реберных графах (см. соответствующие утверждения в гл. 8 книги Харари [1]).

Как показано в статье Харари и Нормана [3], число связных оргграфов с q дугами не совпадает с числом связных реберных оргграфов порядка q . Следовательно, мы не имеем даже окольного подхода к перечислению реберных оргграфов.

Тотальный граф $T(G)$ графа G имеет в качестве множества вершин все вершины и ребра графа G ; смежность определяется естественным образом (см. Харари [1], стр. 103). Известно, что тотальный граф $T(G)$ является квадратом графа подразбиений $S(G)$, получаемого с помощью добавления к каждому ребру графа G новой вершины¹ степени 2. Однако сомнительно, что этот факт облегчит поиски перечислительной формулы.

П3.8. Графы клик и графы интервалов.

Клик графа G называется любой максимальный полный подграф графа G . *Граф клик* графа G имеет в качестве множества вершин все клики графа G и смежность определяется через непустые пересечения соответствующих (двух) клик. Множеством вершин *графа интервалов* является некоторая совокупность интервалов действительной прямой, а смежность снова определяется через пересечение. В *циклически жестком графе* не содержится простых циклов, отличных от треугольников. Известно, что эти классы графов связаны друг с другом (посредством характеристических теорем). Например, структурную характеристику графов клик дали Робертс и Спенсер [1] (см. об этом в книге Харари [1], стр. 35).

10.4. ГРАФЫ С ДАННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Задачи перечисления проще предлагать, нежели решать. Например, всякий раз когда в нашем поле зрения появляется новый параметр, мы немедленно можем сформулировать соответствующую задачу перечисления. Задачи перечисления графов с данными параметрами естественным образом разбиваются на подмножества, соответствующие связанным между собой параметрам. Мы выделяем следующие десять категорий параметров:

- a) радиус и диаметр,
- b) обхват и окружение,
- c) наименьшая и наибольшая степени,
- d) связность,
- e) числа независимости и покрытия,
- f) числа, связанные с кликами,
- g) число пересечения,

¹ То есть граф $S(G)$ получается из графа G путем подразбиения каждого ребра графа G на два новых ребра. — *Прим. перев.*

- h) древесность,
- i) род, толщина, крупность, число скрещиваний,
- ж) хроматические числа.

Для каждой из указанных категорий мы определяем соответствующие инварианты и описываем частичные успехи, достигнутые в этих направлениях.

П4.1. Радиус и диаметр.

Эксцентриситетом $e(v)$ вершины v графа G называется наибольшее из расстояний от вершины v до других вершин графа. Радиус $r(G)$ есть наименьший из эксцентриситетов вершин в графе G , а диаметр $d(G)$ — наибольший из эксцентриситетов.

Таким образом, радиус графа G равен 1 тогда и только тогда, когда в графе существует вершина v_0 , смежная со всеми другими вершинами графа. Легко подсчитывается число p -вершинных графов радиуса 1, ибо оно в точности совпадает с общим числом графов порядка $p-1$. Но уже для графов радиуса 2 не существует прямых способов подсчета их числа.

Для деревьев диаметр аппроксимируется двойным радиусом. Деревья с заданным диаметром перечислены Харари и Принсом [1]. Для графов справедливо тривиальное высказывание: p -вершинный граф с диаметром $d=1$ совпадает с K_p .

Соответствующие задачи имеют место и для орграфов. Входной и выходной радиусы орграфа D определены в книге Харари, Нормана и Картрайта [1] на стр. 162. Эти инварианты, так же как и диаметр, существуют всегда в сильно связном орграфе D .

П4.2. Обход и окружение.

Обход графа есть наименьшая из длин его простых циклов; окружение — наибольшая из таких длин. Пусть c_n — число циклов длины n в графе G . Спрашивается, сколько существует графов со следующим набором чисел циклов разной длины: (c_3, c_4, \dots, c_p) . Ответ на этот общий вопрос позволил бы со значительно меньшими трудностями подсчитать, например, такие структуры:

- a) графы с данным обхватом и тем более
- b) графы с данным окружением,
- c) графы, содержащие треугольники,
- d) графы, содержащие четырехугольники,
- e) гамильтоновы графы,
- f) графы с данным числом циклов.

Перечисление унциклических графов, проведенное в § 3.4, является весьма незначительным шагом в этом направлении.

П4.3. Наименьшая и наибольшая степени.

Наименьшая степень δ и наибольшая степень Δ являются естественными параметрами, которые можно рассматривать в задачах перечисления. Хотя и существуют утверждения теоретического характера, относящиеся к перечислениям графов с данным разбиением (Партасарати [11]) и орграфов с данным разбиением (Харари и Палмер [3]), эти утверждения не имеют прямого отношения к δ и Δ .

Рассмотрим графы с $\delta \geq n > 0$. При $n = 1$ получаем все графы без изолированных вершин. Этот случай исследуется легко. Случай $n = 2$ охватывает все графы, не имеющие ни висячих, ни изолированных вершин. Такие графы перечислены Робинсоном [3] с использованием метода сумм цикловых индексов, развитого для перечисления блоков (см. § 8.6). При $n = 3$ приходим к гомотоморфно несводимым графам без висячих вершин.

П4.4. Связность.

Связностью κ (*реберной связностью* λ) графа G называется наименьшее число вершин (ребер), после удаления которых получаем несвязный или тривиальный граф. Граф G называется n -связным, если $\kappa \geq n$. Таким образом, число графов со связностью n равно разности между числом n -связных графов и числом $(n+1)$ -связных графов.

И 0-связные, и 1-связные графы перечислены, ибо указанные множества представляют собой соответственно все графы и все связные графы. 2-связные графы с $p \geq 3$ вершинами образуют множество всех блоков; они были перечислены Робинсоном (см. гл. 8). Перечисление n -связных графов при $n \geq 3$, очевидно, требует более мощных методов, чем те, которые существуют сейчас.

Встает вопрос и о числе графов с данными κ и λ , а также (частный случай) о числе графов, у которых $\kappa = \lambda$.

П4.5. Числа независимости и покрытия.

Множество вершин (ребер) называется *независимым*, если никакие два его элемента не являются смежными. *Вершинное число независимости* β_0 графа G — это наибольшее число независимых вершин графа G . *Реберное число независимости* β_1 определяется аналогично. Говорят, что вершина v и ребро x *покрывают друга*, если v инцидентна x . *Числом вершинного покрытия* α_0 графа G называется наименьшее число вершин, покрывающих все ребра графа; *числом реберного покрытия* α_1 графа G определяется подобным образом.

Учитывая классическое равенство из теории графов: $\alpha_0 + \beta_0 = p = \alpha_1 + \beta_1$, заключаем, что нужно только упомянуть о задачах перечисления графов с данным вершинным числом независимости β_0 и с данным числом β_1 . Перечисление графов по этим параметрам кажется интуитивно более легким, чем перечисление графов с данными числами покрытий; однако из приведенного выше равенства это не следует.

П4.6. Числа, связанные с кликами.

Существуют несколько инвариантов, связанных с кликами. Один из них — наибольший порядок клик графа G , который мы можем записать в виде $\beta_0(\bar{G})$, ибо он равен наибольшему числу независимых вершин в дополнении \bar{G} графа G . Вот еще некоторые числа, связанные с кликами:

- a) число клик,
- b) наименьший порядок клик,
- c) наименьшее число клик, покрывающих все вершины графа G ,
- d) аналогичная характеристика для покрытия ребер графа G ,
- e) наибольшее число попарно не пересекающихся клик.

Последний инвариант является, очевидно, вершинным числом независимости графа клик данного графа G . А первый инвариант представляет собой число вершин в этом же графе клик. Вообще, всякий инвариант графа клик данного графа G превращается указанным способом в инвариант самого графа G . Ни одна из этих задач не вселяет надежду на быстрое ее решение.

П4.7. Число пересечения.

Числом пересечения $\omega(G)$ данного графа G порядка p называется наименьшее число элементов в множестве S , таком, что существует семейство S_1, S_2, \dots, S_p различных непустых подмножеств множества S , объединение которых равно S , и вершины v_i и v_j смежны в графе G тогда и только тогда, когда $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Вариацией этого инварианта является число ω_0 , отличающееся от ω только тем, что соответствующие ему подмножества S_i могут не быть различными; так, например, $\omega_0(K_p) = 1$.

Кажется сомнительным, что существует какой-либо метод для перечисления графов с данным числом пересечения или с любой из его возможных вариаций.

П4.8. Древесность.

Древесность графа G есть наименьшее число попарно реберно-непересекающихся ациклических подграфов, объединение которых равно G . Наибольшее число попарно реберно-непересекающихся

подграфов графа G , которые содержат циклы и дают после объединения весь граф G , называется *недревесностью* графа G . Как отмечено в статье Харари [13], эти две характеристики составляют пару инвариантов: инвариант покрытия (древесность) и инвариант упаковки (недревесность). Другая такая пара состоит, во-первых, из числа цепного покрытия¹, равного наименьшему числу простых цепей, объединение которых совпадает с графом G и, во-вторых, из «упаковочного двойника» числа цепного покрытия². Такие инварианты кажутся безнадежными для использования их в качестве параметров перечисления; то же самое можно сказать и о числе остовов в графе, которое Брукс, Смит, Стоун и Татт [1] назвали *сложностью* графа.

П4.9. Род, толщина, крупность, число скрещиваний.

Эти и другие топологические инварианты вполне могут оказаться наиболее неподатливыми из всех инвариантов, имеющих какое-либо отношение к задачам перечисления. *Род* γ графа G равен наименьшему из родов ориентируемых поверхностей, на которых граф G можно уложить так, чтобы никакие два его ребра не пересекались³. *Толщина* θ есть наименьшее число планарных подграфов, объединение которых совпадает с графом G . *Крупность* ξ — это наибольшее число реберно-непересекающихся непланарных подграфов, объединение которых равно G . Наконец, *число скрещиваний* ν есть наименьшее число пар пересекающихся ребер графа G при расположении этого графа на плоскости⁴. Если G — планарный граф, то $\gamma(G) = \nu(G) = 0$, $\theta(G) = 1$ и $\xi(G)$ не определено. Существует много других топологических инвариантов, относящихся к графам, но все они настолько же непригодны для целей перечисления графов, как и приведенные выше четыре инварианта.

П4.10. Хроматические числа.

Хроматическим числом χ графа G называется наименьшее число красок, необходимое для такого раскрашивания вершин графа G , при котором никакие две смежные вершины не окрашены

¹ В оригинале: the covering path number. — Прим. перев.

² Этот «упаковочный двойник» можно определить, например, как наибольшее число таких попарно реберно-непересекающихся подграфов графа G , которые не содержат изолированных вершин, отличны от простых цепей и после объединения дают весь граф G . — Прим. перев.

³ Точнее, любая точка пересечения каких-либо ребер в укладке графа G на данной поверхности не является внутренней точкой никакого ребра графа G . — Прим. перев.

⁴ Ребра в каждой паре пересекаются только в одной точке; точки пересечения каждой пары ребер отличны друг от друга и не совпадают ни с одной из вершин графа. — Прим. перев.

в один цвет. Реберно-хроматическое число χ' (тотально-хроматическое число χ'') графа G представляет собой хроматическое число реберного графа $L(G)$ (соответственно тотального графа $T(G)$). Некоторые авторы называют число χ' хроматическим индексом графа.

Граф G называется n -хроматическим, если $\chi = n$, и G называется n -раскрашиваемым, если $\chi \leq n$. Робинсоном [1] были перечислены n -раскрашенные графы (см. § 4.5), а 2-раскрашиваемые графы перечислены Харари и Принсом [2]. В настоящее время, по-видимому, невозможно перечислить даже 3-раскрашиваемые графы.

10.5. ПОДГРАФЫ ДАННОГО ГРАФА

В большинстве задач этого параграфа требуется найти число неподобных подграфов данного графа G , изоморфных некоторому графу H . Таким образом, с помощью группы графа G выясняется, можно или нет рассматривать два различных вхождения подграфа H как эквивалентные. Аналогичные вопросы можно сформулировать и для орграфов.

П5.1. Гамильтоновы циклы.

Число всех простых остовных циклов в данном помеченном графе или помеченном орграфе можно выразить в чисто теоретическом виде (на языке матрицы смежности), используя метод Картрайта и Глисона Т. [1]. Но вычисление требуемых при этом чисел практически не осуществимо, и случается, что задача еще сильнее усложняется даже тогда, когда число классов подобия такое, о котором можно только мечтать. Лишь для специальных графов, таких, как K_p , можно выписать ответ, исходя из элементарных комбинаторных принципов.

Наиболее интересный частный случай этой задачи возникает тогда, когда заданный граф является n -кубом Q_n ; этот случай находит приложение в теории кодирования. Легко заметить, что существует только один класс подобия простых остовных циклов в Q_2 и в Q_3 . Гилберт [1] показал, что соответствующий перечисляющий ряд начинается так:

$$x^2 + x^3 + 9x^4 + \dots$$

Но при $n > 4$ значения коэффициентов не известны. Число помеченных гамильтоновых циклов в Q_n также найдено лишь для $n \leq 4$. И не ясно, сколько требуется машинного времени, чтобы точно вычислить следующий коэффициент.

П5.2. Простые циклы данной длины.

Задача состоит в нахождении числа неподобных простых циклов длины k в p -вершинном графе и является обобщением задачи П5.1. Задача легко решается в частных случаях. Например, существует ровно один класс подобия простых остовных циклов длины $2k$ в полном двудольном графе $K_{m,n}$ при $m, n \geq k$. В «помеченном случае» ответ на тот же самый вопрос таков: $\binom{m}{k} \binom{n}{k} \times k! (k-1)!/2$. Решение «помеченной задачи» для простых циклов длины 3, 4 и 5 в данном графе или орграфе, полученное в терминах матрицы смежности, можно найти в статье Харари и Манвела [1].

П5.3. Полные графы.

Как упоминалось выше, число треугольников K_3 в данном помеченном графе вычислить можно. Задача определения числа входящих графа K_n , $n > 3$, в данный помеченный граф остается нерешенной. В «непомеченном» случае для получения числа неподобных треугольников необходимо знать не только общее число треугольников, но и во что эти треугольники преобразуются под воздействием группы данного графа.

П5.4. Остовы.

Число помеченных остовов данного помеченного графа может быть вычислено с помощью матричной теоремы о деревьях. Но не известно соответствующего метода для нахождения числа различных (неизоморфных) остовов данного (непомеченного) графа. Трудность решения последней задачи демонстрируется примером, в котором заданный граф является полным графом порядка p . В этом случае число различных остовов равно числу p -вершинных деревьев; число таких деревьев впервые было подсчитано Кэли. Задача о подсчете числа неподобных остовов в данном графе также не решена.

П5.5. Факторы.

Пусть G — помеченный граф, обладающий 1-фактором, т. е. остовным подграфом, состоящим из независимых ребер (см. Харари [1], стр. 106). Число различных 1-факторов графа G известно только в очень частных случаях. Например, граф K_{2n} имеет $(2n)!/2^n n!$ 1-факторов, а граф $K_{n,n}$ имеет ровно $n!$ 1-факторов.

Факторизацией (или *1-факторизацией*) графа G называется разбиение множества всех ребер графа G на 1-факторы, если

такое разбиение существует. Известно, что граф K_{2n} имеет 1-факторизацию, но число их найдено только при малых n . Недавно Уоллис установил, что граф K_8 имеет ровно шесть 1-факторизаций. В силу классической теоремы Кёнига (см., например, Харари [1], стр. 107), каждый регулярный двудольный граф $K_{n,n}$ имеет 1-факторизацию, так что здесь тоже возникает вопрос о числе 1-факторов.

П5.6. Эйлеровы циклы в данном эйлеровом графе.

Известна точная формула для числа эйлеровых контуров в данном орграфе (см. формулу (1.8.2)). Однако для графов никакого прогресса в этом направлении нет. Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в следующем: нужно рассмотреть все ориентации данного эйлерова графа G , получается набор эйлеровых орграфов D_1, D_2, \dots . Если e_i — число эйлеровых контуров в D_i , то $\sum e_i$ равна общему числу ориентированных эйлеровых циклов в графе G . Но сказать-то легко, а как это сделать? Например, в частном случае, когда $G = K_{2n+1}$, нужно иметь в наличии матрицы смежности всех эйлеровых турниров порядка $2n + 1$!

10.6. НАДГРАФЫ ДАННОГО ГРАФА

В задачах этого параграфа спрашивается о числе графов порядка p , являющихся надграфами данного графа H . При подсчете таких графов может оказаться полезной экстремальная теория графов. Например, если $H = K_3$, то теорема Турана показывает, что в случае, когда граф G имеет более чем $\lfloor p^2/4 \rfloor$ ребер, то в нем содержится треугольник K_3 . Следовательно, для решения соответствующей задачи перечисления достаточно рассмотреть только графы, у которых не больше чем $\lfloor p^2/4 \rfloor$ ребер. С другой стороны, решение такой задачи перечисления приводит к решению соответствующей экстремальной задачи. Варианты всех этих задач существуют также и для орграфов.

П6.1. Простые циклы.

Подсчет надграфов треугольника эквивалентен подсчету графов, обхват которых равен 3. Однако надграфы простого цикла C_n порядка $n \geq 4$ не соответствуют графам обхвата n , ибо последние не содержат вообще простых циклов меньшей, чем n , длины. Перечисляющий ряд надграфов цикла C_4 начинается так:

$$3x^4 + 16x^5 + 111x^6 + \dots$$

П6.2. Полные графы.

Задача о подсчете числа надграфов графа K_n уже появлялась в различных оформлениях для случая $n = 3$. Поэтому наши интересы здесь сосредоточены на случаях $n \geq 4$. Решение соответствующей экстремальной задачи дается общей теоремой Турана (см., например, Харари [1], стр. 33).

П6.3. Полные двудольные графы.

