И * Л

Государственное издательство

и н о с т р а н н о й

литературы

*

A COURSE
of
PURE MATHEMATICS

by

G. H. Hardy, M. A., F. R. S.

Fellow of Trinity College
Emeritus Professor of Pure Mathematics
in the University of Cambridge
Hon. Fellow of New College, Oxford

NINTH EDITION

1945

Г. Х. ХАРДИ

КУРС ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ

Перевод с английского
В. И. ЛЕВИНА

1949
Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

ОТ РЕДАКЦИИ

„Курс чистой математики" профессора Кэмбриджского университета Г. Харди *) представляет интерес в первую очередь для лиц, ведущих преподавание математического анализа в высшей школе. Книга эта написана понятным и ясным языком и не содержит большого и сложного теоретического материала. В ней разобраны лишь, но зато с исчерпывающей полнотой и тщательностью, основные положения математического анализа, не выходящие за рамки довольно элементарных понятий.

Автор не ставил своей задачей систематическое изложение всего университетского курса математического анализа. Поэтому он умышленно обходит такие понятия как равномерная сходимость, кратные ряды, интегрирование и дифференцирование рядов и т. п. Однако те вопросы, которые включены в книгу, рассматриваются со всей необходимой математической строгостью.

Основная ценность книги заключается в большом количестве содержащихся в ней удачно подобранных интересных задач и примеров, представляющих собой хороший материал для самостоятельной проработки важнейших положений анализа. При решении этих задач может быть достигнут тот уровень владения аппаратом математического анализа, который необходим для плодотворного применения анализа, как к различным разделам самой математики, так и к вопросам точного естествознания и техники.

В русской математической литературе имеется ряд прекрасных обстоятельных курсов математического анализа. Ни в какой мере не заменяя их, книга Г. Харди может послужить дополнением к этим руководствам.

---

*) Г. Х. Харди родился в 1877 г., учился в Кэмбриджском университете и преподавал там почти всю свою жизнь; умер 7 декабря 1947 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга написана в первую очередь для студентов первых курсов университетов, способности которых приближаются к тому уровню, который обычно требуется для получения стипендии. Я надеюсь, что она окажется полезной и для другого круга читателей, но в основном я учитывал интересы именно этого круга. Во всяком случае эта книга написана для математиков; я нигде не пытался итти навстречу студентам технических специальностей, и вообще не принимал во внимание запросов тех читателей, чьи интересы не являются в первую очередь математическими.

Я рассматриваю эту книгу как действительно элементарную. В ней содержится много трудных примеров (преимущественно в конце глав); такие примеры я снабжал, где это было возможно с точки зрения объема, указаниями к решению. Но я всячески старался избегать действительно трудных понятий. Например, равномерная сходимость, двойные ряды, бесконечные произведения даже не упоминаются в этой книге; я не доказываю никаких общих теорем относительно перестановки предельных переходов — я даже не определяю $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$. В последних двух главах иногда интегрируется степенной ряд, но я ограничиваюсь только простейшими случаями и для каждого из них провожу специальное исследование.

Сентябрь 1908 г. *Г. Х.*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ

В этом издании книга подверглась самым серьезным изменениям со времени второго издания. Я воспользовался тем, что книга заново набиралась, и это дало мне возможность свободно изменять ее содержание.

Бывшее Приложение II (относительно обозначений „O, o и $\sim$“) я включил в соответствующих местах в текст книги. Заново написаны части глав VI и VII, относящиеся к элементарным свойствам производных. Здесь я следую курсу де ла Валле-Пуссена; эта часть книги несомненно значительно улучшена. Эти важные изменения повлекли за собой, конечно, много других более мелких исправлений.

Я включил большое число новых примеров из числа задач, предлагавшихся на экзаменах в Кэмбридже за последние 20 лет, которые будут полезны кэмбриджским студентам. Эти задачи были подобраны для меня Лявом (E. R. Love), который прочел также все гранки и исправил много ошибок.

Общий план книги остался без изменений. Внимательно перечитывая книгу впервые за 20 лет, я неоднократно испытывал желание произвести в ней более радикальные изменения как в содержании, так и в стиле. Она была написана в то время, когда в Кэмбридже пренебрегали математическим анализом, и ее патетический стиль кажется теперь немного смешным. Если бы я переписал ее теперь, то я бы уже не писал (по выражению проф. Литтльвуда) как „проповедник, разговаривающий с каннибалами“, а значительно суше и с соответствующей сдержанностью. Более того, я писал бы гораздо короче и смог бы включить значительно больше материала. Книга приняла бы характер обычного курса анализа.

Для такого начинания я не располагаю достаточным временем, и возможно, что это к лучшему, так как, вероятно, я написал бы значительно лучшую, но гораздо менее оригинальную книгу. Эта книга была бы не так полезна в качестве введения к руководствам по анализу, в которых теперь даже в Англии нет недостатка.

Ноябрь 1937 г. *Г. Х.*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В результате критических замечаний, сделанных проф. Г. Дэвенпортом (H. Davenport), я изменил некоторые места в первых двух главах. В остальном текст остался без изменений, за исключением исправления нескольких незначительных ошибок и включения небольшого числа дополнительных ссылок.

Ноябрь 1943 г. *Г. Х.*

ГЛАВА I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

1. Рациональные числа. Дробь $r=\frac{p}{q}$, где p и q — положительные или отрицательные целые числа, называется ***рациональным числом.*** Мы можем предположить, не ограничивая общности наших рассмотрений, что p и q — взаимно простые числа, так как в противном случае дробь можно было бы сократить, а также, что q положительно, так как

$$\frac{p}{-q}=\frac{-p}{q},\quad \frac{-p}{-q}=\frac{p}{q}.$$

К таким образом определенным рациональным числам мы можем, полагая $p=0$, присоединить еще „рациональное число 0".

Мы предполагаем, что читатель знаком с обычными арифметическими правилами действий над рациональными числами. Этих знаний вполне достаточно для решения следующих примеров.

Примеры I. 1. Если r и s — рациональные числа, то $r+s$, $r-s$, rs и $\frac{r}{s}$ — также рациональные числа, если в последнем случае $s\neq 0$ (если $s=0$, то $\frac{r}{s}$ не имеет смысла).

2. Если λ, m и n — положительные рациональные числа, причем $m>n$, то $\lambda(m^2-n^2)$, $2\lambda mn$ и $\lambda(m^2+n^2)$ — также положительные рациональные числа. Исходя из этого, показать, каким образом можно найти любое число прямоугольных треугольников, длины всех сторон которых рациональны.

3. Каждая конечная десятичная дробь представляет рациональное число, знаменатель которого не имеет других делителей, кроме 2 и 5. Обратно, всякое такое рациональное число может быть представлено, и притом единственным образом, как конечная десятичная дробь.

[Общая теория десятичных дробей будет рассмотрена в гл. IV.]

4. Все положительные рациональные числа могут быть записаны в виде последовательности следующим образом:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots.$$

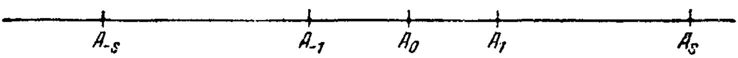
Показать, что p/q является членом этой последовательности с номером $\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)+q$.

[В этой последовательности каждое рациональное число встречается неограниченное число раз. Так, например, 1 встречается в виде $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, ... Мы можем, конечно, избежать этого, вычеркивая из последовательности каждое число, которое в ней уже встретилось в более простой форме. Однако тогда определение номера члена $\frac{p}{q}$ становится более сложным.]

2. Представление рациональных чисел точками на прямой. Во многих областях математического анализа представляется удобным пользоваться геометрическими иллюстрациями.

Применение геометрических иллюстраций не означает, конечно, что анализ каким то образом опирается на геометрию. Геометрические иллюстрации являются лишь иллюстрациями и ничем более, и применяются исключительно в целях достижения большей ясности изложения. В силу этого нет необходимости приводить здесь логический анализ понятий, известных из элементарной геометрии; можно удовлетвориться теми представлениями о них, которыми мы обладаем, не заботясь о том, насколько они близки к истине.

Предполагая, таким образом, что мы знаем, что́ следует понимать под *прямой линией*, ее *отрезком* и *длиною* этого отрезка, рассмотрим прямую линию Λ, неограниченно продолженную в обе стороны, и отрезок A_0A_1 любой длины на ней. Назовем A_0 *началом*, или *точкой* 0, а A_1 — *точкой* 1, и будем рассматривать эти точки как представляющие числа 0 и 1.



Фиг. 1

Для того чтобы получить точку, представляющую положительное рациональное число $r = \frac{p}{q}$, выберем точку A_r так, чтобы

$$\frac{A_0A_r}{A_0A_1} = r,$$

где A_0A_r — отрезок прямой, расположенный по ту же сторону от A_0, что и отрезок A_0A_1. Направление от A_0 к A_1 мы всегда будем предполагать идущим слева направо, если, как на фиг. 1, прямая начерчена горизонтально. Для того чтобы получить точку, представляющую отрицательное рациональное число $r = -s$, естественно рассматривать длину как величину алгебраическую, принимающую положительные значения, если она измеряется в одном направлении (именно в направлении от A_0 к A_1), и отрицательные значения, если она измеряется в противоположном направлении, так что $AB = -BA$.

Тогда точку A_{-s}, представляющую число $r = -s$, следует определить условием:

$$A_0A_{-s} = -A_{-s}A_0 = -A_0A_s.$$

Таким образом, мы получаем точку A_r на прямой, соответствующую любому, положительному или отрицательному, значению рационального числа r, причем

$$A_0A_r = r \cdot A_0A_1,$$

или, если мы возьмем $A_0 A_1$ за единицу длины и будем писать $A_0A_1 = 1$, то

$$A_0A_r = r.$$

Точки A_r мы будем называть *рациональными точками* прямой.

3. Иррациональные числа. Если читатель начнет отмечать на прямой все точки, соответствующие рациональным числам с знаменателями 1, 2, 3, ..., то он без труда убедится в том, что прямую можно как угодно густо покрыть рациональными точками. Точнее это можно выразить следующим образом: *на любом отрезке BC прямой Λ можно найти сколь угодно большое число рациональных точек.*

Допустим, например, что BC целиком помещается в отрезке A_1A_2. Очевидно, что если мы выберем положительное целое число k так, что

$$k \cdot BC > 1,^{1)} \tag{1}$$

и разделим A_1A_2 на k равных частей, то по крайней мере одна из точек деления должна попасть внутрь BC и быть отличной от B и от C. Пусть это будет точка P. Действительно, если бы такая точка P не существовала, то отрезок BC целиком помещался бы в одной из k частей, на которые был разбит отрезок A_1A_2, что противоречит условию (1). Но точка P, очевидно, соответствует некоторому рациональному числу с знаменателем k, и, следовательно, на отрезке BC имеется по крайней мере одна рациональная точка P, отличная от концов этого отрезка. Но такое же рассуждение показывает, что найдется рациональная точка Q и между B и P, другая между B и Q и т. д. Таким образом, как мы и утверждали, на отрезке BC можно найти сколько угодно рациональных точек. Это положение мы можем выразить и так: отрезок BC содержит *бесконечно много* рациональных точек.

Смысл такой фразы, как „*бесконечно много*“, в предложениях типа „отрезок BC содержит бесконечно много рациональных точек“ или „существует бесконечно много положительных целых чисел“, будет подробнее рассмотрен в гл. IV. Утверждение, что „существует бесконечно много поло-

---

[1]) Предположение, что это возможно, равносильно принятию так называемой аксиомы Архимеда.

жительных целых чисел“ означает, что „если дано любое сколь угодно большое положительное целое число n, то можно найти более n положительных целых чисел“. Это, очевидно, справедливо, каково бы ни было n, например, для $n = 100\,000$, или $n = 100\,000\,000$. Это утверждение означает в точности то же, что и следующее: „мы можем найти *сколь угодно много* положительных целых чисел“.

Читатель без труда убедится в справедливости следующего утверждения, которое по существу эквивалентно тому, что было доказано в п. 2 настоящей главы: если дано любое рациональное число r и любое положительное целое число n, то можно найти рациональные числа по обе стороны от r, отличающиеся от r меньше, чем на $1/n$. Это же предложение мы будем выражать и так: по обе стороны от r можно найти рациональные числа, отличающиеся *сколь угодно мало* от r. Аналогично, если даны любые рациональные числа r и s, мы можем вставить между ними цепочку рациональных чисел, в которой каждый член будет сколь угодно мало отличаться от члена, следующего за ним. Это означает, конечно, что разность между любыми двумя соседними членами этой цепочки будет меньше, чем $1/n$, где n — любое заданное положительное целое число.

Эти соображения могут навести читателя на мысль о том, что можно получить достаточно правильное представление о структуре прямой линии, если считать ее составленной просто из рациональных точек, лежащих на ней. И несомненно, что если бы мы представили себе прямую линию составленной исключительно из рациональных точек, т. е. отбросили бы все ее другие точки (если они существуют), то получившийся образ обладал бы большинством тех свойств, которыми здравый смысл наделяет прямую линию. Этот образ был бы, грубо говоря, весьма похож на прямую линию.

Однако небольшое дополнительное рассмотрение показывает, что такая точка зрения приводит к серьезным затруднениям.

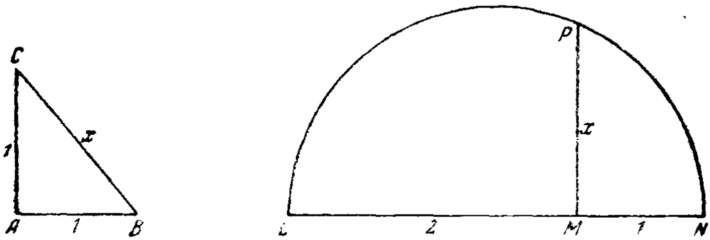
Рассмотрим этот вопрос с точки зрения обычного здравого смысла, и возьмем некоторые свойства прямой линии, которыми она должна обладать, если она отвечает нашему представлению о ней, полученному из элементарной геометрии.

Прямая линия должна быть составлена из точек, и любой ее отрезок должен быть составлен из всех точек, которые лежат между его концами. Каждому такому отрезку должно быть сопоставлено некоторое понятие, называемое его *длиной*, которое должно иметь характер *величины*, допускающей *численное измерение* относительно любой данной единичной длины, причем эти длины отрезков должны комбинироваться друг с другом по обычным правилам алгебры путем сложения или умножения. Далее, должно быть возможным построение отрезка, длина которого равна сумме или произведению любых двух данных длин. Если длина PQ вдоль некоторой прямой равна a и длина QR вдоль той же прямой равна b, то длина PR должна быть равна $a+b$. Более того, если длины OP и OQ вдоль некоторой прямой равны соответственно 1 и a и длина OR вдоль некоторой другой прямой равна b и если мы определим длину OS по построению Эвклида (кн. VI, 12) как четвертую пропорциональную к OP, OQ, OR, то эта длина должна быть равна ab — алгебраической четвертой пропорциональной к 1, a, b. Вряд ли необходимо особо отметить, что таким образом определенные суммы и произведения должны подчиняться обычным „законам алгебры“, а именно:

$$a+b=b+a,\quad a+(b+c)=(a+b)+c,$$

$$ab=ba,\quad a(bc)=(ab)c,\quad a(b+c)=ab+ac.$$

Длины наших линий должны также подчиняться целому ряду очевидных законов, относящихся не только к равенствам, но и к неравенствам. Так, например, если A, B, C — три точки, лежащие вдоль Λ слева направо, то должно выполняться неравенство $AB < AC$ и т. д. Кроме того должно быть возможным определение на нашей основной прямой Λ такой точки P, что A_0P равно любому данному отрезку, взятому вдоль Λ или вдоль любой другой прямой линии. Все эти свойства прямой линии и многие другие содержатся в предпосылках нашей элементарной геометрии.



Фиг. 2

Очень легко показать, что представление о прямой линии как состоящей из ряда точек, каждая из которых соответствует рациональному числу, никак не может удовлетворить всем этим требованиям. Существует, например, много элементарных геометрических построений длины x такой, что $x^2=2$. Так мы можем построить равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 1$. Тогда, если $BC = x$, то $x^2 = 2$. Или мы можем определить длину x с помощью построения Эвклида (кн. VI, 13) средней пропорциональной к 1 и 2, как показано на фиг. 2. Из наших требований следует, таким образом, существование длины, измеряемой числом x, и точки P на Λ, таких, что

$$A_0P = x,\quad x^2 = 2.$$

Но легко видеть, что *не существует рационального числа, квадрат которого равен* 2. Можно даже утверждать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — любая положительная несократимая дробь, если только m и n не являются оба квадратами целых чисел.

Допустим, что

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{m}{n},$$

где p не имеет общего делителя с q, а m не имеет общего делителя с n. Тогда $np^2=mq^2$. Каждый делитель q^2 должен быть делителем np^2, а так как p и q не имеют общего делителя, то каждый делитель q^2 должен быть делителем n. Следовательно $n=\lambda q^2$, где λ — целое число. Но отсюда следует, что $m=\lambda p^2$, а так как m и n не имеют общего делителя, λ должно быть равно единице. Таким образом $m=p^2$, $n=q^2$, что и требовалось доказать. Беря, в частности, $n=1$, мы видим, что целое число не может быть квадратом рационального числа, если это рациональное число само не является целым.

Итак, оказывается, что из наших требований следует существование числа x и точки P, не являющейся ни одной из уже построенных рациональных точек таких, что $A_0P=x$, $x^2=2$, и мы пишем (как читатель знает из элементарной алгебры) $x=\sqrt{2}$.

Представляет интерес следующее, отличное от предыдущего, доказательство того, что квадрат рационального числа не может быть равен 2.

Допустим, что $\frac{p}{q}$ — положительная несократимая дробь, для которой $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, т. е. $p^2=2q^2$. Нетрудно видеть, что отсюда следует соотношение $(2q-p)^2=2(p-q)^2$, откуда видно, что $\frac{2q-p}{p-q}$ также является дробью, квадрат которой равен 2. Но из очевидного соотношения $q<p<2q$ следует, что $0<p-q<q$. Таким образом, должна существовать дробь, равная $\frac{p}{q}$ и имеющая меньший знаменатель, что противоречит предположению несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

Примеры II. 1. Показать, что не существует рационального числа, куб которого равен 2.

2. Показать, что, вообще, несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ не может быть кубом рационального числа, если p и q не являются оба кубами целых чисел.

3. Следующее более общее предложение, принадлежащее Гауссу, содержит предыдущие как частные случаи: *алгебраическое уравнение*

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0$$

с целочисленными коэффициентами не может иметь рациональных нецелых корней.

[Допустим, что уравнение имеет корень $\frac{a}{b}$, где a и b — взаимно простые целые числа и b положительно. Подставляя в уравнение $\frac{a}{b}$ вместо x

и умножая на b^{n-1}, найдем, что

$$-\frac{a^n}{b} = p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} b + \ldots + p_n b^{n-1},$$

т. е. что несократимая дробь равна целому числу. Таким образом, $b = 1$ и корень равен a. Ясно, что a должно быть делителем p_n. Вообще, если a/b является корнем уравнения $p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$, то a является делителем p_n, а b — делителем p_0.]

4. Показать, что если $p_n = 1$ и ни одно из выражений

$$1 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots, \quad 1 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots$$

не равно нулю, то уравнение не может иметь рациональных корней*).

5. Найти рациональные корни (или доказать, что таковых нет) уравнения

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10 = 0.$$

[Корни могут быть только целочисленными. Следовательно, ± 1, ± 2, ± 5, ± 10 являются единственно возможными значениями корней. Находятся ли среди этих значений корни уравнения, или нет, может быть установлено пробами.]

4. Иррациональные числа *(продолжение)*. В результате нашего геометрического представления рациональных чисел выяснилась целесообразность расширения нашего понятия о „числе“ путем введения чисел нового рода.

К такому же выводу мы могли бы придти и без применения геометрической терминологии. Одной из центральных проблем алгебры является решение таких уравнений, как

$$x^2 = 1, \quad x^2 = 2.$$

Первое из них имеет два рациональных корня: 1 и —1. Но если наше понятие о числе будет ограничено рациональными числами, то мы можем только сказать, что второе уравнение не имеет корней, и то же самое будет иметь место для таких уравнений, как $x^3 = 2$, $x^4 = 7$. Этих фактов уже достаточно для того, чтобы признать целесообразность некоторого обобщения нашего понятия о числе, если такое обобщение окажется возможным.

Рассмотрим подробнее уравнение $x^2 = 2$.

Мы уже видели, что не существует рационального числа x, которое удовлетворяло бы этому уравнению. Квадрат всякого рационального числа либо меньше, либо больше двух. Мы можем поэтому разбить все положительные рациональные числа (рассмотрением которых мы пока ограничиваемся) на два класса, из которых один содержит все рациональные числа с квадратом меньшим двух, а другой — все рациональные числа с квадратом большим двух. Назовем первый из этих классов *классом L*, или *нижним классом*, или *левым классом*, а второй — *классом R*, или *верхним классом*, или *правым классом*. Очевидно, что каждое число из класса R больше всех чисел из

*) Имеется в виду уравнение из примера II. 3. *(Прим. перев.)*

класса L. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что в классе L можно найти число, квадрат которого хотя и меньше двух, но отличается от двух сколь угодно мало, а в классе R — число, квадрат которого хотя и больше двух, но также отличается от двух сколь угодно мало. Действительно, если мы будем извлекать при помощи известного арифметического алгорифма квадратный корень из двух, то получим ряд рациональных чисел, а именно,

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots,$$

квадраты которых

$$1,\ 1{,}96,\ 1{,}9881,\ 1{,}999396,\ 1{,}99996164,\ \ldots$$

все меньше двух, но все более и более приближаются к двум. Взяв достаточно большое число знаков, даваемых указанным алгорифмом, мы можем получить как угодно близкое приближение. Если же мы увеличим на единицу последнюю цифру в каждом из этих приближений, то получим ряд рациональных чисел

$$2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ 1{,}4143,\ \ldots,$$

квадраты которых

$$4,\ 2{,}25,\ 2{,}0164,\ 2{,}002225,\ 2{,}00024449,\ \ldots$$

все больше двух, но приближаются к двум как угодно близко.

Хотя предыдущее рассуждение, вероятно, покажется читателю убедительным, оно не имеет того строгого характера, который требуется в современной математике. Формальное доказательство может быть проведено следующим образом. В первую очередь, мы можем найти число в L и число в R, отличающиеся сколь угодно мало друг от друга. Ибо, как мы видели в п. 3, для любых двух данных рациональных чисел a и b можно построить цепочку рациональных чисел, начинающуюся с a и кончающуюся b, в которой любые два следующие друг за другом числа отличаются сколь угодно мало друг от друга. Возьмем теперь число x из L и число y из R и вставим между ними цепочку рациональных чисел, начинающуюся с x и кончающуюся y, в которой любые два следующие друг за другом числа отличаются друг от друга меньше, чем на δ, где δ — любое положительное сколь угодно малое данное рациональное число, такое как, например, 0,01, или 0,0001, или 0,000001. В этой цепочке должно быть последнее число, которое принадлежит к L, и первое, которое принадлежит к R, и эти два рациональных числа отличаются друг от друга меньше чем на δ.

Теперь мы можем доказать, что *в L можно найти число x и в R — число y так, что $2-x^2$ и y^2-2 будут сколь угодно малыми*, например меньшими чем δ. Заменяя в проведенных выше рассуждениях δ на $\frac{1}{4}\delta$, мы видим, что x и y можно выбрать так, что $y-x<\frac{1}{4}\delta$; кроме того, мы, очевидно, можем предположить, что и x и y меньше двух. Тогда

$$y+x<4,\quad y^2-x^2=(y-x)(y+x)<4(y-x)<\delta,$$

а так как $x^2<2$ и $y^2>2$, то $2-x^2$ и y^2-2 будут каждое заведомо меньше чем δ.

Далее следует, что *в L не существует наибольшего, а в R — наименьшего числа*. Пусть x — некоторое произвольное число из L, $x^2 < 2$. Пусть $x^2 = 2 - \delta$. Тогда мы можем найти в L такое число x_1, что x_1^2 отличается от двух меньше чем на δ, и, следовательно, $x_1^2 > x^2$, т. е. $x_1 > x$. Таким образом, в L существуют числа, большие x; а так как x было *произвольным* числом из L, то отсюда следует, что ни одно число из L не может быть больше всех остальных. Следовательно, в L нет наибольшего числа и, аналогично, в R — наименьшего.

5. Иррациональные числа (*продолжение*). Итак, мы разбили положительные рациональные числа на два класса L и R так, что (1) каждое число из R больше каждого числа из L; (2) можно найти число в L и число в R, разность между которыми будет сколь угодно мала, и (3) L не содержит наибольшего, а R — наименьшего числа. Наше интуитивное представление о прямой линии, вопросы элементарной геометрии и элементарной алгебры требуют *существования числа x, большего, чем все числа из L, и меньшего, чем все числа из R, и точки P на Λ такой, что P отделяет все точки, представляющие числа из L, от точек, представляющих числа из R.*

Допустим на минуту, что такое число x существует и что над ним можно производить действия в соответствии с законами алгебры, так что, например, x^2 имеет определенное значение. Тогда x^2 не может быть ни меньше, ни больше двух. Ибо предположим, например, что x^2 меньше двух. Тогда из предыдущего следует, что можно найти такое положительное рациональное число ξ, что ξ^2 лежит между x^2 и 2. Но это означает, что в L имеется число, большее x, что противоречит предположению о том, что x отделяет числа из L от чисел из R. Таким образом, x^2 не может быть меньше двух и, аналогично, x^2 не может быть больше двух. Поэтому мы вынуждены придти к заключению, что $x^2 = 2$, т. е. что x есть то число, которое в алгебре обозначается $\sqrt{2}$. И это число не является рациональным, так как квадрат рационального числа не может быть равен двум. Это — простейший пример так называемого *иррационального* числа.

Предыдущие рассуждения почти дословно применимы и к другим уравнениям, кроме $x^2 = 2$, например, к уравнению $x^2 = N$, где N — любое положительное целое число, не являющееся квадратом целого числа, или к уравнениям

$$x^3 = 3, \quad x^3 = 7, \quad x^4 = 23,$$

или же, как мы вскоре увидим, к уравнению $x^3 = 3x + 8$. Таким образом, мы приходим к убеждению, что существуют иррациональные числа x и точки P на Λ, которые удовлетворяют таким уравнениям, как приведенные выше, даже если соответствующие длины не могут быть построены элементарно-геометрическими методами (в противоположность длине $\sqrt{2}$, которая может быть так построена).

Из учебников элементарной алгебры читатель несомненно знает, что корень уравнения $x^q = n$ записывается в виде $\sqrt[q]{n}$, или $n^{1/q}$, и что смысл символов

$$n^{p/q},\ n^{-p/q}$$

определяется с помощью соотношений

$$n^{p/q} = (n^{1/q})^p,\quad n^{p/q}\, n^{-p/q} = 1.$$

Он также легко восстановит, каким образом, в силу этих определений, известные „правила показателей“, как, например,

$$n^r \times n^s = n^{r+s},\ (n^r)^s = n^{rs}$$

распространяются на случай любых рациональных r и s.

Читатель может теперь следовать по одному из следующих двух возможных путей. Он может, если пожелает, удовлетвориться предположением, что „иррациональные числа“ вроде $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}, \ldots$ существуют и подчиняются алгебраическим законам, с которыми он знаком. Тогда он может избежать более отвлеченных рассмотрений следующих нескольких пунктов и перейти непосредственно к п. 13 и дальнейшим.

Если же он не склонен становиться на столь наивную точку зрения, то ему следует настойчиво порекомендовать с особым вниманием прочесть следующие пункты, в которых эти вопросы рассматриваются подробно.

Примеры III. 1. Найти разности между 2 и квадратами десятичных дробей, приведенных в п. 4 в качестве приближений к $\sqrt{2}$.

2. Найти разности между 2 и квадратами дробей

$$\frac{1}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{7}{5},\quad \frac{17}{12},\quad \frac{41}{29},\quad \frac{99}{70}.$$

3. Показать, что если $\frac{m}{n}$ является хорошим приближением к $\sqrt{2}$, то $\frac{m+2n}{m+n}$ является еще лучшим приближением, и что ошибки этих двух приближений будут разных знаков. Применить этот результат к продолжению ряда приближений, приведенных в предыдущем примере.

4. Если x и y — два приближения к $\sqrt{2}$, соответственно с недостатком и с избытком, и $2 - x^2 < \delta$, $y^2 - 2 < \delta$, то $y - x < \delta$.

5. Уравнение $x^2 = 4$ удовлетворяется при $x = 2$. Проверить, в какой мере рассуждения предыдущих пунктов применимы к этому уравнению (в этих рассуждениях число 2 надо всюду заменить на 4). [Если мы определим классы L, R по предыдущему, то они не содержат *всех* рациональных чисел. Рациональное число 2 является исключением, так как 2^2 не меньше и не больше четырех.]

6. Иррациональные числа *(продолжение).* В п. 4 мы рассматривали разбиение положительных рациональных чисел x на два таких класса, что для чисел одного класса $x^2 < 2$, а для чисел другого класса $x^2 > 2$. Этот способ разбиения является частным случаем так называемого *сечения* в области рациональных чисел. Очевидно, что мы могли бы с одинаковым успехом построить сечение, при котором принадлежность чисел к классам определялась бы неравенствами $x^3 < 2$ и $x^3 > 2$ или $x^4 < 7$ и $x^4 > 7$. Попытаемся теперь установить наиболее общие принципы построения такого сечения в области положительных рациональных чисел.

Допустим, что P и Q означают два взаимно исключающих свойства, одним из которых должно обладать любое положительное рациональное число. Предположим, далее, что каждое число, обладающее свойством P, меньше каждого числа, обладающего свойством Q. Так, например, P может быть свойством „$x^2 < 2$", а Q — свойством „$x^2 > 2$". Тогда мы назовем нижним, или левым, классом L совокупность всех чисел, обладающих свойством P, а верхним, или правым, классом R—совокупность всех чисел, обладающих свойством Q. В общем случае оба класса существуют, но в отдельных случаях один из них может не существовать. Это будет иметь место, когда все числа обладают одним из двух свойств, например, когда P (или Q) является свойством быть рациональным, или положительным числом. В настоящий момент мы, однако, ограничимся случаями, когда оба класса существуют. Тогда, как в п. 4, доказывается, что мы можем найти число из L и число из R, разность между которыми будет сколь угодно мала.

В том частном случае, который мы рассматривали в п. 4, класс L не имел наибольшего, а класс R — наименьшего числа. Но, вообще, L может иметь наибольшее число, а R — наименьшее, и представляется весьма важным рассмотреть все возможные здесь случаи. *Невозможно, чтобы одновременно в L существовало наибольшее и в R — наименьшее число.* Ибо, если — наибольшее число из L и r — наименьшее число из R, так что $l < r$, то $\frac{1}{2}(l + r)$ было бы положительным рациональным числом, лежащим между l и r, т. е. не принадлежащим ни к L, ни к R, а это противоречит нашему предположению о том, что каждое положительное рациональное число принадлежит к одному из двух классов. Таким образом, остаются только три возможности, каждая из которых исключает две остальные. Либо (1) L содержит наибольшее число l, либо (2) R содержит наименьшее число r, либо (3) L не содержит наибольшего и R не содержит наименьшего числа.

Сечение, рассмотренное в п. 4, является примером случая (3). Пример случая (1) мы получим, если в качестве P возьмем „$x^2 \leqslant 1$", а в качестве Q — „$x^2 > 1$"; в этом случае $l = 1$. Если P: „$x^2 < 1$", а Q: „$x^2 \geqslant 1$", то мы получаем пример случая (2), причем $r = 1$. Следует заметить, что взяв за P

свойство „$x^2<1$“, а за Q — свойство „$x^2>1$“, мы вообще не получаем сечения, так как рациональное число 1 выпадает из классификации (ср. примеры III. 5).

7. Иррациональные числа *(продолжение)*. В первых двух случаях мы будем говорить, что сечение *соответствует* положительному рациональному числу a, которое равно l в первом случае и r — во втором. Очевидно, что и, обратно, каждому такому числу a соответствует сечение, которое мы будем обозначать через α[1]. Ибо в качестве P и Q мы можем взять свойства, выражаемые, соответственно, условиями

$$x \leqslant a, \quad x > a,$$

или $x < a$ и $x \geqslant a$. В первом случае a будет наибольшим числом в L, во втором — наименьшим в R. Только эти два сечения и соответствуют любому положительному числу a. Во избежание неоднозначности условимся брать всегда одно из этих двух сечений, например, то, при котором само число принадлежит к *верхнему* классу. Другими словами, условимся рассматривать только такие сечения, при которых нижний класс L не содержит наибольшего числа.

Имея такое соответствие между положительными рациональными числами, с одной стороны, и сечениями, определенными ими, с другой, с точки зрения математических рассмотрений представляется совершенно законным заменить эти числа соответствующими им сечениями и рассматривать символы, содержащиеся в наших формулах, как обозначающие сечения, а не числа. Так, например, $\alpha > \alpha'$ будет означать то же самое, что $a > a'$, если α и α' — сечения, соответствующие a и a'.

Но после того, как мы заменили сами рациональные числа сечениями в области рациональных чисел, мы оказываемся почти вынужденными к обобщению нашей системы чисел. Ибо существуют ведь сечения (как, например, рассмотренное в п. 4), которые *не соответствуют* никакому рациональному числу. Совокупность сечений в области рациональных чисел является более широкой, чем совокупность положительных рациональных чисел: она содержит сечения, соответствующие всем таким числам, и кроме них еще другие сечения. Это обстоятельство и лежит в основе нашего обобщения понятия о числе. Таким образом, мы приходим к следующим определениям, которые будут, однако, несколько расширены в следующем пункте, и поэтому пока должны рассматриваться как предварительные.

Сечение в области положительных рациональных чисел, при котором оба класса существуют и нижний класс не содержит

---

[1]) Мы будем в дальнейшем обозначать рациональные числа латинскими буквами, а соответствующие им сечения — соответствующими греческими буквами.

наибольшего числа, называется **положительным действительным** *числом.*

Положительное действительное число, которое не соответствует никакому положительному рациональному числу, называется положительным **иррациональным** *числом.*

8. Действительные числа. Мы ограничивались до сих пор рассмотрением сечений в области положительных рациональных чисел, которые мы условились называть „положительными действительными числами". Прежде чем перейти к формулировке наших окончательных определений, мы должны несколько изменить нашу точку зрения. Мы будем рассматривать сечения, или разбиения на два класса, не только положительных рациональных чисел, но и всех рациональных чисел, включая нуль, и можем повторить все рассуждения в пп. 6 и 7, относящиеся к сечениям в области положительных рациональных чисел, опуская лишь в соответствующих местах слово „положительные".

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. *Сечение в области рациональных чисел, при котором оба класса существуют и нижний класс не содержит наибольшего числа, называется* **действительным числом,** *или просто* **числом.**

Действительное число, которое не соответствует никакому рациональному числу, называется **иррациональным** *числом.*

Если действительное число соответствует некоторому рациональному числу, то мы будем употреблять термин „рациональное" применительно и к действительному числу.

Термин „рациональное число" получает в связи с нашими определениями двойной смысл. Он может обозначать рациональное число из п. 1 или соответствующее действительное число. Если мы говорим, что $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, то это может быть понято либо как утверждение элементарной арифметики, либо как предложение, относящееся к сечениям в области рациональных чисел. Такого рода двусмысленности часто встречаются в математике и совершенно безопасны, так как связи между различными предложениями в точности совпадают, какая бы интерпретация ни была принята в отношении самих предложений. Из $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ мы заключаем, что $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$; на это заключение никоим образом не влияет сомнение в том, понимаются ли под $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ арифметические дроби или действительные числа. Иногда, конечно, текст, в котором встречается, например, „$\frac{1}{2}$", не оставляет сомнения в том, какая интерпретация имеется в виду. Так, например, когда мы говорим (см. п. 9), что $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{1}{3}}$, мы *должны* понимать под „$\frac{1}{2}$" действительное число $\frac{1}{2}$.

Читатель должен, кроме того, обратить внимание на то обстоятельство, что точной форме определения „действительного числа“, принятого нами, не приписывается никакой особой логической значимости. Мы определили „действительное число“ как сечение, т. е. как пару классов. Мы могли бы с одинаковым успехом определить его как нижний или как верхний класс. В действительности, можно легко определить бесконечно много понятий, каждое из которых будет обладать свойствами действительных чисел. Что является существенным в математике — это то, чтобы математическим символам была бы приписана *некоторая* интерпретация. Обычно этим символам может быть придано *много* интерпретаций, и тогда с точки зрения математики безразлично, какую из них мы примем.

Мы должны теперь различать три случая. Может быть, что все отрицательные рациональные числа принадлежат к нижнему классу, а нуль и все положительные рациональные числа — к верхнему. Это сечение мы описываем как *действительное число нуль*. Или же может быть, что нижний класс содержит некоторые положительные числа. Такое сечение называется *положительным действительным числом*. Наконец, может быть, что некоторые отрицательные числа принадлежат к верхнему классу. Такое сечение называется *отрицательным действительным числом*[1]).

Различие между нашим настоящим определением положительного действительного числа и определеиием, данным в п. 7, состоит в присоединении к нижнему классу нуля и всех отрицательных рациональных чисел. Пример отрицательного действительиого числа можно получить, взяв в качестве свойства P п. 6: $x+1<0$, и в качестве Q: $x+1 \geqslant 0$. Это сечение, очевидно, соответствует отрицательному действительному числу -1. Если бы мы за P взяли $x^3<-2$, а за Q: $x^3>-2$, то мы получили бы отрицательное действительное число, которое не является рациональным.

9. Соотношения величины между действительными числами. Ясно, что поскольку мы расширили наше понятие о числе, мы должны сделать соответствующие расширения наших понятий о равенстве, неравенстве, сложении, умножении и т. д. Мы должны показать, что эти понятия применимы к новым числам и что их расширение может быть осуществлено так, что останутся в силе все обычные законы алгебры и мы сможем оперировать с действительными числами так же, как мы это делали в п. 1 с рациональными числами. Для того чтобы показать это во всей полноте, потребовалось бы слиш-

---

[1]) Существуют также сечения, при которых каждое число принадлежит к нижнему классу, или каждое число принадлежит к верхнему классу. У читателя может возникнуть вопрос, почему мы не рассматриваем также и эти сечения как определяющие некоторые числа, которые можно было бы назвать *действительным числом положительная бесконечность* и *действительным числом отрицательная бесконечность*.

Логических возражений против этого нет, но практически это оказывается неудобным. Наиболее естественные определения сложения и умножения становятся неприменимыми. Кроме того, главным затруднением для начинающего изучать элементы анализа является умение определять точный смысл фраз, содержащих слово „бесконечность“. Опыт показывает, что без необходимости не стоит увеличивать число таких фраз.

ком много времени и места, и поэтому мы ограничимся здесь некоторыми суммарными указаниями, систематическое развитие которых приведет читателя к полному изложению.

Мы будем обозначать действительные числа греческими буквами α, β, γ, ..., рациональные числа, принадлежащие к их нижним и верхним классам, — соответствующими латинскими буквами a, A; b, B; c, C; .... Сами классы мы будем обозначать через (a), (A), ...

Если α и β — два действительных числа, то существуют три возможности:

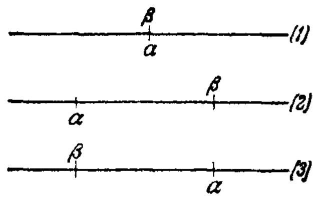
(1) каждое a есть b и каждое A есть B; в этом случае (a) совпадает с (b) и (A) с (B);

(2) каждое a есть b, но не все A суть B; в этом случае (a) есть правильная часть (b) [1] и (B) — правильная часть (A);

(3) каждое A есть B, но не все a суть b.

Эти три случая графически изображены на фиг. 3.

В случае (1) мы пишем $\alpha = \beta$, в случае (2) $\alpha < \beta$ и в случае (3) $\alpha > \beta$. Очевидно, что когда α и β оба рациональны, то эти определения отвечают нашим представлениям о равенстве и неравенстве между рациональными числами, которые мы принимаем за известные. Ясно также, что всякое положительное число больше каждого отрицательного числа.



Фиг. 3

Теперь уместно определить отрицательное число $-\alpha$ по данному положительному числу α. Допустим, что α иррационально. Если (a) и (A) — классы, определяющие α, мы можем определить другое сечение в области рациональных чисел, помещая все числа $-A$ в нижний класс, а все числа $-a$ — в верхний. Определенное таким образом действительное число обозначим через $-\alpha$. Аналогично определяем $-\alpha$, когда α отрицательно; в этом случае $-\alpha$ положительно. Ясно также, что $-(-\alpha) = \alpha$. Из двух чисел α и $-\alpha$ одно всегда положительно. То, которое положительно, мы обозначаем через $|\alpha|$ и называем ***модулем*** или ***абсолютным значением*** α.

В случае, когда α рационально, мы встречаемся с затруднением. В этом случае α принадлежит к (A), и классы $(-A)$, $(-a)$ не определяют действительного числа в смысле п. 8, так как $-\alpha$ принадлежит к нижнему классу, а не к верхнему. Мы должны поэтому изменить наше определение $-\alpha$, обусловив, что если α рационально, то рациональное число $-\alpha$ должно быть отнесено к верхнему классу.

Примеры IV. 1. Доказать, что $0 = -0$.

2. Доказать, что $\beta = \alpha$, $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$, если, соответственно, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$.

[1] Т. е. содержится в (b), но не совпадает с (b).

3. Если $\alpha=\beta$ и $\beta=\gamma$, то $\alpha=\gamma$.
4. Если $\alpha\leqslant\beta$ и $\beta<\gamma$, то $\alpha<\gamma$.
5. Доказать, что $-\beta<-\alpha$, если $\alpha<\beta$.
6. Доказать, что $\alpha>0$, если α положительно, и что $\alpha<0$, если α отрицательно.
7. Доказать, что $\alpha\leqslant|\alpha|$.
8. Доказать, что $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$.

[Все эти результаты являются прямыми следствиями наших определений.]

10. Алгебраические действия над действительными числами. Мы переходим теперь к определению смысла элементарных алгебраических операций, таких как сложение, применительно к общим действительным числам.

(1) *Сложение.* Для определения суммы двух чисел α и β мы рассматриваем следующие два класса: класс (c), содержащий все суммы $c=a+b$, и класс (C), содержащий все суммы $C=A+B$. Ясно, что во всех случаях $c<C$.

Далее, не может существовать более одного рационального числа, не принадлежащего ни к (c), ни к (C). В самом деле, предположим, что существуют два таких числа r и s, причем $r<s$. Тогда и r и s должны быть больше любого c и меньше любого C, а, следовательно, $C-c$ не может быть меньше чем $s-r$. Но

$$C-c=(A-a)+(B-b),$$

и мы можем выбрать a, b, A, B так, что $A-a$ и $B-b$ будут сколь угодно малы. Это же явно противоречит нашему предположению.

Если каждое рациональное число принадлежит либо к (c), либо к (C), то классы (c) и (C) образуют сечение в области рациональных чисел, т. е. определяют некоторое действительное число γ. Если существует одно рациональное число, которое не обладает этим свойством, то мы можем присоединить его к (C). Тогда мы получим сечение, т. е. действительное число γ, которое, очевидно, должно быть рациональным, так как оно соответствует наименьшему числу в (C). *И в том и в другом случае мы называем γ суммою α и β, и пишем:*

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

Если α и β оба рациональны, они являются наименьшими числами в верхних классах (A) и (B). В этом случае ясно, что $\alpha+\beta$ является наименьшим числом в (C), так что наше определение согласуется с нашими прежними представлениями о сложении.

(2) *Вычитание.* Мы определяем $\alpha-\beta$ соотношением

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

Таким образом, расширение понятия о вычитании не представляет новых трудностей.

Примеры V. 1. Доказать, что $\alpha+(-\alpha)=0$.

2. Доказать, что $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

3. Доказать, что $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. [Это следует сразу из того обстоятельства, что классы $(a+b)$ и $(b+a)$, или $(A+B)$ и $(B+A)$, совпадают, так как, например, $a+b=b+a$, когда a и b рациональны.]

4. Доказать, что $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

5. Доказать, что $\alpha-\alpha=0$.

6. Доказать, что $\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)$.

7. Из определения вычитания и примеров 4, 1 и 2 этого пункта следует, что

$$(\alpha-\beta)+\beta=\{\alpha+(-\beta)\}+\beta=\alpha+\{(-\beta)+\beta\}=\alpha+0=\alpha.$$

Поэтому мы можем определить разность $\alpha-\beta=\gamma$ равенством $\gamma+\beta=\alpha$.

8. Доказать, что $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$.

9. Дать определеиие вычитания, не зависящее от определения сложеиия. [Следует определить $\gamma=\alpha-\beta$, исходя из классов (c) и (C), для которых $c=a-B$, $C=A-b$. Нетрудно видеть, что это определение эквивалентно тому, которое было дано в тексте.]

10. Доказать, что

$$||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha\pm\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

11. Алгебраические операции над действительными числами *(продолжение).* (3) *Умножение.* Переходя к умножению, удобнее всего начать с *положительных* чисел и временно вернуться к сечениям в области положительных рациональных чисел, которые мы рассматривали в пп. 4—7. Тогда мы можем поступать аналогично тому, как мы это делали в случае сложения, беря в качестве (c) класс (ab) и в качестве (C) — класс (AB). Рассуждения остаются теми же, за исключением доказательства того, что все рациональные числа, кроме, быть может, одного, принадлежат либо к (c), либо к (C). Это зависит, как и в случае сложения, от того, можем ли мы выбрать a, b, A и B так, чтобы $C-c$ было сколь угодно малым. Здесь мы применяем тождество:

$$C-c=AB-ab=(A-a)B+a(B-b).$$

Отрицательные числа могут быть включены в наше определение, если принять, что для положительных α и β

$$(-\alpha)\beta=-\alpha\beta,\quad \alpha(-\beta)=-\alpha\beta,\quad (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta.$$

Наконец, мы полагаем $(0)\alpha=\alpha(0)=0$ для всех α.

(4) *Деление.* Для того чтобы определить деление, мы начнем с определения обратной величины $\frac{1}{\alpha}$ числа α (отличного от нуля). Ограничиваясь сначала положительными числами и сечениями в области положительных рациональных чисел, мы определяем обратную величину положительного числа α с помощью нижнего класса $\left(\frac{1}{A}\right)$ и верх-

него класса $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Затем мы определяем обратную величину отрицательного числа $-\alpha$ равенством $\frac{1}{(-\alpha)}=-\frac{1}{(\alpha)}$. Наконец, мы определяем $\frac{\alpha}{\beta}$ равенством

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\times\frac{1}{(\beta)}.$$

Теперь мы в состоянии применить ко всем действительным числам как рациональным, так и иррациональным, все идеи и методы элементарной алгебры. Мы не предполагаем здесь, естественно, вдаваться во все подробности. Значительно целесообразнее и интереснее сосредоточить наше внимание на некоторых специальных, но особенно важных классах иррациональных чисел.

Примеры VI. Доказать теоремы, выраженные следующими формулами:

1. $\alpha\times 1=1\times\alpha=\alpha$. 2. $\alpha\times(1/\alpha)=1$. 3. $\alpha\beta=\beta\alpha$.
4. $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$. 5. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. 6. $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.
7. $|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|$.

12. Число $\sqrt{2}$. Вернемся на один момент к тому иррациональному числу, которое мы рассматривали в пп. 4—5. Там мы построили сечение с помощью неравенств $x^2<2$, $x^2>2$. Это было сечением в области только положительных рациональных чисел; но если мы заменим его (как было разъяснено в п. 8) сечением в области всех рациональных чисел, то мы можем это сечение или число обозначить через $\sqrt{2}$.

Классы, с помощью которых определяется произведение $\sqrt{2}$ на самого себя, суть (aa'), где a и a' — положительные рациональные числа, квадраты которых меньше двух, и (AA'), где A и A' — положительные рациональные числа, квадраты которых больше двух. Эти классы исчерпывают все положительные рациональные числа, кроме одного, которым может быть только само число 2. Итак

$$(\sqrt{2})^2=\sqrt{2}\sqrt{2}=2.$$

С другой стороны

$$(-\sqrt{2})^2=(-\sqrt{2})(-\sqrt{2})=\sqrt{2}\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2.$$

Таким образом, *уравнение $x^2=2$ имеет два корня: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.* Аналогично мы могли бы рассматривать уравнения $x^2=3$, $x^3=7$, ... и соответствующие иррациональные числа $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, ...

13. Квадратичные иррациональности. Число вида $\pm\sqrt{a}$, где a — положительное рациональное число, не являющееся квадратом другого рационального числа, мы назовем *чистой квадратичной ирра-*

циональностью. Число вида $a \pm \sqrt{b}$, где a рационально, а $\sqrt{b}$ — чистая квадратичная иррациональность, иногда называется смешанной квадратичной иррациональностью.

Оба числа $a \pm \sqrt{b}$ являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - b = 0.$$

Обратно, уравнение $x^2 + 2px + q = 0$, где p и q рациональны и $p^2 - q > 0$, имеет своими корнями две квадратичные иррациональности $-p \pm \sqrt{p^2 - q}$.

Единственным классом иррациональных чисел, существование которых следовало требовать на основании геометрических рассмотрений п. 3, являются эти квадратичные иррациональности, чистые и смешанные, а также более сложные иррациональности, которые могут быть выражены формулами, содержащими повторное извлечение квадратных корней, как, например,

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Геометрическое построение отрезка, длина которого равна любому числу такого вида, может быть легко осуществлено, в чем читатель может без труда убедиться сам. Что *только* такие иррациональные числа могут быть построены методами Эвклида (т. е. с помощью только циркуля и линейки), будет доказано несколько позже (см. гл. II, Разные примеры, 22). Это свойство квадратичных иррациональностей делает их особенно интересными.

Примеры VII. 1. Дать геометрические построения для

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

2. Квадратное уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$ имеет два действительных корня [1], если $b^2 - ac > 0$. Предположим, что a, b, c рациональны. Тогда все три коэффициента можно считать целыми, так как мы можем умножить все уравнение на общее наименьшее кратное их знаменателей.

Читателю известно, конечно, что корни этого уравнения равны $\dfrac{\{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}\}}{a}$. Легко построить эти длины геометрически, построив сначала $\sqrt{b^2 - ac}$. Приведем другое, более элегантное, хотя и не столь прямое, построение [2].

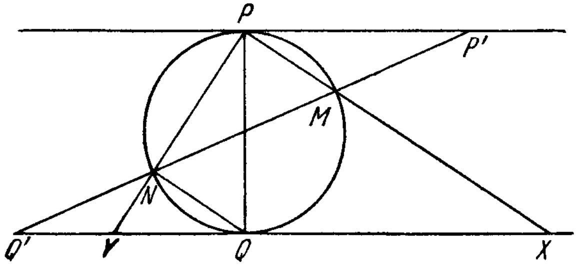
Проведем окружность единичного радиуса, диаметр PQ и касательные в концах этого диаметра.

---

[1] Т. е. существуют два значения x, для которых $ax^2 + 2bx + c = 0$. Если $b^2 - ac < 0$, то таких значений не существует. Читатель вспомнит, что в учебниках элементарной алгебры говорится, что такое уравнение имеет „комплексные" корни. Смысл этого утверждения будет разъяснен в гл. III. Когда $b^2 = ac$, уравнение имеет только один корень. Обычно говорят, что и в этом случае уравнение имеет два корня, именно, два совпадающих корня, но это только условность.

[2] Это построение взято мной из книги Клейна: F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (Leipzig, 1895).

Отложим $PP' = -2\frac{a}{b}$ *и* $QQ' = -\frac{c}{2b}$, *учитывая знаки*[1] (фиг. 4). *Соединим* P' *и* Q' *прямой, которая пересекает окружность в точках* M *и* N. *Проведем* PM *и* PN, *которые пересекут* QQ' *в* X *и* Y. *Тогда* QX *и* QY *представляют корни уравнения по величине и по знаку.*



Фиг. 4

Доказательство весьма просто, и мы оставляем его в качестве упражнения читателю. Другим, даже более простым, построением является следующее. *Возьмем отрезок* AB *единичной длины. Проведем* $BC = -\frac{2b}{a}$ *перпендикулярно к* AB *и* $CD = \frac{c}{a}$ *перпендикулярно к* BC *в направлении* BA. *На* AD *как на диаметре построим окружность, пересекающую* BC *в* X *и* Y. *Тогда* BX *и* BY *являются корнями.*

3. Если ac положительно, то PP' и QQ' имеют одно и то же направление. Проверить, что $P'O'$ не пересечется с окружностью, если $b^2 < ac$, и будет касаться ее, если $b^2 = ac$. Проверить также, что если $b^2 = ac$, то во втором построении окружность будет касаться BC.

4. Доказать, что

$$\sqrt{pq} = \sqrt{p} \times \sqrt{q}, \quad \sqrt{p^2 q} = p\sqrt{q}.$$

14. Некоторые теоремы о квадратичных иррациональностях. Две чистые квадратичные иррациональности будем называть *подобными*, если они являются рациональными кратными одной и той же иррациональности. Так,

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

и, следовательно, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{\frac{25}{2}}$ — подобные иррациональности. С другой стороны, если M и N — положительные взаимно простые числа, причем ни одно из них не является квадратом целого числа, то $\sqrt{M}$ и $\sqrt{N}$ не являются подобными иррациональностями.

Действительно, допустим, что

$$\sqrt{M} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{t}{u}}, \quad \sqrt{N} = \frac{r}{s}\sqrt{\frac{t}{u}},$$

[1] На фигуре изображен случай, когда b и c имеют одинаковый, а a — противоположный знак. Рекомендуем читателю начертить фигуры для других случаев.

где все буквы обозначают целые числа. Тогда $\sqrt{MN}$, очевидно, является рациональным числом, и, следовательно (см. пример II. 3), целым. Таким образом, $MN=P^2$, где P — целое число. Пусть $a, b, c, \ldots$ — простые делители числа P, так что

$$MN=a^{2\alpha}b^{2\beta}c^{2\gamma}\ldots,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — положительные целые числа. Тогда MN делится на $a^{2\alpha}$, откуда следует, что либо M делится на $a^{2\alpha}$, либо N делится на $a^{2\alpha}$, либо M и N оба делятся на a^{α}. Но эта последняя возможность должна быть отброшена, так как M и N, по предположению, взаимно простые числа. Это рассуждение применимо к каждому из множителей $a^{2\alpha}$, $b^{2\beta}$, $c^{2\gamma}, \ldots$, так что M должно делиться на некоторые из этих множителей, а N — на остальные. Но тогда

$$M=P_1^2, \quad N=P_2^2,$$

где P_1^2 означает произведение некоторых из множителей $a^{2\alpha}$, $b^{2\beta}$, $c^{2\gamma}, \ldots$, а P_2^2 — произведение остальных. Следовательно, M и N оба являются квадратами целых чисел, что противоречит нашему предположению.

ТЕОРЕМА. *Если A, B, C, D рациональны и*

$$A+\sqrt{B}=C+\sqrt{D},$$

то либо $A=C$ и $B=D$, либо B и D являются каждое квадратом рационального числа.

Действительно, $B-D$ рационально и

$$\sqrt{B}-\sqrt{D}=C-A$$

также рационально. Если B не равно D (в противном случае также и A равно C), то мы найдем, что

$$\sqrt{B}+\sqrt{D}=(B-D)/(\sqrt{B}-\sqrt{D})$$

также рационально. Следовательно, $\sqrt{B}$ и $\sqrt{D}$ рациональны.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $A+\sqrt{B}=C+\sqrt{D}$, тогда и $A-\sqrt{B}=C-\sqrt{D}$ (если только $\sqrt{B}$ и $\sqrt{D}$ не являются оба рациональными числами).*

Примеры VIII. 1. Доказать, не применяя результатов предыдущего пункта, что $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ не являются подобными иррациональностями.

2. Доказать, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{1/a}$, где a рационально, — подобные иррациональности (если они вообще не рациональны).

3. Если a и b рациональны, то $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ не может быть рациональным без того, чтобы $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ были рациональными. То же справедливо и относительно $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, если $a\neq b$.

4. Если
$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D},$$
то либо $A=C$ и $B=D$, либо $A=D$ и $B=C$, либо $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ все рациональны или являются подобными иррациональностями. [Возвести в квадрат данное соотношение и применить теорему предыдущего пункта.]

5. Ни $(a+\sqrt{b})^3$, ни $(a-\sqrt{b})^3$ не могут быть рациональными, если $\sqrt{b}$ иррационально.

6. Доказать, что если $x=p+\sqrt{q}$, где p и q рациональны, то x^m, где m — любое целое число, может быть представлено в виде $P+Q\sqrt{q}$, где P и Q рациональны. Например,
$$(p+\sqrt{q})^2=p^2+q+2p\sqrt{q},\ (p+\sqrt{q})^3=p^3+3pq+(3p^2+q)\sqrt{q}.$$
Отсюда следует, что любой многочлен
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$
с рациональными коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$ может быть представлен в таком же виде: $P+Q\sqrt{q}$.

7. Если $a+\sqrt{b}$, где b не есть точный квадрат, является корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, то $a-\sqrt{b}$ также будет корнем этого уравнения.

8. Представить $\dfrac{1}{p+\sqrt{q}}$ в виде, указанном в примере 6. [Умножить числитель и знаменатель на $p-\sqrt{q}$.]

9. Вывести из примеров 6 и 8, что любое выражение вида $\dfrac{G(x)}{H(x)}$, где $G(x)$ и $H(x)$ — многочлены от x с рациональными коэффициентами, может быть представлено в виде $P+Q\sqrt{q}$, где P и Q рациональны.

10. Если p, q и p^2-q положительны, мы можем представить $\sqrt{p+\sqrt{q}}$ в форме $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, где
$$x=\frac{1}{2}\{p+\sqrt{p^2-q}\},\quad y=\frac{1}{2}\{p-\sqrt{p^2-q}\}.$$

11. Найти условия, при которых $\sqrt{p+\sqrt{q}}$, где p и q рациональны, может быть представлено в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, где x и y рациональны.

12. Если a^2-b положительно, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы
$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$
было рационально, является рациональность чисел
$$\sqrt{a^2-b} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{2}\{a+\sqrt{a^2-b}\}}.$$

15. Континуум. Совокупность всех действительных чисел, рациональных и иррациональных, называется *арифметическим континуумом.*

Мы будем предполагать, что прямая линия Λ, рассмотренная в п. 2, состоит из точек, соответствующих всем числам арифметического континуума, и никаких других точек не содержит [1]). Точки прямой, совокупность которых можно назвать *линейным континуумом,* представляют тогда достаточно удобный образ арифметического континуума.

Мы достаточно подробно рассмотрели основные свойства небольшого числа классов действительных чисел, таких как, например, рациональные числа или квадратичные иррациональности. Приведем несколько дополнительных примеров, чтобы показать, насколько частными являются рассмотренные специальные классы чисел, и какую, грубо говоря, незначительную часть бесконечного разнообразия чисел, образующих континуум, они составляют.

(1) Рассмотрим более сложные иррациональные выражения, как, например,

$$z=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}.$$

Предположение существования z может быть обосновано следующим образом. Сначала, как в п. 12, мы показываем, что существует число $y=\sqrt{15}$, для которого $y^2=15$, а затем, как в п. 10, мы можем определить числа $4+\sqrt{15}$ и $4-\sqrt{15}$. Далее, рассмотрим уравнение для z_1

$$z_1^3=4+\sqrt{15}.$$

Правая часть этого уравнения иррациональна. Но те же рассуждения, которые привели нас к предположению существования действительного числа x, для которого $x^3=2$ (или любому другому рациональному числу), приведут нас к заключению о существовании такого числа z_1, для которого $z_1^3=$ $=4+\sqrt{15}$. Так мы определяем $z_1=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$, и аналогично определяем $z_2=\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$. Наконец, как в п. 10, мы полагаем $z=z_1+z_2$.

Легко проверить, что

$$z^3=3z+8,$$

и нетрудно дать непосредственное доказательство существования единственного числа, удовлетворяющего этому уравнению.

В первую очередь z, если оно существует, должно быть положительно. Ибо $z=-\zeta$ дает $\zeta^3-3\zeta+8=0$ или $3-\zeta^2=8/\zeta$. Но это невозможно, если ζ положительно, так как тогда $\zeta^2<3$, $\zeta<2$ и, следовательно, $8/\zeta>4$, тогда как $3-\zeta^2<3$.

Далее, уравнение не может удовлетворяться двумя различными числами z_1 и z_2. Ибо, если

$$z_1^3=3z_1+8, \qquad z_2^3=3z_2+8,$$

то z_1 и z_2 положительны и $z_1^3>8$, $z_2^3>8$, или $z_1>2$, $z_2>2$, а это невозможно, ибо, вычитая из первого уравнения второе и деля на z_1-z_2, мы получаем, что

$$z_1^2+z_1z_2+z_2^2=3.$$

Таким образом, существует не более одного z, для которого $z^3=3z+8$, и это z не может быть рациональным, так как каждый рациональный корень

[1]) Это предположение является лишь гипотезой, принятой, во-первых, в силу того, что она достаточна для целей нашей геометрии, и, во-вторых, потому, что она снабжает нас удобной геометрической иллюстрацией аналитических процессов. Так как мы применяем геометрический язык только для иллюстраций, изучение оснований геометрии не входит в нашу задачу.

этого уравнения должен быть целочисленным и делителем 8 (см. пример II. 3), но ни одно из чисел 1, 2, 4, 8 не удовлетворяет уравнению.

Мы можем теперь разбить положительные рациональные числа x на два класса L, R, в зависимости от того, будет ли $x^3 < 3x + 8$, или $x^3 > 3x + 8$. Если x принадлежит к R и $y > x$, то y тоже принадлежит к R, так как $y > x > 2$ и

$$y^3 - 3y - (x^3 - 3x) = (y - x)(y^2 + xy + x^2 - 3) > 0.$$

Аналогично мы можем показать, что если x принадлежит к L и $y < x$, то y тоже принадлежит к L.

Наконец, ясно, что оба класса L и R существуют. Они определяют сечение в области положительных рациональных чисел, т. е. положительное действительное число z, которое должно удовлетворять нашему уравнению.

Читатель, который знает, как решаются кубические уравнения по методу Кардано, сможет найти явное выражение для z непосредственно из уравнения.

(2) Рассуждения, примененные выше к уравнению $x^3 = 3x + 8$, могут быть также проведены и для уравнения

$$x^5 = x + 16$$

(хотя они в этом случае будут несколько более сложными), и приведут нас к заключению, что существует единственное положительное число, которое удовлетворяет этому уравнению. В этом случае, однако, невозможно получить явное выражение для x, составленное из комбинации корней каких бы то ни было степеней. Известно (хотя доказательство этого предложения весьма трудно), что *в общем случае* невозможно найти такие выражения для корня уравнения степени большей четырех. Таким образом, кроме иррациональных чисел, которые могут быть выражены как чистые или смешанные квадратичные иррациональности или как комбинации корней высших степеней из рациональных чисел, существуют другие иррациональные числа, которые также являются корнями алгебраических уравнений, но не могут быть так выражены. Такие выражения могут быть найдены только в самых специальных случаях.

(3) Но даже после того, как мы прибавим к нашему перечню иррациональных чисел корни уравнений (таких, как, например, $x^5 = x + 16$), которые не могут быть выражены с помощью комбинаций корней любых степеней из рациональных чисел, мы далеко еще не исчерпаем всех родов иррациональных чисел, содержащихся в континууме. Проведем окружность с диаметром A_0A_1, т. е. равным единице. Естественно предположить, что эта окружность обладает некоторой длиной, которую можно измерить. Эта длина обычно обозначается через π. Доказано (хотя доказательство также весьма сложно), что число π не является корнем никакого алгебраического уравнения с целочисленными коэффициентами, как, например,

$$\pi^2 = n, \quad \pi^3 = n, \quad \pi^5 = \pi + n,$$

где n — целое число. Таким образом, мы встретились с иррациональным числом, которое не принадлежит ни к одному из классов иррациональных чисел, рассмотренных нами до сих пор. Это число π не является каким-либо изолированным особым случаем. Наоборот, только специальные классы иррациональных чисел являются корнями алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами, и среди них еще более специальные классы выражаются через корни из рациональных чисел.

16. Непрерывное действительное переменное. „Действительные числа" можно рассматривать с двух точек зрения. Мы можем рассматривать их как *совокупность*, т. е. как арифметический континуум, определенный в предыдущем пункте, или *индивидуально*. А когда мы рассматриваем их индивидуально, мы можем иметь в виду какое-нибудь *определенное* число (как, например, $1, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ или π) или мы можем думать о *любом неопределенном* числе *числе* x. Этот последний случай мы имеем в виду, когда говорим, что „x есть число", „x есть длина" и т. д., или когда делаем такие утверждения, как „x может быть рациональным или иррациональным". Это x, которое встречается в приведенных и подобных им предложениях, называется *непрерывным действительным переменным*, а индивидуальные числа называются *значениями* переменного.

„Переменное", вообще говоря, не должно быть обязательно непрерывным. Вместо того чтобы рассматривать совокупность *всех* действительных чисел, мы можем рассматривать некоторую частичную совокупность, содержащуюся в ней, как, например, совокупность рациональных чисел, или совокупность положительных целых чисел. Возьмем последний случай. Тогда в предложениях, относящихся к *любому* положительному целому числу или к *неопределенному* положительному целому числу, таких, как „n либо четное, либо нечетное", n называется *положительным целочисленным переменным*, а отдельные положительные целые числа являются его значениями.

Естественно, что „x" и „n" являются только примерами переменных: переменного, „область изменения" которого состоит из всех действительных чисел, и переменного, область изменения которого состоит из положительных целых чисел. Эти примеры — наиболее важные, но нам часто придется рассматривать и другие случаи. Например, в теории десятичных дробей мы можем обозначить через x любую цифру в выражении любого числа в виде десятичной дроби. Тогда x является переменным, но переменным, которое принимает только десять различных значений, а именно, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мы можем, короче сказать, что переменные, которые мы будем рассматривать, суть классы целых или действительных чисел и что значения этих переменных суть числа соответствующих классов.

17. Сечения в области действительных чисел. В пп. 4—7 мы рассматривали „сечения" в области рациональных чисел, т. е. разбиения рациональных чисел (или только положительных рациональных чисел) на два класса L и R, обладающих следующими характеристическими свойствами:

(1) каждое число рассматриваемого типа принадлежит одному и только одному из этих классов;

(2) оба класса существуют;

(3) каждое число из класса L меньше любого числа из класса R.

Ничто не мешает нам приложить эту идею и к совокупности всех действительных чисел, что, как читатель увидит из дальнейших глав, оказывается операцией чрезвычайной важности.

Предположим[1], стало быть, что P и Q — два взаимно исключающих свойства, одним из которых обладает каждое действительное число. Предположим, далее, что любое число, обладающее свойством P, меньше каждого числа, обладающего свойством Q. Совокупность чисел, обладающих свойством P, мы называем ***нижним***, или ***левым, классом*** L, а совокупность чисел, обладающих свойством Q — ***верхним***, или ***правым, классом*** R.

Так, например, P может быть: $x \leqslant \sqrt{2}$, а Q: $x > \sqrt{2}$. Важно заметить, что пара свойств, достаточных для определения сечения в области рациональных чисел, может быть недостаточной для определения сечения в области действительных чисел. Такое положение имеет место, например, с парой свойств: „$x < \sqrt{2}$" и „$x > \sqrt{2}$", или (если мы ограничимся положительными числами) „$x^2 < 2$" и „$x^2 > 2$". Каждое рациональное число обладает одним или другим из этих свойств, но в области действительных чисел $\sqrt{2}$ не подпадает под классификацию.

Теперь возможны два случая[2]. Либо L содержит наибольшее число l, либо R содержит наименьшее число r. Оба эти случая не могут иметь место одновременно. Ибо если L содержит наибольшее число l и R — наименьшее число r, то число $\frac{1}{2}(l+r)$ было бы больше всех чисел из L и меньше всех чисел из R и, таким образом, не могло бы принадлежать ни к одному из классов. С другой стороны, один из этих случаев должен обязательно иметь место[3].

Обозначим через L_1 и R_1 классы, состоящие из рациональных чисел, принадлежащих, соответственно, к L и R. Тогда классы L_1 и R_1 определяют сечение в области рациональных чисел. Следует различать два случая.

---

[1] Рассуждение, к которому мы приступаем, во многом похоже на проведенное в п. 6. Мы не пытались избежать некоторых повторений. Идея „сечения", впервые выдвинутая Дедекиндом в его знаменитой брошюре *Непрерывность и иррациональные числа*, должна быть усвоена каждым читателем этой книги, даже если он предпочел пропустить рассмотрение понятия иррационального числа, содержащееся в пп. 6—12.

[2] В п. 6 мы имели три случая.

[3] В п. 6 мы этого утверждать не могли.

Может быть, что L_1 содержит наибольшее число α. В этом случае α должно быть также наибольшим числом в L. Ибо если бы это было не так, то мы могли бы в L найти большее число, скажем β. Но между α и β лежат рациональные числа, которые, будучи меньшими чем β, должны принадлежать к L, а следовательно, и к L_1, что приводит к противоречию. Следовательно, α является наибольшим числом в L.

С другой стороны, может быть, что L_1 не содержит наибольшего числа. В этом случае сечение в области рациональных чисел, определяемое L_1 и R_1, дает действительное число α. Это число α должно принадлежать либо к L, либо к R. Если оно принадлежит к L, мы можем показать, применяя только что проведенное рассуждение, что оно является наибольшим числом в L. Аналогично, если оно принадлежит к R, то оно является наименьшим числом в R.

Таким образом, в любом случае либо L содержит наибольшее число, либо R — наименьшее. Поэтому любое сечение в области действительных чисел „соответствует" некоторому действительному числу в том же смысле, в каком сечение в области рациональных чисел иногда, но не всегда, соответствует некоторому рациональному числу. Это заключение исключительно важно, так как оно показывает, что рассмотрение сечений в области действительных чисел не приводит ни к какому дальнейшему обобщению понятия числа. Исходя из рациональных чисел, мы нашли, что идея сечения приводит к расширению понятия о числе, а именно, к понятию действительного числа, более широкому, чем понятие рационального числа. Поэтому можно было ожидать, что идея сечения в области действительных чисел приведет нас к понятию еще более общему. Проведенные рассмотрения показывают, однако, что это не так, а что совокупность всех действительных чисел, или континуум, обладает некоторым свойством полноты, которым совокупность рациональных чисел не обладала. Это свойство полноты в математике обозначается термином замкнутости континуума.

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

ТЕОРЕМА ДЕДЕКИНДА. *Если действительные числа разбиты на два класса L и R так, что*

(1) *каждое действительное число принадлежит к одному и только к одному из этих классов,*

(2) *каждый класс содержит, по крайней мере, одно число,*

(3) *каждое число из L меньше любого числа из R,*

то тогда существует число α, обладающее тем свойством, что все числа, меньшие его, принадлежат к L, а все числа, большие его, — к R. Само число α может принадлежать к любому из этих классов.

В приложениях мы часто должны рассматривать сечения не всех чисел, а только тех, которые содержатся в некотором *интервале* (β, γ), т. е. всех тех чисел x, для которых $\beta \leqslant x \leqslant \gamma$. „Сечение" таких чисел — это, само собой разумеется, разбиение их на два класса, обладающих свойствами (1), (2) и (3). Такое сечение может быть превращено в сечение всех чисел присоединением к L всех чисел, меньших чем β, и к R — всех чисел, больших чем γ. Ясно, что утверждение теоремы Дедекинда останется в силе, если мы заменим слова „действительные числа" словами „действительные числа интервала (β, γ)", и что в этом случае число α удовлетворяет неравенствам $\beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma$.

18. Точки накопления. Любая система действительных чисел или точек прямой, соответствующих им, определенная каким бы то ни было образом, называется *множеством* чисел или точек. Множество может состоять, например, из всех положительных целых чисел или из всех рациональных точек.

Здесь чрезвычайно удобно пользоваться языком геометрии [1]. Допустим, что мы имеем некоторое множество точек, которое обозначим через S. Возьмем любую точку ξ, которая может принадлежать, а может и не принадлежать к S. Тогда существуют две возможности. Либо можно выбрать положительное число δ так, что интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ не содержит ни одной точки из S, отличной от ξ [2], либо это невозможно.

Допустим, например, что S состоит из точек, соответствующих всем положительным целым числам. Если ξ — положительное целое число, то мы можем взять в качестве δ любое число, меньшее единицы, и тогда осуществляется первая из перечисленных выше двух возможностей; или, если ξ лежит посередине между двумя целыми числами, то мы можем взять любое δ, меньшее половины. С другой стороны, если S состоит из всех рациональных точек, то, каково бы ни было δ, всегда осуществляется вторая возможность, ибо любой интервал содержит бесконечно много рациональных точек.

Допустим, что мы имеем дело со вторым случаем. Тогда любой интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, как бы мала ни была его длина, содержит, по крайней мере, одну точку ξ_1, принадлежащую к S и отличную от ξ. И это независимо от того, принадлежит ли само ξ к S или нет. В этом случае мы будем говорить, что ξ является *точкой накопления* S. Легко видеть, что интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ должен содержать не только одну, но даже бесконечно много точек S. Ибо после того, как найдено ξ_1, мы можем взять интервал $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, содержащий ξ, но не содержащий ξ_1, и в этом интервале, по условию, также должна содержаться точка ξ_2, входящая в S и отличная от ξ. Очевидно, что мы можем это рассуждение повторить, заменив точку ξ_1 точкой ξ_2 и т. д. Таким образом, мы получаем сколько угодно точек

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots,$$

---

[1] Вряд ли читатель нуждается в особом напоминании, что мы прибегаем к этому исключительно в целях удобства изложения.

[2] Эта оговорка, конечно, не нужна, если ξ само не принадлежит к S.

принадлежащих к S и лежащих внутри интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$.

Точка накопления множества S может сама принадлежать к S, но может к S и не принадлежать. Следующие примеры иллюстрируют различные возможности.

Примеры IX. 1. Если S состоит из точек, соответствующих положительным целым числам или всем целым числам, то точек накопления нет.

2. Если S состоит из всех рациональных точек, то каждая точка прямой является точкой накопления.

3. Если S состоит из точек $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, то имеется одна точка накопления, а именно, точка 0.

4. Если S состоит из всех положительных рациональных точек, то точками накопления являются точка 0 и все положительные точки прямой.

19. Теорема Вейерштрасса. Общая теория точечных множеств представляет большой интерес и чрезвычайно важна в высших областях анализа. Но в своей большей части она слишком сложна для того, чтобы быть включенной в эту книгу. В ней имеется, однако, одна теорема, которая легко выводится из теоремы Дедекинда и которая нам понадобится в дальнейшем.

ТЕОРЕМА. *Если множество S содержит бесконечно много точек и заключено целиком в некотором интервале (α, β), тогда по крайней мере одна из точек этого интервала является точкой накопления S.*

Мы разбиваем точки прямой Λ на два класса следующим образом. Точка P принадлежит к L, если существует бесконечно много точек из S, лежащих справа от P, а в противном случае точка P принадлежит к R. Тогда ясно, что условия (1) и (3) теоремы Дедекинда удовлетворяются, а так как α принадлежит к L и β — к R, то выполнено и условие (2).

Следовательно, существует такая точка ξ, что, как бы мало ни было δ, $\xi-\delta$ принадлежит к L, а $\xi+\delta$ — к R, так что интервал $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ содержит бесконечно много точек из S. Точка ξ является точкой накопления множества S.

Эта точка может, конечно, совпасть с α или с β, как, например, в том случае, когда $\alpha=0$, $\beta=1$ и S состоит из точек $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. В этом случае точка 0 является единственной точкой накопления. Другое доказательство теоремы будет дано в п. 71.

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ I

1. Каковы условия для того, чтобы $ax+by+cz=0$ (1) для произвольных x, y, z, (2) для всех x, y, z, удовлетворяющих условию $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, (3) для всех x, y, z, удовлетворяющих двум условиям:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0 \quad \text{и} \quad Ax+By+Cz=0?$$

2. Любое положительное рациональное число может быть представлено одним и только одним способом в виде

$$a_1+\frac{a_2}{1\cdot 2}+\frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{a_k}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые числа и

$$0\leqslant a_1,\ 0\leqslant a_2<2,\quad 0\leqslant a_3<3,\ \ldots,\ 0<a_k<k.$$

3. Любое положительное рациональное число может быть одним и только одним способом представлено в виде непрерывной дроби

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые числа и

$$a_1\geqslant 0,\quad a_2>0,\quad a_3>0,\ \ldots,\ a_{n-1}>0,\quad a_n>1.$$

[Элементы теории непрерывных дробей можно найти в учебниках алгебры*), а также в книге Харди и Райта, *Введение в теорию чисел*, гл. X.]

4. Найти рациональные корни (или доказать, что их нет) уравнения

$$9x^3-6x^2+15x-10=0.$$

5. Отрезок прямой AB делится точкой C так, что $AB\cdot AC=BC^2$ (так называемое *золотое сечение*, см. Эвклид, кн. II, 11). Доказать, что отношение $\frac{AC}{AB}$ иррационально.

6. Пусть A иррационально. В каких случаях будет рационально отношение $\frac{aA+b}{cA+d}$, где a, b, c, d рациональны?

7. **Некоторые элементарные неравенства.** Пусть $a_1, a_2, \ldots$ обозначают положительные числа (включая нуль) и $p, q, \ldots$ — положительные целые числа. Так как разности $a_1^p-a_2^p$ и $a_1^q-a_2^q$ одного знака, то мы имеем $(a_1^p-a_2^p)(a_1^q-a_2^q)\geqslant 0$ или

$$a_1^{p+q}+a_2^{p+q}\geqslant a_1^pa_2^q+a_1^qa_2^p \tag{1}$$

— неравенство, которое может быть также записано в виде

$$\frac{a_1^{p+q}+a_2^{p+q}}{2}\geqslant\left(\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\right)\left(\frac{a_1^q+a_2^q}{2}\right). \tag{2}$$

Повторно применяя эту формулу, мы получаем

$$\frac{a_1^{p+q+r+\ldots}+a_2^{p+q+r+\ldots}}{2}\geqslant\left(\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\right)\left(\frac{a_1^q+a_2^q}{2}\right)\left(\frac{a_1^r+a_2^r}{2}\right)\ldots \tag{3}$$

и, в частности,

$$\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\geqslant\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^p. \tag{4}$$

---

*) См. также А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, ГТТИ, 1935; Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. 1, ГТТИ, 1935. *(Прим. перев.)*

Когда $p=q=1$ в (1), или $p=2$ в (4), эти неравенства являются просто другими формами неравенства $a_1^2+a_2^2 \geqslant 2a_1a_2$, которое выражает тот факт, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

8. Обобщения на n чисел. Если мы запишем $\frac{1}{2}n(n-1)$ неравенств типа (1), которые могут быть образованы из n чисел, и сложим их, то мы получим неравенство

$$n\sum a^{p+q} \geqslant \sum a^p \sum a^q \tag{5}$$

или

$$\frac{1}{n}\sum a^{p+q} \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum a^p\right)\left(\frac{1}{n}\sum a^q\right). \tag{6}$$

Отсюда мы можем вывести очевидное обобщение неравенства (3), которое читатель сможет сформулировать сам, и, в частности, неравенство

$$\frac{1}{n}\sum a^p \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum a\right)^p. \tag{7}$$

9. Общая форма теоремы об арифметическом и геометрическом средних. Несколько иным неравенством является то, которое выражает, что арифметическое среднее $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не меньше их геометрического среднего. Допустим, что a_r и a_s — наибольшее и наименьшее из этих чисел (если таких наибольших или наименьших несколько, то безразлично, какие из них мы возьмем), и пусть G будет их геометрическим средним. Мы можем предположить, что $G>0$, так как если $G=0$, то справедливость предложения очевидна. Если мы теперь заменим a_r и a_s числами

$$a'_r = G, \quad a'_s = a_r a_s/G,$$

то их геометрическое среднее не изменится. А так как

$$a'_r + a'_s - a_r - a_s = (a_r - G)(a_s - G)/G \leqslant 0,$$

то мы при этом заведомо не увеличим их арифметического среднего.

Ясно, что мы можем повторять это рассуждение до тех пор, пока не заменим каждое из $a_1, a_2, \ldots, a_n$ числом G — для этого потребуется не более n шагов. Так как окончательное значение арифметического среднего будет G, исходное значение не могло быть меньшим.

10. Неравенство Коши. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — любые две системы положительных или отрицательных чисел. Легко убедиться в справедливости тождества

$$\left(\sum a_r b_r\right)^2 = \sum a_r^2 \sum b_r^2 - \sum (a_r b_s - a_s b_r)^2,$$

где r и s принимают значения $1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует, что

$$\left(\sum a_r b_r\right)^2 \leqslant \sum a_r^2 \sum b_r^2.$$

11. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то

$$\sum a_r \sum \frac{1}{a_r} \geqslant n^2.$$

12. Если a, b и c положительны и $a+b+c=1$, то

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8. \qquad (\textit{Экз. } 1932 \text{ г.})^{*)}$$

13. Если a и b положительны и $a+b=1$, то

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}. \qquad (\textit{Экз. } 1926 \text{ г.})$$

14. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны и $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\leqslant 1+s_n+\frac{s_n^2}{2!}+\ldots+\frac{s_n^n}{n!}. \qquad (\textit{Экз. } 1909 \text{ г.})$$

15. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две системы положительных чисел, записанные каждая в убывающем порядке, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqslant n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n).$$

16. Если $a, b, c, \ldots, k$ и $A, B, C, \ldots, K$ — две системы чисел, причем все числа первой системы положительны, то

$$\frac{aA+bB+\ldots+kK}{a+b+\ldots+k}$$

лежит между алгебраически наименьшим и наибольшим из чисел $A, B, \ldots, K$.

[Примеры 7—16 являются, большей частью, весьма специальными случаями известных общих теорем, которые систематически изложены в книге Харди, Литтльвуда и Полиа, *Неравенства* (Кэмбридж, 1934 г.). **) См. также гл. IV, п. 74 и Приложение I.]

17. Если $\sqrt{p}$ не подобно $\sqrt{q}$ и $a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq}=0$, где a, b, c, d рациональны, то $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$.

[Представить $\sqrt{p}$ в форме $M+N\sqrt{q}$, где M и N рациональны, и применить теорему п. 14.]

18. Показать, что если

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0,$$

где a, b, c — рациональные числа, то $a=0$, $b=0$, $c=0$.

19. Любой полином от $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ с рациональными коэффициентами (т. е. сумма конечного числа выражений вида $A(\sqrt{p})^m(\sqrt{q})^n$, где m и n — целые числа и A рационально) может быть представлен в форме

$$a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq},$$

где a, b, c, d рациональны.

20. Выразить $\dfrac{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}}{d+e\sqrt{p}+f\sqrt{q}}$, где $a, b, c, \ldots$ рациональны, в форме $A+B\sqrt{p}+C\sqrt{q}+D\sqrt{pq}$, где A, B, C, D рациональны.

---

*) В дальнейшем автор приводит много задач, фигурировавших на экзаменах повышенной трудности в Кэмбриджском университете (так называемых *Mathematical Tripos*), которые сдаются студентами, претендующими на диплом с отличием. По всему университетскому курсу анализа проводится обычно три таких экзамена. Для каждой задачи в книге указывается год, в котором она фигурировала на этих экзаменах. *(Прим. перев.)*

**) Книга переведена на русский язык (*Москва*, 1948). *(Прим. ред.)*

[Очевидно, что

$$\frac{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}}{d+e\sqrt{p}+f\sqrt{q}}=\frac{(a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q})(d+e\sqrt{p}-f\sqrt{q})}{(d+e\sqrt{p})^2-f^2q}=$$
$$=\frac{\alpha+\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q}+\delta\sqrt{pq}}{\varepsilon+\zeta\sqrt{p}},$$

где α, β и т. д. — рациональные числа, которые могут быть легко определены. Окончательное преобразование к требуемому выражению производится теперь умножением числителя и знаменателя на $\varepsilon-\zeta\sqrt{p}$. Например, показать, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}.]$$

21. Если a, b, x, y — рациональные числа, удовлетворяющие соотношению

$$(ay-bx)^2+4(a-x)(b-y)=0,$$

то либо $x=a$ и $y=b$, либо $1-ab$ и $1-xy$ являются квадратами рациональных чисел. (*Экз.* 1903 г.)

22. Если все значения x и y, определяемые соотношениями

$$ax^2+2hxy+by^2=1,\quad a'x^2+2h'xy+b'y^2=1,$$

где a, h, b, a', h', b' рациональны, также рациональны, то

$$(h-h')^2-(a-a')(b-b') \text{ и } (ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h)$$

являются квадратами рациональных чисел. (*Экз.* 1899 г.)

23. Показать, что $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ суть полиномы третьей степени от $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с рациональными коэффициентами и что $\sqrt{2}-\sqrt{6}+3$ — дробно-линейная функция от $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (*Экз.* 1905 г.)