Задача состоит в подсчете надграфов графа $K_{m,n}$. Так как $K_{2,2}$ является простым циклом длины 4, то мы уже сталкивались с этим трудным частным случаем. Заметим, что надграфы графа $K_{n,n}$ представляют собой такие графы, у которых наибольшая степень равна по крайней мере n (ср. с задачей П4.3).

П6.4. Простые цепи.

Подсчет надграфов простой цепи P_n порядка n осуществляется легко для малых n . Например, если $n = 4$, то среди связанных графов порядка ≥ 4 только звезды $K_{1,m}$ не являются надграфами цепи P_4 . А чтобы решить задачу подсчета числа надграфов цепи P_n для каждого n , надо уметь подсчитывать такие связанные графы порядка $\geq n$, у которых диаметр любого остова меньше n . Эта задача родственна задаче П5.4.

10.7. ГРАФЫ И РАСКРАСКА

Существует естественный метод обоснования гипотезы четырех красок (4КГ), базирующийся на решении некоторых задач перечисления графов:

4КГ: Каждый планарный граф 4-раскрашиваем.

ПЭ4КГ: Число планарных графов равно числу 4-раскрашиваемых планарных графов. (ПЭ4КГ означает перечислительный эквивалент гипотезы четырех красок).

Известно, что первые 39 коэффициентов в перечисляющих рядах этих двух классов графов (стоящие при соответствующих степенях!) одинаковы¹ (см. Оре и Стампл [1]). Существует несколько возможных направлений исследований, определяемых двумя различными «степенями свободы»:

1. Можно по-разному выбирать параметр перечисления: либо число вершин p , либо число ребер q , либо p , и q , либо диаметр d , либо произвольный другой подходящий параметр.

¹ Из результата Донца [1] следует, что таким свойством обладают первые 41 коэффициентов упомянутых перечисляющих рядов. А совсем недавно появилось сообщение (см. Appel K., Haken W., Every planar map is four colorable, *Bull. of Amer. Math. Soc.*, 82, № 5 (1976) о том, что гипотеза четырех красок является истинным утверждением. — *Прим. перев.*

2. Можно выбирать тот или иной тип графов, соблюдая при этом единственное условие: и планарные графы, и 4-раскрашиваемые планарные графы должны одновременно обладать этими выбранными (характерными для рассматриваемого типа графов) свойствами. Вот некоторые из таких свойств:

- а) планарные графы (как в ПЭ4КГ),
- б) корневые планарные графы,
- с) реберно-корневые планарные графы,
- д) планарные графы, у которых корнями являются треугольники,
- е) помеченные планарные графы,
- f—j) предыдущие пять свойств, но с заменой в них планарных графов на плоские,
- к) плоские графы, которые превращаются в корневые в результате следующей трехшаговой процедуры:

- (1) выбираем произвольное ребро x в плоском графе G ,
- (2) ориентируем ребро x произвольным образом,
- (3) выделяем произвольным образом одну из двух граней, инцидентных ребру x , и называем эту грань внешней. Для шага (1) имеются q возможностей, так как у графа G всего q ребер; для шагов (2) и (3) имеются по две возможности. Перемножая все эти числа, видим, что общее число описанных ориентаций (ориентаций по Татту) плоского графа равно $4q$. Указанная ориентация рассматривалась в статье Харари и Татта [1], посвященной группе автоморфизмов планарного графа. Достаточно полный обзор разнообразных приемов перечисления ориентированных по Татту плоских карт дан в работе Татта [3], и мы отсылаем читателя, интересующегося соответствующей проблематикой, к указанной работе.

П7.1. Планарные и плоские графы.

Все деревья являются планарными, так что число планарных деревьев равно числу всех деревьев. Плоские унициклические графы легко перечисляются с помощью теоремы перечисления Пойа (см. соотношение (2.4.6)): в качестве перечисляющего ряда для фигур нужно взять перечисляющий ряд для плоских корневых деревьев, а в качестве группы конфигураций надо использовать диэдральную группу.

Все десять приведенных выше вариаций (см. (a)—(j)) перечислительного эквивалента гипотезы четырех красок остаются нерешенными.

П7.2. n -раскрашиваемые графы.

Эта задача решена только для $n = 2$ и совпадает с задачей П4.10.

П7.3. Планарные n -раскрашиваемые графы.

Эта задача не решена для всех $n > 1$. Даже при $n = 2$ данная задача является весьма трудной, ибо связана с описанием гомеоморфизмов графа $K_{3,3}$.

П7.4. Самодвойственные плоские графы.

Граф G^* , двойственный к данному плоскому графу G , строится следующим образом: в каждой области (границе) графа G , включая и внешнюю область, выбирается по одной точке (вершины графа G^*); если две области имеют общее ребро x , то точки, выбранные в этих областях, соединяются ребром x^* , пересекающим только ребро x . В результате такого построения всегда получается плоский общий граф, в котором могут быть и петли, и кратные ребра. Тетраэдр является самодвойственным графом, тогда как куб и октаэдр двойственны друг другу; то же самое можно сказать о додекаэдре и икосаэдре.

Если бы удалось решить задачи П7.1 и П7.3, то, сличая полученные решения для $n = 4$, можно было бы обосновать ПЭ4КГ, а следовательно, и 4КГ. Все это, конечно, можно осуществить и путем сравнения любой другой пары классов планарных графов, лишь бы эти графы (из разных классов) получались одним и тем же способом; например, графы должны иметь корни одного и того же вида¹. Можно с уверенностью утверждать, что 4КГ не будет обоснована в скором времени с помощью ПЭ4КГ. Кроме того, распространяющиеся иногда слухи о том, что 4КГ будто бы решена, в любом случае не дают ответа на приведенные выше весьма трудные перечислительные вопросы.

10.8. ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ О ГРАФАХ

Существует много конфигураций, которые не являются графами *per se*², но по своей природе — суть графические объекты. Ограниченные пространственные возможности позволяют нам указать перечислительные задачи только для некоторых из этих структур. Мы рассматриваем здесь следующие конфигурации: симплициальные комплексы, латинские квадраты, узлы, полимино, а также конфигурации на шахматной доске и замощения.

П8.1. Симплициальные комплексы.

Симплициальный комплекс состоит из конечного непустого множества V точек и некоторой совокупности подмножеств

¹ Скажем, все графы в рассматриваемой паре классов являются реберно-корневыми. — *Прим. перев.*

² Здесь: сами по себе (*lat.*). — *Прим. перев.*

множества V , называемых *симплексами*, при этом должны выполняться следующие условия: каждая точка из V является симплексом, каждое непустое подмножество симплекса тоже является симплексом. *Размерность симплекса S* равна по определению $|S| - 1$; *размерность комплекса* равна наибольшей из размерностей принадлежащих ему симплексов.

Несмотря на то что число n -размерных комплексов подсчитано только при $n = 1$, когда комплексы представляют собой графы (более точно, 1-размерные комплексы — это графы, не являющиеся вполне несвязными), существуют и другие частные случаи, которые могут быть успешно изучены. В *чистом n -комплексе* каждый максимальный симплекс имеет размерность 0 или n . Таким образом, каждый граф является чистым 1-комплексом. Указания по поводу того, как подсчитывать чистые n -комплексы, даны в статье Харари [11]. Например, задача перечисления чистых 2-комплексов с p вершинами решается путем подстановки $1 + x$ в цикловой индекс *триадной группы* $S_p^{(3)}$ — эта группа индуцируется группой S_p и действует на 3-подмножествах множества объектов. Формула для этого циклового индекса приведена в работе Обершельна [1]. Пусть $s(y) = \sum s_p y^p$ — производящая функция для чистых 3-размерных симплицальных комплексов. С помощью прямых вычислений мы обнаружили, что эта функция начинается так:

$$s(y) = y + y^2 + 2y^3 + 5y^4 + 34y^5 + 2136y^6 + 7013488y^7 + \dots$$

Пусть теперь s_{pqr} обозначает общее число комплексов не выше чем второй размерности, имеющих p точек (0-симплексов), q линий (1-симплексов) и r клеток (2-симплексов). Пусть $s_p(x, y) = \sum s_{pqr} x^q y^r$ — перечисляющий многочлен для таких комплексов с p точками. Для $p = 4$ этот многочлен имеет вид

$$s_4(x, y) = 1 + x + 2x^2 + x^3(3 + y) + x^4(2 + y) + \\ + x^5(1 + y + y^2) + x^6(1 + y + y^2 + y^3 + y^4).$$

Задача состоит в определении $s_p(x, y)$ для произвольного p . Решение этой задачи позволило бы получить соответствующий результат и для комплексов большей размерности.

П8.2. Латинские квадраты.

Латинский квадрат представляет собой квадратную матрицу порядка n , в которой каждая строка и каждый столбец являются перестановкой целых чисел $1, 2, \dots, n$. Если L_n — число квадратов порядка n , в которых и первая строка, и первый столбец являются естественно упорядоченной перестановкой: $1, 2, \dots$

..., n , то общее число латинских квадратов порядка n , очевидно, равно $n!(n-1)!L_n$. Нижеследующие значения величины L_n для $n \leq 7$ взяты из книги Риордана [1], стр. 248:

$$x + x^2 + x^3 + 4x^4 + 56x^5 + 9408x^6 + 16942080x^7 + \dots$$

Латинские квадраты можно также толковать как 2-раскрашенные графы $K_{n,n}$, в которых раскрашены и ребра. Вершины u_i одного цвета соответствуют строкам латинского квадрата, в то время как вершины v_i другого цвета отвечают столбцам. Каждое ребро графа $K_{n,n}$ окрашивается в один из n цветов так, чтобы каждая вершина графа была инцидентна ровно одному ребру каждого цвета.

Число различных латинских квадратов уменьшится, если на множестве квадратов ввести следующим образом эквивалентность: допускаются перестановки в множествах строк, столбцов и символов. Несколько первых коэффициентов перечисляющего ряда для латинских квадратов с такой эквивалентностью были получены Дж. Дж. Зейделем (неопубликованный результат):

$$x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 12x^6 + 147x^7 + \dots$$

Пусть $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ — два латинских квадрата порядка n . Они называются *ортогональными*, если все n^2 пар (a_{ij}, b_{ij}) являются различными. Задача о подсчете числа пар ортогональных латинских квадратов не решена, так же как задача о числе ортогональных m -ок.

П8.3. Узлы и узловые графы.

На рис. 10.8.1 показаны первые семь узлов из числа тех, которые приведены в книге Райдемайстера [1], стр. 70; эти узлы содержатся также в статье Александра и Бригса [1]. Каждый изображенный на рисунке узел спроектирован на плоскость с наименьшим числом пересечений (скрещиваний). Со всякой такой минимальной плоской проекцией узла можно связать граф, взяв в качестве вершин графа точки пересечения, а в качестве ребер — дуги кривых, соединяющие пары последовательных точек пересечения. Так построенные графы (вернее, мультиграфы) для приведенных выше семи узлов изображены на рис. 10.8.2. Очевидно, что каждый такой граф является регулярным степени 4. *Узловым графом* (или *графом узла*) называется граф, соответствующий минимальной плоской проекции узла. Через $G_{p,n}$ обозначается граф, сопоставленный узлу p_n (см. рис. 10.8.1 и 10.8.2).

Как показал Т. Браун [1], граф узла не является узловым инвариантом. Этот факт он обосновал, представив «узловое произведение» узлов 3_1 и 4_1 двумя разными способами так, что один из получившихся узловых графов имеет четыре двойных ребра,

а другой — три двойных ребра (определение узлового произведения дано в статье Харари [2]).

Таким образом, мы скорее должны говорить о *некотором* графе узла, а не об *определенном* графе узла!

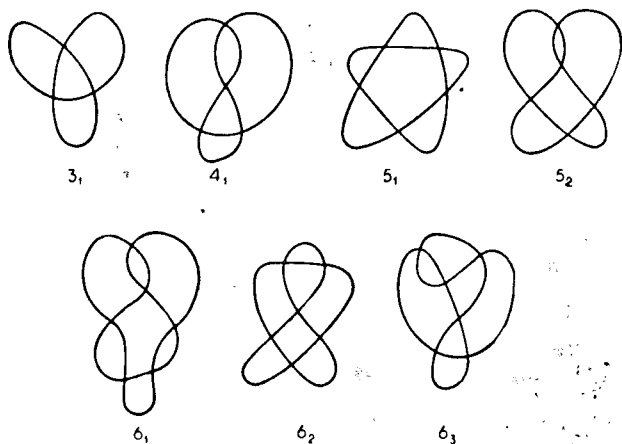


Рис. 10.8.1. Наименьшие узлы.

Обратно, различные узлы могут иметь одинаковые узловые графы; наиболее замечательным известным примером такого рода является граф узлов 8_{17} , 8_{19} , 8_{20} и 8_{21} , изображенный на рис. 10.8.3.

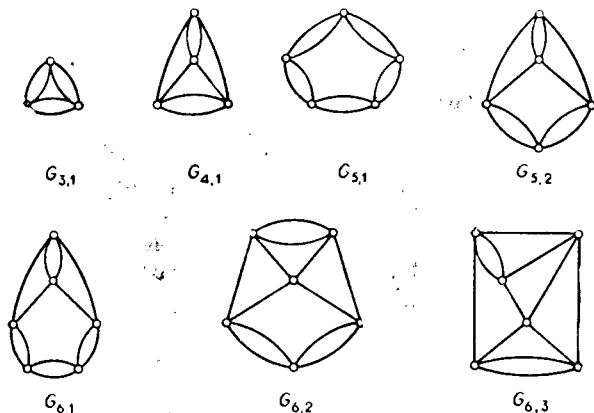


Рис. 10.8.2. Наименьшие графы узлов.

Т. Браун установил следующий критерий:

плоский мультиграф представляет собой узловой граф тогда и только тогда, когда

а) он является регулярным графом степени 4,

б) он является блоком,

с) плоская кривая, порождаемая описываемым ниже способом, является эйлеровым циклом. Процесс построения кривой таков: выбираем произвольную вершину графа в качестве начальной точки кривой и двигаемся из этой вершины по произвольному инцидентному ей ребру; далее, находясь в некоторой вершине u , двигаемся из нее по такому ребру графа, которое ведет в вершину v , инцидентную ребру, противоположащему вершине u (на каждом шаге, естественно, перемещаемся по еще не пройденному ребру).

Теперь, после того как мы узнали, какие графы являются

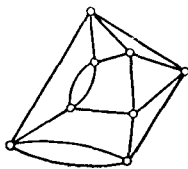


Рис. 10.8.3. Узловой граф четырех различных узлов.

узловыми, естественным образом возникает несколько перечислительных вопросов.

1. Сколько существует p -вершинных узловых графов?

Заметим, что этот вопрос отличен от вопроса о числе узлов, ибо, как было отмечено выше, граф узла не является узловым инвариантом.

2. Сколько существует p -вершинных узловых графов, содержащих m пар кратных ребер? Из имеющихся данных следует, что, по-видимому, всегда $m \geq 2$.

3. Заменяя каждую пару двойных ребер одним ребром, получаем «подлинный» граф (не являющийся мультиграфом). Спрашивается, сколько существует таких графов.

4. Какие специальные классы узловых графов можно выделить и перечислить¹?

П8.4. Конфигурации на шахматной доске.

Мы сформулируем лишь незначительное число из большого количества задач, связанных с расположением фигур на шахматной доске, имеющей размеры $n \times n$. Все эти задачи могут быть проинтерпретированы на теоретико-графовом языке и проиллюстрированы многими способами.

В задаче о ладьях спрашивается, каким числом способов можно расположить n ладей на $(n \times n)$ -доске так, чтобы никакая ладья

¹ То есть решить соответствующую перечислительную задачу для них. — *Прим. перев.*

не угрожала другой. Другими словами, нет ни одной пары ладей, расположенных на одной и той же горизонтали или вертикали. Решение дается числом $n!$, если не отождествляются конфигурации, преобразуемые друг в друга путем таких вращений и отражений доски, которые сохраняют два цвета полей (квадратов) доски. Число различных конфигураций, получаемых после отождествления в указанном выше смысле, подсчитано для $n \leq 7$ (см. Крейчик [1]):

$$x + x^2 + 2x^3 + 7x^4 + 23x^5 + 115x^6 + 694x^7 + \dots$$

Всякое допустимое расположение n ладей, при котором никакие две из них не угрожают друг другу по диагонали, соответствует, очевидно, конфигурации из задачи о ферзях. Последняя задача не решена ни в помеченном, ни в непомеченном случаях. Число различных конфигураций для $n \leq 12$ подсчитано Крейчиком [1] при условии, что не отождествляются конфигурации, переводящиеся друг в друга с помощью таких вращений и отражений доски, которые сохраняют 2-раскраску полей:

$$x + 2x^4 + 10x^5 + 4x^6 + 40x^7 + 92x^8 + 352x^9 + \\ + 724x^{10} + 2680x^{11} + 14\,200x^{12} + \dots$$

Аналогичные задачи можно сформулировать для слонов и коней. Можно рассмотреть и такие вариации рассмотренных задач, которые определяются выбором формы доски, например прямоугольной, L-образной, треугольной. Более интересной задачей с точки зрения теории перечисления является задача о нахождении числа различных ладейных многочленов, определенных в книге Риордана [1], стр. 197.

В задаче другого типа, связанной с шахматной доской, спрашивается, сколько существует различных способов так обойти конем все поля доски, имеющей размеры $m \times n$, чтобы каждое поле, кроме начального, посещалось конем только один раз, а начальное — два раза (в начале и в конце обхода). Очевидно, что такие обходы представляют собой помеченные гамильтоновы циклы в «конеподобном» графе порядка $m \cdot n$. Многочисленные частные результаты, относящиеся к этой задаче, можно найти в книге Крейчика [1].

П8.5. Задачи о росте клеток.

Все «квадратные полимино», имеющие не более четырех клеток, показаны ¹ на рис. 10.8.4. Таким образом, полимино «раз-

¹ В оригинале: «square animals» — «квадратные животные». Мы приняли здесь термин «полимино» вместо «животного» (см. Харари [1], стр. 227). О полимино см. Харари [12], стр. 205, 209. — *Прим. перев.*

растается» (в плоскости) в результате «наращивания» квадратных клеток одного и того же размера, которые «прикрепляются» к любой из «свободных» сторон у клеток, образующих полимино. Мы предполагаем, кроме того, что полимино являются односвязными, т. е. не имеют дыр (см. рис. 10.8.5).

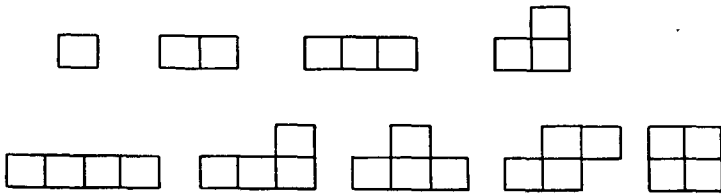


Рис. 10.8.4. Наименьшие квадратные полимино.

Рид [4] придумал удобную схему, позволившую ему вычислить число полимино, односвязных и не односвязных, состоящих не более чем из десяти клеток. Эти результаты, а также неопубликованные результаты Паркина приведены в табл. 10.8.1. Клэрнер [1], используя изящные аналитические методы, установил

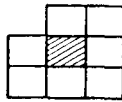


Рис. 10.8.5. Наименьшее полимино, не являющееся односвязным.

нижние оценки для полимино обоих видов. Однако формул, дающих возможность определять число полимино с n клетками, пока не найдено. Заметим, что наименьшее не односвязное полимино (см. рис. 10.8.5) имеет семь клеток и является единственным семи-клеточным не односвязным полимино. Таким образом, из 107 семи-клеточных квадратных полимино только одно не односвязно.

Таблица 10.8.1

Квадратные полимино

Клетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Полимино	1	1	2	5	12	35	107	363	1248	4271
Не односвязные полимино	0	0	0	0	0	0	1	6	37	384

Существуют многочисленные вариации этой задачи (см. Харари [12]). Если вместо квадратов брать треугольники, то соответствующий перечисляющий ряд начинается так:

$$x + x^2 + x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \dots$$

Если же рассматривать полимино из шестиугольников, то получим

$$x + x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 22x^5 + 83x^6 + \dots$$

Мы можем сформулировать задачу о числе тороидальных полимино, т. е. полимино, расположенных на поверхности рода 1

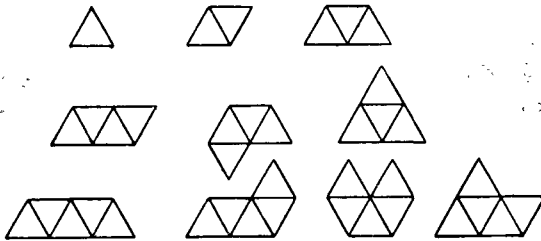


Рис. 10.8.6. Наименьшие треугольные полимино.

(вместо рода 0 — в случае плоскости). Наконец, мы можем использовать вместо квадратов кубы и интересоваться числом пространственных полимино. Много других вопросов, относящихся

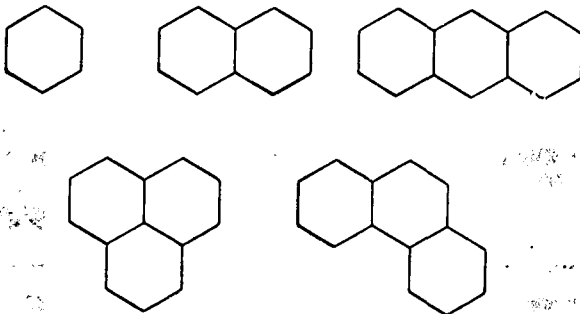


Рис. 10.8.7. Наименьшие шестиугольные полимино.

к задачам замощения, можно найти в книге Голomba [1], в которой ярко продемонстрировано, как такие конструкции приводят к танталовым головоломкам.

П8.6. Задача Изинга.

Изинг [1] поставил задачу, которая носит его имя, и решил ее для одномерного случая. Онзагер [1] первым нашел решение в двумерном случае, но нет никакого прогресса в поисках решения этой задачи для больших размерностей.

В *двумерном решетчатом графе* $L_{m,n}$ вершинами являются упорядоченные пары (i, j) , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Две вершины смежны, если евклидово расстояние между ними равно 1. Таким образом, $L_{m,n}$ есть декартово произведение $P_m \times P_n$ двух простых цепей. Обычно в физических приложениях эти графы изображаются на торе с отождествлением противоположащих сторон¹. *Решетчатый d -мерный граф* определяется аналогично.

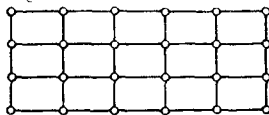


Рис. 10.8.8. Решетчатый граф.

Задача состоит в нахождении числа A_q различных помеченных четных подграфов с q ребрами.

Под *площадью* четного подграфа двумерной решетки мы понимаем наименьшую площадь, ограниченную попарно реберно-непересекающимися простыми циклами этого подграфа². В «двумерной задаче Изинга с магнитным полем» требуется найти производящую функцию для помеченных четных подграфов, принимая в качестве параметров перечисления число ребер в подграфе и площадь подграфа.

Другой вариант задачи Изинга известен в литературе как «взаимодействие между ближайшими соседями». Рассмотрим надграф решетчатого графа, получаемый добавлением обеих диагоналей в каждом квадрате графа. Задача опять состоит в перечислении четных подграфов такого графа (точнее, надграфа).

Для более детального ознакомления с различными задачами Изинга можно порекомендовать описательную статью Харари [14].

¹ Точнее: сторона, соответствующая $i = 1$, отождествляется со стороной, отвечающей $i = m$, и, аналогично, сторона с $j = 1$ отождествляется со стороной $j = n$. — *Прим. перев.*

² Предполагается, что подграф — связный, а совокупность попарно-непересекающихся простых циклов удовлетворяет условию: всякое ребро подграфа принадлежит какому-нибудь из этих циклов. — *Прим. перев.*

*Ведь правда — будет правдой до конца,
Как ни считай.*

Шекспир В., Мера за меру¹

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Это приложение содержит девять таблиц, в которых представлены числа графов разных видов. Хотя большинство из помещенных здесь данных встречается в основном тексте книги, все же удобно иметь их собранными вместе. Таблицы и их содержание таковы:

- П1. Графы
- П2. Связные графы
- П3. Графы, связные графы и блоки
- П4. Орграфы, связные орграфы и симметричные отношения
- П5. Самодополнительные орграфы, самообратные орграфы и самообратные отношения
- П6. Помеченные конечные топологии
- П7. Деревья, корневые деревья, асимметрические деревья и гомеоморфно несводимые деревья
- П8. Турниры
- П9. Асимптотическая аппроксимация для графов и турниров

В двух первых таблицах параметрами являются число вершин p и число ребер q , во всех остальных — только число вершин p .

Размеры первой таблицы, содержащей числа (p, q) -графов, такие же, как и той таблицы, которая помещена в книге Харари [1] на стр. 249. Главное отличие этих двух таблиц состоит в том, что приводимая ниже таблица не имеет опечаток. Таблица для числа (p, q) -графов была впервые напечатана в книге Риордана [1], стр. 173.

Данные, помещенные во второй таблице, взяты из статьи Кэдогана [1]. Несколько ббльшую информацию можно получить из каталога Слоуэна [1].

¹ Комедия в 5 действиях, Пер. Т. Л. Щепкиной-Куперник. «Искусство», М.—Л., 1939, с. 155.

Таблица П1

Число (p, q) -графов

$\begin{matrix} p \\ \backslash \\ q \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	2	2	2	2	2
3			1	3	4	5	5	5	5
4				2	6	9	10	11	11
5				1	6	15	21	24	25
6				1	6	21	41	56	63
7					4	24	65	115	148
8					2	24	97	221	345
9					1	21	131	402	771
10					1	15	148	663	1 637
11						9	148	980	3 252
12						5	131	1 312	5 995
13						2	97	1 557	10 120
14						1	65	1 646	15 615
15						1	41	1 557	21 933
16							21	1 312	27 987
17							10	980	32 403
18							5	663	34 040
g_p	1	2	4	11	34	156	1 044	12 346	274 668

Таблица П2

Число связных (p, q) -графов

$\begin{matrix} q \\ \backslash \\ p \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1													
2		1												
3			1	1										
4				2	2	1	1							
5					3	5	5	4	2	1	1			
6						6	13	19	22	20	14	9	5	2
7							11	33	67	107	132	138	126	95
8								23	89	236	486	814	1 169	1 454

В таблице П3 помещены числа g_p для $p \leq 24$, c_p — для $p \leq 10$ и b_p — для $p \leq 9$. Числа g_p ($p \leq 9$) приводятся у Риордана [1], стр. 173, у Харари [1], стр. 249¹, у Обершельпа [1], Робинсона

¹ В таблице П1 книги Харари [1] числа g_8 и g_9 приведены с ошибками. — Прим. перев.

Таблица ПЗ

Число графов, связанных графов и блоков

P	δ_p	c_p	b_p
1	1	1	0
2	2	1	1
3	4	2	1
4	11	6	3
5	34	21	10
6	156	112	56
7	1044	853	468
8	12346	11117	7123
9	274668	261080	194066
10	12005168	11716571	
11	1018997864		
12	165091172592		
13	50502031367952		
14	29054155657235488		
15	31426485969804308768		
16	64001015704527557894928		
17	245935864153532932683719776		
18	178757725145611700547878190848		
19	24637809253125004524383007491432768		
20	645490122795799841856164638490742749440		
21	32220272899808983433502244253755283616097664		
22	3070846483094144300637568517187105410586657814272		
23	559946939699792080597976380819462179812276348458981632		
24	195704906302078447922174862416726256004122075267063365754368		

[3] и других авторов. Числа g_p для $p \leq 24$ были вычислены Кингом и Палмером [1] с помощью электронной вычислительной машины. Число связанных графов c_p для $p \leq 8$ подсчитал Кэдоган [1], а число блоков b_p для $p \leq 9$ нашел Робинсон [3].

Числа орграфов (числа d_p) и симметричных отношений для значений $p \leq 8$ подсчитаны Обершельпом [1]. Эти результаты приведены в табл. П4. У Слоуэна [1] помещены значения d_p для $p \leq 11$.

Таблица П4

Число орграфов, связанных орграфов и симметричных отношений

p	Орграфы	Связанные орграфы	Симметричные отношения
1	1	1	2
2	3	2	6
3	16	13	20
4	218	199	90
5	9 608	9 364	544
6	1 540 944	1 530 843	5 096
7	882 033 440	880 471 142	79 264
8	1 793 359 192 848	1 792 473 955 306	2 208 612

В таблице П5 приведены числа самодополнительных орграфов, самообратных орграфов и самообратных отношений.

Таблица П5

Число самодвойственных отношений

p	Самодополнительные орграфы	Самообратные орграфы	Самообратные отношения
1	1	1	2
2	1	3	8
3	4	10	44
4	10	70	436
5	136	708	7 176
6	720	15 248	222 368
7	44 224	543 520	
8	703 760		

Число помеченных конечных топологий с p вершинами, которое равно числу помеченных транзитивных орграфов, вычислено для $p \leq 7$ в статье Эванса, Харари и Линна [1]. Б. Стаблфилд нашел число таких топологий в случае $p = 8$.

Табл. П7, содержащая числа деревьев, корневых деревьев, асимметрических деревьев и гомеоморфно несводимых деревьев, взята из книги Харари [1], стр. 266. Часть данных в ней взята

Число помеченных конечных топологий

Таблица П6

p	Помеченные топологии
1	1
2	4
3	29
4	355
5	6 942
6	209 527
7	9 535 241
8	642 779 354

из книги Риордана [1], стр. 164. А. Швенк из Мичиганского университета, используя ЭВМ, нашел значения всех этих величин для $p \leq 39$.

Таблица П7

Число деревьев, корневых деревьев, асимметрических деревьев и гомеоморфно несводимых деревьев

p	t_p	T_p	i_p	h_p	s	l_p	T_p
1	1	1	1	1	13	1301	12 486
2	1	1	0	1	14	3159	32 973
3	1	2	0	0	15	7741	87 811
4	2	4	0	1	16	19 320	235 381
5	3	9	0	1	17	48 629	634 847
6	6	20	0	2	18	123 867	1 721 159
7	11	48	1	2	19	317 955	4 688 676
8	23	115	1	4	20	823 065	12 826 228
9	47	286	3	5	21	2 144 505	35 221 832
10	106	719	6	10	22	5 623 756	97 055 181
11	235	1842	15	14	23	14 828 074	268 282 855
12	551	4766	29	26	24	39 299 897	743 724 984
					25	104 6 6 890	2 067 174 645
					26	279 793 450	5 759 636 510

П. Стейн из Научной лаборатории в Лос-Аламосе составил программу для подсчета числа турниров на ЭВМ и получил соответствующие результаты для $p \leq 30$, помещенные в таблице П8.¹

В табл. П9 приводятся значения отношения $2^{p(p-1)/2}/p!$, которое, как было установлено в гл. 9, дает асимптотическую аппроксимацию для числа g_p графов и числа $T(p)$ турниров с p вершинами. И эти данные были любезно предоставлены нам Паулом Стейном.

¹ В этой таблице в оригинале допущена опечатка: число турниров при $p=24$ равно 195 692 027 657 521 876 084 316 842 860 833 482 785 173 437 775 365 039 898 624. — Прим. перев.

Число турниров

Р	Т(р)
1	1
2	1
3	2
4	4
5	12
6	56
7	456
8	6 880
9	191 536
10	9 733 056
11	903 753 248
12	154 108 311 168
13	48 542 114 686 912
14	28 401 423 719 122 304
15	31 021 002 160 355 166 848
16	63 530 415 842 308 265 100 288
17	244 912 778 438 520 759 443 245 824
18	1 783 398 846 284 777 975 419 600 287 232
19	24 605 641 171 260 376 770 598 003 978 281 472
20	645 022 068 557 873 570 931 850 526 424 042 500 096
21	32 207 364 031 661 175 384 456 332 260 036 660 040 346 624
22	3 070 169 883 150 468 336 193 188 889 176 239 554 269 865 953 280
23	559 879 382 429 394 075 397 997 876 821 117 309 031 348 506 639 435 776
24	1 956 920 276 575 218 760 843 168 426 608 334 827 851 734 377 775 365 039 898 624
25	131 326 696 677 895 002 131 450 257 709 457 767 557 170 027 052 967 027 982 788 816 896
26	169 484 335 125 246 268 100 514 597 385 576 342 667 201 246 238 506 672 327 765 919 863 947 264
27	421 255 599 848 131 447 082 003 884 098 323 929 861 369 544 621 589 389 269 735 693 986 231 100 612 608
28	2 019 284 625 667 208 265 086 928 694 043 799 677 058 780 746 074 756 618 649 807 453 554 008 410 636 526 845 952
29	18 691 296 182 213 712 407 784 892 577 100 643 237 772 159 079 535 345 610 331 272 616 359 410 643 727 554 822 061 146 112
30	334 493 774 260 141 796 028 606 267 674 709 437 232 608 940 215 918 926 763 659 414 050 175 507 824 571 200 950 884 097 540 096 000

Асимптотика числа турниров и графов

2ⁿ/rⁿ

1	1
2	1
3	1
4	2
5	8
6	45
7	416
8	6,657
9	189,372
10	9,695,869
11	902,597,327
12	154,043,277,297
13	48,535,481,831,642
14	28,400,190,511,772,276
15	31,020,581,422,991,798,557
16	63,530,150,754,287,203,445,810
17	244,912,468,225,468,597,942,626,507
18	1,783,398,168,624,923,337,196,441,201,196
19	24,605,638,395,579,573,858,211,783,276,124,626
20	645,022,047,157,081,180,948,706,971,513,641,417,725
21	32,207,363,719,989,693,161,641,493,398,185,145,868,257,184
22	3,070,169,874,550,173,863,332,853,689,226,853,410,359,422,313,750
23	559,879,381,978,490,975,464,019,198,266,910,789,847,137,671,663,161,697
24	195,692,027,612,492,717,696,053,131,613,974,749,458,250,743,733,957,146,609,599
25	131,326,696,669,310,184,928,548,229,462,563,319,608,278,228,391,409,823,336,516,656,557
26	169,484,335,122,115,195,657,399,862,470,076,055,903,470,709,678,462,703,895,275,433,435,498,631
27	421,255,599,845,942,668,803,919,924,597,149,559,454,904,184,585,016,179,214,085,529,813,478,905,185,546
28	2,019,284,625,664,270,536,611,378,920,477,168,898,079,934,218,310,482,029,759,803,193,187,192,943,926,121,612,944
29	18,691,296,182,206,129,806,987,592,941,623,330,025,693,264,356,626,820,456,495,804,849,429,663,146,992,789,154,562,961,044
30	334,493,774,260,104,102,715,593,766,508,469,331,712,364,208,913,311,144,737,971,969,122,910,864,452,626,959,027,797,528,575,878,038

*Не загромождай свой стол:
пусть на нем будет не более
семи, но не менее трех блюд.*

Вильям Кинг, Искусство стряпни ¹

ПРИЛОЖЕНИЕ II

В таблице П10 приведены частоты групп четырехвершинных орграфов и исправлены четыре элемента из таблицы такого же типа, которая была впервые напечатана в работе Харари и Палмера [6].

Таблица П10

Распределение четырехвершинных орграфов
в соответствии с их группами автоморфизмов

Группа \ Число дуг	Число дуг								Всего
	0	1	2	3	4	5	6	≥7	
S_4	1	0	0	0	0	0	0	1	2
$E_2 S_2$	0	1	2	3	6	10	6	22	50
E_4	0	0	1	7	16	28	32	52	136
$S_2 S_2$	0	0	1	0	1	0	2	2	6
$S_2 [E_2]$	0	0	1	0	2	0	4	3	10
$E_1 S_3$	0	0	0	2	0	0	2	2	6
$E_1 C_3$	0	0	0	1	0	0	2	1	4
C_4	0	0	0	0	1	0	0	1	2
D_4	0	0	0	0	1	0	0	1	2
Всего	1	1	5	13	27	38	48	85	218

Следующая таблица содержит данные, полученные Стокмейером [1] и относящиеся к орграфам порядка 5. Как упоминалось в задаче ПЗ.4 в гл. 10, вычисление этих чисел требует знания элементов решетки подгруппы группы S_5 .