24. Показать, что

$$\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}$$

равно $2m$, если $2m^2>a>m^2$, и равно $2\sqrt{a-m^2}$, если $a>2m^2$.

25. Показать, что любой полином от $\sqrt[3]{2}$ с рациональными коэффициентами может быть представлен в виде

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4},$$

где a, b, c рациональны.

Вообще, если p — любое рациональное число, то любой полином от $\sqrt[m]{p}$ с рациональными коэффициентами может быть представлен в виде

$$a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{m-1}\alpha^{m-1},$$

где a_0, a_1, ..., a_{m-1} рациональны и $\alpha=\sqrt[m]{p}$. Ибо всякий такой полином имеет вид

$$b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\ldots+b_k\alpha^k,$$

где коэффициенты b рациональны. Если $k\leqslant m-1$, то это уже есть требуемый вид. Если же $k>m-1$, то пусть α^r будет любая целая степень выше $(m-1)$-ой. Тогда $r=\lambda m+s$, где λ — целое число и $0\leqslant s\leqslant m-1$. Следовательно $\alpha^r=\alpha^{\lambda m+s}=p^\lambda\alpha^s$, и, таким образом, мы можем избавиться от всех степеней α, больших чем $(m-1)$-ая.

26. Выразить $(\sqrt[3]{2}-1)^5$ и $\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$ в форме

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4},$$

где a, b, c рациональны. [Умножить числитель и знаменатель второго выражения на $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$.]

27. Если

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0,$$

где a, b, c рациональны, то $a=0$, $b=0$, $c=0$.

[Пусть $y=\sqrt[3]{2}$. Тогда $y^3=2$ и

$$cy^2+by+a=0.$$

Следовательно, $2cy^2+2by+ay^3=0$ или

$$ay^2+2cy+2b=0.$$

Умножая эти квадратные уравнения на a и c и вычитая одно из другого, получим, что $(ab-2c^2)y+a^2-2bc=0$ или $y=-\dfrac{a^2-2bc}{ab-2c^2}$, т. е. рациональное число, что невозможно. Единственная другая возможность заключается в том, что $ab-2c^2=0$ и $a^2-2bc=0$.

Отсюда $ab=2c^2$, $a^4=4b^2c^2$. Если ни a, ни b не равны нулю, мы можем разделить второе уравнение на первое, что дает $a^3=2b^3$. Но это невозможно, так как $\sqrt[3]{2}$ не может быть равно рациональному числу $\dfrac{a}{b}$. Следовательно, $a=0$ и $b=0$, а теперь из основного соотношения следует, что a, b и c все равны нулю.

Как следствие мы получаем, что если

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=d+e\sqrt[3]{2}+f\sqrt[3]{4},$$

то $a=d$, $b=e$, $c=f$.

Можно вообще доказать, что если

$$a_0+a_1p^{1/m}+\ldots+a_{m-1}p^{(m-1)/m}=0,$$

где p не есть точная m-ая степень, то $a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}=0$; но это доказательство менее просто.]

28. Если $A+\sqrt[3]{B}=C+\sqrt[3]{D}$, то либо $A=C$ и $B=D$, либо B и D суть кубы рациональных чисел.

29. Если $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$, то либо одно из чисел A, B, C равно нулю, а два остальных равны по величине, но обратны по знаку, либо $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$, $\sqrt[3]{C}$ — рациональные кратные одной и той же иррациональности $\sqrt[3]{X}$.

30. Найти рациональные числа α, β так, чтобы

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\alpha+\beta\sqrt{2}.$$

31. Если $(a-b^3)\,b>0$, то

$$\sqrt[3]{a+\frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}+\sqrt[3]{a-\frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

рационально. [Каждое из выражений под знаками кубического корня может быть представлено в виде

$$\left\{\alpha+\beta\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right\}^3,$$

где α и β рациональны.]

32. Доказать, что

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}),$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$$

33. Если $\alpha=\sqrt[n]{p}$, то любой полином от α является корнем некоторого уравнения степени n с рациональными коэффициентами.

[Мы можем представить любой полином от α в форме

$$x=l_1+m_1\alpha+\ldots+r_1\alpha^{n-1},$$

где l_1, m_1, ... рациональны (см. пример 25).

Аналогично,

$$x^2=l_2+m_2\alpha+\ldots+r_2\alpha^{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n=l_n+m_n\alpha+\ldots+r_n\alpha^{n-1}.$$

Отсюда

$$L_1x+L_2x^2+\ldots+L_nx^n=\Delta,$$

где Δ означает определитель

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & \ldots & r_1 \\ l_2 & m_2 & \ldots & r_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_n & m_n & \ldots & r_n \end{vmatrix},$$

а L_1, L_2, ... — алгебраические дополнения элементов l_1, l_2, ... l_n.]

34. Применить предыдущее рассуждение к $x=p+\sqrt{q}$ и вывести теорему п. 14.

35. Показать, что

$$y=a+bp^{1/3}+cp^{2/3}$$

удовлетворяет уравнению

$$y^3-3ay^2+3y\,(a^2-bcp)-a^3-b^3p-c^3p^2+3abcp=0,$$

36. Алгебраические числа. Мы видели, что некоторые иррациональные числа (как, например, $\sqrt{2}$) являются корнями уравнений вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа. Такие иррациональные числа называются *алгебраическими;* все другие иррациональные числа, такие, как, например, π (см. п. 15), называются *трансцендентными.*

37. Если x и y — алгебраические числа, то таковыми же являются $x+y$, $x-y$ и xy, а также $\frac{x}{y}$, если $y \neq 0$.

[Требуются некоторые сведения из алгебры. Мы должны воспользоваться следующими теоремами: во-первых, что элементарные симметрические функции Σx_r, $\Sigma x_r x_s, \ldots$ корней уравнения

$$x^m - p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} - \ldots \pm p_m = 0 \tag{1}$$

равны $p_1, p_2, \ldots$ и, во-вторых, что любой симметрический полином (см. пп. 23 и 31) от $x_1, x_2, \ldots$ с целочисленными коэффициентами является полиномом от $p_1, p_2, \ldots$ с целочисленными коэффициентами.

Мы можем записать уравнения, которым удовлетворяют x и y, в виде (1) и

$$y^n - q_1y^{n-1} + q_2y^{n-2} - \ldots \pm q_n = 0, \tag{2}$$

где $p_1, p_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$ рациональны. Мы предполагаем, что корни (1) и (2) суть $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, причем $x = x_1$ и $y = y_1$, и образуем произведение

$$P(z) = \prod_{h=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (z - x_h - y_k)$$

по всем mn парам значений h и k. Тогда $P(z)$ является полиномом степени mn от z, а его коэффициенты суть симметрические полиномы от x_h и y_k с целочисленными коэффициентами. Отсюда следует, что эти коэффициенты суть полиномы от $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ с целочисленными коэффициентами, т. е. рациональны. Таким образом, $P(z) = 0$ является уравнением степени mn с рациональными коэффициентами; но $x+y$ является одним из его корней.

Доказательство для $x-y$ и xy аналогично. Если $y \neq 0$, и мы предположим (что не ограничивает общности наших рассуждений), что $q_n \neq 0$, то $z = \frac{1}{y}$ удовлетворяет уравнению

$$z^n - r_1z^{n-1} + r_2z^{n-2} - \ldots \pm r_n = 0,$$

где $r_1 = \frac{q_{n-1}}{q_n}$, $r_2 = \frac{q_{n-2}}{q_n}$, ... Следовательно, z есть алгебраическое число, а, следовательно, $x/y = xz$ — также алгебраическое число.

В частности, $x+k$ и kx — алгебраические числа, если k рационально.]

38. Если

$$x^m + \alpha_1x^{m-1} + \ldots + \alpha_m = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — алгебраические числа, то x — также алгебраическое число.

[Это может быть доказано аналогично предыдущему. Каждое α_r удовлетворяет уравнению

$$\alpha_r^{n_r} - p_{r,1}\alpha_r^{n_r-1} + \ldots \pm p_{r,n_r} = 0$$

с рациональными коэффициентами. Предположим, что корнями этого уравнения являются $\alpha_{r,1}, \alpha_{r,2}, \ldots, \alpha_{r,n_r}$ (причем $\alpha_r = \alpha_{r,1}$), и образуем произведение

$$P(x) = \Pi\,(x^m + \alpha_{1,s_1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m,s_m})$$

по всем $N = n_1 n_2 \ldots n_m$ комбинациям индексов $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Таким образом, мы получаем полином от x степени mN с рациональными коэффициентами.

В частности, $x^{m/n}$ — алгебраическое число, если само x — число алгебраическое, а m и n — целые.]

39. Если

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0,$$

то

$$x^8 - 16x^6 + 58x^4 - 48x^2 + 9 = 0.$$

40. Найти уравнения с рациональными коэффициентами, которым удовлетворяют следующие алгебраические числа:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \quad \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}.$$

41. Если $x^3 = x + 1$, то $x^{3n} = a_n x + b_n + c_n x^{-1}$, где

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n + c_n, \quad c_{n+1} = a_n + c_n.$$

42. Если $x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1 = 0$ и $y = x^4 - x^2 + x - 1$, то y удовлетворяет квадратному уравнению с рациональными коэффициентами. (*Экз.* 1903 г.)

[Находим, что $y^2 + y + 1 = 0$.]

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

20. Понятие функции. Предположим, что x и y — два непрерывных действительных переменных, которые мы можем представить себе геометрически расстояниями $A_0P = x$, $B_0Q = y$, измеренными от фиксированных точек A_0, B_0 вдоль двух прямых линий Λ, M. Представим себе, что положения точек P и Q не независимы, а связаны некоторым соотношением, которое мы будем мыслить как соотношение между x и y; таким образом, если P и x известны, то Q и y также известны. Мы можем, например, предположить, что $y = x$ или $2x$, или $\frac{1}{2}x$, или $x^2 + 1$. Во всех этих случаях значение x определяет значение y. Или же мы можем предположить, что соотношение между x и y дано не с помощью явной формулы для y, выраженной через x, а с помощью некоторого геометрического построения, которое позволяет найти Q, когда P известно.

В этих условиях говорят, что y является *функцией* от x. Это понятие функциональной зависимости одного переменного от другого является, по всей вероятности, самым важным понятием во всей высшей математике. Для того чтобы читатель мог быть уверен в правильности и ясности усвоения этого понятия, мы проиллюстрируем его в этой главе на большом числе примеров.

Однако, прежде чем перейти к этим примерам, мы должны отметить, что те простые примеры функций, которые уже приведены выше, обладают тремя свойствами, которые никоим образом не заложены в общем понятии функции, а именно:

(1) y определено *для каждого значения* x;

(2) каждому значению x, для которого y определено, соответствует *только одно значение* y;

(3) соотношение между x и y выражено с помощью *аналитической формулы*, из которой значение y, соответствующее данному значению x, может быть получено непосредственной подстановкой последнего.

В действительности оказывается, что этими тремя свойствами обладают многие из наиболее важных функций. Но рассмотрение следующих примеров ясно покажет, что они никоим образом не являются существенными для функции. Существенным является только то, что должно существовать некоторое соотношение между x и y такое, что по крайней мере некоторым значениям x соответствуют значения y.

Примеры X. 1. Пусть $y = x$ или $2x$, или $\frac{1}{2}x$, или $x^2 + 1$. Про такие случаи мы пока ничего не будем говорить.

2. Пусть $y = 0$, каково бы ни было значение x. Тогда y является функцией от x, так как мы можем придать x любое значение, и соответствующее значение y (именно нуль) известно. В этом случае функциональная зависимость сопоставляет одно и то же значение y всем значениям x. То же самое имело бы место, если бы y было равно 1 или $-\frac{1}{2}$, или $\sqrt{2}$ вместо нуля. Такая функция от y называется постоянной.

3. Пусть $y^2 = x$. Тогда, если x положительно, это уравнение определяет *два* значения y, соответствующие каждому значению x, а именно, $\pm\sqrt{x}$. Если $x = 0$, то $y = 0$. Следовательно, частному значению нуль переменного x соответствует только *одно* значение y. Если же x отрицательно, то *не* существует значений y, которые удовлетворяли бы уравнению. Это значит, что функция y не определена для отрицательных значений x. Эта функция обладает, следовательно, свойством (3), но не обладает ни свойством (1), ни свойством (2).

4. Рассмотрим некоторое количество газа, поддерживаемое при постоянной температуре и заключенное в цилиндр, закрытый скользящим поршнем[1]).

Пусть A будет площадь поверхности поршня и W — его вес. Когда поршень находится в равновесии, мы должны иметь

$$W = Ap_0,$$

где p_0 — давление газа на поршень, отнесенное к единице площади его поверхности.

Пусть v_0 будет объем газа при этом равновесии. Если положить дополнительный груз на поршень, то он несколько опустится. Объем v газа при этом уменьшится, давление же p, которое он производит на единицу площади поверхности поршня, возрастет. Экспериментальный закон Бойля показывает, что произведение p и v остается почти постоянным. Если бы этот закон был точен, то соотношение выражалось бы уравнением вида

$$pv = a, \tag{1}$$

где a — число, которое может быть приближенно определено с помощью эксперимента.

Закон Бойля, однако, дает удовлетворительное приближение к действительности лишь до тех пор, пока газ не сжат слишком сильно. Когда v уменьшилось, а p возросло, перейдя через некоторое значение, соотношение между ними уже не описывается с какой бы то ни было точностью уравнением (1). Известно, что в этом случае значительно лучшее приближение к действительности дается так называемым законом ван дер Ваальса, который выражается уравнением

$$\left(p + \frac{\alpha}{v^2}\right)(v - \beta) = \gamma, \tag{2}$$

где α, β, γ — числа, которые также могут быть приближенно определены с помощью эксперимента.

---

[1]) Этот поучительный пример заимствован из книги H. S. Carslaw, *Introduction to the calculus*.

Оба эти уравнения, даже если их взять вместе, отнюдь не дают, конечно, полного отчета о действительном соотношении между p и v. В действительности это соотношение, несомненно, значительно более сложно и его вид изменяется от вида, близкого к (1), до вида, близкого к (2). Но с математической точки зрения ничто не может помешать нам рассматривать идеализированное положение вещей, при котором для всех значений v, не меньших некоторого значения V, в точности имеет место соотношение (1), тогда как (2) в точности имеет место для всех значений v, меньших чем V. И тогда мы можем рассматривать эти оба уравнения как определяющие вместе функциональную зависимость p от v. Это — пример функции, которая для некоторых значений v определена одной формулой, а для других значений v — другой.

Функция эта обладает свойством (2): каждому значению v соответствует только одно значение p. Но она не обладает свойством (1), так как p не определено как функция от v для отрицательных значений v; „отрицательный объем" ничего не означает, и поэтому отрицательные значения v не рассматриваются.

5. Допустим, что абсолютно упругий мяч падает (не вращаясь) с высоты $\frac{1}{2}g\tau^2$ на неподвижную горизонтальную плоскость и каждый раз отскакивает от нее.

Известные формулы из элементарной динамики, с которыми читатель, вероятно, знаком, показывают, что $h=\frac{1}{2}gt^2$, если $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $h=\frac{1}{2}g(2\tau-t)^2$, если $\tau \leqslant t \leqslant 3\tau$, и вообще

$$h=\frac{1}{2}g(2n\tau-t)^2,$$

если $(2n-1)\tau \leqslant t \leqslant (2n+1)\tau$, где h — разность высот начального положения мяча и положения его в момент времени t. Здесь h также является функцией от t, определенной только для положительных значений t.

6. Пусть y определено как *наибольший простой делитель* x. Здесь мы имеем пример определения, которое применимо к специальному классу значений x, а именно, к *целочисленным значениям*. „Наибольший простой делитель $\frac{11}{3}$ или $\sqrt{2}$, или π" ничего не означает, и наше определение отказывается служить для таких значений x. Таким образом, эта функция не обладает свойством (1). Она обладает свойством (2), но не обладает свойством (3), так как не существует простой формулы, выражающей y через x.

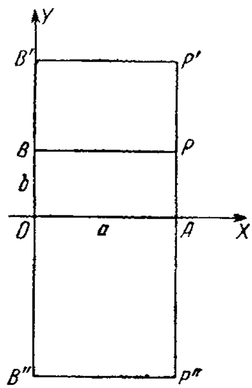
7. Пусть y определено как *знаменатель* x, *когда* x *выражено в виде несократимой дроби*. Это — пример функции, которая определена только для рациональных значений x. Так, например, $y=7$, если $x=\frac{11}{7}$, но y не определено для $x=\sqrt{2}$.

21. Графическое представление функций. Допустим, что переменное y является функцией переменного x. Вообще говоря, ничто не мешает нам рассматривать также x как функцию от y, в силу той же самой функциональной зависимости между x и y. Однако мы будем пока изучать это соотношение между x и y с первой точки зрения. Тогда мы будем называть x *независимым переменным* и y — *зависимым переменным*. Далее, когда специальный вид функциональной зависимости не известен или не дан, мы будем выражать ее записью

$$y=f(x)$$

(или также $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x), \ldots$).

Характер функций в очень многих случаях может быть выяснен и сделан легко обозримым следующим образом. Проведем две линии OX и OY перпендикулярно друг к другу и неограниченно продолжим каждую из них в обоих направлениях. Мы можем тогда представить значения x и y расстояниями, измеренными от O, соответственно, вдоль линий OX и OY. При этом, конечно, мы должны учитывать знаки; положительные направления указаны на фиг. 5 стрелками.



Фиг. 5

Пусть a будет некоторое значение x, для которого y определено и имеет (допустим) единственное значение b. Возьмем $OA=a$, $OB=b$ и построим прямоугольник $OAPB$. Пусть точка P отмечена на чертеже. Эта отметка точки P может рассматриваться как указание на то, что значение y для $x=a$ равно b.

Если значению $x=a$ соответствует несколько значений y, скажем b, b', b'', то вместо единственной точки P мы будем иметь несколько точек, в данном случае P, P', P''.

Мы будем называть P *точкой (a, b)*, a и b — *координатами точки P относительно осей OX, OY; a — абсциссой, b — ординатой точки P; OX — осью x* и *OY — осью y*, а вместе — *осями координат*, и, наконец, O — *началом координат*, или просто *началом*.

Предположим теперь, что для всех значений a переменного x, для которых y определено, значение b (или значения b, b', $b'', \ldots$) переменного y и соответствующая точка P (или точки P, P', $P'', \ldots$) найдены. Совокупность всех таких точек мы называем *графиком* функции y.

Возьмем очень простой пример, а именно, предположим, что y определено как функция от x уравнением

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

где A, B, C — некоторые фиксированные числа [1]. Тогда y является функцией от x, обладающей всеми тремя свойствами (1), (2), (3) п. 20. Легко показать, что *графиком y является прямая линия*. Читатель, вероятно, знаком с каким-либо доказательством этого

[1] Если $B=0$, то y не входит в уравнение. Мы должны тогда рассматривать y как функцию от x, определенную только для одного значения x, а именно, $-C/A$ и принимающую тогда все значения.

факта из курса аналитической геометрии. Мы будем также говорить, что *геометрическим местом точек* (x, y) *является прямая линия*, что (1) является *уравнением этого геометрического места* и что это уравнение *представляет* данное геометрическое место.

Уравнение $Ax+By+C=0$ является наиболее общим уравнением первого порядка от x и y. Таким образом, *общее уравнение первого порядка представляет прямую линию.* Так же легко доказать и обратное предложение, что *уравнение любой прямой линии — первого порядка.*

Можно привести еще несколько дальнейших примеров интересных геометрических мест, определенных уравнениями. Уравнение вида

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2,$$

или

$$x^2+y^2+2Gx+2Fy+C=0,$$

где $G^2+F^2-C>0$, представляет окружность. Уравнение

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

(общее уравнение второго порядка) представляет коническое сечение, т. е. эллипс, параболу или гиперболу, если коэффициенты этого уравнения удовлетворяют некоторым неравенствам. Исследование этих геометрических мест читатель найдет в книгах по аналитической геометрии.

22. Полярные координаты. Мы определяли положение точки P длинами ее координат $OM=x$, $MP=y$. Если $OP=r$ и $MOP=\theta$, где θ — угол, величина которого заключена между 0 и 2π (измеряемый в положительном направлении), то, очевидно (фиг. 6),

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

откуда

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

и

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r},$$

так что положение точки P определяется также заданием r и θ. Мы называем r и θ *полярными координатами* точки P. Следует отметить, что r, по определению, положительно[1].

[1] Полярные координаты иногда определяются так, что r может быть как положительным, так и отрицательным. В этом случае две пары координат, — как, например $(1, 0)$ и $(-1, \pi)$, — соответствуют одной и той же точке. Различие между двумя системами может быть проиллюстрировано на примере уравнения $l/r=1-e\cos\theta$, где $l>0$, $e>1$. Согласно нашим определениям, r должно быть положительно, и поэтому $\cos\theta<1/e$, т. е. уравнение представляет только одну ветвь гиперболы, причем уравнение другой ветви будет $-l/r=1-e\cos\theta$. В системе же координат, которая допускает отрицательные значения r, приведенное уравнеине представляет всю гиперболу.

Если P движется по геометрическому месту, r и θ будут связаны некоторым соотношением, $r=f(\theta)$, или $\theta=F(r)$. Это соотношение мы называем *полярным уравнением* геометрического места. Полярное уравнение может быть выведено из (x, y) уравнения (и обратно) с помощью приведенных выше формул.

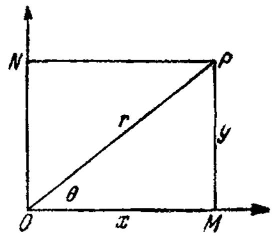
Так, полярное уравнение прямой линии имеет вид

$$r\cos(\theta-\alpha)=p,$$

где p и α — постоянные. Уравнение $r=2a\cos\theta$ представляет окружность, проходящую через начало. Общее уравнение окружности имеет вид

$$r^2+c^2-2rc\cos(\theta-\alpha)=A^2,$$

где A, c и α — постоянные.



Фиг. 6

23. Дальнейшие примеры функций и их графическое представление. Следующие примеры дадут читателю представление о бесконечном разнообразии возможных типов функций.

А. Полиномы. *Полиномом от x* называется функция вида

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m,$$

где a_0, $a_1, \ldots, a_m$ — постоянные. Простейшими полиномами являются степени $y=x$, x^2, $x^3, \ldots, x^m$. График функции x^m принадлежит к одному из двух типов, в зависимости от того, будет ли m четным или нечетным.

Рассмотрим для начала случай $m=2$. Тогда на графике лежат следующие три точки: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$. Любое количество других точек на графике может быть найдено, если придавать x частные значения; так, значениям

$$x=\frac{1}{2},\ 2,\ 3,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ -3$$

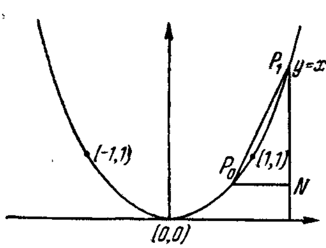
соответствуют значения

$$y=\frac{1}{4},\ 4,\ 9,\ \frac{1}{4},\ 4,\ 9.$$

Если читатель нанесет на бумаге достаточное количество точек графика, он придет к заключению, что форма графика должна иметь вид, изображенный на фиг. 7. Если он проведет кривую через те точки, про которые ему известно, что они лежат на графике, и затем будет проверять правильность этой кривой путем вычисления новых точек, то он убедится, что они ложатся настолько близко к кривой, насколько это можно было ожидать, учитывая неизбежные неточности, связанные с черчением. Кривая эта, конечно, является параболой.

Существует, однако, один принципиальный вопрос, на который мы еще не можем дать удовлетворительного ответа. Читатель, несомненно, имеет некоторое представление о том, что называется *непрерывной* кривой, кривой без разрывов и скачков. Такая кривая представлена на фиг. 7. Вопрос состоит в том, является ли график функции $y=x^2$ в действительности такой кривой. Этого нельзя *доказать* путем построения какого бы то ни было числа изолированных точек на кривой, хотя чем больше таких точек мы построим, тем вероятнее это будет казаться.

Этот вопрос не может быть рассмотрен до гл. V. Там мы подвергнем подробному анализу понятие непрерывности и покажем, как может быть доказано, что такие графики, как только что рассмотренный и другие, которые будут рассмотрены дальше в этой главе, действительно являются непрерывными кривыми. Пока читатель может продолжать вычерчивать свои кривые так, как ему диктует его здравый смысл.



Фиг. 7

Легко видеть, что кривая $y=x^2$ всюду выпукла к оси x. Пусть P_0, P_1 (см. фиг. 7) — точки (x_0, x_0^2), (x_1, x_1^2). Тогда координатами точки на хорде P_0P_1 будут числа $x=\lambda x_0+\mu x_1$, $y=\lambda x_0^2+\mu x_1^2$, где λ и μ — положительные числа с суммой, равной единице. Следовательно,

$$y-x^2=(\lambda+\mu)(\lambda x_0^2+\mu x_1^2)-(\lambda x_0+\mu x_1)^2=\lambda\mu(x_1-x_0)^2\geqslant 0,$$

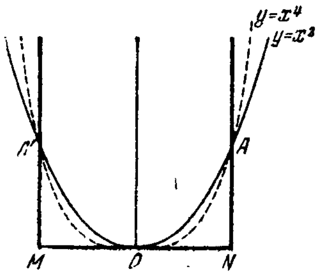
так что хорда лежит целиком над кривой.

Кривая $y=x^4$ в общем напоминает $y=x^2$, но оказывается более плоской вблизи начала и более крутой за точками A, A' (фиг. 8). Кривая $y=x^m$, где m — четное и больше 4, обладает этими свойствами в еще большей степени. Когда m становится все бо́льшим и бо́льшим, сплющенность около начала и крутизна около точек A, A' становятся все более и более подчеркнутыми, пока кривая практически не станет неотличимой от жирной ломаной на фиг. 8.

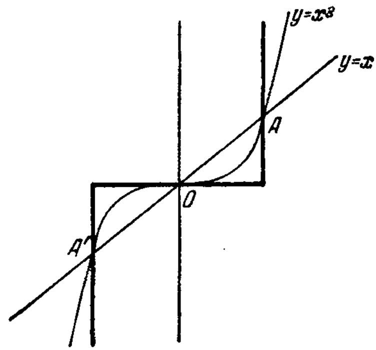
Читатель должен далее перейти к рассмотрению кривых, данных уравнением $y=x^m$, где m — нечетное число. Основное отличие между случаями четного и нечетного заключается в том, что при m четном $(-x)^m=x^m$, так что кривая симметрична относительно OY, тогда как при m нечетном $(-x)^m=-x^m$, так что y отрицательно, когда x отрицательно. На фиг. 9 изображены кривые $y=x$, $y=x^3$ и ломаная, к которой $y=x^m$ приближается при больших нечетных значениях m.

Теперь легко представить себе (во всяком случае теоретически) построение графика любого полинома. В первую очередь, из графика $y=x^m$ мы сейчас же получим график функции Cx^m (C —

постоянная) умножением ординаты каждой точки кривой на C. А если мы знаем графики $f(x)$ и $F(x)$, то мы можем получить график $f(x)+F(x)$, строя точки, имеющие своими ординатами сумму ординат соответствующих точек первоначальных кривых.



Фиг. 8



Фиг. 9

Вычерчивание графиков полиномов, однако, настолько упрощается при использовании других более совершенных методов, с которыми мы ознакомимся позже, что в настоящий момент мы можем ограничиться лишь этими немногими замечаниями.

Примеры XI. 1. Вычертить кривые $y=7x^4$, $y=3x^5$, $x=y^{10}$.

[Читатель должен вычертить эти кривые аккуратно и на одном чертеже [1]). Тогда он наглядно убедится в том, насколько быстро высшие степени x возрастают, когда x становится все бо́льшим и бо́льшим, а также в том, что в таких полиномах, как

$$x^{10}+3x^5+7x^4$$

(или даже $x^{10}+30x^5+700x^4$) только *первый* член имеет действительно доминирующее значение, когда x достаточно велико. Так, например, даже когда x равно только 4, $x^{10}>1\,000\,000$, тогда как $30x^5<35\,000$ и $700x^4<180\,000$. При $x=10$ перевес первого члена еще более значителен.]

2. Сравнить между собой значения

$$x^{12},\quad 1\,000\,000\,x^6,\quad 1\,000\,000\,000\,000\,x$$

при $x=1,\ 10,\ 100$ и т. д.

[Читатель должен самостоятельно составить ряд примеров этого типа. Идея *относительной скорости роста* различных функций от x будет встречаться нам в дальнейших главах очень часто.]

3. Начертить график функции ax^2+bx+c.

[Здесь

$$y-\frac{ac-b^2}{a}=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2.$$

---

[1]) Удобно взять масштаб вдоль оси y значительно меньшим, чем вдоль оси x, иначе чертеж примет очень громоздкие размеры.

Если мы возьмем новые оси параллельными старым и проходящими через точку $x = -b/a$, $y = \frac{(ac-b^2)}{a}$, то новое уравнение будет $y' = ax'^2$. Кривая является параболой.]

4. Начертить кривые $y = x^3 - 3x + 1$, $y = x^2(x-1)$, $y = x(x-1)^2$.

24. B. Рациональные функции. Классом функций, следующим после полиномов по простоте и значимости, является класс *рациональных функций*. Рациональной функцией называется отношение двух полиномов; таким образом, если $P(x)$, $Q(x)$ — полиномы, то

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

является самой общей рациональной функцией.

В частном случае, когда $Q(x)$ — константа, $R(x)$ сводится к полиному. Следовательно, класс рациональных функций содержит класс полиномов как подкласс. В связи с этим определением нужно сделать следующие замечания.

(1) Мы будем, как правило, предполагать, что $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общего делителя вида $x + a$ или $x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \ldots + k$; все такие общие делители мы устраняем сокращением.

(2) Следует, однако, отметить, что такое сокращение общих делителей, *вообще говоря, изменяет функцию*. Рассмотрим, например, функцию x/x, которая является рациональной функцией. Сокращая на общий делитель x, мы получаем $1/1 = 1$. Но первоначальная функция *не всегда* равна 1: она равна единице только для всех $x \neq 0$. Если $x = 0$, она принимает вид $0/0$, что не имеет смысла. Таким образом, функция x/x равна 1, если $x \neq 0$, и не определена при $x = 0$. Она, следовательно, отлична от функции 1, которая *всегда* равна 1.

(3) Такая функция, как

$$\frac{\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right)}$$

может быть приведена, по правилам алгебры, к виду

$$\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2(x+1)},$$

который представляет рациональную функцию в обычной записи. Но и здесь следует отметить, что сведение это *не всегда* законно. Для того чтобы вычислить значение функции для какого-нибудь данного значения x, мы должны подставить это значение x в функцию в *той форме, в которой она задана*. В данном случае формула, первоначально задающая функцию, теряет смысл при значениях $x = -1, 1, 0, 2$, и, следовательно, функция не определена для этих значений. Приведенная форма также теряет смысл при $x = -1$ и 1, но дает значение 0 при $x = 0$ и $x = 2$. Таким образом, эти две функции опять-таки не тождественны.

(4) Однако, как уже видно из примера, рассмотренного в предыдущем замечании, существует, вообще говоря, некоторое множество значений x,

для которых рациональная функция не определена, даже после ее приведения к стандартному виду отношения двух полиномов. Это — те значения x (которые могут и не существовать), для которых знаменатель обращается в нуль.

(5) Имея дело с выражениями, рассмотренными в (2) и (3), мы обычно не обращаем внимания на те исключительные значения x, для которых алгебраические процессы упрощения, примененные выше, становятся незаконными, и приводим нашу функцию к стандартному виду рациональной функции. С такой оговоркой читатель легко убедится в том, что сумма, произведение и отношение двух рациональных функций могут быть сведены к рациональным функциям стандартного вида. И вообще, *рациональная функция от рациональной функции является вновь рациональной функцией*, т. е. если в $z=\frac{P(y)}{Q(y)}$, где $P(y)$ и $Q(y)$ — полиномы, подставить $y=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, то после упрощений мы получим равенство вида $z=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$.

(6) В определении рациональной функции никоим образом не предполагается, что константы, встречающиеся в ней в качестве коэффициентов, должны быть рациональными *числами*. Термин „рациональный" относится только к тому, каким образом переменное x входит в формулу, определяющую функцию. Так,

$$\frac{x^2+x+\sqrt{3}}{x^3\sqrt{2}-\pi}$$

— рациональная функция.

Применение термина „рациональный" возникло следующим образом. Рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть получена конечным числом действий над x, включающих только умножение x на самого себя или на константу, сложение таким образом полученных выражений и, наконец, деление одной функции, полученной такими умножениями и сложениями, на другую. В отношении x этот процесс очень напоминает тот, которым все рациональные числа могут быть получены из единицы; этот процесс может быть проиллюстрирован равенством

$$\frac{5}{3}=\frac{1+1+1+1+1}{1+1+1}.$$

С другой стороны, всякая функция, которая может быть получена из x описанными выше действиями, примененными к функциям, которые были получены таким же образом, может быть сведена к стандартному виду рациональной функции. Так, например,

$$\frac{\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{2x+7}{x^2+\dfrac{11x-3\sqrt{2}}{9x+1}}}{\left(17+\dfrac{2}{x^3}\right)}$$

может быть сведена к стандартному виду рациональной функции.

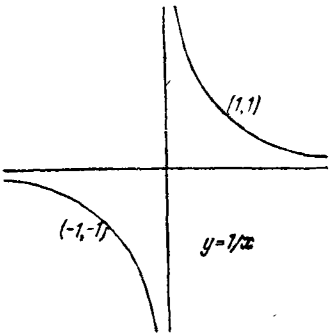
25. Графическое изучение рациональных функций зависит еще в большей степени, чем в случае полиномов, от методов дифференциального исчисления. Поэтому мы ограничимся здесь лишь небольшим числом примеров.

Примеры XII. 1. Начертить графики $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}$, ... [На фиг. 10 и 11 показаны первые две из этих кривых. Следует обратить внимание на то, что эти функции не определены при $x=0$.]

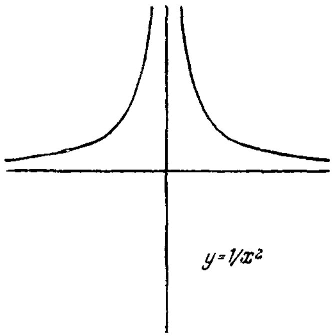
2. Начертить графики

$$y=x+\frac{1}{x},\quad x-\frac{1}{x},\quad x^2+\frac{1}{x^2},\quad x^2-\frac{1}{x^2},\quad ax+\frac{b}{x},$$

беря для a и b разные (положительные и отрицательные) значения.



Фиг. 10



Фиг. 11

3. Начертить графики:

$$y=\frac{x+1}{x-1},\quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,\quad \frac{1}{(x-1)^2},\quad \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

4. Начертить графики:

$$y=\frac{1}{(x-a)(x-b)},\quad y=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

где $a<b<c$.

5. Набросать форму кривых $y=\frac{1}{x^m}$ при все большем и большем m, рассматривая отдельно случаи нечетных и четных m.

26. С. Явные алгебраические функции. Следующим важным классом функций являются *явные алгебраические функции.* Это — функции, которые могут быть образованы из x с помощью конечного числа операций, применяемых при образовании рациональных функций, и конечного числа операций извлечения корней. Так

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x}},\quad \sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad \left(\frac{x^2+x+\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{2}-\pi}\right)^{2/3}$$

могут служить примерами явных алгебраических функций; другим примером является $x^{m/n}$ (т. е. $\sqrt[n]{x^m}$), где m и n — произвольные целые числа.

Следует отметить, что в таких уравнениях, как, например, $y=\sqrt{x}$, обозначения неоднозначны. До сих пор мы рассматривали, скажем $\sqrt{2}$, как *положительный* корень из двух, и было бы естественно обозначать через $\sqrt{x}$, где x — любое положительное число, положительный квадратный корень из x. В этом случае $y=\sqrt{x}$ была бы однозначной функцией от x. Часто оказывается, однако, более удобным понимать под $\sqrt{x}$ двузначную функцию, имеющую своими значениями положительный и отрицательный корень квадратный из x.

Читатель заметит, что если принять это толкование обозначений, то функция $\sqrt{x}$ существенно отличается от рациональных функций в двух отношениях. Во-первых, рациональная функция всегда определена для всех значений x, за некоторыми изолированными исключениями, тогда как функция $\sqrt{x}$ не определена для *целой области* значений x (именно для всех отрицательных значений). Во-вторых, эта функция для тех значений x, для которых она определена, имеет, как правило, два значения противоположных знаков.

С другой стороны, функция $\sqrt[3]{x}$ однозначна и определена для всех значений x.

Примеры XIII. 1. $\sqrt{(x-a)(b-x)}$, где $a<b$, определен только для $a\leqslant x\leqslant b$. Когда $a<x<b$, корень имеет два значения; при $x=a$ или b — только одно, а именно, 0.

2. Рассмотреть подобным образом функции

$$\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}\qquad (a<b<c),$$

$$\sqrt{x(x^2-a^2)},\qquad \sqrt[3]{(x-a)^2(b-x)}\quad (a<b),$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}},\qquad \sqrt{x+\sqrt{x}}\,.$$

3. Начертить кривые $y^2=x$, $y^3=x$, $y^2=x^3$.

4. Начертить графики функций $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

27. D. Неявные алгебраические функции. Легко проверить, что если

$$y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x}},$$

то

$$\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^6=\frac{(1+x)^3}{(1-x)^2},$$

а если

$$y=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}},$$

то

$$y^4-(4y^2+4y+1)x=0.$$

Каждое из этих уравнений имеет вид

$$y^m+R_1y^{m-1}+\ldots+R_m=0, \tag{1}$$

где R_1, R_2, ..., R_m — рациональные функции от x. Читатель легко убедится в том, что если y — любая из функций, рассмотренных в последнем ряде примеров, то y удовлетворяет уравнению такого вида. Возникает предположение, что это имеет место для любой явной алгебраической функции. Нетрудно доказать, что это предположение справедливо, но мы не будем здесь задерживаться на проведении его формального доказательства. На следующем примере читатель ясно увидит, как такое доказательство проходит. Пусть

$$y=\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1+x}}{x-\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{1+x}}.$$

Тогда

$$y=\frac{x+u+v+w}{x-u+v-w},$$

$$u^2=x, \quad v^2=x+u, \quad w^3=1+x,$$

и нам остается только исключить из этих уравнений u, v, w для того, чтобы получить уравнение искомого вида.

Таким образом, мы приходим к следующему определению: *y является алгебраической функцией от x степени m, если оно является корнем уравнения степени m от y с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от x.* Не нарушая общности, мы можем предположить, что старший коэффициент, как в (1), равен единице.

Этот класс функций содержит все явные алгебраические функции, рассмотренные в п. 26. Но он также содержит другие функции, которые не могут быть выражены как явные алгебраические функции, ибо известно, что в общем случае такое уравнение, как (1), не может быть разрешено в явном виде относительно y, когда $m>4$, хотя такое решение всегда возможно для $m=1$, 2, 3 или 4 и в частных случаях для высших значений m.

Определение алгебраической функции следует сравнить с определением алгебраического числа в предыдущей главе (Разные примеры, 36).

Примеры XIV. 1. Если $m=1$, y является рациональной функцией.

2. Если $m=2$, уравнение имеет вид $y^2+R_1y+R_2=0$, так что

$$y=\frac{1}{2}\left\{-R_1\pm\sqrt{R_1^2-4R_2}\right\}.$$

Эта функция определена для всех значений x, для которых $R_1^2\geqslant 4R_2$. Она имеет два значения, если $R_1^2>4R_2$, и одно — если $R_1^2=4R_2$.

Если $m=3$ или 4, мы можем применить методы решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени, изложенные в курсах алгебры. Но эти методы, как правило, весьма сложны, и результаты имеют настолько громоздкий вид, что функцию в этих случаях удобнее изучать непосредственно по исходному уравнению.

3. Рассмотреть функции, определенные уравнениями

$$y^2-2y-x^2=0,\quad y^2-2y+x^2=0,\quad y^4-2y^2+x^2=0,$$

в каждом случае находя y как явную функцию от x. Указать, для каких значений x эти функции определены.

4. Найти алгебраические уравнения с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от x, которым удовлетворяли бы следующие функции:

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}},\quad \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}},\quad \sqrt{x+\sqrt{x}},\quad \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

5. Рассмотреть уравнение $y^4=x^2$.

[Здесь $y^2=\pm x$. Если x положительно, $y=\sqrt{x}$; если x отрицательно, $y=\sqrt{-x}$. Таким образом, функция имеет два значения для всех значений x, кроме $x=0$.]

6. Алгебраическая функция от алгебраической функции от x также является алгебраической функцией от x.

[Это может быть доказано в основном теми же рассуждениями, что и в примерах 37 и 38, стр. 44—45. Мы исходим из уравнений

$$y^m+R_1(z)y^{m-1}+\ldots+R_m(z)=0,\quad z^n+S_1(x)z^{n-1}+\ldots+S_n(x)=0$$

с рациональными коэффициентами и образуем произведение

$$\Pi\left\{y^m+R_1(z_h)y^{m-1}+\ldots+R_m(z_h)\right\},$$

распространенное на n корней z_h второго уравнения.]

7. Следует, быть может, еще привести пример алгебраической функции, которая не может быть представлена в явном алгебраическом виде. Таким примером является функция y, определенная уравнением

$$y^5-y-x=0.$$

Но доказательство того, что мы не можем выразить y явно через x, трудно, и мы не будем его здесь приводить.

28. Трансцендентные функции. Все функции от x, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендентными*. Это определение принадлежит к типу негативных. Мы не будем пытаться дать здесь систематическую классификацию трансцендентных функций, но мы можем выбрать один-два особо важных подкласса.

E. Прямые и обратные тригонометрические или круговые функции. Это — синус и косинус элементарной тригонометрии, обратные им функции и функции, получаемые из них. Мы можем пока предположить, что читатель знаком с их самыми важными свойствами [1].

Примеры XV. 1. Начертить графики функций

$$\cos x,\ \sin x,\ a\cos x+b\sin x.$$

[Так как $a\cos x+b\sin x=\beta\cos(x-\alpha)$, где $\beta=\sqrt{a^2+b^2}$, а α — угол, косинус и синус которого равны соответственно $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, графики этих трех функций аналогичны по своему характеру.]

2. Начертить графики функций $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $a\cos^2 x+b\sin^2 x$.

3. Предположим, что графики $f(x)$ и $F(x)$ начерчены. Тогда график функции

$$f(x)\cos^2 x+F(x)\sin^2 x$$

представляет собой волнообразную кривую, колеблющуюся между кривыми $y=f(x)$ и $y=F(x)$. Начертить этот график в случае, когда $f(x)=x$ и $F(x)=x^2$.

4. Показать, что график функции $\cos px+\cos qx$ лежит между графиками функций $2\cos\frac{1}{2}(p-q)x$ и $-2\cos\frac{1}{2}(p+q)x$, касаясь каждого по очереди. Набросать график в случае, когда $\frac{(p-q)}{(p+q)}$ мало. (*Экз.* 1908 г.)

5. Начертить графики функций

$$x+\sin x,\quad \frac{1}{x}+\sin x,\quad x\sin x,\quad \frac{\sin x}{x}.$$

6. Начертить график функции $\sin\frac{1}{x}$.

[Если $y=\sin\frac{1}{x}$, то $y=0$ при $x=\frac{1}{m\pi}$, где m — любое целое число. Далее, $y=1$ при $x=\frac{1}{\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}$ и $y=-1$ при $x=\frac{1}{\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}$. Кривая целиком расположена между прямыми $y=-1$ и $y=1$ (фиг. 12). Она колеблется, причем частота колебаний увеличивается, когда x приближается к нулю. При $x=0$ функция не определена. Когда x велико, y мало [2]. Отрицательная половина кривой ведет себя аналогично.]

---

[1] Определения тригонометрических функций из элементарной тригонометрии предполагают, что любому сектору круга может быть сопоставлено определенное число, называемое его площадью. Каким образом это предположение оправдывается, будет видно в гл. VII и IX.

[2] Точный смысл этой фразы будет разъяснен в гл. IV и V.

7. Начертить график функции $x \sin \frac{1}{x}$.

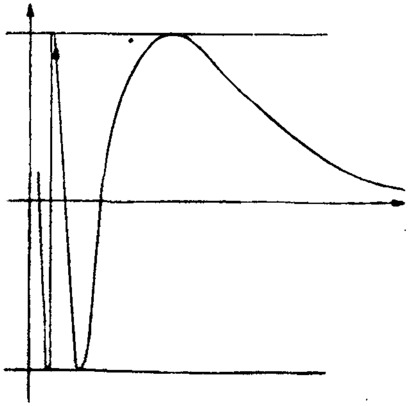
[Эта кривая так же расположена между прямыми $y = -x$ и $y = x$, как кривая примера 6 расположена между прямыми $y = -1$ и $y = 1$ (фиг. 13).]

8. Начертить графики функций

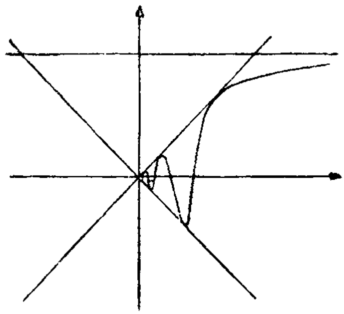
$$x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \quad \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^2, \quad \sin x + \sin \frac{1}{x}, \quad \sin x \sin \frac{1}{x}.$$

9. Начертить графики функций $\cos x^2$, $\sin x^2$, $a \cos x^2 + b \sin x^2$.

10. Начертить графики $\arccos x$ и $\arcsin x$ (обратный косинус и синус иногда записываются и так: $\cos^{-1} x$ и $\sin^{-1} x$).



Фиг. 12



Фиг. 13

[Если $y = \arccos x$, $x = \cos y$. Это дает нам возможность начертить график x, рассматриваемого как функция от y, и эта же кривая дает зависимость y как функции от x. Ясно, что y определено только если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, и бесконечно многозначно для этих значений x. Как читателю несомненно известно, при $-1 < x < 1$ существует значение y, заключенное между 0 и π; если это значение обозначить через α, то все другие значения y даются формулой $2n\pi \pm \alpha$, где n — любое целое число.]

11. Начертить графики функций

$$\operatorname{tg} x, \ \operatorname{ctg} x, \ \sec x, \ \operatorname{cosec} x, \ \operatorname{tg}^2 x, \ \operatorname{ctg}^2 x, \ \sec^2 x, \ \operatorname{cosec}^2 x.$$

12. Начертить графики $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$, $\operatorname{arc\,cosec} x$. Привести формулы (как в примере 10), выражающие все значения каждой из этих функций через некоторое частное значение.

13. Начертить графики функций

$$\operatorname{tg} \frac{1}{x}, \quad \operatorname{ctg} \frac{1}{x}, \quad \sec \frac{1}{x}, \quad \operatorname{cosec} \frac{1}{x}.$$

14. Показать, что $\cos x$ и $\sin x$ не являются рациональными функциями от x. [Функция называется *периодической* с периодом a, если $f(x) = f(x + a)$ для всех значений x, для которых $f(x)$ определена. Так, $\cos x$ и $\sin x$ имеют период 2π. Легко видеть, что никакая периодическая функция не может быть рациональной, если она не постоянная. Действительно, допустим, что

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где P и Q — полиномы, и что $f(x)=f(x+a)$, причем каждое из этих равенств имеет место для всех значений x. Пусть $f(0)=k$. Тогда уравнение $P(x)-kQ(x)=0$ удовлетворяется бесконечным числом значений x, именно $x=0$, a, $2a$ и т. д., а следовательно, и для всех значений x. Таким образом, $f(x)=k$ для всех x, т. е. $f(x)$ — константа.]

15. Показать, обобщая предыдущий результат, что никакая периодическая функция не может быть алгебраической функцией от x.

[Пусть уравнение, определяющее алгебраическую функцию, будет

$$y^m+R_1y^{m-1}+\ldots+R_m=0, \tag{1}$$

где $R_1, \ldots, R_m$ — рациональные функции от x. Это уравнение можно записать в виде

$$P_0y^m+P_1y^{m-1}+\ldots+P_m=0,$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_m$ — полиномы от x. Рассуждая как в предыдущем примере, мы убедимся, что

$$P_0k^m+P_1k^{m-1}+\ldots+P_m=0$$

для всех значений x. Следовательно, $y=k$ удовлетворяет уравнению (1) для всех значений x, и одна система значений нашей алгебраической функции сводится к постоянной.

Разделим теперь (1) на $y-k$ и повторим рассуждение. Окончательно мы придем к заключению, что наша алгебраическая функция имеет для любых значений x одну и ту же систему значений $k, k', \ldots$, т. е. она состоит из некоторого числа постоянных.]

16. Обратный синус и обратный косинус не являются ни рациональными, ни алгебраическими функциями. [Это следует из того, что для любого значения x между -1 и $+1$, $\arcsin x$ и $\arccos x$ имеют бесконечно много значений.]

29. F. Другие классы трансцендентных функций. Следующие по важности за тригонометрическими являются функции показательная и логарифмическая, которые будут рассмотрены в гл. IX и X. В настоящий момент эти функции еще недоступны нам, а большинство других изученных классов трансцендентных функций, как, например, эллиптические функции, бесселевы и лежандровы функции, гамма-функция и т. п., и вовсе выходят за рамки этой книги. Существуют, однако, некоторые элементарные типы функций, которые хотя и обладают значительно меньшим теоретическим интересом, чем функции рациональные, алгебраические или тригонометрические, тем не менее особенно поучительны как примеры возможных разновидностей функциональной зависимости.

Примеры XVI. 1. Пусть $y=[x]$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не большее x. График показан на фиг. 14*a*. Левые концы сплошных отрезков принадлежат к графику, а правые не принадлежат.

2. $y=x-[x]$ (фиг. 14*b*). 3. $y=\sqrt{x-[x]}$ (фиг. 14*c*).

4. $y=[x]+\sqrt{x-[x]}$ (фиг. 14*d*). 5. $y=(x-[x])^2$, $[x]+(x-[x])^2$.

6. $y=[\sqrt{x}]$, $[x^2]$, $\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$, $x^2-[x^2]$, $[1-x^2]$.

7. Пусть y определено как ***наибольший простой делитель*** x (см. пример X. 6). Тогда y определено только для целочисленных значений x. Если

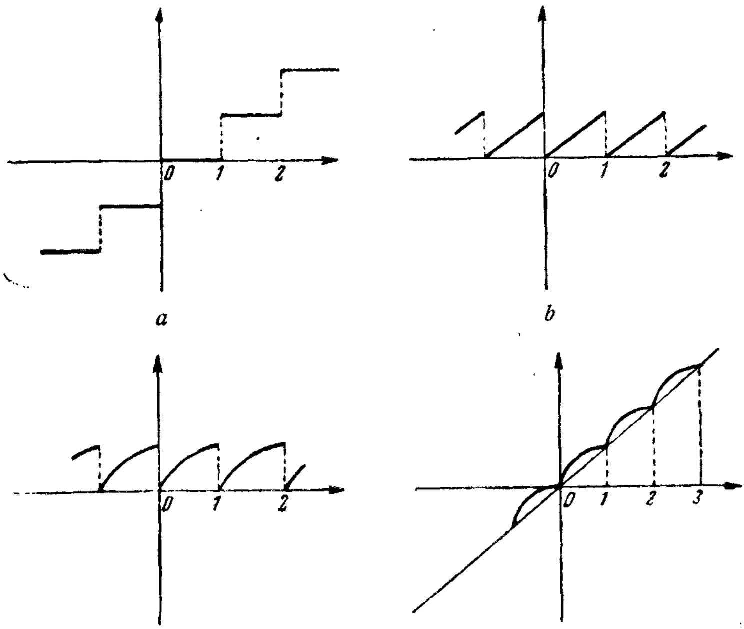
$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots,$$

то

$$y = 1, 2, 3, 2, 5, 3, 7, 2, 3, 5, 11, 3, 13, \dots .$$

График состоит из изолированных точек.

8. Пусть y будет *знаменателем* x (см. пример X. 7). В этом случае y определено только для рациональных значеиий x. Мы можем отметить на графике сколько угодно точек, но результат ие будет представлять кривую



Фиг. 14

в обычном смысле этого слова. На графике иет точек, соответствующих иррациональиым зиачениям x.

Проведем отрезок прямой, соединяющий точки $(N-1, N)$ и (N, N), где N—положительное целое число. Показать, что число точек графика, лежащих на этом отрезке, равно числу положительных целых чисел, меньших N и взаимно простых с N.

9. Пусть $y=0$, если x — целое число, и $y=x$, когда x — нецелое. График получается из прямой линии $y=x$ изъятием из нее точек

$$\dots, (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots$$

и добавлением точек

$$\dots, (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots$$

оси x-ов.

10. Пусть $y=1$, если x рационально, и $y=0$, если x иррационально. График состоит из двух рядов точек, расположенных на прямых $y=1$ и $y=0$. Для глаза он неотличим от этих двух непрерывных прямых, но в действительности бесконечно много точек отсутствует на каждой из них.

11. Пусть $y=x$, если x иррационально, и $y=\sqrt{\frac{(1+p^2)}{(1+q^2)}}$, если x — рациональное число $\frac{p}{q}$.

Часть графика, соответствующая иррациональным значениям x, в действительности не является непрерывной кривой, но по виду неотличима от прямой $y=x$.

Рассмотрим теперь рациональные значения x. Пусть сначала x будет положительным. Тогда $\sqrt{\frac{(1+p^2)}{(1+q^2)}}$ не может быть равен p/q, если $p \neq q$, т. е. $x \neq 1$. Таким образом, все точки, соответствующие рациональным значениям x, не попадают на прямую $y=x$, кроме единственной точки $(1, 1)$. Далее, если $p<q$, $\sqrt{\frac{(1+p^2)}{(1+q^2)}}>\frac{p}{q}$; если $p>q$, $\sqrt{\frac{(1+p^2)}{(1+q^2)}}<\frac{p}{q}$. Следовательно, точки лежат выше этой прямой, если $0<x<1$, и ниже ее, — если $x>1$. Если p и q — большие числа, то $\sqrt{\frac{(1+p^2)}{(1+q^2)}}$ приблизительно равен $\frac{p}{q}$. Вблизи любого значения x можно найти любое число рациональных чисел с большими числителями и знаменателями. Поэтому график содержит большое число точек, скапливающихся вокруг прямой $y=x$. Его общим видом (для положительных x) будет прямая, окруженная роем изолированных точек, который становится все гуще и гуще по мере приближения к прямой.

Часть графика, соответствующая отрицательным значениям x, состоит из остатка разрывной прямой и зеркальных отображений всех этих изолированных точек в оси y-ов. Таким образом, слева от оси y-ов точки скапливаются не вокруг прямой $y=x$, а вокруг прямой $y=-x$, которая сама не принадлежит к графику.

30. Графическое решение уравнений, содержащих одно неизвестное число. Многие уравнения могут быть представлены в виде

$$f(x)=\varphi(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции, графики которых нетрудно начертить. Если кривые

$$y=f(x), \quad y=\varphi(x)$$

пересекаются в точке P с абсциссой ξ, то ξ является корнем уравнения (1).

Примеры XVII. 1. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Графически это уравнение может быть решено многими способами. Например, мы можем начертить графики функций

$$y=ax+2b, \quad y=-\frac{c}{x},$$

пересечения которых, если они существуют, определят корни. Или мы можем взять

$$y = x^2, \quad y = -\frac{2bx + c}{a}$$

(см. также примеры VII. 2).

2. Решить каким-либо из этих методов уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x^2 - 7x + 4 = 0, \quad 3x^2 + 2x - 2 = 0.$$

3. **Уравнение** $x^m + ax + b = 0$. Это уравнение может быть решено построением кривых $y = x^m$, $y = -ax - b$. Проверить следующую таблицу числа корней уравнения

$$x^m + ax + b = 0:$$

(a) *m четно* $\begin{cases} b \text{ положительно, } \textit{два или ни одного,} \\ b \text{ отрицательно, } \textit{два.} \end{cases}$

(b) *m нечетно* $\begin{cases} a \text{ положительно, } \textit{один,} \\ a \text{ отрицательно, } \textit{три или один.} \end{cases}$

Составить числовые примеры, иллюстрирующие все возможные случаи.

4. Показать, что уравнение $\operatorname{tg} x = ax + b$ всегда имеет бесконечное число корней.

5. Определить число корней уравнений

$$\sin x = x, \quad \sin x = \frac{1}{3}x, \quad \sin x = \frac{1}{8}x, \quad \sin x = \frac{1}{120}x.$$

6. Показать, что если a мало и положительно (например, $a = 0{,}01$), то уравнение

$$x - a = \frac{1}{2}\pi \sin^2 x$$

имеет три корня. Рассмотреть также случай малого отрицательного a. Исследовать, как меняется число корней, когда изменяется a.

31. Функции двух переменных и их графическое представление. В п. 20 мы рассматривали два переменных, связанных некоторым соотношением. Мы можем также рассматривать *три* переменных (x, y и z), связанных некоторым соотношением так, что когда значения x и y даны, значение или значения z известны. В этих условиях мы называем z *функцией двух переменных* x и y; x и y являются *независимыми* переменными, z — *зависимым* переменным, и мы выражаем эту зависимость z от x и y символом

$$z = f(x, y).$$

Замечания, сделанные в п. 20, остаются в силе и в этом, более сложном, случае.

Графический метод представления таких функций двух переменных в принципе остается тем же, что и для функций от одного переменного. Мы берем три оси OX, OY, OZ в пространстве трех измерений так, что каждая ось перпендикулярна к двум другим. Точка (a, b, c) — это точка, расстояния которой от плоскостей YOZ,

ZOX, XOY, измеренные параллельно OX, OY, OZ, равны, соответственно, a, b и c. При этом следует, конечно, учитывать знаки, исходя из того, что длины, измеряемые в направлениях OX, OY, OZ, считаются положительными. Определения *координат, осей* и *начала* остаются прежними.

Пусть теперь

$$z = f(x, y).$$

Когда x и y изменяются, точка (x, y, z) движется в пространстве. Совокупность всех принимаемых ею положений называется *геометрическим местом* точки (x, y, z), или *графиком* функции $z = f(x, y)$. Если соотношение между x, y и z, которое определяет z, может быть выражено аналитической формулой, то эта формула называется *уравнением* геометрического места. Легко показать, например, что уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(общее уравнение первой степени) представляет *плоскость* и что уравнение любой плоскости может быть представлено в таком виде. Уравнение

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Fx + 2Gy + 2Hz + C = 0,$$

где $F^2 + G^2 + H^2 - C > 0$, представляет *сферу* и т. д. За доказательствами этих предложений мы вновь должны отослать читателя к учебникам аналитической геометрии.

32. Плоские кривые. До сих пор для выражения функциональной зависимости y от x мы применяли обозначение

$$y = f(x). \tag{1}$$

Ясно, что это обозначение лучше всего подходит в том случае, когда y определено посредством формулы, содержащей x.

Нам придется, однако, часто иметь дело с функциональными зависимостями, которые либо невозможно, либо неудобно выразить в такой форме. Если, например, $y^5 - y - x = 0$, или $x^5 + y^5 - ay = 0$, то известно, что нельзя явно выразить y как алгебраическую функцию от x. Если

$$x^2 + y^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0,$$

то

$$y = -F + \sqrt{F^2 - x^2 - 2Gx - C};$$

но функциональная зависимость y от x проще выражается первоначальным уравнением.

Во всех этих случаях функциональная зависимость выражается *приравниванием к нулю функции двух переменных x и y*, т. е. уравнением

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

Это уравнение мы будем считать общим выражением функциональной зависимости. Оно содержит уравнение (1) как частный случай, так как $y-f(x)$ является специальным видом функции от x и y. Мы можем, следовательно, говорить о геометрическом месте точек (x, y), подчиненных уравнению $f(x, y)=0$, о графике функции y, определенной уравнением $f(x, y)=0$, о кривой или геометрическом месте $f(x, y)=0$ и об уравнении этой кривой или этого геометрического места.

Существует еще другой метод представления кривых, который также часто полезен. Допустим, что x и y являются функциями некоторой третьей переменной t, которая может иметь некоторый геометрический смысл, а может такового и не иметь. Мы можем записать

$$x=f(t), \quad y=F(t). \tag{3}$$

Если t приписывается какое-либо частное значение, то соответствующие значения x и y известны. Каждая пара таких значений определяет точку (x, y). Если мы построим все точки, которые соответствуют, таким образом, разным значениям t, то мы получим *график геометрического места, определенного уравнениями* (3). Предположим, например, что

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t,$$

и пусть t изменяется от 0 до 2π. Тогда легко видеть, что точка (x, y) описывает окружность радиуса a с центром в начале. Если t принимает значения, лежащие вне указанных пределов, то точка (x, y) вновь и вновь описывает ту же окружность.

Исключение t дает $x^2+y^2=a^2$ — обычное уравнение окружности.

Примеры XVIII. 1. Точки пересечения двух кривых с уравнениями $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$, где f и φ — полиномы, могут быть определены, если эти уравнения могут быть решены совместно относительно x и y. Таким образом, два уравнения, как правило, представляют конечное число изолированных точек.

2. Начертить кривые $(x+y)^2=1$, $xy=1$, $x^2-y^2=1$.

3. Уравнение $f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)=0$ представляет кривую, проходящую через точки пересечения кривых $f=0$ и $\varphi=0$.

4. Какие геометрические места представлены уравнениями

$$(\alpha)\ x=at+b, \quad y=ct+d, \qquad (\beta)\ \frac{x}{a}=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{y}{b}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

где t принимает все действительные значения?

33. Геометрические места в пространстве. В пространстве трех измерений существует два принципиально различных класса геометрических мест, простейшими примерами которых являются плоскость и прямая.

Точка, движущаяся вдоль прямой линии, имеет только *одну степень свободы*. Направление ее движения фиксировано, ее положение может быть полностью определено одним измерением, например, ее расстоянием от некоторой фиксированной точки прямой. Если мы возьмем за прямую нашу основную прямую Λ из гл. I, то положение любой ее точки будет определено единственной координатой x. Точка, движущаяся в плоскости, имеет, однако, уже *две* степени свободы. Для фиксации ее положения требуется определение двух координат.

Геометрическое место, представленное одним уравнением

$$z=f(x, y),$$

явно принадлежит ко второму из рассмотренных классов геометрических мест и называется *поверхностью*. Оно не всегда отвечает нашему обычному представлению о поверхности.

Рассмотрения п. 31 могут быть, очевидно, обобщены так, чтобы привести к определению функции $f(x, y, z)$ от *трех* переменных (или функции от любого числа переменных). И так же, как мы в п. 32 условились принять $f(x, y)=0$ в качестве общей формы уравнения плоской кривой, мы уславливаемся здесь принять

$$f(x, y, z)=0$$

за общую форму уравнения поверхности.

Геометрическое место, представленное двумя уравнениями вида $z=f(x, y)$ или $f(x, y, z)=0$, принадлежит к первому классу геометрических мест и называется *кривой*. Так, *прямая линия* может быть представлена двумя уравнениями вида $Ax+By+Cz+D=0$. *Окружность* в пространстве может рассматриваться как пересечение сферы и плоскости, поэтому она может быть представлена двумя уравнениями видов

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2, \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Примеры XIX. 1. Что представляется *тремя* уравнениями вида $f(x, y, z)=0$?

2. Три линейных уравнения представляют, как правило, одну точку. Каковы исключительные случаи?

3. Каковы уравнения плоской кривой $f(x, y)=0$ в плоскости XOY, если ее рассматривать как кривую в пространстве? [$f(x, y)=0$, $z=0$.]

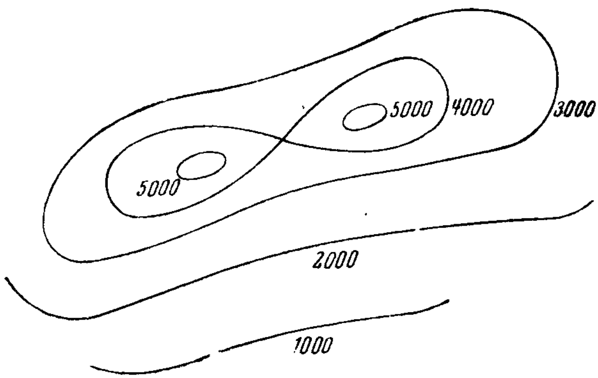
4. **Цилиндры.** Каков смысл одного уравнения $f(x, y)=0$, рассматриваемого как геометрическое место точек в пространстве трех измерений?

[Все точки на поверхности удовлетворяют уравнению $f(x, y)=0$, каково бы ни было значение z. Кривая $f(x, y)=0$, $z=0$ является кривой, по которой наше геометрическое место пересекает плоскость XOY. Искомое геометрическое место представляет собой поверхность, образованную прямыми, проведенными параллельно OZ через все точки этой кривой. Такая поверхность называется *цилиндром*.]

5. **Графическое изображение поверхности на плоскости.** Можно подумать, что достаточно точного изображения поверхности на плоском рисунке получить невозможно. Однако весьма ясное представление о характере поверхности часто может быть получено следующим образом. Пусть уравнение поверхности будет $z=f(x, y)$.

Если мы придадим z какое-нибудь значение a, то получим уравнение $f(x, y) = a$, которое можно рассматривать как определяющее плоскую кривую на бумаге. Начертим эту кривую и отметим ее значком (a). Фактически кривая (a) является проекцией на плоскость XOY кривой пересечения поверхности с плоскостью $z = a$. Проделаем это для всех значений a (практически, конечно, для некоторых выбранных значений a). Мы получим некоторый чертеж типа, показанного на фиг. 15. Он напоминает географическую карту с нанесенными на ней линиями уровня. И действительно, такие карты строятся по этому принципу. Линия уровня 1000 является, например, проекцией на плоскость уровня моря сечения земной поверхности, плоскостью, параллельной плоскости уровня моря и проходящей на 1000 футов выше ее[1]).

6. Провести ряд линий уровня для иллюстрации формы поверхности $2z = 3xy$.



Фиг. 15

7. **Прямые круговые конусы.** Возьмем начало координат за вершину конуса и ось z за его ось. Пусть α будет угол раствора осевого сечения конуса. Тогда уравнение конуса (который следует считать простирающимся в обе стороны от вершины) будет иметь вид

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

8. **Общие поверхности вращения.** Конус примера 7 пересекает плоскость ZOX по двум прямым, уравнения которых объединяются в уравнении $x^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. Это означает, что уравнение поверхности, образованной вращением кривой $y = 0$, $x^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ вокруг оси z, получается из второго из этих уравнений заменой в нем x^2 на $x^2 + y^2$. Показать, что, вообще, уравнение поверхности, образованной вращением кривой $y = 0$, $x = f(z)$ вокруг оси z, имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

9. **Общие конусы.** Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через фиксированную точку, называется *конусом*, а эта точка — вершиной конуса. Частным случаем является прямой круговой конус, рассмотренный в примере 7. Показать, что уравнение конуса с вершиной

[1]) Мы предполагаем, что кривизной земной поверхности можно пренебречь.

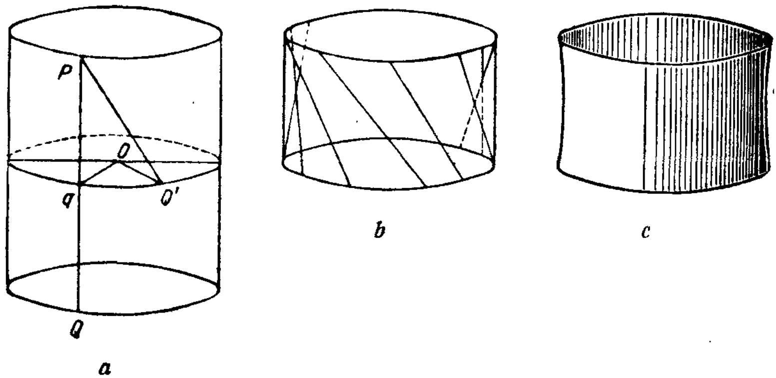
в точке O имеет вид $f(z/x, z/y)=0$ и что каждое уравнение этого вида представляет конус. [Если точка (x, y, z) лежит на конусе, то и точка $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ должна лежать на нем при любом значении λ.]

10. **Линейчатые поверхности.** Цилиндры и конусы являются частными случаями *поверхностей, состоящих из прямых линий.* Такие поверхности называются *линейчатыми.*

Следующие два уравнения

$$x = az + b, \quad y = cz + d \tag{1}$$

представляют пересечение двух плоскостей, т. е. прямую линию. Предположим теперь, что a, b, c, d, вместо того, чтобы быть постоянными, являются



Фиг. 16

функциями некоторого вспомогательного переменного t. Для каждого частного значения t уравнения (1) определяют прямую линию. Когда t изменяется, эта прямая движется в пространстве и образует поверхность, уравнение которой может быть найдено исключением t из уравнений (1). Например, в примере 7 уравнениями прямой, которая образует конус, являются

$$x = z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos t, \quad y = z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t,$$

где t — угол между плоскостью XOZ и плоскостью, проходящей через прямую и ось z.

Другой простой пример линейчатой поверхности может быть построен следующим образом. Возьмем два сечения прямого круглого цилиндра, перпендикулярные его оси и отстоящие друг от друга на расстоянии l (фиг. 16a). Мы можем представить себе поверхность цилиндра состоящей из большого числа тонких параллельных жестких стержней длины l таких, как PQ; концы этих стержней прикреплены к двум кольцам радиуса a.

Возьмем теперь третье кольцо того же радиуса и наденем его на цилиндр так, чтобы оно находилось на расстоянии h от одного из первых двух колец (см. фиг. 16a, где $Pq = h$). Раскрепим конец Q стержня PQ и повернем PQ вокруг P так, чтобы точку Q можно было закрепить на третьем кольце в положении Q'. Угол $qOQ' = \alpha$ на фигуре определяется из соотношения

$$l^2 - h^2 = qQ'^2 = \left(2a \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Повернем все стержни, из которых состоял цилиндр, таким же образом и на тот же угол. Мы получим линейчатую поверхность, форма которой изображена на фиг. 16*b*. Она полностью составлена из прямых линий, но всюду искривлена. По своему общему виду она напоминает некоторые кольца для салфеток (фиг. 16*c*) *).

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ II

1. Показать, что если $y = f(x) = (ax + b)/(cx - a)$, то $x = f(y)$.

2. Если $f(x) = f(-x)$ для всех значений x, то $f(x)$ называется *четной* функцией. Если $f(x) = -f(-x)$, то она называется *нечетной* функцией. Показать, что всякая функция от x, определенная для всех значений x, является суммой некоторой четной и некоторой нечетной функций от x.

[Использовать тождество

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\} + \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\}].$$

3. Начертить графики функций

$$3\sin x + 4\cos x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin x\right). \qquad (\textit{Экз. } 1896 \text{ г.})$$

4. Начертить графики функций

$$\sin x\,(a\cos^2 x + b\sin^2 x), \quad \frac{\sin x}{x}(a\cos^2 x + b\sin^2 x), \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

5. Начертить графики функций $x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, $\dfrac{[x]}{x}$.

6. Начертить графики функций

$$(1)\ \arccos(2x^2 - 1) - 2\arccos x,$$

$$(2)\ \operatorname{arc\,tg}\frac{a + x}{1 - ax} - \operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} x,$$

где символы $\arccos a$, $\operatorname{arc\,tg} a$ означают для любого a наименьший положительный (или нулевой) угол, косинус, соответственно тангенс, которого равен a.

7. Проверить следующий метод построения графика $f\{\varphi(x)\}$ с помощью прямой $y = x$ и графиков $f(x)$ и $\varphi(x)$: берем $OA = x$ вдоль OX, проводим AB параллельно OY до пересечения с $y = \varphi(x)$ в точке B, BC параллельно OX до пересечения с $y = x$ в точке C, CD параллельно OY до пересечения с $y = f(x)$ в точке D и DP параллельно OX до пересечения с AB в точке P. Тогда P является точкой искомого графика.

8. Показать, что корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ являются абсциссами точек пересечения (отличных от начала) параболы $y = x^2$ и окружности

$$x^2 + y^2 + (p - 1)y + qx = 0.$$

9. Корни уравнения $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$ являются абсциссами точек пересечения параболы $x^2 = y - \frac{1}{2}nx$ и окружности

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{2}pn + \frac{1}{2}n + q\right)x + \left(p - 1 - \frac{1}{4}n^2\right)y + r = 0.$$

10. Рассмотреть графическое решение уравнения

$$x^m + ax^2 + bx + c = 0$$

---

*) Эта поверхность является частью так называемого однополостного гиперболоида вращения. (*Прим. перев.*)

с помощью кривых $y=x^m$, $y=-ax^3-bx-c$. Составить таблицу, указывающую число корней в разных случаях.

11. Решить уравнение $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=2\sqrt{2}$ и показать, что уравнение $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=c$ имеет два корня между 0 и 2π, если $c^2<8$, и четыре корня, если $c^2>8$.

12. Показать, что уравнение

$$2x=(2n+1)\pi(1-\cos x),$$

где n — положительное целое число, имеет $2n+3$ корня, и примерно указать их расположение. (*Экз.* 1896 г.)

13. Показать, что уравнение $\frac{2}{3}x\sin x=1$ имеет четыре корня между $-\pi$ и π.

14. Рассмотреть число и значения корней уравнений

$$(1)\ \operatorname{ctg}x+x-\frac{3}{2}\pi=0,\qquad (2)\ x^2+\sin^2 x=1,$$

$$(3)\ (1+x^2)\operatorname{tg}x=2x,\qquad (4)\ \sin x-x+\frac{1}{6}x^3=0,$$

$$(5)\ (1-\cos x)\operatorname{tg}\alpha-x+\sin x=0.$$

15. Полином второй степени, принимающий при $x=a,\ b,\ c$ соответственно значения $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, имеет вид

$$\alpha\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\beta\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\gamma\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Привести аналогичную формулу для полинома $(n-1)$-ой степени, который принимает при $x=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ соответственно значения $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$.

16. Найти полином от x второй степени, который для значений $x=0$, 1, 2 принимает значения $1/c$, $1/(c+1)$, $1/(c+2)$, и показать, что когда $x=c+2$, значение полинома будет $1/(c+1)$. (*Экз.* 1911 г.)

17. Показать, что если x является рациональной функцией от y и y — рациональной функцией от x, то $Axy+Bx+Cy+D=0$.

18. Если y является алгебраической функцией от x, то x есть также алгебраическая функция от y.

19. Проверить, что уравнение

$$\cos\frac{1}{2}\pi x=1-\frac{x^2}{x+(1-x)\sqrt{\frac{1}{3}(2-x)}}$$

приближенно справедливо для всех значений x между 0 и 1. [Взять $x=0$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1 и использовать таблицы. Для каких из этих значений формула точна?]

20. Каковы формы графиков функций

$$z=[x]+[y],\qquad z=x+y-[x]-[y]?$$

21. Каковы формы графиков функций

$$z=\sin x+\sin y,\qquad z=\sin x\sin y,\qquad z=\sin xy,\qquad z=\sin(x^2+y^2)?$$

22. **Геометрические построения иррациональных чисел.** В гл. I мы привели два простых геометрических построения длины, равной $\sqrt{2}$, при заданной единичной длине. Мы показали также, как построить корни любого квадратного уравнения $ax^2+2bx+c=0$, в предположении, что мы можем построить отрезки, длины которых равны отношению любой пары коэф-

фициентов a, b, c, что наверно имеет место, если a, b, c рациональны. Все эти построения были эвклидовыми построениями: они производились с помощью только линейки и циркуля.

Совершенно очевидно, что мы можем построить этими методами и любую длину, которая измеряется иррациональным числом, определенным любой сколь угодно сложной комбинацией квадратных корней. Подходящим примером является, скажем,

$$\sqrt[4]{\sqrt{\frac{17+3\sqrt{11}}{17-3\sqrt{11}}}-\sqrt{\frac{17-3\sqrt{11}}{17+3\sqrt{11}}}}.$$

Это выражение содержит корень четвертой степени, но он является, конечно, квадратным корнем из квадратного корня. Мы должны были бы начать с построения $\sqrt{11}$ как среднего между 1 и 11; затем построить $17+3\sqrt{11}$ и $17-3\sqrt{11}$ и т. д. Или же эти две смешанные иррациональности можно было бы построить непосредственно как корни уравнения $x^2-34x+190=0$.

Обратно, *только* иррациональности такого вида могут быть построены эвклидовыми методами. Исходя из единичной длины, мы можем построить любую *рациональную* длину, а следовательно, мы можем построить прямую $Ax+By+C=0$, если отношения коэффициентов A, B, C рациональны. Далее, мы можем построить окружность

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

(или $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$), если α, β, ρ рациональны (отсюда следует что и g, f, c рациональны).

Но в любом эвклидовом построении каждая новая точка, получаемая на чертеже, определяется либо как пересечение двух прямых или двух окружностей, либо как пересечение прямой и окружности. Если же коэффициенты рациональны, то пара уравнений вида

$$Ax+By+C=0, \quad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

дает в качестве решения значения x и y вида $m+n\sqrt{p}$, где m, n, p рациональны. Действительно, если мы подставим во второе уравнение y, выраженное через x из первого, то мы получим для x квадратное уравнение с рациональными коэффициентами. Таким образом, координаты всех точек, получаемых с помощью прямых и окружностей с рациональными коэффициентами, выражаются через рациональные числа и квадратичные иррациональности. То же можно сказать и относительно расстояния $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ между любыми двумя такими точками.

С построенными таким образом иррациональными расстояниями мы можем перейти к построению прямых и окружностей, коэффициенты которых сами уже содержат квадратичные иррациональности. Очевидно, однако, что все длины, которые могут быть построены с помощью таких прямых и окружностей, все же выражаются в конечном счете только через квадратные корни, хотя их выражения могут иметь очень сложный вид. Это положение остается в силе и при любом числе повторений наших построений. Таким образом, *эвклидовыми методами можно построить любую иррациональность, содержащую только квадратные корни, и нельзя построить никаких других иррациональностей.*

Одна из знаменитых проблем древности состояла в удвоении куба, т. е. в построении эвклидовыми методами длины, измеряемой $\sqrt[3]{2}$. Можно показать, что $\sqrt[3]{2}$ не может быть выражен конечной комбинацией рациональных чисел и квадратных корней, так что решение этой проблемы невозможно. См. Hobson, *Squaring the circle*, стр. 47 и дальше *). Первый этап доказательства, именно доказательство того, что $\sqrt[3]{2}$ не может быть корнем квадратного уравнения $ax^2+2bx+c=0$ с рациональными коэффициентами, был приведен в гл. I (Разные примеры, 27).

23. Показать, что единственными длинами, которые могут быть построены, исходя из данной единичной длины, с помощью одной линейки, являются рациональные длины.

24. **Приближенная квадратура круга.** Пусть O будет центр круга радиуса R. На касательной в точке A круга отложим $AP=\frac{11}{5}R$ и $AQ=\frac{13}{5}R$ в одном и том же направлении. На луче AO отложим $AN=OP$ и проведем NM параллельно OQ до пересечения с AP в точке M. Показать, что

$$\frac{AM}{R}=\frac{13}{25}\sqrt{146}$$

и что принятие AM за длину окружности радиуса R приводит к значению π, точного до пяти знаков после запятой. Если R — радиус Земли, то ошибка при замене длины экватора длиной AM не превосходит 10 *м*.

[Мы указывали в п. 15, что π трансцендентно; но в этой книге мы не можем даже доказать, что оно иррационально. Это впервые доказал Ламберт в 1761 г. с помощью непрерывных дробей.

Наиболее известными приближениями к π являются $\frac{22}{7}$ и $\frac{355}{113}$, причем последнее приближение точно до шести знаков после запятой. Индусы применяли приближение $\sqrt{10}$ (с ошибкой уже во втором знаке). Большое число весьма замечательных приближений может быть найдено в работах Рамануджана (Ramanujan, *Collected papers*, стр. 23—39). Простейшими являются:

$$\frac{19}{16}\sqrt{7},\quad \frac{7}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{5}\right),\quad \left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{1/4},\quad \frac{63}{25}\left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}\right);$$

они точны, соответственно, до 3, 3, 8 и 9 знаков после запятой.]

25. **Построение $\sqrt[3]{2}$.** Пусть O является вершиной и S — фокусом параболы $y^2=4x$, и P — одна из точек пересечения этой параболы с параболой $x^2=2y$. Показать, что OP пересекает фокальную хорду первой параболы, перпендикулярную ее оси, в такой точке Q, что $SQ=\sqrt[3]{2}$.

26. Возьмем окружность с диаметром OA, равным единице, и касательную в точке A. Проведем хорду OBC, пересекающую окружность в точке B, а касательную — в точке C. На этой прямой отложим $OM=BC$. Взяв O в качестве начала и OA за ось x, показать, что геометрическое место точек M является кривой

$$(x^2+y^2)x-y^2=0$$

(называемой *циссоидой Диоклеса*). Начертить эту кривую. Возьмем вдоль оси y длину $OD=2$. Пусть AD пересекает кривую в точке P и OP — касательную к окружности в A в точке Q. Показать, что $AQ=\sqrt[3]{2}$.

*) См. также Адлер, *Теория геометрических построений*, Учпедгиз, 1940, §§ 36 и 45. (*Прим. перев.*)

ГЛАВА III

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

34. Смещения вдоль линии и на плоскости. „Действительное число" x, с которым мы имели дело в двух предыдущих главах, может рассматриваться со многих точек зрения. Оно может рассматриваться просто как число, лишенное какого бы то ни было геометрического смысла, или такой геометрический смысл может быть ему приписан по крайней мере тремя различными способами. Оно может рассматриваться как *мера длины*, а именно, длины A_0P вдоль прямой Λ из гл. I. Оно может рассматриваться как *значок точки*, а именно, точки P, расстояние которой от A_0 равно x. Или, наконец, оно может рассматриваться как *мера смещения*, или *изменения положения* на прямой Λ. На этой третьей точке зрения мы и сосредоточим наше внимание.

Представим себе небольшую частицу, расположенную в точке P на прямой Λ и затем перенесенную в Q. Мы будем называть то смещение, или изменение положения, которое необходимо для перенесения частицы из P в Q, *смещением* $\overline{PQ}$. Для полного задания смещения необходимы три данных: его *величина*, его *ориентация* вдоль прямой, и то, что можно назвать его *точкой приложения*, т. е. исходное положение P частицы. Но когда мы говорим только об изменении положения, произведенном смещением, как таковом, естественно не принимать во внимание точку приложения и рассматривать все смещения с равными длинами и одинаковой ориентацией как эквивалентные. Тогда смещение полностью задается длиной $PQ = x$, причем ориентация его определяется знаком x. Мы можем поэтому говорить о *смещении* $[x]$[1] и писать $\overline{PQ} = [x]$.

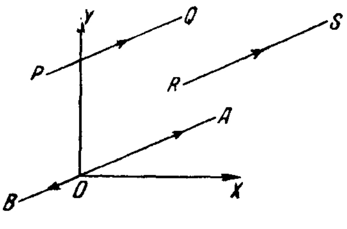
Мы применяем квадратные скобки для того, чтобы отличить смещение $[x]$ от длины или числа x[2]. Если a является координатой

[1] Вряд ли необходимо предупреждать читателя о том, чтобы он не смешивал этого применения символа $[x]$ с его применением в гл. II (см. примеры XVI и Разные примеры, 20).

[2] Строго говоря, мы должны были бы с помощью какого-либо аналогичного различия в обозначениях отличать длину x от числа x, измеряющего ее. Читатель, быть может, будет склонен рассматривать такие различия как излишний педантизм. Но с накоплением математического опыта он убедится в чрезвычайной важности ясного различия между объектами, которые хотя и весьма тесно связаны друг с другом, но все же не тождественны.

точки P, то координатой Q будет $a+x$. Смещение $[x]$, следовательно, переносит частицу из точки a в точку $a+x$.