¹ Кинг, Вильям (1663—1712) — английский писатель. — *Прим. перев.*

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблица П11

Распределение пятивершинных оргграфов в соответствии с их группами автоморфизмов

Число дуг Группа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥ 11	Всего
	E_5	0	0	0	5	28	107	278	591	962	1314	1431	
E_3S_2	0	0	1	8	13	43	59	105	124	168	148	521	1190
$S_2[E_2]E_1$	0	0	1	0	6	0	22	0	38	0	49	67	183
E_2C_3	0	0	0	0	1	0	2	4	2	2	6	11	28
E_1C_4	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	4	8
$E_1S_2S_2$	0	0	2	0	7	0	13	0	18	0	26	40	106
C_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	3
E_2S_3	0	1	0	2	2	2	2	7	1	4	8	21	50
C_2C_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	0	4	8
E_1D_4	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	4	8
D_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S_2S_3	0	0	1	0	0	0	3	0	3	0	0	7	14
E_1S_4	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	3	6
S_5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
Всего	1	1	5	16	61	154	379	707	1455	1490	1670	3969	9608

*Лучше — синица в руках,
чем журавль в небе.*

Пословица

ПРИЛОЖЕНИЕ III

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЦИКЛОВЫХ ИНДЕКСОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ
ГРУПП S_n ПРИ $n \leq 10$**

$$Z(S_0) = 1.$$

$$Z(S_1) = s_1.$$

$$Z(S_2) = \frac{1}{2!} (s_1^2 + s_2).$$

$$Z(S_3) = \frac{1}{3!} (s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3).$$

$$Z(S_4) = \frac{1}{4!} (s_1^4 + 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 + 6s_4).$$

$$Z(S_5) = \frac{1}{5!} (s_1^5 + 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 + 30s_1s_4 + 20s_2s_3 + 24s_5).$$

$$Z(S_6) = \frac{1}{6!} (s_1^6 + 15s_1^4s_2 + 40s_1^3s_3 + 45s_1^2s_2^2 + 90s_1^2s_4 + 120s_1s_2s_3 + \\ + 144s_1s_5 + 15s_2^3 + 90s_2s_4 + 40s_3^2 + 120s_6).$$

$$Z(S_7) = \frac{1}{7!} (s_1^7 + 21s_1^5s_2 + 70s_1^4s_3 + 105s_1^3s_2^2 + 210s_1^3s_4 + 420s_1^2s_2s_3 + \\ + 504s_1^2s_5 + 105s_1s_2^3 + 630s_1s_2s_4 + 280s_1s_3^2 + 840s_1s_6 + \\ + 210s_2^2s_3 + 504s_2s_5 + 420s_3s_4 + 720s_7).$$

$$Z(S_8) = \frac{1}{8!} (s_1^8 + 28s_1^6s_2 + 112s_1^5s_3 + 210s_1^4s_2^2 + 420s_1^4s_4 + 1120s_1^3s_2s_3 + \\ + 1344s_1^3s_5 + 420s_1^2s_3^2 + 2520s_1^2s_2s_4 + 1120s_1^2s_3^2 + 3360s_1^2s_6 + \\ + 1680s_1s_2^2s_3 + 4032s_1s_2s_5 + 3360s_1s_3s_4 + 5760s_1s_7 + 105s_2^4 + \\ + 1260s_2^2s_4 + 1120s_2s_3^2 + 3360s_2s_6 + 2688s_3s_5 + \\ + 1260s_4^2 + 5040s_8).$$

$$Z(S_9) = \frac{1}{9!} (s_1^9 + 36s_1^7s_2 + 168s_1^6s_3 + 378s_1^5s_2^2 + 756s_1^5s_4 + 2520s_1^4s_2s_3 + \\ + 3024s_1^4s_5 + 1260s_1^3s_2^3 + 7560s_1^3s_2s_4 + 3360s_1^3s_3^2 + \\ + 7560s_1^2s_2^2s_3 + 945s_1^4s_2^2 + 10\,080s_1^3s_2s_4 + 18\,144s_1^2s_2s_5 + \\ + 15\,120s_1^2s_3s_4 + 25\,920s_1^2s_7 + 11\,340s_1s_2^2s_4 + 10\,080s_1s_2s_3^2 + \\ + 30\,240s_1s_2s_6 + 24\,192s_1s_3s_5 + 11\,340s_1s_4^2 + 45\,360s_1s_8 + \\ + 2520s_2^2s_3 + 9072s_2^2s_5 + 15\,120s_2s_3s_4 + 25\,920s_2s_7 + 2240s_3^3 + \\ + 20\,160s_3s_6 + 18\,144s_4s_5 + 40\,320s_9).$$

$$Z(S_{10}) = \frac{1}{10!} (s_1^{10} + 45s_1^8s_2 + 240s_1^7s_3 + 630s_1^6s_2^2 + 1260s_1^6s_4 + \\ + 5040s_1^5s_2s_3 + 6048s_1^5s_5 + 3150s_1^4s_2^3 + 18\,900s_1^4s_2s_4 + \\ + 8400s_1^4s_3^2 + 25\,200s_1^4s_6 + 25\,200s_1^3s_2^2s_3 + 60\,480s_1^3s_2s_5 + \\ + 50\,400s_1^3s_3s_4 + 86\,400s_1^3s_7 + 4725s_1^2s_2^4 + 56\,700s_1^2s_2^2s_4 + \\ + 50\,400s_1^2s_2s_3^2 + 151\,200s_1^2s_2s_6 + 120\,960s_1^2s_3s_5 + 56\,700s_1^2s_4^2 + \\ + 226\,800s_1^2s_8 + 25\,200s_1s_2^2s_3 + 90\,720s_1s_2^2s_5 + \\ + 151\,200s_1s_2s_3s_4 + 259\,200s_1s_2s_7 + 22\,400s_1s_3^3 + 201\,600s_1s_3s_6 + \\ + 181\,440s_1s_4s_5 + 403\,200s_1s_9 + 945s_2^5 + 18\,900s_2^3s_4 + \\ + 25\,200s_2^2s_3^2 + 75\,600s_2^2s_6 + 120\,960s_2s_3s_5 + \\ + 56\,700s_2s_4^2 + 226\,800s_2s_8 + 50\,400s_3^2s_4 + 172\,800s_3s_7 + \\ + 151\,200s_4s_6 + 72\,576s_5^2 + 362\,880s_{10}).$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЦИКЛОВЫХ ИНДЕКСОВ ПАРНЫХ ГРУПП $S_n^{(2)}$
ПРИ $n \leq 10$

$$Z(S_2^{(2)}) = s_1.$$

$$Z(S_3^{(2)}) = \frac{1}{3!} (s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3).$$

$$Z(S_4^{(2)}) = \frac{1}{4!} (s_1^6 + 9s_1^2s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2s_4).$$

$$Z(S_5^{(2)}) = \frac{1}{5!} (s_1^{10} + 10s_1^4s_2^3 + 20s_1s_3^3 + 15s_1^2s_2^4 + 30s_2s_4^2 + \\ + 20s_1s_3s_6 + 24s_5^2).$$

$$Z(S_6^{(2)}) = \frac{1}{6!} (s_1^{15} + 15s_1^7s_2^4 + 40s_1^3s_3^4 + 45s_1^3s_2^6 + 90s_1s_2s_4^3 + \\ + 120s_1s_2s_3^2s_6 + 144s_5^3 + 15s_1^3s_2^6 + 90s_1s_2s_4^3 + 40s_3^5 + 120s_3s_6^2).$$

$$Z(S_7^{(2)}) = \frac{1}{7!} (s_1^{21} + 21s_1^{11}s_2^5 + 70s_1^6s_3^5 + 105s_1^5s_2^6 + 210s_1^3s_2^4 +$$

$$\begin{aligned}
 & + 420s_1^2s_2^2s_3^3s_6 + 504s_1s_5^4 + 105s_1^3s_9^2 + 630s_1s_2^2s_4^4 + 280s_3^7 + \\
 & + 840s_3s_6^3 + 210s_1^2s_2^2s_3s_6^2 + 504s_1s_5^2s_{10} + 420s_2s_3s_4s_{12} + 720s_7^3). \\
 Z(S_8^{(2)}) = & \frac{1}{8!} (s_1^{28} + 28s_1^6s_2^6 + 112s_1^{10}s_3^6 + 240s_1^8s_2^{10} + 420s_1^6s_2s_4^5 + \\
 & + 1120s_1^4s_2^3s_3^4s_6 + 1344s_1^3s_5^5 + 420s_4^4s_2^{12} + 2520s_1^2s_2^3s_4^5 + \\
 & + 1120s_1s_3^9 + 1680s_1^2s_2^4s_3^2s_6^2 + 4032s_1s_2s_3^3s_{10} + 3360s_2s_2^3s_4^2s_{12} + \\
 & + 5760s_7^4 + 105s_4^4s_2^{12} + 1260s_1^2s_3^3s_4^5 + 1120s_1s_5^5s_6^2 + \\
 & + 6720s_1s_3s_6^4 + 2688s_3s_5^2s_{15} + 1260s_2^2s_4^6 + 5040s_4s_8^3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z(S_9^{(2)}) = & \frac{1}{9!} (s_1^{36} + 36s_1^{22}s_2^7 + 168s_1^{15}s_3^7 + 378s_1^{12}s_2^{12} + 756s_1^{10}s_2s_4^6 + \\
 & + 2520s_1^7s_2^4s_3^5s_6 + 3024s_1^6s_5^4 + 1260s_1^6s_2^{15} + 7560s_1^4s_2^4s_4^6 + \\
 & + 3360s_3^3s_{11} + 7560s_1^3s_2^3s_3^3s_6^2 + 945s_4^4s_2^{16} + 10\,080s_1^3s_3s_6^5 + \\
 & + 18\,144s_1^2s_2^2s_5^4s_{10} + 15\,120s_1s_2s_3^3s_4^3s_{12} + 25\,920s_1s_7^5 + \\
 & + 11\,340s_1^2s_3^5s_4^6 + 10\,080s_1s_2s_7^3s_6^2 + 30\,240s_1s_2s_3s_6^5 + \\
 & + 24\,192s_2^3s_3^3s_{15} + 11\,340s_2^2s_8^4 + 45\,360s_4s_4^4 + 2520s_1^3s_6^2s_3^3 + \\
 & + 9072s_1^2s_2^2s_5^2s_{10} + 15\,120s_1s_2s_3s_4^3s_6s_{12} + 25\,920s_1s_3^3s_{14} + \\
 & + 2240s_3^{12} + 20\,160s_3^2s_6^5 + 18\,144s_2s_4s_5^2s_{20} + 40\,320s_9^4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z(S_{10}^{(2)}) = & \frac{1}{10!} (s_1^{45} + 45s_1^{29}s_2^8 + 240s_1^{21}s_3^8 + 630s_1^{17}s_2^{14} + 1260s_1^{15}s_2s_4^7 + \\
 & + 5040s_1^{11}s_2^5s_3^6s_6 + 6048s_1^{10}s_7^7 + 3150s_1^9s_2^{18} + 18\,900s_1^7s_2^5s_4^7 + \\
 & + 8400s_1^6s_3^{13} + 25\,200s_1^6s_3s_6^6 + 25\,200s_1^5s_2^4s_3^2s_6^2 + \\
 & + 60\,480s_1^4s_2^3s_5^5s_{10} + 50\,400s_1^3s_2s_3^4s_4^4s_{12} + 86\,400s_1^3s_7^6 + 4725s_1^5s_2^{20} + \\
 & + 56\,700s_1^2s_2^7s_4^7 + 50\,400s_1^2s_2^2s_3^3s_6^2 + 151\,200s_1^2s_2^2s_3s_6^6 + \\
 & + 120\,960s_1s_3^3s_5^4s_{15} + 56\,700s_1s_2^2s_4^{10} + 226\,800s_1s_4s_5^5 + \\
 & + 25\,200s_1^3s_2^3s_3^3 + 90\,720s_1^2s_2^4s_3^2s_{10} + 151\,200s_1s_2^2s_3^4s_6s_{12} + \\
 & + 259\,200s_1s_2s_7^4s_{14} + 22\,400s_3^{15} + 201\,600s_3^3s_6^6 + \\
 & + 181\,440s_2s_4^4s_5^3s_{20} + 403\,200s_9^5 + 945s_1^5s_2^{20} + 18\,900s_1^3s_2^7s_4^7 + \\
 & + 25\,200s_1^2s_2^2s_3^5s_4^4 + 75\,600s_1^2s_2^2s_3s_6^6 + 120\,960s_1s_3s_5^2s_6s_{10}s_{15} + \\
 & + 56\,700s_1s_2^2s_4^{10} + 226\,800s_1s_4s_5^5 + 50\,400s_2s_2^5s_4^2s_{12} + \\
 & + 172\,800s_3s_7^3s_{21} + 151\,200s_2s_3s_4s_6^2s_{12} + 72\,576s_5^9 + \\
 & + 362\,880s_5s_{10}^4).
 \end{aligned}$$

Украшать каждое научное сочинение библиографией—обычай, преследующий цель доказать компетентность автора путем демонстрации той кучи мусора, которую ему пришлось просеять, чтобы добыть крупичу истины.

Д-р Лоуренс Дж. Петер¹

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Александр, Бригс (Alexander J. W., Briggs G. B.)
[1] On types of knotted curves, *Ann. of Math.*, 28 (1938), 562—586.
- Байнеке, Мун (Beineke L. W., Moon J. W.)
[1] Several proofs of the number of labeled 2-dimensional trees, В сб. *Proof Techniques in Graph Theory* (ed. Harary F.), Acad. Press, New York, 1969, pp. 11—20.
- Байнеке, Пипперт (Beineke L. W., Pippert R. E.)
[1] On the number of k-dimensional trees, *J. Combinatorial Theory*, 6 (1969), 200—205.
- Бернсайд (Burnside W.)
[1] *Theory of Groups of Finite Order* (2nd edition), p. 191, Theorem VII. Cambridge Univ. Press, London, 1911. Reprinted by Dover, New York, 1955.
- Ботт, Мейберри (Bott R., Mayberry J. P.)
[1] Matrices and tress, В сб. *Economic Activity Analysis* (ed. Morgenstern O.), Wiley, New York, 1954, pp. 391—400.
- Браун В. (Brown W. G.)
[1] Enumeration of triangulations of the disk, *Proc. London Math. Soc.*, 14 (1964), 746—768.
[2] Historical note on a recurrent combinatorial problem, *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965), 973—977.
- Браун Т. (Brown T. A.)
[1] A note on some graph related to knots, *J. Combinatorial Theory*, 1 (1966), 498—512.
- де Брэйи (de Bruijn N. G.)
[1] Одна комбинаторная задача, Кибернетический сб., № 6 (новая серия), изд-во «Мир», М., 1969, стр. 33—40.
[2] Теория перечисления Пойа, в сб. «Прикладная комбинаторная математика» (под ред. Беккейбаха Э.), изд-во «Мир», М., 1968, стр. 61—106.
- де Брэйи, ван Ардене-Эрвфест (de Bruijn N. G., van Aardenne-Ehrenfest T.)
[1] Circuits and trees in oriented graphs, *Simon Stevin*, 28 (1951), 203—217.

¹ Возможно, Лоуренс Джеймс (1781—1813) — американский военно-морской деятель. — *Прим. перев.*

- Брукс, Смит, Стоун, Татт (Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T.)
 [1] The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, 7 (1940), 312—340.
- Геллер (Geller D. P.)
 [1] The square root of a digraph, *J. Combinatorial Theory*, 5 (1968), 320—322.
- Гилберт (Gilbert E. N.)
 [1] Enumeration of labelled graphs, *Canad. J. Math.*, 8 (1956), 405—411.
- Голомб (Golomb S.)
 [1] Полимино, изд-во «Мир», М., 1975.
- Гурса, Хедрик (Goursat E., Hedrick E. R.)
 [1] A Course in Mathematical Analysis, vol. 1, pp. 404—405, Ginn, Boston, 1904.
- Джевоис (Jevons W. S.)
 [1] The Principles of Science (2nd edition), pp. 134—146, MacMillan, London and New York, 1892.
- Юнец Г. А.
 [1]* О нижней границе числа вершин плоских критических графов, *Кибернетика*, 4 (1971), 76—85.
- Дуглас (Douglas R. L.)
 [1] Tournaments that admit exactly one Hamiltonian cycle, *Proc. London Math. Soc.*, 21 (1970), 716—730.
- Дэвис (Davis R. L.)
 [1] The number of structures of finite relations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 486—495.
- Изинг (Ising E.)
 [1] Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, *Z. Physik*, 31 (1925), 253—258.
- Картрайт, Глисон (Cartwright D., Gleason T.)
 [1] The number of paths and cycles in a digraph, *Psychometrika*, 31 (1966), 179—199.
- Кастелейн (Kasteleyn P. W.)
 [1] Graph theory and crystal physics, в сб. Graph Theory and Theoretical Physics (под ред. Harary F.), Academic Press., New York, 1937, pp. 44—110.
- Кац (Katz L.)
 [1] Probability of indecomposability of a random mapping function, *Ann. Math. Statist.*, 26 (1955), 512—517.
- Кинг, Палмер (King C., Palmer E. M.)
 [1] Calculation of the number of graphs of order $p \neq 1$ (1) 24 (в печати).
- Кирхгоф (Kirchhoff G.)
 [1] Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.*, 72 (1847), 497—508.
- Клифффорд (Clifford W. K.)
 [1] Mathematical Papers, pp. 1—16, London, 1882.
- Кларнер (Klarner D. A.)
 [1] Cell growth problems, *Canad. J. Math.*, 19 (1967), 851—863.
- Комте (Comtet L.)
 [1] Analyse Combinatoire, vol. I, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- Крейчик (Kraitchik M.)
 [1] Mathematical Recreations, Norton, New York, 1942.