Переходим теперь к рассмотрению *смещений на плоскости*. Мы можем определить смещение $\overline{PQ}$ так же, как это было сделано выше. Но теперь требуется больше данных для полного задания смещения. Мы должны знать: 1) *величину* смещения, т. е. длину отрезка PQ, 2) *направление* смещения, которое определяется углом между PQ и некоторой фиксированной прямой на плоскости, (3) *ориентацию* смещения и (4) его *точку приложения*. От этого последнего требования мы можем отказаться, если условимся рассматривать два смещения одинаковой величины и одного и того же направления и смысла как эквивалентные. Другими слонами, если PQ и RS равны и параллельны и смысл движения от P к Q тот же, что и от R к S, мы считаем смещения $\overline{PQ}$ и $\overline{RS}$ эквивалентными и пишем



Фиг. 17

$$\overline{PQ} \doteq \overline{RS}.$$

Возьмем теперь какую-либо систему координат на плоскости (как, например, OX, OY на фиг. 17). Проведем отрезок OA, равный и параллельный PQ так, чтобы смысл движения от O к A был бы тем же, что и от P к Q. Тогда $\overline{PQ}$ и $\overline{OA}$ — эквивалентные смещения. Пусть x и y будут координатами A. Тогда, очевидно, $\overline{OA}$ полностью определено, если x и y заданы. Мы будем называть $\overline{OA}$ *смещением* $[x, y]$ и писать

$$\overline{OA} = \overline{PQ} = \overline{RS} = [x, y].$$

35. Эквивалентность смещений. Умножение смещений на числа. Если ξ и η являются координатами точки P, а ξ' и η' — координатами точки Q, то, очевидно,

$$x = \xi' - \xi, \quad y = \eta' - \eta.$$

Смещение из (ξ, η) в (ξ', η') будет поэтому

$$[\xi' - \xi, \ \eta' - \eta].$$

Ясно, что два смещения $[x, y]$, $[x', y']$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $x = x'$, $y = y'$. Таким образом, $[x, y] \doteq [x', y']$ в том и только в том случае, когда

$$x = x', \quad y = y'. \tag{1}$$

Обратным смещением $\overline{QP}$ будет $[\xi-\xi', \eta-\eta']$, и естественно условиться, что

$$[\xi-\xi', \eta-\eta'] = -[\xi'-\xi, \eta'-\eta],$$
$$\overline{QP} = -\overline{PQ}.$$

Эти соотношения в действительности являются определениями символов $-[\xi'-\xi, \eta'-\eta]$ и $-\overline{PQ}$. Положив, таким образом,

$$-[x, y] = [-x, -y],$$

естественно, далее, условиться в том, что

$$\alpha[x, y] = [\alpha x, \alpha y], \tag{2}$$

где α — любое действительное число (положительное или отрицательное). Так, например, если $OB = \frac{1}{2} OA$ (см. фиг. 17), то

$$\overline{OB} = -\frac{1}{2}\overline{OA} = -\frac{1}{2}[x, y] = \left[-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y\right].$$

Уравнения (1) и (2) определяют два первых важных понятия, связанных со смещениями, а именно: *эквивалентность* смещений и *умножение смещений на числа*.

36. Сложение смещений. Мы еще пока не дали определения, в силу которого выражениям

$$\overline{PQ} + \overline{P'Q'}, \quad [x, y] + [x', y']$$

был бы приписан определенный смысл. Интуиция сразу нам подсказывает, что мы должны определить сумму двух смещений как смещение, являющееся результатом последовательного осуществления двух данных смещений. Другими словами, если QQ_1 равно по длине и параллельно $P'Q'$, то в результате последовательных смещений $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$ частица переносится из точки P сначала в точку Q, а затем в Q_1, так что мы должны определить сумму $\overline{PQ}$ и $\overline{P'Q'}$ как $\overline{PQ_1}$. Если мы, стало быть, проведем OA, равное по длине и параллельное PQ, и OB, равное по длине и параллельное $P'Q'$, и достроим параллелограм $OACB$, то будем иметь

$$\overline{PQ} + \overline{P'Q'} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$$

(фиг. 18).

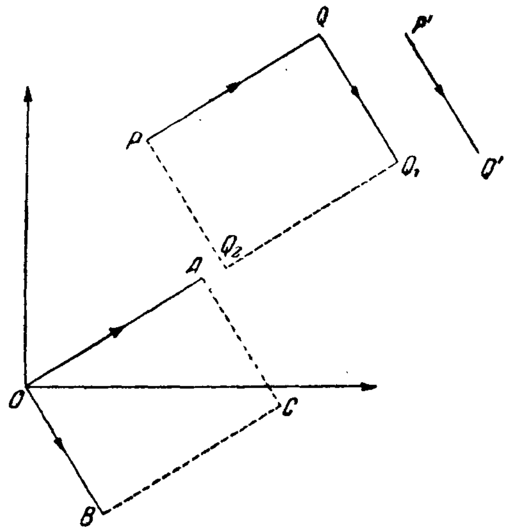
Рассмотрим следствия из этого определения. Если x', y' — координаты точки B, то координатами середины отрезка AB будут $\frac{1}{2}(x+x')$, $\frac{1}{2}(y+y')$, и, следовательно, C будут иметь координаты $x+x'$, $y+y'$. Таким образом,

$$[x, y] + [x', y'] = [x+x', y+y'], \tag{3}$$

что может рассматриваться как символическое определение сложения смещений. Заметим, что

$$[x', y'] + [x, y] = [x' + x, \ y' + y] = [x + x', \ y + y'] = \\ = [x, y] + [x', y'].$$

Другими словами, *сложение смещений подчиняется закону коммутативности,* выражаемому в обычной алгебре равенством $a + b = b + a$. Этот закон выражает очевидный геометрический факт, что если мы движемся из P сначала по отрезку PQ_2, равному по длине и параллельному $P'Q'$, а затем по отрезку, равному по длине и параллельному PQ, то мы придем в ту же самую точку Q_1, что и прежде.



Фиг. 18

В частности,

$$[x, y] = [x, 0] + [0, y]. \tag{4}$$

Здесь $[x, 0]$ означает смещение на расстояние x в направлении, параллельном OX. Это то смещение, которое мы обозначали через $[x]$, когда рассматривали смещения только вдоль прямой. Мы называем $[x, 0]$ и $[0, y]$ *компонентами* $[x, y]$, а $[x, y]$ — их *результирующей*.

После того как мы определили сложение двух смещений, не представляет уже труда определение суммы любого числа смещений.

Так, по определению,

$$[x, y]+[x', y']+[x'', y'']=([x, y]+[x', y'])+[x'', y'']\doteq$$
$$\doteq[x+x', y+y']+[x'', y'']=[x+x'+x'', y+y'+y''].$$

Мы определяем *вычитание* смещений уравнением

$$[x, y]-[x', y']=[x, y]+(-[x', y']), \tag{5}$$

что ничем не отличается от $[x, y]+[-x', -y']$ или от $[x-x', y-y']$. В частности,

$$[x, y]-[x, y]=[0, 0].$$

Смещение $[0, 0]$ оставляет частицу на прежнем месте; оно является *нулевым смещением*, и мы будем писать вместо $[0, 0]$ просто 0.

Примеры XX. 1. Доказать, что

(1) $$\alpha[\beta x, \beta y]=\beta[\alpha x, \alpha y]=[\alpha\beta x, \alpha\beta y].$$
(2) $$([x, y]+[x', y'])+[x'', y'']=[x, y]+([x', y']+[x'', y'']).$$
(3) $$[x, y]+[x', y']=[x', y']+[x, y].$$
(4) $$(\alpha+\beta)[x, y]=\alpha[x, y]+\beta[x, y].$$
(5) $$\alpha\{[x, y]+[x', y']\}=\alpha[x, y]+\alpha[x', y'].$$

[Мы уже доказали (3). Остальные соотношения так же легко следуют из определений. Читателю рекомендуется в каждом случае рассмотреть геометрическое толкование уравнения, как мы это проделали выше в случае (3).]

2. Если M — середина PQ, то $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OP}+\overline{OQ})$. Вообще, если M делит PQ в отношении $\mu:\lambda$, то

$$\overline{OM}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{OP}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overline{OQ}.$$

3. Если G — центр тяжести материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с равными массами, то

$$\overline{OG}=\frac{1}{n}(\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\ldots+\overline{OP_n}).$$

4. Если P, Q, R — три точки, лежащие на одной прямой, то существуют три действительные числа α, β, γ, не все равные нулю и такие, что

$$\alpha\overline{OP}+\beta\overline{OQ}+\gamma\overline{OR}=0.$$

Обратное предложение также справедливо. [Это представляет собой лишь перефразировку примера 2.]

5. Если $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — два смещения, не лежащие на одной прямой, и

$$\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}=\gamma\overline{AB}+\delta\overline{AC},$$

то $\alpha=\gamma$ и $\beta=\delta$.

[Возьмем $\overline{AB_1}=\alpha\overline{AB}$, $\overline{AC_1}=\beta\overline{AC}$. Достроим параллелограм $AB_1P_1C_1$. Тогда $\overline{AP_1}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$. Очевидно, что $\overline{AP_1}$ может быть выражено в таком виде только одним способом, откуда следует теорема.

6. Пусть $ABCD$ — параллелограм. Через точку Q, лежащую внутри параллелограма, проведены параллельно сторонам отрезки RQS и TQU. Показать, что RU и TS пересекаются на AC (фиг. 19).

[Обозначим отношения $AT:AB$, $AR:AD$ соответственно через α и β Тогда

$$\overline{AT}=\alpha\overline{AB},\quad \overline{AR}=\beta\overline{AD},$$
$$\overline{AU}=\alpha\overline{AB}+\overline{AD},$$
$$\overline{AS}=\overline{AB}+\beta\overline{AD}.$$

Пусть RU пересекает AC в точке P. Так как точки R, U, P коллинеарны*), то мы имеем:

$$\overline{AP}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{AR}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overline{AU},$$

где μ/λ — отношение, в котором P делит RU. Другими словами,

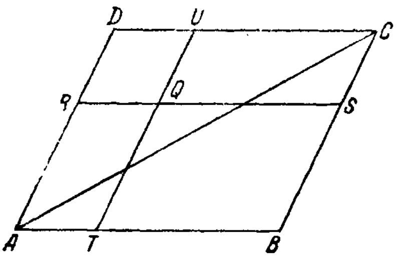
$$\overline{AP}=\frac{\alpha\mu}{\lambda+\mu}\overline{AB}+\frac{\beta\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\overline{AD}.$$

Но так как P лежит на AC,

$$\overline{AP}=k\overline{AC}=k\overline{AB}+k\overline{AD},$$

где k — некоторое число. Следовательно (пример 5), $\alpha\mu=\beta\lambda+\mu=(\lambda+\mu)k$, откуда мы заключаем, что

$$k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}.$$



Фиг. 19

Симметрия полученного выражения показывает, что аналогичное рассуждение должно привести к соотношению

$$\overline{AP'}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}\overline{AC},$$

если P' является точкой пересечения TS и AC. Следовательно, точки P и P' совпадают.]

7. Пусть $ABCD$ — параллелограм и M — середина AB. Показать, что MD делит AC в отношении 1:3 и что AC делит MD в том же отношении[1]).

37. Умножение смещений. До сих пор мы не делали попыток придать какой-либо смысл понятию произведения двух смещений. Единственным видом умножения, который мы рассматривали, являлось умножение смещения на число. Выражение

$$[x, y]\,[x', y']$$

пока ничего не означает, и мы можем определить его как пожелаем.

Наш выбор определения обусловливается следующими принципами. Ясно, во-первых, что произведение двух смещений должно быть также смещением. Далее, мы определили $\alpha[x, y]$, где α — действительное

*) Т. е. лежат на одной прямой. *(Прим. перев.)*

[1]) Последние два примера взяты из книги Willard Gibbs, *Vector analysis.*

число, как $[\alpha x, \alpha y]$; но α можно рассматривать как смещение $[\alpha, 0]$. Следовательно, изменяя наши обозначения, мы видим, что, во-вторых, в силу нашего определения, должно быть

$$[x, 0][x', y'] = [xx', xy'].$$

Наконец, в-третьих, наше определение должно подчиняться обычным законам умножения, а именно, переместительности, распределительности и сочетательности, так что

$$[x, y][x', y'] = [x', y'][x, y],$$
$$([x, y] + [x', y'])\ [x'', y''] = [x, y][x'', y''] + [x', y'][x'', y''],$$
$$[x, y]([x', y'] + [x'', y'']) = [x, y][x', y'] + [x, y][x'', y'']$$

и
$$[x, y]([x', y'][x'', y'']) = ([x, y][x', y'])[x'', y''].$$

Таким образом,

$$[x, y][x', y'] = [xx', yy']$$

не будет подходящим определением, так как оно дало бы

$$[x, 0][x', y'] = [xx', 0],$$

что противоречит нашему второму требованию.

38. К нужному определению нас приводят следующие соображения. Мы знаем, что если OAB и OCD — два подобных треугольника с равными углами в вершинах, соответственно, O, A и C, B и D, то

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$

или $OB \cdot OC = OA \cdot OD$ (фиг. 20). Это наводит нас на мысль попытаться определить умножение и деление смещений так, чтобы

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}, \quad \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OD}.$$

Пусть теперь

$$\overline{OB} = [x, y], \quad \overline{OC} = [x', y'], \quad \overline{OD} = [X, Y].$$

Предположим, что A является точкой (1,0), так что $\overline{OA} = [1, 0]$. Тогда

$$\overline{OA} \cdot \overline{OD} = [1, 0][X, Y] = [X, Y],$$

и, следовательно,

$$[x, y][x', y'] = [X, Y].$$

Произведение $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$ должно быть поэтому определено как $\overline{OD}$, где точка D получается построением на OC треугольника, подобного треугольнику OAB. Чтобы избавиться от двузначности этого определения, заметим, что на OC мы можем построить *два* таких треугольника, OCD и OCD' (см. фиг. 20). Мы выбираем тот, для которого угол COD равен углу AOB не только по величине, но и по знаку. Мы будем говорить, что такие два треугольника *подобны и одинаково ориентированы.*

Если полярные координаты точек B и C суть, соответственно, (ρ, θ) и (σ, φ), так что

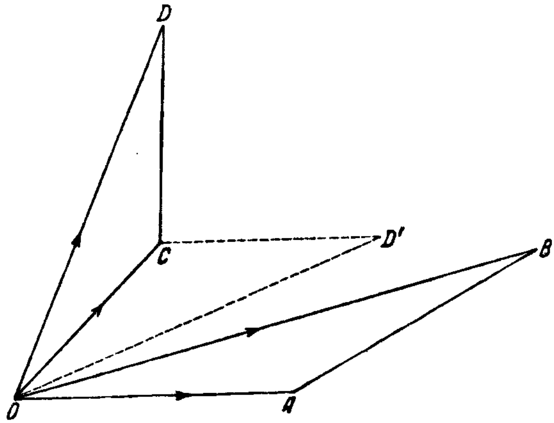
$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad x' = \sigma \cos\varphi, \quad y' = \sigma \sin\varphi,$$

то точка D будет иметь полярные координаты $(\rho\sigma, \theta + \varphi)$. Следовательно,

$$X = \rho\sigma \cos(\theta + \varphi) = xx' - yy',$$
$$Y = \rho\sigma \sin(\theta + \varphi) = xy' + yx'.$$

Требуемым определением будет поэтому следующее:

$$[x, y]\,[x', y'] = [xx' - yy', \; xy' + yx']. \tag{6}$$



Фиг. 20

Мы видим, во-первых, что, если $y = 0$, то $X = xx'$, $Y = xy'$, как мы требовали; во-вторых, что правая часть не изменится, если мы поменяем местами x и x', и y и y', так что

$$[x, y]\,[x', y'] = [x', y']\,[x, y];$$

и, в-третьих, что

$$\{[x, y] + [x', y']\}\,[x'', y''] = [x + x', \; y + y']\,[x'', y''] =$$
$$= [(x + x')\,x'' - (y + y')\,y'', \; (x + x')\,y'' + (y + y')\,x''] =$$
$$= [xx'' - yy'', \; xy'' + yx''] + [x'x'' - y'y'', \; x'y'' + y'x''] =$$
$$= [x, y]\,[x'', y''] + [x', y']\,[x'', y''].$$

Аналогично мы можем проверить, что удовлетворяются все соотношения, приведенные в конце п. 37. Таким образом, определение (6) удовлетворяет всем требованиям, которые мы предъявляли к нему в п. 37.

Пример. Показать непосредственно из приведенного выше геометрического определения, что умножение смещений подчиняется переместительному и распределительному законам. [Возьмем, например, закон переместительности. Произведение $\overline{OB}\cdot\overline{OC}$ равно $\overline{OD}$ (см. фиг. 20), причем COD подобен AOB. Для построения произведения $\overline{OC}\cdot\overline{OB}$ мы должны построить на OB треугольник BOD_1, подобный AOC; таким образом, нужно только доказать, что точки D и D_1 совпадают или что треугольники BOD и AOC подобны. Но это — простая задача элементарной геометрии.]

39. Комплексные числа. Точно так же, как смещению $[x]$ вдоль OX соответствует точка (x) или действительное число x, так и смещению $[x, y]$ на плоскости соответствует точка (x, y) или *пара действительных чисел* x, y.

Оказывается удобным обозначить эту пару действительных чисел x, y символом

$$x+yi.$$

Почему выбирается именно такое обозначение, выяснится дальше. Пока читатель должен рассматривать $x+yi$ *просто как другой способ записи символа* $[x, y]$. Символ $x+yi$ называется *комплексным числом.*

Мы переходим теперь к определению *эквивалентности, сложения* и *умножения* комплексных чисел. Каждому комплексному числу соответствует смещение. Два комплексных числа эквивалентны, если эквивалентны соответствующие им смещения. Суммой и произведением двух комплексных чисел являются комплексные числа, соответствующие сумме и произведению соответствующих смещений. Таким образом,

$$x+yi=x'+y'i \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $x=x'$, $y=y'$;

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')\,i, \tag{2}$$

$$(x+yi)(x'+y'i)=xx'-yy'+(xy'+yx')\,i. \tag{3}$$

В качестве частных случаев из (2) и (3) мы получаем:

$$x+yi=(x+0i)+(0+yi),$$
$$(x+0i)(x'+y'i)=xx'+xy'i,$$

и эти соотношения показывают, что мы не должны опасаться недоразумений, когда, имея дело с комплексными числами, мы пишем x вместо $x+0i$ и yi вместо $0+yi$.

Читатель легко проверит сам, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняется законам алгебры, выражаемым следующими соотношениями:

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x'+y'i)+(x+yi),$$
$$\{(x+yi)+(x'+y'i)\}+(x''+y''i)=(x+yi)+$$
$$+\{(x'+y'i)+(x''+y''i)\},$$

6*

$$(x+yi)(x'+y'i)=(x'+y'i)(x+yi),$$
$$(x+yi)\{(x'+y'i)+(x''+y''i)\}=(x+yi)(x'+y'i)+$$
$$+(x+yi)(x''+y''i),$$
$$\{(x+yi)+(x'+y'i)\}(x''+y''i)=(x+yi)(x''+y''i)+$$
$$+(x'+y'i)(x''+y''i),$$
$$(x+yi)\{(x'+y'i)(x''+y''i)\}=\{(x+yi)(x'+y'i)\}(x''+y''i),$$

доказательства которых фактически тождественны доказательствам соответствующих соотношений между смещениями.

Вычитание и деление комплексных чисел определяются как в обычной алгебре. Так, мы определяем $(x+yi)-(x'+y'i)$ как

$$(x+yi)+\{-(x'+y'i)\}=x+yi+(-x'-y'i)=$$
$$=(x-x')+(y-y')i,$$

или, что то же самое, как такое число $\xi+\eta i$, что

$$(x'+y'i)+(\xi+\eta i)=x+yi.$$

Наконец, $(x+yi)/(x'+y'i)$ определяется как комплексное число $\xi+\eta i$, для которого

$$(x'+y'i)(\xi+\eta i)=x+yi,$$

или

$$x'\xi-y'\eta+(x'\eta+y'\xi)i=x+yi,$$

или

$$x'\xi-y'\eta=x,\quad x'\eta+y'\xi=y. \tag{4}$$

Решая эти уравнения относительно ξ и η, мы получаем:

$$\xi=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2},\quad \eta=\frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}.$$

Это решение теряет смысл, когда x' и y' оба равны нулю, т. е. когда $x'+y'i=0$. Таким образом, вычитание всегда возможно; деление всегда возможно, за исключением того случая, когда делитель равен нулю.

Мы можем теперь определить целые положительные степени комплексного числа $x+yi$, полиномы от $x+yi$ и рациональные функции от $x+yi$, как в обычной алгебре.

Примеры. (1) С геометрической точки зрения задача деления смещения $\overline{OD}$ на смещение $\overline{OC}$ состоит в определении точки B так, чтобы треугольники COD и AOB были подобны, и это, очевидно, возможно (и решение единственно), если C не совпадает с O, т. е. если $\overline{OC}\neq 0$.

(2) Комплексные числа $x+yi$, $x-yi$ называются *сопряженными*. Проверить, что

$$(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2,$$

так что произведением двух сопряженных чисел является действительное число, и что

$$\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{(x+yi)(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}=\frac{xx'+yy'+(x'y-xy')i}{x'^2+y'^2}.$$

40. Одно из наиболее важных свойств действительных чисел содержится в следующей теореме: *произведение двух чисел не может быть равно нулю, если ни одно из них не равно нулю.* Для того чтобы показать, что эта теорема остается в силе и для комплексных чисел, положим $x=0$, $y=0$ в уравнениях (4) предыдущего пункта. Тогда

$$x'\xi-y'\eta=0, \quad x'\eta+y'\xi=0.$$

Из этих уравнений следует, что $\xi=0$, $\eta=0$, т. е. что

$$\xi+\eta i=0,$$

если не имеют места равенства: $x'=0$ и $y'=0$, т. е. $x'+y'i=0$. Таким образом, $x+yi$ не может быть равно нулю без того, чтобы одно из чисел $x'+y'i$ или $\xi+\eta i$ не обращалось в нуль.

41. Уравнение $x^2=-1$. Мы условились упрощать наши обозначения, записывая x вместо $x+0i$ и yi вместо $0+yi$. В частности, комплексное число $1i$ мы обозначаем просто через i. Это — число, соответствующее единичному смещению вдоль OY. Мы имеем также:

$$i^2=ii=(0+1i)(0+1i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+(0\cdot 1+1\cdot 0)\,i=-1.$$

Аналогично, $(-i)^2=-1$. Таким образом, комплексные числа i и $-i$ удовлетворяют уравнению $x^2=-1$.

Читатель теперь легко убедится в том, что правила сложения и умножения комплексных чисел сводятся просто к тому, что *действия над комплексными числами производятся в точности так же, как над действительными числами, причем символ i тоже рассматривается как число, но произведение $ii=i^2$ заменяется на -1 всюду, где оно встречается.* Так, например,

$$(x+yi)(x'+y'i)=xx'+xy'i+yx'i+yy'i^2=$$
$$=(xx'-yy')+(xy'+yx')\,i.$$

42. Геометрическое толкование умножения на i. Так как

$$(x+yi)\,i=-y+xi,$$

мы видим, что если $x+yi$ соответствует $\overline{OP}$ и OQ, равное OP, проведено так, что POQ — положительный прямой угол, то $(x+yi)\,i$ соответствует $\overline{OQ}$. Другими словами, *умножение комплексного числа на i поворачивает соответствующее смещение на прямой угол.*

Мы могли бы развить всю теорию комплексных чисел с этой точки зрения. Исходя из представления x, как смещения OX, и из i, как символа операции, эквивалентной повороту x на прямой угол, мы пришли бы к представлению об yi, как смещении величины y вдоль OY. Далее было бы естественным определить $x+yi$, как в пп. 36 и 39, и $(x+yi)i$ представляло бы смещение, полученное поворотом $x+yi$ на прямой угол, т. е. $-y+xi$. Наконец, мы определили бы $(x+yi)x'$ как $xx'+yx'i$, $(x+yi)y'i$ как $-yy'+$ $+xy'i$ и

$$(x+yi)(x'+y'i)$$

как сумму этих смещений, т. е. как

$$xx'-yy'+(xy'+yx')i.$$

43. Уравнения $z^2+1=0$, $az^2+2bz+c=0$. Не существует действительного числа z такого, что $z^2+1=0$; мы говорим, что это уравнение *не имеет действительных корней*. Но, как мы видели, комплексные числа i и $-i$ удовлетворяют этому уравнению. Мы говорим, что это уравнение имеет *два комплексных корня* i и $-i$. Так как i удовлетворяет уравнению $z^2=-1$, его иногда записывают в виде $\sqrt{-1}$.

Комплексные числа иногда называются *мнимыми* [1]). Этот термин не очень удачен, но он прочно вошел в употребление и должен быть принят. Но „мнимое число" не более „мнимо", в обычном смысле этого слова, чем „действительное" число или любое другое математическое понятие.

Действительное число не является числом в том же смысле, в каком понимается рациональное число, и комплексное число также не является числом в том же смысле, в каком понимается действительное число. Комплексное число является, как читателю должно быть ясно из предыдущих рассмотрений, парой чисел (x, y), символически объединенных в целях удобства оперирования с ними в форму $x+yi$. Так,

$$i=0+1i$$

пишется вместо пары чисел $(0, 1)$ и геометрически может быть представлено точкой или смещением $[0, 1]$. И когда мы говорим, что i является корнем уравнения $z^2+1=0$, под этим понимается только то, что мы определили метод комбинирования таких пар чисел (или смещений), который мы называем „умножением" и который при комбинировании им пары $(0, 1)$ с самой собой дает пару $(-1, 0)$.

Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$az^2+2bz+c=0,$$

где a, b, c — действительные числа. Если $b^2>ac$, то обычные методы решения дают два действительных корня

$$\frac{1}{a}\left\{-b\pm\sqrt{b^2-ac}\right\}.$$

---

[1]) Выражение „действительное число" было введено как противопоставление „мнимому числу".

Если же $b^2 < ac$, то уравнение не имеет действительных корней. Оно может быть записано в виде

$$\left(z+\frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{ac-b^2}{a^2},$$

что имеет место тогда, когда $z+\frac{b}{a}$ является любым из двух комплексных чисел $\pm i\sqrt{\frac{1}{a}(ac-b^2)}$ [1]. Мы говорим, что уравнение имеет *два комплексных корня*

$$-\frac{b}{a} \pm i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}.$$

Если мы условимся говорить, что в случае $b^2 = ac$ $\left(\text{когда уравнение удовлетворяется только } \textit{одним} \text{ значением } x, \text{ а именно, } -\frac{b}{a}\right)$ уравнение имеет *два одинаковых корня*, то тогда *квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет два корня во всех случаях, а именно: либо два различных действительных корня, либо два одинаковых действительных корня, либо два различных комплексных корня.*

Естественно возникает вопрос, не может ли квадратное уравнение, поскольку комплексные корни допускаются, иметь более двух корней. Легко видеть, что это невозможно. Доказательство может быть проведено с помощью тех же рассуждений, которые применяются в элементарной алгебре при доказательстве того, что уравнение степени n не может иметь более n действительных корней. Обозначим комплексное число $x+yi$ одной буквой z, т. е. будем писать $z = x+yi$. Пусть $f(z)$ означает любой полином от z с действительными или комплексными коэффициентами. Тогда мы последовательно доказываем,

(1) что остаток от деления $f(z)$ на $z-a$, где a — любое действительное или комплексное число, равен $f(a)$;

(2) что если a является корнем уравнения $f(z)=0$, то $f(z)$ делится на $z-a$ без остатка;

(3) что если $f(z)$ — полином степени n и $f(z)=0$ имеет n корней $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то

$$f(z) = A(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n),$$

где A — действительная или комплексная постоянная, а именно, коэффициент при z^n в $f(z)$. Из этого последнего результата и из теоремы п. 40 следует, что $f(z)$ не может иметь более n корней.

Мы видим, что квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет в точности два корня. Дальше мы увидим, что аналогичная теорема имеет место для уравнения любой степени с дей-

[1] Мы будем иногда писать $x+iy$ вместо $x+yi$.

ствительными или комплексными коэффициентами: *уравнение степени n имеет в точности n корней.* Единственным трудным местом доказательства является доказательство того, что любое уравнение должно иметь *по крайней мере один корень.* Доказательство этого положения мы должны пока отложить [1]. Можно, однако, сразу же отметить одно очень интересное следствие из этой теоремы. В теории действительных чисел мы исходим из положительных целых чисел и из понятий сложения и умножения и обратных действий — вычитания и деления. Мы находим, что эти действия не всегда выполнимы, если не ввести некоторый новый вид чисел. Можно приписать определенное значение разности 3—7, если ввести *отрицательные* числа, или отношению $\frac{3}{7}$, если ввести *рациональные* числа. Если мы расширим совокупность арифметических действий тем, что включим в нее извлечение корней и решение уравнений, то найдем, что некоторые из этих действий, как, например, извлечение квадратного корня из числа, не являющегося точным квадратом, станет невозможным, если мы не расширим наше понятие о числе и не введем иррациональные числа, как в гл. I.

Другие действия, как, например, извлечение квадратного корня из -1, остаются и при этом невозможными, если мы не пойдем еще дальше и не введем комплексные числа, как это сделано в настоящей главе. Естественно предположить, что когда мы будем рассматривать уравнения высших степеней, то некоторые из них могут оказаться неразрешимыми даже в терминах комплексных чисел, и что мы, таким образом, столкнемся с необходимостью ввести числа еще других типов. Тот факт, что корнями любого алгебраического уравнения являются обычные комплексные числа, показывает, что это не так.

Все теоремы элементарной алгебры, которые доказываются применением только правил сложения и умножения, остаются в силе, *независимо от того, являются ли числа, встречающиеся в них, действительными или комплексными,* так как эти правила применимы к комплексным числам так же, как и к действительным. Например, если мы знаем, что α и β являются корнями уравнения

$$az^2+2bz+c=0,$$

то

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

Аналогично, если α, β, γ — корни уравнения

$$az^3+3bz^2+3cz+d=0,$$

то

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{3b}{a}, \quad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=\frac{3c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

---

[1] См. Приложение I.

Все такие теоремы справедливы, независимо от того, являются ли a, b, ..., α, β,... комплексными или действительными числами.

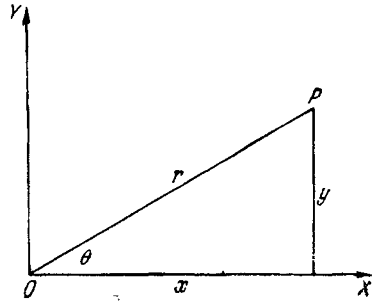
44. Диаграмма Аргана. Пусть P (фиг. 21) — точка (x, y), r обозначает длину OP и θ—угол XOP, так что

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Как в п. 43, мы обозначаем комплексное число $x+yi$ через z и называем z *комплексным переменным*. Мы называем, далее, P *точкой* z, или точкой, соответствующей z; z называется *аргументом* P, x — *действительной частью*, y — *мнимой частью*, r — *модулем* и θ — *амплитудой* z. Мы будем писать

$$x = \mathbf{Re}\,(z), \quad y = \mathbf{Im}\,(z), \quad r = |z|, \quad \theta = \operatorname{am} z.$$

Если $y = 0$, мы говорим, что z *действительно*, если $x = 0$, — что z *чисто мнимо*. Два числа $x+yi$ и $x-yi$, которые отличаются только знаком их мнимой части, называются *сопряженными*. Следует отметить, что сумма двух сопряженных чисел $2x$ и их произведение x^2+y^2 оба действительны и что модули сопряженных чисел равны между собой и равны $\sqrt{x^2+y^2}$, так что их произведение равно квадрату модуля каждого из них. Корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами, например, являются сопряженными числами, если они не действительны.



Фиг. 21

Заметим, что θ или $\operatorname{am} z$ является многозначной функцией от x и y, имеющей бесконечно много значений, которые отличаются друг от друга на целые кратные 2π [1]. Прямая, совпадающая с OX, будучи повернута на любой из этих углов, примет положение OP. Мы назовем тот из этих углов, который заключен между $-\pi$ и π, *главным значением* амплитуды z. Это определение однозначно во всех случаях, кроме того, когда одно из значений равно π, так как в этом случае $-\pi$ также является одним из значений. В этом случае мы должны

[1]) Очевидно, что $|z|$ совпадает с полярной координатой r точки P и что другая полярная координата θ является одним из значений $\operatorname{am} z$. Это значение не обязательно является *главным значением*, которое определено дальше в тексте, так как, по п. 22, полярная координата заключена между 0 и 2π, тогда как главное значение заключено между $-\pi$ и π.

сделать специальную оговорку о том, какое из этих двух значений считается главным. В дальнейшем, говоря об амплитуде z, мы будем, как правило, иметь в виду ее главное значение.

Фиг. 22 обычно называется диаграммой Аргана.

45. Теорема Муавра. Следующие предложения непосредственно следуют из определений сложения и умножения.

(1) Действительная (или мнимая) часть суммы двух комплексных чисел равна сумме их действительных (или мнимых) частей.

(2) Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей.

(3) Амплитуда произведения двух комплексных чисел либо равна сумме их амплитуд, либо отличается от нее на 2π.

Следует отметить, что главное значение $\operatorname{am}(zz')$ не всегда равно сумме главных значений $\operatorname{am} z$ и $\operatorname{am} z'$. Например, если $z = z' = -1 + i$, то главное значение амплитуды z и z' равно $\frac{3}{4}\pi$. Но $zz' = -2i$, и главное значеиие $\operatorname{am}(zz')$ равно $-\frac{1}{2}\pi$, а не $\frac{3}{2}\pi$.

Последние две теоремы могут быть выражены равенством

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\rho\,[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)],$$

которое сразу доказывается раскрытием скобок в левой части и применением известных тригонометрических формул для $\cos(\theta+\varphi)$ и $\sin(\theta+\varphi)$. Вообще,

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) =$$
$$= r_1 r_2\ldots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\}.$$

Особенно интересным является тот случай, когда

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1, \quad \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta.$$

Мы получаем тогда соотношение

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

где n — любое положительное целое число. Этот результат известен как *теорема Муавра* [1].

Далее, если

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

то

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

---

[1] В целях краткости обозначений иногда будет удобно писать $\operatorname{Cis}\theta$ вместо $\cos\theta + i\sin\theta$. В этих обозначениях, предложениых проф. Харкнессом и проф. Морлеем, теорема Муавра примет вид: $(\operatorname{Cis}\theta)^n = \operatorname{Cis} n\theta$. [Это обозначение в русской литературе, и почти нигде в иностранной литературе, не применяется. — *Прим. перев.*]

Таким образом, модуль числа, обратного z, равен величине, обратной модулю z, а амплитуда числа, обратного z, равна амплитуде z, взятой с обратным знаком. Мы можем теперь сформулировать теоремы для отношения чисел, соответствующие теоремам (2) и (3).

(4) Модуль отношения двух комплексных чисел равен отношению их модулей.

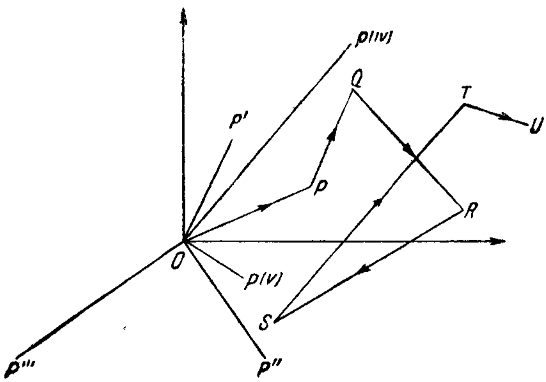
(5) Амплитуда отношения двух комплексных чисел либо равна разности их амплитуд, либо отличается от нее на 2π.

Следовательно,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^n = \\ = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).$$

Теорема Муавра справедлива, таким образом, для всех целочисленных значений n, как положительных, так и отрицательных.

К теоремам (1) — (5) мы можем добавить еще следующую теорему, которая также весьма важна.



Фиг. 22

(6) Модуль суммы любого числа комплексных чисел не превосходит суммы их модулей.

Пусть $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, ... — смещения, соответствующие некоторым комплексным числам. Проведем PQ равным и параллельным OP', QR равным и параллельным OP'' и т. д. В результате всех этих построений мы достигнем некоторой точки U такой, что

$$\overline{OU} = \overline{OP} + \overline{OP'} + \overline{OP''} + \ldots$$

Длина OU является модулем суммы комплексных чисел, соответствующих смещениям $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, ..., тогда сумма их модулей равна длине всей ломаной $OPQR\ldots U$, которая не меньше OU (фиг. 22).

Чисто арифметическое доказательство этой теоремы приведено в общих чертах в примере XXI. 1.

46. Приведем некоторые теоремы о рациональных функциях от комплексных чисел. *Рациональная функция* от комплексного переменного z определяется так же, как и рациональная функция от действительного переменного x, а именно, как отношение двух полиномов от z.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая рациональная функция $R(z)$ может быть приведена к виду $X+Yi$, где X и Y — рациональные функции от x и y с действительными коэффициентами.*

В первую очередь ясно, что любой полином $P(x+yi)$ может быть приведен, в силу определений сложения и умножения, к виду $A+Bi$, где A и B — полиномы от x и y с действительными коэффициентами. Аналогично, $Q(x+yi)$ может быть приведено к виду $C+Di$. Следовательно,

$$R(x+yi)=\frac{P(x+yi)}{Q(x+yi)}$$

может быть представлено в виде

$$\frac{A+Bi}{C+Di}=\frac{(A+Bi)(C-Di)}{(C+Di)(C-Di)}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}+\frac{BC-AD}{C^2+D^2}i,$$

что доказывает нашу теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если $R(x+yi)=X+Yi$, где R, как и выше, обозначает рациональную функцию, но с* **действительными** *коэффициентами, то*

$$R(x-yi)=X-Yi.$$

Утверждение легко проверяется для степени $(x+yi)^n$ непосредственным вычислением. Отсюда мы убеждаемся в справедливости теоремы для любого полинома с действительными коэффициентами. Следовательно, применяя принятые выше обозначения,

$$R(x-yi)=\frac{A-Bi}{C-Di}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}-\frac{BC-AD}{C^2+D^2}i,$$

причем приведение к указанному виду проводится так же, как и в предыдущей теореме, но с той разницей, что знак i всюду изменен на обратный.

Очевидно, что результаты, аналогичные утверждениям теорем 1 и 2, имеют место для функций от любого числа комплексных переменных.

ТЕОРЕМА 3. *Если уравнение*

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

коэффициенты которого действительны, имеет комплексные корни, то они могут быть сгруппированы в пары сопряженных.

Ибо из теоремы 2 следует, что если $x+yi$ является корнем, то и $x-yi$ также является корнем. Частным случаем этой теоремы является тот факт (п. 43), что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами либо действительны, либо сопряжены.

Эта теорема иногда формулируется следующим образом: *в уравнении с действительными коэффициентами комплексные корни могут встретиться только в сопряженных парах*[1]).

Примеры XXI. 1. Доказать теорему 6 п. 45 непосредственно из определений и без помощи геометрических рассмотрений.

[Во-первых, для того чтобы доказать неравенство $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$, нужно показать, что

$$\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Дальше теорема легко распространяется на общий случай. Теорема является частным случаем „неравенства Минковского": см. Харди, Литтльвуд и Полиа, Неравенства, гл. II, п. 2.11].

2. Единственным случаем, в котором

$$|z|+|z'|+\ldots=|z+z'+\ldots|,$$

является тот, когда все числа $z, z', \ldots$ имеют одинаковую амплитуду. Доказать это геометрически и аналитически.

3. Доказать, что

$$|z-z'| \geqslant ||z|-|z'||.$$

4. Если и сумма и произведение двух комплексных чисел действительны, то эти числа либо сами действительны, либо сопряжены.

5. Если

$$a+b\sqrt{2}+(c+d\sqrt{2})\,i=A+B\sqrt{2}+(C+D\sqrt{2})\,i,$$

где a, b, c, d, A, B, C, D — действительные рациональные числа, то

$$a=A, \quad b=B, \quad c=C, \quad d=D.$$

6. Представить следующие числа в виде $A+Bi$, где A и B — действительные числа:

$$(1+i)^2, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \quad \frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}, \quad \left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2-\left(\frac{\lambda-\mu i}{\lambda+\mu i}\right)^2;$$

λ и μ обозначают действительные числа.

7. Представить следующие функции от $z=x+yi$ в виде $X+Yi$, где X и Y — действительные функции от x и y: $z^2, z^3, z^n, \frac{1}{z}, z+\frac{1}{z}, \frac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — действительные числа.

8. Найти модули чисел и функций в двух предыдущих примерах.

9. Прямые, соединяющие точки $z=a$, $z=b$ и $z=c$, $z=d$, будут перпендикулярными, если

$$\operatorname{am}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)=\pm\frac{\pi}{2},$$

---

[1]) Числа $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$, где a и b рациональны, иногда также называются „сопряженными".

т. е. если $\dfrac{a-b}{c-d}$ чисто мнимо. Каково условие параллельности этих прямых?

10. Пусть вершинами треугольника являются $z=\alpha$, $z=\beta$, $z=\gamma$, где α, β, γ — комплексные числа. Доказать следующие предложения:

(1) *центр тяжести находится в точке* $z=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$;

(2) *центр описанной окружности определяется соотношениями*

$$|z-\alpha|=|z-\beta|=|z-\gamma|;$$

(3) *три перпендикуляра, опущенные из вершин на противолежащие стороны, пересекаются в точке, определенной соотношениями*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\gamma}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{z-\beta}{\gamma-\alpha}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{z-\gamma}{\alpha-\beta}\right)=0;$$

(4) *внутри треугольника существует такая точка P, что*

$$\sphericalangle CBP=\sphericalangle ACP=\sphericalangle BAP=\omega$$

и

$$\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C.$$

[Для доказательства предложения (3) заметим, что если A, B, C — вершины треугольника и P — любая точка z, то условием перпендикулярности AP и BC является (см. пример 9) то, что

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\gamma}$$

чисто мнимо или что

$$\operatorname{Re}(z-\alpha)\operatorname{Re}(\beta-\gamma)+\operatorname{Im}(z-\alpha)\operatorname{Im}(\beta-\gamma)=0.$$

Это уравнение и два аналогичных уравнения, получаемых из него циклической перестановкой α, β, γ, удовлетворяются одним и тем же значением z; это следует из того, что сумма левых частей этих трех уравнений равна нулю.

Для доказательства предложения (4) возьмем BC параллельным и направленным вдоль оси x. Тогда [1])

$$\gamma-\beta=a,\quad \alpha-\gamma=-b\operatorname{Cis}(-C),\ \beta-\alpha=-\operatorname{Cis}B.$$

Мы должны определить z и ω из уравнений

$$\frac{(z-\alpha)(\beta_0-\alpha_0)}{(z_0-\alpha_0)(\beta-\alpha)}=\frac{(z-\beta)(\gamma_0-\beta_0)}{(z_0-\beta_0)(\gamma-\beta)}=\frac{(z-\gamma)(\alpha_0-\gamma_0)}{(z_0-\gamma_0)(\alpha-\gamma)}=\operatorname{Cis}2\omega,$$

где z_0, α_0, β_0, γ_0 обозначают числа, сопряженные с z, α, β, γ.

Складывая числители и знаменатели этих трех равных дробей и принимая во внимание, что

$$i\operatorname{ctg}\omega=\frac{1+\operatorname{Cis}2\omega}{1-\operatorname{Cis}2\omega},$$

мы получим:

$$i\operatorname{ctg}\omega=\frac{(\beta-\gamma)(\beta_0-\gamma_0)+(\gamma-\alpha)(\gamma_0-\alpha_0)+(\alpha-\beta)(\alpha_0-\beta_0)}{\beta\gamma_0-\beta_0\gamma+\gamma\alpha_0-\gamma_0\alpha+\alpha\beta_0-\alpha_0\beta}.$$

Отсюда легко выводится, что $\operatorname{ctg}\omega$ равен $\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$, где Δ — площадь треугольника. А это эквивалентно нашему утверждению.

[1]) Мы предполагаем, что при обходе треугольника в направлении ABC он остается слева.

Для определения z сложим числители и знаменатели трех равных дробей, предварительно умножив каждый из них соответственно на

$$\frac{\gamma_0-\beta_0}{\beta-\alpha},\quad \frac{\alpha_0-\gamma_0}{\gamma-\beta},\quad \frac{\beta_0-\alpha_0}{\alpha-\gamma}.$$

Из полученной таким образом новой дроби мы найдем, что

$$z=\frac{a\alpha \operatorname{Cis} A+b\beta \operatorname{Cis} B+c\gamma \operatorname{Cis} C}{a \operatorname{Cis} A+b \operatorname{Cis} B+c \operatorname{Cis} C}$$

11. Два треугольника с вершинами в точках a, b, c и x, y, z, подобны, если

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=0.$$

[Требуемое условие состоит в равенстве $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}}$ (большие буквы обозначают точки, аргументы которых обозначены соответствующими малыми буквами) или $\frac{b-a}{c-a}=\frac{y-x}{z-x}$, что совпадает с данным условием.]

12. Вывести из предыдущего примера, что если точки x, y, z лежат на одной прямой, то можно найти такие *действительные* числа α, β, γ, что $\alpha+\beta+\gamma=0$ и $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$; обратное предложение также имеет место (см. пример XX. 4). [Использовать то обстоятельство, что в данном случае треугольник с вершинами в x, y, z подобен некоторому вырожденному в отрезок прямой треугольнику с вершинами на оси OX, и применить результат предыдущего примера.]

13. **Общее линейное уравнение с комплексными коэффициентами.** Уравнение $\alpha z+\beta=0$ имеет единственное решение $z=-\frac{\beta}{\alpha}$, если $\alpha\neq 0$. Если мы положим

$$\alpha=a+Ai,\quad \beta=b+Bi,\quad z=x+yi$$

и приравняем действительные и мнимые части, то получим два уравнения для определения двух действительных чисел x и y. Наше уравнение будет иметь действительный корень, если $y=0$, что дает $ax+b=0$, $Ax+B=0$, условием же совместности этих двух уравнений является равенство

$$aB-bA=0.$$

14. **Общее квадратное уравнение с комплексными коэффициентами** Это уравнение имеет вид

$$(a+Ai)z^2+2(b+Bi)z+(c+Ci)=0.$$

Если a и A не равны одновременно нулю, можно разделить уравнение на $a+Ai$. Поэтому можно рассматривать

$$z^2+2(b+Bi)z+(c+Ci)=0 \qquad (1)$$

как каноническую форму нашего уравнения. Полагая $z=x+yi$ и приравнивая действительные и мнимые части, мы получаем систему двух уравнений для x и y, а именно:

$$x^2-y^2+2(bx-By)+c=0,\quad 2xy+2(by+Bx)+C=0.$$

Если мы положим

$$x+b=\xi,\quad y+B=\eta,\quad b^2-B^2-c=h,\quad 2bB-C=k,$$

эти уравнения принимают вид: $\xi^2-\eta^2=h$, $2\xi\eta=k$.

Возводя их в квадрат и складывая, находим:

$$\xi^2+\eta^2=\sqrt{h^2+k^2},\quad \xi=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{h^2+k^2}+h)},$$

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{h^2+k^2}-h)}.$$

Знаки мы должны выбрать так, чтобы $\xi\eta$ имело знак k, т. е. если k положительно, мы должны брать перед корнями одинаковые знаки, а если k отрицательно, — разные.

Условия равенства корней. Корни могут быть равны в том и только в том случае, когда оба фигурирующих выше квадратных корня обращаются в нуль, т. е. когда $h=0$, $k=0$, или, что то же самое, когда $c=b^2-B^2$, $C=2bB$. Эти условия эквивалентны единственному условию $c+Ci=(b+Bi)^2$, которое выражает тот факт, что левая часть уравнения (1) является точным квадратом.

Условие существования действительного корня. Если

$$x^2+2(b+Bi)x+(c+Ci)=0,$$

где x — действительное число, то $x^2+2bx+c=0$, $2Bx+C=0$. Исключая x, мы находнм искомое условие в виде

$$C^2-4bBC+4cB^2=0.$$

Условие существования чисто мнимого корня. Как легко найти, оно имеет вид

$$C^2-4bBC-4b^2c=0.$$

Условие существования пары сопряженных комплексных корней. Так как сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел действительны, то $b+Bi$ и $c+Ci$ должны быть оба действительны, т. е. должно быть $B=0$ и $C=0$. Таким образом, уравнение (1) может иметь пару сопряженных комплексных корней только в том случае, когда его коэффициенты действительны. Читателю следует проверить это заключение рассмотрением явных выражений для корней. Если, кроме того, $b^2\geqslant c$, то тогда корни будут также действительными. Таким образом, для пары сопряженных корней должно быть $B=0$, $C=0$, $b^2<c$.

15. Кубическое уравнение. Рассмотрим кубическое уравнение

$$z^3+3Hz+G=0,$$

где G и H — комплексные числа, причем известно, что уравнение имеет (a) действительный корень, (b) чисто мнимый корень, (c) пару сопряженных корней. Полагая $H=\lambda+\mu i$, $G=\rho+\sigma i$, мы находим следующие условия.

(a) *Условия существования действительного корня.* Если μ не равно нулю, то действительным корнем является $-\dfrac{\sigma}{3\mu}$ и $\sigma^3+27\lambda\mu^2\sigma-27\mu^3\rho=0$. С другой стороны, если $\mu=0$, то должно быть также и $\sigma=0$, так что коэффициенты уравнения действительны. В этом случае все три корня могут быть действительными.

(b) *Условия существования чисто мнимого корня.* Если μ не равно нулю, то чисто мнимым корнем является $\dfrac{\rho i}{3\mu}$ и $\rho^3-27\lambda\mu^2\rho-27\mu^3\sigma=0$. Если $\mu=0$, то должно быть также $\rho=0$, и если yi есть корень, то y определяется из уравнения $y^3-3\lambda y-\sigma=0$, которое имеет действительные коэффициенты. В этом случае все три корня могут быть чисто мнимыми.

(c) *Условия существования пары сопряженных комплексных корней.* Пусть эти корни будут $x+yi$ и $x-yi$. Тогда, так как сумма всех трех корней равна нулю, третий кореиь должен быть равен $-2x$. Из соотношений между коэффициентами и корнями уравнения мы выводим, что

$$y^2 - 3x^2 = 3H, \quad 2x(x^2 + y^2) = G.$$

Следовательно G и H должны быть оба действительны.

В каждом случае мы можем либо найти корень (причем тогда уравнение может быть сведено к квадратному делением на известный множитель), либо мы можем свести решение уравнения к решению кубического уравнения с действительными коэффициентами.

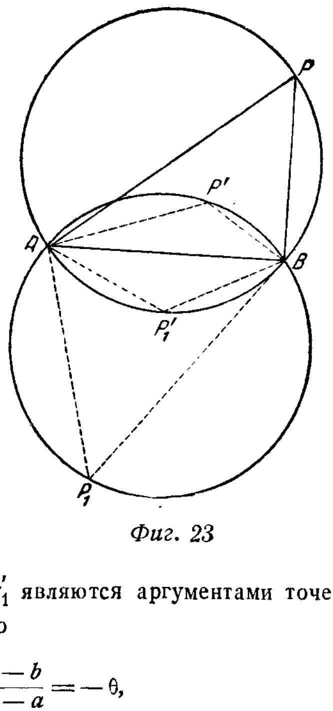
16. Пусть кубическое уравнение $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, где $a_1 = A_1 + A_1'i$, ..., имеет пару сопряженных комплексных корней. Доказать, что третий корень равен $-\dfrac{A_1'a_3}{A_3'}$, если $A_3' \neq 0$. Исследовать случай $A_3' = 0$.

17. Доказать, что если $z^3 + 3Hz + G = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня, то уравнение

$$8\alpha^3 + 6\alpha H - G = 0$$

имеет один действительный корень α, являющийся действительной частью комплексных корней исходного уравнения, а также, что α одного знака с G.

18. Уравнение любого порядка с комплексными коэффициентами, вообще говоря, не имеет ни действительных корней, ни пар сопряженных комплексных корней. Сколько условий должно удовлетворяться коэффициентами для того, чтобы уравнение имело (a) действительный корень, (b) пару сопряженных комплексных корней?



Фиг. 23

19. **Пучок окружностей.** Пусть a, b, z являются аргументами точек A, B, P (фиг. 23). Тогда

$$\operatorname{am}\frac{z-b}{z-a} = \measuredangle APB,$$

если в левой части выбрано главное значение амплитуды. Если окружности, изображенные на фигуре, одинаковы, z', z_1, z_1' являются аргументами точек P', P_1, P_1' и $\measuredangle APB = \theta$, то легко видеть, что

$$\operatorname{am}\frac{z'-b}{z'-a} = \pi - \theta, \quad \operatorname{am}\frac{z_1-b}{z_1-a} = -\theta,$$

и

$$\operatorname{am}\frac{z_1'-b}{z_1'-a} = -\pi + \theta.$$

Геометрическое место, определенное уравнением

$$\operatorname{am}\frac{z-b}{z-a} = \theta,$$

где θ постоянно, является дугой APB. Заменяя θ на $\pi - \theta$, $-\theta$, $-\pi + \theta$, получаем три остальные дуги окружностей.

Система уравнений, получаемых в предположении, что θ является параметром, изменяющимся от $-\pi$ до π, представляет *систему окружностей, которые могут быть проведены через точки A и B*. Следует, однако, отметить, что каждая окружность должна быть разделена на две части, которым соответствуют разные значения θ.

20. Рассмотрим теперь уравнение

$$\left|\frac{z-b}{z-a}\right|=\lambda, \qquad (1)$$

где λ — константа, не равная 1.

Пусть K будет точкой, в которой касательная к окружности ABP в точке P пересекается с AB. Тогда треугольникн KPA и KBP подобны и, следовательно,

$$\frac{AP}{PB}=\frac{PK}{BK}=\frac{KA}{KP}=\frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда мы видим, что $\frac{KA}{KB}=\frac{1}{\lambda^2}$, и, таким образом, точка K — одна и та же для всех положений P, удовлетворяющих уравнению (1). Кроме того $KP^2=KA\cdot KB$ и, следовательно, является константой. Поэтому *геометрическим местом точек P является окружность с центром в K*.

Система уравнений, получаемых при изменении λ, представляет систему окружностей, причем каждая окружность этой системы пересекает каждую окружность системы примера 19 под прямым углом. Когда $\lambda=1$, окружность превращается в прямую линию.

Система окружностей примера 19 называется *эллиптическим пучком окружностей*. Система примера 20 называется *гиперболическим пучком окружностей*, причем A и B называются *предельными точками* этого пучка. Если λ очень велико или очень мало, то соответствующие окружности очень малы и содержат внутри себя A или, соответственно, B.

21. **Дробно-линейные преобразования.** Рассмотрим уравнение

$$z=Z+a, \qquad (1)$$

где $z=x+yi$ и $Z=X+Yi$ — два комплексных переменных, которые мы предположим представленными на двух плоскостях xoy, XOY. Каждому значению z соответствует одно значение Z, и наоборот. Если $a=\alpha+\beta i$, то

$$x=X+\alpha, \quad y=Y+\beta,$$

и точке (x, y) соответствует точка (X, Y). Когда (x, y) описывает какую-либо кривую в плоскости xoy, (X, Y) описывает кривую в плоскости XOY. Таким образом, каждой фигуре в одной плоскости соответствует фигура в другой плоскости. Переход такого рода от фигуры в плоскости xoy к фигуре в плоскости XOY с помощью соотношения типа (1) называется *преобразованием*. В данном случае соотношение между соответствующими фигурами определяется очень легко. Фигура в плоскости XOY совпадает по размерам, форме и ориентации с фигурой в плоскости xoy, но она сдвинута на расстояние α влево и на расстояние β вниз. Такое преобразование называется параллельным *переносом*.

Рассмотрим теперь уравнение

$$z=\rho Z, \qquad (2)$$

где ρ положительно. Это дает $x=\rho X$, $y=\rho Y$. Фигуры подобны друг другу и подобно расположены относительно соответствующих начал координат, но масштаб фигуры в плоскости xoy изменен в ρ раз по сравнению с масштабом фигуры в плоскости XOY. Такое преобразование называется *подобием*.

Далее рассмотрим уравнение

$$z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)Z. \qquad (3)$$

Ясно, что $|z|=|Z|$ и что одно из значений $\operatorname{am} z$ равно $\operatorname{am} Z+\varphi$, так что фигуры отличаются друг от друга только тем, что фигура в плоскости xoy повернута относительно фигуры в плоскости XOY на угол φ в положительном направлении. Такое преобразование называется *вращением*.

Общее линейное преобразование

$$z=aZ+b \tag{4}$$

является комбинацией трех преобразований (1), (2), (3). Ибо, если $|a|=\rho$ и $\operatorname{am} a=\varphi$, мы можем заменить (4) тремя уравнениями:

$$z=z'+b, \quad z'=\rho Z', \quad Z'=(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,Z.$$

Таким образом, *общее линейное преобразование эквивалентно комбинации параллельного переноса, подобия и вращения.*

Рассмотрим, далее, преобразование

$$z=\frac{1}{Z}. \tag{5}$$

Если $|Z|=R$ и $\operatorname{am} Z=\Theta$, то $|z|=\frac{1}{R}$ и $\operatorname{am} z=-\Theta$, т. е. для перехода от фигуры в плоскости xoy к фигуре в плоскости XOY мы должны произвести инверсию первой из них в единичной окружности с центром в начале o и затем зеркально отразить полученную фигуру относительно оси ox (т. е. построить симметричную фигуру по другую сторону от ox).

Рассмотрим, наконец, преобразование

$$z=\frac{aZ+b}{cZ+d}. \tag{6}$$

Оно эквивалентно комбинации преобразований

$$z=\frac{a}{c}+(bc-ad)\frac{z'}{c}, \quad z'=\frac{1}{Z'}, \quad Z'=cZ+d,$$

т. е. некоторой комбинации преобразований рассмотренных выше типов.

Преобразование (6) называется *общим дробно-линейным преобразованием*. Решая его относительно Z, находим:

$$Z=-\frac{dz-b}{cz-a}.$$

Общее дробно-линейное преобразование является наиболее общим типом преобразования, при котором одно и только одно значение z соответствует каждому значению Z, и наоборот.

22. *Общее дробно-линейное преобразование преобразует окружности в окружности.* Это может быть доказано многими способами. Мы можем сослаться на известную геометрическую теорему, что инверсия преобразует окружности в окружности (которые, в частности, могут быть, конечно, и прямыми). Или же мы можем использовать результаты примеров 19 и 20. Если, например, окружность в плоскости xoy имеет уравнение

$$\left|\frac{z-\sigma}{z-\rho}\right|=\lambda,$$

то подставляя вместо z его выражение через Z, мы получаем:

$$\left|\frac{Z-\sigma'}{Z-\rho'}\right|=\lambda',$$

где

$$\sigma'=-\frac{b-\sigma d}{a-\sigma c}, \quad \rho'=-\frac{b-\rho d}{a-\rho c}, \quad \lambda'=\left|\frac{a-\rho c}{a-\sigma c}\right|\lambda.$$

23. Рассмотреть преобразования

$$z=\frac{1}{Z}, \quad z=\frac{1+Z}{1-Z}$$

и начертить в плоскости XOY кривые, соответствующие (1) окружностям с центрами в начале, (2) прямым линиям, проходящим через начало.

24. Условием того, что при преобразованни

$$z=\frac{aZ+b}{cZ+d}$$

окружности $x^2+y^2=1$ соответствует прямая линия в плоскости XOY, является $|a|=|c|$.

25. **Двойные отношения.** Двойное отношение $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ определяется как

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}.$$

Если четыре точки лежат на одной прямой, это определение совпадает с определением, известным из элементарной геометрии. Перестановкой индексов из z_1, z_2, z_3, z_4 может быть образовано 24 двойных отношения. Они состоят из шести групп по четыре равных двойных отношения в каждой. Если одно отношение равно λ, то шестью различными двойными отношениями являются λ, $1-\lambda$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$. Четыре точки называются *гармоническими* или *находящимися в гармоническом отношении*, если одно из этих двойных отношений равно -1. В этом случае шестью отношениями являются -1, 2, -1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$.

Если одно из двойных отношений является действительным числом, то все шесть отношений действительны, и данные четыре точки лежат на одной окружности. Ибо в этом случае

$$\operatorname{am}\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

должна иметь одно из трех значений $-\pi$, 0, π, так что $\operatorname{am}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}$ и $\operatorname{am}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ должны либо быть равны, либо отличаться на π (см. пример 19).

Если $(z_1, z_2; z_3, z_4)=-1$, мы имеем два уравнения

$$\operatorname{am}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}=\pm\pi+\operatorname{am}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}, \quad \left|\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right|=\left|\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right|.$$

Четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности, причем между A_1 и A_2 лежат A_3 и A_4. Кроме того, $\frac{A_1A_3}{A_1A_4}=\frac{A_2A_3}{A_2A_4}$. Пусть O — середина A_3A_4. Уравнение

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=-1$$

может быть записаио в виде

$$(z_1+z_2)(z_3+z_4)=2(z_1z_2+z_3z_4),$$

или, что то же самое, в виде

$$\left\{z_1-\frac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}\left\{z_2-\frac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}=\left\{\frac{1}{2}(z_3-z_4)\right\}^2.$$

Но это эквивалентно соотношению $\overline{OA}_1 \cdot \overline{OA}_2 = \overline{OA}_3^2 = \overline{OA}_4^2$. Следовательно, OA_1 и OA_2 образуют равные углы с A_3A_4, и $OA_1 \cdot OA_2 = OA_3^2 = OA_4^2$. Заметим, что соотношение между парами A_1, A_2 и A_3, A_4 симметрично. Следовательно, если O' — середина A_1A_2, то $O'A_3$ и $O'A_4$ равнонаклонены к A_1A_2, и $O'A_3 \cdot O'A_4 = O'A_1^2 = O'A_2^2$.

26. Если точки A_1, A_2 заданы уравнением $az^2 + 2bz + c = 0$, а точки A_3, A_4 — уравнением $a'z^2 + 2b'z + c' = 0$, O — середина A_3A_4 и $ac' + a'c - 2bb' = 0$, то OA_1, OA_2 равнонаклонены к A_3A_4 и $OA_1 \cdot OA_2 = OA_3^2 = OA_4^2$.

(*Экз.* 1901 г.)

27. Пусть AB, CD — две пересекающиеся прямые на диаграмме Аргана и P и Q — их середины. Доказать, что если AB является биссектрисой угла CPD и $PA^2 = PB^2 = PC \cdot PD$, то CD является биссектрисой угла AQB и

$$QC^2 = QD^2 = QA \cdot QB. \qquad (\textit{Экз. } 1909 \text{ г.})$$

28. **Условие того, что четыре точки лежат на окружности.** Достаточным условием является то, что одно, а следовательно, и все двойные отношения действительны (пример 25). Это условие является также и необходимым. Другой формой этого условия является возможность выбора действительных чисел α, β, γ так, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ z_1z_4 + z_2z_3 & z_2z_4 + z_3z_1 & z_3z_4 + z_1z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

[Для доказательства заметим, что преобразование $Z = \frac{1}{z - z_4}$ эквивалентно инверсии относительно точки z_4, соединенной с некоторым зеркальным отображением (пример 21). Если z_1, z_2, z_3 лежат на окружности, проходящей через z_4, то соответствующие точки $Z_1 = \frac{1}{z_1 - z_4}$, $Z_2 = \frac{1}{z_2 - z_4}$, $Z_3 = \frac{1}{z_3 - z_4}$ лежат на одной прямой. Следовательно (см. пример 12), мы можем найти действительные числа α', β', γ' так, что $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$ и

$$\frac{\alpha'}{z_1 - z_4} + \frac{\beta'}{z_2 - z_4} + \frac{\gamma'}{z_3 - z_4} = 0,$$

и легко показать, что это соотношение эквивалентно приведенному условию.]

29. Доказать следующий аналог теоремы Муавра для действительных чисел: если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — последовательность положительных острых углов таких, что

$$\operatorname{tg} \varphi_{m+1} = \operatorname{tg} \varphi_m \sec \varphi_1 + \sec \varphi_m \operatorname{tg} \varphi_1,$$

то

$$\operatorname{tg} \varphi_{m+n} = \operatorname{tg} \varphi_m \sec \varphi_n + \sec \varphi_m \operatorname{tg} \varphi_n,$$
$$\sec \varphi_{m+n} = \sec \varphi_m \sec \varphi_n + \operatorname{tg} \varphi_m \operatorname{tg} \varphi_n$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_m + \sec \varphi_m = (\operatorname{tg} \varphi_1 + \sec \varphi_1)^m.$$

[Применить метод математической индукции.]

30. **Преобразование** $z = Z^m$. В этом случае $r = R^m$, и θ и $m\Theta$ отличаются на целочисленное кратное 2π. Если Z описывает окружность с центром в начале, то z описывает m раз окружность с центром в начале.

Вся плоскость (x, y) соответствует любому из m секторов в плоскости (X, Y), угол каждого из которых равен $\frac{2\pi}{m}$. Каждой точке в плоскости (x, y) соответствует m точек в плоскости (X, Y).

31. **Комплексные функции действительного переменного.** Если $f(t)$, $\varphi(t)$ — две действительные функции действительного переменного t, определенные в некоторой области значений t, мы называем

$$z = f(t) + i\varphi(t) \tag{1}$$

комплексной функцией от t. Мы можем графически представить ее, проведя кривую

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t).$$

Если z является полиномом от t или рациональной функцией от t с комплексными коэффициентами, мы можем представить z в форме (1) и так определить кривую, представленную этой функцией.

(1) Пусть

$$z = a + (b - a)t,$$

где a и b — комплексные числа. Если $a = \alpha + \alpha' i$, $b = \beta + \beta' i$, то

$$x = \alpha + (\beta - \alpha)t, \quad y = \alpha' + (\beta' - \alpha')t.$$

Кривая в данном случае является прямой, соединяющей точки $z = a$ и $t = b$. Отрезок между этими точками соответствует интервалу значений z от 0 до 1. Найти значения t, соответствующие двум остальным (бесконечным) отрезкам прямой.

(2) Если

$$z = c + \rho\left(\frac{1 + ti}{1 - ti}\right),$$

где ρ положительно, то кривая является окружностью радиуса ρ с центром в c. Когда t пробегает все действительные значения, точка z описывает окружность один раз.

(3) В общем случае уравнение

$$z = \frac{a + bt}{c + dt}$$

представляет окружность. Это может быть доказано вычислением x и y и исключением t, но ведет к весьма громоздким выкладкам. Более простой метод заключается в применении результата примера 22. Пусть

$$z = \frac{a + bZ}{c + dZ}, \quad Z = t.$$

Когда t изменяется, Z описывает прямую линию, а именно, ось X. Следовательно, z описывает окружность.

(4) Уравнение

$$z = a + 2bt + ct^2$$

представляет в общем случае параболу. Когда $\frac{b}{c}$ действительно, оно представляет прямую.

(5) Уравнение

$$z = \frac{a + 2bt + ct^2}{\alpha + 2\beta t + \gamma t^2},$$

где α, β, γ действительны, представляет коническое сечение.

[Исключить t из соотношений

$$x = \frac{A + 2Bt + Ct^2}{\alpha + 2\beta t + \gamma t^2}, \quad y = \frac{A' + 2B't + C't^2}{\alpha + 2\beta t + \gamma t^2},$$

где $A + A'i = a$, $B + B'i = b$, $C + C'i = c$.]

47. Корни из комплексных чисел. До сих пор мы не приписывали никакого смысла таким символам, как $\sqrt[n]{a}$, $a^{m/n}$, где a — комплексное число, а m и n — целые числа. Представляется, однако, естественным принять определения, которые даются в элементарной алгебре для действительных значений a. Таким образом, мы определяем $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$, где n — положительное целое число, как число z, удовлетворяющее уравнению $z^n = a$, и $a^{m/n}$, где m — целое число, как $(a^{1/n})^m$. Эти определения не предрешают вопроса о том, существуют ли вообще корни этого уравнения.

48. Решение уравнения $z^n = a$. Пусть

$$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где ρ положительно и φ — угол, для которого $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Если мы положим $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то уравнение примет вид

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

так что

$$r^n = \rho, \quad \cos n\theta = \cos\varphi, \quad \sin n\theta = \sin\varphi. \tag{1}$$

Единственным возможным значением для r является $\sqrt[n]{\rho}$, обычный арифметический корень n-ой степени из ρ; а для того чтобы два последних уравнения удовлетворялись, необходимо и достаточно, чтобы $n\theta = \varphi + 2k\pi$, где k — целое число, или чтобы

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Если $k = pn + q$, где p и q — целые числа и $0 \leqslant q < n$, то значением θ является $2\pi p + \frac{\varphi + 2q\pi}{n}$, и здесь безразлично, какое значение имеет p. Следовательно, *уравнение*

$$z^n = a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

имеет в точности n корней, даваемых выражением $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, где

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2q\pi}{n} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Что эти n корней различны, легко видеть, нанеся их на диаграмму Аргана. Корень

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

называется *главным значением* $\sqrt[n]{a}$.

Случай, когда $a = 1$, $\rho = 1$, $\varphi = 0$, представляет особый интерес; n корней уравнения $x^n = 1$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\cos\frac{2q\pi}{n} + i\sin\frac{2q\pi}{n} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Эти числа называются корнями n-ой степени из единицы; главным значением является сама единица. Если мы обозначим $\cos\frac{2\pi}{n}+$ $+i\sin\frac{2\pi}{n}$ через ω_n, то корни n-ой степени из единицы могут быть записаны в виде

$$1,\ \omega_n,\ \omega_n^2,\ \ldots,\ \omega_n^{n-1}.$$

Примеры XXII. 1. Двумя квадратными корнями из единицы являются 1 и -1; три кубических корня из единицы суть 1, $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ и $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$; четыре корня четвертой степени из единицы суть 1, i, -1, $-i$, и пять корней пятой степени из единицы суть

$$1, \frac{1}{4}\{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\},\ \frac{1}{4}\{-\sqrt{5}-1+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\},$$
$$\frac{1}{4}\{-\sqrt{5}-1-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\},\ \frac{1}{4}\{\sqrt{5}-1-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\}.$$

2. Доказать, что

$$1+\omega_n+\omega_n^2+\ldots+\omega_n^{n-1}=0.$$

3. Доказать, что

$$(x+y\omega_3+z\omega_3^2)(x+y\omega_3^2+z\omega_3)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

4. Корни n-ой степени из a являются произведениями корней n-ой степени из единицы на главное значение $\sqrt[n]{a}$.

5. Из примера XXI. 14, следует, что корнями уравнения

$$z^2=\alpha+\beta i$$

являются числа

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)},$$

причем одинаковые или разные знаки надо брать в зависимости от того, является ли β положительным или отрицательным числом. Показать, что этот результат совпадает с результатом из п. 48.

6. Показать, что

$$\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2}$$

равно

$$\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{m}+a^2\right)\ldots\left(x^2-2ax\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+a^2\right).$$

[Делителями $x^{2m}-a^{2m}$ являются

$$(x-a),\quad (x-a\omega_{2m}),\quad (x-a\omega_{2m}^2),\ \ldots,\quad (x-a\omega_{2m}^{2m-1}).$$

Делитель $x-a\omega_{2m}^m$ есть $x+a$. Произведение делителей $(x-a\omega_{2m}^{2m-s})$ и $(x-a\omega_{2m}^s)$ дает делитель $x^2-2ax\cos\frac{s\pi}{m}+a^2$.]

7. Аналогичным образом разложить на множители

$$x^{2m+1}-a^{2m+1},\quad x^{2m}+a^{2m},\ x^{2m+1}+a^{2m+1}.$$

8. Показать, что $x^{2n}-2x^na^n\cos\theta+a^{2n}$ равно

$$\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta}{n}+a^2\right)\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+a^2\right).$$

[Применить формулу

$$x^{2n}-2x^na^n\cos\theta+a^{2n}=\{x^n-a^n(\cos\theta+i\sin\theta)\}\{x^n-a^n(\cos\theta-i\sin\theta)\}$$

и разложить каждое из двух последних выражений на n множителей.]

9. Найти все корни уравнения

$$x^6-2x^3+2=0. \qquad (\textit{Экз. } 1910 \text{ г.})$$

10. Задача представления значения ω_n в форме, содержащей только квадратные корни, как в формуле $\omega_3=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, является алгебраическим аналогом следующей геометрической задачи: вписать правильный n-угольник в окружность единичного радиуса эвклидовыми методами, т. е. только с помощью линейки и циркуля. Ибо это построение будет возможно в том и только в том случае, если мы умеем строить длины, измеряемые $\cos\frac{2\pi}{n}$ и $\sin\frac{2\pi}{n}$; а это возможно в том и только в том случае, когда эти числа могут быть представлены в форме, содержащей только квадратные корни (см. гл. II, Разные примеры, 22).

Эвклид дает построение для $n=3$, 4, 5, 6, 8, 10, 12 и 15. Очевидно, что построение возможно для любого значения n, которое равно одному из приведенных значений, умноженному на какую-либо степень 2. Существуют другие частные значения n, для которых такое построение возможно. Наиболее интересным из них является $n=17$.

Гаусс доказал, что построение возможно, если n имеет вид

$$2^{2^k}+1$$

и является простым числом. Числа 3, 5, 17, 257 и 65 537, соответствующие значениям $k=0$, 1, 2, 3 и 4, — простые, и построение, следовательно, возможно. Но $k=5$, 6, 7 и 8 дают значения n, не являющиеся простыми, и неизвестно, существуют ли другие простые значения, представимые в этой форме.

Простейшее построение семнадцатиугольника, данное Ричмондом, приведено в книгах: H. P. Hudson, *Ruler and compasses*, стр. 34, F. and F. V. Morley, *Inversive Geometry*, стр. 167, и в книге Клейна, упомянутой на стр. 27*).

49. Общая форма теоремы Муавра. Из результатов предыдущего пункта следует, что если q — положительное число, то одним из значений $(\cos\theta+i\sin\theta)^{1/q}$ является

$$\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}.$$

---

*) См. также Адлер, *Теория геометрических построений*, Учпедгиз, Л., 1940, где даны другие построения. (*Прим. перев.*)

Возводя каждое из этих выражений в степень p (где p — любое целое число, положительное или отрицательное), мы получаем, что одним из значений $(\cos\theta+i\sin\theta)^{p/q}$ является $\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}$, или что *если α — любое рациональное число, то одним из значений*

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\alpha}$$

является

$$\cos\alpha\theta+i\sin\alpha\theta.$$

Это и есть обобщенная форма теоремы Муавра (п. 45).

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ III

1. Условием равносторонности треугольника xyz является

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0.$$

[Пусть треугольник будет XYZ. Смещение $\overline{ZX}$ является смещением $\overline{YZ}$, повернутым на угол $\frac{2}{3}\pi$ в положительном или отрицательном направлении. Так как $\operatorname{Cis}\frac{2\pi}{3}=\omega_3$, $\operatorname{Cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\omega_3}=\omega_3^2$, мы имеем $x-z=(z-y)\omega_3$ или $x-z=(z-y)\omega_3^2$. Следовательно, $x+y\omega_3+z\omega_3^2=0$ или $x+y\omega_3^2+z\omega_3=0$. Утверждение следует из примера XXII. 3.]

2. Если XYZ, $X'Y'Z'$ — два треугольника и

$$\overline{YZ}\cdot\overline{Y'Z'}=\overline{ZX}\cdot\overline{Z'X'}=\overline{XY}\cdot\overline{X'Y'},$$

то оба треугольника — равносторонние. [Из уравнений

$$(y-z)(y'-z')=(z-x)(z'-x')=(x-y)(x'-y')=k^2$$

мы заключаем, что $\sum\frac{1}{y'-z'}=0$ или $\sum x'^2-\sum y'z'=0$. Затем используем результат предыдущего примера.]

3. На сторонах треугольника ABC построены подобные треугольники BCX, CAY, ABZ. Доказать, что центры тяжести ABC и XYZ совпадают.

[Мы имеем $\frac{x-c}{b-c}=\frac{y-a}{c-a}=\frac{z-b}{a-b}=\lambda$. Выразить $\frac{1}{3}(x+y+z)$ через a, b, c.]

4. Если X, Y, Z — точки на сторонах треугольника ABC такие, что

$$\frac{BX}{XC}=\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{ZB}=r,$$

и если ABC, XYZ подобны, то либо $r=1$, либо оба треугольника — равносторонние.

5. Если A, B, C, D — четыре точки на плоскости, то

$$AD\cdot BC\leqslant BD\cdot CA+CD\cdot AB.$$

[Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — комплексные числа, соответствующие A, B, C, D. Тогда имеет место тождество

$$(z_1-z_4)(z_2-z_3)+(z_2-z_4)(z_3-z_1)+(z_3-z_4)(z_1-z_2)=0.$$

Отсюда

$$|(z_1-z_4)(z_2-z_3)|=|(z_2-z_4)(z_3-z_1)+(z_3-z_4)(z_1-z_2)|\leqslant$$
$$\leqslant|(z_2-z_4)(z_3-z_1)|+|(z_3+z_4)(z_1-z_2)|.]$$

6. Вывести теорему Птоломея о четырехугольнике, вписанном в окружность, из того факта, что двойные отношения четырех точек, лежащих на одной окружности, действительны. [Использовать тождество предыдущего примера.]

7. Если $z^2+z'^2=1$, то точки z и z' являются концами сопряженных диаметров некоторого эллипса с фокусами в точках $1, -1$. [Если CP и CD — сопряженные полудиаметры эллипса с фокусами в S и H, то CD параллельно внешней биссектрисе угла SPH, и $SP \cdot HP = CD^2$.]

8. Доказать, что $|a+b|^2+|a-b|^2=2\{|a|^2+|b|^2\}$. [Это соотношение является аналитическим аналогом геометрической теоремы о том, что если M — середина PQ, то $OP^2+OQ^2=2OM^2+2MP^2$.]

9. Вывести из примера 8, что

$$|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|=|a+b|+|a-b|.$$

[Если $a+\sqrt{a^2-b^2}=z_1$, $a-\sqrt{a^2-b^2}=z_2$, то мы имеем:

$$|z_1|^2+|z_2|^2=\frac{1}{2}|z_1+z_2|^2+\frac{1}{2}|z_1-z_2|^2=2|a|^2+2|a^2-b^2|,$$

и, следовательно,

$$(|z_1|+|z_2|)^2=2\{|a|^2+|a^2-b^2|+|b|^2\}=|a+b|^2+ \\ +|a-b|^2+2|a^2-b^2|.$$

Иначе этот результат можно сформулировать так: если z_1 и z_2 являются корнями уравнения

$$\alpha z^2+2\beta z+\gamma=0,$$

то

$$|\alpha|(|z_1|+|z_2|)=|\beta+\sqrt{\alpha\gamma}|+|\beta-\sqrt{\alpha\gamma}|.]$$

10. Показать, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы оба корня уравнения $z^2+az+b=0$ имели модуль, равный единице, является выполнение следующих соотношений:

$$|a|\leqslant 2,\quad |b|=1,\quad \operatorname{am} b=2\operatorname{am} a.$$

[Под амплитудами здесь понимаются не обязательно их главные значения.]

11. Если уравнение $x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ с действительными коэффициентами имеет два действительных и два комплексных корня, лежащих на одной окружности на диаграмме Аргана, то

$$a_3^2+a_1^2a_4+a_2^3-a_2a_4-2a_1a_2a_3=0.$$

12. Четыре корня уравнения $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ находятся в гармоническом отношении, если

$$a_0a_3^2+a_1^2a_4+a_2^3-a_0a_2a_4-2a_1a_2a_3=0.$$

[Выразить $Z_{23,14}$ $Z_{31,24}$ $Z_{12,34}$, где

$$Z_{23,14}=(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_3)(z_2-z_4)$$

и z_1, z_2, z_3, z_4 — корни уравнения, через коэффициенты.]

13. **Мнимые точки и прямые линии.** Пусть уравнение $ax+by+c=0$ имеет комплексные коэффициенты. Если мы придадим x любое действительное или комплексное значение, мы можем найти соответствующее значение y. Совокупность пар действительных или комплексных значений x и y, удовлетворяющих такому уравнению, называется *мнимой прямой*; сами пары значений называются *мнимыми точками*, и мы говорим, что они *лежат на прямой*. Значения x и y называются *координатами* точки (x, y). Когда

x и y действительны, точка называется *действительной точкой*; когда a, b и c действительны (или могут быть сделаны действительными делением уравнения на некоторое число), прямая называется *действительной прямой*. Точки $x=\alpha+\beta i$, $y=\gamma+\delta i$ и $x=\alpha-\beta i$, $y=\gamma-\delta i$ называются *сопряженными; сопряженными* называются также прямые

$$(A+A'i)x+(B+B'i)y+C+C'i=0,$$
$$(A-A'i)x+(B-B'i)y+C-C'i=0.$$

Проверить следующие утверждения: каждая действительная прямая содержит бесконечно много пар сопряженных мнимых точек; мнимая прямая содержит, вообще говоря, одну и только одну действительную точку; мнимая прямая не может содержать пару сопряженных мнимых точек. Найти также условия для того, чтобы (a) прямая, соединяющая две данные мнимые точки, была бы действительной, и (b) точка пересечения двух мнимых прямых была бы действительной.

14. Доказать тождества:

$$(x+y+z)(x+y\omega_3+z\omega_3^2)(x+y\omega_3^2+z\omega_3)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$
$$(x+y+z)(x+y\omega_5+z\omega_5^4)(x+y\omega_5^2+z\omega_5^3)(x+y\omega_5^3+z\omega_5^2)(x+y\omega_5^4+z\omega_5)=$$
$$=x^5+y^5+z^5-5x^3yz+5xy^2z^2.$$

15. Решить уравнения

$$x^3-3ax+(a^3+1)=0,\quad x^5-5ax^3+5a^2x+(a^5+1)=0.$$

16. Если $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k$, то

$$\frac{1}{n}\{f(x)+f(\omega x)+\ldots+f(\omega^{n-1}x)\}=a_0+a_nx^n+a_{2n}x^{2n}+\ldots+a_{\lambda n}x^{\lambda n},$$

где ω означает любой корень (кроме единицы) уравнения $x^n=1$, и λn является наибольшим кратным n, содержащимся в k. Найти аналогичную формулу для $a_\mu+a_{\mu+n}x^n+a_{\mu+2n}x^{2n}+\ldots$, где $0<\mu<n$.

17. Если $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots$, где n — положительное целое число, то

$$p_0-p_2+p_4-\ldots=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4},\qquad p_1-p_3+p_5-\ldots=2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

18. Просуммировать

$$\frac{x}{2!\,(n-2)!}+\frac{x^2}{5!\,(n-5)!}+\frac{x^3}{8!\,(n-8)!}+\ldots+\frac{x^{n/3}}{(n-1)!},$$

где n кратно 3. (*Экз.* 1899 г.)

19. Если t — такое комплексное число, что $|t|=1$, то точка

$$x=\frac{at+b}{t-c}$$

описывает окружность, когда t изменяется, за исключением того случая, когда $|c|=1$. В этом случае точка описывает прямую.

20. Когда t изменяется как в предыдущем примере, точка

$$x=\frac{1}{2}\left(at+\frac{b}{t}\right)$$

описывает в общем случае эллипс, фокусы которого определены уравнением $x^2=ab$ и оси которого равны $|a|+|b|$ и $|a|-|b|$. Но если $|a|=|b|$, то x описывает отрезок прямой, соединяющий точки $-\sqrt{ab}$ и $\sqrt{ab}$.

21. Доказать, что если t — действительное число и

$$z = t^2 - 1 + \sqrt{t^4 - t^2},$$

то, при $t^2 < 1$, z представляет точку, лежащую на окружности $x^2 + y^2 + x = 0$. Предполагая, что при $t^2 > 1$ под $\sqrt{t^4 - t^2}$ понимается положительный квадратный корень из $t^4 - t^2$, рассмотреть движение точки, представляемой z, когда t уменьшается от больших положительных значений к большим отрицательным значениям.

(*Экз.* 1912 г.)

22. Пусть коэффициенты преобразования

$$z = \frac{aZ + b}{cZ + d}$$

подчинены условию $ad - bc = 1$. Показать, что если $c \neq 0$, то существуют две *неподвижные точки* α и β, т. е. такие точки, которые переходят при преобразовании сами в себя; если же, кроме того, $(a + d)^2 = 4$, то существует только одна такая точка α. В этих двух случаях преобразование может быть представлено, соответственно, в виде

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = K\frac{Z - \alpha}{Z - \beta}, \text{ или } \frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{Z - \alpha} + K.$$

Показать, далее, что если $c = 0$, то имеется одна неподвижная точка α при условии, что $a \neq d$, и что в этом случае преобразование может быть представлено в виде

$$z - \alpha = K(Z - \alpha).$$

Если же $c = 0$ и $a = d$, то преобразование может быть представлено в виде

$$z = Z + K.$$

Наконец, если a, b, c, d принимают положительные целочисленные значения (включая нуль), показать, что единственными преобразованиями менее чем с двумя неподвижными точками являются преобразования

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{Z} + K, \quad z = Z + K.$$

(*Экз.* 1911 г.)

23. Показать, что соотношение

$$z = \frac{1 + Zi}{Z + i}$$

преобразует часть оси x между точками $z = 1$ и $z = -1$ в полуокружность, проходящую через точки $Z = 1$ и $Z = -1$. Найти все фигуры, которые могут быть получены из указанной части оси x последовательным применением данного преобразования. (*Экз.* 1912 г.)

24. Доказать, что преобразование

$$z = (\cos\theta + i\sin\theta)\frac{Z - a}{1 - \bar{a}Z},$$

где a — любое комплексное число с модулем, не равным единице, и $\bar{a}$ означает сопряженное к a число, а θ — действительное число, преобразует внутренность единичной окружности плоскости z во внутренность или внешность единичной окружности в плоскости Z. Найти также условия для каждого из этих случаев. (*Экз.* 1933 г.)

25. Если $z = 2Z + Z^2$, то окружности $|Z| = 1$ соответствует кардиоида в плоскости z.

26. Рассмотреть преобразование

$$z=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right),$$

и, в частности, показать, что окружностям $X^2+Y^2=a^2$ соответствуют софокусные эллипсы

$$\frac{x^2}{\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^2}+\frac{y^2}{\left\{\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}^2}=1.$$

27. Если $(z+1)^2=\frac{4}{Z}$, то единичной окружности в плоскости z соответствует парабола $R\cos^2\frac{1}{2}\Theta=1$ в плоскости Z, и внутренности окружиости соответствует область, внешняя относительно параболы.