Кэдоган (Cadoogan C. C.)

- [1] The Möbius function and connected graphs, *J. Combinatorial Theory*, 11B (1974), 193—200.

Кэли (Cayley A.)

- [1] A theorem on trees, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 23 (1889), 376—378; *Collected Papers*, Cambridge, 13 (1897), 26—28.

Моллоус. Риордан (Mallows C. L., Riordan J.)

- [1] The inversion enumerator for labeled trees, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 (1968), 92—94.

Мун (Moon J.)

- [1] Various proofs of Cayley's formula for counting trees, в сб. *A Seminar on Graph Theory* (под ред. Harary F.), Holt, New York, 1967, pp. 70—78.
 [2] *Topics on Tournaments*, Holt, New York, 1968.
 [3] Connected graphs with unlabeled end points, *J. Combinatorial Theory*, 6 (1969), 65—66.
 [4] *Counting Labeled Trees*, Canad. Math. Congress, Montreal, 1970.
 [5] Almost all graphs have a spanning cycle, *Canad. Math. Bull.* 15 (1972), 39—41.

Мун, Мозер (Moon J., Moser L.)

- [1] Almost all tournaments are irreducible, *Canad. Math. Bull.*, 5 (1962), 61—65. 1 (1966), 153—156.
 [2] Almost all $(0,1)$ -matrices are primitive, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1 (1966), 153—156.

Норман (Norman R. Z.)

- [1] On the number of linear graphs with given blocks, *Dissertation*, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1954.

Обершельп (Oberschelp W.)

- [1] Kombinatorische Anzahlbestimmungen in Relationen, *Math. Ann.*, 174 (1967), 53—58.

Онзагер (Onsager L.)

- [1] Crystal statistics I, a two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.*, 65 (1944), 117—149.

Оре, Стемпл (Ore O., Stemple G. J.)

- [1] Numerical methods in the four color problem, в сб. *Recent Progress in Combinatorics* (под ред. Tutte W. T.), Academic Press, New York, 1969.

Остервейл (Osterweil L.)

- [1] Enumeration of nonseparable graphs on fewer than 10 points (в печати).

Остин (Austin T. L.)

- [1] The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees, *Canad. J. Math.*, 12 (1960), 535—545.

Оттер (Otter R.)

- [1] The number of trees, *Ann. of Math.*, 49 (1948), 583—599.

Палмер (Palmer E. M.)

- [1] On the number of labeled 2-trees, *J. Combinatorial Theory*, 6 (1969), 206—207.
 [2] Combinatorial problems in set-theoretic form, *Math. Mag.*, 42 (1969), 32—37.
 [3] The exponentiation group as the automorphism group of a graph, в сб. *Proof Techniques in Graph Theory* (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969, pp. 125—131.
 [4] Methods for the enumeration of multigraphs, в сб. *The Many Facets of Graph Theory* (под ред. Chartrand G. and Kapoor S.), Springer Publ., New York, 1969, pp. 251—261.

- [5] Asymptotic formulas for the number of self-complementary graphs and digraphs, *Mathematika*, 17 (1970), 85—90.
- [6] Graphical enumeration methods, в сб. *New Directions in the Theory of Graphs* (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1972.
- Палмер, Рид (Palmer E. M., Read R. C.)
- [1] On the number of plane 2-trees, *J. London Math. Soc.* (в печати).
- Палмер, Робинсон (Palmer E. M., Robinson R. W.)
- [1] The matrix group of two permutation groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 204—207.
- [2] Enumeration under two representations of the wreath product (в печати).
- Партасарати (Parthasarathy K. R.)
- [1] Enumeration of ordinary graphs with given partition, *Canad. J. Math.*, 20 (1968), 40—47.
- Поля (Polya G.)
- [1] Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Math.*, 68 (1937), 145—254.
- [2] Sur les types des propositions composées, *J. Symbolic Logic*, 5 (1940), 98—103.
- Прюфер (Prüfer H.)
- [1] Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, *Arch. Math. Phys.*, 27 (1918), 742—744.
- Райдемайстер (Reidemeister K.)
- [1] Knotentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1932. Reprinted by Chelsea, New York, 1948.
- Райт (Wright E. M.)
- [1] Counting coloured graphs, *Canad. J. Math.*, 13 (1961), 683—693.
- [2] A relationship between two sequences I, II and III, *Proc. London Math. Soc.*, 17 (1967), 296—304, 547—552; *J. London Math. Soc.*, 43 (1968), 720—724.
- [3] The number of graphs on many unlabelled nodes, *Math. Ann.*, 183, (1969), 250—253.
- [4] Asymptotic enumeration of connected graphs, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 68 (1970), 298—308.
- [5] Graphs on unlabelled nodes with a given number of edges, *Acta Math.* 168 (1971), 1—9.
- Редфилд (Redfield J. H.)
- [1] The theory of group-reduced distributions, *Amer. J. Math.*, 49 (1927), 433—455.
- Реньи (Rényi A.)
- [1] Some remarks of the theory of trees, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 4 (1959), 73—85.
- [2] On connected graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 4, (1959), 385—388.
- Рид (Read R. C.)
- [1] The enumeration of locally restricted graphs, I and II, *J. London Math. Soc.*, 34 (1959), 417—436; 35 (1960), 344—351.
- [2] The number of k-colored graphs on labelled nodes, *Canad. J. Math.*, 12 (1960), 409—413.
- [3] A note on the number of functional digraphs, *Math. Ann.*, 143 (1961), 109—110.
- [4] Contributions to the cell growth problem, *Canad. J. Math.*, 14, (1962), 1—20.
- [5] Euler graphs on labelled nodes, *Canad. J. Math.*, 14 (1962), 482—486.
- [6] On the number of self-complementary graphs and digraphs, *J. London Math. Soc.*, 38 (1963), 99—104.

- [7] Some applications of a theorem of de Bruijn, в сб. Graph Theory and Theoretical Physics (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1967, pp. 273—280.
- [8] The use of S-functions in combinatorial analysis, *Canad. J. Math.*, 20 (1968), 808—841.
- [9] Some unusual enumeration problems, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 175 (1970), 314—326.
- Рид, Райт (Read R. C., Wright E. M.)
- [1] Coloured graphs: A correction and extension, *Canad. J. Math.* (в печати).
- Риддел (Riddell R. J.)
- [1] Contributions to the theory of condensation, Dissertation, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1951.
- Риордан (Riordan J.)
- [1] Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
- [2] The enumeration of trees by height and diameter, *IBM J. Res. Develop.* 4 (1960), 473—478.
- Робертс, Спенсер (Roberts F. S., Spencer J. H.)
- [1] A characterization of clique graphs, *J. Combinatorial Theory*, 10B (1971), 102—108.
- Робинсон (Robinson R. W.)
- [1] Enumeration of colored graphs, *J. Combinatorial Theory*, 4 (1968), 181—190.
- [2] Enumeration of euler graphs, в сб. Proof Techniques in Graph Theory (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969, pp. 147—153.
- [3] Enumeration of non-separable graphs, *J. Combinatorial Theory*, 9 (1970), 327—356.
- [4] Enumeration of acyclic digraphs, в сб. Combinatorial Mathematics and its Applications (под ред. Bose R. C. и др.), Univ. of North Carolina, Chapel Hill, 1970, pp. 391—399.
- Рудволис, Снаппер (Rudvalis A., Snapper E.)
- [1] Numerical polynomials for arbitrary characters, *J. Combinatorial Theory*, 10A (1971), 145—159.
- Скойнс (Scoins H. I.)
- [1] The number of trees with nodes of alternate parity, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 58 (1962), 12—16.
- Слепяв (Slepian D.)
- [1] On the number of symmetry types of Boolean functions of n variables, *Canad. J. Math.*, 5 (1953), 185—193.
- Слоуэн (Sloane N. J.)
- [1] Handbook of Integer Sequences, Academic Press, New York, 1973.
- Смит, Татт (Smith C. A. B., Tutte W. T.)
- [1] On unicursal paths in a network of degree 4, *Amer. Math. Monthly*, 48 (1941), 233—237.
- Стокмейер (Stockmeyer P. K.)
- [1] The enumeration of graphs with prescribed automorphism group, Dissertation, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1971.
- Татт (Tutte W. T.)
- [1] The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44 (1948), 463—482.
- [2] The number of planted trees with a given partition, *Amer. Math. Monthly*, 71 (1964), 272—277.
- [3] The enumerative theory of planar maps, в сб. A Survey of Combinatorial Theory (под ред. Srivastav J. N. и др.), North-Holland, Amsterdam, 1973, 437—448.
- Тёрнер (Turner J.)
- [1] Point-symmetric graphs with a prime number of points, *J. Combinatorial Theory*, 3 (1967), 136—145.

- Уайтхед, Рассел (Whitehead A. N., Russell B.)
[1] *Principia Mathematica*, vol. II, p. 301, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1912.
- Уитни (Whitney H.)
[1] Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.*, 54 (1932), 150—168.
- Уленбек, Форд (Uhlenbeck G. E., Ford G. W.)
[1] *Lectures in Statistical Mechanics*, Amer. Math. Soc., Providence Rhode Island, 1963.
- Уолкап (Walkup D. W.)
[1] The number of plane trees, *Mathematika* (в печати).
- Форд, Норман, Уленбек (Ford G. W., Norman R. Z., Uhlenbeck G. E.)
[1] Combinatorial problems in the theory of graphs II, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 42 (1956), 203—208.
- Форд, Уленбек (Ford G. W., Uhlenbeck G. E.)
[1] Combinatorial problems in the theory of graphs, I, III and IV, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 42 (1956), 122—128, 529—535; 43 (1957), 163—167.
- Фуулкс (Foulkes H. O.)
[1] On Redfield's group reduction functions, *Canad. J. Math.*, 15 (1963), 272—284.
[2] On Redfield's range-correspondences, *Canad. J. Math.*, 18 (1966), 1060—1071.
- Фрухт, Харари (Frucht R., Harary F.)
[1] Self-complementary generalized orbits of permutation group, *Canad. Math. Bull.* (в печати).
- Харари (Harary F.)
[1] Теория графов, изд-во «Мир», М., 1973.
[2] On the algebraic structure of knots, *Amer. Math. Monthly*, 56 (1949), 466—468.
[3] On the notion of balance of a signed graph, *Michigan Math. J.*, 2 (1953—1954), 143—146.
[4] The number of linear, directed, rooted, and connected graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78 (1955), 445—463.
[5] The number of dissimilar supergraphs of a linear graph, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 903—914.
[6] The number of oriented graphs, *Michigan Math. J.*, 4 (1957), 221—224.
[7] On the number of bicolored graphs, *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 743—755.
[8] Note on Carnap's relational asymptotic relative frequencies, *J. Symbolic Logic*, 23 (1958), 257—260.
[9] Exponentiation of permutation groups, *Amer. Math. Monthly*, 66 (1959), 572—575.
[10] The number of functional digraphs, *Math. Ann.*, 138 (1959), 203—210.
[11] Applications of Polya's theorem to permutation groups, в сб. *A Seminar on Graph Theory* (под ред. Harary F.), Holt, New York, 1967, pp. 25—33.
[12] Задачи перечисления графов, *УМН*, 24, № 5 (1969), 179—214.
[13] Covering and packing in graphs I, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 175 (1970), 198—205.
[14] A graphical exposition of the Ising problem, *J. Austral. Math. Soc.*, 12 (1971), 365—377.
[15] Комбинаторные задачи перечисления графов, в сб. «Прикладная комбинаторная математика» (под ред. Беккенбаха Э.), изд-во «Мир», М., 1968, 107—140.

- Харари, Кинг, Мовшовиц, Рид (Harary F., King C., Mowshowitz A., Read R. C.)
 [1] Cospectral graphs and digraphs, *Bull. London Math. Soc.*, 3 (1971), 321—328
- Харари, Маввел (Harary F., Manvel B.),
 [1] On the number of cycles in a graph, *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, 21, № 1 (1971), 55—63.
- Харари, Мовшовиц, Риордан (Harary F., Mowshowitz A., Riordan J.)
 [1] Labeled trees with unlabeled endpoints, *J. Combinatorial Theory*, 6 (1969), 60—64.
- Харари, Норман (Harary F., Norman R. Z.)
 [1] The dissimilarity characteristic of Husimi trees, *Ann. of Math.*, 58 (1953), 134—141.
 [2] Dissimilarity characteristic theorems for graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 (1960), 332—334.
 [3] Some properties of line digraphs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 9 (1961), 161—168.
- Харари, Норман, Картрайт (Harary F., Norman R. Z., Cartwright D.)
 [1] Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs, Wiley, New York, 1965.
- Харари, Палмер (Harary F., Palmer E. M.)
 [1] The number of graphs rooted at an oriented line, *ICC Bull.*, 4 (1965), 91—98.
 [2] On the number of orientations of a given graph, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 14 (1966), 125—128.
 [3] Enumeration of locally restricted digraphs, *Canad. J. Math.*, 18, (1966), 853—860.
 [4] The power group enumeration theorem. *J. Combinatorial Theory*, 1 (1966), 157—173.
 [5] Enumeration of self-converse digraphs, *Mathematika*, 13 (1966), 151—157.
 [6] The groups of the small digraphs, *J. Indian Statist. Assoc.*, 4 (1966), 155—169.
 [7] Enumeration of mixed graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 (1966), 682—687.
 [8] The enumeration methods of Redfield, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 373—384.
 [9] Enumeration of finite automata, *Information and Control*, 10 (1967), 499—508.
 [10] On the number of balanced signed graphs, *Bull. Math. Biophys.*, 29 (1967), 759—765.
 [11] Note on the number of forests, *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, 19, № 2 (1969), 110—112.
 [12] On acyclic simplicial complexes, *Mathematika*, 15 (1968), 119—122.
- Харари, Палмер, Рид (Harary F., Palmer E. M., Read R. C.)
 [1] The number of ways to label a structure, *Psychometrika*, 32 (1967), 155—153.
- Харари, Принс (Harary F., Prins G.)
 [1] The number of homeomorphically irreducible trees, and other species, *Acta Math.*, 101 (1959), 141—162.
 [2] Enumeration of bicolourable graphs, *Canad. J. Math.*, 15 (1963), 237—248.
 [3] The block-cutpoint-tree of a graph, *Publ. Math. Debrecen*, 13 (1966), 103—107.
- Харари, Принс, Тутт (Harary F., Prins G., Tutte W. T.)
 [1] The number of plane trees, *Indagationes Math.*, 26 (1964), 319—329,

- Харари, Росс (Harary F., Ross I. C.)
[1] On the determination of redundancies in sociometric chains, *Psychometrika*, 17 (1952), 195—208.
- Харари, Татт (Harary F., Tutte W. T.)
[1] On the order of the group of a planar map, *J. Combinatorial Theory*, 1 (1966), 394—395.
- Харари, Уленбек (Harary F., Uhlenbeck G. E.)
[1] On the number of Husimi trees, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 39 (1953), 315—322.
- Харрисон (Harrison M. A.)
[1] A census of finite automata, *Canad. J. Math.*, 17, № 1 (1965), 100—113.
- Харрисон, Хай (Harrison M. A., High R. G.)
[1] On the cycle index of a product of a permutation groups, *J. Combinatorial Theory*, 4 (1968), 277—299.
- Хватал, Харари (Chvátal V., Harary F.)
[1] Generalized Ramsey theory for graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* (1972).
- Хусими (Husimi K.)
[1] Note on Mayer's theory of cluster integrals, *J. Chem. Phys.*, 18 (1950), 682—684.
- Чао (Chao C. Y.)
[1] On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158 (1971), 247—256.
- Шарп (Sharp Jr. H.)
[1] Enumeration of vacuously transitive relations, *Discrete Math.* (в печати).
- Шридхаран (Sridharan M. R.)
[1] Self-complementary and self-converse oriented graphs, *Indagationes Math.*, 32 (1970), 441—447.
- Эванс, Харари, Линн (Evans J. W., Harary F., Lynn M. S.)
[1] On the computer enumeration of finite topologies, *Comm. ASM*, 10 (1967), 295—298.
- Эйлер (Euler L.)
[1] Novi Comment., *Acad. Sci. Imperials Petropolitanae*, 7 (1758—1759), 13—14.
- Эрдёш, Рёвьи (Erdős P., Rényi A.)
[1] Asymmetric graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 14 (1963), 293—315.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Коганов Л. М.
[1] О приложениях перечислительной схемы Н. Дж. де Брёйна, в сб. Вопросы кибернетики, вып. 16, часть I, «Советское радио», М., 1975, 68—73.
- Козива А. В., Козырев В. П.
[1] Перечисление кратчайших связывающих сетей с дополнительными ограничениями, *Кибернетика*, 6 (1974), 109—115.
- Козырев В. П.
[1] Перечисление транзитивных ориентаций графа и вложение транзитивных графов, в сб. Вопросы кибернетики, вып. 15, «Советское радио», М., 1975, 44—60.

- [2] Перечисление гамильтоновых цепей графа и изучение гамильтоново связанных графов, *Журнал вычислительной математики и математической физики* (в печати).

Козырев В. П., Коршунов А. Д.

- [1] О величине разреза в случайном графе, *Проблемы кибернетики*, 29, «Наука», М., 1974, 27—62.

Коршунов А. Д.

- [1] Об асимптотических оценках числа приведенных конечных автоматов, *Дискретный анализ*, 6 (1966), Новосибирск, 35—50.

Лисковец В. А.

- [1] Число связанных инициальных автоматов, *Кибернетика*, 3 (1969), 16—19.

- [2] Число сильно связанных ориентированных графов, *Математические заметки*, 8, № 6 (1970), 721—732.

- [3] К перечислению сильно связанных ориентированных графов, *Докл. АН БССР*, 17, № 12 (1973), 1077—1080.

- [4] Некоторые результаты комбинаторной теории перечисления графов, I, в сб. *Комбинаторный и асимптотический анализ*, Красноярск, 1975, 9—36.