28. Показать, что преобразование

$$z=\left(\frac{Z+a}{Z-a}\right)^2,$$

где a — действительное число, преобразует верхиюю полуплоскость z в полукруг в плоскости Z. (*Экз.* 1919 г.)

29. Если $z=Z^2-1$, то когда z описывает окружность $|z|=\varkappa$, две соответствующих точки Z описывают каждая овал Кассини $\rho_1\rho_2=\varkappa$, где ρ_1, ρ_2 означают расстояния от Z до точек -1, 1. Начертить эти овалы для различных значеиий $\varkappa$.

30. Рассмотрим соотношеиие

$$az^2+2hzZ+bZ^2+2gz+2fZ+c=0.$$

Показать, что существуют два значения Z, для которых соответствующие значения z равны, и наоборот. Мы называем эти точки *точками ветвления* в плоскости Z и, соответственно, в плоскости z. Показать, что если z описывает эллипс с фокусами в точках ветвлеиия, то и Z описывает эллипс с фокусами в точках ветвления.

[Мы можем без ограничения общности предположить, что данное соотношение имеет вид

$$z^2+2zZ\cos\omega+Z^2=1;$$

читателю предлагается самому убедиться в этом. Точками ветвления в каждой плоскости будут тогда $\operatorname{cosec}\omega$ и $-\operatorname{cosec}\omega$. Эллипс указанного типа представляется тогда соотношением

$$|z+\operatorname{cosec}\omega|+|z-\operatorname{cosec}\omega|=C,$$

где C — константа. Это соотношеине эквивалентно (пример 9) следующему:

$$|z+\sqrt{z^2-\operatorname{cosec}^2\omega}|+|z-\sqrt{z^2-\operatorname{cosec}^2\omega}|=C.$$

Подставить сюда выражение z через Z.]

31. Если $z=aZ^m+bZ^n$, где m и n — положительные целые числа и a, b — действительные числа, то когда Z описывает единичную окружность, z описывает гипо- или эпициклоиду.

32. Показать, что преобразование

$$z=\frac{(a+di)\bar{Z}+b}{cZ-(a-di)},$$

где a, b, c, d — действительные числа и $a^2+d^2+bc>0$, а $\bar{Z}$ обозначает число, сопряженное с Z, эквивалентно инверсии относительно окружности

$$c(x^2+y^2)-2ax-2dy-b=0.$$

Какова геометрическая интерпретация преобразования, когда

$$a^2+d^2+bc<0?$$

33. Преобразование

$$\frac{1-z}{1+z}=\left(\frac{1-Z}{1+Z}\right)^c,$$

где c рационально и $0<c<1$, преобразует окружность $|z|=1$ в границу круговой луночки с углом $\frac{\pi}{c}$.

34. Доказать, что преобразование

$$\frac{z(z-\alpha)}{\alpha z-1}=Z,$$

где α действительно и $0<\alpha<1$, преобразует внутренность единичного круга в плоскости z в дважды взятую внутренность единичного круга в плоскости Z. (*Экз.* 1933 г.)

ГЛАВА IV

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ ОТ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПЕРЕМЕННОГО

50. Функции от положительного целочисленного переменного. В гл. II мы рассмотрели понятие функции от действительного переменного x и привели большое число примеров таких функций. Читатель вспомнит, что мы встретились там с одним очень важным обстоятельством: некоторые из этих функций были определены для *всех* значений x, некоторые — только для *рациональных* значений, некоторые — только для *целочисленных* значений и т. д.

Рассмотрим, например, следующие функции: (1) x, (2) $\sqrt{x}$, (3) знаменатель x, (4) корень квадратный из произведения числителя и знаменателя x, (5) наибольший простой делитель x, (6) произведение $\sqrt{x}$ и наибольшего простого делителя x, (7) x-ое простое число, (8) измеренный в дюймах рост заключенного номер x в Дартмурской тюрьме.

Тогда совокупности значений x, для которых эти функции определены, или, как говорят, *области определения* этих функций, состоят из (1) *всех* значений x, (2) *всех положительных* значений x, (3) *всех рациональных* значений x, (4) *всех положительных рациональных* значений x, (5) *всех целочисленных* значений x, (6), (7) *всех положительных целочисленных* значений x, (8) некоторого числа положительных целочисленных значений x, а именно, $1, 2, \ldots, N$, где N — число всех заключенных в Дартмурской тюрьме в данный момент времени[1]).

Рассмотрим теперь такую функцию, как, например, функция примера (7), которая определена для всех положительных целочисленных значений x и ни для каких других. Такая функция может рассматриваться с двух, слегка отличающихся друг от друга, точек зрения. Мы можем рассматривать ее, как мы это делали до сих пор, как функцию действительного переменного x, определенную только

---

[1]) В этом последнем случае N зависит от времени, а заключенный номер x, где x имеет определенное значение, представляется разными лицами в разные моменты времени. Таким образом, если мы будем рассматривать разные моменты времени, то получим простой пример функции $y = F(x, t)$ от двух переменных, определенной для некоторой области значений t, а именно, с момента открытия Дартмурской тюрьмы до момента ее закрытия, и для *некоторого числа положительных целочисленных* значений x, причем это число изменяется со временем.

для некоторых значений x, а именно, положительных и целочисленных, и считать, что для всех остальных значений x данное определение непригодно. Или же мы можем вообще исключить из рассмотрения все значения x, отличные от положительных целочисленных, и рассматривать нашу функцию как функцию от *положительного целочисленного переменного* n, значениями которого являются положительные целые числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .$$

В этом случае мы можем писать

$$y=\varphi(n)$$

и уже рассматривать y как функцию от n, определенную для всех значений n.

Очевидно, что всякая функция от x, определенная для всех значений x, порождает функцию от n, определенную для всех значений n. Так, из функции $y=x^2$ мы получаем функцию $y=n^2$ простым исключением из рассмотрения всех значений x, отличных от положительных целых чисел, и соответствующих значений y. С другой стороны, из любой функции от n мы можем вывести любое число функций от x, приписывая произвольным образом значения y, соответствующие значениям x, отличным от положительных целых чисел.

51. Интерполяция. Задача определения функции от x, которая должна принимать для всех положительных целочисленных значений x значения, равные соответствующим значениям некоторой данной функции от n, играет весьма важную роль в высшей математике. Она называется *задачей функциональной интерполяции.*

Если бы задача состояла только в том, чтобы найти *какую-нибудь* функцию от x, удовлетворяющую поставленным условиям, то ее решение не представляло бы никаких трудностей. Мы могли бы, как уже было указано, просто заполнить недостающие значения каким угодно образом; мы могли бы даже просто рассматривать данные значения функции от n как *все* значения функции от x, и сказать, что определение этой последней функции непригодно для всех остальных значений x. Но такие решения, конечно, не представляют интереса. В качестве решения обычно требуется некоторая *формула* (возможно более простого вида), содержащая x и принимающая данные значения при $x=1,\ 2,\ \ldots$.

В некоторых случаях, в особенности тогда, когда сама функция от n определена с помощью формулы, имеется очевидное решение. Если, например, $y=\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — такая функция от n, которая (как, например, n^2 или $\cos n\pi$) сохраняет смысл и для n, отличных от положительных целых чисел, то мы, естественно, берем в качестве решения функцию $y=\varphi(x)$. Но даже в этом очень простом случае легко написать другие, почти одинаково очевидные решения задачи. Например,

$$y=\varphi(x)+\sin x\pi$$

принимает значения $\varphi(n)$ при $x=n$, так как $\sin n\pi=0$.

В других случаях $\varphi(n)$ может быть определена формулой, как, например, $(-1)^n$, теряющей смысл при некоторых значениях x (в данном примере для рациональных значений x с четными знаменателями и для иррациональных значений). Но может оказаться возможным преобразовать формулу таким образом, что она станет применима для всех значений x. В рассмотренном случае, например,

$$(-1)^n = \cos n\pi,$$

если n — целое число, и задача интерполяции решается функцией $\cos x\pi$.

В других случаях $\varphi(x)$ может быть определена для некоторых значений x, отличных от положительных целых чисел, но не для всех таких значений. Так, от $y = n^n$ мы приходим к $y = x^x$. Это выражение имеет смысл только для некоторых из остающихся значений x. Если мы для простоты ограничимся только положительными значениями x, то x^x имеет смысл для всех рациональных значений x, в силу определений дробных степеней, принятых в элементарной алгебре. Но когда x *иррационально*, x^x (по крайней мере с той точки зрения, которой мы придерживаемся в настоящий момент) не имеет никакого смысла. Мы приходим, таким образом, к вопросу о таком расширении наших определений, чтобы выражение x^x имело бы смысл и в том случае, когда x иррационально. Дальше мы увидим, как такое расширение может быть осуществлено.

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$y = 1.2 \ldots n = n!$$

Здесь не существует очевидной формулы от x, которая сводилась бы к $n!$ при $x = n$, так как $x!$ ничего не означает для значений x, отличных от положительных целых чисел. Это — один из тех случаев, в которых попытки решить задачу интерполяции привели к важным открытиям в математике. Математикам удалось найти такую функцию (так называемую гамма-функцию), которая обладает требуемым свойством и целым рядом других важных и интересных свойств.

52. Конечные и бесконечные классы. Прежде чем итти дальше, необходимо сделать несколько замечаний о некоторых абстрактных понятиях, постоянно встречающихся в чистой математике.

В первую очередь, читатель, вероятно, знаком с понятием *класса*. Нет необходимости рассматривать здесь какие-либо логические трудности, связанные с понятием класса; грубо говоря, мы можем считать, что класс — это совокупность понятий или предметов, обладающих некоторым свойством, которое может быть простым или сложным. Так, мы имеем классы британских подданных, членов парламента, положительных целых чисел или действительных чисел.

Более того, читатель имеет, вероятно, также и представление о том, что́ понимается под *конечным* или *бесконечным* классом. Так, класс *британских подданных* — конечный класс: совокупность всех британских подданных, в прошлом, настоящем и будущем, состоит из конечного числа n элементов, хотя мы, конечно, в настоящий момент не в состоянии указать значение этого числа n. С другой стороны, класс *британских подданных в настоящий момент* состоит из числа элементов, которое мы могли бы установить путем счета, если бы методы переписи были достаточно эффективными.

Класс положительных целых чисел бесконечен. Более точно это можно выразить следующим образом. Если n — любое положительное целое число, как, например, 1 000, 1 000 000, или любое другое число, которое мы зададим, то существует более n положительных целых чисел. Так, если мы задали число 1 000 000, то, очевидно, существует по крайней мере 1 000 001 положительное целое число. Бесконечными являются и классы рациональных или действительных чисел. Это удобно выразить следующими словами: *существует бесконечное число* положительных целых чисел или рациональных чисел, или действительных чисел. Но читатель должен всегда помнить, что под этим мы понимаем просто то, что число элементов рассматриваемого класса не является конечным числом, как 1 000 или 1 000 000.

53. Свойства, которыми обладает функция от n для больших значений n. Мы можем теперь вернуться к „функциям от n“, которые мы рассматривали в пп. 50—51. Они во многом отличаются от функций от x, рассмотренных нами в гл. II. Но имеется один основной момент, общий обоим классам функций: *значения переменного, для которых они определены, образуют бесконечный класс.* Это обстоятельство лежит в основе всех дальнейших рассмотрений, которые, как мы увидим, переносятся и на функции от x.

Допустим, что $\varphi(n)$ — любая функция от n и что P — любое свойство, которым $\varphi(n)$ может обладать или нет, как, например, свойство быть положительным целым числом или быть бо́льшим 1. Рассмотрим для каждого из значений $n = 1, 2, 3, \ldots$, обладает ли $\varphi(n)$ свойством P или нет. Могут представиться три случая:

(a) $\varphi(n)$ может обладать свойством P для *всех* значений n или для всех значений n, кроме конечного числа N значений;

(b) $\varphi(n)$ может не обладать свойством P *ни для одного* значения n или только для конечного числа N значений;

(c) ни (a), ни (b) может не иметь места.

Если имеет место случай (b), значения n, для которых $\varphi(n)$ обладает данным свойством, образуют конечный класс. В случае (a) значения n, для которых $\varphi(n)$ не обладает данным свойством, образуют конечный класс. В третьем случае (c) ни один из этих классов не конечен. Рассмотрим несколько примеров.

(1) Пусть $\varphi(n) = n$ и P означает свойство быть положительным целым числом. Тогда $\varphi(n)$ обладает свойством P для всех значений n.

С другой стороны, если P означает свойство быть положительным целым числом, бо́льшим или равным 1 000, то $\varphi(n)$ обладает этим свойством для всех n, кроме конечного числа значений n, а именно, $1, 2, 3, \ldots, 999$. В обоих случаях имеет место (a).

(2) Если $\varphi(n) = n$ и P является свойством быть меньше, чем 1 000, то имеет место (b).

(3) Если $\varphi(n) = n$ и P является свойством быть нечетным, то имеет место случай (c). Ибо $\varphi(n)$ нечетно, если n нечетно, и четно, если n четно, а классы нечетных и четных значений n оба бесконечны.

Примеры. В каждом из последующих примеров установить, какой из трех случаев (a), (b) или (c) имеет место:

(1) $\varphi(n) = n$, P — свойство быть точным квадратом;

(2) $\varphi(n) = p_n$, где p_n обозначает n-ое простое число, P — свойство быть нечетным;

(3) $\varphi(n) = p_n$, P — свойство быть четным;

(4) $\varphi(n) = p_n$, P — свойство $\varphi(n) > n$;

(5) $\varphi(n) = 1 - (-1)^n \frac{1}{n}$, P — свойство $\varphi(n) < 1$;

(6) $\varphi(n) = 1 - (-1)^n \frac{1}{n}$, P — свойство $\varphi(n) < 2$;

(7) $\varphi(n) = 1000\,\{1 + (-1)^n\}\,\frac{1}{n}$, P — свойство $\varphi(n) < 1$;

(8) $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, P — свойство $\varphi(n) < 0{,}001$;

(9) $\varphi(n) = (-1)^n \frac{1}{n}$, P — свойство $|\varphi(n)| < 0{,}001$;

(10) $\varphi(n) = \frac{10\,000}{n}$, или $(-1)^n \frac{10\,000}{n}$, P — одно из свойств $\varphi(n) < 0{,}001$ или $|\varphi(n)| < 0{,}001$;

(11) $\varphi(n) = \frac{n-1}{n+1}$, P — свойство $1 - \varphi(n) < 0{,}0001$.

54. Предположим теперь, что утверждение (а) имеет место для рассматриваемых $\varphi(n)$ и P, т. е. что $\varphi(n)$ обладает свойством P, если не для всех значений n, то во всяком случае для всех значений, кроме конечного числа N этих значений. Обозначим эти исключенные значения через

$$n_1,\ n_2, \ldots,\ n_N.$$

Конечно, нет никаких оснований ожидать, что эти N значений будут *первыми* N значениями $1, 2, \ldots, N$, хотя, как показывают предыдущие примеры, это часто бывает именно так. Но, так или иначе, мы знаем, что $\varphi(n)$ обладает свойством P, если $n > n_N$. Так, n-ое простое число нечетно, если $n > 2$, так как $n = 2$ является единственным исключением из утверждения; $\frac{1}{n} < 0{,}001$, если $n > 1\,000$, а первые $1\,000$ значений n являются исключениями;

$$1\,000\,\{1 + (-1)^n\}\,\frac{1}{n} < 1,$$

если $n > 2\,000$, причем исключенными значениями являются $2, 4, 6, \ldots, 2\,000$. Это означает, что в каждом из рассмотренных случаев $\varphi(n)$ обладает соответствующим свойством *для всех значений n, начиная с некоторого.*

Это утверждение мы будем часто выражать словами: $\varphi(n)$ обладает данным свойством для *больших*, или *очень больших*, или *всех достаточно больших значений n.* Таким образом, когда мы говорим, что $\varphi(n)$ *обладает свойством P* (которое обычно будет выражаться некоторым соотношением или неравенством) *для больших значений n*, то имеем в виду, что можно найти некоторое определенное число n_0 такое, что $\varphi(n)$ обладает свойством P для всех значений n, бóльших или равных n_0. В примерах, рассмотренных выше, это число n_0 может быть взято равным любому числу, большему чем n_N, наибольшему из исключенных значений; естественнее всего положить $n_0 = n_N + 1$.

Таким образом, мы можем сказать, что „все большие простые числа нечетны" или что „$\frac{1}{n}$ меньше чем 0,001 для больших значений n". Читатель должен освоиться с употреблением слова *большие* в утверждениях такого рода. Слово *большой* само по себе не имеет в математике, как и в обыденной жизни, абсолютного смысла. Общеизвестно, что числа, рассматриваемые в одной связи как большие, могут в другой связи рассматриваться как малые; 6 голов — это большой счет в футбольном матче, но 6 пробегов в крикетном матче — это небольшой счет; 400 пробегов — это уже большой счет, но доход в 400 фунтов стерлингов в год — небольшой доход*). Конечно, и в математике *большой* обычно означает *достаточно большой*, и что является большим для одной цели, может оказаться недостаточно большим для другой.

Мы знаем теперь, что́ понимают под утверждением „$\varphi(n)$ обладает свойством P для больших значений n". Утверждениями этого типа мы будем заниматься на протяжении всей настоящей главы.

55. Выражение „n стремится к бесконечности". Существует еще несколько иная точка зрения на рассматриваемый вопрос, которую удобно принять. Допустим, что n принимает последовательно значения 1, 2, 3, ... Слово „последовательно", есте́ственно, вызывает представление о последовательности во времени, и мы можем, если угодно, предположить, что n принимает эти значения в последовательные моменты времени (например, в начале каждой секунды). Тогда с течением времени n становится все бо́льшим и бо́льшим, и не существует предела его возрастания. Какое бы большое число мы ни задали, наступит момент, когда n станет бо́льшим, чем это число.

Удобно иметь более короткую фразу для выражения этого бесконечного возрастания n, и мы будем говорить, что *n стремится к бесконечности* или $n \to \infty$, причем этот последний символ обычно применяется как сокращение слова „бесконечность". Слово „стремится к", так же как и слово „последовательно", вызывает представление об изменении во времени, и иногда бывает удобно представлять себе изменение n совершающимся во времени описанным выше образом. Однако это лишь вопрос удобства, так как изменение n, как правило, ничего общего со временем не имеет.

Читатель не может переоценить важности полного понимания того, что когда мы говорим „n стремится к ∞", мы имеем в виду только то, что n принимает ряд значений, которые неограниченно возрастают. *Не существует числа „бесконечность"*; такое равенство как

$$n = \infty$$

*) Нормальным счетом при игре в крикет может считаться сто-двести пробегов. (*Прим. перев.*)

само по себе *бессмысленно*: число n не может быть равно ∞, так как „равно ∞“ ничего не означает. До сих пор символ ∞ сам по себе ничего не означал, он имел смысл только в одной фразе „стремится к ∞“, который мы разъяснили выше. Ниже мы покажем, какой смысл следует придавать другим фразам, содержащим символ ∞, но читатель должен всегда иметь в виду, что

(1) символ ∞ *сам по себе* ничего не означает, хотя *фразы, содержащие его*, иногда имеют определенный смысл, и

(2) в каждом случае, когда фраза, содержащая символ ∞, что-либо означает, это происходит потому, что с помощью специального определения этой фразе предварительно был придан определенный смысл.

Теперь ясно, что если $\varphi(n)$ обладает свойством P для больших значений n, или для „n стремящегося к ∞“ в том смысле, который был нами только что разъяснен, то n, в конце концов будет принимать значения, достаточно большие для того, чтобы обеспечить функции $\varphi(n)$ свойство P. Таким образом, вопрос: „какими свойствами обладает $\varphi(n)$ для достаточно больших значений n?“, можно сформулировать и так: „как ведет себя $\varphi(n)$, когда n стремится к бесконечности?“.

56. Поведение функции от n, когда n стремится к бесконечности. Мы переходим теперь к рассмотрению, в свете замечаний, сделанных в предыдущих пунктах, некоторых предложений, которые постоянно встречаются в высшей математике. Рассмотрим, например, следующие два предложения: (a) $\frac{1}{n}$ *мало для больших значений n*, (b) $1-\frac{1}{n}$ *почти равно* 1 *для больших значений n*. Несмотря на то, что они могут представиться весьма очевидными, в них содержится многое, заслуживающее пристального внимания читателя. Рассмотрим сперва (a) как несколько более простое предложение.

Мы уже рассматривали утверждение „$\frac{1}{n}$ *меньше чем* 0,001 *для больших значений n*“. Это, как мы видели, означает, что неравенство $\frac{1}{n}<0{,}001$ имеет место для всех значений n, бо́льших некоторого определенного значения, в данном случае бо́льших 1 000. Аналогично имеет место и следующее утверждение: „$\frac{1}{n}$ *меньше чем* 0,0001 *для больших значений n*“; действительно, $\frac{1}{n}<0{,}0001$, если $n>10\,000$. Вместо 0,001 или 0,0001 мы можем взять 0,00001 или 0,000001, или какое угодно положительное число.

Очевидно, что было бы удобно иметь краткое выражение для того факта, что имеет место *любое* утверждение типа „$\frac{1}{n}$ *меньше* *чем* 0,001 *для больших значений* n", где вместо 0,001 мы можем подставить любое меньшее число, как, например, 0,0001 или 0,00001, или любое другое еще меньшее положительное число. Ясно, что это утверждение мы можем выразить так: *„как бы мало ни было* δ (если оно, конечно, положительно), $\frac{1}{n} < \delta$ *для достаточно больших значений* n". Очевидно, это верно. Ибо $\frac{1}{n} < \delta$, если $n > \frac{1}{\delta}$, так что наши все „достаточно большие" значения n должны быть только больше чем $\frac{1}{\delta}$. Утверждение это, однако, весьма сложно, так как в действительности оно содержит целый класс утверждений, которые мы получим, придавая δ частные значения, как, например, 0,001. Чем меньше δ, и, следовательно, чем больше $\frac{1}{\delta}$, тем больше должно быть, конечно, наименьшее из тех „достаточно больших" значений, для которых соответствующее утверждение имеет место, причем значения, которые являются достаточно большими для одного значения δ, могут оказаться неподходящими для другого, меньшего значения.

Последнее утверждение, приведенное курсивом, обычно и понимают под утверждением (a), что $\frac{1}{n}$ *мало, когда* n *велико*. Подобным образом, (b) в действительности означает, что *если* $\varphi(n) = 1 - \frac{1}{n}$, *то утверждение* $1 - \varphi(n) < \delta$ *для достаточно больших значений* n *имеет место, какое бы положительное значение* (как, например, 0,001 или 0,0001) *мы ни приписали* δ. Что утверждение (b) справедливо, очевидно ввиду того, что $1 - \varphi(n) = \frac{1}{n}$.

Существует еще другой способ выражения фактов, содержащихся в утверждениях (a) и (b) и подсказываемый п. 55. Вместо того чтобы сказать „$\frac{1}{n}$ мало для больших значений n", мы скажем „$\frac{1}{n}$ стремится к 0, когда n стремится к ∞ (или при n стремящемся к ∞)". Аналогично, мы будем говорить „$1 - \frac{1}{n}$ стремится к 1 при n стремящемся к ∞". Эти утверждения следует рассматривать как строго эквивалентные утверждениям (a) и (b). Таким образом, утверждения

„$\frac{1}{n}$ мало, когда n велико",

„$\frac{1}{n}$ стремится к 0 при n стремящемся к ∞"

эквивалентны друг другу и более формальному предложению:

„если δ — любое как угодно малое положительное число, то $\frac{1}{n} < \delta$ для достаточно больших значений n",

или еще более формальному предложению:

„если δ — любое как угодно малое положительное число, то мы можем найти такое число n_0, что $\frac{1}{n} < \delta$ для всех значений n, больших или равных n_0".

Число n_0, которое встречается в последнем предложении, является, конечно, функцией от δ. Иногда мы будем подчеркивать это обстоятельство записью $n_0(\delta)$ вместо n_0.

Читатель должен представить себя лицом к лицу с оппонентом, который подвергает сомнению справедливость утверждения. Он будет называть все меньшие и меньшие числа. Он может начать с 0,001. Читатель ответит, что $\frac{1}{n} < 0{,}001$, как только $n > 1000$. Оппонент должен будет признать это, но предпримет новую попытку с каким-либо меньшим числом, например 0,0000001. Читатель ответит, что $\frac{1}{n} < 0{,}0000001$, как только $n > 10\,000\,000$, и так далее. В этом простом случае ясно, что читатель выйдет победителем в споре.

Мы теперь введем еще один способ выражения рассматриваемого свойства функции $\frac{1}{n}$. Мы будем говорить, что *„предел* $\frac{1}{n}$, *когда n стремится к* ∞ (*или при n стремящемся к* ∞), *равен* 0"; это утверждение мы символически записываем в виде*)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

или просто $\lim \frac{1}{n} = 0$. Мы будем иногда также писать

$$\frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что можно читать так: „$\frac{1}{n}$ стремится к 0 при n стремящемся к ∞", или просто „$\frac{1}{n} \to 0$". Аналогично, мы будем писать

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

или $1 - \frac{1}{n} \to 1$.

57. Рассмотрим теперь другой пример: $\varphi(n) = n^2$. Тогда „*n^2 велико, когда n велико*". Это предложение эквивалентно следующим более формальным предложениям:

„если Δ — сколь угодно большое положительное число, то $n^2 > \Delta$ для достаточно больших значений n",

„мы можем найти такое число $n_0(\Delta)$, что $n^2 > \Delta$ для всех n, больших или равных $n_0(\Delta)$". В этом случае естественно говорить, что „n^2 стремится к ∞ при n стремящемся к ∞", или „n^2 стремится к ∞ вместе с n", и писать:

$$n^2 \to \infty.$$

---

*) limes — по-латыни предел. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим, наконец, функцию $\varphi(n) = -n^2$. В этом случае $\varphi(n)$ велика, но отрицательна, когда n велико, и мы будем говорить, что „$-n^2$ стремится к $-\infty$ при n стремящемся к ∞“, и писать

$$-n^2 \to -\infty.$$

Употребление символа $-\infty$ в этом смысле влечет за собой удобную в некоторых случаях запись: $n^2 \to +\infty$ вместо $n^2 \to \infty$. Вообще, в целях единообразия обозначений представляется иногда удобным применять символ $+\infty$ вместо ∞.

Однако мы должны еще раз подчеркнуть, что во всех этих утверждениях символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ сами по себе ничего не означают и приобретают определенный смысл только в том случае, когда они встречаются в определенном контексте, и тогда их смысл определен приведенными выше разъяснениями.

58. Определение предела. После всех проведенных рассмотрений читатель должен быть в состоянии усвоить общее понятие *предела.* Грубо говоря, $\varphi(n)$ *стремится к пределу l при $n \to \infty$, если $\varphi(n)$ почти равно l, когда n велико.* Но хотя смысл этого утверждения должен быть уже достаточно ясен после всего сказанного выше, все же он не является еще, в том виде, в котором мы его сформулировали, достаточно точным для строгого математического определения. Фактически приведенное утверждение эквивалентно целому классу утверждений типа *„для достаточно больших значений n $\varphi(n)$ отличается от l меньше чем на δ“*. Это утверждение должно иметь место для $\delta = 0{,}001$ или $0{,}0001$, или для *любого* положительного числа, причем для каждого такого значения δ оно должно иметь место для *всех* значений n, начиная с некоторого определенного значения $n_0(\delta)$, хотя чем меньше значение δ, тем больше, как правило, будет соответствующее значение $n_0(\delta)$.

Таким образом, мы можем теперь сформулировать следующее окончательное определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. *Функция $\varphi(n)$ стремится к пределу l при n стремящемся к ∞, если, как бы мало ни было положительное число δ, $\varphi(n)$ отличается от l меньше чем на δ для достаточно больших значений n; это означает, что как бы мало ни было положительное число δ, мы можем найти такое число $n_0(\delta)$, соответствующее этому δ, что $\varphi(n)$ отличается от l меньше чем на δ для всех значений n, бо́льших или равных $n_0(\delta)$.*

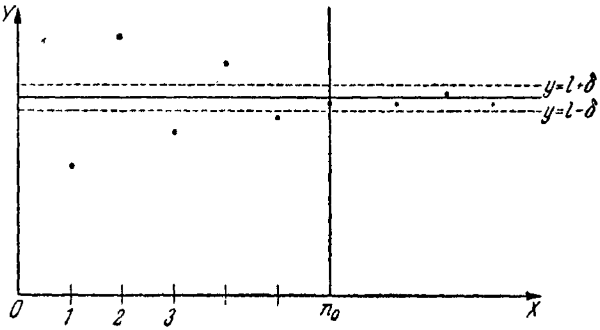
Положительную разность между $\varphi(n)$ и l принято обозначать через $|\varphi(n) - l|$. Она равна положительному из двух чисел $\varphi(n) - l$, $l - \varphi(n)$ и совпадает с определением *модуля* $\varphi(n) - l$, данным в гл. III, хотя в настоящий момент мы рассматриваем только действительные, положительные или отрицательные, значения.

Применяя это обозначение, мы можем сформулировать наше определение короче следующим образом: *если дано любое как угодно малое положительное число* δ, *и можно указать такое* $n_0(\delta)$, *что* $|\varphi(n)-l|<\delta$ *для* $n \geqslant n_0(\delta)$, *то говорят, что* $\varphi(n)$ *стремится к пределу* l *при* n *стремящемся к* ∞, *и пишут*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = l.$$

Иногда мы будем опускать „$n\to\infty$"; для краткости иногда удобно писать также $\varphi(n)\to l$.

Читателю будет полезно подсчитать в некоторых простых случаях явное выражение n_0 как функции от δ. Так, если $\varphi(n)=\frac{1}{n}$, $l=0$, и условие сводится к $\frac{1}{n}<\delta$ для $n \geqslant n_0$, что удовлетворяется, если $n_0=1+\left[\frac{1}{\delta}\right]$[1].



Фиг. 24

Существует один и только один случай, когда *одно и то же* n_0 годно для *всех* значений δ. Если, начиная с некоторого значения N, для всех значений n $\varphi(n)$ постоянна, скажем, равна C, то очевидно, что $\varphi(n)-C=0$ для $n \geqslant N$, так что неравенство $|\varphi(n)-C|<\delta$ удовлетворяется для $n \geqslant N$ и всех положительных значений δ. С другой стороны, если $|\varphi(n)-l|<\delta$ для $n \geqslant N$ и всех положительных значений δ, то очевидно, что $\varphi(n)=l$ для $n \geqslant N$, так что $\varphi(n)$ постоянна для всех таких значений n.

59. Определение предела может быть геометрически проиллюстрировано следующим образом. График $\varphi(n)$ состоит из ряда точек, соответствующих значениям $n=1, 2, 3, \ldots$.

Проведем прямую $y=l$ (фиг. 24) и параллельные ей прямые $y=l-\delta$, $y=l+\delta$ на расстояниях δ от нее. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = l,$$

если, после того, как эти прямые проведены, мы можем провести прямую $x=n_0$ (подобно проведенной на фиг. 24) так, что точка графика, лежащая на этой прямой, и все точки справа от нее будут

[1]) Здесь и в дальнейшем мы применяем символ $[x]$ в смысле гл. II, т. е. для обозначения наибольшего целого числа, не превосходящего x.

лежать между ними. Мы увидим, что это геометрическое толкование нашего определения особенно полезно при рассмотрении функций, определенных для всех значений действительного переменного, а не только для положительных целочисленных значений.

60. Сказанного выше достаточно для функций от n стремящихся к пределу при $n \to \infty$. Мы должны теперь перейти к соответствующим определениям для функций, которые, как n^2 или $-n^2$, стремятся к положительной или отрицательной бесконечности. Следующее определение не должно теперь вызвать у читателя никаких затруднений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II. Функция $\varphi(n)$ *стремится к* $+\infty$ *(положительной бесконечности) вместе с* n, *если, как бы велико ни было заданное число* Δ, *можно указать такое* $n_0(\Delta)$, *что* $\varphi(n) > \Delta$ *для всех* $n \geqslant n_0(\Delta)$; *это означает, что, как бы велико ни было* Δ, $\varphi(n) > \Delta$ *для достаточно больших значений* n.

Вот другая менее точная формулировка: „*если мы можем сделать* $\varphi(n)$ *как угодно большой для достаточно больших* n". Эта формулировка недостаточно подчеркивает основной пункт определения, а именно, что $\varphi(n)$ должно быть больше чем Δ для *всех* значений n таких, что $n \geqslant n_0(\Delta)$, а не только для *некоторых* таких значений. Но мы можем применять и эту форму выражения, если мы отдаем себе ясный отчет в том, что́ оно означает.

Когда $\varphi(n)$ стремится к $+\infty$, мы пишем

$$\varphi(n) \to +\infty.$$

Мы можем предоставить читателю формулировку соответствующего определения для функций, которые стремятся к отрицательной бесконечности.

61. Некоторые замечания по поводу определений. Читатель должен обратить внимание на следующее:

(1) Очевидно, что мы можем изменять значения $\varphi(n)$ каким угодно образом для любого конечного числа значений n, не влияя никоим образом на поведение $\varphi(n)$ при n стремящемся к ∞. Например, $\frac{1}{n}$ стремится к 0 при n стремящемся к ∞. Мы можем составить из $\frac{1}{n}$ любое число новых функций, изменяя конечное число ее значений. Так, мы можем рассмотреть функцию $\varphi(n)$, равную 3 для $n = 1, 2, 7, 11, 101, 107, 109, 237$, и равную $\frac{1}{n}$ для всех остальных значений n. Для этой функции, так же как и для исходной функции $\frac{1}{n}$, $\lim \varphi(n) = 0$. Аналогично, для функции $\varphi(n)$, которая равна 3 для $n = 1, 2, 7, 11, 101, 107, 109, 237$, и равна n^2 для всех остальных значений n, мы имеем: $\varphi(n) \to +\infty$,

(2) С другой стороны, мы не можем, как правило, изменить *бесконечное* число значений $\varphi(n)$, не изменив при этом радикально ее поведения при n стремящемся к ∞. Если, например, изменить функцию $\frac{1}{n}$, положив ее значения равными 1 всякий раз, когда n кратно 100, то соотношение $\lim \varphi(n) = 0$ уже не будет иметь места. Пока мы изменяли только конечное число значений, мы всегда могли выбрать число n_0, встречающееся в определениях, так, чтобы оно было больше наибольшего значения n, для которого $\varphi(n)$ было изменено. В приведенных выше примерах мы всегда могли выбрать $n_0 > 237$, и в действительности мы даже должны были бы так сделать, если наш воображаемый оппонент (п. 56) задал бы значение δ, меньшее 3 (в первом примере) и значение Δ большее, чем 3 (во втором примере). Но теперь, *как бы велико ни было* n_0, всегда найдутся еще бо́льшие значения n, при которых $\varphi(n)$ была изменена.

(3) Применяя признак определения I, существенно проверить, что неравенство $|\varphi(n) - l| < \delta$ выполняется не только для $n = n_0$, но и для $n > n_0$, т. е. *для* n_0 *и всех бо́льших значений* n. Ясно, например, что если $\varphi(n)$ — функция, рассмотренная в (2), то по заданному δ мы можем найти n_0 так, что $|\varphi(n)| < \delta$ при $n = n_0$: для этого нужно только выбрать n_0 достаточно большим и не кратным 100. Но если n_0 так выбрано, то неравенство $|\varphi(n)| < \delta$ имеет место не для всех $n \geqslant n_0$; а именно, значения n, кратные 100 и бо́льшие n_0, являются исключениями, если $\delta \leqslant 1$.

(4) Если $\varphi(n)$ всегда больше чем l, то мы можем просто заменить $|\varphi(n) - l|$ на $\varphi(n) - l$. Так, признаком того, что $\frac{1}{n}$ стремится к пределу 0 при n стремящемся к ∞, является просто справедливость неравенства $\frac{1}{n} < \delta$ для $n \geqslant n_0$. Если, однако, $\varphi(n) = (-1)^n \frac{1}{n}$, то l попрежнему равно 0, но $\varphi(n) - l$ иногда положительно, а иногда отрицательно. В таком случае мы должны сформулировать условие в виде $|\varphi(n) - l| < \delta$, а в данном случае, в частности, в виде $|\varphi(n)| < \delta$.

(5) *Предел l сам может быть одним из значений, принимаемых* $\varphi(n)$. Так, если $\varphi(n) = 0$ для всех значений n, то очевидно, что и $\lim \varphi(n) = 0$. Другой пример: если бы мы, как в (2) и (3), изменили значение функции для всех значений n, кратных 100, но не на 1, а на 0, мы получили бы функцию $\varphi(n)$, которая равна 0 для n, кратных 100, и равна $\frac{1}{n}$ для остальных значений n. Предел этой функции при n стремящемся к ∞ равен 0 и принимается функцией для бесконечного числа значений n, а именно, для всех значений кратных 100.

С другой стороны, *предел не обязан быть (а в общем случае и не будет) одним из значений, принимаемых функцией для какого-либо значения* n. Это достаточно ясно в случае $\varphi(n) = \frac{1}{n}$.

Здесь предел равен 0, но функция не равна 0 ни для какого значения n.

Читатель не может переоценить важности этих фактов. *Предел не является значением функции*: он иногда отличен от этих значений, хотя определен ими, и, возможно, равен одному из них. Для функций

$$\varphi(n) = 0 \text{ или } 1$$

предел равен *всем* значениям функции $\varphi(n)$; для

$$\varphi(n) = \frac{1}{n}, \quad (-1)^n \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$$

он не равен *ни одному* из значений функции; для

$$\varphi(n) = \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi}{n}, \qquad 1 + \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi}{n}$$

(пределы которых при n стремящемся к ∞, как легко видеть, равны соответственно 0 и 1, так как $\sin \frac{1}{n} n\pi$ по модулю никогда не превосходит 1) предел равен значению, которое $\varphi(n)$ принимает для всех четных значений n, но значения, принимаемые функцией для нечетных значений n, все отличны от предела и друг от друга.

(6) Функция может быть по модулю очень велика, когда n очень велико, но не стремиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. Достаточной иллюстрацией этого обстоятельства является функция $\varphi(n) = (-1)^n n$. Функция может стремиться к $+\infty$ или к $-\infty$ только в том случае, когда она, начиная с некоторого значения n, сохраняет знак.

Примеры XXIII. Рассмотреть поведение следующих функций от n при n стремящемся к ∞:

1. $\varphi(n) = n^k$, где k — положительное или отрицательное целое число, или рациональная дробь. Если k положительно, то n^k стремится к $+\infty$ вместе с n. Если k отрицательно, то $\lim n^k = 0$. Если $k = 0$, то $n^k = 1$ для всех значений n, и, следовательно, $\lim n^k = 1$.

Читателю полезно для себя записать, даже в этих простых случаях, формальное доказательство того, что условия наших определений выполнены. Возьмем, например, случай $k > 0$. Пусть Δ — любое заданное положительное число. Мы должны найти такое n_0, что $n^k > \Delta$ при $n \geqslant n_0$. Для этого достаточно взять n_0 бо́льшим, чем $\sqrt[k]{\Delta}$. Так, например, если $k = 4$, то $n^4 > 10\,000$, если $n \geqslant 11$, $n^4 > 100\,000\,000$, если $n \geqslant 101$ и т. д.

2. $\varphi(n) = p_n$, где p_n есть n-ое простое число. Если бы существовало только конечное число простых чисел, то $\varphi(n)$ была бы определена только для конечного числа значений n. Существует, однако, как впервые было доказано Эвклидом, бесконечно много простых чисел. Доказательство Эвклида ведется следующим образом. Пусть $2, 3, 5, \ldots, p_N$ — первые N простых чисел, и пусть $P = (2, 3, 5, \ldots, p_N) + 1$. Тогда P не делится ни на одно из простых чисел $2, 3, 5. \ldots, p_N$. Следовательно, либо P — само простое, либо делится на простое число, большее p_N. В обоих случаях существует, следовательно, простое число, большее p_N, а, значит, и бесконечно много простых чисел.

Так как $\varphi(n) > n$, то $\varphi(n) \to \infty$.

3. Пусть $\varphi(n)$ обозначает число простых чисел, меньших чем n. Тогда $\varphi(n) \to +\infty$.

4. $\varphi(n) = [\alpha n]$, где α — любое положительное число. Здесь

$$\varphi(n) = 0 \left(0 \leqslant n < \frac{1}{\alpha}\right), \quad \varphi(n) = 1 \left(\frac{1}{\alpha} \leqslant n < \frac{2}{\alpha}\right)$$

и т. д.; следовательно, $\varphi(n) \to +\infty$.

5. Если $\varphi(n) = \frac{1\,000\,000}{n}$, то $\lim \varphi(n) = 0$; а если $\psi(n) = \frac{n}{1\,000\,000}$, то $\psi(n) \to +\infty$. На эти заключения никоим образом не влияет то обстоятельство, что $\varphi(n)$ для $n < 1\,000\,000$ больше чем $\psi(n)$.

6. $\varphi(n) = \frac{1}{n - (-1)^n}$, $n - (-1)^n$, $n\{1 - (-1)^n\}$. Первая функция стремится к 0, вторая — к $+\infty$, а третья не стремится ни к конечному пределу, ни к $+\infty$.

7. $\varphi(n) = \frac{\sin n\theta\pi}{n}$, где θ — любое действительное число. Здесь $|\varphi(n)| < \frac{1}{n}$, так как $|\sin n\theta\pi| \leqslant 1$, и $\lim \varphi(n) = 0$.

8. $\varphi(n) = \frac{\sin n\theta\pi}{\sqrt{n}}$ или $\frac{(a\cos^2 n\theta + b\sin^2 n\theta)}{n}$, где a и b — любые действительные числа.

9. $\varphi(n) = \sin n\theta\pi$. Если θ — целое число, то $\varphi(n) = 0$ для всех значений n и, следовательно, $\lim \varphi(n) = 0$.

Пусть, далее, θ рационально, $\theta = \frac{p}{q}$, где p и q — положительные целые числа. Пусть $n = aq + b$, где a — частное, а b — остаток от деления n на q. Тогда

$$\sin\frac{np\pi}{q} = (-1)^{ap}\sin\frac{bp\pi}{q}.$$

Допустим, например, что p — четное; тогда, когда n возрастает от 0 до $q-1$, $\varphi(n)$ принимает значения

$$0, \ \sin\frac{p\pi}{q}, \ \sin\frac{2p\pi}{q}, \ldots, \ \sin\frac{(q-1)p\pi}{q}.$$

Когда n возрастает от q до $2q-1$, эти значения повторяются; они вновь повторяются, когда n пробегает значения от $2q$ до $3q-1$, от $3q$ до $4q-1$ и т. д. Таким образом, значения $\varphi(n)$ циклически повторяются и состоят из конечного числа различных значений. Очевидно, что когда имеет место такое положение, $\varphi(n)$ не может стремиться ни к конечному пределу, ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Случай, когда θ иррационально, несколько более сложен. Он будет рассмотрен в следующем списке примеров.

62. Колеблющиеся функции. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Когда $\varphi(n)$ не стремится ни к конечному пределу, ни к $+\infty$, ни к $-\infty$ при n стремящемся к ∞, мы говорим, что $\varphi(n)$ колеблется при n стремящемся к ∞.*

Функция $\varphi(n)$ наверно колеблется, если, как в последнем из рассмотренных примеров, ее значения образуют циклически повторяющуюся систему из конечного числа различных чисел; но, конечно, она может колебаться, и не обладая этим специальным свойством. Определение колеблющейся функции основано на отрицании: функция колеблется, если она не ведет себя некоторым другим образом.

Простейшим примером колеблющейся функции является

$$\varphi(n)=(-1)^n,$$

которая равна $+1$, когда n четно, и -1, когда n нечетно. В этом случае значения повторяются циклически. Но рассмотрим

$$\varphi(n)=(-1)^n+\frac{1}{n},$$

значения которой суть

$$-1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ -1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ -1+\frac{1}{5},\ \ldots .$$

Когда n велико, каждое значение почти равно $+1$ или -1, и ясно, что $\varphi(n)$ не стремится ни к конечному пределу, ни к $+\infty$, ни к $-\infty$, и поэтому колеблется; но ее значения не повторяются циклически. Следует заметить, что в этом случае каждое значение $\varphi(n)$ по модулю меньше или равно $\frac{3}{2}$. Аналогично

$$\varphi(n)=(-1)^n\,100+\frac{1\,000}{n}$$

колеблется. Когда n велико, каждое значение почти равно 100 или -100. Наибольшим по модулю значением является 900 (для $n=1$). Рассмотрим теперь $\varphi(n)=(-1)^n n$, значения которой суть -1, 2, -3, 4, $-5, \ldots$. Эта функция колеблется, так как она не стремится ни к бесконечному пределу, ни к $+\infty$, ни $-\infty$; но в этом случае мы не можем указать границы, выше которой модули ее значений не возрастают. Различие между этими двумя примерами приводит нас к следующему дальнейшему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если $\varphi(n)$ колеблется при n стремящемся к ∞, то мы будем говорить, что $\varphi(n)$* **колеблется ограниченно** *или* **неограниченно,** *в зависимости от того, существует или нет такое число K, что все значения $\varphi(n)$ по модулю будут меньшими чем K, т. е. $|\varphi(n)|<K$ для всех значений n.*

Эти определения, а также и определения, содержащиеся в пп. 58 и 60, иллюстрируются следующими примерами.

Примеры XXIV. Рассмотреть поведение при n стремящемся к ∞ следующих функций:

1. $(-1)^n$, $5+3(-1)^n$, $\dfrac{1\,000\,000}{n}+(-1)^n$, $1\,000\,000(-1)^n+\dfrac{1}{n}$.
2. $(-1)^n n$, $1\,000\,000+(-1)^n n$.
3. $1\,000\,000-n$, $(-1)^n(1\,000\,000-n)$.

4. $n\{1+(-n)^n\}$. В этом случае значениями $\varphi(n)$ являются

$$0,\ 4,\ 0,\ 8,\ 0,\ 12,\ 0,\ 16, \ldots .$$

Нечетные члены все равны 0, а четные стремятся к $+\infty$; $\varphi(n)$ колеблется неограниченно.

5. $n^2+(-1)^n 2n$. Второе слагаемое колеблется неограниченно, но первое значительно больше второго при больших n. Действительно, $\varphi(n) \geqslant n^2-2n$, а $n^2-2n=(n-1)^2-1$ больше чем любое заданное значение Δ, если $n>1+\sqrt{\Delta+1}$. Следовательно, $\varphi(n)\to+\infty$. Следует заметить, что в этом случае $\varphi(2k+1)$ всегда меньше чем $\varphi(2k)$, так что функция стремится к бесконечности, то возрастая, то убывая. Однако она не колеблется, в смысле данного нами определения этого понятия.

6. $n^2\{1+(-1)^n\}$; $(-1)^n n^2+n$; $n^3+(-1)^n n^2$.

7. $\sin n\theta\pi$. Мы уже видели (примеры XXIII. 9), что $\varphi(n)$ ограниченно колеблется, если θ рационально, но не равно целому числу; в этом последнем случае $\varphi(n)=0$ и $\varphi(n)\to 0$.

Случай иррационального θ несколько более сложен, но мы все же сможем доказать, что $\varphi(n)$ ограниченно колеблется. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $0<\theta<1$.

Во-первых, так как $|\varphi(n)|<1$, $\varphi(n)$ либо ограниченно колеблется, либо стремится к пределу.

Но если бы $\sin n\theta\pi\to l$, то

$$2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\pi\cdot\sin\frac{1}{2}\theta\pi=\sin(n+1)\theta\pi-\sin n\theta\pi\to 0$$

и, следовательно, $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\pi\to 0$. Отсюда следовало бы, что

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=k_n+\frac{1}{2}+\varepsilon_n,$$

где k_n — целое число и $\varepsilon_n\to 0$, а отсюда

$$\theta=k_n-k_{n-1}+\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}=l_n+\eta_n,$$

где l_n — целое число и $\eta_n\to 0$. Это же, очевидно, невозможно, так как θ — постоянная и заключена между 0 и 1.

Доказать подобным же образом, что $\cos n\theta\pi$ ограниченно колеблется, если θ не является четным целым числом.

8. Если θ — нецелое, невозможно, чтобы $\sin n\theta\pi$ и $\cos n\theta\pi$ были бы почти равны для всех больших n то одному, то другому из двух значений a и b. [Это можно показать рассуждениями, аналогичными, но несколько более сложными, чем приведенные в примере 7.]

9. $\sin n\theta\pi+n$, $\sin n\theta\pi+\dfrac{1}{n}$, $(-1)^n\sin n\theta\pi$.

10. $a\cos n\theta\pi+b\sin n\theta\pi$, $\sin^2 n\theta\pi$, $a\cos^2 n\theta\pi+b\sin^2 n\theta\pi$.

11. $n\sin n\theta\pi$. Если θ — целое, то $\varphi(n)=0$, $\varphi(n)\to 0$. Если же θ — рациональное, но не целое число, или иррациональное, то $\varphi(n)$ неограниченно колеблется.

12. $n(a\cos^2 n\theta\pi+b\sin^2 n\theta\pi)$. В этом случае $\varphi(n)$ стремится к $+\infty$, если a и b оба положительны, и к $-\infty$, если оба они отрицательны. Рассмотреть частные случаи $a=0$, $b>0$; $a>0$, $b=0$; $a=0$, $b=0$. Если a и b имеют разные знаки, то $\varphi(n)$, вообще говоря, неограниченно колеблется. Установить и рассмотреть исключительные случаи.

13. $\sin n!\theta\pi$. Если θ имеет рациональное значение $\frac{p}{q}$, то $n!\theta$ заведомо целочисленно для всех значений n, бóльших или равных q. Следовательно, $\varphi(n) \to 0$. Случай, когда θ иррационально, требует для своего рассмотрения значительно более сложных вспомогательных средств.

14. $an-[bn]$, $(-1)^n(an-[bn])$.

15. *Наименьший простой делитель* n. Когда n — простое число, $\varphi(n)=n$. Когда n — четное число, $\varphi(n)=2$. Следовательно, $\varphi(n)$ неограниченно колеблется.

16. *Наибольший простой делитель* n.

17. *Число дней в* n*-ом году н. э.*

Примеры XXV. 1. Если $\varphi(n)\to+\infty$ и $\psi(n)\geqslant\varphi(n)$ для всех значений n, то $\psi(n)\to+\infty$.

2. Если $\varphi(n)\to 0$ и $|\psi(n)|\leqslant|\varphi(n)|$ для всех значений n, то $\psi(n)\to 0$.

3. Если $\lim|\varphi(n)|=0$, то $\lim\varphi(n)=0$.

4. Если $\varphi(n)$ стремится к пределу или ограниченно колеблется и $|\psi(n)|\leqslant|\varphi(n)|$ для $n\geqslant n_0$, то $\psi(n)$ стремится к пределу или ограниченно колеблется.

5. Если $\varphi(n)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, или неограниченно колеблется и $|\psi(n)|\geqslant|\varphi(n)|$ для $n\geqslant n_0$, то $\psi(n)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ или неограниченно колеблется.

6. „Если $\varphi(n)$ колеблется и, как бы велико ни было n_0, мы можем найти значения n, большие n_0, для которых $\psi(n)<\varphi(n)$, и значения n, большие n_0, для которых $\psi(n)>\varphi(n)$, то $\psi(n)$ колеблется“. Справедливо ли это предложение? Если нет, привести противоречащий пример.

7. Если $\varphi(n)\to l$ при $n\to\infty$, то также и $\varphi(n+p)\to l$, где p — любое фиксированное целое число. [Это следует непосредственно из определения. Аналогично мы заключаем, что если $\varphi(n)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ или колеблется, то $\varphi(n+p)$ ведет себя таким же образом.]

8. Те же заключения остаются в силе (кроме случая, когда $\varphi(n)$ колеблется), если p изменяется вместе с n, но остается по модулю меньше фиксированного положительного числа N; или же если p изменяется с n каким угодно образом, но остается всегда положительным.

9. Определить наименьшее значение n_0, для которого

(a) $n^2+2n>999\,999\ (n\geqslant n_0)$; (b) $n^2+2n>1\,000\,000\ (n\geqslant n_0)$.

10. Определить наименьшее значение n_0, для которого

(a) $n+(-1)^n>1\,000\ (n\geqslant n_0)$; (b) $n+(-1)^n>1\,000\,000\ (n\geqslant n_0)$.

11. Определить наименьшее значение n_0, для которого

(a) $n^2+2n>\Delta\ (n\geqslant n_0)$, (b) $n+(-1)^n>\Delta\ (n\geqslant n_0)$,

где Δ — любое положительное число.

[(a) $n_0=[\sqrt{\Delta+1}]$; (b) $n_0=1+[\Delta]$, или $2+[\Delta]$, в зависимости от того, будет ли $[\Delta]$ нечетным или четным, т. е.

$$n_0=1+[\Delta]+\frac{1}{2}\left\{1+(-1)^{[\Delta]}\right\}.]$$

12. Определить наименьшее значение n_0, для которого

(a) $\dfrac{n}{n^2+1}<0{,}0001$; (b) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}<0{,}000001$

при $n\geqslant n_0$. [Рассмотрим последний случай. В первую очередь,

$$\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\leqslant\frac{n+1}{n^2},$$

и легко видеть, что наименьшим значением n_0, для которого $\frac{n+1}{n^2} < 0{,}000001$ при $n \geqslant n_0$, будет 1 000 002. Но требуемое неравенство удовлетворяется при $n = 1\,000\,001$, и это и является искомым значением n_0.]

63. Некоторые общие теоремы о пределах.

А. Поведение суммы двух функций, поведение которых известно.

ТЕОРЕМА I. *Если $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ стремятся к пределам a и b соответственно, то $\varphi(n) + \psi(n)$ стремится к пределу $a + b$.*

Это почти очевидно[1]. Рассуждение, которое должно сразу же притти в голову читателю, примерно следующее: „когда n велико, $\varphi(n)$ почти равно a и $\psi(n)$ почти равно b, и поэтому их сумма почти равна $a+b$“. Однако уместно провести рассуждение во всей полноте.

Пусть δ — любое заданное положительное число (например, 0,001, 0,000001, ...). Мы должны показать, что может быть найдено такое число n_0, что

$$|\varphi(n) + \psi(n) - a - b| < \delta \tag{1}$$

при $n \geqslant n_0$. Но, по предложению, доказанному в гл. III (даже в более общем виде, чем это требуется в данном случае), модуль суммы двух чисел меньше или равен сумме их модулей. Следовательно,

$$|\varphi(n) + \psi(n) - a - b| \leqslant |\varphi(n) - a| + |\psi(n) - b|.$$

---

[1]) Эта фраза содержит некоторую двусмысленность, которую читателю следует разобрать. Когда говорят, что „такая то теорема почти очевидна“, могут иметь в виду одно из следующих двух обстоятельств. Могут иметь в виду, что „трудно сомневаться в справедливости этой теоремы“, что „теорема такова, что здравый смысл с ней интуитивно соглашается“, как он соглашается, например, со справедливостью следующих предложений: „$2+2=4$“, или „углы при основании равнобедренного треугольника равны“. Что теорема „очевидна“ в этом смысле, еще не доказывает ее справедливости, так как даже наиболее уверенные из интуитивных суждений здравого смысла часто оказываются ошибочными. А если теорема и верна, то тот факт, что она „очевидна“, не является основанием не доказывать ее, если доказательство может быть найдено. Предметом математики является доказательство того, что из некоторых предпосылок следуют некоторые выводы; то обстоятельство, что эти выводы могут быть столь же очевидными, как и предпосылки, никогда не избавляет нас от необходимости доказательства и не уменьшает его интереса.

Но иногда (как в данном случае) фраза „это почти очевидно“ означает нечто совершенно отличное. Здесь мы имеем в виду, что „минутное размышление не только должно убедить читателя в справедливости утверждения, но и показать ему пути к строгому доказательству“. Поэтому часто, когда утверждение „очевидно“ в этом смысле, мы можем опустить доказательство, но не потому, что доказательство излишне, а потому, что его проведение было бы ненужной тратой времени, так как читатель может легко провести его сам.

Эти замечания были сообщены мне много лет назад проф. Литтльвудом.

Таким образом, требуемое условие будет наверно выполнено, если можно будет найти n_0 такое, что

$$|\varphi(n)-a|+|\psi(n)-b|<\delta \tag{2}$$

при $n \geqslant n_0$.

Если задано любое положительное число δ', мы можем найти n_1 так, что $|\varphi(n)-a|<\delta'$ для $n \geqslant n_1$. Возьмем $\delta'=\frac{1}{2}\delta$, так что $|\varphi(n)-a|<\frac{1}{2}\delta$ при $n \geqslant n_1$. Аналогично, мы можем найти n_2 так, что $|\psi(n)-b|<\frac{1}{2}\delta$ при $n \geqslant n_2$. Возьмем теперь в качестве n_0 *большее из двух чисел* n_1 *и* n_2. Тогда $|\varphi(n)-a|<\frac{1}{2}\delta$ и $|\psi(n)-b|<\frac{1}{2}\delta$ при $n \geqslant n_0$, а, следовательно, (2) удовлетворяется, и теорема доказана.

Это рассуждение может быть кратко сформулировано так: из $\lim \varphi(n)=a$ и $\lim \psi(n)=b$ следует, что мы можем найти n_1 и n_2 такие, что

$$|\varphi(n)-a|<\frac{1}{2}\delta \ (n \geqslant n_1), \quad |\psi(n)-b|<\frac{1}{2}\delta \ (n \geqslant n_2),$$

а тогда, если n не меньше чем n_1 и n_2,

$$|\varphi(n)+\psi(n)-a-b| \leqslant |\varphi(n)-a|+|\psi(n)-b|<\delta,$$

а следовательио,

$$\lim \{\varphi(n)+\psi(n)\}=a+b.$$

64. Предложения, дополняющие теорему I. Читатель без труда докажет следующие предложения.

1. *Если* $\varphi(n)$ *стремится к конечному пределу, а* $\psi(n)$ *стремится к* $+\infty$ *или к* $-\infty$ *или колеблется (ограниченно или неограниченно), то* $\varphi(n)+\psi(n)$ *ведет себя так же, как* $\psi(n)$.

2. *Если* $\varphi(n) \to +\infty$ *и* $\psi(n) \to +\infty$, *или ограниченно колеблется, то* $\varphi(n)+\psi(n) \to +\infty$.

В этом утверждении мы, очевидно, можем всюду заменить $+\infty$ на $-\infty$.

3. *Если* $\varphi(n) \to +\infty$ *и* $\psi(n) \to -\infty$, *то* $\varphi(n)+\psi(n)$ *может либо стремиться к конечному пределу, либо к* $+\infty$, *либо к* $-\infty$, *либо ограниченно или неограниченно колебаться.*

Эти пять возможностей могут быть проиллюстрированы, соответственно, следующими примерами: (1) $\varphi(n)=n$, $\psi(n)=-n$, (2) $\varphi(n)=n^2$, $\psi(n)=-n$, (3) $\varphi(n)=n$, $\psi(n)=-n^2$, (4) $\varphi(n)=n+(-1)^n$, $\psi(n)=-n$, (5) $\varphi(n)=n^2+(-1)^n n$, $\psi(n)=-n^2$.

4. *Если* $\varphi(n) \to +\infty$ *и* $\psi(n)$ *неограниченно колеблется, то* $\varphi(n)+\psi(n)$ *может стремиться к* $+\infty$ *или неограниченно колебаться, но не может стремиться ни к конечному пределу, ни к* $-\infty$, *ни ограниченно колебаться.*

Ибо $\psi(n)=\{\varphi(n)+\psi(n)\}-\varphi(n)$, и если бы $\varphi(n)+\psi(n)$ стремилась к пределу или к $-\infty$ или ограниченно колебалась, то отсюда следовало бы, по предыдущим результатам, что $\psi(n)\to-\infty$, тогда как $\psi(n)$, по предположению, неограниченно колеблется. Примерами двух возможных случаев могут служить: (1) $\varphi(n)=n^2$, $\psi(n)=(-1)^n n$, (2) $\varphi(n)=n$, $\psi(n)=(-1)^n n^2$. Здесь знаки $+\infty$ и $-\infty$ также могут быть всюду изменены на обратные.

5. *Если $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ обе ограниченно колеблются, то $\varphi(n)+\psi(n)$ должно либо также ограниченно колебаться, либо стремиться к пределу.*

Примеры: (1) $\varphi(n)=(-1)^n$, $\psi(n)=(-1)^{n+1}$, (2) $\varphi(n)=\psi(n)=(-1)^n$.

6. *Если $\varphi(n)$ колеблется ограниченно, а $\psi(n)$ колеблется неограниченно, то $\varphi(n)+\psi(n)$ колеблется неограниченно.*

Действительно, $\varphi(n)$ по модулю всегда меньше некоторой постоянной K. С другой стороны, $\psi(n)$, так как она колеблется неограниченно, должна принимать значения по модулю бо́льшие любого заданного числа (например, $10K$, $100K,\ldots$). Следовательно, $\varphi(n)+\psi(n)$ должна принимать значения по модулю бо́льшие любого заданного числа (например, $9K$, $999K,\ldots$). Следовательно, $\varphi(n)+\psi(n)$ должна либо стремиться к $+\infty$, либо к $-\infty$, либо неограниченно колебаться. Но если бы она стремилась к $+\infty$, то

$$\psi(n)=\{\varphi(n)+\psi(n)\}-\varphi(n)$$

также стремилась бы к $+\infty$, в силу предшествующих результатов. Следовательно, $\varphi(n)+\psi(n)$ не может стремиться к $+\infty$, а, в силу аналогичных рассуждений, не может стремиться и к $-\infty$; таким образом, она должна неограниченно колебаться.

7. *Если $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ обе неограниченно колеблются, то $\varphi(n)+\psi(n)$ может либо стремиться к пределу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$, либо ограниченно или неограниченно колебаться.*

Допустим, например, что $\varphi(n)=(-1)^n n$, а $\psi(n)$ — одна из следующих функций: $(-1)^{n+1}n$, $\{1+(-1)^{n+1}\}n$, $-\{1+(-1)^n\}n$, $(-1)^{n+1}(n+1)$, $(-1)^n n$. Мы получаем примеры всех пяти возможностей.

Предложения 1 — 7 покрывают все существенно различные случаи. Прежде чем перейти к рассмотрению произведения двух функций, отметим, что утверждение теоремы I может быть непосредственно распространено на сумму трех и большего числа функций, стремящихся к пределу при $n\to\infty$.

65. В. Поведение произведения двух функций, поведение которых известно. Мы можем теперь доказать аналогичную систему теорем, относящихся к произведению двух функций. Основным предложением является следующее.

ТЕОРЕМА II. *Если* $\lim\varphi(n)=a$ *и* $\lim\psi(n)=b$, *то*

$$\lim\varphi(n)\psi(n)=ab.$$

Пусть

$$\varphi(n)=a+\varphi_1(n),\quad \psi(n)=b+\psi_1(n),$$

так что $\lim \varphi_1(n) = 0$ и $\lim \psi_1(n) = 0$. Тогда

$$\varphi(n)\psi(n) = ab + a\psi_1(n) + b\varphi_1(n) + \varphi_1(n)\psi_1(n).$$

Следовательно, модуль разности $\varphi(n)\psi(n) - ab$ не больше чем сумма модулей $a\psi_1(n)$, $b\varphi_1(n)$, $\varphi_1(n)\psi_1(n)$. Отсюда следует, что

$$\lim\{\varphi(n)\psi(n) - ab\} = 0,$$

и теорема доказана.

Подробнее последняя часть доказательства проводится следующим образом. Мы имеем

$$|\varphi(n)\psi(n) - ab| \leqslant |a\psi_1(n)| + |b\varphi_1(n)| + |\varphi_1(n)|\,|\psi_1(n)|;$$

допуская, что ни a, ни b не равны 0, мы можем предположить, что $\delta < 3|a|\,|b|$, и выбрать n_0 так, что

$$|\varphi_1(n)| < \frac{\delta}{3|b|}, \quad |\psi_1(n)| < \frac{\delta}{3|a|}$$

для $n \geqslant n_0$; но тогда

$$|\varphi(n)\psi(n) - ab| < \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta + \frac{\delta^2}{9|a|\,|b|} < \delta.$$

Итак, мы можем выбрать n_0 так, что $|\varphi(n)\psi(n) - ab| < \delta$ при $n \geqslant n_0$, и теорема доказана. Читателю предлагается провести доказательство в том случае, когда по крайней мере одно из a и b равно 0.

Эта теорема, как и теорема I, может быть, конечно, сразу обобщена на произведение любого числа функций от n. Имеет место также и ряд дополнительных предложений, аналогичных сформулированным в п. 64 для сумм. Теперь мы должны различать *шесть* случаев в поведении $\varphi(n)$ при n стремящемся к ∞. Она может (1) стремиться к пределу, *отличному от нуля*, (2) стремиться к нулю, (3a) стремиться к $+\infty$, (3b) стремиться к $-\infty$, (4) ограниченно колебаться и (5) неограниченно колебаться. Как правило, нет необходимости в отдельном рассмотрении случаев (3a) и (3b), так как результат в одном случае может быть выведен из результата в другом простым изменением знака.

Подробное изложение этих дополнительных предложений заняло бы слишком много места. Приведем здесь только два из них в качестве примеров, оставляя их доказательство читателю. Весьма полезным упражнением для него будет также формулировка некоторых из остальных предложений.

(1) *Если $\varphi(n) \to +\infty$ и $\psi(n)$ ограниченно колеблется, то $\varphi(n)\psi(n)$ должна стремиться к $+\infty$ или к $-\infty$ или неограниченно колебаться.*

Примеры для этих трех случаев могут быть получены, если положить $\varphi(n) = n$, а $\psi(n) = 2 + (-1)^n$; $-2 - (-1)^n$; $(-1)^n$.

(2) *Если $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ ограниченно колеблются, то $\varphi(n)\psi(n)$ должна или стремиться к пределу (который может быть равен нулю), или ограниченно колебаться.*

В качестве примеров возьмем следующие:

(a) $\varphi(n) = \psi(n) = (-1)^n$,

(b) $\varphi(n) = 1 + (-1)^n$, $\psi(n) = 1 - (-1)^n$,

(c) $\varphi(n) = \cos\frac{1}{3}n\pi$, $\psi(n) = \sin\frac{1}{3}n\pi$.

Важным частным случаем теоремы II является тот, в котором $\psi(n)$ постоянна. Теорема тогда утверждает, что $\lim k\varphi(n) = ka$, если $\lim \varphi(n) = a$. К этому мы можем добавить, что если $\varphi(n) \to +\infty$, то $k\varphi(n) \to +\infty$, или $k\varphi(n) \to -\infty$, в зависимости от того, положительно k или отрицательно. При $k = 0$ $k\varphi(n) = 0$ для всех n, и $\lim k\varphi(n) = 0$. Если же $\varphi(n)$ ограниченно или неограниченно колеблется, то так же ведет себя и $k\varphi(n)$, если $k \neq 0$.

66. С. Поведение разности и отношения двух функций, поведение которых известно. Имеется, конечно, аналогичная система теорем для разности двух данных функций, являющихся очевидными следствиями из предыдущих результатов. Прежде чем рассмотреть отношение

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА III. *Если* $\lim \varphi(n) = a$ *и* a *отлично от нуля, то*

$$\lim \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{a}.$$

Пусть

$$\varphi(n) = a + \varphi_1(n),$$

так что $\lim \varphi_1(n) = 0$. Тогда

$$\left|\frac{1}{\varphi(n)} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|\varphi_1(n)|}{|a|\,|a + \varphi_1(n)|},$$

и так как $\lim \varphi_1(n) = 0$, то очевидно, что мы можем найти такое n_0, что это выражение будет меньше любого заданного положительного числа δ для $n \geqslant n_0$.

Из теорем II и III мы можем тотчас же вывести основную теорему для отношения двух функций.

ТЕОРЕМА IV. *Если* $\lim \varphi(n) = a$ *и* $\lim \psi(n) = b$ *и* b *отлично от нуля, то*

$$\lim \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \frac{a}{b}.$$

Читателю рекомендуется сформулировать, доказать и проиллюстрировать примерами некоторые из „дополнительных теорем“ к теоремам III и IV.

67. ТЕОРЕМА V. *Если* $R\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\}$ — *любая рациональная функция от* $\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)$, *т. е. любая функция вида*

$$\frac{P\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\}}{Q\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\}},$$

где P и Q обозначают полиномы от $\varphi(n)$, $\psi(n), \ldots$, $\chi(n), \ldots$, *и если*

$$\lim \varphi(n) = a, \ \lim \psi(n) = b, \ldots, \ \lim \chi(n) = c$$

и

$$Q(a, b, \ldots, c,) \neq 0,$$

то

$$\lim R\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\} = R(a, b, \ldots, c).$$

В самом деле, P является суммой конечного числа слагаемых вида

$$A\{\varphi(n)\}^p \{\psi(n)\}^q \ldots \{\chi(n)\}^r,$$

где A — постоянная, а $p, q, \ldots, r$ — положительные целые числа. По теореме II (точнее, по ее обобщению на любое число сомножителей), это слагаемое стремится к пределу $Aa^p b^q \ldots c^r$ и, следовательно, P стремится к пределу $P(a, b, \ldots, c)$, согласно аналогичному обобщению теоремы I. Таким же образом Q стремится к $Q(a, b, \ldots, c)$, и утверждение следует из теоремы IV.

68. Предыдущая общая теорема может быть применена к решению следующего очень важного частного вопроса: *каково поведение наиболее общей рациональной функции от n, а именно,*

$$S(n) = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b^q}$$

при $n \to \infty$[1]?

Для применения теоремы преобразуем $S(n)$ к виду

$$n^{p-q} \left\{ \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_q}{n^q}} \right\}.$$

Функция в фигурных скобках имеет вид $R\{\varphi(n)\}$, где $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, и, следовательно, стремится при $n \to \infty$ к пределу $R(0) = \frac{a_0}{b_0}$. Но $n^{p-q} \to 0$, если $p < q$, $n^{p-q} = 1$ и, значит, $n^{p-q} \to 1$, если $p = q$, и $n^{p-q} \to = \infty$, если $p > q$. Поэтому, по теореме II,

$$\lim S(n) = 0 \quad (p < q),$$

$$\lim S(n) = \frac{a_0}{b_0} \quad (p = q),$$

$$S(n) \to +\infty \quad \left(p > q, \ \frac{a_0}{b_0} \ \textit{положительно}\right),$$

$$S(n) \to -\infty \quad \left(p > q, \ \frac{a_0}{b_0} \ \textit{отрицательно}\right).$$

[1] Мы, конечно, предполагаем, что ни a_0, ни b_0 не равно 0.

Примеры XXVI. 1. Каково поведение функций

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2, \quad (-1)^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2, \quad \frac{n^2+1}{n}, \quad (-1)^n\frac{n^2+1}{n}$$

при $n\to\infty$?

2. Установить, стремятся ли следующие функции к пределу при $n\to\infty$:

$$\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}n\pi+n\sin^2\frac{1}{2}n\pi}, \quad \frac{1}{n\left(\cos^2\frac{1}{2}n\pi+n\sin^2\frac{1}{2}n\pi\right)},$$

$$\frac{n\cos^2\frac{1}{2}n\pi+\sin^2\frac{1}{2}n\pi}{n\left(\cos^2\frac{1}{2}n\pi+n\sin^2\frac{1}{2}n\pi\right)}.$$

3. Обозначая через $S(n)$ произвольную рациональную функцию от n, рассмотренную выше, показать, что

$$\lim\frac{S(n+1)}{S(n)}=1, \quad \lim\frac{S\left(n+\frac{1}{n}\right)}{S(n)}=1.$$

69. Функции от n, монотонно возрастающие вместе с n. Частным, но особенно важным классом функций от n, является класс таких функций, которые изменяются при возрастании n только в одном направлении, т. е. которые все время возрастают (или убывают), когда n возрастает. Так как $-\varphi(n)$ всегда возрастает, если $\varphi(n)$ всегда убывает, нет необходимости рассматривать каждый тип функций в отдельности; теоремы, доказанные для одного типа, тотчас же переносятся на другой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция $\varphi(n)$ называется монотонно возрастающей вместе с n, или возрастающей функцией от n, если $\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)$ для всех значений n.*

Следует заметить, что мы не исключаем случая, когда $\varphi(n)$ имеет *одно и то же* значение для нескольких значений n; мы исключаем лишь возможность *убывания*. Так, функция

$$\varphi(n)=2n+(-1)^n,$$

значения которой для $n=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ равны соответственно

$$1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 9,\ 9, \ldots,$$

возрастает вместе с n. Наше определение включает даже функции, которые остаются постоянными, начиная с некоторого значении n; так, $\varphi(n)=1$ монотонно возрастает.

Если $\varphi(n+1)>\varphi(n)$ для всех n, то мы говорим, что $\varphi(n)$ *строго возрастает.*

Для функций этого класса имеет место следующая очень важная теорема.

ТЕОРЕМА. *Если $\varphi(n)$ монотонно возрастает вместе с n, то либо* (1) *$\varphi(n)$ стремится к пределу при n стремящемся к ∞, либо* (2) $\varphi(n) \to +\infty$.

Это означает, что из *пяти* возможных случаев поведения для функций этого типа могут иметь место только *два*.

Эта теорема является простым следствием теоремы Дедекинда (см. п. 17). Разобьем действительные числа ξ на два класса L и R, относя ξ к L или к R, в зависимости от того, имеет место неравенство $\varphi(n) \geqslant \xi$ для некоторого значения n (и тогда, конечно, для всех бо́льших значений) или неравенство $\varphi(n) < \xi$ для всех значений n.

Класс L заведомо существует; класс R может и не существовать. Если он не существует, то как бы велико ни было заданное число Δ, $\varphi(n) > \Delta$ для всех достаточно больших значений n и, следовательно,

$$\varphi(n) \to +\infty.$$

Если, с другой стороны, R существует, то классы L и R образуют сечение в области действительных чисел в смысле п. 17. Пусть a — число, соответствующее этому сечению, и δ — любое положительное число. Тогда $\varphi(n) < a + \delta$ для всех значений n, откуда, в силу произвольности δ, следует, что $\varphi(n) \leqslant a$. С другой стороны, $\varphi(n) > a - \delta$ для некоторого значения n, а значит, и для всех достаточно больших значений n. Таким образом,

$$a - \delta < \varphi(n) \leqslant a$$

для всех достаточно больших значений n, т. е.

$$\varphi(n) \to a.$$

Следует заметить, что, вообще говоря, $\varphi(n) < a$ для всех значений n, ибо если бы $\varphi(n)$ была равна a для некоторого значения n, то она должна была бы равняться a и для всех бо́льших значений n. Следовательно, $\varphi(n)$ не может принять значения a, если только не все значения $\varphi(n)$, начиная с некоторого, равны a. В этом последнем случае a является наибольшим числом в L; в других случаях L не имеет наибольшего числа.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\varphi(n)$ монотонно возрастает вместе с n, то она будет стремиться к пределу или к $+\infty$, в зависимости от того, возможно или нет найти такое число K, что $\varphi(n) < K$ для всех значений n.*

Мы увидим, что это следствие очень полезно в приложениях.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\varphi(n)$ монотонно возрастает вместе с n и $\varphi(n) < K$ для всех значений n, то $\varphi(n)$ стремится к пределу, и этот предел не превосходит K.*

Следует отметить, что предел может быть равен K; если, например, $\varphi(n) = 3 - \frac{1}{n}$, то каждое значение $\varphi(n)$ меньше 3, но предел $\varphi(n)$ равен 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если $\varphi(n)$ монотонно возрастает вместе с n и стремится к пределу, то*

$$\varphi(n) \leqslant \lim \varphi(n)$$

для всех значений n.

Читателю предлагается сформулировать соответствующие теоремы и следствия для случая, когда $\varphi(n)$ *убывает при возрастании n.*

70. Важность этих теорем обусловливается тем обстоятельством, что они дают нам возможность (которой мы не имели до сих пор) во многих случаях решить, стремится ли данная функция от n к некоторому пределу при $n \to \infty$ или нет, *не предугадывая значения этого предела.* Если мы знаем, чему должен быть равен предел, в случае его существования, то мы можем применить признак

$$|\varphi(n) - l| < \delta \quad (n \geqslant n_0).$$

Это положение имеет место, например, в случае $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, где, очевидно, пределом может быть только 0. Но допустим, что мы должны определить, стремится ли

$$\varphi(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

к пределу. В этом случае совсем не очевидно, чему будет равен предел, если он существует, и ясно, что предыдущий признак, содержащий l, не может быть применен (во всяком случае непосредственно) к решению вопроса о том, существует l или нет.

Этот признак может быть, конечно, иногда применен косвенно для доказательства того, что l *не существует*, путем приведения к противоречию. Если, например, $\varphi(n) = (-1)^n$, то ясно, что l должно было бы быть как 1, так и -1, что явно невозможно.

71. Другое доказательство теоремы Вейерштрасса из п. 19. Результаты п. 69 позволяют нам дать другое доказательство важной теоремы, уже доказанной в п. 19.

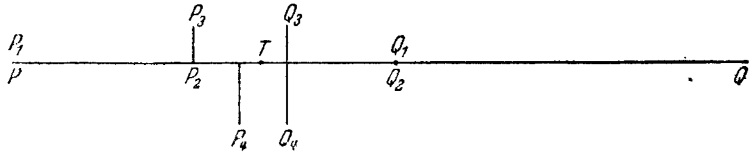
Если мы разделим интервал PQ на две равные части, то по крайней мере одна из них должна содержать бесконечно много точек S. Выберем ту часть, которая содержит бесконечно много точек S, или, если этим свойством обладают обе части, то выберем левую. Эту выбранную половину обозначим через P_1Q_1 (фиг. 25). Если P_1Q_1 — левая половина, то P_1 — это точка P.

Аналогично, если мы разделим P_1Q_1 на две половины, то по крайней мере одна из них должна содержать бесконечно много точек S. Выберем половину P_2Q_2, которая удовлетворяет этому условию, или, если этому условию удовлетворяют обе половины, то выберем левую. Продолжая таким образом, мы получим последовательность интервалов

$$PQ,\ P_1Q_1,\ P_2Q_2,\ P_3Q_3,\ \ldots,$$

каждый из которых является половиной предшествующего интервала и содержит бесконечно много точек S.

Точки P, P_1, P_2, ... лежат каждая правее предыдущей, и, следовательно, P_n стремится к предельному положению T. Аналогично, Q_n стремится к предельному положению T'. Но TT', очевидно, меньше чем P_nQ_n при любом значении n; а так как P_nQ_n равно $\frac{PQ}{2^n}$, то $P_nQ_n \to 0$. Следовательно, T' совпадает с T, и P_n и Q_n обе стремятся к T.



Фиг. 25

Тогда T является точкой накопления S. Ибо, полагая, что ξ является ее координатой, рассмотрим любой интервал типа $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Если n достаточно велико, то P_nQ_n будет целиком лежать внутри этого интервала[1]. Следовательно, интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ содержит бесконечно много точек S.

72. Предел x^n при n стремящемся к ∞. Применим результаты п. 69 к особо важному случаю $\varphi(n) = x^n$. Если $x = 1$, то $\varphi(n) = 1$, $\lim \varphi(n) = 1$, и если $x = 0$, то $\varphi(n) = 0$, $\lim \varphi(n) = 0$, так что эти частные случаи можно исключить из рассмотрения.

Допустим сначала, что x положительно. Тогда, так как $\varphi(n+1) = x\varphi(n)$, $\varphi(n)$ возрастает вместе с n, если $x > 1$, и убывает при возрастании n, если $x < 1$.

Если $x > 1$, то x^n должно стремиться либо к конечному пределу (который должен быть, очевидно, большим 1), либо к $+\infty$. Пусть x^n стремится к пределу l. Тогда, согласно примеру XXV. 7, $\lim \varphi(n+1) = \lim \varphi(n) = l$; но

$$\lim \varphi(n+1) = \lim x\varphi(n) = x \lim \varphi(n) = xl,$$

и, значит, $l = xl$; однако это невозможно, так как x и l оба больше 1. Следовательно,

$$x^n \to +\infty \ (x > 1).$$

Пример. Читатель может дать другое доказательство, показав, что, по биному Ньютона, $x^n > 1 + n\delta$, если δ положительно и $x = 1 + \delta$, откуда

$$x^n \to +\infty.$$

С другой стороны, x^n является убывающей функцией, если $x < 1$, и поэтому x^n стремится либо к конечному пределу, либо к $-\infty$. Так как

---

[1] Это заведомо будет иметь место, коль скоро $\frac{PQ}{2^n} < \delta$.

x^n положительно, вторая возможность отпадает. Таким образом, $\lim x^n = l$, а так как попрежнему $l = xl$, то l должно быть нулем. Следовательно,

$$\lim x^n = 0 \quad (0 < x < 1).$$

Пример. Доказать, как в предыдущем примере, что $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ стремится к $+\infty$, если $0 < x < 1$, и вывести отсюда, что x^n стремится к 0.

Наконец, мы должны рассмотреть отрицательные x. Если $-1 < x < 0$ и $x = -y$, так что $0 < y < 1$, то из предыдущего следует, что $\lim y^n = 0$, и поэтому $\lim x^n = 0$. Если $x = -1$, то очевидно, что x^n колеблется, принимая поочередно значения -1 и 1. Если же $x < -1$ и $x = -y$, так что $y > 1$, то y^n стремится к $+\infty$, и поэтому x^n принимает значения, поочередно положительные и отрицательные и по модулю превосходящие любое наперед заданное число. Следовательно, x^n неограниченно колеблется. Таким образом,

$$\varphi(n) = x^n \to +\infty \; (x > 1),$$

$$\lim \varphi(n) = 1 \; (x = 1),$$

$$\lim \varphi(n) = 0 \; (-1 < x < 1),$$

$\varphi(n)$ *ограниченно колеблется* $(x = -1)$,

$\varphi(n)$ *неограниченно колеблется* $(x < -1)$.

Примеры XXVII[1]. 1. Если $\varphi(n)$ положительно и $\varphi(n+1) \geqslant K\varphi(n)$, где $K > 1$, то $\varphi(n) \to +\infty$.

[Ибо

$$\varphi(n) \geqslant K\varphi(n-1) \geqslant K^2\varphi(n-2) \geqslant \ldots \geqslant K^{n-1}\varphi(1),$$

откуда следует утверждение, так как $K^n \to \infty$.]

2. Тот же результат остается в силе, если условия удовлетворяются только при $n \geqslant n_0$.

3. Если $\varphi(n)$ положительно и $\varphi(n+1) \leqslant K\varphi(n)$, где $0 < K < 1$, то $\lim \varphi(n) = 0$. Результат остается в силе, если условия удовлетворяются только при $n \geqslant n_0$.

4. Если $|\varphi(n+1)| \leqslant K|\varphi(n)|$ при $n \geqslant n_0$ и $0 < K < 1$, то $\lim \varphi(n) = 0$,

5. Если $\varphi(n)$ положительно и $\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = l > 1$, то $\varphi(n) \to +\infty$.

[Ибо мы можем определить n_0 так, что $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} > K > 1$ при $n \geqslant n_0$; для этого можно, например, взять K равным $\frac{1}{2}(1+l)$. Дальше применить пример 1.]

6. Если

$$\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = l, \qquad -1 < l < 1,$$

то $\lim \varphi(n) = 0$. [Это следует из примера 4 так же, как пример 5 следует из примера 1.]

---

[1]) Эти примеры особенно важны, и некоторые из них применяются дальше в тексте. Поэтому они должны быть внимательно изучены.

7. Исследовать поведение при $n \to \infty$ функции

$$\varphi(n) = n^r x^n,$$

где r — любое положительное целое число.

[Если $x = 0$, то $\varphi(n) = 0$ для всех значений n, и $\varphi(n) \to 0$. Во всех других случаях

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r x \to x.$$

Допустим сперва, что x положительно. Тогда $\varphi(n) \to +\infty$, если $x > 1$ (см. пример 5), и $\varphi(n) \to 0$, если $x < 1$ (см. пример 6). Если $x = 1$, то $\varphi(n) = n^r \to +\infty$. Предположим, далее, что x отрицательно. Тогда $|\varphi(n)| = n^r |x|^n$ стремится к $+\infty$, если $|x| \geqslant 1$, и к 0, если $|x| < 1$. Следовательно, $\varphi(n)$ неограниченно колеблется, если $x \leqslant -1$, и $\varphi(n) \to 0$, если $-1 < x < 0$.]

8. Аналогично исследовать $n^{-r}x^n$. [Результаты — те же, кроме того, что $\varphi(n) \to 0$ при $x = 1$ или -1.]

9. Составить таблицу, показывающую поведение $n^k x^n$ при $n \to \infty$ для всех действительных значений x и всех положительных и отрицательных целочисленных значений k.

[Читатель заметит, что значение k иесущественно, кроме тех частных случаев, когда $x = 1$ или -1. Так как

$$\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1,$$

независимо от того, положительно k или отрицательно, предел отношения $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ зависит только от x, и поведеиие $\varphi(n)$ определяется в общем случае множителем x^n. Множитель n^k играет роль только в том случае, когда x равно 1 или -1.]

10. Доказать, что если x положительио, то $\sqrt[n]{x} \to 1$ при $n \to \infty$. [Допустим, например, что $x > 1$. Тогда x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ... является убывающей последовательностью, и $\sqrt[n]{x} > 1$ для всех значений n. Следовательно, $\sqrt[n]{x} \to l$, где $l \geqslant 1$. Но если бы l было больше 1, то мы могли бы найти сколь угодно большие значения n, для которых $\sqrt[n]{x} > l$ или $x > l^n$; а так как $l^n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то это невозможно.]

11. $\sqrt[n]{n} \to 1$. [Ибо $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, если $(n+1)^n < n^{n+1}$ или $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, что наверно выполняется для $n \geqslant 3$ (см. доказательство в п. 73). Таким образом, $\sqrt[n]{n}$ убывает при n возрастающем от 3, а так как $\sqrt[n]{n}$ всегда больше 1, то он стремится к некоторому пределу, большему или равному 1. Но если бы $\sqrt[n]{n} \to l$, где $l > 1$, то мы имели бы $n > l^n$, что во всяком случае неверно для достаточно больших значений n, так как $\frac{l^n}{n} \to +\infty$ вместе с n (примеры 7, 8).]

12. $\frac{x^n}{n!} \to 0$ для всех значений x. [Если $u_n = \frac{x^n}{n!}$, то $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$, что стремится к нулю при $n \to \infty$, так что u_n стремится к нулю (пример 6).]

13. $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. [Ибо $n! > x^n$ для достаточно больших n, как бы велико ни было x (пример 12).]

14. Показать, что если $-1 < x < 1$, то

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n = C_n^m x^n$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

[Если m — положительное целое число, то $u_n = 0$ для $n > m$. Если же m не есть положительное целое число, то

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n}{n+1} x \to -x,$$

кроме того случая, когда $x = 0$.]

73. Предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Более трудная задача, которая может быть решена с помощью п. 69, возникает, когда $\varphi(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Применяя формулу Ньютона, получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

В этом разложении $(p+1)$-ый член имеет вид

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

Он положителен и является возрастающей функцией от n. Число членов суммы также возрастает с n. Следовательно, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает с n и поэтому либо стремится к пределу, либо к $+\infty$, когда $n \to \infty$.

Но

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Поэтому $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ не может стремиться к $+\infty$, а следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где e — некоторое число такое, что $2 < e \leqslant 3$.

Пример. Найти предел

$$n^{-n-1}(n+1)^n. \qquad \text{(\textit{Экз.} 1934 г.)}$$

74. Несколько алгебраических лемм. Здесь уместно доказать несколько элементарных неравенств, которые нам понадобятся в дальнейшем.

(1) Если $\alpha > 1$ и r — положительное целое число, то очевидно, что

$$r\alpha^r > \alpha^{r-1} + \alpha^{r-2} + \ldots + 1.$$

Умножая обе части неравенства на $\alpha - 1$, получим:

$$r\alpha^r(\alpha - 1) > \alpha^r - 1;$$

прибавляя к каждой части $r(\alpha^r - 1)$ и деля на $r(r+1)$, получим:

$$\frac{\alpha^{r+1} - 1}{r+1} > \frac{\alpha^r - 1}{r} \quad (\alpha > 1). \tag{1}$$

Аналогично докажем, что

$$\frac{1 - \beta^{r+1}}{r+1} < \frac{1 - \beta^r}{r} \quad (0 < \beta < 1). \tag{2}$$

Отсюда следует, что если r и s — положительные целые числа и $r > s$, то

$$\frac{\alpha^r - 1}{r} > \frac{\alpha^s - 1}{s}, \quad \frac{1 - \beta^r}{r} < \frac{1 - \beta^s}{s}. \tag{3}$$

Здесь $0 < \beta < 1 < \alpha$. В частности, при $s = 1$, мы имеем:

$$\alpha^r - 1 > r(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^r < r(1 - \beta). \tag{4}$$

(2) Неравенства (3) и (4) были доказаны в предположении, что r и s — положительные целые числа. Но легко видеть, что они остаются в силе и при более общих предпосылках, когда r и s — любые положительные рациональные числа. Рассмотрим, например, первое из неравенств (3). Пусть $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — положительные целые числа, причем $ad > bc$. Если мы положим $\alpha = \gamma^{bd}$, то неравенство примет вид

$$\frac{\gamma^{ad} - 1}{ad} > \frac{\gamma^{bc} - 1}{bc},$$

а это нами уже доказано. Аналогичные рассуждения применимы и к другим неравенствам; подобным же образом можно, очевидно, доказать, что

$$\alpha^s - 1 < s(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^s > s(1 - \beta), \tag{5}$$

где s — положительное рациональное число, меньшее 1.

(3) В дальнейшем мы предполагаем, что *все буквы обозначают положительные числа, что n и s рациональны, и что α и r больше* 1, *а β и s меньше* 1. Заменяя в неравенствах (4) α на $\frac{1}{\beta}$ и β на $\frac{1}{\alpha}$, мы получим:

$$\alpha^r - 1 < r\alpha^{r-1}(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^r > r\beta^{r-1}(1 - \beta). \tag{6}$$

Аналогично, из (5) выводим:

$$\alpha^s - 1 > s\alpha^{s-1}(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^s < s\beta^{s-1}(1 - \beta). \tag{7}$$

Сочетая (4) и (6), мы видим, что

$$r\alpha^{r-1}(\alpha - 1) > \alpha^r - 1 > r(\alpha - 1). \tag{8}$$

Заменяя α на $\frac{x}{y}$, мы получим:

$$rx^{r-1}(x - y) > x^r - y^r > ry^{r-1}(x - y), \tag{9}$$

если $x > y > 0$. Аналогичное рассуждение, примененное к (5) и (7), приводит к иеравенству

$$sx^{s-1}(x-y) < x^s - y^s < sy^{s-1}(x-y). \qquad (10)$$

Примеры XXVIII. 1. Проверить неравенство (9) для $r=2$, 3 и неравенство (10) для $s=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

2. Показать, что (9) и (10) остаются в силе, если $y > x > 0$.

3. Показать, что (9) остается в силе при $r < 0$.

[Значительно более полное рассмотрение неравенств (9) и (10) может быть найдено в книге Г. Харди, Дж. Литтльвуд и Г. Полиа, Неравенства, гл. II. Там же см. Добавление I.]

4. Если $\varphi(n) \to l$, где $l > 0$, и k рационально, то $\varphi^k \to l^k$.

[В силу теоремы III п. 66, мы можем предположить, что $k > 0$; мы можем также предположить, что $\frac{1}{2}l < \varphi < 2l$, что имеет место, начиная с некоторого значения n. Если $k > 1$, то

$$k\varphi^{k-1}(\varphi - l) > \varphi^k - l^k > kl^{k-1}(\varphi - l),$$

или

$$kl^{k-1}(l-\varphi) > l^k - \varphi^k > k\varphi^{k-1}(l-\varphi),$$

в зависимости от того, будет $\varphi > l$ или $\varphi < l$. Отсюда следует, что отношение величин $|\varphi^k - l^k|$ и $|\varphi - l|$ лежит между $k\left(\frac{1}{2}l\right)^{k-1}$ и $k(2l)^{k-1}$. В случае $0 < k < 1$ доказательство аналогично. Результат остается в силе при $l=0$, если $k > 0$.]

5. Распространить результаты примеров XXVII. 7, 8, 9 на случай, когда r и k — любые рациональные числа.

75. Предел $n(\sqrt[n]{x}-1)$. В первом из неравенств (3) п. 74 положим $r=\frac{1}{n-1}$, $s=\frac{1}{n}$. Тогда мы получим:

$$(n-1)\left(\sqrt[n-1]{\alpha}-1\right) > n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right),$$

если $\alpha > 1$. Таким образом, если $\varphi(n) = n(\sqrt[n]{\alpha}-1)$, то $\varphi(n)$ монотонно убывает при возрастании n. Кроме того, $\varphi(n)$ всегда положительна. Следовательно, $\varphi(n)$ стремится к некоторому пределу l при $n \to \infty$, причем $l \geqslant 0$.

Если, далее, в первом из неравенств (7) п. 74 мы положим $s=\frac{1}{n}$, то найдем, что

$$n(\sqrt[n]{\alpha}-1) > \sqrt[n]{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) > 1-\frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, $l \geqslant 1-\frac{1}{\alpha} > 0$. Следовательно, если $\alpha > 1$, то мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\alpha}-1) = f(\alpha),$$

причем $f(\alpha) > 0$.

Пусть теперь $\beta < 1$, и положим $\beta=\frac{1}{\alpha}$; тогда

$$n(\sqrt[n]{\beta}-1) = -n(\sqrt[n]{\alpha}-1)\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}.$$

Но $n(\sqrt[n]{\alpha}-1)\to f(\alpha)$, и (см. пример XXVII. 10)

$$\sqrt[n]{\alpha}\to 1.$$

Следовательно, если $\beta=\frac{1}{\alpha}<1$, мы имеем:

$$n\,(\sqrt[n]{\beta}-1)\to -f(\alpha).$$

Наконец, если $x=1$, то $n(\sqrt[n]{x}-1)=0$ для всех значений n.

Таким образом, мы получаем следующий результат: *предел*

$$\lim n\,(\sqrt[n]{x}-1)$$

определяет функцию от x для всех положительных значений x. Эта функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),\quad f(1)=0;$$

она положительна для $x>1$ и отрицательна для $x<1$. В дальнейшем мы увидим, что эта функция совпадает с *натуральным логарифмом* от x.

Пример. Доказать, что $f(xy)=f(x)+f(y)$. [Использовать соотношения

$$f(xy)=\lim n\,(\sqrt[n]{xy}-1)=\lim\{n\,(\sqrt[n]{x}-1)\sqrt[n]{y}+n\,(\sqrt[n]{y}-1)\}.]$$

76. Бесконечные ряды. Предположим, что $u(n)$ — любая функция от n, определенная для всех значений n. Если мы сложим значения $u(\nu)$ для $\nu=1,2,\ldots,n$, то получим другую функцию от n, а именно,

$$s(n)=u(1)+u(2)+\ldots+u(n),$$

также определенную для всех значений n. Здесь удобно несколько изменить наши обозначения и записать последнее равенство в форме

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

или, короче,

$$s_n=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu.$$

Если мы теперь предположим, что s_n стремится к пределу s при $n\to\infty$, то имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu=s.$$

Это соотношение обычно записывается в одной из следующих форм:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu=s,\qquad u_1+u_2+u_3+\ldots=s,$$

причем точки обозначают, что последовательность слагаемых u_ν бесконечна.

Смысл этих равенств, грубо говоря, заключается в том, что, складывая все большее и большее число слагаемых u_ν, мы получаем числа, все менее и менее отличающиеся от предела s. Точнее, если задано любое сколь угодно малое положительное число δ, мы можем найти такое $n_0(\delta)$, что сумма первых $n_0(\delta)$ или любого большего числа слагаемых заключена между $s-\delta$ и $s+\delta$, т. е.

$$s-\delta<s_n<s+\delta,$$

если $n \geqslant n_0(\delta)$. В этих условиях мы будем называть ряд

$$u_1+u_2+\ldots$$

сходящимся бесконечным рядом и будем говорить, что s является *суммой* ряда или *суммой всех членов* ряда.

Таким образом, когда мы говорим, что ряд $u_1+u_2+\ldots$ *сходится и имеет сумму* s, или *сходится к сумме* s, или просто *сходится к* s, мы утверждаем только то, что сумма

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$$

первых n членов ряда стремится к пределу s при $n\to\infty$, так что рассмотрение таких бесконечных рядов не требует введения никаких новых понятий, кроме тех, с которыми читатель уже познакомился в первых пунктах настоящей главы. Действительно, сумма является просто некоторой функцией $\varphi(n)$, представленной особым образом. Любая функция $\varphi(n)$ может быть представлена таким образом, а именно,

$$\varphi(n)=\varphi(1)+\{\varphi(2)-\varphi(1)\}+\ldots+\{\varphi(n)-\varphi(n-1)\};$$

поэтому иногда бывает удобно говорить, что $\varphi(n)$ *сходится* (вместо „стремится") к пределу l при $n\to\infty$.

Если $s_n\to+\infty$ или $s_n\to-\infty$, то мы говорим, что ряд $u_1+u_2+\ldots$ *расходится*, или что он *расходится к* $+\infty$ или, соответственно, к $-\infty$. Эти термины могут быть применены к любой функции $\varphi(n)$; так, если $\varphi(n)\to+\infty$, то мы можем сказать, что $\varphi(n)$ *расходится к* $+\infty$. Если s_n не стремится ни к конечному пределу, ни к $+\infty$, ни к $-\infty$, то тогда s_n ограниченно или неограниченно колеблется; в этом случае мы говорим, что ряд, соответственно, ограниченно или неограниченно колеблется[1]).

77. Общие теоремы о бесконечных рядах. При рассмотрени. вопросов, связанных с бесконечными рядами, мы должны будем по стоянно пользоваться следующими общими теоремами.

---

[1]) Читатель должен быть предупрежден, что термины „расходящийся" и „колеблющийся" применяются разными авторами в разных смыслах. [В русской литературе под расходящимся рядом, как правило, понимают ряд, который не является сходящимся; расходящийся ряд в том смысле, в котором этот термин определен в тексте, иногда называют собственно расходящимся. — *Прим. перев.*]

(1) Если $u_1+u_2+\ldots$ сходится и имеет сумму s, то $a+u_1+$ $+u_2+\ldots$ также сходится и имеет сумму $a+s$. Аналогично, $a+b+c+\ldots+k+u_1+u_2+\ldots$ сходится и имеет сумму $a+b+$ $+c\ldots+k+s$.

(2) Если $u_1+u_2+\ldots$ сходится и имеет сумму s, то $u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots$ сходится и имеет сумму

$$s-u_1-u_2-\ldots-u_m.$$

(3) Если какой-либо из рядов, рассмотренных в (1) и (2), расходится или колеблется, то так же ведут себя и остальные из рассмотренных рядов.

(4) Если $u_1+u_2+\ldots$ сходится и имеет сумму s, то $ku_1+ku_2+\ldots$ сходится и имеет сумму ks.

(5) Если первый ряд из рассмотренных в (4) расходится или колеблется, то так же ведет себя и второй, если $k\neq 0$.

(6) Если $u_1+u_2+\ldots$ и $v_1+v_2+\ldots$ оба сходятся, то ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots$ также сходится, и его сумма равна сумме двух первых рядов.

Все эти теоремы почти очевидны и могут быть доказаны непосредственно из определений или же применением результатов пп. 63—66 к сумме $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$. Следующие теоремы носят уже несколько иной характер.

(7) *Если* $u_1+u_2+\ldots$ *сходится, то* $\lim u_n=0$.

Ибо $u_n=s_n-s_{n-1}$, а s_n и s_{n-1} имеют один и тот же предел s. Следовательно, $\lim u_n=s-s=0$.

Читателю может показаться, что и обратная теорема справедлива, т. е. что если $\lim u_n=0$, то ряд $u_1+u_2+\ldots$ должен быть сходящимся. Что это не так, легко убедиться на примере. Возьмем так называемый гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

для которого $u_n=\dfrac{1}{n}$. Сумма его первых четырех членов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.$$

Сумма следующих четырех членов $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}>\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$; сумма следующих восьми членов больше чем $\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$ и т. д. Таким образом, сумма первых

$$4+4+8+16+\ldots+2^n=2^{n+1}$$

членов больше, чем

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n+3),$$

а это стремится к $+\infty$ вместе с n, а значит, ряд расходится к $+\infty$.

(8) *Если $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится, то будет сходиться и любой ряд, составленный из данного произвольным объединением в скобки его членов так, что выражение в каждых скобках образует член нового ряда. Сумма каждого из таким образом составленных рядов равна сумме исходного ряда.*

Читатель сможет самостоятельно доказать эту теорему. Обратиая теорема здесь также неверна. Так, $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ колеблется, тогда как

$$(1-1)+(1-1)+\ldots$$

или $0+0+0+\ldots$ сходится к нулю.

(9) *Если каждый член u_n положителен (или равен нулю), то ряд $\sum u_n$ либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Если он сходится, то его сумма должна быть положительна* (кроме того случая, когда все члены равны нулю; в этом случае его сумма, конечно, также равна нулю).

Действительно, s_n, по определению п. 69, является возрастающей функцией от n, и мы можем применить результаты этого пункта к s_n.

(10) *Если каждый член u_n положителен (или равен нулю), то необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\sum u_n$ является существование такого числа K, что сумма любого числа членов ряда будет меньше чем K; если такое K может быть найдено, то сумма ряда не превосходит K.*

Это также непосредственно следует из п. 69. Вряд ли нужно особо отмечать, что теорема становится неверной, если отбросить условие о положительности u_n. Например,

$$1-1+1-1+\ldots$$

явно колеблется, так как s_n поочередно равно 1 и 0.

(11) *Если $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$ — два ряда с положительными (или равными нулю) членами, причем второй ряд сходится и для всех значений n $u_n \leqslant K v_n$, где K — постоянная, то первый ряд также сходится, и его сумма не превосходит умноженную на K сумму второго ряда.* Ибо если $v_1 + v_2 + \ldots = t$, то $v_1 + v_2 + \ldots + v_n \leqslant t$ для всех значений n и, следовательно, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqslant Kt$, что и доказывает теорему.

Обратно, если $\sum u_n$ расходится и $v_n \geqslant K u_n$, где $K > 0$, то $\sum v_n$ также расходится.

78. Бесконечная геометрическая прогрессия. Рассмотрим теперь бесконечный ряд с общим членом $u_n = r^{n-1}$. Этот ряд называется „бесконечной геометрической прогрессией“. В этом случае

$$s_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r},$$

если $r \neq 1$; при $r = 1$

$$s_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

В последнем случае $s_n \to +\infty$. В общем случае s_n стремится к конечному пределу тогда и только тогда, когда r^n стремится к конечному пределу. Обращаясь к результатам п. 72, мы видим, что *ряд* $1+r+r^2+\ldots$ *сходится и имеет сумму* $\frac{1}{1-r}$ *тогда и только тогда, когда* $-1<r<1$.

Если $r \geqslant 1$, то $s_n \geqslant n$ и $s_n \to +\infty$, т. е. ряд расходится к $+\infty$. Если $r=-1$, то $s_n=1$ или $s_n=0$, в зависимости от того, нечетно n или четно, т. е. s_n ограниченно колеблется. Если $r<-1$, то s_n неограниченно колеблется.

Итак, *ряд* $1+r+r^2+\ldots$ *расходится к* $+\infty$, *если* $r \geqslant 1$, *сходится к* $\frac{1}{1-r}$, *если* $-1<r<1$, *ограниченно колеблется, если* $r=-1$, *и неограниченно колеблется, если* $r<-1$.

Примеры XXIX. 1. Периодические десятичные дроби. Самым распространенным примером бесконечной геометрической прогрессии являются периодические десятичные дроби. Рассмотрим, например, десятичную дробь 0,217 (13). По правилам арифметики это равно

$$\frac{2}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\frac{3}{10^7}+\ldots=\frac{217}{1000}+\frac{\frac{13}{10^5}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{2\,687}{12\,375}.$$

Читатель должен разобрать, в каком месте и какая из общих теорем п. 77 применялась в этом вычислении.

2. Показать, что вообще

$$0,a_1a_2\ldots a_m\,(\dot{\alpha}_1\alpha_2\ldots\dot{\alpha}_n)=\frac{a_1a_2\ldots a_m\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-a_1a_2\ldots a_m}{99\ldots900\ldots0},$$

где знаменатель содержит n девяток и m нулей.

3. Показать, что чисто периодическая десятичная дробь всегда равна дроби, знаменатель которой не делится ни на 2, ни на 5.

4. Десятичная дробь с m знаками до периода и с n знаками в периоде равна дроби, знаменатель которой делится на 2^m и 5^m, но не делится ни на какую высшую степень 2 и 5.

5. Имеют место также утверждения, обратные утверждениям в примерах 3 и 4. Пусть $r=\frac{p}{q}$, и допустим, что q взаимно просто с 10. Если мы будем делить все степени 10 на q, то получим не более q различных остатков. Поэтому можно найти два числа n_1 и n_2, где $n_1>n_2$, так что 10^{n_1} и 10^{n_2} дают один и тот же остаток. Следовательно, $10^{n_1}-10^{n_2}=10^{n_2}(10^{n_1-n_2}-1)$ делится на q, а следовательно, и 10^n-1, где $n=n_1-n_2$, делится на q. Следовательно, r может быть представлено в виде $\frac{P}{10^n-1}$ или

$$\frac{P}{10^n}+\frac{P}{10^{2n}}+\ldots,$$

т. е. как чисто периодическая десятичная дробь с n знаками в периоде. Пусть, с другой стороны, $q=2^\alpha 5^\beta Q$, где Q взаимно просто с 10, и пусть m — наибольшее из чисел α и β; тогда $10^m r$ имеет знаменатель, взаимно простой с 10, и может быть представлено в виде суммы целого числа и чисто периодической десятичной дроби. Однако это уже неверно в отношении $10^\mu r$, где $\mu<m$; следовательно, наша десятичная дробь для r имеет в точности m знаков до периода.

6. К результатам примеров 2—5 мы должны добавить еще результат примера I. 3. Наконец, замечая, что

$$0,(9)=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots=1,$$

мы видим, что всякая конечная десятичная дробь может быть представлена в виде смешанной периодической десятичной дроби с 9 в периоде. Например, 0,217 = 0,216 (9). Таким образом, всякая дробь может быть представлена в виде смешанной периодической десятичной дроби, и наоборот.

7. Общие десятичные дроби. Представление иррациональных чисел в виде непериодических десятичных дробей. Каждая десятичная дробь, как периодическая, так и непериодическая, соответствует определенному числу между 0 и 1. Ибо десятичная дробь $0,a_1a_2a_3a_4\ldots$ обозначает бесконечный ряд

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots.$$

Так как каждое a_r положительно или равно нулю, то сумма s_n первых n членов этого ряда возрастает вместе с n и при этом не превосходит 0, (9), т. е. 1. Следовательно, s_n стремится к пределу, заключенному между 0 и 1.

Более того, никакие две десятичные дроби не могут соответствовать одному и тому же числу (кроме тех случаев, которые отмечены в примере 6). Ибо допустим, что $0,a_1a_2a_3\ldots$, $0,b_1b_2b_3\ldots$ — две десятичные дроби, совпадающие до знаков a_{r-1}, b_{r-1}, но что $a_r>b_r$. Тогда $a_r\geqslant b_r+1>b_r$, $b_{r+1}b_{r+2}\ldots$ (если только не все b_{r+1}, $b_{r+2},\ldots$ равны 9), и следовательно,

$$0,a_1a_2\ldots a_ra_{r+1}\ldots>0,b_1b_2\ldots b_rb_{r+1}\ldots.$$

Таким образом, выражения рациональных дробей в виде периодических десятичных (примеры 2—6) однозначны. Далее мы заключаем, что каждая десятичная дробь, которая не обрывается и не является периодической, представляет некоторое иррациональное число между 0 и 1. Обратно, всякое такое число может быть представлено в виде такой десятичной дроби. В самом деле, оно должно лежать в одном из интервалов

$$\left(0,\frac{1}{10}\right);\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right);\ldots;\left(\frac{9}{10},1\right).$$

Если оно лежит между $\frac{1}{10}r$ и $\frac{1}{10}(r+1)$, то первым знаком будет r. Подразделяя этот интервал на 10 частей, мы можем аналогично определить второй знак и т. д. Но (примеры 3, 4) полученная десятичная дробь не может быть периодической. Так, например, десятичная дробь 1,414 ..., получаемая с помощью обычного алгорифма извлечения $\sqrt{2}$, не может быть периодической.

8. Десятичные дроби 0,1010010001000010... и 0,2020020002000020..., в которых число нулей между единицами и двойками с каждым шагом увеличивается на единицу, представляют иррациональные числа.

9. Десятичная дробь 0,11101010001010..., в которой n-ый знак есть 1, если n — простое число, и 0, если n — непростое, представляет простое число. [Так как число простых чисел бесконечно, эта десятичная дробь не обрывается. Она не может быть и периодической; действительно, если бы она была периодической, то мы могли бы определить m и p так, что m, $m+p$, $m+2p$, $m+3p$ ... были бы все простые числа, а это невозможно, так как эта последовательность содержит $m+mp$[1]).]

---

[1]) Все результаты примеров XXIX могут быть обобщены, с соответствующими изменениями, на двоичные, троичные и т. п. дроби.

Примеры XXX. 1. Ряд $r^m + r^{m+1} + \ldots$ сходится, если $-1 < r < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-r} - 1 - r - \ldots - r^{m-1}$ (см. (2) п. 77).

2. Ряд $r^m + r^{m+1} + \ldots$ сходится, если $-1 < r < 1$, и его сумма равна $\frac{r^m}{1-r}$ (см. (4) п. 77). Проверить, что результаты примеров 1 и 2 совпадают.

3. Доказать, что ряд $1 + 2r + 2r^2 + \ldots$ сходится и что его сумма равна $\frac{1+r}{1-r}$,

(1) записывая его в виде

$$-1 + 2(1 + r + r^2 + \ldots),$$

(2) записывая его в виде

$$1 + 2(r + r^2 + \ldots),$$

(3) складывая два ряда $1 + r + r^2 + \ldots$ и $r + r^2 + \ldots$ В каждом случае указать те теоремы из п. 77, которые применяются при доказательстве.

4. Доказать, что арифметическая прогрессия

$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots$$

всегда расходится, кроме того случая, когда a и b оба равны нулю. Показать, что если b отлично от нуля, то ряд расходится к $+\infty$ или к $-\infty$, в зависимости от знака b, и что если $b = 0$, то он расходится к $+\infty$ или к $-\infty$, в зависимости от знака a.

5. Чему равна сумма ряда

$$(1 - r) + (r - r^2) + (r^2 - r^3) + \ldots,$$

если этот ряд сходится? [Ряд сходится тогда и только тогда, когда $-r < 1 \leqslant 1$. Его сумма равна 1, если $r \neq 1$, и равна 0 при $r = 1$.]

6. Найти сумму ряда $r^2 + \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{r^2}{(1+r^2)^2} + \ldots$.

[Этот ряд всегда сходится. Если $r \neq 0$, его сумма равна $1 + r^2$, а при $r = 0$ его сумма равна 0.]

7. Если предположить, что $1 + r + r^2 + \ldots$ сходится, то можно доказать с помощью теорем (1) и (4) п. 77, что сумма этого ряда равна $\frac{1}{1-r}$. Ибо если $1 + r + r^2 + \ldots = s$, то

$$s = 1 + r(1 + r + r^2 + \ldots) = 1 + rs.$$

8. Найти сумму ряда $r + \frac{r}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^2} + \ldots$ в тех случаях, когда он сходится. [Ряд сходится, если $-1 < \frac{1}{1+r} < 1$, т. е. если $r < -2$ или $r > 0$, а его сумма равна $1 + r$. Он также сходится при $r = 0$, и в этом случае его сумма равна 0.]

9. Найти суммы следующих рядов в тех случаях, когда они сходятся:

$$r - \frac{r}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^2} - \ldots, \quad r + \frac{r}{1-r} + \frac{r}{(1-r)^2} + \ldots,$$

$$1 - \frac{r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 - \ldots, \quad 1 + \frac{r}{1-r} + \left(\frac{r}{1-r}\right)^2 + \ldots.$$

10. Рассмотреть сходимость рядов

$$(1 + r) + (r^2 + r^3) + \ldots, \quad (1 + r + r^2) + (r^3 + r^4 + r^5) + \ldots,$$

$$1 - 2r + r^2 + r^3 - 2r^4 + r^5 + \ldots, \quad (1 - 2r + r^2) + (r^3 - 2r^4 + r^5) + \ldots,$$

и найти их суммы в тех случаях, когда они сходятся.

11. Если $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, то ряд $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$ сходится для $0 \leqslant r < 1$, и его сумма не превосходит $\frac{1}{1-r}$.

12. Если, кроме того, ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ сходится, то ряд $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$ сходится для $0 \leqslant r \leqslant 1$, и его сумма не превосходит меньшее из двух чисел: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ и $\frac{1}{1-r}$.

13. Ряд $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$ сходится. [Так как $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.]

14. Ряды $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots, \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$ сходятся.

15. Общий гармонический ряд

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \ldots,$$

где a и b положительны, расходится к $+\infty$.

[Ибо $u_n = \frac{1}{a+nb} > \frac{1}{n(a+b)}$. Теперь сравнить с рядом $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$.]

16. Показать, что ряд

$$(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots$$

сходится тогда и только тогда, когда u_n стремится к пределу при $n \to \infty$.

17. Если $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ расходится, то будет расходиться и любой ряд, составленный из него произвольным объединением его членов в скобки так, что выражение в каждых скобках образует член нового ряда.

18. Всякий ряд, составленный из части членов сходящегося ряда с положительными членами, будет сам сходящимся.

79. Представление функций непрерывного действительного переменного с помощью пределов. В предыдущих пунктах мы часто рассматривали пределы типа

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

и такие ряды как

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots = \lim_{n \to \infty} \{u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)\},$$

в которых функции от n, пределы которых мы ищем, содержат кроме n еще другое переменное x. В таких случаях предел является, конечно, функцией от x. Так, в п. 75 мы встретились с функцией

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1);$$

сумма геометрической прогрессии $1 + x + x^2 + \ldots$ также является функцией от x, а именно, функцией, которая равна $\frac{1}{1-x}$, если $-1 < x < 1$, и не определена для остальных значений x, Многие из рассмотренных в гл. II функций, которые на первый взгляд представляются весьма „неестественными“, имеют очень простое представление рассматриваемого типа, как читатель увидит из следующих примеров.

Примеры XXXI. 1. $\varphi_n(x)=x$. Здесь n вовсе не входит в выражение для $\varphi_n(x)$, и $\varphi(x)=\lim\varphi_n(x)=x$ для всех значений x.

2. $\varphi_n(x)=\dfrac{x}{n}$. Здесь $\varphi(x)=\lim\varphi_n(x)=0$ для всех значений x.

3. $\varphi_n(x)=nx$. Если $x>0$, то $\varphi_n(x)\to+\infty$; если $x<0$, то $\varphi_n(x)\to-\infty$. Только когда $x=0$, $\varphi_n(x)$ имеет конечный предел, а именно, 0, при $n\to\infty$. Таким образом, $\varphi(x)=0$ при $x=0$ и не определена ни для каких других значений x.

4. $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{nx},\ \dfrac{nx}{nx+1}$.

5. $\varphi_n(x)=x^n$. Здесь $\varphi(x)=0$ $(-1<x<1)$; $\varphi(x)=1$ $(x=1)$; $\varphi(x)$ не определена ни для каких других значений x.

6. $\varphi_n(x)=x^n(1-x)$. Здесь $\varphi(x)$ отличается от $\varphi(x)$ примера 5 только тем, что она имеет значение 0 при $x=1$.

7. $\varphi_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$. Здесь $\varphi(x)$ отличается от $\varphi(x)$ примера 6 только тем, что она имеет значение 0 как при $x=1$, так и при $x=-1$.

8. $\varphi_n(x)=\dfrac{x^n}{x^n+1}$. [$\varphi(x)=0$ $(-1<x<1)$; $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}$ $(x=1)$; $\varphi(x)=1$ $(x<-1$ или $x>1)$; и $\varphi(x)$ не определена при $x=-1$.]

9. $\varphi_n(x)=\dfrac{x^n}{x^n-1},\ \dfrac{1}{x^n+1},\ \dfrac{1}{x^n-1},\ \dfrac{1}{x^n+x^{-n}},\ \dfrac{1}{x^n-x^{-n}}$.

10. Доказать, что если $x>0$, то функция $\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$ стремится к пределу при $n\to\infty$ и что предел имеет три различных значения в следующих трех случаях: $x<1$, $x=1$ и $x>1$. (*Экз.* 1935 г.)

Рассмотреть также функции

$$\frac{nx^n-1}{nx^n+1},\ \frac{x^n-n}{x^n+n}.$$

11. Построить пример, в котором $\varphi(x)=1$ $(|x|>1)$, $\varphi(x)=-1$ $(|x|<1)$ и $\varphi(x)=0$ $(x=1$ и $x=-1)$.

12. $\varphi_n(x)=x\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)^2,\ \dfrac{n}{x^n+x^{-n}+n}$.

13. $\varphi_n(x)=\dfrac{x^nf(x)+g(x)}{x^n+1}$.

[Здесь $\varphi(x)=f(x)$ $(|x|>1)$; $\varphi(x)=g(x)$ $(|x|<1)$; $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}$ $(x=1)$, и $\varphi(x)$ не определена при $x=-1$.]

14. $\varphi_n(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(nx)$. [$\varphi(x)=1$ $(x>0)$; $\varphi(x)=0$ $(x=0)$; $\varphi(x)=-1$ $(x<0)$, Эта функция играет важную роль в теории чисел и обычно обозначается символом $\operatorname{sign} x$.]

15. $\varphi_n(x)=\sin n\pi x$. [$\varphi(x)=0$, если x — целое число; $\varphi(x)$ не определена для остальных значений x (см. пример XXIV. 7).]

16. Если $\varphi_n(x)=\sin n!\,x\pi$, то $\varphi(x)=0$ для всех рациональных значений x (см. пример XXIV. 13). [Рассмотрение иррациональных значений x представляет бо́льшие трудности.]

17. $\varphi_n(x) = (\cos^2 x\pi)^n$. [$\varphi(x) = 0$, за исключением того случая, когда x целочисленно, а в этом случае $\varphi(x) = 1$.]

18. Если $N \geqslant 1\,753$, то число дней в N-ом году н. э. равно

$$\lim\left\{365 + \left(\cos^2 \frac{1}{4} N\pi\right)^n - \left(\cos^2 \frac{1}{100} N\pi\right)^n + \left(\cos^2 \frac{1}{400} N\pi\right)^n\right\}.$$

80. Грани ограниченной совокупности. Пусть S — любая система или совокупность действительных чисел s. Если существует такое число K, что $s \leqslant K$ для каждого s из S, то мы будем говорить, что S *ограничена сверху*. Если существует такое число k, что $s \geqslant k$ для каждого s, то мы будем говорить, что S *ограничена снизу*. Если S ограничена сверху и снизу, то мы будем просто говорить, что S *ограничена*.

Предположим сначала, что S ограничена сверху (но не обязательно снизу). Тогда существует бесконечно много чисел, обладающих свойством числа K; например, все числа, бóльшие K, наверно, обладают этим свойством. Мы докажем, что *среди этих чисел имеется наименьшее*[1]), которое мы обозначим через M. Ни одно число из S не превосходит этого числа M, но для каждого числа, меньшего M, в S найдется, по крайней мере, одно число, которое его превосходит.

Разобьем действительные числа ξ на два класса L и R, относя ξ к L или к R, в зависимости от того, найдется ли в S число, превосходящее его, или нет. Тогда каждое ξ будет принадлежать одному и только одному из классов L и R. Каждый класс существует, так как любое число, меньшее какого-либо члена S, принадлежит к L, тогда как K принадлежит к R. Наконец, каждое число из L меньше одного из членов S и, следовательно, меньше любого числа из R. Таким образом, все три условия теоремы Дедекинда (см. п. 17) выполнены, и существует число M, разделяющее эти классы.

Это число M и является тем числом, существование которого мы должны были доказать. Прежде всего, ни один член S не превосходит M, так как если бы такое s из S существовало, то мы могли бы положить $s = M + \eta$, где η положительно, и тогда число $M + \frac{1}{2}\eta$ принадлежало бы к L, в силу того, что оно меньше s, и принадлежало бы к R, в силу того, что оно больше M; но это невозможно. С другой стороны, любое число меньшее M, принадлежит к L, и поэтому в S найдется, по крайней мере, один член, превосходящий его. Таким образом, M действительно обладает всеми требуемыми свойствами.

Это число M мы называем *точной верхней гранью* S, и можем теперь сформулировать следующую теорему. *Любая ограниченная сверху совокупность S имеет точную верхнюю грань M. Никакое число из S не превосходит M; но для любого числа, меньшего M, можно найти такое число из S, которое его превосходит.*

Точно таким же образом мы можем доказать соответствующую теорему для совокупности, ограниченной снизу (но не обязательно сверху). *Любая ограниченная снизу совокупность S* имеет точную *нижнюю грань m. Никакое число из S не меньше чем m; но для любого числа, большего m, можно найти такое число из S, которое меньше его.*

Следует отметить, что если S ограничено сверху, то $M \leqslant K$, а если S ограничено снизу, то $m \geqslant k$. Если S ограничено, то $k \leqslant m \leqslant M \leqslant K$.

---

[1]) Бесконечная совокупность чисел может не содержать наименьшего члена. Например, совокупность, состоящая из чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

не имеет наименьшего члена.

81. Грани ограниченной функции. Пусть $\varphi(n)$ — функция положительного целочисленного переменного n. Совокупность всех значений $\varphi(n)$ определяет множество S, к которому применимы рассуждения п. 80. Если S ограничено сверху, или ограничено снизу, или ограничено, то мы соответственно говорим, что $\varphi(n)$ ограничена сверху или ограничена снизу, или ограничена. Если $\varphi(n)$ ограничена сверху, т. е. если существует такое число K, что $\varphi(n) \leqslant K$ для всех значений n, то существует число M, обладающее следующими свойствами:

(1) $\varphi(n) \leqslant M$ *для всех значений* n;

(2) *если* δ — *любое положительное число, то* $\varphi(n) > M - \delta$ *по крайней мере для одного значения* n.

Это число M мы называем *точной верхней гранью* $\varphi(n)$. Аналогично, если $\varphi(n)$ ограничена снизу, т. е. если существует такое число k, что $\varphi(n) \geqslant k$ всех значений n, то существует число m, обладающее следующими свойствами:

(1) $\varphi(n) \geqslant m$ *для всех значений* n;

(2) *если* δ — *любое положительное число, то* $\varphi(n) < m + \delta$ *по крайней мере для одного значения* n.

Это число m мы называем *точной нижней гранью* $\varphi(n)$.

Если K существует, то $M \leqslant K$; если k существует, то $m \geqslant k$; если k и K существуют, то

$$k \leqslant m \leqslant M \leqslant K.$$

82. Верхний и нижний пределы ограниченной функции. Предположим, что $\varphi(n)$ — ограниченная функция, и что M и m — ее точные верхняя и нижняя грани. Возьмем любое действительное число ξ и рассмотрим, какие неравенства могут иметь место между ξ и значениями, принимаемыми $\varphi(n)$ при *больших* n. Мы имеем здесь следующие три взаимно исключающих друг друга возможности:

(1) $\xi \geqslant \varphi(n)$ для всех достаточно больших значений n;

(2) $\xi \leqslant \varphi(n)$ для всех достаточно больших значений n;

(3) $\xi < \varphi(n)$ для бесконечно многих значений n и $\xi > \varphi(n)$ также для бесконечно многих значений n.

В случае (1) мы будем называть ξ *верхним числом*, в случае (2) — *нижним числом*, а в случае (3) — *промежуточным числом*. Ясно, что никакое верхнее число не может быть меньше m и что никакое нижнее число не может быть больше M.

Рассмотрим совокупность всех верхних чисел. Она ограничена снизу, так как ни один из ее членов не меньше m, и поэтому имеет точную нижнюю грань, которую мы обозначим через Λ. Аналогично, совокупность всех нижних чисел имеет точную верхнюю грань, которую мы обозначим через λ.

Числа Λ и λ называются, соответственно, *верхним и нижним пределом* $\varphi(n)$ *при* n *стремящемся к бесконечности*; мы будем также писать:

$$\Lambda = \overline{\lim}\, \varphi(n), \quad \lambda = \underline{\lim}\, \varphi(n).$$

Эти числа обладают следующими свойствами:

(1) $$m \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant M;$$

(2) Λ и λ являются, соответственно, точными верхней и нижней гранями совокупности промежуточных чисел, если таковые существуют;

(3) если δ — любое положительное число, то $\varphi(n) < \Lambda + \delta$ для всех достаточно больших значений n и $\varphi(n) > \Lambda - \delta$ для бесконечной совокупности значений n;

(4) аналогично, $\varphi(n) > \lambda - \delta$ для всех достаточно больших значений n и $\varphi(n) < \lambda + \delta$ для бесконечной совокупности значений n;

(5) необходимым и достаточным условием для того чтобы $\varphi(n)$ стремилась к пределу, является равенство $\Lambda=\lambda$, и если это условие выполнено, то общее значение l чисел Λ и λ и является пределом $\varphi(n)$.

Из этих свойств (1) является непосредственным следствием определений; (2) мы можем доказать следующим образом. Если $\Lambda=\lambda=l$, то существует не более одного промежуточного числа, а именно, l, и доказывать нечего. Допустим, поэтому, что $\Lambda>\lambda$. Любое промежуточное число ξ меньше любого верхнего и больше любого нижнего числа, так что $\lambda\leqslant\xi\leqslant\Lambda$. Но если $\lambda<\xi<\Lambda$, то ξ, очевидно, должно быть промежуточным числом, так как оно не может быть ни верхним, ни нижним. Следовательно, промежуточные числа найдутся как угодно близко и к λ и к Λ.

Для доказательства свойства (3) заметим, что $\Lambda+\delta$ является верхним, а $\Lambda-\delta$ — промежуточным или нижним числом. Утверждение является теперь непосредственным следствием определений; доказательство (4) проводится аналогично.

Наконец, докажем (5). Если $\Lambda=\lambda=l$, то

$$l-\delta<\varphi(n)<l+\delta$$

для любого положительного значения δ и всех достаточно больших значений n, так что $\varphi(n)\to l$. Обратно, если $\varphi(n)\to l$, то написанные выше неравенства имеют место для всех достаточно больших значений n. Следовательно, $l-\delta$ является нижним, а $l+\delta$ — верхним числом, так что

$$\lambda\geqslant l-\delta,\quad \Lambda\leqslant l+\delta,$$

откуда $\Lambda-\lambda\leqslant 2\delta$. Но так как $\Lambda-\lambda\geqslant 0$, то это возможно только в том случае, когда $\Lambda=\lambda$.

Примеры XXXII. 1. Ни Λ, ни λ не изменяются при изменении любого конечного числа значений $\varphi(n)$.

2. Если $\varphi(n)=a$ для всех значений n, то $m=\lambda=\Lambda=M=a$.

3. Если $\varphi(n)=\dfrac{1}{n}$, то $m=\lambda=\Lambda=0$ и $M=1$.

4. Если $\varphi(n)=(-1)^n$, то $m=\lambda=-1$ и $\Lambda=M=1$.

5. Если $\varphi(n)=(-1)^n\dfrac{1}{n}$, то $m=-1$, $\lambda=\Lambda=0$, $M=\dfrac{1}{2}$.

6. Если $\varphi(n)=(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, то $m=-2$, $\lambda=-1$, $\Lambda=1$, $M=\dfrac{3}{2}$.

7. Пусть $\varphi(n)=\sin n\theta\pi$, где $\theta>0$. Если θ — целое число, то

$$m=\lambda=\Lambda=M=0.$$

Если θ — рациональное, но нецелое число, то возникает целый ряд случаев. Предположим, например, что $\theta=\dfrac{p}{q}$, где p и q положительны, нечетны и взаимно просты, причем $q>1$. Тогда $\varphi(n)$ принимает в циклическом порядке значения

$$\sin\frac{p\pi}{q},\ \sin\frac{2p\pi}{q},\ \ldots,\ \sin\frac{(2q-1)p\pi}{q},\ \sin\frac{2qp\pi}{q},\ \ldots.$$

Нетрудно видеть, что наибольшим и наименьшим из этих значений являются $\cos\dfrac{\pi}{2q}$ и $-\cos\dfrac{\pi}{2q}$, так что

$$m=\lambda=-\cos\frac{\pi}{2q},\quad \Lambda=M=\cos\frac{\pi}{2q}.$$

Читатель может аналогично разобрать случаи, когда p и q не оба нечетны;

Случай иррационального θ более сложен. Можно показать, что в этом случае $m = \lambda = -1$ и $\Lambda = M = 1$. Можно также показать, что значения $\varphi(n)$ так распределены в интервале $(-1, 1)$, что если ξ — *любое* число из этого интервала, то существует последовательность $n_1, n_2, \ldots$ такая, что $\varphi(n_k) \to \xi$ при $k \to \infty$ [1]).

Подобные же результаты получаются и в случае, когда $\varphi(n)$ является дробной частью $n\theta$.

83. Общий принцип сходимости для ограниченной функции. Результаты предыдущих пунктов позволят нам доказать одно очень важное необходимое и достаточное условие для того, чтобы ограниченная функция $\varphi(n)$ стремилась к пределу. Это условие обычно называют *общим принципом сходимости к пределу.*

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы ограниченная функция $\varphi(n)$ стремилась к пределу, является существование такого числа $n_0(\delta)$, что для любого заданного положительного δ неравенство*

$$|\varphi(n_2) - \varphi(n_1)| < \delta$$

выполняется для всех значений n_1 и n_2 таких, что

$$n_2 > n_1 \geqslant n_0(\delta).$$

Во-первых, условие *необходимо.* Ибо если $\varphi(n) \to l$, то мы можем найти такое n_0, что

$$l - \frac{1}{2}\delta < \varphi(n) < l + \frac{1}{2}\delta$$

для $n \geqslant n_0$, и, таким образом,

$$|\varphi(n_2) - \varphi(n_1)| < \delta,$$

если $n_1 \geqslant n_0$ и $n_2 \geqslant n_0$.

Во-вторых, условие *достаточно.* Для доказательства достаточно только показать, что из этого условия следует $\lambda = \Lambda$. Но если $\lambda < \Lambda$, то существует, как бы мало ни было δ, бесконечно много значений n, для которых $\varphi(n) < \lambda + \delta$, и бесконечно много значений n, для которых $\varphi(n) > \Lambda - \delta$; поэтому мы можем найти такие значения n_1 и n_2, каждое больше любого заданного числа n_0, что

$$\varphi(n_2) - \varphi(n_1) > \Lambda - \lambda - 2\delta,$$

что больше $\frac{1}{2}(\Lambda - \lambda)$, если δ достаточно мало. Это же, очевидно, противоречит неравенству (1). Следовательно, $\lambda = \Lambda$, и $\varphi(n)$ стремится к пределу.

84. Неограниченные функции. До сих пор мы рассматривали только ограниченные функции; но общий принцип сходимости

---

[1]) Несколько простых доказательств этого результата читатель найдет в следующей работе: Hardy and Littlewood, „Some problems of Diophantine approximation“, *Acta mathematica*, vol. XXXVII.

остается в силе и для неограниченных функций, так что слово „ограниченная" может быть опущено в формулировке теоремы 1.

Во-первых, если $\varphi(n)$ стремится к пределу l, то она заведомо ограничена, так как для всех, кроме конечного числа, значений n ее значения заключены между $l-\delta$ и $l+\delta$.

Во-вторых, если условие теоремы 1 выполняется, то мы имеем:

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta,$$

коль скоро $n_2 \geqslant n_0$ и $n_1 \geqslant n_0$. Зафиксируем какое-либо значение n_1, большее n_0. Тогда

$$\varphi(n_1)-\delta<\varphi(n_2)<\varphi(n_1)+\delta$$

для $n_2 \geqslant n_0$. Следовательно, $\varphi(n)$ ограничена, и применимо доказательство достаточности условия из предыдущего пункта.

Важность общего принципа сходимости вряд ли может быть переоценена. Как и теоремы п. 69, он дает нам возможность определить, стремится ли функция $\varphi(n)$ к пределу или нет, не делая никаких предположений относительно возможного значения этого предела; вместе с тем, он не содержит тех ограничительных предположений, которые являются неотъемлемой частью таких специальных теорем, как теоремы п. 69. Но в элементарных рассмотрениях, как правило, можно обойтись без него и ограничиться только этими специальными теоремами. Читатель увидит, что, несмотря на важность этого принципа, мы фактически не применяем его в дальнейших главах этой книги[1]. Заметим только, что если положить

$$\varphi(n)=s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

то мы тотчас же получим необходимое и достаточное условие сходимости бесконечного ряда, а именно[*]:

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием сходимости ряда* $u_1+u_2+\ldots$ *является существование такого числа* n_0, *что для любого заданного положительного числа* δ *неравенство*

$$|u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\ldots+u_{n_2}|<\delta$$

выполняется для всех значений n_1 *и* n_2 *таких, что*

$$n_2>n_1 \geqslant n_0.$$

85. Пределы комплексных функций и рядов с комплексными членами. В настоящей главе мы до сих пор рассматривали только действительные функции от n и ряды с действительными членами. Однако не представляет труда распространить наши понятия и

---

[1]) Несколько доказательств из гл. VIII упрощаются в результате применения общего принципа.

[*]) Так называемое необходимое и достаточное условие Коши. (*Прим. перев.*)

определения и на тот случай, когда значения функции или члены ряда — комплексные числа.

Допустим, что $\varphi(n)$ комплексна и равна

$$\rho(n)+i\sigma(n),$$

где $\rho(n)$, $\sigma(n)$ — действительные функции от n. Тогда *если* $\rho(n)$ *и* $\sigma(n)$ ***стремятся, соответственно, к пределам*** r *и* s *при* $n\to\infty$, *то мы будем говорить, что* $\varphi(n)$ *стремится к пределу* $l=r+is$, и писать

$$\lim\varphi(n)=l.$$

Аналогично, если u_n — комплексные числа, равные v_n+iw_n, то мы будем говорить, что *ряд*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

сходится и имеет сумму $l=r+is$, *если ряды*

$$v_1+v_2+v_3+\ldots,\quad w_1+w_2+w_3+\ldots$$

сходятся и имеют, соответственно, суммы r *и* s.

Утверждение, что $u_1+u_2+u_3+\ldots$ сходится и имеет сумму l, эквивалентно, конечно, утверждению, что сумма

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=(v_1+v_2+\ldots+v_n)+$$
$$+i(w_1+w_2+\ldots+w_n)$$

сходится к пределу l при $n\to\infty$.

В случае действительных функций и рядов мы определили также *расходящиеся* и *ограниченно* и *неограниченно колеблющиеся* функции и ряды. Но при исследовании комплексных функций и рядов, где мы должны одновременно рассматривать поведение $\rho(n)$ и $\sigma(n)$, число случаев настолько велико, что не имеет смысла их перечислять. Когда нам понадобятся более подробные рассмотрения этого типа, мы будем просто в отдельности изучать действительную и мнимую части.

86. Читатель без труда докажет приведенные ниже теоремы, которые являются очевидными обобщениями теорем, уже доказанных нами в случае действительных функций и рядов.

(1) Если $\lim\varphi(n)=l$, то $\lim\varphi(n+p)=l$ для любого фиксированного значения p.

(2) Если ряд $u_1+u_2+\ldots$ сходится и имеет сумму l, то $a+b+c+\ldots+k+u_1+u_2+\ldots$ также сходится и имеет сумму $a+b+c+\ldots+k+l$ и $u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots$ также сходится и имеет сумму $l-u_1-u_2-\ldots-u_p$.

(3) Если $\lim\varphi(n)=l$ и $\lim\psi(n)=m$, то

$$\lim\{\varphi(n)+\psi(n)\}=l+m.$$

(4) Если $\lim \varphi(n) = l$, то $\lim k\varphi(n) = kl$.

(5) Если $\lim \varphi(n) = l$ и $\lim \psi(n) = m$, то $\lim \varphi(n)\psi(n) = lm$.

(6) Если $u_1 + u_2 + \ldots$ сходится к сумме l и $v_1 + v_2 + \ldots$ сходится к сумме m, то $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots$ сходится к сумме $l + m$.

(7) Если $u_1 + u_2 + \ldots$ сходится к сумме l, то $ku_1 + ku_2 + \ldots$ сходится к сумме kl.

(8) Если $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится, то $\lim u_n = 0$.

(9) Если $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится, то будет сходиться и любой ряд, составленный из данного объединением в скобки его членов, и суммы всех таких рядов будут равны сумме исходного ряда.

В качестве примера докажем теорему (5). Пусть

$$\varphi(n) = \rho(n) + i\sigma(n), \quad \psi(n) = \rho'(n) + i\sigma'(n), \quad l = r + is, \quad m = r' + is';$$

тогда

$$\rho(n) \to r, \quad \sigma(n) \to s, \quad \rho'(n) \to r', \quad \sigma'(n) \to s'.$$

Но

$$\varphi(n)\psi(n) = \rho\rho' - \sigma\sigma' + i'(\rho\sigma' + \rho'\sigma),$$

и

$$\rho\rho' - \sigma\sigma' \to rr' - ss', \quad \rho\sigma' + \rho'\sigma \to rs' + r's,$$

так что

$$\varphi(n)\psi(n) \to rr' - ss' + i(rs' + r's),$$

т. е.

$$\varphi(n)\psi(n) \to (r + is)(r' + is') = lm.$$

Следующие теоремы имеют несколько иной характер.

(10) *Для того чтобы* $\varphi(n) = \rho(n) + i\sigma(n)$ *сходилась к нулю при* $n \to \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\varphi(n)| = \sqrt{\{\rho(n)\}^2 + \{\sigma(n)\}^2}$$

сходилась к нулю.

Если $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ обе сходятся к нулю, то очевидно, что и $\sqrt{\rho^2 + \sigma^2}$ сходится к нулю. Обратное предложение следует из того, что $|\rho|$ и $|\sigma|$ не могут превосходить $\sqrt{\rho^2 + \sigma^2}$.

(11) *Вообще, для того чтобы* $\varphi(n)$ *сходилась к пределу* l, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\varphi(n) - l|$$

сходилась к нулю.

Ибо тогда $\varphi(n) - l$ сходится к нулю, и мы можем применить теорему (10).

(12) *Теоремы* 1 *и* 2 *пп.* 83 *и* 84 *остаются в силе и для комплексных* $\varphi(n)$ *и* u_n.

Мы должны показать, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\varphi(n)$ стремилась к пределу l, является выполнение неравенства

$$|\varphi(n_2) - \varphi(n_1)| < \delta$$

для $n_2 > n_1 \geqslant n_0$.

Если $\varphi(n)\to l$, то $\rho(n)\to r$ и $\sigma(n)\to s$, и мы можем найти числа n_0' и n_0'', зависящие от δ, и такие, что

$$|\rho(n_2)-\rho(n_1)|<\frac{1}{2}\delta, \quad |\sigma(n_2)-\sigma(n_1)|<\frac{1}{2}\delta,$$

причем первое неравенство имеет место, когда $n_2>n_1\geqslant n_0'$, а второе, — когда $n_2>n_1\geqslant n_0''$. Следовательно,

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|\leqslant|\rho(n_2)-\rho(n_1)|+|\sigma(n_2)-\sigma(n_1)|<\delta,$$

когда $n_2>n_1\geqslant n_0$, где n_0 — большее из чисел n_0' и n_0''. Таким образом, условие (I) *необходимо*. Для доказательства его *достаточности* мы должны только заметить, что

$$|\rho(n_2)-\rho(n_1)|\leqslant|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta$$

при $n_2>n_1\geqslant n_0$. Следовательно, $\rho(n)$ стремится к пределу, и таким же путем мы убедимся, что $\sigma(n)$ стремится к пределу.

87. Предел z^n при $n\to\infty$, где z — любое комплексное число. Рассмотрим важный случай, когда $\varphi(n)=z^n$. Этот вопрос уже рассматривался нами для действительных значений z в п. 72.

Если $z^n\to l$, то $z^{n+1}\to l$ (по (1) п. 86). Но (по (4) п. 86)

$$z^{n+1}=zz^n\to zl,$$

и, следовательно, $l=zl$, что возможно только, если (a) $l=0$ или (b) $z=1$. Если $z=1$, то $\lim z^n=1$. За исключением этого частного случая, предел, если он существует, должен быть равен 0.

Но если $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, где r положительно, то

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),$$

так что $|z^n|=r^n$. Следовательно, $|z^n|$ стремится к 0 в том и только в том случае, когда $r<1$, и из (10) п. 86 следует, что

$$\lim z^n=0$$

тогда и только тогда, когда $r<1$. Ни в каких других случаях z^n не стремится к пределу, не считая рассмотренного уже случая $z=1$.

88. Геометрическая прогрессия $1+z+z^2+\dots$ с комплексным z. Так как

$$s_n=1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z},$$

кроме того случая, когда $z=1$ и $s_n=n$, мы получаем, что *ряд* $1+z+z^2+\dots$ *сходится тогда и только тогда, когда* $|z|<1$. *Сумма этого ряда в случае его сходимости равна* $\frac{1}{1-z}$.

Таким образом, если $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=z\operatorname{Cis}\theta$ и $r<1$, то мы имеем

$$1+z+z^2+\dots=\frac{1}{1-r\operatorname{Cis}\theta}$$

или

$$1+r\operatorname{Cis}\theta+r^2\operatorname{Cis}2\theta+\ldots=\frac{1}{1-r\operatorname{Cis}\theta}=\frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Отделяя действительную и мнимую части, мы получаем:

$$1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+\ldots=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

$$r\sin\theta+r^2\sin 2\theta+\ldots=\frac{r\sin\theta}{1-2\cos\theta+r^2},$$

при условии, что $r<1$. Если мы заменим θ на $\theta+\pi$, то увидим, что эти результаты остаются в силе и для отрицательных значений r, по модулю меньших чем 1. Итак, они справедливы для $-1<r<1$.

Примеры XXXIII. 1. Доказать непосредственно, что $\varphi(n)=r^n\cos n\theta$ сходится к 0, когда $r<1$, и к 1, когда $r=1$ и θ равно целому кратному 2π. Доказать, далее, что если $r=1$ и θ не кратно 2π, то $\varphi(n)$ ограниченно колеблется; что если $r>1$ и θ кратно 2π, то $\varphi(n)\to+\infty$, а если $r>1$ и θ не кратно 2π, то $\varphi(n)$ неограниченно колеблется.

2. Установить соответствующие результаты для $\varphi(n)=r^n\sin n\theta$.

3. Доказать, что

$$z^m+z^{m+1}+\ldots=\frac{z^m}{1-z},$$

$$z^m+2z^{m+1}+2z^{m+2}+\ldots=z^m\frac{1+z}{1-z}$$

тогда и только тогда, когда $|z|<1$. Какие из теорем п. 86 применяются при доказательстве?

4. Доказать, что если $-1<r<1$, то

$$1+2r\cos\theta+2r^2\cos 2\theta+\ldots=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

5. Ряд

$$1+\frac{z}{1+z}+\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\ldots$$

сходится к сумме $\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{z+1}}=1+z$, если $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|<1$. Показать, что это условие эквивалентно тому, что действительная часть z больше $-\dfrac{1}{2}$.

89. Символы O, o, $\sim$. В заключение этой главы мы приведем несколько определений, которые нам понадобятся лишь позже, но логически место которых здесь.

Пусть $f(n)$ и $\varphi(n)$ — две функции от n, определенные для всех достаточно больших значений n, скажем для $n\geqslant n_0$; пусть, далее, $\varphi(n)$ положительна и монотонно возрастает или убывает при возрастании n, так что $\varphi(n)$ стремится либо к нулю, либо к положительному пределу, либо к бесконечности, когда $n\to\infty$. В большинстве случаев $\varphi(n)$ будет какой-либо простой функцией, как, например, $\frac{1}{n}$ 1, n. В этих условиях мы вводим следующие определения.

(1) *Если существует такая постоянная K, что*

$$|f| \leqslant K\varphi$$

для всех $n \geqslant n_0$, то мы пишем

$$f = O(\varphi).$$

(2) *Если*

$$\frac{f}{\varphi} \to 0$$

при $n \to \infty$, то мы пишем

$$f = o(\varphi).$$

(3) *Если*

$$\frac{f}{\varphi} \to l,$$

где $l \neq 0$, то мы пишем

$$f \sim l\varphi$$

и говорим: f эквивалентно φ.

В частности,

$$f = O(1)$$

означает, что f ограничена (так что она либо стремится к конечному пределу, либо ограниченно колеблется), и

$$f = o(1)$$

означает, что $f \to 0$.

Например,

$$n = O(n^2), \quad 100n^2 + 1\,000n = O(n^2), \quad \sin n\theta\pi = O(1),$$

$$n = o(n^2), \quad 100n^2 + 1\,000n = o(n^3), \quad \sin n\theta\pi = o(n),$$

$$n + 1 \sim n, \quad 100n^2 + 1\,000n \sim 100n^2, \quad n + \sin n\theta\pi \sim n$$

$$\frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q} \sim \frac{a_0}{b^0} n^{p-q},$$

если $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Добавим одно замечание, предостерегающее против возможного недоразумения. Когда пишут „$f = O(\varphi)$“, то имеют в виду утверждение, которое часто выражают так: „порядок величины f не выше порядка величины φ“, которое вполне допускает, что порядок f ниже порядка φ (как в первом из приведенных выше примеров).

Пока мы определили только такие соотношения, как „$f(n) = O(1)$“, или „$f(n) = o(n)$“, но не определили в отдельности символов „$O(1)$“, или „$o(n)$“. Мы можем, однако, сделать наши определения более гибкими. Мы можем договориться о том, что $O(\varphi)$ или $o(\varphi)$ будут обозначать *некоторые неопределенные f такие, что* $f=O(\varphi)$ *или* $f=o(\varphi)$; и мы сможем тогда, например, записать, что

$$O(1)+O(1)=O(1)=o(n),$$

и понимать под этим, что „если $f=O(1)$ и $g=O(1)$, то $f+g=O(1)$ и тем более $f+g=o(n)$“. Или же мы сможем написать, что

$$\sum_{r=1}^{n} O(1)=O(n),$$

понимая под этим, что сумма n членов, каждый из которых по абсолютной величине меньше некоторой постоянной, не превосходит постоянного кратного n.

Читатель заметит, что формулы, содержащие O и o, вообще говоря, необратимы. Так, „ $o(1)=O(1)$“, т. е. „если $f=o(1)$, то $f=O(1)$“ — верное утверждение, тогда как „$O(1)=o(1)$“ — неверно.

Легко сформулировать несколько общих свойств наших символов, как, например,

(1) $O(\varphi)+O(\psi)=O(\varphi+\psi)$,

(2) $O(\varphi)\,O(\psi)=O(\varphi\psi)$,

(3) $O(\varphi)\,o(\psi)=o(\varphi\psi)$,

(4) если $f\sim\varphi$, то $f+o(\varphi)\sim\varphi$.

Такие теоремы являются непосредственными следствиями из определений.

Полезность этих определений и соответствующих им определений для функций от непрерывного переменного станет ясной читателю в дальнейших главах.

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ IV

1. Функция $\varphi(n)$ принимает значения 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ..., когда $n=0, 1, 2, \ldots$. Найти выражение для $\varphi(n)$ в виде формулы, не содержащей тригонометрических функций.

$$\left[\varphi(n)=\frac{1}{4}\{1+(-1)^n+i^n+(-i)^n\}.\right]$$

2. Если $\varphi(n)$ монотонно возрастает, а $\psi(n)$ монотонно убывает при n стремящемся к ∞, и если $\psi(n)>\varphi(n)$ для всех значений n, то $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ обе стремятся к пределам, и $\lim\varphi(n)\leqslant\lim\psi(n)$. [Это — непосредственное следствие из результатов п. 69.]

3. Доказать, что если

$$\varphi(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad \psi(n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

то $\varphi(n+1)>\varphi(n)$ и $\psi(n+1)<\psi(n)$. [Первый результат был уже доказан в п. 73.]

4. Доказать также, что $\psi(n)>\varphi(n)$ для всех значений n, и вывести (используя предыдущие примеры), что $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ обе стремятся к пределам при $n\to\infty$[1]).

[1]) В гл. IX мы докажем, что $\lim\{\psi(n)-\varphi(n)\}=0$ и что, следовательно, каждая из этих функций стремится к пределу e.

5. Обозначим среднее арифметическое произведений всех различных пар положительных целых чисел с суммой n через S_n. Показать, что

$$\lim \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

(*Экз.* 1903 г.)

6. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны, $\sum x_r = n$, не все x_r равны 1, а m рационально и больше 1, то $\sum x_r^m > n$.

(*Экз.* 1934 г.)

[Использовать неравенство $x^m - 1 > m(x-1)$, справедливое для всех положительных, отличных от 1, x (п. 74).]

7. Если $\varphi(n)$ — положительное целое число для всех значений n и стремится к ∞ вместе с n, то $x^{\varphi(n)}$ стремится к нулю, если $0<x<1$, и к $+\infty$, если $x>1$. Исследовать поведение $x^{\varphi(n)}$ при $n \to \infty$ для других значений x.

8[1]. Если a_n монотонно возрастает или убывает с возрастающим n, то так же ведет себя и

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

9. Функция $f(x)$ возрастает и непрерывна (см. гл. V) для всех значений x и последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ определена соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$. Исследовать графически вопрос о стремлении x_n к корню уравнения $x = f(x)$. Рассмотреть, в частности, случай, в котором это уравнение имеет только один корень, различая случаи, когда кривая $y = f(x)$ пересекает прямую $y = x$ сверху вниз и снизу вверх.

10. Если $x_{n+1} = \dfrac{k}{1+x_n}$, где k и x_1 положительны, то из последовательностей $x_1, x_3, x_5, \ldots$ и $x_2, x_4, x_6, \ldots$ одна возрастает, а другая убывает, причем каждая стремится к пределу α, являющемуся положительным корнем уравнения $x^2 + x = k$.

11. Если $x_{n+1} = \sqrt{k + x_n}$, где k и x_1 положительны, то последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — возрастающая или убывающая, в зависимости от того, будет x_1 меньше или больше α, положительного корня уравнения $x^2 = x + k$; и в каждом случае $x_n \to \alpha$ при $n \to \infty$.

12. Последовательность чисел x_n определена соотношениями

$$x_1 = h, \quad x_{n+1} = x_n^2 + k,$$

где $0 < k < \frac{1}{4}$ и h заключено между корнями a и b уравнения

$$x^2 - x + k = 0.$$

Доказать, что

$$a < x_{n+1} < x_n < b$$

и определить предел x_n.

(*Экз.* 1931 г.)

13. Доказать, что если

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{x + \frac{A}{x}\right\}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\left\{x_1 + \frac{A}{x_1}\right\}$$

и т. д., где x и A положительны, то $\lim x_n = \sqrt{A}$.

$\left[\text{Можно показать, что } \dfrac{x_n - \sqrt{A}}{x_n + \sqrt{A}} = \left(\dfrac{x - \sqrt{A}}{x + \sqrt{A}}\right)^{2^n}.\right]$

---

[1]) Примеры 8—11 взяты из книги Bromwich, *Infinite series*.

14. Последовательность u_n определена соотношениями

$$u_1 = \alpha + \beta, \quad u_n = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{u_{n-1}} \quad (n > 1),$$

где $\alpha > \beta > 0$. Показать, что

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n},$$

и определить предел u_n при $n \to \infty$.

Исследовать случай $\alpha = \beta > 0$.

(*Экз.* 1933 г.)

15. Если x_1, x_2 положительны и

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}),$$

то из последовательностей $x_1, x_3, x_5, \ldots$ и $x_2, x_4, x_6, \ldots$ одна убывает, а другая возрастает, и обе они стремятся к общему пределу $\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2)$.

16. Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = l$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = l.$$

[Пусть $s_n = l + t_n$. Тогда мы должны доказать, что $\dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}$ стремится к нулю, если t_n стремится к нулю.

Разобьем числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ на два множества: $t_1, t_2, \ldots, t_p$ и $t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_n$. Предположим, что p является функцией от n, которая стремится к ∞ при $n \to \infty$, но *медленнее* чем n, так что $p \to \infty$ и $\frac{p}{n} \to 0$. Например, мы можем взять в качестве p целую часть $\sqrt{n}$.

Пусть δ — любое положительное число. Как бы мало ни было δ, мы всегда можем найти такое n_0, что все числа $t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_n$ будут по модулю меньше чем $\frac{1}{2}\delta$, если $n \geqslant n_0$, и, следовательно,

$$\left|\frac{t_{p+1} + t_{p+2} + \ldots + t_n}{n}\right| < \frac{1}{2}\delta\frac{n-p}{n} < \frac{1}{2}\delta.$$

Но если A обозначает наибольший из модулей всех чисел $t_1, t_2, \ldots,$ то мы имеем:

$$\left|\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_p}{n}\right| < \frac{pA}{n},$$

и это также будет меньше чем $\frac{1}{2}\delta$ при $n \geqslant n_0$, если n_0 достаточно велико, так как $\frac{p}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\left|\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}\right| \leqslant \left|\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_p}{n}\right| + \left|\frac{t_{p+1} + t_{p+2} + \ldots + t_n}{n}\right| < \delta$$

при $n \geqslant n_0$, что и доказывает теорему.

Если читатель хочет добиться достаточно глубокого понимания вопросов, связанных с пределами, то он должен весьма тщательно продумать изложенное выше рассуждение. При доказательстве того, что предел некоторого выражения равен нулю, часто бывает необходимо разбить его на две части, стремление которых в отдельности к нулю должно доказываться разными путями. В таких случаях доказательство никогда не бывает очень простым.

Идея доказательства следующая: нам нужно доказать, что $\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}$ мало, когда n велико, причем нам дано, что t_n малы, когда их номер велик. Мы разбиваем сумму в числителе на две части. Слагаемые в первой части не все малы, но их число мало по сравнению с n. Число слагаемых во второй части не мало в сравнении с n, но сами слагаемые все малы, а так как их число во всяком случае меньше n, то их сумма мала по сравнению с n. Поэтому каждая из частей, на которые мы разбили $\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}$, мала, когда n велико.]

17. Если $\varphi(n)-\varphi(n-1)\to l$ при $n\to\infty$, то $\frac{\varphi(n)}{n}\to l$.

[Если $\varphi(n)=s_1+s_2+\ldots+s_n$, то $\varphi(n)-\varphi(n-1)=s_n$, и теорема сводится к теореме предыдущего примера.]

18. Если $s_n=\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$, так что s_n равно 1 или 0, в зависимости от того, нечетно n или четно, то

$$\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}\to\frac{1}{2} \text{ при } n\to\infty.$$

[Этот пример показывает, что теорема, обратная теореме примера 16, неверна, так как s_n колеблется при $n\to\infty$.]

19. Если c_n и s_n обозначают, соответственно, суммы первых n членов рядов

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots \text{ и } \sin\theta+\sin 2\theta+\ldots,$$

и θ не кратно 2π, то

$$\lim\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}=0,\quad \lim\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

20. Последовательность y_n определена с помощью последовательности x_n соотношениями

$$y_0=x_0,\quad y_n=x_n-ax_{n-1}\quad (n>0),$$

где $|a|<1$. Выразить x_n через y_n и доказать, что если $y_n\to l$, то $x_n\to\frac{l}{1-a}$.

(*Экз.* 1932 г.)

21. Начертить график функции y, определенной соотношением

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}\sin\frac{1}{2}\pi x+x^2}{x^{2n}+1}.$$

(*Экз.* 1901 г.)

22. Функция

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n\sin^2\pi x}$$

равна 0, если x отлично от целого числа, и равна 1, если x — целое число. Функция

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(x)+n\varphi(x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$$

равна $\varphi(x)$, если x не равно целому числу, и равна $\psi(x)$, если x — целое число.

23. Показать, что график функции

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n\varphi(x)+x^{-n}\psi(x)}{x^n+x^{-n}}$$

состоит из частей графиков $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и еще (как правило) двух изолированных точек. Определено ли y (a) при $x=1$, (b) при $x=-1$, (c) при $x=0$?

24. Доказать, что функция y, равная 0 для рациональных значений x и 1 для иррациональных значений x, может быть представлена в виде

$$y=\lim_{m\to\infty}\operatorname{sign}\{\sin^2(m!\pi x)\},$$

где

$$\operatorname{sign} x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(nx),$$

как в примере XXXI. 14. [Если x рационально, то $\sin^2(m!\pi x)$, а следовательно, и $\operatorname{sign}\{\sin^2(m!\pi x)\}$ равно нулю для всех значений m, начиная с некоторого; если x иррационально, то $\sin^2(m!\pi x)$ всегда положительно, и следовательно, $\operatorname{sign}\{\sin^2(m!\pi x)\}=1$.]

Доказать, что y может быть также представлено в виде

$$1-\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}].$$

25. Просуммировать ряды

$$\sum_1^\infty\frac{1}{\nu(\nu+1)},\quad\sum_1^\infty\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)}.$$

[Так как

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)}=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)}-\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}\right\},$$

мы имеем:

$$\sum_1^n\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)}=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{1\cdot2\ldots k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right\},$$

и, следовательно,

$$\sum_1^\infty\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)}=\frac{1}{k(k!)}.]$$

26. Если $|z|<|a|$, то

$$\frac{L}{z-a}=-\frac{L}{a}\left(1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\ldots\right),$$

а если $|z|>|a|$, то

$$\frac{L}{z-a}=\frac{L}{z}\left(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\ldots\right).$$

27. **Разложение** $\dfrac{Az+B}{az^2+2bz+c}$ **по степеням** z. Пусть α и β суть корни уравнения $az^2+2bz+c=0$, так что $az^2+2bz+c=a(z-\alpha)(z-\beta)$. Мы предполагаем, что A, B, a, b, c все действительны и что α и β не равны. Тогда нетрудно проверить, что

$$\frac{Az+B}{az^2+2bz+c}=\frac{1}{a(\alpha-\beta)}\left(\frac{A\alpha+B}{z-\alpha}-\frac{A\beta+B}{z-\beta}\right).$$

Следует различать два случая: $b^2>ac$ и $b^2<ac$.

(1) Если $b^2>ac$, то корни α, β действительны и различны. Если $|z|$ меньше $|\alpha|$ и $|\beta|$, то мы можем разложить $\frac{1}{z-\alpha}$ и $\frac{1}{z-\beta}$ по возрастающим степеням z (пример 26). Если $|z|$ больше чем $|\alpha|$ и $|\beta|$, то мы должны разлагать по убывающим степеням z. Если же $|z|$ заключен между $|\alpha|$ и $|\beta|$, то одна дробь должна быть разложена по возрастающим, а другая — по убывающим степеням z. Читателю предлагается записать соответствующие формулы. Если $|z|$ равен $|\alpha|$ или $|\beta|$, то разложение невозможно.

(2) Если $b^2<ac$, то корни комплексно сопряжены (гл. III, п. 43), и мы можем положить

$$\alpha=\rho\operatorname{Cis}\varphi,\quad \beta=\rho\operatorname{Cis}(-\varphi),$$

где $\rho^2=\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\rho\cos\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=-\frac{b}{a}$, так что $\cos\varphi=-\sqrt{\frac{b^2}{ac}}$, $\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{b^2}{ac}}$.

Если $|z|<\rho$, то каждая дробь может быть разложена по возрастающим степеням z. Коэффициентом при z^n будет

$$\frac{A\rho\sin n\varphi+B\sin\{(n+1)\varphi\}}{a\rho^{n+1}\sin\varphi}.$$

Если $|z|>\rho$, то мы найдем аналогичное разложение по убывающим степеням, тогда как при $|z|=\rho$ разложение невозможно.

28. Показать, что если $|z|<1$, то

$$1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n+\ldots=\frac{1}{(1-z)^2}.$$

[Сумма первых n членов равна $\frac{1-z^n}{(1-z)^2}-\frac{nz^n}{1-z}$.]

29. Разложить $\frac{L}{(z-a)^2}$ по степеням z — возрастающим, если $|z|<|a|$, и убывающим, если $|z|>|a|$.

30. Показать, что если $b^2=ac$ и $|az|<|b|$, то

$$\frac{Az+B}{az^2+2bz+c}=\sum_0^\infty p_nz^n,$$

где $p_n=(-a)^nb^{-n-2}\{(n+1)aB-nbA\}$, и найти соответствующее разложение по убывающим степеням z, которое имеет место, если $|az|>|b|$.

31. Если $\frac{a}{a+bz+cz^2}=1+p_1z+p_2z^2+\ldots$, то

$$1+p_1^2z+p_2^2z^2+\ldots=\frac{a+cz}{a-cz}\,\frac{a^2}{a^2-(b^2-2ac)z+c^2z^2}.$$

(*Экз.* 1900 г.)

32. Если $\sin 2^n\theta\pi\to l$ при $n\to\infty$, то $l=0$ и θ — рациональное число, знаменатель которого является степенью 2.

[Очевидно, что

$$2^n\theta=p_n+c+\eta_n,$$

где p_n — целое число, c — постоянная и $\eta_n \to 0$; следовательно,

$$p_{n+1} - 2p_n - c + \eta_{n+1} - 2\eta_n = 0.$$

Так как $p_{n+1} - 2p_n$ — целое число, это возможно только в тех случаях, когда либо (1) $c = 0$, так что $l = 0$, либо (2) $p_{n+1} = 2p_n$ и $\eta_{n+1} = 2\eta_n$, начиная с некоторого значения n, скажем, для $n \geqslant n_0$. Но тогда

$$2^\nu \eta_{n_0} = \eta_{n_0+\nu} \to 0$$

при $\nu \to \infty$, а это возможно только в том случае, когда $\eta_{n_0} = 0$, так что $2^{n_0}\theta = p_{n_0}$.

Поучительно рассмотреть $\sin a^n \theta\pi$, где a — целое число, большее 2. Тогда возможно, что $l \neq 0$; так, например, $\sin 9^n\theta\pi \to 1$, когда $\theta = \frac{1}{2}$.]

33. Если $P(n)$ — многочлен от n степени m с целочислеиными коэффициентами и $\sin\{P(n)\theta\pi\} \to 0$, то θ рационально.

[Лучше всего доказывать больше[1]), а именно, что если

$$P(n)\theta = k_n + a_n + \varepsilon_n, \tag{1}$$

где k_n — целое число, a_n может принимать конечное число значений и $\varepsilon_n \to 0$, то θ рационально.

В первую очередь, если мы в (1) заменим n на $n+1$, вычтем и заметим, что $P(n+1) - P(n)$ — многочлен степени $m-1$ и что $a_{n+1} - a_n$ может принимать только конечное число значений, то мы получаем индукцию от $m-1$ к m. Задача, таким образом, сведена к случаю $m = 1$, $P(n) = An + B$. В этом случае (1) дает

$$A\theta = (k_{n+1} - k_n) + (a_{n+1} - a_n) + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n).$$

Это возможно только, если $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = 0$ для $n \geqslant n_0$, а тогда

$$a_n = a_{n_0} + l_n + (n - n_0)A\theta,$$

где l_n—целое число, $n \geqslant n_0$. Так как a_n может принимать только конечное число значений, то и $l_n + nA\theta$ принимает только конечное число значений, а, следовательно, θ рационально.]

[1]) Это рассуждение принадлежит Ингаму.

ГЛАВА V

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ ОТ НЕПРЕРЫВНОГО ПЕРЕМЕННОГО. НЕПРЕРЫВНЫЕ И РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

90. Пределы при x стремящемся к ∞. Возвратимся теперь к функциям от непрерывного действительного переменного. Мы ограничимся исключительно *однозначными* функциями [1] и будем обозначать такие функции через $\varphi(x)$. Мы предполагаем, что x принимает последовательно все значения, соответствующие точкам нашей основной прямой линии Λ, начиная с некоторой определенной точки на ней и двигаясь все время вправо. В этих условиях мы будем говорить, что *x стремится к бесконечности*, или к ∞, и писать $x \to \infty$. Единственным отличием этого „стремления x к ∞" от рассмотренного в предыдущей главе „стремления n к ∞" является то, что x принимает все значения при своем стремлении к ∞, т. е. что точка P, соответствующая x, совпадает по очереди с каждой точкой прямой Λ, расположенной правее исходного положения P, тогда как n стремится к бесконечности скачками. Мы выражаем это отличие, говоря, что *x непрерывно* стремится к ∞.

Как уже было разъяснено в начале предыдущей главы, существует весьма тесная связь между функциями от x и функциями от n. Каждая функция от n может рассматриваться как выбор части значений некоторой функции от x. В предыдущей главе мы рассмотрели особенности поведения функции $\varphi(n)$ при n стремящемся к ∞. Теперь мы займемся той же задачей для функций $\varphi(x)$. Определения и теоремы, к которым мы здесь приходим, по существу являются повторениями соответствующих определений и теорем предыдущей главы. Так, соответственно определению I п. 58, мы имеем:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция $\varphi(x)$ стремится к пределу l при x стремящемся к ∞, если для любого сколь угодно малого заданного положительного числа δ можно найти такое число $x_0(\delta)$, что для всех значений x, бо́льших или равных $x_0(\delta)$, $\varphi(x)$ будет*

---

[1] Так, $\sqrt{x}$ означает в этой главе однозначную функцию $+\sqrt{x}$, а не двузначную функцию, значения которой суть $+\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$ (как в п. 26).

отличаться от l меньше чем на δ, т. е.

$$|\varphi(x)-l|<\delta$$

при $x \geqslant x_0(\delta)$.

Если это имеет место, то мы пишем

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)=l,$$

или, когда это не может вызвать недоразумений, просто $\lim \varphi(x)=l$ или $\varphi(x)\to l$. Аналогично мы имеем:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Функция $\varphi(x)$ стремится к ∞ вместе с x, если для любого сколь угодно большого заданного числа Δ мы можем найти такое число $x_0(\Delta)$, что*

$$\varphi(x)>\Delta$$

при $x \geqslant x_0(\Delta)$.

Тогда мы пишем

$$\varphi(x)\to\infty.$$

Аналогично определяется $\varphi(x)\to-\infty$ [1]. Наконец, мы имеем:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Если не выполнены условия ни одного из предыдущих определений, то говорят, что $\varphi(x)$ колеблется при x стремящемся к ∞. Если при этом $|\varphi(x)|$ остается меньше некоторой постоянной K при всех $x \geqslant x_0$* [2]*, то говорят, что $\varphi(x)$ ограниченно колеблется, в противном случае — что $\varphi(x)$ неограниченно колеблется.*

Читатель помнит, что в предыдущей главе мы очень подробно рассматривали различные менее формальные выражения утверждений, представленных формулами $\varphi(n)\to l$, $\varphi(n)\to\infty$. Подобные же способы выражения применяются, конечно, и в рассматриваемом нами сейчас случае. Так, мы можем сказать, что $\varphi(x)$ мала или почти равна l, или велика, когда x велико, употребляя слова „мала“, „почти“, „велика“ в смысле, аналогичном тому, в котором они употреблялись в гл. IV.

Примеры XXXIV. 1. Рассмотреть поведение следующих функций при $x\to\infty$:

$$\frac{1}{x},\quad 1+\frac{1}{x},\quad x^2,\quad x^k,\quad [x],\quad x-[x],\quad [x]+\sqrt{x-[x]}.$$

---

[1] Иногда будет удобно писать $+\infty$, $x\to+\infty$, $\varphi(x)\to+\infty$ вместо ∞, $x\to\infty$, $\varphi(x)\to\infty$.

[2] В соответствующих определениях п. 62 мы требовали, чтобы $|\varphi(n)|>K$ для всех значений n, а не только для $n\geqslant n_0$. Но в том случае эти два условия были эквивалентны, так как если $|\varphi(n)|<K$ для $n\geqslant n_0$, то $|\varphi(n)|\leqslant K'$ для всех n, где K' обозначает наибольшее из чисел $|\varphi(1)|$, $|\varphi(2)|, \ldots, |\varphi(n_0-1)|$ и K. Здесь же дело обстоит сложнее, так как существует бесконечно много значений x, меньших x_0.

Первые четыре функции в точности соответствуют функциям от n, подробно разобранным в гл. IV. Графики последних трех функций были построены в гл. II (примеры XVI. 1, 2, 4), и читатель сразу увидит, что $[x] \to \infty$, $x - [x]$ ограниченно колеблется и $[x] + \sqrt{x - [x]} \to \infty$.

Сделаем здесь одно простое замечание. Функция $\varphi(x) = x - [x]$ колеблется между 0 и 1, как видно из ее графика. Она равна нулю при целочисленном x, так что функция $\varphi(n)$, соответствующая ей, всегда равна нулю и, следовательно, стремится к нулю. То же имеет место и для функции

$$\varphi(x) = \sin x\pi, \quad \text{где} \quad \varphi(n) = \sin n\pi = 0.$$

Очевидно, что $\varphi(x) \to l$ или $\varphi(x) \to \infty$, или $\varphi(x) \to -\infty$ влечет за собой соответствующее свойство для $\varphi(n)$, но обратное предложение часто неверно.

2. Рассмотреть таким же образом функции

$$\frac{\sin x\pi}{x}, \quad x \sin x\pi, \quad (x \sin x\pi)^2, \quad \operatorname{tg} x\pi, \quad \frac{\operatorname{tg} x\pi}{x}, \quad a \cos^2 x\pi + b \sin^2 x\pi$$

и проиллюстрировать результаты рассмотрений на графиках этих функций.

3. Дать геометрическое разъяснение определения 1, аналогичное данному в гл. IV, п. 59.