Петренюк Л. П., Петренюк А. Я.

- [1] Перечень десятивершинных однородных графов степени 4, в сб. *Вопросы кибернетики*, вып. 15, «Советское радио», М., 1975, 71—76.

Попов В. А., Скибенко И. Т., Мокляк Н. Г.

- [1] О числе типов систем k -значных логических функций, *Кибернетика*, 6 (1973), 18—27.

Селиванов Б. И.

- [1] О цикловом индексе экспоненциации групп, в сб. *Комбинаторный анализ*, вып. 1, Изд-во Московского университета, 1971, 79—90.

- [2] Перечисление однородных гиперграфов с простой цикловой структурой, в сб. *Комбинаторный анализ*, вып. 2, Изд-во Московского университета, 1972, 60—67.

Страдинь И. Э.

- [1] О числе типов l -ичных функций, *Ученые записки Рижского политехнического института*, 10, вып. 1, 1963.

- [2] О числе типов обратимых двоичных многополюсников, *Автоматика и вычислительная техника*, 1 (1974), 30—34.

- [3] Об одном теоретико-групповом способе получения комбинаторных чисел, в сб. *Вопросы кибернетики*, вып. 16, часть 1, «Советское радио», М., 1975, 103—110.

Я вошел в комнату и увидел за столом человека, которого вычислил бесконечно давно.

А. и Г. Вайнеры «Лекарство против страха»¹

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ²

- Александр (Alexander J. W.) 273, 292
Алендорфер (Allendoerfer) 10
Ардене-Эренфест ван (van Aardenne-Ehrenfest T.) 41, 292
Архимед (Archimedes) 7
- Байнеке (Beineke L. W.) 4, 5, 44, 292
Беккенбах (Beckenbach E. F.) 292
Бернсайд (Burnside W.) 52, 53, 292
Ботт (Bott R.) 39, 292
Боуз (Bose R. C.) 296
Браун В. (Brown W. G.) 89, 99, 102, 292
Браун Т. (Brown T. A.) 273, 274, 292
Брэйнд де (de Bruijn N. G.) 4, 5, 41, 45, 46, 165, 169, 175, 189, 292
Бригс (Briggs G. B.) 273, 292
Брукс (Brooks R. L.) 265, 293
- Гай (Guy R. K.) 101
Геллер (Geller D. P.) 260, 293
Гилберт (Gilbert E. N.) 10, 19, 27, 43, 266, 293
Глисон А. (Gleason A. M.) 105
Глисон Т. (Gleason T.) 45, 266, 293
Голомб (Golomb S.) 105, 278, 293
Гурса (Goursat E.) 37, 293
- Джевонс (Jevons W. S.) 137, 293
Донец Г. А. 269, 293
Дуглас (Douglas R. J.) 164, 293
Дэвис (Davis R. L.) 90, 91, 105, 153, 293
- Зейдель (Seidel J. J.) 273
- Изинг (Ising E.) 279, 293
- Капур (Kapoor S. E.) 294
Картрайт (Cartwright D.) 30, 42, 45, 90, 152, 156, 179, 256, 262, 266, 293, 298
Кастелейн (Kasteleyn P. W.) 41, 293
Катц (Katz L.) 252, 293
Кинг (King C.) 283, 293, 297
Кирхгоф (Kirchhoff G.) 7, 33, 37, 293
Клейтман (Kleitman D.) 252
Клиффорд (Clifford W. K.) 137, 293
Кларнер (Klarner D. A.) 277, 293
Коганов Л. М. 299
Козина А. В. 299
Козырев В. П. 299, 300
Комте (Comtet L.) 89, 293
Коршунов А. Д. 300
Котциг (Kotzig A.) 257
Крейчик (Kraitichik M.) 276, 294
Кэдоган (Cadogan C. C.) 114, 115, 117, 218, 260, 280, 283, 293
Кэли (Cayley A.) 7, 33, 34, 72, 76, 77, 267, 294
- Линн (Lynn M. S.) 257, 283, 299
Лисковец В. А. 300
Лоэс (Lawes C. P.) 163

¹ Роман напечатан в «Искателе», № 1 и 2 за 1976 г.; фраза из № 2, стр. 33.

² В оригинале именной указатель отсутствует. Мы сочли целесообразным поместить в русском переводе именной указатель, снабдив его подходящим эпиграфом. — *Прим. пер.*

- Мак-Магон (MacMahon P. A.) 7
 Манвел (Manvel B.) 9, 45, 267, 298
 Мейберри (Mayberry J. P.) 39, 292
 Мовшовиц (Mowshowitz A.) 44, 298
 Мозер (Moser L.) 252, 294
 Мокляк Н. Г. 300
 Моллоус (Mallows C. L.) 19, 293
 Моргенштерн (Morgenstern O.) 292
 Мун (Moon J. W.) 8, 33, 34, 36, 44, 45, 153, 155, 156, 252, 254, 292, 294
 Норман (Norman R. Z.) 30, 42, 73, 90, 93, 94, 152, 156, 179, 223, 226, 256, 261, 262, 294, 297, 298
 Обершельп (Oberschelp W.) 151, 231, 232, 235, 237, 252, 272, 281, 283, 294
 Онзагер (Onsager L.) 279, 294
 Оре (Ore O.) 269, 294
 Остервейл (Osterweil L.) 223, 294
 Остин (Austin T. L.) 294
 Оттер (Otter R.) 69, 72, 73, 75, 76, 99, 231, 245, 246, 248, 251, 294
 Оукли (Oakley C.) 10, 104
 Палмер (Palmer E. M.) 5, 10, 14, 44, 57, 68, 77, 90, 96, 112, 124, 125, 139, 141, 146, 157, 159, 167, 174, 177, 182, 186, 188—190, 205, 210, 231, 245, 256, 263, 283, 287, 293, 294, 295, 298
 Паркин (Parkin) 277
 Партасарати (Parthasarathy K. P.) 112, 263, 295
 Петренюк А. Я. 300
 Петренюк Л. П. 300
 Пипперт (Pippert R. E.) 44, 292
 Пойа (Pólya G.) 4, 5, 7, 8, 33, 35, 36, 49, 50, 52, 58, 64, 67, 70, 76, 87, 103, 105, 121, 122, 137, 138, 140, 231, 232, 237, 245, 247, 248, 295
 Попов В. А. 300
 Принс (Prins G.) 78, 81, 84, 86, 87, 92, 93, 102, 124, 259, 262, 266, 298
 Прюффер (Prüfer H.) 33, 34, 295
 Рабин (Rubin M.) 44
 Райдемайстер (Reidemeister K.) 273, 295
 Райт (Wright E. M.) 29, 231, 237, 242, 252, 253, 295, 296
 Рассел (Russell B.) 201, 297
 Редфилд (Redfield J. H.) 4, 5, 8, 46, 49—51, 68, 104, 190, 193, 196—198, 201, 202, 210, 211, 295
 Реньи (Rényi A.) 243, 252, 253, 295, 299
 Рид (Read R. C.) 9, 14, 22, 24, 27—29, 44, 45, 91, 169—171, 175, 185, 188, 189, 191, 193, 206, 208—210, 255, 256, 277, 295, 296, 298
 Риддел (Riddell R. J.) 19, 20, 43, 93, 114, 211, 231, 241, 243, 296
 Риордан (Riordan J.) 9, 19, 44, 67, 73, 76, 77, 79, 90, 103, 111, 233, 273, 276, 280, 281, 284, 294, 296, 298
 Робертс (Roberts F. S.) 261, 296
 Робинсон (Robinson R. W.) 4, 5, 8, 9, 30, 129, 131, 132, 135, 136, 139, 141, 145, 189, 194, 199, 200, 202, 210, 211, 218, 221, 223, 226, 227, 229, 230, 255—258, 263, 266, 281, 283, 294, 296
 Роджерс (Rogers C. A.) 9
 Росс (Ross I. C.) 45, 298
 Рота (Rota G.-C.) 10
 Рудволис (Rudvalis A.) 46, 296
 Селиванов Б. И. 300
 Ситгривс (Sitgreaves) 44
 Скибенко И. Т. 300
 Скоинс (Scoins H. J.) 44, 296
 Слепян (Slepian D.) 105, 138, 139, 296
 Слоуэи (Sloane N. J.) 18, 69, 280, 283, 296
 Смит (Smith C. A. B.) 41, 265, 293, 296
 Снаппер (Snapper E.) 46, 296
 Спенсер (Spencer J. H.) 261, 296
 Сривастава (Srivastava J. N.) 296
 Стаблфилд (Stubblefield B.) 283
 Стейн (Stein P.) 284
 Стемпл (Stemple G. J.) 269, 294
 Стокмейер (Stockmeyer P. K.) 9, 259, 287, 296
 Стоун (Stone A. H.) 265, 293
 Страдинь И. Э. 300
 Сулливан (Sullivan D. D.) 10
 Татт (Tutte W. T.) 39, 41, 87, 265, 270, 292, 294, 296, 298
 Тёрнер (Turner J.) 44, 146, 164, 260, 296
 Уайтхед (Whitehead A. N.) 201, 297
 Уитни (Whitney H.) 260, 297
 Уленбек (Uhlenbeck G. E.) 20, 45, 93, 95, 102, 131, 211, 231, 237, 241, 243, 245, 248, 253, 297, 299

- Уолкан (Walkup D. W.) 103, 297
Уоллис (Wallis W.) 268
- Форд (Ford G. W.) 20, 93, 211, 231, 237, 241, 243, 245, 248, 253, 296
Фоулкс (Foulkes H. O.) 46, 190, 191, 196, 297
Фробениус (Frobenius G.) 46, 53
Фрухт (Frucht R.) 188, 297
- Хай (High R. C.) 139, 299
Харари (Harary F.) 5, 10, 12, 14, 30, 32, 37, 40, 42, 44, 45, 52, 57, 68, 73, 75, 77, 78, 81, 84, 86, 87, 90, 92—96, 102, 104, 105, 111, 112, 117—119, 122—126, 129, 131, 134, 135, 138, 139, 146, 148, 152, 156—159, 161, 165, 167, 168, 174, 177, 179, 180, 182, 186, 188, 190, 212, 223, 230, 231, 256, 257, 259—263, 265—270, 272, 274, 276, 278—281, 283, 287, 292—299
- Харрисон (Harrison M. A.) 139, 177, 178, 299
Хватал (Chvátal V.) 299
Хедрик (Hedrick E. R.) 37, 293
Хусими (Husimi K.) 93, 298, 299
- Чао (Chao C. Y.) 260, 299
Чаргрэнд (Chartrand G.) 294
- Шарп (Sharp Jr. H.) 189, 299
Швенк (Schwenk A. J.) 9, 73, 284
Шридхаран (Sridharan M. R.) 189, 299
Шур (Schur J.) 53
- Эванс (Evans J. W.) 257, 283, 299
Эйлер (Euler L.) 7, 89, 100, 144, 299
Эрдёш (Erdős P.) 243, 252, 299

*И все же,
Будучи «Нигде»,
Находишься ты
Где-то.*

А. А. Милл, «По лестнице»

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Мы приводим в тексте определения почти всех понятий, используемых в этой книге. Для удобства читателя некоторые понятия определялись несколько раз. Все они помещены в этом указателе. Терминология согласуется с той, которая принята в книге Харари [1].

- Абсолют корневого дерева (absolute of a rooted tree) 84
— реберно-корневого дерева (of a line rooted tree) 84
Автомат (automaton) 178
Автоматы изоморфные (isomorphic automata) 178
Автоморфизм графа (automorphism of graph) 14, 48
- Блок (block) 20
Булева функция (boolean function) 136
- Вершина графа (point of a graph) 12
— инцидентная дуге (incident with a arc) 15
— ребру (with a line) 12
— орграфа (of a digraph) 15
— покрывает ребро (covers line) 263
— смежная к вершине (adjacent to a point) 15
Вершины смежные (adjacent points) 12
— соединены ребром (join by a line) 12
Вес вершины дерева (weight of a point of a tree) 102
— дерева (of a tree) 102
— орбиты (of a orbit) 56, 58, 172
— функции (of a function) 58
Весовая функция (weight function) 55, 58, 172
Взвешенная форма леммы Бернсайда (weighted form of Burnside's lemma) 56
Входной алфавит автомата (input alphabet of an automaton) 178
Высота корневого дерева (height of a rooted tree) 103
Выходной алфавит автомата (output alphabet of an automaton) 178
- Гипотеза четырех красок (four color conjecture) 269
Граф (graph) 12

- Граф асимметрический (identity) 242
 — блоков (block) 92
 — вершинно-симметрический (point-symmetric) 146, 260
 — гамильтонов (hamiltonian) 258
 — двойственный к плоскому графу (dual of a plane graph) 271
 — двумерный решетчатый (two-dimensional lattice) 279
 — знаковый помеченный (signed labeled) 43
 — интервалов (interval) 261
 — клик (clique) 261
 — корневой (rooted) 17
 — локально ограниченный (locally restricted) 112
 — направленный (oriented) 157
 — — помеченный (labeled) 43
 — неразложимый (non-separable) 20
 — обладающий квадратным корнем (which has a square root) 260
 — общий (general) 206
 — ориентированный (directed) 15, 147
 — плоский (plane) 44
 — подразбиений (subdivision) 261
 — полный (complete) 38
 — — двудольный (bipartite) 118
 — — m -дольный (m -partite) 134
 — помеченный (labeled) 13
 — раскрашенный (colored) 27
 — реберно-симметрический (line-symmetric) 260
 — реберный (line) 260
 — решетчатый d -мерный (d -dimensional lattice) 279
 — самодополнительный (self-complementary) 168
 — самонегативный (self-negational signed) 189
 — сбалансированный (balanced signed) 146
 — связный (connected) 16
 — симметрический (symmetric) 260
 — с корнем (rooted) 17
 — смешанный (mixed) 159
 — снабженный знаками (signed) 146
 — тождественный (identity) 242
 — тотальный (total) 261
 — узла, узловой (knot) 273
 — унциклический (unicyclic) 89
 — — помеченный связный (labeled connected) 45
 — циклически жесткий (rigid circuit) 261
 — четный (even) 22
 — эйлеров (eulerian) 22, 141
 — 2-раскрашенный (bicolored) 117
 — 2-раскрашиваемый (bicolorable) 124
 — k -раскрашенный (k -colored) 27, 117
 — m -раскрашенный (m -colored) 129, 132, 133
 — m -раскрашиваемый (m -colorable) 136
 — n -раскрашиваемый (n -colorable) 266
 — n -связный (n -connected) 263
 — n -хроматический (n -chromatic) 266
 Графы корневые изоморфные (isomorphic rooted graphs) 17
 — помеченные изоморфные (isomorphic labeled) 13
 — k -раскрашенные изоморфные (isomorphic k -colored) 27
 — эквивалентные относительно дополнительности (equivalent up to complementation) 169
 Группа автоморфизмов графа (automorphism group of a graph) 48
 — графа (of a graph) 14, 48

- Группа графа вершинно-реберная (point-line) 131
 — реберная (line) 106
 — диэдральная (dihedral) 51
 — единичная (identity) 51
 — знакопеременная (alternating) 50
 — матричная (matrix) 202
 — орграфа (of a digraph) 15
 — парная (pair) 106
 — подстановок на множестве объектов (permutation group with object set) 47
 — производная (derived) 197
 — редуцированная упорядоченная парная (reduced ordered pair) 147, 148
 — симметрическая (symmetric) 49
 — степенная (power) 57
 — триадная (triad) 272
 — упорядоченная парная (ordered pair) 152
 — циклическая (cyclic) 51
 Группы подстановок идентичные (identical permutation groups) 49
 — — изоморфные (isomorphic) 48

Декартово произведение групп (cartesian product of groups) 119

- Дерево (tree) 32
 — асимметрическое (identity) 83
 — блоков и точек сочленения (block-cutpoint) 92
 — взвешенное (weighted) 102
 — входящее (to a point) 38
 — выходящее (from a point) 38
 — гомеоморфно несводимое (homeomorphically irreducible) 81
 — данного веса (of given weight) 87
 — данной мощности (of given strength) 87, 102
 — двумерное (two-dimensional) 96
 — корневое данной высоты (rooted, with given height) 103
 — непомеченное (unlabeled) 69
 — ориентированное (oriented) 78
 — остовное (spanning) 37
 — плоское (plane) 87
 — с висячим корнем (planted) 79
 — — данной степенной спецификацией (with a given degree specification) 86, 102
 — — данным разбиением (with a given partition) 86, 102
 — смешанное (directed) 86
 — снабженное знаками (signed) 87, 102
 — Хусими (Husimi) 93

Диаметр графа (diameter of a graph) 262

- дерева (of a tree) 102

Дополнение графа (complement of a graph) 48, 168

- орграфа (of a digraph) 170, 183

Древесность графа (arboricity of a graph) 264

Дуга инцидентная вершине (incident with a point) 15

- орграфа (arc of a digraph) 15
 — последняя (exit) 42

Задача Изинга (Ising problem) 279

- о ладьях (rook) 275
 — — росте клеток (cell growth) 276
 — — ферзях (queens) 276