4. Если $\varphi(x) \to l$ и l отлично от нуля, то $\varphi(x) \cos x\pi$ и $\varphi(x) \sin x\pi$ ограниченно колеблются. Если $\varphi(x) \to \infty$ или $\varphi(x) \to -\infty$, то они колеблются неограниченно. График каждой из этих функций представляет собой волнистую кривую, колеблющуюся между кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = -\varphi(x)$.

5. Рассмотреть поведение при $x \to \infty$ функции

$$y = f(x) \cos^2 x\pi + F(x) \sin^2 x\pi,$$

где $f(x)$ и $F(x)$ — две какие-либо простые функции (как, например, x и x^2).

[Графиком y является кривая, колеблющаяся между кривыми $y = f(x)$, $y = F(x)$.]

91. Пределы при x стремящемся к $-\infty$. Читатель без труда сформулирует сам определения смысла утверждений „x стремится к $-\infty$“, или „$x \to -\infty$“, и

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = l, \quad \varphi(x) \to \infty, \quad \varphi(x) \to -\infty.$$

Действительно, если $x = -y$ и $\varphi(x) = \varphi(-y) = \psi(y)$, то y стремится к ∞, когда $x \to -\infty$ и вопрос о поведении $\varphi(x)$ при x стремящемся к $-\infty$, равносилен вопросу о поведении $\psi(y)$ при y стремящемся к ∞.

92. Теоремы, соответствующие теоремам пп. 63—69, гл. IV. Теоремы, относящиеся к суммам, произведениям и отношениям функций, которые были доказаны в гл. IV, остаются в силе (с очевидными изменениями отдельных слов, которые читатель легко сформулирует сам) для функций от непрерывного переменного x. При этом остаются в силе не только формулировки этих теорем, но, в основном, и их доказательства.

Определение, соответствующее данному в п. 69, читается так: *функция $\varphi(x)$ называется монотонно возрастающей вместе с x, если $\varphi(x_2) \geqslant \varphi(x_1)$ для всех $x_2 > x_1$*. Во многих случаях это условие удовлетворяется, только начиная с некоторого определенного значения x, т. е. для $x_2 > x_1 \geqslant x_0$. В теореме п. 69 нужно лишь заменить n на x; ее доказательство остается по существу тем же.

Если $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, причем равенство исключается при $x_2 > x_1$, то $\varphi(x)$ называется *строго возрастающей*. Мы увидим, что это различие часто играет важную роль (см. пп. 109—110).

Читателю предлагается рассмотреть, являются ли следующие функции возрастающими вместе с x (или хотя бы возрастающими, начиная с некоторого значения x): $x^2 - x$, $x + \sin x$, $x + 2\sin x$, $[x]$, $[x] + \sin x$, $[x] + \sqrt{x - [x]}$. Все эти функции стремятся к ∞ при $x \to \infty$.

93. Пределы при x стремящемся к 0. Пусть $\varphi(x)$ будет функцией от x, для которой $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = l$, и пусть $y = \frac{1}{x}$. Положим

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \psi(y).$$

Когда x стремится к ∞, y стремится к пределу 0, и $\psi(y)$ стремится к пределу l.

Исключим теперь из рассмотрения x и будем считать $\psi(y)$ просто функцией от y. Мы имеем дело только с такими значениями y, которые соответствуют большим положительным значениям x, т. е. с малыми положительными значениями y. Функция $\psi(y)$ обладает тем свойством, что ее значения могут быть сделаны сколь угодно мало отличающимися от l, если y достаточно мало. Точнее это предложение можно сформулировать так: утверждение $\lim \varphi(x) = l$ означает, что для любого сколь угодно малого заданного положительного числа δ можно найти такое x_0, что $|\varphi(x) - l| < \delta$ для всех значений x, бо́льших или равных x_0; но это означает, что мы можем выбрать $y_0 = \frac{1}{x_0}$ так, что $|\psi(y) - l| < \delta$ для всех положительных значений y, меньших или равных y_0.

Таким образом, мы приходим к следующим определениям:

А. *Если для любого сколь угодно малого заданного положительного числа δ можно найти такое $y_0(\delta)$, что*

$$|\varphi(y) - l| < \delta,$$

если $0 < y \leqslant y_0(\delta)$, то мы говорим, что $\varphi(y)$ стремится к пределу l при y стремящемся к 0, принимая только положительные значения (справа), и пишем

$$\lim_{y \to +0} \varphi(y) = l.$$

В. *Если для любого сколь угодно большого заданного числа Δ можно найти такое $y_0(\Delta)$, что*

$$\varphi(y) > \Delta,$$

если $0 < y \leqslant y_0(\Delta)$, то мы говорим, что $\varphi(y)$ стремится к ∞ при y стремящемся к 0, принимая только положительные значения (справа), и пишем:

$$\varphi(y) \to \infty.$$

Аналогично мы определяем смысл фразы: „$\varphi(y)$ стремится к пределу l при y стремящемся к 0, принимая только отрицательные значения (слева)“, или „$\lim\varphi(y)=l$ при $y\to-0$“. Мы должны для этого только заменить в определении А неравенства $0<y\leqslant y_0(\delta)$ неравенствами $-y_0(\delta)\leqslant y<0$. Мы имеем, конечно, соответствующий аналог определения В и подобные определения для

$$\varphi(y)\to-\infty$$

при $y\to+0$ или $y\to-\infty$.

Если $\lim\limits_{y\to+0}\varphi(y)=l$ и $\lim\limits_{y\to-0}\varphi(y)=l$, то мы просто пишем

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=l.$$

Этот случай настолько важен, что целесообразно сформулировать для него отдельное определение.

Если для любого сколь угодно малого заданного положительного числа δ можно найти такое $y_0(\delta)$, что для всех значений y, отличных от нуля и по модулю не превосходящих $y_0(\delta)$, значения $\varphi(y)$ отличаются от l меньше чем на δ, то мы говорим, что $\varphi(y)$ стремится к пределу l при y стремящемся к 0, и пишем:

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=l.$$

Точно так же, если $\varphi(y)\to\infty$ как при $y\to+0$, так и при $y\to-0$, то мы говорим, что $\varphi(y)\to\infty$ при $y\to 0$. Аналогично определяется утверждение $\varphi(y)\to-\infty$ при $y\to 0$.

Наконец, если $\varphi(y)$ не стремится ни к конечному пределу, ни к ∞, ни к $-\infty$ при $y\to+0$, то мы говорим, что $\varphi(y)$ колеблется (ограниченно или неограниченно, в зависимости от обстоятельств) при $y\to+0$; аналогично определяется утверждение; „$\varphi(y)$ колеблется при $y\to-0$“.

Предыдущие определения были сформулированы в терминах переменного, обозначенного через y; однако ясно, что обозначение переменного не играет никакой роли, и мы можем предположить, что во всех этих определениях буква y заменена на x.

94. Пределы при x стремящемся к a. Предположим теперь, что $\varphi(y)\to l$ при $y\to 0$, и положим

$$y=x-a,\quad \varphi(y)=\varphi(x-a)=\psi(x).$$

Если $y\to 0$, то $x\to a$ и $\psi(x)\to l$, и мы, естественно, приходим к записи

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=l,$$

или просто $\lim\psi(x)=l$, или $\psi(x)\to l$, означающей, что $\psi(x)$ *стремится к пределу l при x стремящемся к a.* Формальное определение этого утверждения следующее: *если для любого данного* δ *мы можем найти* $\varepsilon(\delta)$ *такое, что*

$$|\varphi(x)-l|<\delta$$

при $0<|x-a|\leqslant\varepsilon(\delta)$, *то*

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=l.$$

Ограничиваясь значениями x, бо́льшими чем a, т. е. заменяя неравенства $0<|x-a|\leqslant\varepsilon(\delta)$ неравенствами $a<x\leqslant a+\varepsilon(\delta)$, мы получим определение утверждения „$\varphi(x)$ стремится к l при x стремящемся к a справа“, которое мы можем записать в виде

$$\lim_{x\to a+0}\varphi(x)=l.$$

Таким же образом мы определяем соотношение

$$\lim_{x\to a-0}\varphi(x)=l.$$

Следовательно, утверждение $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=l$ эквивалентно двум утверждениям:

$$\lim_{x\to a+0}\varphi(x)=l,\qquad \lim_{x\to a-0}\varphi(x)=l.$$

Мы можем также дать аналогичные определения, относящиеся к случаям, в которых $\varphi(x)\to\infty$ или $\varphi(x)\to-\infty$ при x стремящемся к a и принимающем значения, бо́льшие, соответственно, меньшие, a; но теперь уже нет необходимости подробнее останавливаться на этих определениях, так как они вполне аналогичны определениям, сформулированным выше для частного случая $a=0$ и мы всегда можем исследовать поведение $\varphi(x)$ при $x\to a$, полагая $x-a=y$ и считая, что $y\to 0$.

95. Монотонно возрастающие или убывающие функции. Если существует такое число ε, что $\varphi(x')\leqslant\varphi(x'')$, если $a-\varepsilon<x'<<x''<a+\varepsilon$, то говорят, что $\varphi(x)$ *монотонно возрастает в окрестности* $x=a$.

Предположим сначала, что $x<a$, и положим $y=\dfrac{1}{a-x}$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to a-0$, и $\varphi(x)=\psi(y)$ является монотонно возрастающей функцией от y, никогда не превосходящей $\varphi(a)$. Из п. 92 следует, что $\varphi(x)$ стремится к пределу, не превосходящему $\varphi(a)$. Мы будем писать:

$$\lim_{x\to a+0}\varphi(x)=\varphi(a+0)\ ^{1)}.$$

---

1) Читатель, конечно, поймет, что $\varphi(a+0)$ не означает ничего другого, кроме предела в левой части, сокращенным обозначением которого оно является. Можно применять символы $\varphi(a+0)$ и $\varphi(a-0)$ всякий раз, когда пределы, определяющие их, существуют; но, вообще говоря, они не будут удовлетворять неравенствам, приведенным дальше в тексте.

Аналогично определим $\varphi(a-0)$. Ясно, что

$$\varphi(a-0) \leqslant \varphi(a) \leqslant \varphi(a+0)$$

и что аналогичные соображения применимы к убывающим функциям.

Если $\varphi(x') < \varphi(x'')$ при $a-\varepsilon < x' < x'' < a+\varepsilon$, причем равенство исключается, то $\varphi(x)$ называется *строго возрастающей в окрестности $x=a$.*

96. Верхний и нижний пределы и принцип сходимости. Все рассмотрения пп. 80—84 могут быть перенесены на функции от непрерывного переменного x, стремящегося к пределу a. В частности, если $\varphi(x)$ *ограничена* в некотором интервале, содержащем a (т. е. если мы можем найти ε, H и K так, что $H < \varphi(x) < K$ при $a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$ [1]), то мы можем определить λ и Λ, верхний и нижний пределы $\varphi(x)$ при $x \to a$ и доказать, что $\lambda = \Lambda = l$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\varphi(x)$ стремилась к l. Мы можем также установить аналогичный принцип сходимости, т. е. доказать, что *необходимым и достаточным условием для того чтобы $\varphi(x)$ стремилась к пределу, является существование для любого δ такого числа $\varepsilon(\delta)$, что $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| < \delta$, если $0 < |x_2-a| < |x_1-a| < \varepsilon(\delta)$.* Подобным же образом, *необходимым и достаточным условием для того чтобы $\varphi(x)$ стремилась к пределу при $x \to \infty$, является выполнение неравенства $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| < \delta$, если $x_2 > x_1 \geqslant X(\delta)$.*

Примеры XXXV. 1. Если $\varphi(x) \to l$, $\psi(x) \to l'$ при $x \to a$, то

$$\varphi(x)+\psi(x) \to l+l', \quad \varphi(x)\psi(x) \to ll', \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \to \frac{l}{l'},$$

если в последнем случае $l' \neq 0$.

[В п. 92 мы видели, что теоремы гл. IV, п. 63 и сл. имеют место и для функций от x, когда $x \to \infty$ или $x \to -\infty$. Полагая $x = \frac{1}{y}$, мы можем распространить их на функции от y при $y \to 0$, а полагая $y = z-a$, — и на функции от z при $z \to a$.

Читателю предлагается доказать их также непосредственно из формальных определений. Так, для того чтобы получить прямое доказательство первого результата, нужно только взять доказательство теоремы I из п. 63 и заменить в нем n на x, ∞ на a и $n \geqslant n_0$ на $0 < |x-a| \leqslant \varepsilon$.]

2. Если m — положительное целое число, то $x^m \to 0$ при $x \to 0$.

3. Если m — отрицательное целое число, то $x^m \to +\infty$ при $x \to +0$ и $x^m \to -\infty$ или $x^m \to +\infty$ при $x \to -0$, в зависимости от того, будет ли m нечетным или четным. Если $m=0$, то $x^m = 1$ и, значит, $x^m \to 1$.

4. $$\lim_{x \to 0}(a+bx+cx^2+\ldots+kx^m) = a.$$

---

[1]) См. п. 103.

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+\ldots+kx^m}{\alpha+\beta x+\ldots+\varkappa x^m}=\frac{a}{\alpha},$$
кроме того случая, когда $\alpha=0$. Если $\alpha=0$ и $a\neq 0$, $\beta\neq 0$, то рассматриваемая функция стремится при $x\to+0$ к $+\infty$ или к $-\infty$, в зависимости от того, будут ли знаки a и β одинаковыми или противоположными; утверждения меняются местами, если $x\to-0$. Случай, когда и a и α равны нулю, рассмотрен в примере XXXVI. 5. Исследовать случай, когда $a\neq 0$ и несколько первых коэффициентов в знаменателе равны нулю.

6. $\lim\limits_{x\to a} x^m=a^m$, если m — любое положительное или отрицательное целое число, кроме того случая, когда $a=0$ и m отрицательно. [Если $m>0$, положить $x=y+a$ и применить пример 4. Когда $m<0$, результат следует из примера 1. Мы сразу получаем отсюда, что $\lim P(x)=P(a)$, если $P(x)$ — многочлен.]

7. $\lim\limits_{x\to a} R(x)=R(a)$, если R обозначает любую рациональную функцию и a не является корнем знаменателя.

8. Показать, что $\lim\limits_{x\to a} x^m=a^m$ для всех рациональных значений m, кроме того случая, когда $a=0$ и m отрицательно. [Для положительных a это сразу следует из неравенств (9) или (10) п. 74. Ибо $|x^m-a^m|<H|x-a|$, где H обозначает большее из абсолютных значений mx^{m-1} и ma^{m-1} (см. пример XXVIII. 4). Если a отрицательно, положим $x=-y$ и $a=-b$.

Тогда
$$\lim x^m=\lim(-1)^m y^m=(-1)^m b^m=a^m.$$

97. Читатель, вероятно, не будет видеть необходимости доказательств таких результатов, как утверждения в примерах 4, 5, 6, 7, 8, приведенных выше. Он может спросить: „почему просто не положить $x=0$ или $x=a$? Ясно, что мы тогда получим a, $\frac{a}{\alpha}$, a^m, $P(a)$, $R(a)$“. Очень важно, чтобы он усмотрел заключающуюся здесь ошибку. Поэтому прежде чем перейти к дальнейшим примерам, мы подробно остановимся на этом вопросе.

Утверждение
$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=l$$
относится к значениям $\varphi(x)$, когда x имеет любое значение, *не равное нулю, но мало отличающееся от нуля* [1]. Оно *не* является утверждением о *значении* $\varphi(x)$ *при* $x=0$, но имеется в виду, что когда x *почти* равно нулю, $\varphi(x)$ почти равно l. Мы ничего не утверждаем относительно того, что произойдет, когда x *в точности* равно нулю. Мы даже не знаем, определена ли вообще $\varphi(x)$ при $x=0$; если же $\varphi(x)$ и определена при $x=0$, то ее значение, вообще говоря, может быть отличным от l. Рассмотрим, например, функцию, определенную для всех значений x уравнением $\varphi(x)=0$. Тогда, очевидно,
$$\lim\varphi(x)=0. \qquad (1)$$

[1]) Так, утверждение, содержащееся в определении А п. 93, относится к таким значениям y, для которых $0<y\leqslant y_0$, причем первое неравенство приводится специально для того, чтобы исключить значение $y=0$.

Теперь рассмотрим функцию $\psi(x)$, которая отличается от $\varphi(x)$ только тем, что $\psi(x)=1$, когда $x=0$. Тогда

$$\lim \psi(x)=0, \tag{2}$$

ибо когда x почти равно нулю, $\psi(x)$ не только почти, но даже в точности равна нулю. Но $\psi(0)=1$. График этой функции состоит из оси x с выключенной точкой $x=0$ и одной изолированной точки, а именно, $(0,1)$. Соотношение (2) выражает тот факт, что если мы движемся вдоль графика по направлению к оси y с любой стороны, то ордината кривой, будучи всегда равной нулю, стремится к пределу нуль. Положение изолированной точки $(0,1)$ не оказывает на этот факт никакого влияния.

Читатель может возразить, что этот пример слишком искусственнен; однако легко написать простые формулы, представляющие функции, которые ведут себя точно таким образом вблизи $x=0$. Одной из таких функций является

$$\psi(x)=[1-x^2],$$

где $[1-x^2]$ обозначает, как обычно, наибольшее целое число, не превосходящее $1-x^2$. В самом деле, если $x=0$, то $\psi(x)=[1]=1$, тогда как если $0<x<1$ или $-1<x<0$, то $\psi(x)=[1-x^2]=0$.

Или же рассмотрим функцию

$$y=\frac{x}{x},$$

уже исследованную в гл. II, п. 24 (2). Эта функция равна 1 для всех значений, кроме $x=0$. Она *не* равна 1, когда $x=0$; она вообще не определена при $x=0$. Ибо когда мы говорим, что $\varphi(x)$ определена при $x=0$, то имеем в виду, что (как было разъяснено в указанном месте гл. II) мы можем вычислить ее значение при $x=0$ подстановкой $x=0$ в формулу, определяющую $\varphi(x)$. В данном случае мы этого сделать не можем. Когда мы подставим $x=0$ в $\varphi(x)$, то получим $\frac{0}{0}$, что не имеет смысла. Читатель может предложить „разделить числитель и знаменатель на x", но и это невозможно при $x=0$. Таким образом, $y=\frac{x}{x}$ является функцией, которая отличается от $y=1$ только тем, что она не определена при $x=0$. Тем не менее,

$$\lim \frac{x}{x}=1,$$

так как $\frac{x}{x}$ равно 1, если x отлично от нуля, как бы мáло x ни отличалось от нуля.

Аналогично,

$$\varphi(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}=x+2,$$

пока x не равно нулю, но $\varphi(x)$ не определена при $x=0$. Тем не менее, $\lim\varphi(x)=2$.

С другой стороны, ничто, конечно, не мешает тому, чтобы в других случаях предел $\varphi(x)$ при x, стремящемся к нулю, равнялся $\varphi(0)$, значению $\varphi(x)$ при $x=0$. Так, если $\varphi(x)=x$, то $\varphi(0)=0$ и $\lim\varphi(x)=0$.

Примеры XXXVI. 1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=2a$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}$, если m — любое целое число (включая нуль).

3. Доказать, что результат примера 2 остается справедливым для всех рациональных значений m, если только a положительно. [Это следует сразу из неравенств (9) и (10) п. 74.]

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}=1$. [Числитель и знаменатель делятся на $x-1$.]

5. Исследовать поведение

$$\varphi(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m+1}+\ldots+a_kx^{m+k}}{b_0x^n+b_1x^{n+1}+\ldots+b_lx^{n+l}},$$

где $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$ при x, стремящемся к нулю справа или слева.

[Если $m>n$, то $\lim\varphi(x)=0$. Если $m=n$, то $\lim\varphi(x)=\dfrac{a_0}{b_0}$. Если $m<n$ и $n-m$ четно, то $\varphi(x)\to+\infty$ или $\varphi(x)\to-\infty$, в зависимости от того, будет ли $\dfrac{a_0}{b_0}>0$ или $\dfrac{a_0}{b_0}<0$. Если $m<n$ и $n-m$ нечетно, то $\varphi(x)\to+\infty$ при $x\to+0$ и $\varphi(x)\to-\infty$ при $x\to-0$ или $\varphi(x)\to-\infty$ при $x\to+0$ и $\varphi(x)\to+\infty$ при $x\to-0$, в зависимости от того, будет ли $\dfrac{a_0}{b_0}>0$ или $\dfrac{a_0}{b_0}<0$.]

6. Если a и b положительны, то

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a},\qquad \lim_{x\to+0}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0.$$

Как ведут себя эти функции, когда $x\to 0$ слева?

7[1]. $\lim\sqrt{1+x}=\lim\sqrt{1-x}=1$. [Положить $1+x=y$ или $1-x=y$ и применить результат примера XXXV. 8.]

8. $\lim\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$.

[Умножить числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$.]

9. Рассмотреть поведение

$$\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

при $x\to 0$, где m и n — положительные целые числа.

10. $\lim\dfrac{1}{x}\{\sqrt{1+x+x^2}-1\}=\dfrac{1}{2}$.

---

[1] В следующих примерах предполагается, что ищутся пределы при $x\to 0$, если (как в примерах 19, 22) ничего другого явно не оговорено.

11. $\lim \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}=1.$

12. Нарисовать график функции

$$y=\frac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{4}}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{4}}}.$$

Стремится ли она к пределу при $x\to 0$? [Здесь $y=1$, за исключением значений $x=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; при этих значениях функция не определена; $y\to 1$ при $x\to 0$.]

13. $\lim \dfrac{\sin x}{x}=1.$

[Это может быть выведено из определения тригонометрических функций. Когда x положительно и меньше чем $\frac{1}{2}\pi$[1]), то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

или

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Но

$$2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{1}{2}x\right)^2 < \frac{1}{2}x^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0, \quad \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

а так как $\dfrac{\sin x}{x}$ — функция четная, то получаем искомый результат.]

14. $\lim \dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

15. $\lim \dfrac{\sin \alpha x}{x}=\alpha.$ Справедливо ли это, если $\alpha=0$?

16. $\lim \dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

17. $\lim \dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}=\alpha, \quad \lim \dfrac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x}=\alpha.$

18. $\lim \dfrac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x}{x}=\dfrac{1}{2}.$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}=\dfrac{1}{2}.$

---

[1]) Доказательство применяемых неравенств основано на некоторых свойствах „площади" сектора круга, которые обычно принимаются за геометрически очевидные, как, например, что площадь сектора больше площади треугольника, вписанного в него. Обоснование этих предположений мы должны отложить до гл. VII.

20. Как ведут себя функции $\sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$? [Первая функция колеблется ограниченно, вторая — неограниченно, третья стремится к пределу 0. Ни одна из них не определена при $x=0$. (См. примеры XV. 6, 7, 8).]

21. Стремится ли функция

$$y=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$$

к пределу при $x\to 0$? [*Нет.* Функция равна 1, кроме тех случаев, когда $\sin\frac{1}{x}=0$, т. е. когда $x=\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots, -\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \ldots$ Для этих значений формула для y принимает вид $\frac{0}{0}$ и теряет смысл, так что y не определено для бесконечного числа значений x, лежащих вблизи $x=0$.]

22. Доказать, что если m — любое целое число, то $[x]\to m$ и $x-[x]\to 0$ при $x\to m+0$, и что $[x]\to m-1$, $x-[x]\to 1$ при $x\to m-0$.

98. Символы O, o, $\sim$: порядок малости и порядок роста. Определения п. 89 могут быть распространены, с очевидными изменениими, на функции от непрерывного переменного, стремящегося к бесконечности или к какому-нибудь конечному пределу. Так, $f=O(\varphi)$ при $x\to\infty$ означает, что $|f|<K\varphi$ для $x\geqslant x_0$; $f=o(\varphi)$ означает, что $\frac{f}{\varphi}\to 0$ и $f\sim l\varphi$, где $l\neq 0$, что $\frac{f}{\varphi}\to l$. Аналогично $f=O(\varphi)$, когда $x\to a$, означает, что $|f|<K\varphi$ для всех x, отличных от a, но достаточно близких к a.

Так,

$$x+x^2=O(x^2),\quad x=o(x^2),\quad x+x^2\sim x^2,$$

$$\sin x=O(1),\quad x^{-1/2}=o(1)$$

при $x\to\infty$ и

$$x+x^2=O(x),\quad x^2=o(x),\quad x+x^2\sim x,$$

$$\sin\frac{1}{x}=O(1),\ x^{1/2}=o(1),$$

когда $x\to 0$.

Допустим, для определенности, что $x\to 0$. Функции

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$$

образуют шкалу, в которой каждый член стремится к нулю быстрее предыдущего, так как

$$x^m=o(x^{m-1}),\quad x^{m+1}=o(x^m)$$

для каждого положительного целого числа m. Естественно поэтому применять их в качестве меры „порядка малости" любой функции, стремящейся к нулю вместе с x. Если

$$\varphi(x)\sim lx^m,$$

где $l \neq 0$, при $x \to 0$, то мы говорим, что $\varphi(x)$ порядка малости m, когда x мало [1].

Эта шкала, конечно, ни в коей степени неполна. Так, $\varphi(x) = x^{7/5}$ стремится к нулю быстрее чем x, но медленнее чем x^2. Мы могли бы попытаться сделать эту шкалу более полной, включив в нее дробные порядки малости; мы могли бы, например, сказать, что $x^{7/5}$ порядка малости $\frac{7}{5}$. В главе IX мы, однако, увидим, что даже тогда наша шкала будет весьма неполна.

Аналогично определим порядок роста. Так, мы говорим, что $\varphi(x)$ имеет порядок роста m, если $\frac{\varphi(x)}{x^{-m}} = x^m\varphi(x)$ стремится к пределу l, отличному от нуля, при $x \to 0$.

Эти определения относятся к случаю, в котором $x \to 0$. Имеются, естественно, соответствующие определения, когда $x \to \infty$ или $x \to a$. Так, если $x^m\varphi(x)$ стремится к пределу, отличному от нуля, при $x \to \infty$, то мы говорим, что $\varphi(x)$ порядка малости m для больших x; а если $(x-a)^m\varphi(x)$ стремится к пределу, отличному от нуля, когда $x \to a$, то мы говорим, что $\varphi(x)$ имеет порядок роста m для x, близких к a.

Многие из результатов последнего списка примеров могут быть сформулированы на языке этого пункта. Так,

$$\sin \alpha x \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x \sim \frac{1}{2}x;$$

при этом вторая функция второго порядка малости, а остальные — первого.

99. Непрерывные функции действительного переменного. Читатель, несомненно, имеет представление о том, что понимают под *непрерывной* кривой. Так, он назовет кривую C на фиг. 26 непрерывной, а кривую C' — вообще непрерывной, но разрывной при $x = \xi'$ и $x = \xi''$.

Каждая из этих кривых может рассматриваться как график некоторой функции $\varphi(x)$. Естественно называть функцию *непрерывной*, если ее график является непрерывной кривой, а в противном случае — разрывной. Примем это в качестве временного предварительного определения и попытаемся разобрать точнее некоторые свойства, которые заключены в этом понятии.

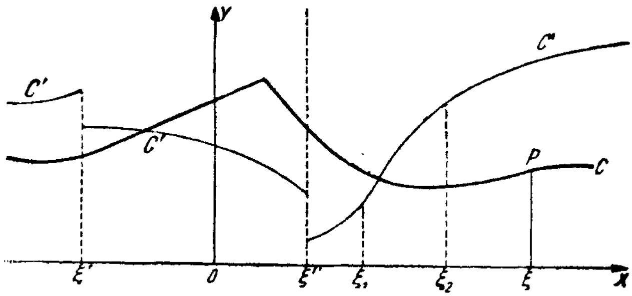
---

[1] Мы можем, вообще, сказать, что $\varphi(x)$ порядка малости m, если существуют такие положительные постоянные A, B, что

$$A|x|^m \leqslant |\varphi(x)| \leqslant B|x|^m.$$

Но определение, данное в тексте, является достаточно общим для наших целей.

Прежде всего, очевидно, что свойство непрерывности функции $y=\varphi(x)$, графиком которой является кривая C, состоит из некоторого свойства самой кривой в каждой из ее точек. Для того чтобы определить непрерывность *для всех значений* x, мы должны сперва определить непрерывность для *любого частного значения* x. Сосредоточим поэтому наше внимание на некотором частном значении x, скажем, $x=\xi$, соответствующем точке P графика. Каковы характеристические свойства $\varphi(x)$, связанные с этим значением x?



Фиг. 26

Во-первых, $\varphi(x)$ *определена при* $x=\xi$. Очевидно, что это существенно. Если бы $\varphi(\xi)$ не было определено, то на кривой нехватало бы точки.

Во-вторых, $\varphi(x)$ *определена для всех значений* x, *близких к* $x=\xi$, т. е. мы можем найти интервал, содержащий внутри себя точку $x=\xi$, для всех точек которого $\varphi(x)$ определена.

В-третьих, *если* x *приближается к значению* ξ *с каждой стороны, то* $\varphi(x)$ *приближается к пределу* $\varphi(\xi)$.

Перечисленные свойства далеко не исчерпывают всех свойств той фигуры, которую представляет собой кривая с точки зрения здравого смысла и которая является обобщением некоторых специальных кривых (например, прямых и окружностей). Но эти свойства являются простейшими и самыми основными; график любой функции, которая ими обладает (если только его можно нарисовать), будет вполне отвечать нашим интуитивным представлениям о том, чтó должно считаться непрерывной кривой. Поэтому мы выбираем их в качестве свойств, определяющих математическое понятие непрерывности. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $\varphi(x)$ *называется непрерывной при* $x=\xi$, *если она стремится к пределу при* x, *стремящемся к* ξ *справа и слева, и если каждый из этих пределов равен* $\varphi(\xi)$.

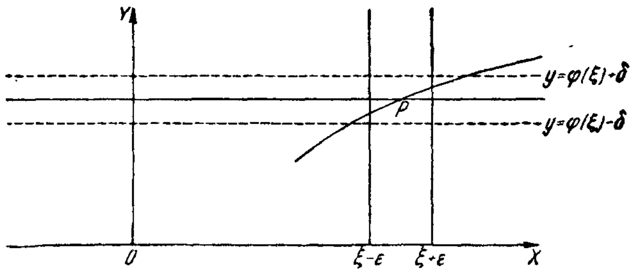
Таким образом, $\varphi(x)$ непрерывна при $x=\xi$, если $\varphi(\xi)$, $\varphi(\xi-0)$ и $\varphi(\xi+0)$ существуют и равны между собой.

Мы можем теперь определить *непрерывность в интервале*. Функция $\varphi(x)$ называется непрерывной в некотором интервале значений x, если она непрерывна при всех значениях x из этого интервала. Она называется *непрерывной всюду*, если она непрерывна при каждом значении x. Так, $[x]$ непрерывна в интервале $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, где ε — любое положительное число, меньшее $\frac{1}{2}$, но она не непрерывна при $x=0$ и при $x=1$; она также не является непрерывной ни в каком интервале, содержащем хотя бы одну из этих точек. Функции 1 и x непрерывны всюду.

Если мы обратимся к определению предела, то увидим, что наше определение эквивалентно следующему: „*$\varphi(x)$ непрерывна при $x=\xi$, если для каждого данного δ мы можем найти такое $\varepsilon(\delta)$, что $|\varphi(x)-\varphi(\xi)|<\delta$ для $0 \leqslant |x-\xi| \leqslant \varepsilon(\delta)$*“.

Нам часто приходится рассматривать функции, определенные только в некотором интервале (a, b). В этом случае удобно сделать небольшое и естественное изменение в нашем определении непрерывности в точках a и b. Мы будем говорить, что $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$, если $\varphi(a+0)$ существует и равно $\varphi(a)$, и при $x=b$, если $\varphi(b-0)$ существует и равно $\varphi(b)$.

100. Определение непрерывности, данное в предыдущем пункте, геометрически может быть проиллюстрировано следующим образом. Проведем две горизонтальные прямые $y=\varphi(\xi)-\delta$ и $y=\varphi(\xi)+\delta$. Тогда неравенство $|\varphi(x)-\varphi(\xi)|<\delta$ означает, что точка



Фиг. 27

кривой, соответствующая x, лежит между этими прямыми. Аналогично, $|x-\xi| \leqslant \varepsilon$ означает, что x лежит в интервале $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$. Следовательно, наше определение утверждает, что если мы проведем две как угодно близкие друг к другу горизонтальные прямые, то всегда можно найти такую вертикальную полосу, что та часть кривой, которая содержится в этой полосе, проходит между проведенными горизонтальными прямыми (фиг. 27). Очевидно, что это справедливо для кривой C (см. фиг. 26), каково бы ни было значение ξ.

Теперь мы перейдем к исследованию непрерывности некоторых специальных типов функций. Некоторые из следующих ниже результатов применялись уже в гл. II.

Примеры XXXVII. 1. Сумма и произведение двух функций, непрерывных в некоторой точке, также непрерывны в этой точке. Их отношение также непрерывно, если значение знаменателя в этой точке отлично от нуля. [Это следует из примера XXXV. 1.]

2. Любой многочлен непрерывен для всех значений x. Любая дробно-рациональная функция непрерывна для всех значений x, за исключением тех, при которых знаменатель обращается в нуль. [Это следует из примеров XXXV. 6 и 7.]

3. $\sqrt{x}$ непрерывен для всех положительных значений x (пример XXXV. 8). Он не определен для x, меньших нуля, но непрерывен при $x=0$, в силу замечания, сделанного в конце п. 99. То же имеет место для $x^{m/n}$, где m и n — любые положительные целые числа, причем n четно.

4. Функция $x^{m/n}$ непрерывна для всех значений x, если n нечетно.

5. $\frac{1}{x}$ разрывна при $x=0$. Эта функция не определена при $x=0$ и не стремится ни к какому пределу при $x\to 0$. Действительно, $\frac{1}{x}\to+\infty$ или $\frac{1}{x}\to-\infty$, в зависимости от того, стремится ли x к нулю справа или слева.

6. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$ функцию $x^{-m/n}$, где m и n — положительные целые числа.

7. Дробно-рациональная функция

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

разрывна при $x=a$, где a — любой корень уравнения $Q(x)=0$. Так,

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x+2}$$

разрывна при $x=1$. Следует заметить, что в случае дробно-рациональных функций разрыв всегда связан с (a) непригодностью определения для данного значения x и (b) стремлением функции к $+\infty$ или к $-\infty$ при стремлении x к этому значению с каждой стороны. Такая точка разрыва обычно называется *бесконечностью* функции. „Бесконечность" является наиболее часто встречающимся видом разрыва.

8. Исследовать на непрерывность функции

$$\sqrt{(x-a)(b-x)},\quad \sqrt[3]{(x-a)(b-x)},\quad \sqrt{\frac{x-a}{b-x}},\quad \sqrt[3]{\frac{x-a}{b-x}}.$$

9. Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны для всех значений x.

[Так, например,

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{1}{2}h\cdot\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right),$$

что по модулю не превосходит h.]

10. При каких значениях x функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ непрерывны и при каких разрывны?

11. Если $f(y)$ непрерывна при $y=\eta$, а $\varphi(x)$ — непрерывная функция от x, равная η при $x=\xi$, то $f\{\varphi(x)\}$ непрерывна при $x=\xi$.

12. Если $\varphi(x)$ непрерывна при данном значении x, то любой полином от $\varphi(x)$, $a\{\varphi(x)\}^m+\dots$ также непрерывен при этом значении x.

13. Исследовать на непрерывность функции

$$(a\cos^2 x+b\sin^2 x)^{-1},\quad \sqrt{2+\cos x},\quad \sqrt{1+\sin x},\quad (1+\sin x)^{-1/2}.$$

14. Функции $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$ и $x^2\sin\frac{1}{x}$ непрерывны при всех значениях x, кроме $x=0$.

15. Функция, равная $x\sin\frac{1}{x}$ для всех x, кроме $x=0$, и равная нулю при $x=0$, непрерывна для всех значений x.

16. $[x]$ и $x-[x]$ разрывны при всех целочисленных значениях x.

17. При каких значениях x (если таковые вообще существуют) следующие функции разрывны:

$$[x^2],\ [\sqrt{x}],\ \sqrt{x-[x]},\ [x]+\sqrt{x-[x]},\ [2x],\ [x]+[-x]?$$

18. **Классификация разрывов.** Некоторые из предыдущих примеров наводят на мысль о следующей классификации типов разрывов.

(1) Допустим, что $\varphi(x)$ стремится к пределу при $x\to a$ как справа, так и слева. Обозначим эти пределы, как в п. 95, соответственно, через $\varphi(a-0)$ и $\varphi(a+0)$. Тогда для непрерывности необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была определена при $x=a$ и чтобы

$$\varphi(a-0)=\varphi(a)=\varphi(a+0).$$

Разрыв может иметь место при различных обстоятельствах.

(α) $\varphi(a-0)$ может быть равно $\varphi(a+0)$, но $\varphi(a)$ может не быть определено или может отличаться от $\varphi(a-0)$ и $\varphi(a+0)$. Так, если $\varphi(x)=x\sin\frac{1}{x}$ и $a=0$, то $\varphi(0-0)=\varphi(0+0)=0$, но $\varphi(x)$ не определена при $x=0$. Или, если $\varphi(x)=[1-x^2]$ и $a=0$, то $\varphi(0-0)=\varphi(0+0)=0$, но $\varphi(0)=1$.

(β) $\varphi(a-0)$ и $\varphi(a+0)$ могут быть не равны. В этом случае $\varphi(a)$ может быть равно одному или другому из этих значений или может быть вообще не определено. Первый случай имеет место для функции $\varphi(x)=[x]$, для которой $\varphi(0-0)=-1$, $\varphi(0+0)=\varphi(0)=0$; второй — для функции $\varphi(x)=[x]-[-x]$, для которой $\varphi(0-0)=-1$, $\varphi(0+0)=1, \varphi(0)=0$, и третий — для функции $\varphi(x)=[x]+x\sin\frac{1}{x}$, для которой $\varphi(0-0)=-1$, $\varphi(0+0)=0$, а $\varphi(0)$ не определено.

В каждом из этих случаев мы будем говорить, что $\varphi(x)$ имеет *простой разрыв* при $x=a$ *). К этим случаям мы можем добавить еще те случаи, когда $\varphi(x)$ определена только по одну сторону от $x=a$ и $\varphi(a-0)$ или, соответственно, $\varphi(a+0)$ существует, но либо не определена при $x=a$, либо имеет значение, отличное от $\varphi(a-0)$ (или $\varphi(a+0)$).

Из п. 95 следует, что *функция, которая в окрестности $x=a$ монотонно возрастает или монотонно убывает, но не непрерывна в этой точке, может иметь в ней только простой разрыв.*

(2) Может случиться, что $\varphi(x)$ стремится к конечному пределу, или к $+\infty$, или к $-\infty$, когда x стремится к a с любой стороны, и что она стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ при x, стремящемся к a по крайней мере с одной из двух сторон. Это, например, имеет место, когда $\varphi(x)$ равна $\frac{1}{x}$ или $\frac{1}{x^2}$, или когда она равна $\frac{1}{x}$ для положительных x и равна 0 для отрицательных. В таких случаях мы будем говорить, что $x=a$ является *точкой бесконечности* функции $\varphi(x)$. Мы также включаем сюда те случаи, когда $\varphi(x)$ стремится к $+\infty$ или $-\infty$ с одной стороны от a и $\varphi(x)$ не определена по другую сторону.

*) Разрыв, рассмотренный в (α), часто называют устранимым разрывом, а разрыв, рассмотренный в (β), — разрывом первого рода. (*Прим. перев.*)

(3) Всякая точка разрыва, которая не является точкой простого разрыв или точкой бесконечности, называется точкой *колебательного разрыва* *). Например, $x=0$ является точкой колебательного разрыва для функции $\sin\frac{1}{x}$.

19. Какова природа разрыва в точке $x=0$ функций

$$\frac{\sin x}{x},\ [x]+[-x],\ \operatorname{cosec} x,\ \sqrt{\frac{1}{x}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{x}},\ \operatorname{cosec}\frac{1}{x},\ \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}?$$

20. Функция, равная 1 для рациональных x и равная 0 для иррациональных x (см. гл. II, пример XVI.10), разрывна при всех значениях x. То же справедливо и в отношении функций, определенных только для рациональных или только для иррациональных значений x.

21. Функция, равная x для иррациональных значений x и равная $\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}$ при $x=\frac{p}{q}$ (см. гл. II, пример XVI.11), разрывна для всех отрицательных и положительных рациональных значений x, но непрерывна для всех положительных иррациональных значений.

22. В каких точках разрывны функции, рассмотренные в гл. IV (примеры XXXI), и какова природа этих разрывов? [Рассмотрим, например, функцию $y=\lim x^n$ (см. пример 5). Здесь y определено только, если $-1<x\leqslant 1$; y равно 0 при $-1<x<1$ и равно 1 при $x=1$. Точки $x=1$ и $x=-1$ являются точками простого разрыва.]

101. Основное свойство непрерывной функции. „Непрерывная кривая" с точки зрения здравого смысла обладает еще одним характеристическим свойством. Пусть A и B — две точки на графике $\varphi(x)$ с координатами x_0, $\varphi(x_0)$ и x_1, $\varphi(x_1)$ и пусть λ — прямая, проходящая между A и B. Тогда представляется очевидным, что если график непрерывен, то он должен пересечь λ.

Ясно, что если мы рассматриваем это свойство как геометрическое свойство, присущее непрерывным кривым, то мы ничего не потеряем в общности, предполагая, что λ параллельна оси x. В этом случае ординаты A и B не могут быть равны; допустим для определенности, что $\varphi(x_1)>\varphi(x_0)$. Пусть λ — прямая $y=\eta$, где $\varphi(x_0)<\eta<\varphi(x_1)$. Тогда утверждение, что график $\varphi(x)$ пересекает λ, равносильно утверждению, что между x_0 и x_1 найдется такое значение x, для которого $\varphi(x)=\eta$.

Мы заключаем, следовательно, что непрерывная функция $\varphi(x)$ должна обладать следующим свойством: *если*

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi(x_1)=y_1$$

и $y_0<\eta<y_1$, *то между* x_0 *и* x_1 *существует такое значение* x, *что* $\varphi(x)=\eta$. Другими словами, *когда x изменяется от x_0 до x_1,*

*) Или, что более принято, точкой разрыва второго рода. (*Прим. перев.*

$\varphi(x)$ должно по крайней мере один раз принять каждое значение между y_0 и y_1.

Докажем теперь, что если $\varphi(x)$ — непрерывная функция от x в смысле определения п. 99, то она действительно обладает этим свойством. Правее x_0 существует некоторый интервал значений x, для которых $\varphi(x) < \eta$. Действительно, $\varphi(x_0) < \eta$ и, следовательно, $\varphi(x)$ будет заведомо меньше чем η, если $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ по модулю меньше чем $\eta - \varphi(x_0)$. Но так как $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$, это условие выполняется, если x достаточно близко к x_0. Точно так же левее x_1 существует некоторый интервал значений x, для которых $\varphi(x) > \eta$.

Разобьем теперь все значения x между x_0 и x_1 на два класса L и R следующим образом:

(1) к классу L мы отнесем все значения ξ переменного x такие, что $\varphi(x) < \eta$ для $x = \xi$ и для всех значений x между x_0 и ξ;

(2) к классу R мы отнесем все остальные значения x, т. е. все числа ξ, для которых либо $\varphi(\xi) \geqslant \eta$, либо существует такое значение x между x_0 и ξ, что $\varphi(x) \geqslant \eta$.

Тогда очевидно, что эти два класса удовлетворяют всем условиям, наложенным на классы L, R в п. 17, и, следовательно, определяют сечение в области действительных чисел. Пусть ξ_0 — число, соответствующее этому сечению.

Предположим сначала, что $\varphi(\xi_0) > \eta$, так что ξ_0 принадлежит к верхнему классу, и пусть $\varphi(\xi_0) = \eta + k$. Тогда $\varphi(\xi') < \eta$ и, значит,

$$\varphi(\xi_0) - \varphi(\xi') > k$$

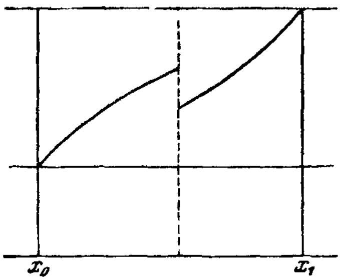
для всех значений ξ', меньших чем ξ_0, что противоречит условию непрерывности при $x = \xi_0$.

Далее предположим, что $\varphi(\xi_0) = \eta - k < \eta$. Тогда, если ξ' — любое число, большее ξ_0, то либо $\varphi(\xi') \geqslant \eta$, либо мы можем найти между ξ_0 и ξ' такое число ξ'', что $\varphi(\xi'') \geqslant \eta$. В каждом случае мы можем найти числа как угодно близкие к ξ_0, для которых соответствующие значения $\varphi(x)$ будут отличаться больше чем на k. А это опять противоречит предположенной непрерывности $\varphi(x)$ при $x = \xi_0$.

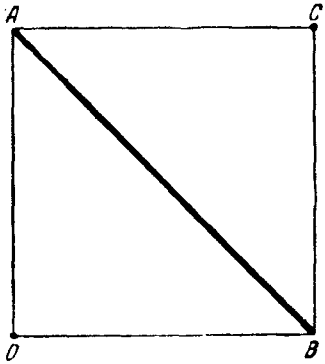
Следовательно, $\varphi(\xi_0) = \eta$, и теорема доказана. Следует отметить, что мы доказали больше, чем явно утверждается в теореме; в действительности мы доказали, что ξ_0 является *наименьшим* значением x, для которого $\varphi(x) = \eta$. Между тем совсем не очевидно и, вообще говоря, неверно, что среди значений x, для которых функция принимает данное значение, существует наименьшее; однако, как мы видели, для непрерывных функций это так.

Легко видеть, что теорема, обратная только что доказанной, неверна. Так, например, функция, график которой изображен на фиг. 28, очевидно, принимает по крайней мере один раз каждое значение между $\varphi(x_0)$ и $\varphi(x_1)$, а вместе с тем она разрывна. Неверно и то, что функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывной, если она принимает каждое значение *один и только один раз*. Пусть, например, $\varphi(x)$ определена для x между 0 и 1 следующим образом: $\varphi(x)=0$ при $x=0$; $\varphi(x)=1-x$ для $0<x<1$, и $\varphi(x)=1$ при $x=1$. График этой функции изображен на фиг. 29; он содержит точки O, C, но не содержит точек A, B. Ясно, что когда x изменяется от 0 до 1, $\varphi(x)$ принимает один и только один раз каждое значение между $\varphi(0)=0$ и $\varphi(1)=1$; но $\varphi(x)$ разрывна при $x=0$ и $x=1$.

Кривые, встречающиеся в элементарной математике, обычно состоят из *конечного числа кусков, вдоль каждого из которых y изменяется в одном и том же направлении*. Легко показать, что если $y=\varphi(x)$ изменяется



Фиг. 28



Фиг. 29

в одном и том же направлении, т. е. либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, когда x пробегает значения от x_0 до x_1, то оба понятия непрерывности действительно совпадают, т. е. функция, принимающая каждое значение между $\varphi(x_0)$ и $\varphi(x_1)$, должна быть непрерывной в смысле п. 99. Действительно, пусть ξ — любое значение x между x_0 и x_1. Когда x стремится к ξ, пробегая значения, меньшие ξ, $\varphi(x)$ стремится к пределу $\varphi(\xi-0)$ (см. п. 95). Аналогично, когда x стремится к ξ, пробегая значения, бо́льшие ξ, $\varphi(x)$ стремится к пределу $\varphi(\xi+0)$. Функция будет непрерывной при $x=\xi$ в том и только том случае, когда

$$\varphi(\xi-0)=\varphi(\xi)=\varphi(\xi+0).$$

Но если какое-либо из этих равенств не имеет места, скажем первое, то $\varphi(x)$ никогда не может принять ни одного значения, лежащего между $\varphi(\xi-0)$ и $\varphi(\xi)$, что противоречит нашим предпосылкам. Следовательно, $\varphi(x)$ должна быть непрерывной.

102. Дальнейшие свойства непрерывных функций. В этом и в следующих пунктах мы докажем ряд важных общих теорем.

ТЕОРЕМА 1. *Допустим, что $\varphi(x)$ непрерывна при $x=\xi$ и что $\varphi(\xi)$ положительно. Тогда можно найти такое положительное число ε, что $\varphi(x)$ положительна в интервале* $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$.

Действительно, полагая $\delta = \frac{1}{2}\varphi(\xi)$ в основном неравенстве на стр. 185, мы можем выбрать ε так, что

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \frac{1}{2}\varphi(\xi)$$

в интервале $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, и тогда

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(\xi) - |\varphi(x) - \varphi(\xi)| > \frac{1}{2}\varphi(\xi) > 0,$$

так что $\varphi(x)$ положительна. Очевидно, что имеет место аналогичная теорема, относящаяся к отрицательным значениям $\varphi(x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\varphi(x)$ непрерывна при $x = \xi$ и $\varphi(x)$ обращается в нуль для значений x, расположенных как угодно близко к ξ, или принимает как угодно близко к ξ как положительные, так и отрицательные значения, то $\varphi(\xi) = 0$.*

Эта теорема следует сразу из теоремы 1. Если бы $\varphi(\xi)$ было отлично от нуля, то оно должно было бы быть положительным или отрицательным; если бы, например, оно было положительным, то $\varphi(x)$ должна была бы быть положительной для всех значений x, достаточно близких к ξ, что противоречит предпосылкам теоремы.

103. Область значений непрерывной функции. Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, относительно которой мы пока только предположим, что она определена для каждого значения x из некоторого интервала (a, b).

Значения, принимаемые $\varphi(x)$ для значений x из (a, b), образуют некоторую совокупность S, к которой мы можем применить рассуждения п. 80 (как мы применили их уже в п. 81 к совокупности значений функции от n). Если существует такое число K, что $\varphi(x) \leqslant K$ для всех рассматриваемых значений x, то мы говорим, что $\varphi(x)$ *ограничена сверху*. В этом случае $\varphi(x)$ имеет *точную верхнюю грань* M, обладающую тем свойством, что ни одно значение $\varphi(x)$ не превосходит M, но для каждого числа, меньшего M, существует по крайней мере одно значение $\varphi(x)$, которое его превосходит. Аналогично определяются, в применении к функциям от непрерывного переменного x, термины *„ограничена снизу“*, *„точная нижняя грань“*, *„ограничена“*.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\varphi(x)$ непрерывна (a, b)* *), *то она ограничена в (a, b).*

Мы можем найти такой интервал (a, ξ) справа от a, в котором $\varphi(x)$ ограничена, ибо из непрерывности $\varphi(x)$ при $x = a$ следует, что для любого заданного положительного числа δ мы можем найти

*) Здесь и в дальнейшем подразумевается, конечно, непрерывность в замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$. (*Прим. перев.*)

такой интервал (a, ξ), в котором значения $\varphi(x)$ заключены между $\varphi(a)-\delta$ и $\varphi(a)+\delta$, так что $\varphi(x)$ ограничена в этом интервале.

Разобьем теперь точки ξ интервала (a, b) на два класса L и R, относя ξ к L, если $\varphi(x)$ ограничена в (a, ξ), и к R, если это не имеет места. Из предыдущего следует, что класс L безусловно существует; мы должны доказать, что R не существует. Допустим, что R существует, и обозначим через β число, соответствующее сечению L, R. Так как $\varphi(x)$ непрерывна при $x=\beta$, мы можем, как бы мало ни было заданное положительное число δ, найти такой интервал $(\beta-\eta, \beta+\eta)$ [1], в котором

$$\varphi(\beta)-\delta<\varphi(x)<\varphi(\beta)+\delta.$$

Следовательно, $\varphi(x)$ ограничена в $(\beta-\eta, \beta+\eta)$. Но $\beta-\eta$ принадлежит к L, и, следовательно, $\varphi(x)$ ограничена в $(a, \beta-\eta)$; поэтому она ограничена и во всем интервале $(a, \beta+\eta)$. Но $\beta+\eta$ принадлежит к R, и $\varphi(x)$ не может быть ограничена в $(a, \beta+\eta)$. Это противоречие показывает, что R не существует и что, следовательно, $\varphi(x)$ ограничена в (a, b).

ТЕОРЕМА 2. *Если $\varphi(x)$ непрерывна в (a, b) и M и m обозначают ее точные верхнюю и нижнюю грани, то $\varphi(x)$ принимает в этом интервале каждое из значений M и m по крайней мере один раз.*

Действительно, если дано любое положительное число δ, то мы можем найти такое значение x, для которого $M-\varphi(x)<\delta$ или $\frac{1}{M-\varphi(x)}>\frac{1}{\delta}$. Следовательно, функция $\frac{1}{M-\varphi(x)}$ не ограничена, а поэтому, в силу теоремы 1, и не непрерывна. Но $M-\varphi(x)$ — непрерывная функция, и следовательно, $\frac{1}{M-\varphi(x)}$ непрерывна в любой точке, в которой знаменатель не обращается в нуль (пример XXXVII. 1). Таким образом, должна существовать такая точка, в которой знаменатель обращается в нуль, и в этой точке $\varphi(x)=M$. Аналогично можно показать, что существует и точка, в которой $\varphi(x)=m$.

Ввиду большой важности этой теоремы полезно дать, помимо приведенного непрямого доказательства, и другие методы ее доказательства. Однако удобнее отложить это до п. 105.

Примеры XXXVIII. 1. Если $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $\varphi(x)=0$ при $x=0$, то $\varphi(x)$ не имеет ни верхней, ни нижней грани ни в одном интервале, заключающем внутри себя точку $x=0$ (например, в интервале $(-1, +1)$).

2. Если $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$ при $x\neq 0$ и $\varphi(x)=0$ при $x=0$, то $\varphi(x)$ имеет в интервале $(-1, +1)$ точную нижнюю грань 0, но не имеет верхней грани.

---

[1]) Если $\beta=b$, то мы должны в следующем рассуждении заменить этот интервал интервалом $(\beta-\eta, \beta)$, а число $\beta+\eta$ — числом β.

3. Пусть $\varphi(x)=\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $\varphi(x)=0$ при $x=0$. Тогда $\varphi(x)$ разрывна при $x=0$. В любом интервале $(-\delta, +\delta)$ точная нижняя грань этой функции равна -1, а точная верхняя грань $+1$, и каждое из этих значений принимается $\varphi(x)$ бесконечное число раз.

4. Пусть $\varphi(x)=x-[x]$. Эта функция разрывна при всех целочисленных значениях x. В интервале $(0, 1)$ ее точная нижняя грань равна 0, а ее точная верхняя грань равна 1. Таким образом, эта функция никогда не принимает значения, равного ее точной верхней грани.

5. Пусть $\varphi(x)=0$, когда x иррационально, и $\varphi(x)=q$ при рациональном $x=\frac{p}{q}$. Тогда $\varphi(x)$ в любом интервале (a, b) имеет точную нижнюю грань 0, но не имеет верхней грани. Если же $\varphi(x)=(-1)^p q$, при $x=\frac{p}{q}$, то $\varphi(x)$ не имеет ни в одном интервале ни верхней, ни нижней грани.

104. Колебание функции в интервале. Пусть $\varphi(x)$ — любая функция, ограниченная в интервале (a, b), и пусть M и m — ее точные верхняя и нижняя грани. Мы будем писать $M(a, b)$ и $m(a, b)$ вместо M и m для того, чтобы явно указать зависимость M и m от a и b; кроме того, положим

$$O(a, b)=M(a, b)-m(a, b).$$

Это число $O(a, b)$, разность между точной верхней и точной нижней гранями $\varphi(x)$ в (a, b), называется *колебанием* $\varphi(x)$ в (a, b). Приведем некоторые простейшие свойства функций $M(a, b)$, $m(a, b)$ и $O(a, b)$.

(1) *Если $a\leqslant c\leqslant b$, то $M(a, b)$ есть большее из чисел $M(a, c)$ и $M(c, b)$, а $m(a, b)$ — меньшее из чисел $m(a, c)$* и *$m(c, b)$.*

(2) *$M(a, b)$ является возрастающей, $m(a, b)$ — убывающей и $O(a, b)$ — возрастающей функцией от b.*

(3) $$O(a, b)\leqslant O(a, c)+O(c, b).$$

Первые две теоремы являются прямыми следствиями наших определений. Пусть μ — большее из чисел $M(a, c)$ и $M(c, b)$ и δ — любое положительное число. Тогда $\varphi(x)\leqslant\mu$ в (a, c) и в (c, b), а следовательно, и в (a, b); кроме того, $\varphi(x)>\mu-\delta$ для некоторого значения x из (a, c) или из (c, b), а, следовательно, для некоторого значения x из (a, b). Таким образом, $M(a, b)=\mu$. Утверждение относительно m доказывается так же. Таким образом, (1) доказано, а (2) является его непосредственным следствием.

Допустим теперь, что M_1 — большее, а M_2 — меньшее из чисел $M(a, c)$ и $M(c, b)$ и что m_1 — меньшее, а m_2 — большее из чисел $m(a, c)$ и $m(c, b)$. Тогда, так как c принадлежит к обоим интервалам, $\varphi(c)$ не больше чем M_2 и не меньше чем m_2. Следовательно, $M_2\geqslant m_2$, независимо от того, соответствуют ли эти числа одному и тому же из интервалов (a, c) и (c, b) или нет. Далее,

$$O(a, b)=M_1-m_1\leqslant M_1+M_2-m_1-m_2,$$

но
$$O(a, c) + O(c, b) = M_1 + M_2 - m_1 - m_2,$$
откуда следует (3).

105. Другие доказательства теоремы 2 п. 103. Самым прямым доказательством теоремы 2 п. 103 является следующее. Пусть ξ — любое число из интервала (a, b). Функция $M(a, \xi)$ монотонно возрастает вместе с ξ и никогда не превосходит M. Следовательно, мы можем построить сечение чисел ξ, относя ξ к L или к R, в зависимости от того, будет ли $M(a, \xi) < M$ или $M(a, \xi) = M$. Пусть β — число, соответствующее этому сечению. Если $a < \beta < b$, то мы имеем
$$M(a, \beta - \eta) < M, \ M(a, \beta + \eta) = M$$
для всех положительных значений η, и, таким образом,
$$M(\beta - \eta, \beta + \eta) = M,$$
согласно утверждению (1) п. 104. Следовательно, $\varphi(x)$ принимает для значений x как угодно близких к β значения как угодно близкие к M, а так как $\varphi(x)$ непрерывна, то $\varphi(\beta)$ должно быть равно M.

Если $\beta = a$, то $M(a, a + \eta) = M$. Если же $\beta = b$, то $M(a, b - \eta) < M$ и, следовательно, $M(b - \eta, b) = M$. В каждом из этих случаев доказательство может быть закончено так же, как и в первом случае.

Теорема может быть доказана также методом повторных делений интервалов пополам (см. п. 71). Если M является точиой верхней гранью $\varphi(x)$ в интервале PQ и PQ разделен на две равных части, то можно найти половиау P_1Q_1, в которой точная верхняя грань $\varphi(x)$ также равна M. Продолжая так же, как в п. 71, мы построим последовательность интервалов PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, ..., в каждом из которых точная верхняя грань $\varphi(x)$ равна M. Эти интервалы, как показано в п. 71, сходятся в некоторой точке T, и легко доказать, что значение $\varphi(x)$ в этой точке должно равняться M.

106. Системы интервалов на прямой. Теорема Гейне — Бореля. Мы переходим теперь к доказательству некоторых теорем, относящихся к колебанию функции, которые, как мы увидим, играют чрезвычайно важную роль в теории интегрирования. Эти теоремы опираются на одну общую теорему, относящуюся к интервалам на прямой.

Предположим, что дана *система интервалов* на прямой линии, т. е. что дана некоторая совокупность, каждым членом которой является некоторый интервал (α, β). Мы не накладываем на эти интервалы никаких ограничений; число их может быть конечным или бесконечным; они могут перекрываться, могут и не перекрываться[1]; любое число этих интервалов может целиком принадлежать некоторым из них.

---

[1]) Термин „перекрывающиеся интервалы“ применяется здесь в очевидном смысле: два интервала перекрываются, если они имеют общие точки, отличные от концов каждого из них. Так, интервалы $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ перекрываются. Про пару интервалов $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ можио сказать, что они примыкают друг к другу.

Здесь уместно мимоходом привести несколько примеров таких систем интервалов; к рассмотрению этих систем мы еще вернемся позже.

(1) Если интервал $(0, 1)$ разбит на n равных частей, то полученные n интервалов составляют конечную систему неперекрывающихся интервалов, которые покрывают отрезок $(0, 1)$.

(2) Возьмем каждую точку ξ интервала $(0, 1)$ и поставим ей в соответствие интервал $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, где ε—положительное число, меньшее 1; точке 0 поставим в соответствие интервал $(0, \varepsilon)$, а точке 1—интервал $(1-\varepsilon, 1)$, и вообще отбросим часть каждого интервала, выходящую из интервала $(0, 1)$. Таким образом, мы определяем бесконечную систему интервалов, причем очевидно, что многие из них перекрываются друг с другом.

(3) Возьмем рациональные точки $\frac{p}{q}$ интервала $(0, 1)$ и поставим в соответствие точке $\frac{p}{q}$ интервал

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{\varepsilon}{q^3}, \quad \frac{p}{q}+\frac{\varepsilon}{q^3}\right),$$

где ε положительно и меньше 1. Мы рассматриваем 0 как $\frac{0}{1}$, а 1 — как $\frac{1}{1}$, и в этих двух случаях отбрасываем те части интервала, которые выходят из интервала $(0, 1)$. Тогда мы получим бесконечную систему интервалов, которые, очевидно, перекрываются друг с другом, так как в каждом интервале, соответствующем $\frac{p}{q}$, содержится бесконечно много рациональных точек, отличных от $\frac{p}{q}$.

ТЕОРЕМА ГЕЙНЕ — БОРЕЛЯ. *Допустим, что дан интервал (a, b) и система интервалов I, каждый член которой содержится в (a, b). Предположим, далее, что I обладает следующими свойствами:*

(1) *каждая точка интервала (a, b), отличная от a и b, лежит внутри*[1] *по крайней мере одного из интервалов системы I;*

(2) *a является левым концом, а b — правым концом по крайней мере одного интервала из I.*

Тогда из системы I можно выбрать **конечное число** *интервалов, которые образуют систему, также обладающую свойствами* (1) *и* (2).

Мы знаем, что a является левым концом по крайней мере одного из интервалов I, скажем интервала (a, a_1). Мы знаем также, что a_1 лежит внутри по крайней мере одного из интервалов I, скажем, (a_1', a_2). Подобным образом a_2 лежит внутри некоторого интервала (a_2', a_3) из I. Ясно, что это рассуждение можно бесконечно повторять, если только после конечного числа шагов a_n не совпадает с b.

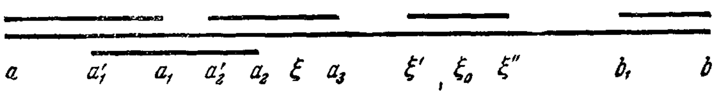
Если a_n совпадает с b после конечного числа шагов, то больше нечего доказывать, так как мы получаем конечную систему интер-

[1]) Это значит „внутри, но ни в одном из концов".

валов, выбранных из I и обладающих требуемыми свойствами. Если a_n никогда не совпадает с b, то точки a_1, a_2, a_3, ... должны стремиться к некоторому предельному положению, так как каждая из них лежит правее предыдущей; но эта предельная точка может лежать где угодно в (a, b).

Допустим теперь, что указанное построение проведено, исходя из a, всевозможными способами, так что мы получим всевозможные последовательности типа a_1, a_2, a_3, ... Тогда мы докажем, что *существует по крайней мере одна такая последовательность, которая достигает b после конечного числа шагов.*

Имеются две возможности для положения точки ξ в (a, b). Либо 1° ξ лежит слева от *некоторой* точки a_n *некоторой* последовательности, либо 2° это не имеет места. Разобьем точки ξ на два



Фиг. 30

класса L и R, в зависимости от того, справедливо 1° или 2°. Класс L заведомо существует, так как все точки интервала (a, a_1) принадлежат к L. Мы докажем теперь, что класс R не существует, так что каждая точка ξ принадлежит к классу L.

Если бы класс R существовал, то L находился бы целиком слева от R, и классы L, R определяли бы сечение в области действительных чисел между a и b, которому соответствовало бы некоторое число ξ_0. Точка ξ_0 лежала бы внутри какого то интервала из I, скажем, (ξ', ξ''), и ξ' принадлежало бы к L и, таким образом, лежало бы левее некоторого члена a_n некоторой последовательности. Но тогда мы могли бы взять интервал (ξ', ξ'') в качестве интервала (a'_n, a_{n+1}), соответствующего a_n в нашем построении последовательности a_1, a_2, a_3, ..., и все точки слева от ξ'' лежали бы слева от a_{n+1}. Следовательно, существовали бы точки из L, лежащие справа от ξ_0, а это противоречит определению R. Поэтому невозможно, чтобы класс R существовал.

Таким образом, каждая точка ξ принадлежит к L. Пусть теперь b является правым концом интервала (b_1, b) из I, и b_1 принадлежит к L. Тогда существует такой член a_n последовательности a_1, a_2, a_3, ..., что $a_n > b_1$. Но мы можем взять в качестве интервала (a'_n, a_{n+1}), соответствующего a_n, интервал (b_1, b), и тогда мы получим конечную систему интервалов, обладающую требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Поучительно рассмотреть в свете этой теоремы примеры, приведенные на стр. 194—5.

(1) Здесь условия теоремы не выполнены; точки $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ не принадлежат ни одному из интервалов из I.

(2) Здесь условия теоремы выполнены. Система интервалов

$$(0, 2\varepsilon),\ (\varepsilon, 3\varepsilon),\ (2\varepsilon, 4\varepsilon),\ \ldots,\ (1-2\varepsilon, 1),$$

соответствующих точкам $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots, 1-\varepsilon$, обладает требуемыми свойствами.

(3) В этом случае мы можем, применяя теорему, доказать, что для достаточно малого ε в интервале $(0, 1)$ существуют точки, не принадлежащие ни одному из интервалов системы I.

Если бы каждая точка интервала $(0, 1)$ лежала внутри некоторого интервала из I (с очевидными оговорками, относящимися к концам), то мы могли бы найти конечное число интервалов из I, обладающих тем же свойством и имеющих, следовательно, общую длину, превосходящую 1. Но мы имеем следующие интервалы: два интервала общей длины 2ε для $q=1$ и $q-1$ интервалов общей длины $2\varepsilon\frac{q-1}{q^3}$ для каждого из остальных значений q. Общая длина любого конечного числа интервалов из I не может поэтому превосходить произведение 2ε на ряд

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots,$$

который, как будет показано в гл. VIII, сходится. Следовательно, если ε достаточно мало, предположение, что каждая точка интервала $(0, 1)$ лежит внутри одного из интервалов системы I, приводит к противоречию.

Читателю может показаться, что это доказательство излишне сложно и что существование точек в интервале $(0, 1)$, не принадлежащих ни одному из интервалов системы I, сразу следует из того, что сумма длин этих интервалов меньше 1. Но теорема, на которую это рассуждение опирается (если система интервалов бесконечна), далеко не очевидна и может быть строго доказана только с помощью теоремы Гейне — Бореля.

107. Колебание непрерывной функции. Применим теперь теорему Гейне — Бореля к доказательству двух важных теорем, относящихся к колебанию непрерывной функции.

ТЕОРЕМА I. *Если $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, b)* *), *то мы можем разбить (a, b) на конечное число частичных интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$, в каждом из которых колебание $\varphi(x)$ будет меньше любого заданного положительного числа δ.*

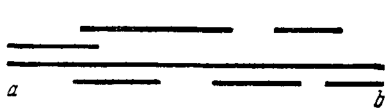
Пусть ξ — любое число между a и b. Так как $\varphi(x)$ непрерывна при $x=\xi$, то мы можем найти такой интервал $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, в котором колебание $\varphi(x)$ будет меньше чем δ. Таких интервалов будет, конечно, бесконечно много для каждого ξ и каждого δ, ибо если условие выполнено для некоторого значения δ, то оно тем более будет выполнено для всех меньших значений. Какие значения ε

*) В теоремах I и II опять подразумевается непрерывность в *замкнутом* интервале (a, b). (*Прим. перев.*)

допустимы, зависит, естественно, от ξ; пока мы не имеем оснований предполагать, что значение ε, допустимое для одного значения ξ, будет допустимым для другого. Назовем таким образом поставленные в соответствие точке ξ интервалы, *δ-интервалами для* ξ.

Если $\xi = a$, то мы можем определить интервал $(a, a+\varepsilon)$ (а следовательно, и бесконечно много таких интервалов), обладающий тем же свойством. Эти интервалы мы назовем δ-интервалами для a и аналогично определим δ-интервалы для b.

Рассмотрим теперь систему I интервалов, образованную всеми δ-интервалами всех точек из (a, b). Эта система, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Гейне — Бореля: каждая внутренняя точка интервала (a, b) является внутренней точкой по крайней мере одного из интервалов системы I, и a и b являются каждая концом по крайней мере одного такого интервала. Поэтому мы можем выбрать такую систему I' из конечного числа интервалов системы I, которая обладает тем же свойством, что и I.



Фиг. 31

Интервалы, составляющие систему I', будут, вообще говоря, перекрываться, например, как на фиг. 31. Но их концы, очевидно, разделят (a, b) на конечную систему интервалов I'', каждый из которых содержится в некотором интервале из I' и в каждом из которых колебание $\varphi(x)$ меньше чем δ. Теорема I, таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА II. *Если дано любое положительное число δ, то мы можем найти такое число η, что, при любом разбиении интервала (a, b) на частичные интервалы длины меньшей чем η, колебание $\varphi(x)$ в каждом из них будет меньше чем δ* *).

Возьмем $\delta_1 < \frac{1}{2}\delta$ и построим так же, как в теореме I, конечную систему частичных интервалов j, в каждом из которых колебание $\varphi(x)$ меньше чем δ_1. Пусть η будет длина наименьшего из этих частичных интервалов из j. Если мы теперь разделим (a, b) на части длины меньшей чем η, то каждая такая часть должна целиком лежать не более чем в двух следующих друг за другом частичных интервалах из j. Следовательно, в силу (3) п. 104, колебание $\varphi(x)$ в каждой такой части длины меньшей чем η не может превосходить удвоенного наибольшего колебания $\varphi(x)$ в частичном интервале системы j, и будет, таким образом, меньше $2\delta_1$, т. е. меньше δ.

---

*) Функции, обладающие этим свойством, называются равномерно непрерывными. Утверждение теоремы II состоит в том, что функция, непрерывная в замкнутом интервале, равномерно непрерывна в нем. (*Прим. ред.*)

Эта теорема играет основную роль в теории определенных интегралов (см. гл. VII). Без помощи этой или аналогичной теоремы нельзя доказать, что функция, непрерывная в интервале, имеет интеграл по этому интервалу.

108. Непрерывные функции от нескольких переменных. Понятия непрерывности и разрывности могут быть распространены на функции от нескольких независимых переменных (см. гл. II, п. 31 и сл.). Их применение к таким функциям связано, однако, с значительно более сложными вопросами, чем те, которые мы рассматривали в настоящей главе. Мы не можем здесь подробно остановиться на этих вопросах, но в дальнейшем мы должны знать, чтó понимается под непрерывной функцией от двух переменных, и мы поэтому дадим здесь соответствующее определение. Оно является прямым обобщением последней формы определения, данного в п. 99.

Функция $\varphi(x, y)$ *от двух переменных* x *и* y *называется* **непрерывной** *при* $x=\xi$, $y=\eta$, *если для любого сколь угодно малого заданного положительного числа* δ *можно указать такое* $\varepsilon(\delta)$, *что*

$$|\varphi(x, y)-\varphi(\xi, \eta)|<\delta,$$

когда $0 \leqslant |x-\xi| \leqslant \varepsilon(\delta)$ *и* $0 \leqslant |y-\eta| \leqslant \varepsilon(\delta)$; *это означает, что мы можем указать квадрат со сторонами длины* $2\varepsilon(\delta)$, *параллельными осям координат, и с центром в точке* (ξ, η), *обладающий тем свойством, что в каждой точке внутри него или на его границе значение* $\varphi(x, y)$ *отличается от* $\varphi(\xi, \eta)$ *меньше чем на* δ[1].

При этом, конечно, предполагается, что $\varphi(x, y)$ определена во всех точках рассматриваемого квадрата и, в частности, в точке (ξ, η). Другая форма определения следующая: $\varphi(x, y)$ *непрерывна при* $x=\xi$, $y=\eta$, *если* $\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(\xi, \eta)$, *когда* $x \rightarrow \xi$ *и* $y \rightarrow \eta$ *любым образом*. Это определение кажется более простым, но оно содержит фразы, точный смысл которых не был еще разъяснен; для разъяснения же его необходимы неравенства, аналогичные содержащимся в основном утверждении.

Легко доказать, что суммы, произведения и, в общем случае, отношения непрерывных функций от двух переменных сами непрерывны. Многочлен от двух переменных непрерывен для всех значений этих переменных; обычные функции от x и y, которые встречаются в анализе, также, *вообще говоря*, непрерывны, т. е. непрерывны для всех пар значений x и y, кроме таких, которые связаны некоторыми соотношениями.

Читатель должен особо отметить, что утверждать непрерывность $\varphi(x, y)$ относительно двух переменных x и y — это значит утверждать гораздо больше, чем непрерывность относительно каждой переменной, взятой в отдельности.

---

[1]) Читателю рекомендуется нарисовать фигуру, иллюстрирующую это определение.

Ясно, что если $\varphi(x, y)$ непрерывна относительно x и y, то она непрерывна относительно x (или y), когда y (или x) приписано любое фиксированное значение. Но обратное предложение никоим образом не имеет места. Допустим, например, что

$$\varphi(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

если ни x, ни y не равен нулю, и $\varphi(x, y)=0$, когда либо x, либо y равен нулю. Тогда если y имеет любое фиксированное значение, нулевое или ненулевое, то $\varphi(x, y)$ является непрерывной функцией от x, которая, в частности, непрерывна и при $x=0$, так как ее значение при $x=0$ равно 0 и она стремится к пределу 0 при $x \to 0$. Подобным же образом мы убеждаемся в том, что $\varphi(x, y)$ является непрерывной функцией от y. Но $\varphi(x, y)$ *не является* непрерывной функцией от x и y при $x=0$, $y=0$. Ее значение при $x=0$, $y=0$ равно нулю, но если x и y стремятся к нулю вдоль прямой $y=\alpha x$, то

$$\varphi(x, y) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \lim \varphi(x, y) = \frac{2}{1+\alpha^2},$$

что может иметь любое значение между -1 и 1.

109. Неявные функции. В гл. II мы уже встретились с понятием *неявной функции*. Так, если x и y связаны соотношением

$$y^5 - xy - y - x = 0, \tag{1}$$

то y является „неявной функцией" от x.

Но далеко не очевидно, что такое равенство как (1) действительно определяет функцию y от x или несколько таких функций. В гл. II мы удовлетворились тем, что приняли это за данное. Теперь мы в состоянии рассмотреть, насколько это предположение было оправдано.

Следующая терминология окажется в дальнейшем полезной. Предположим, что вокруг точки (a, b) можно построить, как в п. 108, квадрат, в котором выполняется некоторое условие. Такой квадрат мы будем называть *окрестностью* (a, b) и будем говорить, что условие, о котором идеть речь, выполняется *в окрестности* (a, b) или *вблизи* (a, b), понимая под этим просто то, что можно найти *некоторый* квадрат, в котором это условие выполняется. Ясно, что аналогичные термины могут применяться и для функций от одного переменного, если только квадрат заменить интервалом на прямой линии.

ТЕОРЕМА. *Если* $1°$ $f(x, y)$ — *непрерывная функция от* x *и* y *в окрестности* (a, b),

$2°$ $f(a, b)=0$,

$3°$ $f(x, y)$ *для всех значений* x *в окрестности точки* a *является строго возрастающей функцией от* y (см. п. 95),

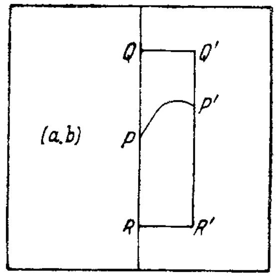
то (1) *существует единственная функция* $y=\varphi(x)$, *которая при подстановке в уравнение* $f(x, y)=0$ *удовлетворяет ему тождественно для всех значений* x *в окрестности* a,

(2) $\varphi(x)$ *непрерывна для всех значений* x *в окрестности* a.

На фиг. 32 квадрат представляет „окрестность" (a, b), в которой удовлетворены условия $1°$ и $3°$, а P является точкой (a, b). Если мы возьмем точки Q и R, как указано на фигуре, то из $3°$ следует, что $f(x, y)$ положительна в Q и отрицательна в R. Раз это так и поскольку $f(x, y)$ непрерывна в Q и в R, то мы можем провести прямые QQ' и RR' параллельно OX, так что $R'Q'$ параллельно OY и $f(x, y)$ положительна во всех точках QQ' и отрицательна во всех точках RR'. В частности, $f(x, y)$ положительна в Q' и отрицательна в R' и поэтому, в силу 3° и п. 101, обращается в нуль один и только один раз в некоторой точке P' на $R'Q'$. Аналогичное построение даст нам единственную точку, в которой $f(x, y)=0$ на каждой ординате между RQ и $R'Q'$. Очевидно также, что подобное построение может быть выполнено слева от RQ. Совокупность таких точек, как P', дает нам график искомой функции $y=\varphi(x)$.

Остается доказать, что $\varphi(x)$ непрерывна. Это проще всего сделать, используя понятия верхнего и нижнего пределов $\varphi(x)$ при $x\to a$ (см. п. 96). Допустим, что $x\to a$, и пусть λ и Λ будут, соответственно, нижний и верхний пределы $\varphi(x)$ при $x\to a$. Очевидно, что точки (a, λ) и (a, Λ) лежат на QR. Более того, мы можем найти такую последовательность значений x, что $\varphi(x)\to\lambda$ при $x\to a$, пробегая значения этой последовательности; а так как $f\{x, \varphi(x)\}=0$ и $f(x, y)$ — непрерывная функция от x и y, то мы имеем:

$$f(a, \lambda)=0.$$



Фиг. 32

Следовательно, $\lambda=b$. Аналогично $\Lambda=b$. Таким образом, $\varphi(x)$ стремится к пределу b при $x\to a$ и $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$. Очевидно, что точно так же мы можем показать непрерывность $\varphi(x)$ при любом значении x в окрестности a.

В условии 3° теоремы можно, конечно, заменить слово „возрастающей“ словом „убывающей“.

В качестве примера рассмотрим уравнение (1), положив $a=0$, $b=0$. Условия 1° и 2°, очевидно, выполнены. Кроме того,

$$f(x, y)-f(x, y')=(y-y')(y^4+y^3y'+y^2y'^2+yy'^3+y'^4-x-1)$$

имеет, если x, y и y' достаточно малы, знак обратный знаку $y-y'$. Следовательно, условие 3° (с „убывающей“ вместо „возрастающей“) также выполнено. Отсюда следует, что существует одна и только одна непрерывная функция y, которая тождественно удовлетворяет уравнению (1) и обращается в 0 при $x=0$.

Тот же результат имеет место для уравнения

$$y^2-xy-y-x=0.$$

В этом случае функцией y является

$$y=\frac{1}{2}(1+x-\sqrt{1+6x+x^2}),$$

где имеется в виду положительное значение корня. Второе значение корня с обратным знаком не удовлетворяет условию равенства 0 при $x=0$.

В доказательстве имеется один пункт, на который следует обратить внимание. Мы предполагали, что условия теоремы удовлетворены „в окрестности (a, b)“, т. е. в некотором квадрате $a-\varepsilon\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$, $b-\varepsilon\leqslant y\leqslant b+\varepsilon$. Утверждение имеет место „в окрестности $x=a$“, т. е. в некотором интервале $a-\varepsilon_1\leqslant x\leqslant a+\varepsilon_1$. В доказательстве ничто не показывает, что ε_1 утверждения совпадает с ε предпосылок, и это, вообще говоря, и не имеет места.

110. Обратные функции. Предположим, в частности, что $f(x, y)$ имеет вид $F(y)-x$. Тогда мы получаем следующую теорему:

Если $F(y)$ в окрестности $y=b$ — непрерывная строго возрастающая функция от y и $F(b)=a$, то существует единственная непрерывная функция $y=\varphi(x)$, которая равна b при $x=a$ и тождественно удовлетворяет уравнению $F(y)=x$ в окрестности $x=a$.

Определенная таким образом функция $\varphi(x)$ называется функцией *обратной* $F(y)$.

Пусть, например, $y^3=x$, $a=0$, $b=0$. Тогда все условия теоремы выполнены. Обратной функцией является $x=\sqrt[3]{y}$.

Если бы мы предположили, что $y^2=x$, то условия теоремы не были бы выполнены, так как y^2 не является монотонно возрастающей функцией от y ни в каком интервале, содержащем $y=0$: эта функция убывает при отрицательных y и возрастает при положительных y. В этом случае утверждение теоремы не имеет места, так как $y^2=x$ определяет *две* функции от x, а именно, $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$, каждая из которых обращается в нуль при $x=0$ и определена только для положительных значений x. Таким образом, уравнение $y^2=x$ может иметь иногда два решения, а иногда — ни одного. Читателю предлагается таким же образом рассмотреть более общие уравнения

$$y^{2n}=x, \quad y^{2n+1}=x.$$

Другим интересным примером является уравнение

$$y^5-y-x=0,$$

уже рассмотренное в примере XIV. 7.

Уравнение

$$\sin y=x$$

имеет в точности одно решение, которое обращается в нуль при $x=0$, а именно, значение $\arcsin x$, обращающееся в нуль при $x=0$. Существует, само собой разумеется, бесконечно много других решений, соответствующих другим значениям $\arcsin x$ (см. пример XV. 10), но они не удовлетворяют этому условию.

До сих пор мы рассматривали поведение функции только в окрестности определенного значения x. Допустим теперь, что $F(y)$ положительна и монотонно возрастает (или убывает) в интервале (a, b). Если дана любая точка ξ из (a, b), то мы можем определить некоторый интервал i, содержащий ξ, и единственную непрерывную обратную функцию $\varphi_i(x)$, определенную в нем

Из системы I интервалов i мы можем, по теореме Гейне—Бореля, выбрать конечную подсистему, покрывающую весь интервал (a, b). Ясно, что конечная система функций $\varphi_i(x)$, соответствующих интервалам i выбранной подсистемы, определяет единственную обратную функцию $\varphi(x)$, непрерывную во всем интервале (a, b).

Таким образом, мы получаем теорему: *если $x=F(y)$, где $F(y)$ непрерывна и строго возрастает от A до B, когда y возрастает от a до b, то существует единственная обратная функция $y=\varphi(x)$, непрерывная и строго возрастающая от a до b, когда x возрастает от A до B.*

Следует отметить, что эта теорема может быть получена без помощи более трудной теоремы п. 109. Предположим, что $A<\xi<B$, и рассмотрим класс значений y таких, что 1° $a<y<b$ и 2° $F(y)\leqslant\xi$. Этот класс имеет точную верхнюю грань η, причем $F(\eta)\leqslant\xi$. Если бы $F(\eta)$ было меньше ξ, то мы могли бы найти такое значение y, что $y>\eta$ и $F(y)<\xi$, и η не могло бы быть точной верхней гранью рассматриваемого класса. Следовательно, $F(\eta)=\xi$. Уравнение $F(y)=\xi$ имеет, таким образом, единственное решение $y=\eta=\varphi(\xi)$. Ясно также, что η монотонно и непрерывно возрастает вместе с ξ, что и доказывает теорему.

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ V

1. Показать, что в общем случае

$$\frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k}{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+K}=\alpha+\frac{\beta}{x}(1+\eta),$$

где $\alpha=\frac{a}{A}$, $\beta=\frac{bA-aB}{A^2}$ и η — величина первого порядка малости при больших x. Указать исключительные случаи.

2. Определить α, β и γ так, чтобы

$$\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}=\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}(1+\eta),$$

где η — величина первого порядка малости при больших x. Указать исключительные случаи.

3. Показать, что если $P(x)$ обозначает многочлен $ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k$, первый коэффициент a которого положителен, то

$$P(x+h)-P(x)$$

и

$$P(x+2h)-2P(x+h)+P(x)$$

монотонно возрастают, начиная с некоторого значения x.

4. Доказать, что

$$P(x+h)-P(x)\sim nhax^{n-1},\quad P(x+2h)-2P(x+h)+P(x)\sim$$
$$\sim n(n-1)h^2ax^{n-2}$$

при $x\to\infty$.

5. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}=\frac{1}{2}a.$$

[Применить формулу $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$].

6. Показать, что $\sqrt{x+a}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}(1+\eta)$, где η — величина первого порядка малости при больших x.

7. Найти такие значения α и β, чтобы выражение $\sqrt{ax^2+2bx+c}-\alpha x-\beta$ имело пределом нуль при $x\to\infty$, и доказать, что тогда

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{ax^2+2bx+c}-\alpha x-\beta\right\}=\frac{ac-b^2}{2a}.$$

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left\{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right\}$.

9. Доказать, что $\sec x-\operatorname{tg}x\to0$ при $x\to\frac{1}{2}\pi$.

10. Доказать, что $\varphi(x)=1-\cos(1-\cos x)$ — четвертого порядка малости при малых x, и найти предел $\frac{\varphi(x)}{x^4}$ при $x\to0$.

11. Доказать, что $\varphi(x)=x\sin(\sin x)-\sin^2x$ — шестого порядка малости при малых x, и найти предел $\frac{\varphi(x)}{x^6}$ при $x\to0$.

12. Из точки P на продолжении радиуса OA некоторой окружности проведена касательная PT к этой окружности, касающаяся ее в точке T, и

перпендикулярно к OA проведено TN. Показать, что $\frac{NA}{AP} \to 1$, когда P приближается к A.

13. К дуге окружности проведены касательные в ее концах и середине. Пусть Δ — площадь треугольника, образованного хордой дуги и двумя касательными в ее концах, Δ' — площадь треугольника, образованного тремя касательными. Показать, что $\frac{\Delta}{\Delta'} \to 4$, когда длина дуги стремится к нулю.

14. При каких значениях a

$$\frac{a + \sin\frac{1}{x}}{x}$$

стремится (1) к ∞, (2) к $-\infty$ при $x \to 0$?

[К ∞, если $a > 1$, к $-\infty$, если $a < -1$; в остальных случаях функция колеблется].

15. Если $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ при $x = \frac{p}{q}$ и $\varphi(x) = 0$ при иррациональном x, то $\varphi(x)$ непрерывна при всех иррациональных значениях x и разрывна при всех рациональных значениях x.

16. Показать, что функция, график которой изображен на фиг. 29, представляется любой из следующих двух формул:

$$1 - x + [x] - [1 - x], \quad 1 - x - \lim_{n \to \infty} (\cos^{2n+1} \pi x).$$

17. Показать, что функция $\varphi(x)$, равная 0 при $x = 0$, равная $\frac{1}{2} - x$ при $0 < x < \frac{1}{2}$, равная $\frac{1}{2}$ при $x = \frac{1}{2}$, равная $\frac{3}{2} - x$ при $\frac{1}{2} < x < 1$ и равная 1 при $x = 1$, принимает каждое значение между 0 и 1 один и только один раз, когда x возрастает от 0 до 1, но имеет разрывы при $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$. Показать также, что эта функция может быть представлена формулой

$$\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2}[1 - 2x].$$

18. Пусть $\varphi(x) = x$, когда x рационально, и $\varphi(x) = 1 - x$, когда x иррационально. Показать, что $\varphi(x)$ приинимает каждое значение между 0 и 1 один и только один раз, когда x возрастает от 0 до 1, а вместе с тем $\varphi(x)$ разрывна при каждом значении x, кроме $x = \frac{1}{2}$.

19. Доказать, что функция, которая возрастает в каждой точке интервала (a, b), является возрастающей функцией в (a, b).

Показать также, что функция, которая „возрастает справа" в каждой точке интервала (a, b), не обязательно является возрастающей в (a, b), но что если она непрерывна, то она возрастает в (a, b). (*Экз.* 1926 г.)

[Мы говорим, что „$\varphi(x)$ возрастает в точке x", если 1° $\varphi(x') \geqslant \varphi(x)$ для всех x' из некоторого интервала справа от x и 2° $\varphi(x') \leqslant \varphi(x)$ для всех x' и некоторого иитервала слева от x. Если дано только 1°, то мы говорим, что „$\varphi(x)$ возрастает справа".

Мы должны доказать, что $\varphi(x_2) \geqslant \varphi(x_1)$, если $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Разобьем точки ξ интервала (x_1, b) на два класса L и R, относя ξ к L, если $\varphi(x') \geqslant \varphi(x_1)$ для всех x' из (x_1, ξ), и к R — в противном случае, и обозначим через β число, соответствующее этому сечению. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что $\beta = b$ (т. е. что класс R не существует).

Если $\beta < b$ и $\varphi(\beta) \geqslant \varphi(x_1)$, то, по условию 1°, мы можем найти такой интервал справа от β, что в нем $\varphi(x) \geqslant \varphi(\beta) \geqslant \varphi(x_1)$, а это противоречит определению β. Пока мы воспользовались только условием 1°.

Если условие 2° также имеет место, то существуют точки слева от β, в которых $\varphi(x) \leqslant \varphi(\beta) < \varphi(x_1)$, а это опять противоречит определению β. Следовательно, $\beta = b$, что и требовалось доказать. То же утверждение имеет место, если дано только 1°, но $\varphi(x)$ непрерывна, так как тогда $\varphi(x) < \varphi(x_1)$ для значений x слева от β, но достаточно близких к β.

Пример $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x$ для $0 \leqslant x < 1$, $f(x) = x - 1$ для $1 \leqslant x \leqslant 2$ показывает, что утверждение не следует из одного условия 1°.]

20. Когда x возрастает от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$, $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает от -1 до 1. Вывести существование функции $x = \arcsin y$, которая является непрерывной и монотонно возрастающей функцией от y, когда y возрастает от -1 до 1.

21. Показать, что наименьшее по модулю значение $\operatorname{arc\,tg} y$ непрерывно для всех значений y и монотонно возрастает от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$, когда y пробегает все действительные значения.

22. Исследовать, определяет ли уравнение

$$x + y + P(x, y) = 0$$

где $P(x, y)$ — многочлен, не содержащий членов размерности ниже 2, единственную функцию, обращающуюся в 0 при $x = 0$ и непрерывную в окрестности $x = 0$. (*Экз.* 1936 г.)

23. Рассмотреть, аналогично тому, как это было сделано в пп. 109—110, решения уравнений

$$y^2 - y - x = 0, \quad y^4 - y^2 - x^2 = 0, \quad y^4 - y^2 + x^2 = 0$$

в окрестности $x = 0$, $y = 0$.

24. Если $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$ и $\Delta = 2bde - ae^2 - cd^2$, то одно значение y дается выражением

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + O(x^4),$$

где

$$\alpha = -\frac{d}{e}, \quad \beta = \frac{\Delta}{2e^3}, \quad \gamma = \frac{(cd - be)\Delta}{2e^5}.$$

[Если $y - \alpha x = \eta$, то

$$-2e\eta = ax^2 + 2bx(\eta + \alpha x) + c(\eta + \alpha x)^2 = Ax^2 + 2Bx\eta + C\eta^2.$$

Очевидно, что η — второго порядка малости, $x\eta$ — третьего, а η^2 — четвертого; далее,

$$-2e\eta = Ax^2 - \frac{AB}{e}x^3,$$

с точностью до величин четвертого порядка малости.]

25. Если $x = ay + by^2 + cy^3$, то одно значение y дается выражением

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + Q(x^4),$$

где $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = -\frac{b}{a^3}$, $\gamma = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$.

26. Если $x = ay + by^n$, где n — целое число, большее 1, то одно значение y дается выражением

$$y = \alpha x + \beta x^n + \gamma x^{2n-1} + O(x^{3n-2}),$$

где $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = -\frac{b}{a^{n+1}}$, $\gamma = \frac{nb^2}{a^{2n+1}}$.

27. Показать, что наименьший положительный корень уравнения $xy = \sin x$ является непрерывной функцией от y в интервале $(0, 1)$ и монотонно убывает от π до 0, когда y возрастает от 0 до 1. [Эта функция является обратной к $\frac{\sin x}{x}$; применить п. 110.]

28. Наименьший положительный корень уравнения $xy = \operatorname{tg} x$ является непрерывной функцией от y в интервале $(1, \infty)$ и монотонно возрастает от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, когда y возрастает от 1 до ∞.

29. Функция $\varphi(x)$ называется *непрерывной сверху* в точке x, если

$$\varphi(x') < \varphi(x) + \delta$$

для каждого положительного δ и всех x' из некоторого интервала (зависящего от x и δ) с центром в x. Доказать, что функция, непрерывная сверху во всех точках интервала (a, b), имеет точную верхнюю грань, которую она достигает в (a, b).

(*Экз.* 1924 г.)

[Для доказательства существования точной верхней грани M замеиим в доказательстве теоремы 1 п. 103 слово „ограниченная" словами „ограниченная сверху". Чтобы доказать, что $\varphi(x)$ принимает значение M, иужно только сделать соответствующие изменения в рассуждениях п. 105. Мы иайдем, что $\varphi(x)$ принимает вблизи β значения как угодно близкие к M, а это противоречит неравенству $\varphi(x) < \varphi(\beta) + \delta$, если $\varphi(\beta) < M$ и δ достаточно мало.

Мы можем аналогично определить непрерывность снизу неравенством

$$\varphi(x') > \varphi(x) - \delta.$$

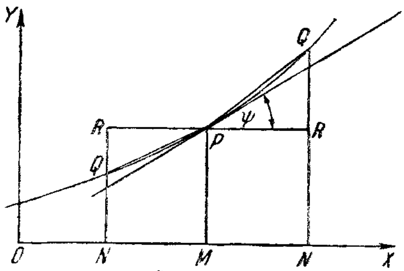
Функция, непрерывная снизу, имеет точную нижнюю грань, которой она достигает. Функция, одновременно непрерывная сверху и непрерывная снизу, просто непрерывна.]

ГЛАВА VI

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

111. Производные или дифференциальные коэффициенты. Вернемся к рассмотрению свойств, которыми мы интуитивно наделяем понятие кривой. Первым и наиболее очевидным свойством является, как мы видели в предыдущей главе, то, в силу которого кривая представляется „связной“, и которое легло в основу нашего определения непрерывной функции.

Такие кривые из числа обычно встречающихся в элементарной геометрии как прямые, окружности и конические сечения обладают значительно большей степенью „правильности“, чем это следует из одной лишь непрерывности. В частности, они имеют в каждой точке определенное *направление;* в каждой точке кривой имеется *касательная* к ней. Касательная к кривой в точке P определяется в элементарной геометрии как „предельное положение хорды PQ при Q стремящемся к P“ вдоль кривой. Посмотрим, что означает существование этого предельного положения.



Фиг. 33

На фиг. 33 P — фиксированная точка на кривой $y=\varphi(x)$, а Q — переменная точка; PM, QN параллельны OY и PR параллельно OX. Обозначим координаты точки P через x и y, а координаты точки Q — через $x+h$, $y+k$, причем h будет, конечно, положительным или отрицательным, в зависимости от того, лежит N правее или левее M.

Мы предполагаем, что в точке P существует касательная к кривой, т. е. что имеется определенное „предельное положение“ хорды PQ. Допустим, что PT, касательная в точке P, образует с OX угол ψ. Тогда утверждение, что PT является предельным положением PQ, равносильно тому, что предел угла QPR при Q стремящемся к P вдоль кривой с любой стороны равен ψ. Мы должны теперь различать два случая: общий и особый.

Общим случаем является тот, когда ψ не равно $\frac{\pi}{2}$, так что PT не параллельно OY. В этом случае угол RPQ стремится к пределу ψ и

$$\frac{RQ}{PR} = \operatorname{tg} RPQ$$

стремится к пределу $\operatorname{tg}\psi$. Но

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{NQ - MP}{MN} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

и, следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \operatorname{tg}\psi. \tag{1}$$

Читатель должен обратить внимание на то, что во всех этих равенствах все длины должны рассматриваться как алгебраические величины, так что, например, RQ на чертеже отрицательно, если точка Q лежит левее P, а также на то, что стремление к пределу должно иметь место при h стремящемся к нулю с обеих сторон.

Таким образом, предположение, что кривая, являющаяся графиком $\varphi(x)$, имеет касательную в точке P, которая не перпендикулярна оси OY, влечет за собой, что $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ *стремится к пределу, когда* $h \to 0$.

Это, конечно, означает, что оба выражения

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \quad \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}$$

стремятся к пределам при $h \to 0$, принимая только положительные значения, и что эти пределы равны. Если эти пределы существуют, но не равны, то кривая имеет в рассматриваемой точке излом, как на фиг. 34.

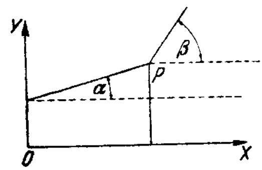
Предположим теперь, что кривая имеет (как, например, окружность или эллипс) касательную в каждой своей точке или по крайней мере в каждой точке некоторой своей части, которая соответствует некоторой области изменения x. Далее предположим, что эта касательная нигде не перпендикулярна к оси x (если кривая — окружность, то, в силу этого условия, мы должны ограничиться рассмотрением дуги меньшей полуокружности). Тогда (1) имеет место для всех значений x из рассматриваемой области его изменения. Каждому такому значению x соответствует некоторое значение $\operatorname{tg}\psi$; $\operatorname{tg}\psi$ является функцией от x, которая определена для всех значений x из этой области. Мы будем называть эту функцию *производной от* $\varphi(x)$ и обозначать ее через

$$\varphi'(x).$$

Вместо термина „производная" употребляется еще термин *дифференциальный коэффициент.* Операция нахождения $\varphi'(x)$ по заданной $\varphi(x)$ называется *дифференцированием.* Эта терминология прочно установилась в силу исторических причин (см. п. 116).

Прежде чем перейти к рассмотрению специального случая $\psi = \frac{\pi}{2}$, мы снабдим наше определение некоторыми общими замечаниями и приведем несколько примеров.

112. Некоторые общие замечания. (1) Существование производной функции $\varphi'(x)$ для всех значений x из интервала $a \leqslant x \leqslant b$ влечет за собой непрерывность $\varphi(x)$ в каждой точке этого интервала. Это ясно из того, что $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ не может стремиться к пределу, если не выполняется соотношение $\lim \varphi(x+h) = \varphi(x)$, которое означает непрерывность $\varphi(x)$.



Фиг. 34

(2) Естественно поставить вопрос, не имеет ли место обратное предложение, т. е. не будет ли каждая непрерывная кривая иметь касательную в каждой точке и каждая функция — дифференциальный коэффициент для каждого значения x, при котором она непрерывна[1]. Ответ, очевидно, должен быть *отрицательным*: достаточно рассмотреть кривую, состоящую из двух полупрямых, исходящих под углом из точки P (фиг. 34). Читатель сразу увидит, что в этом случае $\frac{1}{h}\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}$ имеет предел $\operatorname{tg}\beta$, когда $h \to 0$, принимая положительные значения, и предел $\operatorname{tg}\alpha$, когда $h \to 0$, принимая отрицательные значения.

В этом случае можно, конечно, сказать, что кривая имеет два направления в данной точке. Но следующий пример, хотя он несколько сложнее, показывает, что существуют случаи, когда нельзя сказать, что непрерывная кривая имеет одно или несколько определенных направлений в одной из ее точек. Нарисуем график (фиг. 13, стр. 61) функции $x \sin\frac{1}{x}$. Эта функция не определена при $x=0$ и, следовательно, разрывна при $x=0$. С другой стороны, функция, определенная соотношениями

$$\varphi(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad \varphi(x) = 0 \quad (x=0)$$

непрерывна при $x=0$ (примеры XXXVII. 14, 15), и график этой функции является непрерывной кривой.

[1] Мы отбрасываем особый случай (который нам еще предстоит рассмотреть), в котором кривая имеет касательную, перпендикулярную к OX; если исключить эту возможность, то эти две постановки вопроса эквивалентны.

Но $\varphi(x)$ не имеет производной при $x=0$. Ибо $\varphi'(0)$, по определению, должно было бы быть равным $\lim \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}$ или $\lim \sin \frac{1}{h}$, но этот предел не существует.

Известно, что непрерывная функция от x может не иметь производной ни для одного значения x; однако, соответствующие примеры значительно сложнее. Читателя, который заинтересуется этим вопросом, мы отсылаем к курсу Bromwich, *Infinite series* (изд. 1-е), стр. 490—1, или Hobson, *Theory of functions of a real variable* (изд. 2-е), т. II, стр. 411—12 *).

(3) Понятие производной или дифференциального коэффициента было подсказано нам геометрическими рассмотрениями. Но в самом понятии ничего геометрического нет. Производная $\varphi'(x)$ функции $\varphi(x)$ может быть определена вне зависимости от какого бы то ни было геометрического представления функции $\varphi(x)$ соотношением

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

причем $\varphi(x)$ имеет или не имеет производную для каждого данного значения x, в зависимости от того, существует этот предел или нет. Геометрия кривых является лишь одним из многих разделов математики, в котором понятие производной имеет приложения.

Другой важной областью приложения является динамика. Допустим, что материальная точка движется прямолинейно так, что ее расстояние в данный момент t от некоторой фиксированной точки прямой есть $\varphi(t)$. Тогда „скоростью точки в момент t“ называется, по определению, предел

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$$

при $h\to 0$. Понятие „скорости“ является лишь частным случаем понятия производной функции.

Примеры XXXIX. 1. Если $\varphi(x)$ — постоянная, то $\varphi'(x)=0$. Дать геометрическое толкование этого результата.

2. Если $\varphi(x)=ax+b$, то $\varphi'(x)=a$. Доказать это 1° из формального определения и 2° из геометрических соображений.

3. Если $\varphi(x)=x^m$, где m — положительное целое число, то $\varphi'(x)=mx^{m-1}$.

[Действительно,

$$\varphi'(x)=\lim\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\lim\left\{mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}h+\ldots+h^{m-1}\right\}.$$

Читатель должен отметить, что этот метод неприменим к $x^{p/q}$, где $\frac{p}{q}$ — рациональная дробь, потому что $(x+h)^{p/q}$ не может быть представлено в виде конечной суммы степеней h. Дальше (см. п. 119) мы увидим, что утвержде-

*) См. также, например, П. Александров и А. Колмогоров, *Введение в теорию функций действительного переменного*, стр. 220—222 (изд. 3-е, ГОНТИ, 1938 г.). (*Прим. перев.*)

ние примера остается в силе и для всех рациональных значений m. Пока же читатель найдет поучительным для себя вычислить $\varphi'(x)$ при частных дробных значениях m $\left(\text{например, } m=\frac{1}{2}\right)$ путем каких-либо специальных приемов.]

4. Если $\varphi(x)=\sin x$, то $\varphi'(x)=\cos x$; если $\varphi(x)=\cos x$, то $\varphi'(x)=-\sin x$. [Например, если $\varphi(x)=\sin x$, то мы имеем:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

а пределом этого выражения при $h\to 0$ является $\cos x$, так как

$$\lim\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$$

(вследствие непрерывности функции $\cos x$) и

$$\lim\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$$

(пример XXXVI. 13).]

5. **Уравнения касательной и нормали к кривой** $y=\varphi(x)$. Касательной к кривой в точке (x_0, y_0) является прямая, проходящая через эту точку и образующая с OX угол ψ, для которого $\operatorname{tg}\psi=\varphi'(x_0)$. Ее уравнением поэтому будет

$$y-y_0=\varphi'(x_0)\cdot(x-x_0);$$

уравнением нормали (прямой, перпендикулярной касательной в точке касания) будет

$$\varphi'(x_0)\cdot(y-y_0)+x-x_0=0.$$

Мы предполагаем, что касательная не параллельна оси y. В противном случае очевидно, что уравнением касательной будет $x=x_0$, а уравнением нормали $y=y_0$.

6. Написать уравнения касательной и нормали в любой точке параболы $x^2=4ay$. Показать, что если $x_0=\frac{2a}{m}$, $y_0=\frac{a}{m^2}$, то уравнением касательной в точке (x_0, y_0) будет $x=my+\frac{a}{m}$.

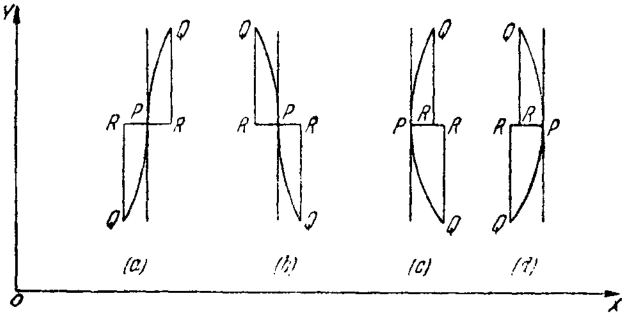
113. Мы видели, что если $\varphi(x)$ разрывна при некотором значении x, то она не может иметь производной при этом значении x. Например, такие функции как $\frac{1}{x}$ или $\sin\frac{1}{x}$, которые не определены при $x=0$ и, следовательно, разрывны при этом значении x, не могут иметь производной при $x=0$. Подобным образом функция $[x]$, разрывная при всех целочисленных значениях x, не имеет производной ни при каком таком значении x.

Пример. Так как $[x]$ постоянна между любыми двумя следующими друг за другом целочисленными значениями x, ее производная, если она существует, имеет значение нуль. Таким образом, производная $[x]$, которую мы можем обозначить через $[x]'$, является функцией, равной нулю для всех значений x, отличных от целочисленных, и не определенной для целочисленных значений x. Интересно отметить, что функция $1 - \frac{\sin \pi x}{\sin \pi x}$ обладает и точности теми же свойствами.

В примере XXXVII. 7 мы видели также, что наиболее часто встречающиеся типы разрывов таких простейших функций как многочлены, дробно-рациональные или тригонометрические функции связаны с соотношениями вида

$$\varphi(x) \rightarrow +\infty$$

или $\varphi(x) \rightarrow -\infty$. Во всех таких случаях производная не существует для некоторых частных значений x.



Фиг. 35

Таким образом, *все разрывы функции $\varphi(x)$ являются также разрывами и ее производной $\varphi'(x)$*. Но обратное предложение неверно, как мы легко увидим, если вернемся к геометрической точке зрения п. 111 и рассмотрим тот частный случай, до сих пор исключавшийся из рассмотрения, когда график $\varphi(x)$ имеет касательную, параллельную OY. Этот случай может быть подразделен на целый ряд случаев, наиболее типичные из которых представлены на фиг. 35. В случаях (c) и (d) функция двузначна с одной стороны от P и не определена с другой стороны. В таких случаях мы можем рассматривать два множества значений $\varphi(x)$, которые принимаются ею с одной и с другой стороны от P, как определяющие разные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, причем верхняя часть кривой соответствует $\varphi_1(x)$.

Читатель легко убедится сам, что в случае (a)

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \rightarrow +\infty$$

при $h \rightarrow 0$, а в случае (b)

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \rightarrow -\infty;$$

в случае (c)

$$\frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} \rightarrow +\infty, \quad \frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} \rightarrow -\infty,$$

а в случае (d)

$$\frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h}\to-\infty,\quad \frac{\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)}{h}\to+\infty,$$

хотя, так как в (c) могут приниматься во внимание только положительные, а в (d) — только отрицательные значения h, в этих последних случаях не может быть речи о существовании производной как таковой.

Мы можем получить примеры, иллюстрирующие эти четыре случая, рассматривая функции, определенные соотношениями

$$(a)\ y^3=x,\ (b)\ y^3=-x,\ (c)\ y^2=x,\ (d)\ y^2=-x$$

в точке $x=0$.

114. Некоторые общие правила дифференцирования. В следующих далее теоремах мы предполагаем, что функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $F'(x)$ для рассматриваемых значений x.

(1) *Если* $\varphi(x)=f(x)+F(x)$, *то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=f'(x)+F'(x).$$

(2) *Если* $\varphi(x)=kf(x)$, *где* k — *постоянная, то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=kf'(x).$$

Вывод этих результатов из общих теорем примера XXXV. 1 мы оставляем в качестве упражнения читателю.

(3) *Если* $\varphi(x)=f(x)F(x)$, *то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=f(x)F'(x)+f'(x)F(x).$$

Действительно,

$$\varphi'(x)=\lim\frac{f(x+h)F(x+h)-f(x)F(x)}{h}=$$

$$=\lim\left\{f(x+h)\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+F(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}=$$

$$=f(x)F'(x)+F(x)f'(x).$$

(4) *Если* $\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}$ *и* $f(x)\neq0$, *то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}.$$

Действительно,

$$\varphi'(x)=\lim\frac{1}{h}\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}.$$

(5) *Если* $\varphi(x)=\frac{f(x)}{F(x)}$ *и* $F(x)\neq0$, *то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)F(x)-f(x)F'(x)}{\{F(x)\}^2}.$$

Это сразу следует из (3) и (4).

(6) *Если* $\varphi(x)=F\{f(x)\}$, *то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=F'\{f(x)\}f'(x).$$

Доказательство этой теоремы требует некоторого внимания [1]).

Положим $f(x)=y$, $f(x+h)=y+k$, так что $k\to 0$ при $h\to 0$ и

$$\frac{k}{h}\to f'(x). \tag{1}$$

Мы должны различать теперь два случая.

(*a*) Допустим, что $f'(x)\neq 0$ и что h мало, но не равно нулю. Тогда $k\neq 0$, в силу (1), и

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{F(y+k)-F(y)}{k}\frac{k}{h}\to F'(y)f'(x).$$

(*b*) Допустим теперь, что $f'(x)=0$ и что h мало, но не равно нулю. Здесь имеются две возможности. Если $k=0$ [2]), то

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=0.$$

Если $k\neq 0$, то

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{F(y+k)-F(y)}{k}\frac{k}{h}.$$

Первый множитель в правой части почти равен $F'(y)$, а второй мал, так как $\frac{k}{h}\to 0$. Следовательно, $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ мало во всех случаях и

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\to 0=F'(y)f'(x).$$

Наша последняя теорема требует нескольких слов для предварительного разъяснения. Предположим, что $x=\psi(y)$, где $\psi(y)$ — непрерывная и строго возрастающая (или убывающая) функция (см. п. 95) в некотором интервале значений y. Тогда мы можем писать $y=\varphi(x)$, где φ является функцией, „обратной" ψ (см. п. 110).

(7) *Если* $y=\varphi(x)$, *где* φ — *функция, обратная* ψ, *так что* $x=\psi(y)$, *и* $\psi(y)$ *имеет производную* $\psi'(y)$, *которая не равна нулю, то* $\varphi(x)$ *имеет производную*

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(y)}.$$

Действительно, если $\varphi(x+h)=y+k$, то $k\to 0$ при $h\to 0$ и

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{(x+h)-x}=\lim_{k\to 0}\frac{(y+k)-y}{\psi(y+k)-\psi(y)}=\frac{1}{\psi'(y)}.$$

---

[1]) Доказательства во многих руководствах (как и в первых трех изданиях этой книги) недостаточно строги. См. заметку проф. Карслоу (H. S. Carslow) в *Bulletin of the American Math. Soc.*, XXIX.

[2]) Ошибка нестрогих доказательств заключается в том, что эта возможность не учитывается.

115. Производные комплексных функций. До сих пор мы предполагали, что $y=\varphi(x)$ является *действительной* функцией от x. Если y является комплексной функцией $\varphi(x)+i\psi(x)$, то мы определяем производную y как $\varphi'(x)+i\psi'(x)$. Читатель легко убедится в том, что теоремы (1)—(5) предыдущего пункта сохраняют силу и для комплексных $\varphi(x)$. Теоремы (6) и (7) обладают аналогами для комплексных функций, которые, однако, опираются на общее понятие „функции комплексного переменного". Мы сталкивались лишь с некоторыми частными случаями этого понятия.

116. Обозначения дифференциального исчисления. Мы уже говорили о том, что *производная* часто называется *дифференциальным коэффициентом.* Часто применяются не только другой термин, но и другие обозначения; производная функция $y=\varphi(x)$ обозначается еще следующим образом:

$$D_x y, \ \frac{dy}{dx}.$$

Из этих обозначений второе является наиболее удобным и применяется чаще всего; однако, читатель должен отдать себе ясный отчет в том, что $\frac{dy}{dx}$ не обозначает „некоторое число dy, деленное на некоторое число dx"; этот символ обозначает „результат некоторой операции D_x или $\frac{d}{dx}$, примененной к функции $y=\varphi(x)$", причем эта операция заключается в образовании частного

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

и в переходе к пределу $h\rightarrow 0$.

Конечно, такое специальное обозначение не было бы принято без особых оснований. Его обоснование заключалось в следующем. Знаменатель h дроби

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

является разностью значений $x+h$ и x независимого переменного x; аналогично, числитель является разностью соответствующих значений $\varphi(x+h)$, $\varphi(x)$ зависимого переменного y. Эти разности можно назвать *приращениями*, соответственно, x и y и обозначить через δx и δy. Тогда дробь принимает вид $\frac{\delta y}{\delta x}$, и по многим причинам представляется удобным обозначить предел этой дроби, т. е. $\varphi'(x)$, через $\frac{dy}{dx}$. Но это обозначение должно пока рассматриваться как чисто символическое. Выражения dy и dx, встречающиеся в нем, не могут быть разделены, и сами по себе они ничего не обозначают; в частности, dy и dx не означают $\lim\delta y$ и $\lim\delta x$, так как эти пределы равны нулю. Читателю следует привыкнуть к этому обозначению, но если оно его затрудняет, то его можно избежать, записывая дифференциальный коэффициент в виде $D_x y$ или применяя обозначения $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, как мы это делали в предыдущих пунктах настоящей главы.

Однако в гл. VII мы увидим, каким образом оказывается возможным определить символы dx и dy так, чтобы они имели самостоятельное значение и чтобы производная $\frac{dy}{dx}$ действительно была их отношением.

Теоремы п. 114 могут быть, конечно, записаны и в этих обозначениях. Они могут быть сформулированы следующим образом:

(1) *если* $y=y_1+y_2$, *то* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}$;

(2) *если* $y=ky_1$, *то* $\frac{dy}{dx}=k\frac{dy_1}{dx}$;

(3) *если* $y=y_1y_2$, *то* $\frac{dy}{dx}=y_1\frac{dy_2}{dx}+y_2\frac{dy_1}{dx}$;

(4) *если* $y=\frac{1}{y_1}$, *то* $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y_1^2}\frac{dy_1}{dx}$;

(5) *если* $y=\frac{y_1}{y_2}$, *то* $\frac{dy}{dx}=\frac{y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}}{y_2^2}$;

(6) *если* y *является функцией от* x, *а* z — *функцией от* y, *то*

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx};$$

(7) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Примеры XL. 1. Если $y=y_1y_2y_3$, то

$$\frac{dy}{dx}=y_2y_3\frac{dy_1}{dx}+y_3y_1\frac{dy_2}{dx}+y_1y_2\frac{dy_3}{dx},$$

а если $y=y_1y_2\ldots y_n$, то

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{r=1}^{n}y_1y_2\ldots y_{r-1}y_{r+1}\ldots y_n\frac{dy_r}{dx}.$$

В частности, если $y=z^n$, то $\frac{dy}{dx}=nz^{n-1}\frac{dz}{dx}$, а если $y=x^n$, то $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$, как было уже иначе доказано в примере XXXIX. 3.

2. Если $y=y_1y_2\ldots y_n$, то

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}+\ldots+\frac{1}{y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

В частности, если $y=z^n$, то $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{n}{z}\frac{dz}{dx}$.

117. Основные формулы. Перейдем теперь к более систематическому исследованию производных некоторых простейших типов функций.

А. Многочлены. Если $\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, то

$$\varphi'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.$$

Иногда бывает удобнее принимать запись многочлена степени n относительно x в так называемой биномиальной форме

$$a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\ldots+a_n.$$

В этом случае

$$\varphi'(x)=n\left\{a_0x^{n-1}+\binom{n-1}{1}a_1x^{n-2}+\binom{n-1}{2}a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}\right\}.$$

Биномиальная форма $\varphi(x)$ символически часто записывается следующим образом *):

$$(a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n \between x,\ 1)^n,$$

и тогда

$$\varphi'(x)=n(a_0,\ a_1,\ldots,\ a_{n-1}\between x,\ 1)^{n-1}.$$

В дальнейшем мы увидим, что многочлен $\varphi(x)$ всегда может быть представлен в виде произведения n множителей:

$$\varphi(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

где α — действительные или комплексные числа. Тогда

$$\varphi'(x)=a_0\sum(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n),$$

причем эта сокращенная запись обозначает, что следует образовать все возможные произведения из $n-1$ множителей и затем их сложить. Этот результат остается в силе и в том случае, когда некоторые из чисел α равны между собой; тогда некоторые слагаемые в правой части повторяются. Читатель легко установит, что если

$$\varphi(x)=a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_\nu)^{m_\nu},$$

то

$$\varphi'(x)=a_0\sum m_1(x-\alpha_1)^{m_1-1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_\nu)^{m_\nu}.$$

Примеры XLI. 1. Показать, что если $\varphi(x)$ — многочлен, то $\varphi'(x)$ является коэффициентом при h в разложении $\varphi(x+h)$ по степеням h.

2. Если $\varphi(x)$ делится на $(x-\alpha)^2$, то $\varphi'(x)$ делится на $x-\alpha$; вообще, если $\varphi(x)$ делится на $(x-\alpha)^m$, то $\varphi'(x)$ делится на $(x-\alpha)^{m-1}$.

3. Наоборот, если $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ *оба* делятся на $x-\alpha$, то $\varphi(x)$ делится на $(x-\alpha)^2$, и если $\varphi(x)$ делится на $x-\alpha$, а $\varphi'(x)$ — на $(x-\alpha)^{m-1}$, то $\varphi(x)$ делится на $(x-\alpha)^m$.

4. Показать, как можно наиболее полно определить кратные корни уравнения $P(x)=0$, где $P(x)$ — многочлен, вместе с порядками их кратности, при помощи элементарных алгебраических действий.

[Если H_1 есть общий наибольший делитель P и P', H_2 — общий наибольший делитель H_1 и P'', H_3 — общий наибольший делитель H_2 и P''' и т. д., то корни уравнения $\dfrac{H_1H_3}{H_2^2}=0$ являются *двойными* корнями уравнения $P=0$,

*) В русской литературе это символическое обозначение совершенно не применяется. (*Прим. перев.*)

корни уравнения $\frac{H_2H_4}{H_3^2}=0$ — *тройными* корнями и т. д. Однако может оказаться невозможным до конца решить уравнения $\frac{H_1H_3}{H_2^2}=0$, $\frac{H_2H_4}{H_3^2}=0, \ldots$. Так, например, если $P(x)=(x-1)^3(x^5-x-7)^2$, то $\frac{H_1H_3}{H_2^2}=x^5-x-7$ и $\frac{H_2H_4}{H_3^2}=x-1$, и мы не можем решить первое уравнение.]

5. Найти все корни, вместе с порядками их кратности, уравнений:
$x^4+3x^3-3x^2-11x-6=0$, $\quad x^6+2x^5-8x^4-14x^3+11x^2+28x+12=0$.

6. Если уравнение $ax^2+2bx+c=0$ имеет двойной корень, т. е. имеет вид $a(x-\alpha)^2=0$, то $2(ax+b)$ должно делиться на $x-\alpha$, так что $\alpha=-\frac{b}{a}$. Это значение x должно удовлетворять уравнению. Проверить, что полученное условие сводится к $ac-b^2=0$.

7. Уравнение
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$
может иметь равные корни в том и только в том случае, когда $a=b=c$.
(*Экз.* 1905 г.)

8. Показать, что уравнение
$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$
имеет двойной корень, если
$$G^2+4H^3=0,$$
где
$$H=ac-b^2, \quad G=a^2d-3abc+2b^3.$$

[Положим $ax+b=y$ и сведем уравнение к виду
$$y^3+3Hy+G=0.$$
Это уравнение должно иметь общий корень с $y^2+H=0$.]

9. Проверить, что если α, β, γ, δ суть корни уравнения
$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0,$$
то уравнение, корнями которого являются
$$\frac{1}{12}a\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)\}$$
и два аналогичных выражения, получаемых из этого круговой перестановкой α, β и γ, имеет вид
$$4y^3-g_2y-g_3=0,$$
где
$$g_2=ae-4bd+3c^2, \quad g_3=ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3.$$
Ясно, что если два из чисел α, β, γ, δ равны, то приведенное кубическое уравнение будет иметь два одинаковых корня. Применяя результат примера 8, мы выведем, что $g_2^3-27g_3^2=0$.

10. Теорема Ролля для многочленов. *Если $\varphi(x)$ — любой многочлен, то между каждой парой корней уравнения $\varphi(x)=0$ лежит корень уравнения $\varphi'(x)=0$.*

Доказательство этой теоремы для более общих классов функций будет дано позже. Здесь мы приводим алгебраическое доказательство, применимое только к многочленам. Предположим, что α и β — два следующих друг за другом корня кратностей m и n соответственно, так что

$$\varphi(x)=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\theta(x),$$

где $\theta(x)$ — многочлен, не меняющий знака для $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\\&=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\theta'(x)+\{m(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^n+n(x-\alpha)^m(x-\beta)^{n-1}\}\theta(x)=\\&=(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}[(x-\alpha)(x-\beta)\theta'(x)+\{m(x-\beta)+n(x-\alpha)\}\theta(x)]=\\&=(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}F(x),\end{aligned}$$

причем $F(\alpha)=m(\alpha-\beta)\theta(\alpha)$ и $F(\beta)=n(\beta-\alpha)\theta(\beta)$ имеют разные знаки. Следовательно $F(x)$, а значит и $\varphi'(x)$, обращаются в нуль при некотором значении x между α и β.

118. B. Дробно-рациональные функции. Если

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где P и Q — многочлены, то из (5) п. 114 сразу следует, что

$$R'(x)=\frac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{\{Q(x)\}^2},$$

и по этой формуле мы можем вычислить производную любой дробно-рациональной функции. Однако получаемое выражение для производной иногда можно упростить. Оно не будет упрощаться, если $Q(x)$ и $Q'(x)$ не имеют общего делителя, т. е. если $Q(x)$ не имеет кратных корней. Но если $Q(x)$ имеет кратные корни, то полученное выше выражение для $R'(x)$ может быть упрощено.

При дифференцировании дробно-рациональных функций часто оказывается удобным разложение на простейшие дроби. Предположим, что $Q(x)$ (как в п. 117) представлено в виде

$$a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_\nu)^{m_\nu}.$$

В учебниках по алгебре доказывается, что $R(x)$ тогда может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\Pi(x)&+\frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\\&+\frac{A_{2,1}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2,m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}}+\ldots,\end{aligned}$$

где $\Pi(x)$ — многочлен, т. е. в виде суммы многочлена и нескольких слагаемых типа

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p},$$

где α есть корень уравнения $Q(x)=0$. Мы уже знаем, как найти производную многочлена, а из теоремы (4) п. 114, или, если α комплексно, из ее расширения, упомянутого в п. 115, сразу следует, что производная последней дробно-рациональной функции равна

$$-\frac{pA(x-\alpha)^{p-1}}{(x-\alpha)^{2p}}=-\frac{pA}{(x-\alpha)^{p+1}}.$$

Теперь мы можем записать производную общей дробно-рациональной функции $R(x)$ в виде

$$\Pi'(x)-\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)^2}-\frac{2A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^3}-\ldots-\frac{A_{2,1}}{(x-\alpha_2)^2}-\frac{2A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^3}-\ldots.$$

Между прочим, мы доказали, что *производная x^m равна mx^{m-1} для всех целочисленных значений m, как положительных, так и отрицательных* (если m отрицательно, то x должно быть отлично от нуля).

Метод, изложенный в этом пункте, оказывается особенно полезным в тех случаях, когда нужно дифференцировать дробно-рациональную функцию несколько раз (см. примеры XLV).

Примеры XLII. 1. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

2. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C}\right)=2\frac{(ax+b)(Bx+C)-(bx+c)(Ax+B)}{(Ax^2+2Bx+C)^2}.$$

3. Если Q имеет множитель $(x-\alpha)^m$, то знаменатель R' (после приведения R' к простейшему виду) делится на $(x-\alpha)^{m+1}$, но ни на какую высшую степень $x-\alpha$.

4. Знаменатель R' не может содержать множитель $x-\alpha$ в *первой* степени. Следовательно, дробно-рациональная функция, знаменатель которой содержит простой множитель, не может быть производной дробно-рациональной функции. Например, $\frac{1}{x}$ не является производной дробно-рациональной функции.

119. С. Алгебраические функции. Результаты предыдущих пунктов и теорема (6) п. 114 позволяют нам находить производные любых явных алгебраических функций.

Такой наиболее важной функцией является x^m, где m — рациональное число. Мы уже видели (см. п. 118), что производная этой функции равна mx^{m-1}, если m — положительное или отрицательное целое число. Покажем теперь, что этот результат остается в силе (при условии, что $x\neq 0$) и для всех рациональных значений m. Положим $y=x^m=x^{p/q}$, где p и q — целые числа и q положительно, и пусть $z=x^{1/q}$, так что $x=z^q$ и $y=z^p$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{p}{q}z^{p-q}=mx^{m-1}.$$

Этот результат может быть также выведен как следствие из примера XXXVI. 3. Действительно, если $\varphi(x)=x^m$, то мы имеем

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^m-x^m}{\xi-x}=mx^{m-1}.$$

Ясно также, что и более общая формула

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m=ma(ax+b)^{m-1}$$

имеет место для всех рациональных значений m.

Дифференцирование *неявных* алгебраических функций связано с некоторыми теоретическими трудностями, к которым мы вернемся в гл. VII. Но практическое вычисление производных таких функций осуществляется весьма просто; метод их дифференцирования достаточно проиллюстрировать на примере. Допустим, что y задано с помощью уравнения

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Дифференцируя по x, найдем:

$$x^2+y^2\frac{dy}{dx}-a\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

Примеры XLIII. 1. Найти производные следующих функций:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad \sqrt{\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C}},\quad (ax+b)^m(cx+d)^n.$$

2. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}},\quad \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

3. Найти производную y, если

(1) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, (2) $x^5+y^5-5ax^2y^2=0$.

120. D. Трансцендентные функции. Мы уже доказали, что

$$D_x\sin x=\cos x,\quad D_x\cos x=-\sin x$$

(см. пример XXXIX. 4).

При помощи теорем (4) и (5) п. 114 читатель легко найдет, что

$$D_x\operatorname{tg}x=\sec^2 x,\quad D_x\operatorname{ctg}x=-\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$D_x\sec x=\operatorname{tg}x\sec x,\quad D_x\operatorname{cosec}x=-\operatorname{ctg}x\operatorname{cosec}x.$$

При помощи теоремы (7) мы можем легко найти производные обратных круговых функций. Читателю предлагается проверить следующие формулы:

$$D_x \arcsin x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D_x \arccos x = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$D_x \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}, \quad D_x \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$D_x \operatorname{arc\,sec} x = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad D_x \operatorname{arc\,cosec} x = \mp \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

В случае функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,cosec} x$ должен быть взят знак, совпадающий со знаком $\cos(\arcsin x)$, а в случае $\arccos x$ и $\operatorname{arc\,sec} x$ — знак, совпадающий со знаком $\sin(\arccos x)$.

Весьма важны также и следующие более общие формулы:

$$D_x \arcsin \frac{x}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad D_x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} = \frac{a}{x^2+a^2},$$

которые легко выводятся из теорем (6) и (7) п. 114. В первой из них знак следует брать совпадающим со знаком $a\cos\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)$, так как

$$a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pm\sqrt{a^2-x^2},$$

в зависимости от того, положительно a или отрицательно.

Наконец, с помощью теоремы (6) п. 114 мы можем дифференцировать сложные функции, состоящие как из алгебраических, так и из тригонометрических функций. Таким образом, мы можем вычислить производные таких функций, как приведенные в ниже следующих примерах.

Примеры XLIV[1]. 1. Найти производные функций

$$\cos^m x,\ \sin^m x,\ \cos(x^m),\ \sin(x^m),\ \cos(\sin x),\ \sin(\cos x),$$

$$\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}, \quad \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}},$$

$$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \quad (1+x)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

2. Продифференцировать

$$\arcsin\sqrt{1-x^2},\ \operatorname{tg}(\arcsin x),\ \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos x}{1+\sin x},\ \operatorname{arc\,tg}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}.$$

(*Экз.* 1926, 1929, 1930 гг.)

---

[1] В этих примерах m означает рациональное число, а $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ имеют такие значения, что содержащие их функции вещественны. Неоднозначность знака не указывается.

3. Продифференцировать

$$\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\cos x,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{a+x}{1-ax}$$

и объяснить, почему результаты дифференцирования имеют столь простой вид.

4. Продифференцировать

$$\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}},\qquad -\frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc}\sin\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

5. Показать, что каждая из функций

$$2\operatorname{arc}\sin\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}},\quad 2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-x}},\quad \operatorname{arc}\sin\frac{2\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)}}{\alpha-\beta}$$

имеет производную

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)}}.$$

6. Доказать, что

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}}\right\}=\sqrt{\frac{3}{\cos\theta\cos 3\theta}}.$$

(*Экз.* 1904 г.)

7. Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{C(Ac-aC)}}\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{C(ax^2+c)}{c(Ax^2+C)}}\right]=\frac{1}{(Ax^2+C)\sqrt{ax^2+c}}.$$

8. Каждая из функций

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc}\cos\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x},\quad \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right\}$$

имеет производную

$$\frac{1}{a+b\cos x}.$$

9. Если $X=a+b\cos x+c\sin x$ и

$$y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arc}\cos\frac{aX-a^2+b^2+c^2}{X\sqrt{b^2+c^2}},$$

то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{X}.$$

10. Доказать, что производная функции $F\{f[\varphi(x)]\}$ равна

$$F'\{f[\varphi(x)]\}f'[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

и распространить результат на более сложные случаи.

11. Если u и v — функции от x, то

$$D_x\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{u}{v}=\frac{vD_xu-uD_xv}{u^2+v^2}.$$

12. Производная функции $y=(\operatorname{tg}x+\sec x)^m$ равна $my\sec x$.

13. Производная функции $y=\cos x+i\sin x$ равна iy.

14. Продифференцировать $x\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$. Показать, что значения x, при

которых касательные к кривым $y=x\cos x$, $y=\dfrac{\sin x}{x}$ параллельны оси x, являются соответственно корнями уравнений $\operatorname{ctg} x=x$, $\operatorname{tg} x=x$.

15. Нетрудно видеть (см. пример XVII. 5), что уравнение $\sin x=ax$, где a положительно, не имеет действительных корней, кроме $x=0$, если $a\geqslant 1$, и имеет конечное число корней, которое возрастает при убывающем a, если $a<1$. Доказать, что значениями a, при которых число корней изменяется, являются значения $\cos\xi$, где ξ является положительным корнем уравнения $\operatorname{tg}\xi=\xi$. [Искомыми являются значения a, при которых $y=ax$ касается кривой $y=\sin x$.]

16. Если $\varphi(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $\varphi(0)=0$, то

$$\varphi'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

если $x\neq 0$ и $\varphi'(0)=0$. Далее, $\varphi'(x)$ разрывна при $x=0$ (см. п. 112 (2)).

17. Найти уравнения касательной и нормали в точке (x_0, y_0) к окружности $x^2+y^2=a^2$ и привести их к формам $xx_0+yy_0=a^2$ и, соответственно, $xy_0-yx_0=0$.

18. Найти уравнения касательной и нормали в любой точке эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

19. Уравнениями касательной и нормали к кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ в точке, которой соответствует значение параметра t, являются уравнения

$$\frac{x-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y-\psi(t)}{\psi'(t)},\quad \{x-\varphi(t)\}\,\varphi'(t)+\{y-\psi(t)\}\,\psi'(t)=0.$$

121. Повторное дифференцирование. Исходя из $\varphi'(x)$, мы можем образовать новую функцию $\varphi''(x)$ так же, как из $\varphi(x)$ мы образовывали $\varphi'(x)$. Эта функция называется *второй производной* или *вторым дифференциальным коэффициентом* $\varphi(x)$. Вторая производная функции $y=\varphi(x)$ может быть записана в любой из следующих форм:

$$D_x^2 y,\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y,\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично мы можем определить *n-ую производную* или *n-ый дифференциальный коэффициент* функции $y=\varphi(x)$, которые могут быть записаны в любой из следующих форм:

$$\varphi^{(n)}(x),\quad D_x^n y,\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n y,\quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Общая формула для n-ой производной данной функции может быть, однако, найдена лишь в отдельных специальных случаях. Некоторые из этих случаев приведены в следующих примерах.

Примеры XLV. 1. Если $\varphi(x)=x^m$, то

$$\varphi^{(n)}(x)=m(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

Эта формула дает нам возможность записать n-ую производную любого многочлена.

2. Если $\varphi(x)=(ax+b)^m$, то

$$\varphi^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}.$$

В этих двух примерах m может иметь любое рациональное значение. Если m — положительное целое число, то $\varphi^{(n)}(x)=0$ для $n>m$.

3. Формула

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{A}{(x-\alpha)^p}=(-1)^n\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)A}{(x-\alpha)^{p+n}}$$

дает нам возможность записать n-ую производную любой дробно-рациональной функции, представленной в виде суммы простейших дробей.

4. Доказать, что n-ая производная функции $\frac{1}{1-x^2}$ равна

$$\frac{1}{2}(n!)\{(1-x)^{-n-1}+(-1)^n(1+x)^{-n-1}\}.$$

5. Найти n-ые производные функций

$$\frac{x+1}{x^2-4},\quad \frac{x^4}{(x-1)(x-2)},\quad \frac{4x}{(x-1)^2(x+2)}.$$

(*Экз.* 1930, 1933, 1934 гг.)

6. Показать, что значение $\left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{x^3}{x^2-1}$ при $x=0$ равно 0, если n четно, и равно $-n!$, если n нечетно и больше 1.

(*Экз.* 1935 г.)

7. **Теорема Лейбница.** Если y есть произведение uv и мы можем образовать n первых производных от u и v, то мы можем образовать n-ую производную от y с помощью *теоремы Лейбница*, содержащей следующее правило:

$$(uv)_n=u_nv+\binom{n}{1}u_{n-1}v_1+\binom{n}{2}u_{n-2}v_2+\ldots+\binom{n}{r}u_{n-r}v_r+\ldots+uv_n,$$

где индексы обозначают дифференцирование, так что, например, u_n обозначает n-ую производную от u. Для доказательства теоремы заметим, что

$$(uv)_1=u_1v+uv_1,$$
$$(uv)_2=u_2v+2u_1v_1+uv_2$$

и т. д. Очевидно, что повторяя этот процесс, мы придем к формуле вида

$$(uv)_n=u_nv+a_{n,1}u_{n-1}v_1+a_{n,2}u_{n-2}v_2+\ldots+a_{n,r}u_{n-r}v_r+\ldots+uv_n.$$

Допустим, что $a_{n,r}=\binom{n}{r}$ для $r=1, 2, \ldots, n-1$ и докажем, что если это так, то $a_{n+1,r}=\binom{n+1}{r}$ для $r=1, 2, \ldots, n$. Применяя метод математической индукции, получаем, что $a_{n,r}=\binom{n}{r}$ для всех встречающихся значений n и r.

При образовании $(uv)_{n+1}$ дифференцированием $(uv)_n$ мы легко убеждаемся в том, что коэффициентом при $u_{n+1-r}v_r$ будет выражение

$$a_{n,r}+a_{n,r-1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r};$$

это и доказывает теорему.

8. n-ая производная $x^m f(x)$ равна

$$\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}f(x)+n\frac{m!}{(m-n+1)!}x^{m-n+1}f'(x)+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{m!}{(m-n+2)!}x^{m-n+2}f''(x)+\ldots,$$

причем ряд должен быть продолжен до $(n+1)$-го члена, если он не обрывается раньше.

9. Доказать, что $D_x^n\cos x=\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$, $D_x^n\sin x=\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$.

10. Найти n-ые производные фукций

$$\cos^2 x\sin x,\quad \cos x\cos 2x\cos 3x,\quad x^3\cos x.$$

(*Экз.* 1925, 1930, 1934 гг.)

11. Если $y=A\cos mx+B\sin mx$, то $D_x^2y+m^2y=0$. Если

$$y=A\cos mx+B\sin mx+P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, то $D_x^{n+3}y+m^2D_x^{n+1}y=0$.

12. Если $x^2D_x^2y+xD_xy+y=0$, то

$$x^2D_x^{n+2}y+(2n+1)xD_x^{n+1}y+(n^2+1)D_x^ny=0.$$

[Дифференцировать n раз и применить теорему Лейбница.]

13. Если U_n обозначает n-ую производную функции

$$\frac{Lx+M}{x^2-2Bx+C},$$

то

$$\frac{x^2-2Bx+C}{(n+1)(n+2)}U_{n+2}+\frac{2(x-B)}{n+1}U_{n+1}+U_n=0.$$

(*Экз.* 1900 г.)

[Сначала вывести уравиение при $n=0$; затем n раз дифференцировать и применить теорему Лейбница.]

14. Показать, что если $u=\operatorname{arc\,tg}x$, то

$$(1+x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+2x\frac{du}{dx}=0,$$

и отсюда определить значения всех производных от u при $x=0$.

(*Экз.* 1931 г.)

15. **n-ые производные от** $\frac{a}{a^2+x^2}$ и $\frac{x}{a^2+x^2}$. Так как

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right),\quad \frac{x}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-ai}+\frac{1}{x+ai}\right),$$

мы имеем:

$$D_x^n\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{2i}\left\{\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right\},$$

и аналогичную формулу для $D_x^n\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)$. Если $\rho=\sqrt{x^2+a^2}$ и θ — наименьший по модулю угол, косинус и синус которого равны соответственно $\frac{x}{\rho}$ и $\frac{a}{\rho}$, то $x+ai=\rho\operatorname{Cis}\theta$ и $x-ai=\rho\operatorname{Cis}(-\theta)$, так что

$$D_x^n\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}n!i\rho^{-n-1}[\operatorname{Cis}(n+1)\theta-\operatorname{Cis}\{-(n+1)\theta\}]=$$
$$=(-1)^n n!(x^2+a^2)^{-1/2(n+1)}\sin\left\{(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}\right\}.$$

Аналогично,

$$D_x^n\frac{x}{a^2+x^2}=(-1)^n n!(x^2+a^2)^{-1/2(n+1)}\cos\left\{(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}\right\}.$$

16. Доказать, что

$$D_x^n\frac{\cos x}{x}=\left\{P_n\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)+Q_n\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)\right\}x^{-n-1},$$
$$D_x^n\frac{\sin x}{x}=\left\{P_n\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)-Q_n\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)\right\}x^{-n-1},$$

где P_n и Q_n — многочлены относительно x степеней соответственно n и $n-1$.

17. Вывести формулы

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3},\quad \frac{d^3x}{dy^3}=-\frac{\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dy}{dx}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5}.$$

122. Некоторые общие теоремы, относящиеся к производным. В последующем важную роль играет различие между „замкнутым" и „открытым" интервалом. *Замкнутым* интервалом (a, b) называется множество значений x, для которых $a\leqslant x\leqslant b$. *Открытый* интервал определяется неравенствами $a<x<b$ (т. е. является замкнутым интервалом без концевых точек)[1].

Мы будем рассматривать функции непрерывные в замкнутом интервале (a, b) и дифференцируемые в открытом интервале (a, b). Иначе говоря, мы будем предполагать, что наша функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\varphi(x)$ непрерывна для $a\leqslant x\leqslant b$, причем непрерывность в концах интервала понимается в смысле, разъясненном в конце п. 99;

(2) $\varphi'(x)$ существует для каждого x, для которого $a<x<b$.

Может показаться странным, что в одном условии интервал предполагается замкнутым, а в другом — открытым, но мы увидим, что это различие играет важную роль. Ясно, что если мы ничего не знаем о $\varphi(x)$ вне (a, b), то мы не можем распространить условие (2) на концы интервала без некоторых дополнительных определений.

Начнем с теоремы, относящейся к частному значению x.

ТЕОРЕМА А. *Если $\varphi'(x_0)>0$, то $\varphi(x)<\varphi(x_0)$ для всех значений x, меньших x_0, но достаточно близких к нему, и $\varphi(x)>\varphi(x_0)$ для всех значений x, бо́льших x_0, но достаточно близких к нему.*

---

[1]) Мы могли бы определить полузамкнутые интервалы неравенствами $a<x\leqslant b$ или $a\leqslant x<b$, но мы не будем применять эти термины.

Действительно, $\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$ стремится к положительному пределу $\varphi'(x_0)$ при $h\to 0$. Это может иметь место только в том случае, когда $\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$ и h имеют одинаковые знаки при достаточно малых значениях h, а это и составляет утверждение теоремы. С геометрической точки зрения результат, конечно, очевиден, так как неравенство $\varphi'(x)>0$ означает, что касательная к кривой образует положительный острый угол с осью x. Читателю следует сформулировать соответствующую теорему для того случая, когда $\varphi'(x)<0$.

Утверждение теоремы А мы будем формулировать так: $\varphi(x)$ *строго возрастает при* $x=x_0$ [1]).

Следующая исключительно важная теорема известна под именем теоремы Ролля.

ТЕОРЕМА В. *Если $\varphi(x)$ непрерывна в замкнутом и дифференцируема в открытом интервале и ее значения на концах интервала a и b равны, то в открытом интервале найдется точка, в которой* $\varphi'(x)=0$.

Мы можем предположить, что

$$\varphi(a)=0, \quad \varphi(b)=0,$$

так как если $\varphi(a)=\varphi(b)=k$ и $k\neq 0$, то мы можем рассмотреть функцию $\varphi(x)-k$ вместо $\varphi(x)$.

Имеются две возможности. Если $\varphi(x)=0$ во всем интервале (a, b), то $\varphi'(x)=0$ для $a<x<b$ и утверждение очевидно.

Если же, с другой стороны, $\varphi(x)$ не всегда равна нулю, то существуют значения x, для которых она либо положительна, либо отрицательна.

Допустим, например, что функция в некоторых точках положительна. Тогда $\varphi(x)$ имеет точную верхнюю грань M в (a, b) и $\varphi(x)=M$ для некоторого ξ из (a, b) (по теореме 2 п. 103), причем очевидно, что ξ не равно ни a, ни b. Если бы $\varphi'(\xi)$ было положительно или отрицательно, то, по теореме А, вблизи ξ существовали бы значения x, для которых $\varphi(x)>M$, что противоречит определению M. Следовательно, $\varphi'(\xi)=0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\varphi(x)$ непрерывна в замкнутом и дифференцируема в открытом интервале и $\varphi'(x)>0$ для всех x в открытом интервале, то $\varphi(x)$ является строго возрастающей (в смысле п. 95) функцией от x в этом интервале.*

Мы должны доказать, что $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ для $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. Предположим сначала, что $a<x_1<x_2<b$.

---

[1]) Ср. пример 19 на стр. 204—5.

Если $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$, то, по теореме B, между x_1 и x_2 должно существовать такое значение x, для которого $\varphi'(x)=0$, что противоречит нашей предпосылке.

Если же $\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$, то, по теореме A, существует такое x_3, близкое к x_1 и большее его, что $\varphi(x_3)>\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$, и, следовательно, по п. 101, такое x_4 между x_3 и x_2, что $\varphi(x_4)=\varphi(x_1)$. Отсюда, по теореме B, следует, что существует значение x между x_1 и x_4, для которого $\varphi'(x)=0$, что опять противоречит нашей предпосылке.

Таким образом, $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$.

Остается распространить неравенство на случаи, когда $x_1=a$ или $x_2=b$. Из уже доказанного следует, что

$$\varphi(x)<\varphi(x')$$

если $a<x<x'<b$, так что $\varphi(x)$ строго убывает, когда x приближается к a справа. Следовательно,

$$\varphi(a)=\lim_{x\to a+0}\varphi(x)<\varphi(x')$$

и, аналогично, $\varphi(x')<\varphi(b)$.

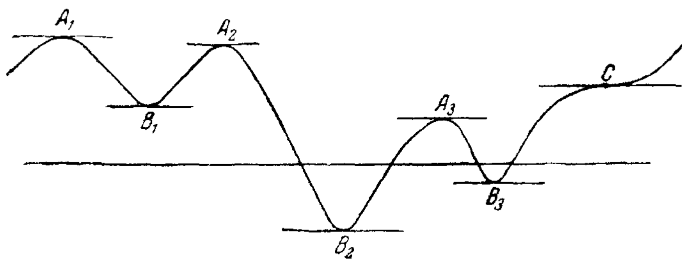
СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\varphi'(x)>0$ в интервале (a, b) и $\varphi(a)\geqslant 0$, то $\varphi(x)$ положительна в интервале (a, b).*

Читателю следует внимательно сравнить первое из этих следствий с теоремой A. Если, как в теореме A, мы предполагаем только, что $\varphi'(x)$ положительна *в единственной точке* $x=x_0$, то мы можем доказать, что $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$, когда x_1 и x_2 достаточно близки к x_0 и $x_1<x_0<x_2$. Действительно, по теореме A, $\varphi(x_1)<\varphi(x_0)$ и $\varphi(x_2)>\varphi(x_0)$. Но отсюда нельзя сделать вывод, что существует интервал, содержащий x_0, в котором $\varphi(x)$ является строго возрастающей функцией, так как предположение, что x_1 и x_2 лежат с разных сторон от x_0, существенно для нашего заключения. Мы вскоре еще вернемся к этому вопросу (см. п. 125) и проиллюстрируем его на примере.

123. Максимумы и минимумы. Говорят, что функция $\varphi(x)$ при $x=\xi$ имеет ***максимум*** $\varphi(\xi)$, если $\varphi(\xi)$ больше любого другого значения, принимаемого $\varphi(x)$ в непосредственной близости от $x=\xi$, т. е. если мы можем найти такой интервал $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ значений x, что $\varphi(\xi)>\varphi(x)$, когда $\xi-\varepsilon<x<\xi$ и когда $\xi<x<\xi+\varepsilon$. Аналогично определяется ***минимум***. Точки A соответствуют максимумам, а точки B — минимумам функции, график которой изображен на фиг. 36. Следует заметить, что то обстоятельство, что A_3 соответствует максимуму, а B_1 — минимуму, вполне совместимо с тем, что значение функции в B_1 больше чем в A_3.

ТЕОРЕМА C. **Необходимым** *условием для того чтобы $\varphi(\xi)$ было максимумом или минимумом дифференцируемой функции $\varphi(x)$, является $\varphi'(\xi)=0$.*

Это сразу следует из теоремы A. Что условие не является достаточным, видно из рассмотрения точки C на фиг 36. Так, если $y=x^3$, то $\varphi'(x)=3x^2$, что обращается в нуль при $x=0$. Но $x=0$ не дает ни максимума, ни минимума x^3, что видно на графике этой функции (фиг. 9, стр. 53).



Фиг. 36

Но $\varphi(\xi)$ *будет заведомо максимумом, если* $\varphi'(\xi)=0$ *и* $\varphi'(x)>0$ *для всех значений* x, *меньших* ξ, *но близких к* ξ, *а* $\varphi'(x)<0$ — *для всех значений* x, *бо́льших* ξ, *но близких к* ξ. А если имеют место неравенства, обратные двум последним, то $\varphi(\xi)$ будет минимумом. Ибо тогда мы можем (по следствию 1 п. 122) найти такой интервал $(\xi-\varepsilon, \xi)$, в котором $\varphi(x)$ возрастает с возрастанием x, и такой интервал $(\xi, \xi+\varepsilon)$, в котором она убывает с возрастанием x.

Этот результат может быть сформулирован и так: если знак $\varphi'(x)$ меняется при $x=\xi$ с положительного на отрицательный, то $\varphi(x)$ достигает максимума при $x=\xi$, а если знак $\varphi'(x)$ меняется в обратном направлении, то $\varphi(x)$ достигает минимума.

Максимум, как он был определен выше, является максимумом *в строгом смысле* этого слова: $\varphi(\xi)>\varphi(x)$ для всех x, близких к ξ. Мы могли бы ослабить наше определение и требовать только выполнения неравенства $\varphi(\xi)\geqslant\varphi(x)$ для всех x, близких к ξ. При таком определении постоянная имела бы, например, максимум (и минимум) при каждом значении переменного. Теорема C все же имела бы место.

Максимумы и минимумы иногда называют *экстремальными* значениями.

124. Можно указать еще другие условия существования максимума и минимума, которые часто оказываются полезными. Предположим, что $\varphi(x)$ имеет вторую производную $\varphi''(x)$; существование $\varphi''(x)$, конечно, вовсе не следует из существования $\varphi'(x)$, точно так же, как существование $\varphi'(x)$ не следует из существования $\varphi(x)$. Но в большинстве тех случаев, с которыми нам придется иметь дело, функции обладают вторыми производными.

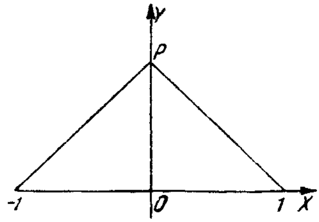
ТЕОРЕМА D. *Если $\varphi'(\xi)=0$ и $\varphi''(\xi)\neq 0$, то $\varphi(x)$ имеет максимум или минимум при $x=\xi$, точнее — максимум, если $\varphi''(\xi)<0$, и минимум, если $\varphi''(\xi)>0$.*

Допустим, например, что $\varphi''(\xi)<0$. Тогда, по теореме A, $\varphi'(x)$ положительна, когда x меньше ξ, но достаточно близкó к нему, и отрицательна, когда x больше ξ, но достаточно близкó к нему. Таким образом, $\varphi(x)$ при $x=\xi$ имеет максимум.

125. Выше мы предполагали, что $\varphi(x)$ имеет производную для всех значений x в рассматриваемом интервале. Если это условие не удовлетворяется, то теоремы перестают быть справедливыми. Так, теорема B не верна для функции

$$y=1-\sqrt{x^2},$$

где корень квадратный берется со знаком плюс. График этой функции изображен на фиг. 37. Здесь $\varphi(-1)=0$, $\varphi(1)=0$, но $\varphi'(x)$, как видно из чертежа, равна 1 для отрицательных x, и -1 для положительных x, и никогда не обращается в нуль. При $x=0$ производная не существует и не существует касательной к графику в точке P. Однако при $x=0$, очевидно, имеется максимум $\varphi(x)$, но достаточное условие максимума неприменимо.



Фиг. 37

Мы предполагали только существование $\varphi'(x)$. В частности, мы не предполагали, что $\varphi'(x)$ *сама является непрерывной функцией*. В связи с этим возникает следующий интересный вопрос: *может ли* функция $\varphi(x)$ иметь производную для всех значений x, которая не является непрерывной функцией? Другими словами, может ли кривая иметь касательную в каждой точке, причем, однако, направление касательной не меняется непрерывно? Интуиция нам как будто подсказывает отрицательный ответ; но не представляет большого труда показать, что это не так.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, определенную при $x\neq 0$ соотношением

$$\varphi(x)=x^2\sin\frac{1}{x},$$

и положим $\varphi(0)=0$. Тогда $\varphi(x)$ непрерывна при всех значениях x. Если $x\neq 0$, то

$$\varphi'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

тогда как

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=0.$$

Таким образом, $\varphi'(x)$ существует для всех значений x. Но $\varphi'(x)$ разрывна при $x=0$, так как $2x\sin\frac{1}{x}$ стремится к 0 при $x\to 0$, а $\cos\frac{1}{x}$ колеблется между верхним и нижним пределами $+1$ и -1, так что $\varphi'(x)$ колеблется между этими же пределами.

По существу этот же пример может служить иллюстрацией к вопросу, затронутому в конце п. 122. Пусть

$$\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} + \alpha x,$$

где $0 < \alpha < 1$, если $x \neq 0$, и $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'(0) = \alpha > 0$. Таким образом, условия теоремы А п. 122 удовлетворены. Но если $x \neq 0$, то

$$\varphi'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \alpha,$$

а это выражение колеблется между пределами $\alpha - 1$ и $\alpha + 1$ при $x \to 0$. Так как $\alpha - 1 < 0$, то мы можем найти значения x, как угодно близкие к нулю, для которых $\varphi'(x) < 0$. Поэтому не существует никакого интервала, содержащего $x = 0$, в котором $\varphi(x)$ являлась бы строго возрастающей функцией от x.

Однако $\varphi'(x)$ не может иметь так называемого „простого“ разрыва (гл. V, пример XXXVII.18). Если $\varphi'(x) \to a$ при $x \to +0$, $\varphi'(x) \to b$ при $x \to -0$ и $\varphi'(0) = c$, то $a = b = c$, и $\varphi'(x)$ непрерывна при $x = 0$. Доказательство см. в п. 126, пример XLVII. 5.

Примеры XLVI. 1. Проверить теорему В для функций

$$\varphi(x) = (x-a)^m (x-b)^n \quad \text{и} \quad \varphi(x) = (x-a)^m (x-b)^n (x-c)^p,$$

где m, n и p — положительные целые числа и $a < b < c$.

[Первая из этих функций обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$. Производная

$$\varphi'(x) = (x-a)^{m-1} (x-b)^{n-1} \{(m+n)x - mb - na\}$$

обращается в нуль при $x = \frac{mb+na}{m+n}$, лежащем между a и b. Во втором случае мы должны проверить, что квадратное уравнение

$$(m+n+p)x^2 - \{m(b+c) + n(c+a) + p(a+b)\}x + mbc + nca + pab = 0$$

имеет корни между a и b и между b и c.]

2. Показать, что $x - \sin x$ является возрастающей функцией в любом интервале значений x и что $\operatorname{tg} x - x$ возрастает, когда x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. При каких значениях a функция $ax - \sin x$ является монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией от x?

3. Показать, что $\frac{x}{\sin x}$ монотонно возрастает, когда x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

(*Экз.* 1927 г.)

4. Показать, что $\operatorname{tg} x - x$ возрастает при x возрастающем от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ и т. д., и вывести отсюда, что уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет по одному корню в каждом из этих интервалов (см. пример XVII. 4).

5. Вывести из примера 2, что $\sin x - x < 0$, если $x > 0$, отсюда, что

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 > 0,$$

а отсюда, что

$$\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0.$$

Вообще, доказать, что если

$$C_{2m} = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \ldots - (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

$$S_{2m+1} = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \ldots - (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

и $x > 0$, то C_{2m} и S_{2m+1} положительны или отрицательны, в зависимости от того, будет m нечетным или четным.

6. Если $f(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и имеют одинаковый знак в каждой точке интервала (a, b), то этот интервал может содержать не более одного корня каждого из уравнений $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$.

7. Пусть функции u и v и их производные u' и v' непрерывны в некотором интервале значений x и пусть $uv' - u'v$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала. Показать, что тогда между любыми двумя корнями уравнения $u = 0$ лежит корень уравнения $v = 0$, и наоборот. Проверить эту теорему для $u = \cos x$, $v = \sin x$.

[Если v не обращается в нуль между двумя корнями уравнения $u = 0$, скажем α и β, то функция $\frac{u}{v}$ непрерывна в интервале (α, β) и обращается в нуль на его концах. Следовательно, производная

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

должна обратиться в нуль между α и β, что противоречит нашим предпосылкам.]

8. Найти наибольшее и наименьшее значения $x^3 - 18x^2 + 96x$ в интервале $(0, 9)$.

(*Экз.* 1931 г.)

9. Исследовать максимумы и минимумы функции $(x-a)^m (x-b)^n$, где m и n — положительные целые числа, и рассмотреть разные случаи, которые могут иметь место при четных и нечетных m и n. Начертить график функции.

10. Показать, что функция $(x+5)^2 (x^3 - 10)$ имеет минимум при $x = 1$, и исследовать другие экстремальные значения.

(*Экз.* 1936 г.)

11. Показать, что

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha} - x\right)(4 - 3x^2)$$

имеет один максимум и один минимум и что разность между ними равна

$$\frac{4}{9}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2.$$

Каково наименьшее значение этой разности при различных значениях α?

(*Экз.* 1933 г.)

12. Показать, что $\frac{ax+b}{cx+d}$ не имеет ни максимумов, ни минимумов, каковы бы ни были значения a, b, c, d. Начертить график функции.

13. Исследовать максимумы и минимумы функции

$$y=\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C},$$

где знаменатель имеет комплексные корни.

[Мы можем предположить, что a и A положительны. Производная обращается в нуль, если

$$(ax+b)(Bx+C)-(Ax+B)(bx+c)=0. \qquad (1)$$

Это уравнение должно иметь действительные корни. Действительно, в противном случае производная имела бы всегда один и тот же знак, а это невозможно, так как y непрерывна для всех значений x, и $y\to\frac{a}{A}$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Нетрудно убедиться в том, что кривая пересекает прямую $y=\frac{a}{A}$ в одной и только в одной точке и что она лежит над этой прямой для больших положительных значений x и под ней для больших отрицательных значений, если $\frac{b}{a}>\frac{B}{A}$, и наоборот, если $\frac{b}{a}<\frac{B}{A}$. Таким образом, алгебраически бóльший корень уравнения (1) дает максимум, если $\frac{b}{a}>\frac{B}{A}$, и минимум в противном случае.]

14. Максимальное и минимальное значения $ax^2+2bx+c-\lambda(Ax^2+2Bx+C)$ равны значениям λ, для которых это выражение является точным квадратом. [Это условие того, что $y=\lambda$ касается кривой.]

15. Если уравнение $Ax^2+2Bx+C=0$ имеет действительные корни, то удобнее всего рассуждать следующим образом. Мы имеем

$$y-\frac{a}{A}=\frac{2\lambda x+\mu}{A(Ax^2+2Bx+C)},$$

где $\lambda=bA-aB$, $\mu=cA-aC$. Полагая, далее, $\xi=2\lambda x+\mu$ и $\eta=\frac{A}{4\lambda^2}(Ay-a)$, получим уравнение вида

$$\eta=\frac{\xi}{(\xi-p)(\xi-q)}.$$

Минимуму y как функции от x соответствует минимум η как функции от ξ, и наоборот. То же справедливо и для максимумов.

Производная от η по ξ обращается в нуль, если

$$(\xi-p)(\xi-q)-\xi(\xi-p)-\xi(\xi-q)=0,$$

т. е. когда $\xi^2=pq$. Таким образом, существуют два действительных корня производной, если p и q имеют одинаковые знаки, и не существует ни одного действительного корня, если они имеют обратные знаки. В последнем случае график η имеет вид, изображенный на фиг. 38*a*.

Общий вид графика в случае p и q положительных изображен на фиг. 38*b*, и легко видеть, что $\xi=\sqrt{pq}$ дает максимум, а $\xi=-\sqrt{pq}$ — минимум.

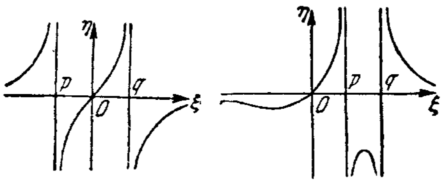
Предыдущее исследование неприменимо в случае $\lambda=0$, т. е. $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}$. Но в этом случае мы имеем:

$$y-\frac{a}{A}=\frac{\mu}{A(Ax^2+2Bx+C)}=\frac{\mu}{A^2(x-x_1)(x-x_2)},$$

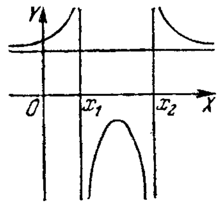
и $\frac{dy}{dx}=0$ дает единственное значение $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$. Пользуясь графиком, мы видим, что это значение дает максимум или минимум, в зависимости от того, является ли μ положительным или отрицательным. График на фиг. 39 соответствует первому из этих случаев.

16. Показать, что

$$\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x-\gamma}$$



Фиг. 38



Фиг. 39

принимает все действительные значения, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ если γ лежит между α и β, а в противном случае принимает все значения кроме тех, которые лежат в некотором интервале длины

$$4\sqrt{|\alpha-\gamma||\beta-\gamma|}\,.$$

17. Показать, что

$$y=\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$$

принимает все действительные значения, если $0<c<1$, и начертить график функции в этом случае.

(*Экз.* 1910 г.)

18. Функция

$$y=\frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$$

имеет экстремальное значение -1 при $x=2$. Найти a и b и показать, что это экстремальное значение является максимумом. Начертить кривую.

(*Экз.* 1930 г.)

19. Определить функцию вида

$$\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C},$$

которая имеет экстремальные значения 2 и 3, соответственно при $x=1$ и $x=-1$, и принимает значение $2\cdot5$ при $x=0$.

(*Экз.* 1908 г.)

20. Максимум и минимум функции

$$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)},$$

где a и b положительны, равны

$$-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2,\quad -\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2.$$

21. Максимум функции

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$$

равен $\frac{2}{27}$.

22. Исследовать на максимумы и минимумы функции

$$\frac{x(x-1)}{x^2+3x+3}, \quad \frac{x^4}{(x-1)(x-3)^3}, \quad \frac{(x-1)^2(3x^2-2x-37)}{(x+5)^2(3x^2-14x-1)}.$$

(*Экз.* 1898 г.)

[Если последнюю из этих функций обозначить через $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то

$$P'Q-PQ'=72(x-7)(x-3)(x-1)(x+1)(x+2)(x+5).]$$

23. Найти максимумы и минимумы функции $a\cos x+b\sin x$. Проверить результат, представив эту функцию в виде $A\cos(x-\alpha)$.

24. Показать, что

$$\frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$$

не имеет ни максимумов, ни минимумов. Начертить график этой функции.

25. Показать, что функция

$$\frac{\sin^2 x}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \quad (0<a<b<\pi)$$

имеет бесконечно много минимумов, равных нулю, и максимумов, равных

$$-4\frac{\sin a\sin b}{\sin^2(a-b)}.$$

(*Экз.* 1909 г.)

26. Наименьшим значением функции $a^2\sec^2 x+b^2\operatorname{cosec}^2 x$ является $(a+b)^2$.

27. Показать, что $\operatorname{tg}3x\operatorname{ctg}2x$ не может лежать между $\frac{1}{9}$ и $\frac{3}{2}$.

28. Показать, что максимумы и минимумы функции $\sin mx\operatorname{cosec}x$, где m — целое число, определяются из уравнения $\operatorname{tg}mx=m\operatorname{tg}x$, и вывести, что

$$\sin^2 mx\leqslant m^2\sin^2 x.$$

(*Экз.* 1926 г.)

[Заметим, что в точке максимума или минимума

$$\frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}=m^2\frac{\cos^2 mx}{\cos^2 x}=m^2\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 mx}=m^2\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+m^2\operatorname{tg}^2 x}.\ ]$$

29. Найти максимумы и минимумы функции y, определенной соотношением

$$\frac{ay+b}{cy+d}=\sin^2 x+2\cos x+1,$$

где $ad\neq bc$.

(*Экз.* 1928 г.)

30. Показать, что если сумма длин гипотенузы и одного из катетов прямоугольного треугольника задана, то площадь треугольника будет наибольшей, когда угол между этими двумя сторонами равен 60°.

(*Экз.* 1909 г.)

31. Через фиксированную точку (a, b) проведена прямая, пересекающая оси OX и OY в точках P и Q. Показать, что наименьшие значения PQ,

$OP+OQ$ и $OP\cdot OQ$ равны соответственно $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ и $4ab$.

32. Касательная к эллипсу пересекает оси в точках P и Q. Показать, что наименьшее значение PQ равно сумме полуосей эллипса.

33. Переулок перпендикулярен к улице, которая имеет в ширину 18 футов. Какова ширина переулка, если шест длиной в 45 футов как раз можно пронести при повороте с улицы в переулок, держа его все время горизонтально?

(*Экз.* 1934 г.)

34. Две точки A и B лежат на прямой по разные стороны и на равных расстояниях от фиксированной точки O этой прямой, а P — фиксированная точка, не лежащая на ней. Показать, что $AP+BP$ возрастает с возрастанием AB.

(*Экз.* 1934 г.)

35. Найти длины и направление осей конического сечения

$$ax^2+2hxy+by^2=1.$$

[Длина r полудиаметра, образующего угол θ с осью x, определяется из соотношения

$$\frac{1}{r^2}=a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta.$$

Условием максимума или минимума r является $\operatorname{tg} 2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$. Исключая θ из этих двух уравнений, находим:

$$\left(a-\frac{1}{r^2}\right)\left(b-\frac{1}{r^2}\right)=h^2.]$$

36. Наибольшим значением $ax+by$, где x и y положительны и $x^2+xy+y^2=3x^2$, является

$$2x\sqrt{a^2-ab+b^2}.$$

[Если $ax+by$ имеет максимальное значение, то

$$a+b\frac{dy}{dx}=0.$$

Из соотношения между x и y находим, что

$$(2x+y)+(x+2v)\frac{dy}{dx}=0,$$

и исключаем $\dfrac{dy}{dx}$.]

37. Наибольшим значением $x^m y^n$, где x и y положительны и $x+y=k$, является

$$\frac{m^m n^n k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}.$$

38. Если θ и φ — острые углы, связанные соотношением

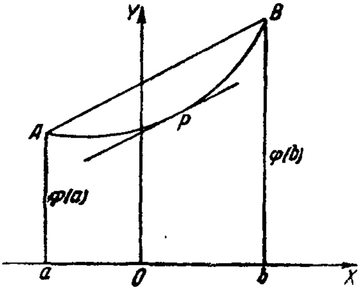
$$a\sec\theta+b\sec\varphi=c,$$

где a, b, c положительны, то $a\cos\theta+b\cos\varphi$ имеет минимальное значение при $\theta=\varphi$.

126. Теорема о среднем. Мы можем теперь перейти к доказательству другой общей теоремы большой важности, которая обычно именуется *теоремой о среднем значении*, или просто *теоремой о среднем*.

ТЕОРЕМА. *Если $\varphi(x)$ непрерывна в замкнутом интервале (a, b) и дифференцируема в открытом интервале, то существует значение ξ между a и b, для которого*

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(\xi).$$



Фиг. 40

Прежде чем приступить к строгому доказательству этой теоремы, которая является одной из наиболее важных теорем дифференциального исчисления, представляется целесообразным отметить ее очевидный геометрический смысл. Он заключается просто в том, что если кривая APB (фиг. 40) имеет касательную во всех своих точках, то на ней должна существовать такая точка P, в которой касательная параллельна AB. Действительно, $\varphi'(\xi)$ есть тангенс угла, который касательная в точке P образует с OX, а $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ есть тангенс угла, который AB образует с OX.

Строгое доказательство теоремы несложно. Рассмотрим функцию

$$\varphi(b)-\varphi(x)-\frac{b-x}{b-a}\{\varphi(b)-\varphi(a)\},$$

которая обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$. Из теоремы B п. 122 следует, что существует такое значение ξ, при котором производная этой функции обращается в нуль. Но эта производная равна

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}-\varphi'(x),$$

что и доказывает теорему. Отметим, что мы не предполагали $\varphi'(x)$ непрерывной.

Следующая запись теоремы о среднем часто представляется удобной:

$$\varphi(b)=\varphi(a)+(b-a)\varphi'[a+\theta(b-a)],$$

где θ означает некоторое число, лежащее между 0 и 1. Выражение $a+\theta(b-a)$ означает, конечно, „некоторое число ξ, лежащее между a и b". Если мы положим $b=a+h$, то получим:

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a+\theta h).$$

Теорема о среднем чаще всего формулируется именно в этой форме.

Примеры XLVII. 1. Показать, что

$$\varphi(b)-\varphi(x)-\frac{b-x}{b-a}\{\varphi(b)-\varphi(a)\}$$

есть разность между ординатами точки на хорде и соответствующей точки на кривой.

2. Проверить теорему для $\varphi(x)=x^2$ и $\varphi(x)=x^3$.

[В последнем случае мы должны доказать, что

$$\frac{b^3-a^3}{b-a}=3\xi^2,$$

где $a<\xi<b$, т. е. что если $\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)=\xi^2$, то ξ лежит между a и b.]

3. Определить значение ξ из теоремы о среднем, когда

$$f(x)=x(x-1)(x-2), \quad a=0, b=\frac{1}{2}.$$

(*Экз.* 1935 г.)

4. Доказать следствие 1 п. 122 с помощью теоремы о среднем. Доказать также, что если $\varphi'(x)\geqslant 0$ то, $\varphi(x)$ является функцией, возрастающей в слабом смысле.

5. Доказать с помощью теоремы о среднем теорему, сформулированную в конце п. 125.

[Так как $\varphi'(0)=c$, то мы можем найти такие малые положительные значения x, что $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ почти равно c; отсюда, по теореме о среднем, следует существование малых положительных значеиий ξ, для которых $\varphi'(\xi)$ почти равно c, что противоречит соотношению $\lim\limits_{x\to+a}\varphi'(x)=a$, если a не равно c. Аналогично доказывается, что $b=c$.]

6. Применить теорему о среднем к доказательству теоремы (6) п. 114, в предположении, что производные непрерывны.

[Мы имеем

$$F\{f(x+h)\}-F\{f(x)\}=F\{f(x)+hf'(\xi)\}-F\{f(x)\}=hf'(\xi)F'(\eta),$$

где ξ лежит между x и $x+h$, а η — между $f(x)$ и $f(x)+hf'(\xi)$.]

7. Доказать, что если

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0,$$

то уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ имеет по крайней мере один корень между 0 и 1.

(*Экз.* 1929 г.)

127. На теореме о среднем основывается также доказательство одной теоремы, играющей основную роль в теории интегрирования, а именно: *если $\varphi'(x)=0$ для всех значений x из некоторого интервала, то $\varphi(x)$ постоянна в этом интервале.*

Действительно, если a и b — два значения x из этого интервала, то

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'\{a+\theta(b-a)\}=0.$$

Из теоремы сразу следует, что если $\varphi'(x)=\psi'(x)$ в некотором интервале, то функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличаются в этом интервале только на аддитивную постоянную.

128. Теорема Коши. Существует обобщение теоремы о среднем, принадлежащее Коши, которое имеет важные приложения (см., например, п. 154).