Звездный многоугольник (starred polygon) 43

- Знак графа (sign of a graph) 24

- Изоморфизм графов (isomorphism of graphs) 14
 Источник автомата (source of an automaton) 180
 — орграфа (of a digraph) 256
- Кактус (cactus) 93
 — помеченный (labeled) 45
 — треугольный (triangular) 93
 Каркас (spanning tree) 37
 Квадрат графа (square of a graph) 260
 Класс подобных блоков (class of simimilar blocks) 73
 Клика графа (clique of a graph) 261
 Комплекс симплициальный (simplicial complex) 271
 — — чистый двумерный (pure two-dimensional) 146, 252
 Композиция групп (composition of groups) 121
 Компонента графа (component of a graph) 17
 — орграфа сильная (of a digraph, strong) 156
 Конденсация орграфа (condensation of a digraph) 156, 255
 Контур (cycle) 30
 Корень графа (root of a graph) 17
 Крупность графа (coarseness of a graph) 265
- Латинский квадрат (Latin square) 272
 Лемма Бернсайда (Burnside's lemma) 54
 — пересчета помеченных графов (labeled counting lemma) 18
 — Редфилда (Redfield's lemma) 195
 Лес (forest) 76
- Маршрут длины n (walk of length n) 16
 — — — ориентированный (directed) 30
 — замкнутый (closed) 30
 Матрица смежности помеченного графа (adjacency matrix of a labeled graph) 37
 Матрицы, эквивалентные по столбцам (column equivalent matrices) 192
 Матричная теорема о деревьях для графов (matrix-tree theorem for graphs) 37
 — — — — орграфов (digraphs) 39
 Мультиграф (multigraph) 111
 — данной мощности (of given strength) 146
 — 2-раскрашенный (bicolored) 206
- Надграф (supergraph) 129
 Недревесность графа (anarboricity of a graph) 265
 Независимое множество вершин (independent set of points) 263
 — — ребер (of lines) 263
- Обобщение теоремы перечисления Редфилда (a generalization of Redfield's enumeration theorem) 202
 Обобщенная композиция групп (generalized composition group) 213
 Обращение цикла подстановки (converse of a cycle of a permutation) 154
 Обход графа (girth of a graph) 262
 Ограниченная форма леммы Бернсайда (restricted form of Burnside's lemma) 55
 Окружение графа (circumference of a graph) 262
 Орбита (orbit) 53

- Орграф (digraph) 15
 — ациклический (acyclic) 30
 — вершино-симметрический (point-symmetric) 164
 — гамвильтонов (hamiltonian) 258
 — обратный к данному орграфу (converse of given digraph) 182
 — односторонне связный (unilaterally connected) 256
 — односторонний (unilateral) 256
 — полный (complete) 162
 — самообратный (self-converse) 182
 — связный (connected) 152
 — сильно связный (strongly connected) 155, 255
 — сильный (strong) 155, 255
 — слабо связный (weakly connected) 152
 — соответствующий графу (of a graph) 157
 — транзитивный (transitive) 256
 — функциональный (functional) 90
 — — помеченный связный (labeled connected) 44
 — эйлеров (eulerian) 40
 Орграфы итерированные реберные (iterated line digraphs) 45
 — эквивалентные относительно обращения (equivalent up to conversion) 183
 Ориентация графа (orientation of a graph) 157
 Ортогональные латинские квадраты (orthogonal Latin squares) 273
 Остов (spanning tree) 37
- Перечисляющий ряд для конфигураций (configuration counting series) 58
 — — — фигур (figure) 58
 — — — функций (function) 58
 Петля (loop) 12
 Площадь четного подграфа двумерной решетки (area of an even subgraph of a two-dimensional lattice) 279
 Подграф (subgraph) 17
 — остовный (spanning) 37
 — покрывает граф (spans the graph) 37
 — порожденный (induced) 125
 Подграфы неподобные (dissimilar subgraphs) 117
 Полимино квадратное (square animals) 276
 — неодносвязное (hole) 277
 — односвязное (simply connected) 277
 — тороидальное (toroidal) 278
 — треугольное (triangular) 278
 — шестиугольное (hexagonal) 278
 Полиномиальная форма теоремы перечисления степенной группы (polynomial form of the power group enumeration theorem) 189
 Полустепень захода (indegree) 15
 — исхода (outdegree) 15
 Порядок графа (order of a graph) 12
 — группы (order of a group) 47
 Проблема ожерелья (necklace problem) 60, 62
 Произведение групп (product of a groups) 52
 — — веночное (wreath) 121
 Производящая функция (generating function) 13
 — — экспоненциальная (exponential) 18
- Радиус графа (radius of a graph) 262
 Разбиение графа (partition of a graph) 12
 — дерева (of a tree) 102
 — цветное (color) 133

- Размерность комплекса (dimension of a complex) 272
 — симплекса (of a simplex) 272
 Расширение орграфа (extension of a digraph) 30
 Ребра кратные (multiple lines) 12
 Ребро графа (line of a graph) 12
 — дерева симметричное (of a tree, symmetry) 74
 — инцидентное вершине (incident with a point) 12
 — покрывает вершину (covers point) 263
 — соединяет вершины (joins points) 12
 — торцевое (end-line) 97
 Род графа (genus of a graph) 265
 Ряд, перечисляющий конфигурации (configuration counting series) 58
 — — фигуры (figure) 58
 — — функции (function) 58
- Связность (connectivity) 263
 — реберная (line-connectivity) 263
 Сеть (net) 179
 Симплекс (simplex) 272
 Система транзитивности группы (transitivity system of a group) 53
 Сложность графа (complexity) 265
 Состояние автомата (state of an automaton) 178
 — — заключительное (terminal) 180
 — — начальное (initial) 180
 Стабилизатор элемента (stabilizer of an element) 53
 Степень вершины (degree of a point) 22
 — группы подстановок (of a permutation group) 47
 Сток орграфа (sink of a digraph) 256
 Сумма цикловых индексов всех графов данного множества (cycle index sum of the groups of all graphs in given set) 215
 Суперпозиция графов (superposition of graphs) 190, 192
- Теорема декомпозиции Редфилда (Redfield's decomposition theorem) 195
 — композиции (composition) 216
 — о характеристике неподобия для графов (dissimilarity characteristic theorem for graphs) 73
 — — — — — деревьев (trees) 75
 — — — — — кактусов (cacti) 94
 — — — — — 2-деревьев (2-trees) 96
 — перечисления для 2-деревьев (enumeration theorem for 2-trees) 99
 — — Поля (Polya's enumeration) 58
 — — Редфилда (Redfield's) 192
 — — степенной группы, константная форма (power group, constant form) 167
 — — — — — форма степенного ряда (power series form) 174
 Толщина графа (thickness of a graph) 265
 Точка комплекса (point of a complex) 271
 — сочленения (cutpoint) 19
 Триангуляция многоугольника (triangulation of a polygon) 99
 Тройка транзитивная (transitive triple) 153
 — циклическая (cyclic) 153
 Турнир (tournament) 16, 153
- Удаление вершины из графа (removal of a point from a graph) 19
 Факторизация графа (factorization of a graph) 267
 Формула обращения ЛAGRANЖА (Lagrange's inversion formula) 35, 36

- Формула Оттера (Otter's) 75
 Функции, эквивалентные относительно группы (equivalent functions with respect to group) 215
 Функция выходов (output function) 178
 — класса (class function) 195, 199
 — переходов (input function) 178
 Хроматический индекс (chromatic index) 266
 Цвет вершины (color of a point) 27
 Цепь (trail) 16
 — простая (path) 16
 Цикл подстановки самообратный (self-converse cycle of a permutation) 154
 — типа 1 (type-1) 94
 — типа 2 (type-2) 94
 Цикловой индекс группы подстановок (cycle index of a permutation group) 49
 Число вершинного покрытия (point-covering number) 263
 — независимости вершинное (point-independence) 263
 — — реберное (line) 263
 — пересечения (intersection) 264
 — реберного покрытия (line-covering) 263
 — реберно-хроматическое (line-chromatic) 266
 — скрещиваний (crossing) 265
 — тотально-хроматическое (total-chromatic) 266
 — хроматическое (chromatic) 265
 Эйлеров контур (eulerian trail) 40
 Эквивалентность относительно (B_1, B^2, \dots, B_m) (equivalence with respect to (B_1, B_2, \dots, B_m)) 192
 Экспоненциация групп (exponentiation of groups) 123
 Эксцентриситет вершины (eccentricity of a point) 262
 Элементы подобные (similar elements) 53
 Ячейка (cell) 96
 1-скелет 2-дерева (1-skeleton of a 2-tree) 96
 1-фактор графа (1-factor of a graph) 267
 1-факторизация графа (1-faktORIZATION of a graph) 267
 2-дерево помеченное (labeled 2-tree) 44
 — — плоское (plane) 44
 — реберно-помеченное (line-labeled) 44
 bc -дерево (bc -tree) 92
 k -дерево помеченное (labeled k -tree) 44
 n -комплекс чистый (pure n -complex) 272
 n -куб (n -cube) 136
 n -плекс (n -plex) 96
 (p, q) -граф ((p, q) -graph) 12
 A -эквивалентные элементы (A -equivalent elements) 53
 — r -подмножества (r -subsets) 63
 S -функция (S -function) 210
 Δ -кактус (Δ -cactus) 94
 \cap -произведение (cap-product) 191
 \cup -произведение (cup-product) 191

*Варкалось. Хливкие шорьки
 Пырлялись по наве,
 И зрюкотали зелюки,
 Как мюмзики в мове.*

Льюис Керрол, Бармаглот ¹

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ ²

- $A(G)$ матрица смежности графа G 37
 $A|Y$ ограничение группы A на множество Y 55
 $A(f)$ подгруппа подстановок группы A , индуцированная функцией f 213
 $A(x)$ стабилизатор элемента x 53, 212
 A_q число различных помеченных четных подграфов в решетчатом графе, имеющих q ребер 279
 A_n знакопеременная группа степени n 50
- $B(G)$ граф блоков графа G 92
 $B(x)$ экспоненциальная производящая функция для помеченных блоков 20
 $\bar{B}(x)$ перечисляющий ряд для графов блоков 93
 $\overline{B}(x)$ перечисляющий ряд для корневых графов блоков 93
 B_p число помеченных блоков с p вершинами 20, 243
- $C(x)$ экспоненциальная производящая функция для помеченных связных графов 18
 $C(x)$ перечисляющий ряд для конфигураций 58, 171
 $C(x_1, \dots, x_n)$ перечисляющий ряд для конфигураций 61
 C_i число орбит веса i 171
 C_k число орбит веса k 58
 C_n циклическая группа степени n 51
 C_p число связных помеченных графов с p вершинами 17, 241
 $C_p(k)$ число k -раскрашенных помеченных графов порядка p 28

¹ «Алиса в стране чудес. Сквозь зеркало и что там увидела Алиса», кн. 2. Издательство литературы на иностранных языках, София, 1967, стр. 135, перевод Д. Г. Орловской.

² Здесь собраны символы, буквы и другие знаки в том виде, в каком они обычно использовались в этой книге. Они разбиты на четыре категории: латинские буквы, греческие буквы, рукописные буквы и операции на группах и графах.

- D ориентированный граф 15
 \overline{D} дополнение орграфа D 170, 183
 D' орграф, обратный к орграфу D 182
 D^* конденсация орграфа D 156, 255
 $D(G)$ орграф, соответствующий графу G 157
 $D(x)$ перечисляющий ряд для корневых треугольных кактусов 94
 $D_p(x)$ производящая функция для помеченной орграфов порядка p 16
 D_n диэдральная группа степени n 51
 $D - Z$ орграф, получающийся из D после удаления всех дуг, принадлежащих циклу Z 90
- E_n единичная группа степени n 51
- G граф 12
 \overline{G} дополнение графа G 48, 168
 G^* граф, двойственный к плоскому графу G 271
 G^2 квадрат графа G 260
 G^3 куб графа G 260
 $G(x)$ экспоненциальная производящая функция для помеченных графов 19
 G_p число помеченных графов порядка p 14, 241
 $G_p(x)$ производящая функция для помеченных графов порядка p 13
 $G_p(x)$ производящая функция для корневых графов порядка p 126
 $G_{p,n}$ узловой граф, сопоставленный узлу p_n 273
 $G - v$ граф, получающийся из графа G после удаления вершины v 19
 (G, u) корневой граф G , корнем которого является вершина u 219
- $H(x)$ перечисляющий ряд для гомеоморфно несводимых корневых деревьев 81
 $\overline{H}(x)$ перечисляющий ряд для гомеоморфно несводимых корневых деревьев с висячим корнем 8
- $K(j)$ полный m -дольный граф, соответствующий разбиению (j) числа p на m частей 134
 $K_{m,n}$ полный двудольный граф с $m + n$ вершинами 118
 K_p полный p -вершинный граф 37
- $L(G)$ реберный граф графа G 260
 $L(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых деревьев с несимметричным корневым ребром 75
 $L(x)$ перечисляющий ряд для ориентированных корневых деревьев, у которых корнем является дуга 80
 $L(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых гомеоморфно несводимых деревьев с несимметричным корневым ребром 83
 $L(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых 2-деревьев 98
 $\overline{L}(x)$ перечисляющий ряд для планарных реберно-корневых 2-деревьев 101
 $L_{m,n}$ двумерный решетчатый граф 279

- L_n число латинских квадратов порядка n с естественно упорядоченными первыми строкой и столбцом 272
 L_p число p -вершинных реберно-корневых деревьев с несимметричным корневым ребром 75
 $M(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых 2-деревьев с симметричным корневым ребром 97
 $M_1(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых 2-деревьев, у которых корневое ребро является торцевым и симметричным 97
 $\bar{M}_1(x)$ перечисляющий ряд для планарных реберно-корневых 2-деревьев, у которых корневое ребро является торцевым и симметричным 100
 $N(A)$ число орбит группы подстановок A 54
 $N[B_1, B_2, \dots, B_m]$ число классов $(m \times n)$ -матриц, эквивалентных относительно групп подстановок (B_1, \dots, B_m) 192
 $N(n, r)$ число типов n -местных булевых функций, каждая из которых имеет ровно r единичных значений 138
 $N(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых 2-деревьев с несимметричным корневым ребром 97
 $N_1(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых 2-деревьев, у которых корневое ребро является торцевым и несимметричным 97
 $\bar{N}_1(x)$ перечисляющий ряд для планарных реберно-корневых 2-деревьев, у которых корневое ребро является торцевым и несимметричным 100
 $N_p^m(x)$ производящая функция для p -вершинных графов, у которых ребра раскрашены в m взаимозаменяемых цветов 176
 $N(x_1, \dots, x_p)$ производящая функция для локально ограниченных p -вершинных графов 112
 $P(x)$ перечисляющий ряд для плоских корневых деревьев 87
 $\bar{P}(x)$ перечисляющий ряд для плоских корневых деревьев с висячими корнями 87
 P_n простая n -вершинная цепь 269
 Q_n n -мерный куб (n -куб) 136
 $R(x)$ экспоненциальная производящая функция для связанных корневых помеченных графов 20
 $R(x)$ перечисляющий ряд для ориентированных корневых деревьев 78
 $\bar{R}(x)$ перечисляющий ряд для ориентированных корневых деревьев с висячими корнями 79
 R_p число p -вершинных связанных корневых помеченных графов 21
 $R_n(x)$ экспоненциальная производящая функция для таких связанных корневых помеченных графов, у которых корень принадлежит ровно n блокам 21

- $\langle S \rangle$ подграф, порожденный подмножеством вершин S 125
 $S(G)$ граф подразбиений графа G 261
 $S(x)$ производящая функция для сильных турниров 156
 S_n симметричная группа степени n 49
 $S_n^{(1,2)}$ вершинно-реберная группа графа K_n 135, 199

- T дерево 32
 $|T|$ абсолют корневого или реберно-корневого дерева 84
 $T(G)$ тотальный граф графа G 261
 $T(p)$ число турниров порядка p 153
 $T(x)$ производящая функция для корневых деревьев 70
 $T(x)$ производящая функция для турниров 156
 $T(x, y)$ производящая функция для корневых bc -деревьев 92
 $T_B(x, y)$ производящая функция для корневых bc -деревьев с голубым корнем 92
 $T_C(x, y)$ производящая функция для корневых bc -деревьев с коралловым корнем 92
 T_p число корневых деревьев порядка p 70
 \tilde{T}_p приближенное число корневых p -вершинных деревьев 252
 $T_n(x)$ производящая функция для турниров, имеющих ровно n сильных компонент 157
- $U(x)$ экспоненциальная производящая функция для помеченных эйлеровых графов 23
 $U(x)$ перечисляющий ряд для асимметричных корневых деревьев 84
 $U_1(x)$ перечисляющий ряд для корневых деревьев, имеющих асимметрические абсолюты 85
 $U_2(x)$ перечисляющий ряд для реберно-корневых деревьев, имеющих асимметрические абсолюты 85
 U_p число помеченных эйлеровых графов порядка p 23
 $U_n(x)$ перечисляющий ряд для унициклических графов, у которых цикл имеет длину n 90
- $V(D)$ множество вершин орграфа D 15
 $V(G)$ множество вершин графа G 12
 $V_1(x)$ перечисляющий ряд для асимметрических корневых деревьев с неасимметрическими абсолютатами 85
 $V_2(x)$ перечисляющий ряд для асимметрических реберно-корневых деревьев с неасимметрическими абсолютатами 85
- $W(x)$ экспоненциальная производящая функция для четных помеченных графов 23
 W_p число четных помеченных графов порядка p 22
- $X(D)$ множество дуг орграфа D 15
 $X(G)$ множество ребер графа G 12
 $X^{(2)}$ множество всех 2-подмножеств множества X 105
 $X^{[2]}$ множество всех упорядоченных пар различных элементов из X 148

- $Z(A)$ цикловой индекс группы подстановок A 49
 $Z(G)$ цикловой индекс группы автоморфизмов графа G 53
 $Z(A_\infty - S_\infty)$ разность сумм цикловых индексов всех групп A_n и S_n 67
 $Z(S_\infty)$ сумма цикловых индексов всех симметрических групп S_n 70
 $Z(A) \times Z(B)$ произведение цикловых индексов 139
 $Z(\alpha)$ цикловой индекс циклической группы, порожденной подстановкой α 196
- $a(n, k, m)$ число автоматов с n состояниями, k входными и m выходными символами 179
 $a(n, k, m, t)$ число автоматов с n состояниями, из которых t — заключительные, k входными и m выходными символами 181
 $a(x, y)$ производящая функция для помеченных циклических орграфов, перечисляемых с учетом числа вершин, имеющих нулевую полустепень захода 32
 a_p число помеченных ациклических p -вершинных орграфов 31
 a_p число p -вершинных графов, перечисляемых с учетом эквивалентности относительно дополнительности 169
 $a_{p, k}$ число таких помеченных ациклических p -вершинных орграфов, у которых ровно k вершин имеют нулевую полустепень захода 31
- b^* число неподобных блоков в графе 73
 $bc(G)$ дерево блоков и точек сочленения графа G 92
 $b_{m, n}(x)$ многочлен, перечисляющий остовные подграфы полного двудольного графа $K_{m, n}$ при $m \neq n$ 118
 $b_n(x)$ многочлен, перечисляющий остовные подграфы полного двудольного графа $K_{n, n}$ 121
 $b_n(j, x)$ многочлен, перечисляющий m -раскрашенные p -вершинные графы, определяемые цветным разбиением (j) числа m 133
- $c(x)$ перечисляющий ряд для фигур 58
 $c(x)$ производящая функция для связанных графов (параметром перечисления является число вершин в графе) 114
 $c(x, y)$ производящая функция для связанных графов (параметры перечисления — число вершин и число ребер в графе) 115
 $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перечисляющий ряд для фигур 61
 c_k число фигур веса k 57
 c_p число связанных p -вершинных графов 114
 $c_p(x)$ многочлен, перечисляющий p -вершинные орграфы с учетом эквивалентности относительно обращения 184
 $c_p(x, y)$ многочлен, перечисляющий полные p -вершинные орграфы в соответствии с числом дуг и с числом симметричных пар дуг в них 162
 $c_{p, q}$ число связанных (p, q) -графов 115
 c_{pqr} число полных p -вершинных орграфов, имеющих ровно q «непарных» дуг и ровно r симметричных пар дуг 162

- $d(G)$ диаметр графа G 262
 $\deg v$ степень вершины v 22
 $d(x)$ перечисляющий ряд для треугольных кактусов 95
 d_p число p -вершинных орграфов 151, 236
 d'_p число самообратных p -вершинных орграфов 187
 \overline{d}_p число самополнительных p -вершинных орграфов 170
 $d_p(x)$ многочлен, перечисляющий p -вершинные орграфы 148, 161
 $d'_p(x)$ многочлен, перечисляющий самообратные p -вершинные орграфы 182
 $d_{p,q}$ число орграфов с p вершинами и q дугами 201
- $e(D)$ число эйлеровых контуров в помеченном эйлеровом подграфе D 42
 $e(v)$ эксцентриситет вершины v 262
- $f(x, y)$ производящая функция для лесов 77
 $f_p(x)$ многочлен, перечисляющий p -вершинные леса 77
 $f_{p,q}$ число лесов с p вершинами и q ребрами 77
- $g(x)$ производящая функция для графов 113
 $g(x, y)$ производящая функция для графов (параметры перечисления — число вершин и число ребер в графе) 115
 $g_p(x)$ производящая функция для p -вершинных графов 105, 161
 \underline{g}_p число p -вершинных графов 114, 232
 \overline{g}_p число самополнительных графов с p вершинами 169
 $g_{p,q}$ число (p, q) -графов 105, 115, 200, 237
- $h(j)$ число подстановок симметрической группы, имеющих цикловую структуру, определенную разбиением (j) 50
 $h(x)$ перечисляющий ряд для гомеоморфно несводимых деревьев 81
 $h_p(x)$ многочлен, перечисляющий графы порядка p с корнем, представляющим собой некоторый порожденный подграф H порядка $n < p$ 125
- $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ вектор, определяющий такое разбиение числа n , в котором в точности j_k частей, равных k 50
 $j_k(\alpha)$ число k -циклов в разложении подстановки α на непересекающиеся циклы 49
- $l(G)$ число различных распределений поместок на множестве вершин графа G 14

- $m_p(x)$ производящая функция для мультиграфов порядка p 111
 $m_p(x, y)$ многочлен, перечисляющий p -вершинные смешанные графы в соответствии с числом дуг и числом ребер в них 159
 $m_{p,q}$ число мультиграфов с p вершинами и q ребрами 205
 m_{pqr} число смешанных графов с p вершинами, q дугами и r ребрами 169
- nG граф, состоящий из n различных экземпляров связного графа G 134
- $o(G)$ число различных ориентаций графа G 157
 odv полустепень исхода вершины v 39
 $o_p(x)$ многочлен, перечисляющий направленные p -вершинные графы 161
- p число вершин в графе и орграфе 12, 15
 $\{p\}$ произвольное упорядоченное разбиение числа p на несколько положительных частей 28
 p^* число неподобных вершин в графе 73
 p_i^* число неподобных вершин в i -м классе подобия блоков 73
 $p(x)$ перечисляющий ряд для плоских деревьев 87
- q число ребер в графе или число дуг в орграфе 12, 15
 q^* число неподобных ребер в дереве, или в кактусе, или в 2-дереве 74, 93, 96
 $q(j)$ число реберных циклов, определяемых подстановкой с цикловой структурой (j) 232, 235
- $r(G)$ радиус графа G 262
 r^* число неподобных циклов в кактусе 93
 r^* число неподобных ячеек в 2-дереве 96
 $r(x)$ перечисляющий ряд для ориентированных деревьев 78
 r_p' число самообратных p -вершинных отношений 188
 $r_p(x)$ многочлен, перечисляющий корневые надграфы некоторого p -вершинного графа 129
 $r_p(x)$ многочлен, перечисляющий p -вершинные отношения 152
 $r_p'(x)$ многочлен, перечисляющий самообратные p -вершинные отношения 186
- s число симметричных ребер в дереве 74
 $s(G)$ число симметрий графа G (порядок группы автоморфизмов графа G) 14
 $s(y)$ производящая функция для чистых 3-размерных симплицальных комплексов 272
 $s_1(x)$ перечисляющий ряд для 2-деревьев, у которых корнем является ячейка с двумя подобными ребрами 98
 $\bar{s}_1(x)$ перечисляющий ряд для планарных 2-деревьев, у которых корнем является ячейка с двумя подобными ребрами 101
 $s_2(x)$ перечисляющий ряд для 2-деревьев, у которых корнем является ячейка с тремя подобными ребрами 98

- $\bar{s}_2(x)$ перечисляющий ряд для планарных 2-деревьев, у которых корнем является ячейка с тремя подобными ребрами 101
 $s_p(x, y)$ перечисляющий многочлен для комплексов не ниже чем второй размерности, имеющих p точек (параметры перечисления — число линий и число клеток в комплексе) 272
 $spqr$ число комплексов не ниже чем второй размерности, имеющих p точек, q линий и r клеток 272
- $t(x)$ производящая функция для деревьев 73
 $\bar{t}(x)$ перечисляющий ряд для 2-деревьев 97
 $\bar{t}(x)$ перечисляющий ряд для планарных 2-деревьев 101
 $t(x, y)$ ряд, перечисляющий деревья блоков и точек сочленения 92
 t_n число 2-деревьев с n ячейками 96
 t_p число помеченных p -вершинных деревьев 32
 t_p число деревьев порядка p 73
 \bar{t}_p приближенное число p -вершинных деревьев 252
 $t_{m, n}$ число bc -деревьев с m голубыми и n коралловыми вершинами 92
- u, v, w вершины графов и орграфов 12, 14
 (u, v) дуга орграфа 15
 $\{u, v\}$ ребро графа 12
 $u(x)$ перечисляющий ряд для асимметрических деревьев 84
 $u(x)$ производящая функция для связанных четных графов 115, 145
 $u(x, y)$ производящая функция для помеченных эйлеровых графов (параметры — число вершин и число ребер в графе) 27
- $v(x)$ перечисляющий ряд для функциональных орграфов 90
- w весовая функция 55
 $w(F)$ вес орбиты 58
 $w(X_i)$ вес орбиты 56
 $w(f)$ вес функции 58
 $w(x)$ производящая функция для четных графов 115, 145
 $w(x, y)$ экспоненциальная производящая функция для помеченных четных графов 27
 w_p число четных p -вершинных графов 141
 $w_p(x)$ многочлен, перечисляющий помеченные p -вершинные четные графы 24
- x ребро графа или дуга орграфа 12, 15
 \bar{x} орбита, содержащая элемент x 212
- $\Gamma(D)$ группа орграфа D 15
 $\Gamma(G)$ группа графа 14, 48
 $\Gamma_1(G)$ реберная группа графа 106
 $\Gamma_{0,1}(G)$ вершинно-реберная группа графа 131

- Δ наибольшая степень вершин графа 263
- $\Delta(x)$ перечисляющий ряд для 2-деревьев, у которых корнем является ячейка (треугольник) 98
- $\bar{\Delta}(x)$ перечисляющий ряд для планарных 2-деревьев, у которых корнем является ячейка 101
- $(\alpha; \beta)$ подстановка из степенной группы 57
- α_0 число вершинного покрытия графа 263
- α_1 число реберного покрытия графа 263
- β_0 вершинное число независимости графа 263
- β_1 реберное число независимости графа 263
- γ род графа 265
- δ наименьшая степень вершин графа 263
- ε тождественная подстановка 59
- η радиус круга сходимости производящей функции для деревьев и производящей функции для корневых деревьев 246
- θ толщина графа 265
- κ связность графа 263
- λ реберная связность графа 263
- ν число скрещиваний графа 265
- ξ крушность графа 265
- ρ линейный оператор Робинсона, действующий на вершинно-реберные цикловые индексы 131

$\sigma(G)$ знак графа G , ребра которого помечены специальным образом числами $+1$ и -1 24

χ хроматическое число графа 265
 χ' реберно-хроматическое число графа 266
 χ'' тотально-хроматическое число графа 266

$\omega_0(G)$ одна из вариаций числа пересечения графа 264

\mathcal{B} множество всех блоков 220

\mathcal{B}' множество всех корневых блоков 220

$\mathcal{B}^{(p)}$ множество всех блоков с не менее чем p вершинами 222

\mathcal{B}_p множество всех p -вершинных блоков 220

\mathcal{B}'_p множество всех корневых p -вершинных блоков 220

\mathcal{C} множество всех связных графов 217

\mathcal{C}' множество всех связных корневых графов 220

\mathcal{C}_p множество всех связных p -вершинных графов 218

$\mathcal{C}^{(p)}$ множество всех корневых связных графов, у которых всякий блок, содержащий корень, имеет не менее чем p вершин 220

\mathcal{G} множество всех графов 217

\mathcal{G}_n множество всех графов, имеющих ровно n компонент 217

$\mathcal{G}^{(p)}$ множество всех таких графов, каждая компонента которых содержит не менее чем p вершин 218

\mathcal{H}' множество всех различных корневых графов, которые могут быть получены путем выделения корня в графах из множества \mathcal{H} 219

\mathcal{H}'_p множество всех корневых связных p -вершинных графов, каждый блок в которых содержит корень 220

\mathcal{D} множество всех деревьев 224

$Z(\mathcal{H})$ сумма цикловых индексов всех графов из множества \mathcal{H} 215

$A \cong B$ изоморфность групп A и B 49

- $A = B$ идентичность групп A и B 49
 AB произведение групп A и B 53
 B^A степенная группа 57
- B^{A*} ограниченная степенная группа 68
- $A \times B$ декартово произведение групп A и B 119
 $A [B]$ композиция групп (вечное произведение групп) A
 и B 121
- $[B]^A$ экспоненциация групп A и B 123
 A/B производная группа групп A и B 197
 $[A; B]$ матричная группа групп A и B 202
- $A (f) [B_1, \dots, B_m]$ обобщенная композиция групп 213
 $[\alpha; \beta_1, \dots, \beta_m]$ подстановка из матричной группы 202
 $(\alpha; \tau_1, \dots, \tau_m)$ подстановка из обобщенной композиции групп 213
- $A^{(2)}$ парная группа 106
 $A^{[2]}$ редуцированная упорядоченная парная группа 148
- S_p^2 упорядоченная парная группа группы S_p 152
 S_p^3 триадная группа группы S_p 272
- $\Gamma(H) \circ S_{p-n}$ специальное ограничение парной группы $(\Gamma(H)S_{p-n})^{(2)}$
 125
- 4КГ** гипотеза четырех красок 269
ЦЭ4КГ перечислительный эквивалент гипотезы четырех красок 269

Королевский Математик был лысый близорукий человек, носивший на голове ермолку, а за каждым ухом — по карандашу. Он был одет в черный костюм с белыми цифрами.

«Я не желаю выслушивать длинный перечень всего того, что вы навывчисляли для меня с 1907 года», — сказал ему король. — «Я просто хочу, чтобы вы прямо сейчас постигли, как достать луну для принцессы Леноры. Когда она получит луну, она снова станет здоровой».

«Я счастлив, что вы упомянули обо всем вычисленном мной для вас с 1907 года», — сказал Королевский Математик. — Так случилось, что перечень всего этого у меня с собой».

Джеймс Сёрбер, «Много лун»

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие переводчика</i>	5
<i>Предисловие</i>	7
Глава 1. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ОБЪЕКТОВ	11
1.1 Число способов, которыми можно пометить граф	12
1.2. Связные графы	16
1.3. Блоки	19
1.4. Эйлеровы графы	22
1.5. Число k -раскрашенных графов	27
1.6. Ациклические оргграфы	30
1.7. Деревья	32
1.8. Эйлеровы контуры в оргграфах	38
Упражнения	43
Глава 2. ТЕОРЕМА ПОЙА	46
2.1. Группы и графы	47
2.2. Цикловой индекс группы подстановок	49
2.3. Лемма Бернсайда	53
2.4. Теорема Пойа	57
2.5. Ряд $1 + x$ — специальный ряд для фигур	62
2.6. Взаимно однозначные функции	64
Упражнения	67
Глава 3. ДЕРЕВЬЯ	69
3.1. Корневые деревья	69
3.2. Некорневые деревья	73

ОГЛАВЛЕНИЕ	323
3.3. Деревья со специальными свойствами	78
3.4. Древоподобные графы	89
3.5. 2-деревья	95
Упражнения	102
Глава 4. ГРАФЫ	104
4.1. Графы	105
4.2. Связные графы	113
4.3. 2-раскрашенные графы	117
4.4. Корневые графы	124
4.5. Надграфы и раскрашенные графы	129
4.6. Булевы функции	136
4.7. Эйлеровы графы	141
Упражнения	145
Глава 5. ОРГРАФЫ	147
5.1. Орграфы	148
5.2. Турниры	153
5.3. Ориентации графа	157
5.4. Смешанные графы	159
Упражнения	163
Глава 6. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ГРУППЫ	165
6.1. Теорема перечисления степенной группы	165
6.2. Самодополнительные графы	168
6.3. Взвешенные функции	171
6.4. Графы с раскрашенными ребрами	175
6.5. Конечные автоматы	177
6.6. Самообратные орграфы	182
Упражнения	188
Глава 7. СУПЕРПОЗИЦИЯ	190
7.1. Теорема перечисления Редфилда	190
7.2. Теорема декомпозиции Редфилда	194
7.3. Графы и орграфы	200
7.4. Обобщение теоремы перечисления Редфилда	202
7.5. Общие графы	206
Упражнения	210
Глава 8. БЛОКИ	211
8.1. Обобщение леммы Редфилда	211
8.2. Композиция групп	212
8.3. Теорема композиции	215
8.4. Связные графы	217
8.5. Суммы цикловых индексов корневых графов	219
8.6. Блоки	220
8.7. Графы с данными блоками	223

8.8. Ациклические оргграфы	227
Упражнения	230
Глава 9. АСИМПТОТИКА	231
9.1. Графы	232
9.2. Оргграфы	235
9.3. Графы с данными числами вершин и ребер	237
9.4. Связные графы и блоки	241
9.5. Деревья	245
Упражнения	252
Глава 10. НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ	254
10.1. Помеченные графы	254
10.2. Оргграфы	255
10.3. Графы с данными структурными свойствами	257
10.4. Графы с данным параметром	261
10.5. Подграфы данного графа	266
10.6. Надграфы данного графа	268
10.7. Графы и раскраска	269
10.8. Вариации на тему о графах	271
<i>Приложение I</i>	<i>280</i>
<i>Приложение II</i>	<i>287</i>
<i>Приложение III</i>	<i>289</i>
<i>Список литературы</i>	<i>292</i>
Именной указатель	301
Предметный указатель	304
Указатель обозначений	311

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Ф. Харари, Э. Палмер

**ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ
ГРАФОВ**

Редактор А. А. Бряндинская
Художник В. И. Шаповалов
Художественный редактор Н. Г. Блинов
Технический редактор Т. А. Максимова

Сдано в набор 17/V 1976 г.
Подписано к печати 7/XII 1976 г.
Бумага тип. № 1 60×90¹/₁₆=10,25 бум. л.
Печ. л. 20,50. Уч.-изд. л. 18,38
Изд. № 1/8636. Цена 1 р. 53 к. Зак. 443

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», Москва, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29
Набрано в Ленинградской типографии № 6 Союзполиграфпрома Государствен-
ного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
196006, Ленинград, Московский пр., 91

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ

Математическая экономика. Равновесные модели, оптимальное планирование и управление. Сб. перев., «Мир», 1974, 99 коп.

Математическая экономика сложилась как самостоятельная научная дисциплина со своим объектом изучения и аппаратом, основанным на методах функционального анализа, топологии, теории дифференциальных уравнений и др. Появилось много работ советских и зарубежных авторов, развивающих классические исследования фон Неймана, Л. В. Канторовича и Л. С. Понтрягина.

Предлагаемый сборник содержит статьи видных зарубежных ученых (Эрроу, Рокафеллара, Олеха, Лихнеровича и др.). Эти статьи разбиваются на две группы; в первой предлагается новый алгоритм решения игр и анализа экономических моделей, рассматривается модель регулирования цен и поведения покупателей. Во второй группе статей дается экономическая интерпретация принципа максимума Понтрягина, рассматриваются модели оптимального контроля внешней среды и защиты ее от загрязнения.

Книга рассчитана на математиков различных специальностей, инженеров, экономистов и специалистов по АСУ. Она будет полезна аспирантам и студентам указанных специальностей.

Уважаемый читатель!

Заказ на книгу направляйте по адресу:
191040, Ленинград, Пушкинская ул., 2, магазин № 5 «Техническая книга».

Книга будет выслана наложенным платежом,