Если (1) $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны в замкнутом интервале* (a, b) *и дифференцируемы в открытом интервале,* (2) $\psi(b)\neq\psi(a)$ *и* (3) $\varphi'(x)$ *и* $\psi'(x)$ *никогда не обращаются в нуль при одном и том же значении* x, *то между* a *и* b *существует такое* ξ, *что*

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Эта теорема сводится к теореме о среднем, когда $\psi(x)=x$, причем в этом случае дополнительные условия выполняются автоматически.

Доказательство является прямым обобщением доказательства из п. 126. Функция

$$\varphi(b)-\varphi(x)-\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}\{\psi(b)-\psi(x)\}$$

обращается в нуль при $x=a$ и при $x=b$; следовательно, ее производная обращается в нуль при некотором значении ξ, лежащем между a и b, т. е.

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}\psi'(\xi)$$

для такого ξ. Если бы $\psi'(\xi)$ равнялась нулю, то и $\varphi'(\xi)$ было бы равно нулю, что противоречит нашим предпосылкам. Следовательно, $\psi'(\xi)\neq 0$, и теорема полностью доказана, если разделить последнее равенство на $\psi'(\xi)$.

Условие того, что φ' и ψ' никогда не обращаются в нуль при одном и том же значении x, существенно. Допустим, например, что

$$a=-1,\quad b=1,\quad \varphi=x^2,\quad \psi=x^3.$$

Тогда $\varphi(b)-\varphi(a)=0$, $\psi(b)-\psi(a)=2$, и результат может иметь место только в том случае, когда $\varphi'(\xi)=0$, т. е. когда $\xi=0$; но $\psi'(\xi)$ при этом значении ξ тоже обращается в нуль, и формула теряет смысл.

129. Теорема Дарбу. В п. 101 мы доказали, что если $\varphi(x)$ непрерывна в (a, b), то она принимает в этом интервале все значения между $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$. Существуют другие классы функций, которые обладают этим свойством, в частности, класс производных. Если $\varphi'(x)$ является производной некоторой функции $\varphi(x)$, то (независимо от того, непрерывна она или нет) $\varphi'(x)$ обладает этим свойством.

Если $\varphi(x)$ *дифференцируема для* $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi'(a)=\alpha$, $\varphi'(b)=\beta$ *и* γ *лежит между* α *и* β, *то существует такое* ξ *между* a *и* b, *что* $\varphi'(\xi)=\gamma$.

Предположим, например, что $\alpha<\gamma<\beta$, и пусть

$$\psi(x)=\varphi(x)-\gamma(x-a).$$

Тогда $\psi(x)$ непрерывна и, следовательно, достигает своей точной нижней грани в (a, b) в некоторой точке ξ из (a, b). Эта точка ξ не может совпадать ни с a, ни с b, так как

$$\psi'(a)=\alpha-\gamma<0, \quad \psi'(b)=\beta-\gamma>0.$$

Следовательно, $\psi(x)$ имеет минимум[1]) в некоторой точке ξ между a и b, так что $\psi'(\xi)=0$, т. е. $\varphi'(\xi)=\gamma$.

130. Интегрирование. Мы видели, как во многих случаях можно найти производную данной функции $\varphi(x)$. Естественно поставить теперь обратный вопрос о *нахождении функции, производная которой задана.*

Пусть функция $\psi(x)$ задана. Тогда мы хотим найти такую функцию $\varphi(x)$, что $\varphi'(x)=\psi(x)$. Нетрудно видеть, что этот вопрос в действительности распадается на три части.

(1) В первую очередь мы хотим знать, *существует* ли вообще такая функция $\varphi(x)$. Этот вопрос не следует ни в коем случае смешивать с вопросом о нахождении какой-либо простой формулы для этой функции (если она существует).

(2) Мы хотим также знать, не может ли существовать более одной такой функции, т. е. является ли решение нашей задачи *единственным* или нет; а если оно не единственно, то не существует ли простого соотношения между различными решениями, которое позволяет выразить все решения через одно из них.

(3) Наконец, если решение существует, то мы хотим знать *как его фактически найти.*

Постановка этих трех вопросов станет ясней, если мы сравним их с тремя соответствующими вопросами, возникающими при дифференцировании функций.

(1) Функция $\varphi(x)$ может иметь производную для всех значений x (как, например, функция x^m, где m — положительное целое число, или $\sin x$). Она может иметь производную для всех значений x, кроме некоторых специальных значений (как, например, функции $\operatorname{tg} x$ или $\sec x$). Или же она может не иметь производной ни для одного значения x (как, например, функция из примера XXXVII. 20, которая даже не непрерывна ни при одном значении x).

Эта последняя функция разрывна при каждом значении x, а $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ имеют производные во всех точках, в которых они непрерывны. Пример $\sqrt[3]{x}$ показывает, что непрерывная функция может не иметь производной при частных значениях x, в данном случае при $x=0$. Вопрос о том, существуют ли непрерывные функции, которые ни при одном значении x не имеют производной, или непрерывные кривые, которые ни в одной точке не имеют касательной,

---

[1]) Не обязательно минимум в строгом смысле; см., однако, предпоследний абзац в п. 123.

слишком сложен для разбора в рамках настоящей книги. Интуиция подсказывает нам отрицательный ответ на него; но, как мы уже отметили в п. 112, высший анализ показывает, что в данном случае интуиция вводит нас в заблуждение.

Во всяком случае ясно, что ответ на вопрос „имеет ли $\varphi(x)$ производную $\varphi'(x)$?" зависит от разных обстоятельств. Мы вправе ожидать, что обратный вопрос „существует ли функция $\varphi(x)$, производная которой равна данной функции $\psi(x)$?" допускает также разные ответы. Мы уже видели, что в некоторых случаях ответ должен быть *отрицательным*: так, если $\psi(x)$ есть функция, равная a, b или c, в зависимости от того, отрицательно ли x, равно ли оно 0 или положительно, то функции $\varphi(x)$ *не* существует, за исключением того случая, когда $a=b=c$ (см. пример XLVII. 5).

В этом случае данная функция разрывна. В дальнейшем мы будем, однако, как правило, предполагать, что $\psi(x)$ непрерывна. Тогда ответ будет *утвердительный: если $\psi(x)$ непрерывна, то всегда существует такая функция $\varphi(x)$, что $\varphi'(x)=\psi(x)$*. Доказательство этого утверждения будет дано в гл. VII.

(2) Второй вопрос не представляет никаких трудностей. В случае дифференцирования мы имеем определение производной, из которого с самого начала ясно, что не может существовать более одной производной. В обратной задаче ответ одинаково прост. Если $\varphi(x)$ является решением задачи, то $\varphi(x)+C$ будет также решением при любом значении постоянной C, причем в формуле $\varphi(x)+C$ содержатся все возможные решения. Это сразу следует из п. 127.

(3) Задача фактического нахождения $\varphi'(x)$ весьма проста, если $\varphi(x)$ — любая функция, определенная некоторой конечной комбинацией обычных функциональных символов. Обратная задача гораздо сложнее. Природа возникающих в ней трудностей станет нам более ясной позже.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. *Если $\psi(x)$ является производной от $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ называется* **интегралом от** $\psi(x)$ *). *Операция нахождения $\varphi(x)$ по заданной $\psi(x)$ называется* **интегрированием**.

Применяется следующее обозначение:

$$\varphi(x)=\int\psi(x)\,dx.$$

Вряд ли нужно особо подчеркивать, что символ $\int\ldots dx$, так же как и $\frac{d}{dx}$, должен рассматриваться пока только как символ некоторой операции; символы $\int$ и dx сами по себе ничего не означают (как ничего не означают и взятые по отдельности символы d и dx).

*) Часто употребляется также термин „первообразная" или „примитивная". Однако мы все же придерживаемся терминологии автора. *(Прим. перев.)*

131. Задача практического интегрирования. Результаты первой части настоящей главы позволяют нам сразу же записать интегралы от некоторых простейших функций. Так,

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int \cos x\, dx = \sin x, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x. \quad (1)$$

Эти формулы следует понимать так, что функция, стоящая в правой части, является лишь *одним* из интегралов функции, стоящей под знаком интеграла. *Наиболее общий* интеграл получается, конечно, прибавлением к функции в правой части постоянной C, так называемой *произвольной постоянной* интегрирования.

В случае $m = -1$ первая из формул (1) теряет смысл, что и следовало ожидать, так как мы уже видели (см. пример XLII. 4), что $\frac{1}{x}$ не может быть производной многочлена или рациональной дроби.

Существование такой функции $F(x)$, что $D_x F(x) = \frac{1}{x}$, будет доказано в следующей главе. Эта функция заведомо не является ни многочленом, ни дробно-рациональной функцией; можно даже доказать, что она не является алгебраической функцией. Более того, доказывается, что $F(x)$ — существенно новая функция, не выражающаяся никакой конечной комбинацией рассмотренных выше элементарных функций. Доказательство этого факта выходит за рамки настоящей книги, но в гл. IX мы вернемся еще к этому вопросу и подвергнем свойства функции $F(x)$ систематическому рассмотрению.

Предположим сначала, что x положительно. Тогда мы будем писать

$$\int \frac{dx}{x} \ln x, \quad (2)$$

и назовем функцию в правой части этого равенства *логарифмической функцией*. Пока она определена только для положительных значений x.

Предположим, далее, что x отрицательно. Тогда $-x$ положительно и, следовательно, $\ln(-x)$ определено. Но

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x},$$

так что, когда x отрицательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x). \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) могут быть объединены в следующую формулу:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(\pm x) = \ln|x|, \quad (4)$$

где знак следует выбирать так, чтобы $\pm x$ было положительно. Эти формулы имеют место для всех действительных значений x, отличных от 0.

Основные свойства $\ln x$, которые будут доказаны в гл. IX, выражаются соотношениями

$$\ln 1 = 0, \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x, \quad \ln xy = \ln x + \ln y,$$

из которых второе является очевидным следствием первого и третьего. Для целей настоящей главы эти свойства по существу не нужны, но иногда они окажутся нам полезными, так как с их помощью мы сможем записать некоторые формулы в более компактном виде.

Из последнего приведенного свойства логарифмической функции следует, что $\ln x^2$ равен $2\ln x$, если $x > 0$, и $2\ln(-x)$, если $x < 0$, т. е. в обоих случаях равен $2\ln|x|$. Таким образом, (4) эквивалентно

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln x^2. \tag{5}$$

Формулы (1) — (5) принадлежат к числу основных формул интегрального исчисления. К ним можно добавить еще следующие две:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arcsin x\ ^{1)}. \tag{6}$$

132. Многочлены. Все общие теоремы п. 114 могут быть сформулированы как теоремы интегрального исчисления. Так, например, мы имеем следующие формулы:

$$\int \{f(x) + F(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx + \int F(x)\, dx, \tag{1}$$

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx. \tag{2}$$

Здесь, конечно, предполагается, что произвольные постоянные соответствующим образом подобраны. Так, формула (1) утверждает, что сумма *любого* интеграла от $f(x)$ и *любого* интеграла от $F(x)$ является *некоторым* интегралом от $f(x) + F(x)$.

Эти теоремы позволяют нам сразу написать интеграл от любой функции вида $\sum A_\nu f_\nu(x)$, т. е. линейной комбинации с постоянными коэффициентами конечного числа функций, интегралы от которых известны. В частности, мы можем сразу написать интеграл от многочлена, а именно,

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)\, dx = \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \ldots + a_n x.$$

133. Дробно-рациональные функции. Теперь естественно перейти к интегрированию дробно-рациональных функций. Предполо-

---

[1]) По поводу определения знака см. п. 120.

жим, что $R(x)$ — некоторая дробно-рациональная функция, представленная в виде, рассмотренном в п. 118, т. е. в виде суммы многочлена $\Pi(x)$ и некоторого числа слагаемых вида $\frac{A}{(x-\alpha)^p}$.

Мы можем сразу написать интегралы от многочлена и от всех остальных слагаемых, кроме тех, для которых $p=1$. В самом деле,

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^p}\,dx = -\frac{A}{p-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}},$$

независимо от того, будет ли α действительным или комплексным (см. п. 118).

Члены, для которых $p=1$, представляют значительно бóльшие затруднения. Из теоремы (6) п. 114 сразу следует, что

$$\int F'\{f(x)\}\,f'(x)\,dx = F\{f(x)\}. \qquad (3)$$

В частности, если мы возьмем $f(x)=ax+b$, где a и b действительны, и будем писать $\varphi(x)$ вместо $F(x)$ и $\psi(x)$ вместо $F'(x)$, так что $\varphi(x)$ — интеграл от $\psi(x)$, то мы получим

$$\int \psi(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,\varphi(ax+b). \qquad (4)$$

Так, например,

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \ln|ax+b|,$$

и, в частности, если α — действительное число,

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|.$$

Таким образом, мы знаем интегралы от всех слагаемых в $R(x)$, для которых $p=1$ и α действительно. Остаются еще члены, для которых $p=1$ и α комплексно.

Для того чтобы найти интегралы от таких членов, мы введем дополнительное предположение, а именно, то, что все коэффициенты в $R(x)$ действительны. Если тогда $\alpha=\gamma+\delta i$ является корнем кратности m уравнения $Q(x)=0$, то и комплексно сопряженное число $\bar{\alpha}=\gamma-\delta i$ будет корнем того же уравнения той же кратности. И если простейшая дробь $\frac{A}{(x-\alpha)^p}$ встречается в выражении для $R(x)$, то и дробь $\frac{\bar{A}}{(x-\bar{\alpha})^p}$ также встретится в нем, где $\bar{A}$ комплексно сопряжено с A_p. Это следует из характера алгебраических операций, с помощью которых находятся простейшие дроби и которые подробно разбираются в учебниках алгебры.

Таким образом, если слагаемое $\frac{\lambda+\mu i}{x-\gamma-\delta i}$ встречается в разложении $R(x)$ на простейшие дроби, то вместе с ним встретится и слагаемое $\frac{\lambda-\mu i}{x-\gamma+\delta i}$. Сумма этих двух слагаемых равна

$$\frac{2\{\lambda(x-\gamma)-\mu\delta\}}{(x-\gamma)^2+\delta^2}.$$

Эта дробь принадлежит к следующему общему виду:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c},$$

где $b^2<ac$. Читатель легко убедится в эквивалентности этих двух видов; λ, μ, γ, δ выражаются через A, B, a, b, c следующим образом:

$$\lambda=\frac{A}{2a},\quad \mu=-\frac{D}{2a\sqrt{\Delta}},\quad \gamma=-\frac{b}{a},\quad \delta=\frac{\sqrt{\Delta}}{a},$$

где $\Delta=ac-b^2$ и $D=aB-bA$.

Если в (3) мы предположим, что $F\{f(x)\}$ есть $\ln|f(x)|$, то найдем, что

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|, \tag{5}$$

а если предположим, что $f(x)=(x-\lambda)^2+\mu^2$, то найдем, что

$$\int\frac{2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\,dx=\ln\{(x-\lambda)^2+\mu^2\}.$$

А, в силу уравнений (6) п. 131 и (4) этого пункта,

$$\int\frac{-2\delta\mu}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\,dx=-2\delta\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\lambda}{\mu}.$$

Эти две формулы позволяют нам интегрировать сумму тех дробей в разложении $R(x)$, которые мы рассматривали. А следовательно, мы теперь в состоянии написать интеграл от любой действительной дробно-рациональной функции, знаменатель которой может быть разложен на линейные множители. Интеграл от такой функции состоит из *суммы многочлена, некоторого числа дробно-рациональных функций вида*

$$-\frac{A}{p-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}},$$

и некоторого числа логарифмических функций и арктангенсов.

Остается еще добавить, что если α комплексно, то указанная дробно-рациональная функция, входящая в состав интеграла, встречается в нем вместе с аналогичной функцией, в которой A и α заменены комплексно сопряженными числами, и что сумма двух таких функций является действительной дробно-рациональной функцией

Примеры XLVIII. 1. Доказать, что

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\ln|X| + \frac{D}{2a\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{ax+b-\sqrt{-\Delta}}{ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right|,$$

где $X = ax^2+2bx+c$, если $\Delta < 0$, и

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\ln|X| + \frac{D}{a\sqrt{\Delta}}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax+b}{\sqrt{\Delta}},$$

если $\Delta > 0$, причем $\Delta = ac-b^2$ и $D = aB-bA$.

2. В том частном случае, когда $ac = b^2$, интеграл равен

$$-\frac{D}{a(ax+b)} + \frac{A}{a}\ln|ax+b|.$$

3. Показать, что если корни уравнения $Q(x)=0$ все действительны и различны и $P(x)$ — многочлен степени низшей чем $Q(x)$, то

$$\int R(x)\,dx = \sum \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}\ln|x-\alpha|,$$

где суммирование производится по всем корням α уравнения $Q(x)=0$.

[Вид простейшей дроби, соответствующей α, может быть получен из следующих соотношений:

$$\frac{Q(x)}{x-\alpha} \to Q'(\alpha),\quad (x-\alpha)R(x) \to \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.]$$

4. Если все корни $Q(x)$ действительны, α — двойной корень, а все остальные корни — простые и $P(x)$ — многочлен степени низшей, чем $Q(x)$, то интеграл равен

$$\frac{A}{x-\alpha} + A'\ln|x-\alpha| + \sum B\ln|x-\beta|,$$

где

$$A = -\frac{2P(\alpha)}{Q''(\alpha)},\quad A' = \frac{2\{3P'(\alpha)Q''(\alpha) - P(\alpha)Q'''(\alpha)\}}{3\{Q''(\alpha)\}^2},\quad B = \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)},$$

и суммирование производится по всем корням β уравнения $Q(x)=0$, отличным от α.

5. Вычислить

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

[Разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{i}{8(x-i)^2} + \frac{2-i}{8(x-i)} + \frac{i}{8(x+i)^2} + \frac{2+i}{8(x+i)},$$

и интеграл равен

$$-\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x.]$$

6. Проинтегрировать

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)},\quad \frac{x}{(x-a)^2(x-b)},\quad \frac{x}{(x-a)^2(x-b)^2},\quad \frac{x}{(x-a)^3},$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad \frac{x^2-a^2}{x^2(x^2+a^2)}, \quad \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)^2}.$$

7. Проинтегрировать

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}, \quad \frac{x}{1+x^3}, \quad \frac{x^3}{(x-1)^2(x^3+1)}.$$

(*Экз.* 1924, 1926, 1934 гг.)

8. Доказать формулы

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right\},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ -\ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right\},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3} \ln \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} \right\}.$$

134. Замечание о технике интегрирования дробно-рациональных функций. Рассмотрения п. 133 дают нам общий метод, с помощью которого мы можем найти интеграл от любой действительной дробно-рациональной функции $R(x)$, *если мы можем решить уравнение* $Q(x)=0$. В простых случаях (как в предыдущем примере 5) применение этого метода весьма быстро приводит к результату. В более сложных случаях вычислительная работа, связанная с применением этого метода, может оказаться настолько большой, что практически результат таким путем не может быть получен. Тогда следует применять другие приемы. В задачу настоящей книги не входит подробное рассмотрение техники интегрирования, и поэтому читатель, интересующийся этим вопросом, должен обратиться к другим руководствам, например, к курсу Э. Гурса (Курс математического анализа, т. I, гл. V, ГТТИ, М. — Л., 1933).

Если уравнение $Q(x)=0$ не может быть эффективно решено, то метод разложения на простейшие дроби вовсе неприменим, и следует обратиться к другим методам[1]).

135. Алгебраические функции. Перейдем теперь к вопросу об интегрировании *алгебраических* функций. Мы должны рассмотреть задачу интегрирования y, где y является алгебраической функцией от x. Однако удобнее рассматривать интеграл

$$\int R(x, y)\, dx,$$

где $R(x, y)$ — любая дробно-рациональная функция от x и y. Этот интеграл в действительности не является более общим, так как $R(x, y)$ сама является алгебраической функцией от x. Эта форма интеграла оказывается более удобной; например, функцию

$$\frac{px+q+\sqrt{ax^2+2bx+c}}{px+q-\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

[1]) См. книгу автора „Интегрирование элементарных функций“, ОНТИ, 1935. В практике интегрирования это случается довольно редко.

удобнее рассматривать как дробно-рациональную функцию от x и от простой алгебраической функции $y=\sqrt{ax^2+2bx+c}$, чем непосредственно как алгебраическую функцию от x.

136. Интегрирование подстановкой и рационализацией. Из уравнения (3) п. 133 следует, что если

$$\int \psi(x)\,dx \doteq \varphi(x),$$

то

$$\int \psi\{f(t)\}f'(t)\,dt=\varphi\{f(t)\}. \tag{1}$$

Это уравнение дает нам метод нахождения интеграла от $\psi(x)$ в большинстве тех случаев, когда значение интеграла не может быть сразу найдено. Оно может быть сформулировано в виде следующего правила: *положим* $x \doteq f(t)$, *где* $f(t)$ — *любая функция, выбор которой представляется целесообразным; умножим на* $f'(t)$ *и определим (если это возможно) интеграл от* $\psi\{f(t)\}f'(t)$; *затем выразим результат через* x. Часто оказывается, что функция от t, к которой мы приходим в результате применения этого правила, принадлежит к числу тех, интегралы от которых могут быть легко вычислены. Это, например, всегда имеет место в тех случаях, когда она является дробно-рациональной функцией; с другой стороны, часто оказывается возможным выбрать зависимость между x и t так, что мы как раз приходим к такой функции. Если, например, нужно найти интеграл от $R(\sqrt{x})$, где R — дробно-рациональная функция, то с помощью подстановки $x=t^2$ мы приходим к интегралу от $2tR(t)$, т. е. к интегралу от дробно-рациональной функции от t. Этот метод интегрирования назовем *интегрированием рационализацией*.

Его применение к рассматриваемой задаче очевидно. *Если мы можем найти такую переменную t, что x и y оба являются дробно-рациональными функциями от t, скажем $x=R_1(t)$, $y=R_2(t)$, то*

$$\int R(x,\ y)\,dx=\int R\{R_1(t),\ R_2(t)\}R_1'(t)\,dt,$$

а этот последний интеграл является интегралом от дробно-рациональной функции от t и может быть вычислен методами, изложенными в п. 133.

Важно знать, в каких случаях мы можем найти вспомогательную переменную t, которая удовлетворяла бы этим условиям, но мы не можем рассматривать здесь этот общий вопрос[1]). Мы должны ограничиться несколькими простыми частными случаями.

---

[1]) См. книгу автора, цитированную на стр. 248.

137. Интегралы, связанные с коническими сечениями. Предположим, что x и y связаны уравнением вида

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

другими словами, что график y, рассматриваемого как функция от x, является коническим сечением. Пусть (ξ, η) — любая точка на этом коническом сечении и $x-\xi=X$, $y-\eta=Y$. Если выразить соотношение между x и y в переменных X и Y, то оно примет следующий вид:

$$aX^2+2hXY+bY^2+2GX+2FY=0,$$

где $F=h\xi+b\eta+f$, $G=a\xi+h\eta+g$. Положим в этом уравнении $Y=tX$. Тогда мы найдем, что X и Y, а следовательно, и x и y, являются дробно-рациональными функциями от t. Действительно, мы находим, что

$$x-\xi=-\frac{2(G+Ft)}{a+2ht+bt^2}, \quad y-\eta=-\frac{2t(G+Ft)}{a+2ht+bt^2}.$$

Таким образом, процесс рационализации, описанный в предыдущем пункте, может быть проведен.

Читателю предлагается проверить, что

$$hx+by+f=-\frac{1}{2}(a+2ht+bt^2)\frac{dx}{dt},$$

так что

$$\int\frac{dx}{hx+by+f}=-2\int\frac{dt}{a+2ht+bt^2}.$$

Если $h^2>ab$, то вычисления удобнее всего продолжать следующим образом. Коническое сечение является гиперболой с асимптотами, параллельными прямым

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$

или

$$b(y-\mu x)(y-\mu' x)=0.$$

Если мы положим $y-\mu x=t$, то найдем:

$$y-\mu' x=-\frac{2gx+2fy+c}{bt},$$

и ясно, что x и y могут быть получены отсюда как дробно-рациональные функции от t. Проиллюстрируем этот процесс на одном важном частном случае.

138. Интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. Допустим, в частности, что $y^2=ax^2+2bx+c$, где $a>0$. Полагая $y+x\sqrt{a}=t$, найдем:

$$2\frac{dx}{dt}=\frac{(t^2+c)\sqrt{a}+2bt}{(t\sqrt{a}+b)^2}, \quad 2y=\frac{(t^2+c)\sqrt{a}+2bt}{t\sqrt{a}+b}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dt}{t\sqrt{a}+b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x\sqrt{a} + y + \frac{b}{\sqrt{a}} \right|. \tag{1}$$

Если, в частности, $a=1$, $b=0$, $c=\alpha^2$ или $a=1$, $b=0$, $c=-\alpha^2$, то мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} &= \ln \left\{ x + \sqrt{x^2+\alpha^2} \right\}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-\alpha^2} \right|. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Справедливость этих уравнений может быть непосредственно проверена дифференцированием. К этим двум формулам следует присоединить еще третью:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\alpha}, \tag{3}$$

которая соответствует случаю $a<0$. В формуле (3) предполагается, что $\alpha>0$; если $\alpha<0$, то интеграл равен $\arcsin \frac{x}{|\alpha|}$ (см. п. 120). На практике рассматриваемый интеграл следует вычислять сведением его (как это сделано в следующем пункте) к одному из этих стандартных видов.

Формула (3) представляется совершенно отличной от формул (2), но в гл. X читатель узнает о связи, существующей между ними.

139. Интеграл $\int \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\, dx$. Этот интеграл может быть во всех случаях вычислен при помощи результатов предыдущего пункта. Наиболее удобным методом вычисления является следующий. Так как

$$\lambda x + \mu = \frac{\lambda}{a}(ax+b) + \mu - \frac{\lambda b}{a}$$

и

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\, dx = \sqrt{ax^2+2bx+c},$$

мы имеем:

$$\int \frac{(\lambda x+\mu)\, dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{\lambda}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

В этом последнем интеграле a может быть положительным или отрицательным. Если a положительно, то положим

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t;$$

тогда мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\varkappa}},$$

где $\varkappa = \frac{ac - b^2}{a}$. Если a отрицательно, то заменим $-a$ на A и положим

$$x\sqrt{A} - \frac{b}{\sqrt{A}} = t;$$

тогда мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{-\varkappa - t^2}}.$$

Таким образом мы видим, что вычисление этого интеграла сводится к вычислению интеграла, рассмотренного в п. 138, и что этот интеграл сводится к одному из следующих трех:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}}.$$

140. Интеграл $\int (\lambda x + \mu) \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\, dx$. Подобным образом находим, что

$$\int (\lambda x + \mu) \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda}{3a} (ax^2 + 2bx + c)^{3/2} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{a}\right) \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\, dx,$$

а этот последний интеграл сводится к одному из следующих трех:

$$\int \sqrt{t^2 + \alpha^2}\, dt, \quad \int \sqrt{t^2 - \alpha^2}\, dt, \quad \int \sqrt{\alpha^2 - t^2}\, dt.$$

Для вычисления этих интегралов здесь уместно ввести еще одну общую теорему интегрального исчисления.

141. Интегрирование по частям. Теорема об *интегрировании по частям* является лишь другой формулировкой правила дифференцирования произведения, доказанного в п. 114. Из теоремы (3) п. 114 сразу следует, что

$$\int f'(x) F(x)\, dx = f(x) F(x) - \int f(x) F'(x)\, dx.$$

Может случиться, что функция, интеграл от которой ищется, представима в виде $f'(x) F(x)$ и что $f(x) F'(x)$ может быть проинтегрирована. Предположим, например, что $\varphi(x) = x\psi(x)$, где $\psi(x)$ является второй производной от известной функции $\chi(x)$. Тогда

$$\int \varphi(x)\, dx = \int x\chi''(x)\, dx = x\chi'(x) - \int \chi'(x)\, dx = x\chi'(x) - \chi(x).$$

Мы можем проиллюстрировать применение этого метода интегрирования на примере интеграла, рассмотренного в предыдущем пункте. Положим

$$f(x) = ax + b, \quad F(x) = \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = y.$$

Тогда

$$a\int y\,dx=(ax+b)y-\int\frac{(ax+b)^2}{y}\,dx=(ax+b)y-a\int y\,dx+$$
$$+(ac-b^2)\int\frac{dx}{y},$$

так что

$$\int y\,dx=\frac{(ax+b)y}{2a}+\frac{ac-b^2}{2a}\int\frac{dx}{y};$$

но мы уже видели, как вычисляется этот последний интеграл (см. п. 138).

Примеры XLIX. 1. Доказать, что если $\alpha>0$, то

$$\int\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha^2}+\frac{1}{2}\alpha^2\ln\left\{x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right\},$$
$$\int\sqrt{x^2-\alpha^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-\alpha^2}-\frac{1}{2}\alpha^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\right|,$$
$$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{1}{2}\alpha^2\arcsin\frac{x}{\alpha}.$$

2. Вычислить интегралы $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$, $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$ с помощью подстановки $x=\alpha\sin\theta$ и показать, что результаты совпадают с полученными в п. 138 и в примере 1.

3. Доказать с помощью подстановок $ax+b=\frac{1}{t}$ и $x=\frac{1}{u}$, что (в обозначениях пп. 133 и 141)

$$\int\frac{dx}{y^3}=\frac{ax+b}{\Delta y};\qquad\int\frac{x\,dx}{y^3}=-\frac{bx+c}{\Delta y}.$$

4. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, где $b>a$, тремя путями, а именно: 1° методами предыдущих параграфов, 2° подстановкой

$$\frac{b-x}{x-a}=t^2,$$

и 3° подстановкой $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$, и показать, что результаты совпадают.

5. Проинтегрировать $\frac{x^3}{(x^2+1)^3}$ с помощью подстановок

$$(a)\ x=\operatorname{tg}\theta,\quad(b)\ u=x^2+1,$$

и проверить совпадение результатов. (*Экз.* 1934 г.)

6. Проинтегрировать

$$\frac{1}{x(1+x^5)},\quad\frac{1}{(a+x)\sqrt{c+x}},\quad\frac{x^2+1}{x\sqrt{4x^2+1}},\quad\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}},\quad\frac{1}{x^6\sqrt{x^2+a^2}}.$$

(*Экз.* 1923, 1925, 1927, 1929 гг.)

7. Показать с помощью подстановки

$$2x+a+b=\frac{1}{2}(a-b)\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$$

или умножением числителя и знаменателя на $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$, что если $a>b$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{1}{2}\sqrt{a-b}\left(t+\frac{1}{3t^3}\right).$$

8. Найти подстановку, которая приводит

$$\int \frac{dx}{(x+a)^{3/2}+(x-a)^{3/2}}$$

к интегралу от дробно-рациональной функции.

(*Экз.* 1899 г.)

9. Показать, что $\int R\{x, \sqrt[n]{ax+b}\}\,dx$ приводится подстановкой $ax+b=t^n$ к интегралу от дробно-рациональной функции.

10. Доказать, что

$$\int f''(x)F(x)\,dx=f'(x)F(x)-f(x)F'(x)+\int f(x)F''(x)\,dx,$$

и вообще

$$\int f^{(n)}(x)F(x)\,dx=$$

$$=f^{(n-1)}(x)F(x)-f^{(n-2)}(x)F'(x)+\ldots+(-1)^n\int f(x)F^{(n)}(x)\,dx.$$

11. Интеграл $\int (1+x)^p x^q\,dx$, где p и q — рациональные числа, может быть вычислен в следующих трех случаях: (1) когда p — целое число, (2) когда q — целое число и (3) когда $p+q$ — целое число. [В случае (1) положим $x=u^s$, где s — знаменатель q; в случае (2) положим $1+x=t^s$, где s — знаменатель p; в случае (3) положим $1+x=xt^s$, где s — знаменатель p.]

12. Интеграл $\int x^m(ax^n+b)^q\,dx$ может быть сведен к предыдущему подстановкой $ax^n=bt$ *). [Практически конкретные интегралы этого типа удобнее всего вычислять с помощью так называемых „рекуррентных формул" (см. стр. 277, пример 55).]

13. Интеграл $\int R\{x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\}\,dx$ может быть приведен к интегралу от дробно-рациональной функции подстановкой

$$4x=-\frac{b}{a}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\frac{d}{c}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2.$$

14. Привести $\int R(x, y)\,dx$, где $y^2(x-y)=x$, к интегралу от дробно-рациональной функции. $\left[\text{Положив } y=tx, \text{ мы получим } x=\frac{1}{t^2(1-t)},\ y=\frac{1}{t(1-t)}\right]$.

*) Подинтегральная функция в примере 12 называется биномиальным дифференциалом. Теорѐма о том, что перечисленные в примере 11 случаи являются единственными, в которых интеграл от биномиального дифференциала выражается в конечном виде через элементарные функции, принадлежит П. Л. Чебышеву. *(Прим. перев.)*

15. То же для функции, определенной уравнением

(a) $y(x-y)^2=x$;

(b) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

[В случае (a) положим $x-y=t$; в случае (b) положим $x^2+y^2=t(x-y)$ и найдем:

$$x=\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\quad y=\frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}\Bigg].$$

16. Если $y(x-y)^2=x$, то $\int\frac{dx}{x-3y}=\frac{1}{2}\ln\{(x-y)^2-1\}$.

17. Если $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$, то

$$\int\frac{dx}{y(x^2+y^2+c^2)}=-\frac{1}{c^2}\ln\frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

142. Интеграл $\int R(x, y)\,dx$, где $y^2=ax^2+2bx+c$. Наиболее общий интеграл, связанный в смысле п. 137 с коническим сечением $y^2=ax^2+2bx+c$, имеет вид

$$\int R(x, \sqrt{X})\,dx, \tag{1}$$

где $X=y^2=ax^2+2bx+c$. Мы предполагаем, что R — *вещественная* функция.

Подинтегральная функция имеет вид $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены относительно x и $\sqrt{X}$. Поэтому она может быть приведена к виду

$$\frac{A+B\sqrt{X}}{C+D\sqrt{X}}=\frac{(A+B\sqrt{X})(C-D\sqrt{X})}{C^2-D^2X}=E+F\sqrt{X},$$

где $A, B, \ldots$ — дробно-рациональные функции от x. Новой является задача интегрирования функции вида $F\sqrt{X}$ или, что то же самое, $\frac{G}{\sqrt{X}}$, где G — дробно-рациональная функция от x. Интеграл

$$\int\frac{G}{\sqrt{X}}\,dx \tag{2}$$

всегда может быть вычислен разложением G на простейшие дроби. При этом мы получим три различных типа интегралов.

1°. Прежде всего могут получиться интегралы вида

$$\int\frac{x^m}{\sqrt{X}}\,dx, \tag{3}$$

где m — положительное целое число. Случаи $m=0$ и $m=1$ уже рассматривались в п. 139. Для вычисления интегралов, соответствующих бо́льшим значениям m, заметим, что

$$\frac{d}{dx}(x^{m-1}\sqrt{X})=(m-1)x^{m-2}\sqrt{X}+\frac{(ax+b)x^{m-1}}{\sqrt{X}}=\frac{\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\gamma x^{m-2}}{\sqrt{X}},$$

где α, β, γ — постоянные, значения которых могут быть легко найдены. Ясно, что после интегрирования этого уравнения мы получим соотношение между интегралами типа (3), соответствующими следующим друг за другом значениям m. Так как нам известны такие интегралы в случаях $m=0$ и $m=1$, то мы сможем последовательно вычислить эти интегралы и для других значений m.

2°. Далее могут получиться интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-p)^m \sqrt{X}}, \tag{4}$$

где p — действительное число. Если мы сделаем подстановку $x-p=\frac{1}{t}$, то этот интеграл приведется к интегралу по t типа (3).

3°. Наконец, могут получиться интегралы, соответствующие комплексным корням знаменателя G. Ограничимся простейшим случаем, когда все такие корни — простые. В этом случае (см. п. 133) паре комплексно сопряженных корней знаменателя G соответствует интеграл типа

$$\int \frac{Lx+M}{(Ax^2+2Bx+C)\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx. \tag{5}$$

Для вычисления этого интеграла положим

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1},$$

где μ и ν выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия

$$a\mu\nu+b(\mu+\nu)+c=0, \quad A\mu\nu+B(\mu+\nu)+C=0,$$

так что μ и ν являются корнями уравнения

$$(aB-bA)\xi^2-(cA-aC)\xi+(bC-cB)=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни, так как оно совпадает с уравнением (1) примера XLVI. 13. Поэтому искомые μ и ν имеют действительные значения.

Делая подстановку, мы найдем, что интеграл (5) принимает вид

$$H\int \frac{t\,dt}{(\alpha t^2+\beta)\sqrt{\gamma t^2+\delta}}+K\int \frac{dt}{(\alpha t^2+\beta)\sqrt{\gamma t^2+\delta}}. \tag{6}$$

Второй из этих интегралов рационализируется подстановкой

$$\frac{t}{\sqrt{\gamma t^2+\delta}}=u,$$

что дает

$$\int \frac{dt}{(\alpha t^2+\beta)\sqrt{\gamma t^2+\delta}}=\int \frac{du}{\beta+(\alpha\delta-\beta\gamma)u^2}.$$

Наконец, если в первом из интегралов (6) мы положим $t=\frac{1}{u}$, то он преобразуется в интеграл второго типа и, следовательно, может быть вычислен только что указанным образом, а именно, подстановкой

$$\frac{u}{\sqrt{\gamma+\delta u^2}}=v,$$

т. е.
$$\frac{1}{\sqrt{\gamma t^2+\delta}}=v\ ^{1)}.$$

Примеры L. 1. Вычислить
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}},\quad \int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}},\quad \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

2. Доказать, что
$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}=\frac{2}{q-p}\sqrt{\frac{x-q}{x-p}}.$$

3. Если $ag^2+ch^2=-\nu<0$, то
$$\int\frac{dx}{(hx+g)\sqrt{ax^2+c}}=-\frac{1}{\sqrt{\nu}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\nu(ax^2+c)}}{ch-agx}.$$

4. Показать, что $\int\frac{dx}{(x-x_0)\,y}$, где $y^2=ax^2+2bx+c$, может быть представлен в одном из следующих двух видов:
$$-\frac{1}{y_0}\ln\left|\frac{axx_0+b(x+x_0)+c+yy_0}{x-x_0}\right|,\quad \frac{1}{z_0}\operatorname{arc\,tg}\frac{axx_0+b(x+x_0)+c}{yz_0},$$
в зависимости от того, будет ли $ax_0^2+2bx_0+c$ положительно (в этом случае мы обозначаем это выражение через y_0^2) или отрицательно (в этом случае это выражение обозначается через $-z_0^2$).

5. Показать с помощью подстановки
$$y=\frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}}{x-p},$$
что
$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\int\frac{dy}{\sqrt{\lambda y^2-\mu}},$$
где $\lambda=ap^2+2bp+c$, $\mu=ac-b^2$. [Этот метод вычисления весьма изящен, но он не столь прямолинеен, как метод, изложенный в п. 142.]

6. Показать, что интеграл
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$$
рационализируется подстановкой
$$x=\frac{1+y^2}{3-y^2}.$$

(*Экз.* 1911 г.)

---

[1]) Изложенный метод интегрирования не применим в том случае, когда $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}$; но в этом случае интеграл вычисляется подстановкой $ax+b=t$. Дальнейшие сведения по интегрированию алгебраических функций читатель найдет в следующих книгах: Stolz, *Grundzüge der Differential und integralrechnung*, т. 1, стр. 331 и сл., или Bromwich, *Elementary integrals*, стр. 253. Другой метод вычисления был дан Гринхиллом: см. Greenhill, *A chapter in the integral calculus*, стр. 12 и сл.; см. также книгу автора, цитированную на стр. 248.

7. Вычислить

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}}.$$

8. Вычислить

$$\int \frac{dx}{(5x^2+12x+8)\sqrt{5x^2+2x-7}}.$$

[Применить метод п. 142. Уравнением, которому удовлетворяют μ и ν, является $\xi^2+3\xi+2=0$, так что $\mu=-2$, $\nu=-1$, и соответствующей подстановкой будет

$$x=-\frac{2t+1}{t+1}.$$

В результате этой подстановки интеграл приводится к

$$-\int \frac{dt}{(4t^2+1)\sqrt{9t^2-4}}-\int \frac{t\,dt}{(4t^2+1)\sqrt{9t^2-4}}.$$

Первый из этих интегралов рационализируется подстановкой

$$\frac{t}{\sqrt{9t^2-4}}=u,$$

а второй — подстановкой

$$\frac{1}{\sqrt{9t^2-4}}=v.]$$

9. Вычислить

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(2x^2-2x+1)\sqrt{3x^2-2x+1}}, \quad \int \frac{(x-1)\,dx}{(2x^2-6x+5)\sqrt{7x^2-22x+19}}.$$

(*Экз.* 1911 г.)

10. Показать, что интеграл $\int R(x, y)\,dx$, где $y^2=ax^2+2bx+c$, рационализируется подстановкой

$$t=\frac{x-p}{y+q},$$

где (p, q) является любой точкой на коническом сечении $y^2=ax^2+2bx+c$. [Этот интеграл, конечно, рационализируется и подстановкой $t=\dfrac{x-p}{y-q}$. См. п. 137.]

143. Трансцендентные функции. Благодаря большому разнообразию классов трансцендентных функций, теория их интегрирования значительно менее систематична, чем теория интегрирования дробно-рациональных или алгебраических функций. Мы рассмотрим здесь несколько классов трансцендентных функций, интегралы от которых могут быть всегда найдены.

144. Многочлены относительно косинуса и синуса от аргументов кратных x. Мы всегда можем найти интеграл от любой функции, которая является суммой конечного числа слагаемых вида

$$A\cos^m ax\sin^{m'} ax\cos^n bx\sin^{n'} bx\ldots,$$

где m, m', n, n',... — положительные целые числа, а a, b,... — любые действительные числа. В самом деле, такое выражение может быть представлено в виде суммы конечного числа слагаемых видов

$$\alpha \cos\{(pa+qb+\ldots)x\},\quad \beta \sin\{(pa+qb+\ldots)x\},$$

а интегралы от этих выражений могут быть сразу записаны.

Примеры LI. 1. Проинтегрировать $\sin^3 x \cos^2 2x$. В этом случае мы применяем формулы

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x),\quad \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x).$$

Перемножая эти два выражения и заменяя, например, $\sin x \cos 4x$ выражением $\frac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x)$, находим, что

$$\frac{1}{16}\int (7\sin x - 5\sin 3x + 3\sin 5x - \sin 7x)\,dx =$$
$$= -\frac{7}{16}\cos x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{3}{80}\cos 5x + \frac{1}{112}\cos 7x.$$

Этот интеграл может быть, конечно, вычислен и другими методами, причем результаты получатся в различных формах. Например,

$$\int \sin^3 x \cos^2 2x\,dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)(1-\cos^2 x)\sin x\,dx,$$

что после подстановки $\cos x = t$ приводится к виду

$$\int (4t^6 - 8t^4 + 5t^2 - 1)\,dt = \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{8}{5}\cos^5 x + \frac{5}{3}\cos^3 x - \cos x.$$

Нетрудно проверить, что это выражение отличается от полученного выше только аддитивной постоянной.

2. Проинтегрировать любым методом $\cos ax \cos bx$, $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \sin bx$, $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos x \cos 2x \cos 3x$, $\cos^3 2x \sin^2 3x$, $\cos^5 x \sin^7 x$. [Во многих из таких случаев бывает удобным применить рекуррентные формулы (см. пример 55 на стр. 277).]

145. Интегралы $\int x^n \cos x\,dx$, $\int x^n \sin x\,dx$ и подобные им.

Метод интегрирования по частям дает нам возможность обобщить предыдущие результаты. В самом деле, так как

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx,$$
$$\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx,$$

эти интегралы могут быть вычислены при целочисленном положительном n повторным применением этих формул. Таким образом, интегралы $\int x^n \cos ax\,dx$ и $\int x^n \sin ax\,dx$ могут быть всегда вычислены, если n — положительное целое число. Следовательно, методом, подобным тому, который был применен в предыдущем пункте, мы можем вычислить

$$\int P(x, \cos ax, \sin ax, \cos bx, \sin bx, \ldots)\, dx,$$

где P — любой многочлен.

Примеры LII. 1. Проинтегрировать $x \sin x$, $x^2 \cos x$, $x^2 \cos^2 x$, $x^2 \sin^2 x \sin^2 2x$, $x \sin^2 x \cos^4 x$, $x^3 \sin^3 \frac{1}{3} x$.

2. Найти такие многочлены P и Q, что

$$\int \{(3x-1)\cos x + (1-2x)\sin x\}\, dx = P \cos x + Q \sin x.$$

3. Доказать, что

$$\int x^n \cos x\, dx = P_n \cos x + Q_n \sin x,$$

где

$$P_n = nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots, \quad Q_n = x^n - n(n-1)x^{n-2} + \ldots.$$

146. Дробно-рациональные функции от $\cos x$ **и** $\sin x$. Интеграл от любой дробно-рациональной функции от $\cos x$ и $\sin x$ может быть вычислен подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Действительно,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

так что интеграл приводится к интегралу от дробно-рациональной функции от t. Но иногда более удобными являются другие подстановки.

Примеры LIII. 1. Доказать, что

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|, \quad \int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Другой формой первого интеграла является $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$; третьей является

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|.$$

2. $$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|, \quad \int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x|, \quad \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x,$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x, \quad \int \operatorname{tg} x \sec x\, dx = \sec x,$$

$$\int \operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x\, dx = -\operatorname{cosec} x.$$

[Эти интегралы являются частными случаями общего вида интегралов дробно-рациональных функций от $\cos x$ и $\sin x$, но для их вычисления не нужна подстановка, так как результаты сразу следуют из п. 120 и уравнения (5) п. 133.]

3. Показать, что интеграл от $\frac{1}{a+b\cos x}$, где $a+b$ положительно, может быть выражен в одной из следующих двух форм:

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left\{t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right\},\quad \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+t\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-t\sqrt{b-a}}\right|,$$

где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, причем первое выражение имеет место, если $a^2>b^2$, а второе — если $a^2<b^2$. Если $a^2=b^2$, то интеграл приводится либо к интегралу от $\sec^2\frac{x}{2}$, либо к интегралу от $\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$, и может быть вычислен сразу. Вывести выражения для этого интеграла в том случае, когда $a+b$ отрицательно.

4. Показать, что если y определено, как функция от x, соотношением

$$(a+b\cos x)(a-b\cos y)=a^2-b^2,$$

где a положительно и $a^2>b^2$, то когда x изменяется от 0 до π, одно и значений y также изменяется от 0 до π. Показать также, что

$$\sin x=\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin y}{a-b\cos y},\quad \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,\frac{dx}{dy}=\frac{\sin y}{a-b\cos y}$$

и вывести, что если $0<x<\pi$, то

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right).$$

Показать, что этот результат совпадает с результатом примера 3.

5. Показать, как можно вычислить интеграл от

$$\frac{1}{a+b\cos x+c\sin x}.$$

[Выразить $b\cos x+c\sin x$ в виде $\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)$.]

6. Проинтегрировать

$$\frac{a+b\cos x+c\sin x}{\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x}.$$

[Определить λ, μ, ν так, чтобы имело место соотношение

$$a+b\cos x+c\sin x=\lambda+\mu(\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x)+\nu(-\beta\sin x+\gamma\cos x).$$

Тогда интеграл равен

$$\mu x+\nu\ln|\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x|+\lambda\int\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x}\ ]$$

7. Проинтегрировать

$$\frac{1}{a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x}.$$

[Это выражение может быть представлено в виде

$$\frac{1}{A+B\cos 2x+C\sin 2x},$$

где $A=\frac{1}{2}(a+c)$, $B=\frac{1}{2}(a-c)$, $C=b$. Но интеграл может быть вычислен проще подстановкой $\operatorname{tg} x=t$, с помощью которой мы находим, что

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a+2b\operatorname{tg} x+c\operatorname{tg}^2 x}=\int \frac{dt}{a+2bt+ct^2}.\Big]$$

147. Интегралы от функций, содержащих $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ **и** $\ln x$. Интегралы от $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\ln x$ могут быть легко вычислены интегрированием по частям. Действительно,

$$\int \arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx=x\operatorname{arc\,tg} x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x(\ln x-1).$$

Вообще мы можем проинтегрировать функцию $\varphi(x)$, обратную $f(x)$, если мы знаем интеграл от $f(x)$, так как подстановка $y=f(x)$ дает:

$$\int \varphi(y)\,dy=\int xf'(x)\,dx=xf(x)-\int f(x)\,dx.$$

Интегралы вида

$$\int P(x, \arcsin x)\,dx,\quad \int P(x, \ln x)\,dx,$$

где P — многочлен, всегда могут быть вычислены. В первом случае, например, мы должны вычислить несколько интегралов вида

$$\int x^m(\arcsin x)^n\,dx.$$

Делая подстановку $x=\sin y$, получаем:

$$\int y^n \sin^m y\cos y\,dy,$$

а этот интеграл может быть вычислен методом, изложенным в п. 145. Во втором случае мы должны вычислить ряд интегралов вида

$$\int x^m(\ln x)^n\,dx.$$

Интегрируя по частям, находим, что

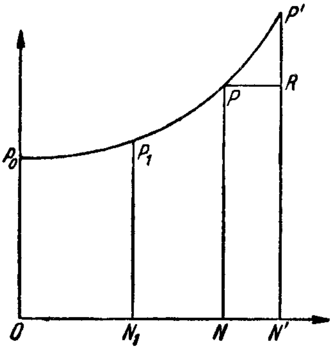
$$\int x^m(\ln x)^n\,dx=\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx,$$

и вычисление может быть доведено до конца повторным применением этой формулы.

Пример. Проинтегрировать $x^n\ln x$, $x^n\ln(1+x)$, $x^8\operatorname{arc\,tg} x^3$ и $x^{-n}\ln x$.

(*Экз*. 1924, 1929, 1934 гг.)

148. Площади фигур, ограниченных плоскими кривыми. Одним из наиболее важных приложений процессов интегрирования, изложенных в предыдущих пунктах, является вычисление *площадей* фигур, ограниченных плоскими кривыми. Допустим, что P_0PP' (фиг. 41) представляет собой график непрерывной функции $y=\varphi(x)$ и что он целиком лежит над осью x. Пусть P — точка (x, y) и P' — точка $(x+h, y+k)$, где h может быть и положительным и отрицательным (на чертеже h положительно). Задача состоит в вычислении площади $ONPP_0$.



a

Фиг. 41

Понятие „площади“ требует весьма тщательного рассмотрения, и мы вернемся к нему еще в гл. VII. Пока же будем считать его известным. Будем предполагать, что всякой такой области как $ONPP_0$ может быть поставлено в соответствие некоторое положительное число, которое мы будем обозначать через $(ONPP_0)$ и называть площадью, причем эти числа обладают некоторыми очевидными свойствами, подсказываемыми нашей геометрической интуицией, например:

$$(PRP')+(NN'RP)=(NN'P'P),\quad (N_1NPP_1)<(ONPP_0)$$

и т. д.

Ясно, что если мы все это предположим, то площадь фигуры $ONPP_0$ будет функцией от x; обозначим эту функцию через $\Phi(x)$. $\Phi(x)$ является *непрерывной* функцией. В самом деле,

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=(NN'P'P)=$$
$$=(NN'RP)+(PRP')=h\varphi(x)+(PRP').$$

Из чертежа видно, что площадь PRP' меньше чем hk. Это, однако, не всегда будет иметь место (см., например, фиг. 41*a*), потому что дуга PP' может не быть монотонно возрастающей или убывающей от P к P'. Но площадь PRP' будет всегда меньше чем $|h|\lambda(h)$, где $\lambda(h)$ обозначает наибольшее расстояние любой точки дуги PP' от PR. С другой стороны, так как $\varphi(x)$ — непрерывная функция, $\lambda(h)\to 0$ при $h\to 0$. Таким образом,

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=h\{\varphi(x)+\mu(h)\},$$

где $|\mu(h)| \leqslant \lambda(h)$ и $\lambda(h) \to 0$ при $h \to 0$. Отсюда следует, что $\Phi(x)$ непрерывна. Более того,

$$\Phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \{\varphi(x) + \mu(h)\} = \varphi(x).$$

Таким образом, *ордината кривой равна производной площади, а площадь является интегралом от ординаты.*

Теперь мы можем сформулировать следующее правило для нахождения площади $ONPP_0$. *Вычислим* $\Phi(x)$ — *интеграл от* $\varphi(x)$, *причем произвольную постоянную выберем так, чтобы* $\Phi(0) = 0$. *Тогда* $\Phi(x)$ *и является искомой площадью.*

Если бы требовалось вычислить площадь N_1NPP_1, то мы должны были бы определить произвольную постоянную так, чтобы $\Phi(x_1) = 0$, где x_1 есть абсцисса точки P_1. Если кривая лежит под осью x, то $\Phi(x)$ отрицательна, и площадь будет равна абсолютной величине $\Phi(x)$.

149. Длины плоских кривых. Понятие *длины* также требует весьма тщательного рассмотрения. Оно значительно сложнее понятия площади. В действительности, предположение, что дуга P_0P (см. фиг. 41) имеет определенную длину, которую мы обозначим через $S(x)$, недостаточно для нашей цели, тогда как соответствующее предположение относительно площади оказалось достаточным. Мы даже не можем, исходя из него, доказать, что $S(x)$ непрерывна, т. е. что

$$\lim \{S(P') - S(P)\} = 0.$$

Это кажется достаточно очевидным на большей фигуре, но уже менее очевидно в случае, изображенном на меньшей фигуре. Мы не можем, таким образом, продолжать наши рассмотрения с какой бы то ни было степенью строгости без подробного анализа того, что́ следует понимать под длиной кривой.

Однако легко видеть, что́ должна представлять собой *окончательная формула.* Предположим, что кривая имеет в каждой точке касательную, направление которой непрерывно изменяется, т. е. что $\varphi'(x)$ непрерывна. Тогда предположение, что кривая обладает длиной, ведет к соотношению

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{\{PP'\}}{h} = \frac{PP'}{h} \cdot \frac{\{PP'\}}{PP'},$$

где $\{PP'\}$ обозначает длину дуги, стягиваемой хордой PP'. Но

$$PP' = \sqrt{PR^2 + RP'^2} = h\sqrt{1 + \frac{k^2}{h^2}}$$

и

$$k = \varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(\xi),$$

где ξ лежит между x и $x+h$. Следовательно,

$$\lim \frac{PP'}{h} = \lim \sqrt{1 + \{\varphi'(\xi)\}^2} = \sqrt{1 + \{\varphi'(x)\}^2}.$$

Если мы далее предположим, что

$$\lim \frac{\{PP'\}}{PP'} = 1,$$

то получим следующий результат:

$$S'(x) = \lim \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \sqrt{1 + \{\varphi'(x)\}^2}.$$

и, таким образом,

$$S(x) = \int \sqrt{1 + \{\varphi'(x)\}^2}\, dx.$$

Примеры LIV. 1. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого от параболы $y = \frac{x^2}{4a}$ прямой $x = \xi$, а также длину дуги, ограничивающей его.

2. Показать, что площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ равна πab.

3. Площадь, заключенная между кривой $x = y^2(1 - x)$ и прямой $x = 1$, равна π. (*Экз.* 1926 г.)

4. Начертить кривую $(1 + x^2)y^2 = x^2(1 - x^2)$ и доказать, что площадь петли равна $\frac{1}{2}(\pi - 2)$.

(*Экз.* 1934 г.)

5. Начертить кривую $a^4y^2 = x^5(2a - x)$ и показать, что площадь фигуры, ограниченной этой кривой, равна $\frac{5}{4}\pi a^2$.

(*Экз.* 1923 г.)

6. Доказать, что площадь между кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \frac{y}{b} = 1$$

и отрезком $(-a, a)$ оси x равна $\frac{4}{5}ab$.

(*Экз.* 1930 г.)

7. Найти площадь, ограниченную кривой $y = \sin x$ и отрезком оси x от $x = 0$ до $x = 2\pi$. [Здесь $\Phi(x) = -\cos x$, а разность между значениями $-\cos x$ при $x = 0$ и при $x = 2\pi$ равна 0. Это объясняется, конечно, тем, что между $x = \pi$ и $x = 2\pi$ кривая лежит под осью x и соответствующая часть площади входит со знаком минус. Площадь от $x = 0$ до $x = \pi$ равна $-\cos\pi + \cos 0 = 2$, а вся искомая площадь, если каждая ее часть считается положительной, равна 4.]

8. Предположим, что координаты любой точки некоторой кривой даны, как функции параметра t, уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где φ и ψ — функции от t с непрерывными производными. Доказать, что если x монотонно возрастает, когда t изменяется от t_0 до t_1, то площадь области, ограниченной соответствующей дугой кривой, осью x и двумя ординатами, соответствующими t_0 и t_1, равна абсолютной величине разности $A(t_1) - A(t_0)$, где

$$A(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)\, dt = \int y \frac{dx}{dt}\, dt.$$

9. Предположим, что C — замкнутая самонепересекающаяся кривая, обладающая тем свойством, что любая прямая, параллельная одной из осей координат, пересекает ее не более чем в двух точках. Предположим, далее, что координаты любой точки P на кривой могут быть выражены, как в примере 8, через параметр t и что когда t изменяется от t_0 до t_1, P движется

в одном и том же направлении вдоль кривой и возвращается после одного полного обхода в исходное положение. Показать, что площадь, ограниченная кривой, равна абсолютной величине разности начального и конечного значений любого из интегралов

$$-\int y\frac{dx}{dt}dt, \quad \int x\frac{dy}{dt}dt, \quad \frac{1}{2}\int\left\{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right\}dt.$$

10. Применить результат примера 9 к определению площадей, ограниченных кривыми:

$$1^\circ. \quad \frac{x}{a}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{y}{a}=\frac{2t}{1+t^2}; \qquad 2^\circ. \quad x=a\cos^3 t, \quad y=b\sin^3 t.$$

11. Найти площадь петли кривой $x^3+y^3=3axy$. [Полагая $y=tx$, получим:

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Когда t изменяется от 0 до ∞, точка один раз описывает петлю. Далее,

$$\frac{1}{2}\int\left\{y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right\}dt=-\frac{1}{2}\int x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt=-\frac{1}{2}\int\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{3a^2}{2(1+t^3)},$$

что стремится к нулю при $t\to\infty$. Следовательно, площадь петли равна $\frac{3}{2}a^2$.]

12. Найти площадь петли кривой $x^5+y^5=5ax^2y^2$.

13. Площадь кривой

$$x=a\cos t+b\sin t+c, \qquad y=a'\cos t+b'\sin t+c',$$

где $ab'-a'b>0$, равна $\pi(ab'-a'b)$.

(*Экз.* 1927 г.)

14. Доказать, что площадь петли кривой $x=a\sin 2t$, $y=a\sin t$ равна $\frac{4}{3}a^2$.

(*Экз.* 1908 г.)

15. Начертить кривую

$$x=\cos 2t, \qquad y=\sin 3t$$

и найти площадь петли. Найти уравнение кривой в декартовых координатах и объяснить, почему график, соответствующий этому уравнению, отличается от первоначального.

(*Экз.* 1928 г.)

[В обычной теории кривых, заданных уравнениями в параметрической форме, предполагается, что $x'(t)$ и $y'(t)$ не обращаются одновременно в нуль; значению t, при котором обе эти производные обращаются в нуль, соответствует некоторая особенность кривой. В данном случае $x'(t)$ и $y'(t)$ обращаются в 0 при $t=\pm\frac{\pi}{2}$, когда $x=-1$, $y=\mp 1$. Если, например, t возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, точка (x, y) движется вдоль первого графика от $(1, 0)$ до $(-1, -1)$, но затем поворачивает обратно и возвращается по пройденному пути.

Уравнение в декартовых координатах получается исключением $\tau=\sin t$ из уравнений $x=1-2\tau^2$, $y=3\tau-4\tau^3$, и только та часть второго графика, для которой $|\tau|\leqslant 1$, принадлежит первому графику.]

16. Дуга эллипса, заданного уравнениями $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, между точками $t=t_1$ и $t=t_2$ имеет длину, равную $F(t_2)-F(t_1)$, где

$$F(t)=a\int\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$$

и e — эксцентриситет эллипса. [Этот интеграл не может быть выражен через функции, которые нами рассматривались.]

17. Координаты точки на циклоиде даются уравнениями

$$x=a(t+\sin t),\qquad y=a(1+\cos t).$$

Обозначим через P и Q точки, которым соответствуют значения параметра $t=-\frac{\pi}{2}$ и $t=\frac{\pi}{2}$. Вычислить площадь, ограниченную дугой PQ циклоиды и прямыми OP, OQ.

(*Экз.* 1934 г.)

18. **Полярные координаты.** Показать, что площадь, ограниченная кривой $r=f(\theta)$, где $f(\theta)$ — однозначная функция от θ, и лучами $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$, равна $F(\theta_2)-F(\theta_1)$, где

$$F(\theta)=\frac{1}{2}\int r^2 d\theta.$$

Показать также, что длина соответствующей дуги равна $\Phi(\theta_2)-\Phi(\theta_1)$, где

$$\Phi(\theta)=\int\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

С помощью этих формул определить (1) площадь и периметр круга $r=2a\sin\theta$; (2) площадь между параболой $r=\frac{1}{2}l\sec^2\frac{\theta}{2}$ и хордой, проходящей через ее фокус перпендикулярно ее оси, а также длину соответствующей дуги параболы; (3) площадь, ограниченную кривой $r=a+b\cos\theta$ в случаях $a>b$, $a=b$ и $a<b$; (4) площади эллипсов

$$\frac{1}{r^2}=a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta$$

и

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta.$$

[В последнем случае мы приходим к интегралу

$$\int\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

который может быть вычислен с помощью подстановки (см. пример LIII. 4)

$$(1+e\cos\theta)(1-e\cos\varphi)=1-e^2.]$$

19. Начертить кривую $2\theta=\frac{a}{r}+\frac{r}{a}$ и показать, что площадь, ограниченная лучом $\theta=\beta$ и двумя ветвями кривой, касающимися друг друга в точке $r=a$, $\theta=1$, равна $\frac{2}{3}a^2(\beta^2-1)^{3/2}$.

(*Экз.* 1909 г.)

20. Начертить кривую по уравнению

$$r^2\left(a^2+b^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)=a^4,$$

где $a>b>0$, и доказать, что площадь, ограниченная ею, равна $\frac{\pi a^3}{a+b}$.

(*Экз.* 1932 г.)

21. Кривая задана уравнением $p=f(r)$, где r — радиус-вектор, а p — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную. Показать, что вычисление площади области, ограниченной дугой кривой и двумя лучами, исходящими из полюса, сводится к вычислению интеграла

$$\frac{1}{2}\int\frac{prdr}{\sqrt{r^2-p^2}}.$$

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛ. VI

1. Функция $f(x)$ определена следующим образом: она равна $1+x$ для $x\leqslant 0$, равна x для $0<x<1$, равна $2-x$ для $1\leqslant x\leqslant 2$ и равна $3x-x^2$ для $x>2$. Исследовать непрерывность $f(x)$ и существование и непрерывность $f'(x)$ при $x=0$, $x=1$ и $x=2$.

(*Экз.* 1908 г.)

2. Обозначая a, $ax+b$, $ax^2+2bx+c$, ... через u_0, u_1, u_2, ..., показать, что

$$u_0^2u_3-3u_0u_1u_2+2u_1^3 \quad\text{и}\quad u_0u_4-4u_1u_3+3u_2^2$$

не зависят от x.

3. Если a_0, a_1, ..., a_{2n} — постоянные и

$$U_r=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r\ \between\ x,\ 1)^{r}\,{}^{*)},$$

то

$$U_0U_{2n}-2nU_1U_{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}U_2U_{2n-2}-\ \ldots\ +U_{2n}U_0$$

не зависит от x.

(*Экз.* 1896 г.)

[Продифференцировать и использовать соотношение $U_r'=rU_{r-1}$.]

4. Первые три производные от функции $\arcsin(\mu\sin x)-x$, где $\mu>1$, положительны для $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

5. Элементы некоторого определителя являются функциями от x. Показать, что производная этого определителя равна сумме определителей, образованных из исходного определителя дифференцированием одной строки.

6. Если f_1, f_2, f_3, f_4 — многочлены степени не выше четвертой, то

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4\\ f_1' & f_2' & f_3' & f_4'\\ f_1'' & f_2'' & f_3'' & f_4''\\ f_1''' & f_2''' & f_3''' & f_4''' \end{vmatrix}$$

также является многочленом степени не выше четвертой. [Продифференцировать пять раз, применяя результат примера 5 и отбрасывая определители, равные нулю.]

---

*) По поводу этого обозначения см. стр. 217. (*Прим. перев.*)

7. Если $yz = 1$ и $y_r = \frac{1}{r!} D_x^r y$, $z_s = \frac{1}{s!} D_x^s z$,
то

$$\frac{1}{z^3}\begin{vmatrix} z & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{y^2}\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

(*Экз.* 1905 г.)

8. Если

$$W(y, z, u) = \begin{vmatrix} y & z & u \\ y' & z' & u' \\ y'' & z'' & u'' \end{vmatrix},$$

где штрихи обозначают дифференцирования по x, то

$$W(y, z, u) = y^3 W\left(1, \frac{z}{y}, \frac{u}{y}\right).$$

9. Если

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{(hx + by + f)^3}.$$

10. Если

$$y^3 + 3yx + 2x^3 = 0,$$

то

$$x^2(1 + x^3)y'' - \frac{3}{2}xy' + y = 0.$$

(*Экз.* 1903 г.)

11. Проверить, что дифференциальное уравнение

$$y = \varphi\{\psi(y_1)\} + \varphi\{x - \psi(y_1)\},$$

где y_1 обозначает производную от y, а ψ — функцию, обратную φ', удовлетворяется функциями $y = \varphi(c) + \varphi(x - c)$ и $y = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$.

12. Проверить, что дифференциальное уравнение

$$y = \frac{x}{\psi(y_1)}\varphi\{\psi(y_1)\}$$

(в обозначениях примера 11) удовлетворяется функциями $y = c\varphi\left(\frac{x}{c}\right)$ и $y = \beta x$, где $\beta = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ и α является любым корнем уравнения

$$\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) = 0.$$

13. Если $ax + by + c = 0$, то $y_2 = 0$ (индексы обозначают дифференцирования по x). Это означает, что *общим дифференциальным уравнением всех прямых линий является* $y_2 = 0$. Найти общее дифференциальное уравнение (1) всех окружностей с центрами на оси x, (2) всех парабол, ось которых совпадает с осью x, (3) всех парабол с осями, параллельными оси y, (4) всех окружностей, (5) всех парабол, (6) всех конических сечений.

[Соответствующие уравнения имеют вид: (1) $1 + y_1^2 + yy_2 = 0$, (2) $y_1^2 + yy_2 = 0$, (3) $y_3 = 0$, (4) $(1 + y_1^2)y_3 = 3y_1y_2^2$, (5) $5y_3^2 = 3y_2y_4$, (6) $9y_2^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3 = 0$.

В каждом случае мы должны сначала написать общее уравнение рассматриваемых кривых и диффереицировать его до тех пор, пока мы получим достаточно уравнений для исключения произвольных постоянных.]

14. Показать, что общие дифференциальные уравнеиия всех парабол и всех конических сечений могут быть записаны, соответственно, в следующем виде:

$$D_x^2(y_2^{-2/3})=0, \quad D_x^3(y_2^{-2/3})=0.$$

[Уравнение конического сечения может быть записано в виде

$$y=ax+b\pm\sqrt{px^2+2qx+r}.$$

Отсюда мы выводим, что

$$y_2=\pm(pr-q^2)(px^2+2qx+r)^{-3/2}.$$

Для параболы $p=0$.]

15. Обозначая

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{1}{2!}\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{1}{4!}\frac{d^4y}{dx^4},\ \dots$$

через t, a, b, c, ... и

$$\frac{dx}{dy},\quad \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dy^2},\quad \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dy^3},\quad \frac{1}{4!}\frac{d^4x}{dy^4},\ \dots$$

через τ, α, β, γ, ..., показать, что

$$4ac-5b^2=\frac{4\alpha\gamma-5\beta^2}{\tau^8}, \quad bt-a^2=-\frac{\beta\tau-\alpha^2}{\tau^6}.$$

Вывести аналогичные формулы для выражений

$$a^2d-3abc-2b^3, \quad (1+t^2)b-2a^2t, \quad 2ct-5ab.$$

16. Если $y=\cos(m\arcsin x)$, и y_n обозначает n-ую производную от y, то

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}+(m^2-n^2)y_n=0.$$

(*Экз.* 1930 г.)

[Доказать сначала для случая $n=0$ и затем n раз продифференцировать, применяя теорему Лейбница.]

17. Доказать формулу

$$vD_x^n u=D_x^n(uv)-nD_x^{n-1}(uD_xv)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_x^{n-2}(uD_x^2v)-\dots,$$

где n — любое положительное целое число. [Применить метод индукции.]

18. Показать, что

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}\frac{\sin x}{x}=\frac{2n!}{x^{2n+1}}\{S_{2n-1}(x)\cos x-C_{2n}(x)\sin x\},$$

где $C_{2n}(x)$ и $S_{2n-1}(x)$ определены как в примере XLVI. 5.

(*Экз.* 1936 г.)

19. Доказать, что

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}\cos^{2\nu}x=\frac{(-1)^n}{2^{2\nu-1}}\sum_{r=0}^{\nu-1}\binom{2\nu}{r}(2\nu-2r)^{2n}\cos 2(\nu-r)x.$$

(*Экз.* 1928 г.)

20. Если $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, где $-1<x<1$ и $-\dfrac{\pi}{2}<\arcsin x<\dfrac{\pi}{2}$, то

$$(1-x^2)y_{n+1}-(2n+1)xy_n-n^2y_{n-1}=0,$$

причем индексы обозначают производные по x.

(*Экз.* 1933 г.)

21. Если $y=(\arcsin x)^2$, то

$$(1-x^2)y_{n+1}-(2n-1)xy_n-(n-1)^2y_{n-1}=0.$$

Найти отсюда значения всех производных от y при $x=0$.

(*Экз.* 1930 г.)

22. Кривая задана уравнениями

$$x=a(2\cos t+\cos 2t),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t).$$

Доказать, что (1) уравнения касательной и нормали в точке P кривой, которой соответствует значение параметра t, имеют вид

$$x\sin\frac{t}{2}+y\cos\frac{t}{2}=a\sin\frac{3t}{2},\quad x\cos\frac{t}{2}-y\sin\frac{t}{2}=3a\cos\frac{3t}{2};$$

(2) касательная в точке P пересекает кривую в точках Q и R, которым соответствуют значения параметра $-\dfrac{t}{2}$ и $\pi-\dfrac{t}{2}$; (3) $QR=4a$; (4) касательные в точках Q и R взаимно перпендикулярны и пересекаются на окружности $x^2+y^2=a^2$; (5) нормали в точках P, Q и R проходят через одну точку, лежащую на окружности $x^2+y^2=9a^2$; (6) уравнение кривой может быть записано в виде

$$(x^2+y^2+12ax+9a^2)^2=4a(2x+3a)^3.$$

Начертить эту кривую.

23. Показать, что уравнения, определяющие кривую в примере 22, могут быть заменены следующими:

$$\frac{\xi}{a}=2u+\frac{1}{u^2},\quad \frac{\eta}{a}=\frac{2}{u}+u^2,$$

где $\xi=x+yi$, $\eta=x-yi$, $u=\operatorname{Cis} t$. Показать, что уравнения касательной и нормали к кривой в точке u имеют вид

$$u^2\xi-u\eta=a(u^3-1),\quad u^2\xi+u\eta=3a(u^3+1),$$

и вывести отсюда свойства (2)—(5) кривой из примера 22.

24. Показать, что условие равенства корней уравнения

$$x^4+4px^3-4qx-1=0$$

может быть записано в виде

$$(p+q)^{2/3}-(p-q)^{2/3}=1.$$

(*Экз.* 1898 г.)

25. Пусть α, β, γ — корни кубического уравнения $f(x)=0$, расположенные в возрастающем порядке. Показать, что если (α, β) и (β, γ) разделены каждый на шесть равных частей, то корни уравнения $f'(x)=0$ будут лежать в четвертых по счету подинтервалах справа и слева от β. Каково будет кубическое уравнение в тех случаях, когда один из корней уравнения $f'(x)=0$ попадает в точку деления?

(*Экз.* 1907 г.)

26. Если $\varphi(x)$ — многочлен и λ — действительное число, то между каждой парой корней уравнения $\varphi(x)=0$ лежит по крайней мере один корень уравнения

$$\varphi'(x)+\lambda\varphi(x)=0.$$

[Рассуждать, как в примере XLI. 10.]

27. Если α и β — два следующих друг за другом корня уравнения $\varphi=0$, то число корней уравнения $\varphi'+\lambda\varphi=0$ (с учетом их кратности) между α и β нечетно.

Если все корни уравнения $\varphi=0$ действительны, то и все корни уравнения $\varphi'+\lambda\varphi=0$ действительны, и если все корни первого из этих уравнений — простые, то такими же будут все корни второго.

(*Экз.* 1933 г.)

28. Вывести из примера 27, что

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

имеет n простых корней, которые все лежат между -1 и 1.

(*Экз.* 1933 г.)

29. Исследовать на максимумы и минимумы функцию $f(x)$ и найти действительные корни уравнения $f(x)=0$, если $f(x)$ — одна из функций

$$x-\sin x-\operatorname{tg}\alpha(1-\cos x),\quad x-\sin x-(\alpha-\sin\alpha)-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha-\cos x)$$

и α — угол между 0 и π. Показать, что в первом случае условием двойного корня является то, чтобы $\operatorname{tg}\alpha-\alpha$ было кратным π.

30. Показать, что можно найти такое отношение $\lambda:\mu$, что корни уравнения

$$\lambda(ax^2+2bx+c)+\mu(a'x^2+2b'x+c')=0$$

будут действительными и разность их будет равна любому заданному числу, за исключением того случая, когда корни этих квадратных трехчленов действительны и перемежаются, и что в этом случае корни всегда действительны, но существует нижняя грань для модуля их разности.

(*Экз.* 1895 г.)

[Рассмотреть график функции

$$\frac{ax^2+2bx+c}{a'x^2+2b'x+c'};$$

см. пример XLVI. 13 и сл.]

31. Доказать, что

$$\pi<\frac{\sin\pi x}{x(1-x)}\leqslant 4$$

для $0<x<1$, и построить график этой функции.

32. Построить график функции

$$\pi\operatorname{ctg}\pi x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}.$$

33. Установить общий вид графика функции y, если дано, что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(6x^2+x-1)(x-1)^2(x+1)^3}{x^2}.$$

(*Экз.* 1908 г.)

34. Прямоугольный лист бумаги сложен так, что один из его углов лежит на противоположной стороне. Показать, как должна быть сложена бумага, чтобы длина сгиба была наибольшей.

35. Наибольший острый угол, под которым эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

может пересекаться с концентрической окружностью, равен

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

(*Экз.* 1900 г.)

36. Даны площадь Δ и полупериметр s треугольника. Показать, что максимум или минимум одной из его сторон является корнем уравнения $s(x-s)x^2+4\Delta^2=0$. Исследовать вещественность корней этого уравнения и установить, дают ли они максимум или минимум длины стороны.

[Уравнения $a+b+c=2s$, $s(s-a)(s-b)(s-c)=\Delta^2$ определяют a и b как функции от c. Продифференцируем по c и положим $\frac{da}{dc}=0$. Тогда мы найдем, что $b=c$, $s-b=s-c=\frac{a}{2}$, откуда следует, что

$$s(a-s)a^2+4\Delta^2=0.$$

Это уравнение имеет три действительных корня, если $s^4>27\Delta^2$, и один,— если $s^4<27\Delta^2$. Для равностороннего треугольника (для которого периметр при данной площади — наименьший) $s^4=27\Delta^2$. Таким образом, неравенство $s^4<27\Delta^2$ невозможно. Следовательно, полученное уравнение для a имеет три действительных корня, а так как их сумма положительна, а произведение отрицательно, то два из них положительны, а третий отрицателен. Из двух положительных корней один соответствует максимуму, а другой — минимуму.]

37. Площадь наибольшего равностороннего треугольника, стороны которого проходят через три данные точки A, B, C, равна

$$2\Delta+\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}},$$

где a, b, c — стороны, а Δ — площадь треугольника ABC.

(*Экз.* 1899 г.)

38. Если Δ и Δ' обозначают площади двух наибольших равнобедренных треугольников с вершинами в начале координат и основаниями, вписанными в кардиоиду $r=a(1+\cos\theta)$, то

$$256\Delta\Delta'=25a^4\sqrt{5}.$$

(*Экз.* 1907 г.)

39. Найти предельные значения, к которым стремится

$$\frac{x^2-4y+8}{y^2-6x+3},$$

когда точка (x, y) стремится к точке (2,3) вдоль кривой

$$x^2y-4x^2-4xy+y^2+16x-2y-7=0.$$

(*Экз.* 1903 г.)

[Если мы перенесем начало координат в точку (2,3), то уравнение кривой принимает вид $\xi^2\eta-\xi^2+\eta^2=0$, а данная функция преобразуется в

$$\frac{\xi^2+4\xi-4\eta}{\eta^2+6\eta-6\xi}.$$

Полагая $\eta=t\xi$, найдем, что

$$\xi=\frac{1-t^2}{t},\quad \eta=1-t^2.$$

Кривая имеет петлю с двойной точкой в начале координат, которой соответствуют значения $t=-1$ и $t=1$. Выражая данную функцию через t и устремляя t к -1 и к 1, получим, что искомые предельные значения равны $-\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{3}$.]

40. Если

$$f(x)=\frac{1}{\sin x-\sin a}-\frac{1}{(x-a)\cos a},$$

то

$$\frac{d}{da}\{\lim_{x\to a} f(x)\}-\lim_{x\to a} f'(x)=\frac{3}{4}\sec^2 a-\frac{5}{12}\sec a.$$

(*Экз.* 1896 г.)

41. Показать, что если

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

то

$$\varphi^{(n)}(x)=\frac{Q_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}},$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n. Показать также, что

1° $Q_{n+1}=(1+x^2)Q_n'-2(n+1)xQ_n$,

2° $Q_{n+2}+2(n+2)xQ_{n+1}+(n+2)(n+1)(1+x^2)Q_n=0$,

3° $(1+x^2)Q_n''-2nxQ_n'+n(n+1)Q_n=0$,

4° $Q_n=(-1)^n n!\left\{(n+1)x^n-\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}x^{n-2}+\dots\right\}$,

5° все корни уравнения $Q_n=0$ действительны и перемежаются с корнями уравнения $Q_{n-1}=0$.

42. Если $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям пп. 126—8 в отношении непрерывности и дифференцируемости, то существует такое значение ξ между a и b, что

$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

[Рассмотреть функцию, образованную заменой элементов последней строки этого определителя на $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Эта теорема сводится к теореме о среднем значении (см. п. 126) в случае $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=1$.]

43. Из результата примера 42 вывести теорему п. 128. [Положить $\psi(x)=x$.]

44. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям п. 128 и $\varphi'(x)$ никогда не обращается в нуль, то

$$\frac{\varphi(\xi)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(\xi)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

для некоторого ξ в (a, b). (*Экз.* 1928 г.)

[Применить теорему Ролля к функции $\{\varphi(x)-\varphi(a)\}\{\psi(b)-\psi(x)\}$.]

45. Если $\varphi(x)$ непрерывна для $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi''(x)$ существует и положительна для $a<x<b$, то

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$$

строго возрастает для $a<x<b$. (*Экз.* 1933 г.)

46. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны для $0 \leqslant x \leqslant a$ и дифференцируемы в интервале $0 < x < a$, причем $f(0)=0$ и $g(0)=0$; пусть, далее, $f'(x)$ и $g'(x)$ положительны. Доказать, что тогда

1° если $f'(x)$ возрастает с возрастанием x, то и $\dfrac{f(x)}{x}$ возрастает с возрастанием x,

2° если $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ возрастает с возрастанием x, то и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ возрастает с возрастанием x.

Доказать, что функции

$$\frac{x}{\sin x}, \quad \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}, \quad \frac{\frac{1}{6}x^3}{x-\sin x}, \ldots$$

возрастают в интервале $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. (*Экз.* 1934 г.)

[См. Г. Харди, Дж. Литтльвуд и Г. Полиа, *Неравенства*, стр. 130.]

47. Пусть функция $f(x)$ имеет дифференциальный коэффициент $f'(\xi)$ при $x=\xi$. Доказать, что

$$\varphi(h,k)=\frac{f(\xi+h)-f(\xi-k)}{h+k}-f'(\xi)$$

стремится к нулю, когда h и k стремятся независимо друг от друга к нулю, принимая положительные значения.

Доказать также, что если $f'(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем ξ, то мы можем отбросить условие, что h и k положительны, и предположить только, что $h+k \neq 0$.

Наконец, доказать на примере функции

$$f(0)=0, \quad f(x)=\frac{1}{\left[\frac{1}{x^2}\right]} \quad (x \neq 0),$$

что мы не можем отбросить это условие в общем случае.

(*Экз.* 1923 г.)

[Для доказательства первого утверждения использовать тождество

$$\varphi(h,k)=\frac{h}{h+k}\left\{\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}-f'(\xi)\right\}+\frac{k}{h+k}\left\{\frac{f(\xi-k)-f(\xi)}{-k}-f'(\xi)\right\}$$

и неравенства $h < h+k$, $k < h+k$. Доказательство второго утверждения проводится с помощью теоремы о среднем значении. Для доказательства третьего утверждения положить

$$\xi=0, \quad h=\left(n-\frac{1}{n}\right)^{-1/2}, \quad k=-n^{-1/2},$$

где n — положительное целое число.]

48. Если $\varphi'(x) \to a$ при $x \to \infty$ и $a \neq 0$, то $\varphi(x) \sim ax$. Если $a=0$, то $\varphi(x)=o(x)$. Если $\varphi'(x) \to \infty$, то $\varphi(x) \to \infty$. [Применить теорему о среднем значении.]

49. Если $\varphi(x) \to a$ при $x \to \infty$, то $\varphi'(x)$ не может стремиться ни к какому другому пределу, кроме 0.

50. Если $\varphi(x)+\varphi'(x) \to a$ при $x \to \infty$, то $\varphi(x) \to a$ и $\varphi'(x) \to 0$.

[Пусть $\varphi(x)=a+\psi(x)$, так что $\psi(x)+\psi'(x) \to 0$. Если $\psi'(x)$ не меняет знака, скажем положительна для всех достаточно больших значений x, то $\psi(x)$ монотонно возрастает и должна стремиться либо к некоторому конечному пределу l, либо к ∞. Если $\psi(x) \to \infty$, то $\psi'(x) \to -\infty$, что противоречит нашей предпосылке. Если $\psi(x) \to l$, то $\psi'(x) \to -l$, а это невозможно (см. пример 49), если $l \neq 0$. Аналогичный результат мы получаем и в предположении, что $\psi'(x)$ отрицательна для достаточно больших x. Если $\psi'(x)$ меняет знак для сколь угодно больших x, то $\psi(x)$ имеет максимумы и минимумы правее любого сколь угодно большого значения x. Пусть x — достаточно большое значение, соответствующее максимуму или минимуму $\psi(x)$; тогда $\psi(x)+\psi'(x)$ мало, а $\psi'(x)=0$, так что $\psi(x)$ мало. Другие значения $\psi(x)$ тем более малы по абсолютной величине, когда x достаточно велико.]

51. Показать, как преобразовать $\int R\left\{x, \sqrt{\frac{ax+b}{mx+n}}, \sqrt{\frac{cx+d}{mx+n}}\right\} dx$ в интеграл от дробно-рациональной функции. [Положить $mx+n=\frac{1}{t}$ и применить результат примера XLIX. 13.]

52. Вычислить интегралы

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}, \quad \int \sqrt{a^2+\sqrt{b^2+\frac{c}{x}}}\,dx,$$

$$\int \frac{5\cos x+6}{2\cos x+\sin x+3}\,dx, \quad \int \frac{dx}{(2-\sin^2 x)(2+\sin x-\sin^2 x)},$$

$$\int \operatorname{cosec} x\sqrt{\sec 2x}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\sin x)(2+\sin x)}}, \quad \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,sec} x\,dx, \quad \int (\arcsin x)^2\,dx,$$

$$\int x\arcsin x\,dx, \quad \int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx, \quad \int \frac{\ln(\alpha^2+\beta^2x^2)}{x^2}\,dx.$$

53. Вычислить

$$\int \frac{x-1}{x+1}\,\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}$$

с помощью подстановки $u^2=x+1+\frac{1}{x}$.

(*Экз.* 1931 г.)

54. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left[\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \right.$$

$$\left. -\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{3\cdot 5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{x^{2n}}\right\}\sqrt{1-x^2}\right],$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{1}{x^{2n+1}}\right\}\sqrt{1-x^2},$$

где n — положительное целое число. (*Экз.* 1931 г.)

55. Рекуррентные формулы. (1) Показать, что

$$2(n-1)\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$

$$=\frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

[Положить $x+\frac{1}{2}p=t$, $q-\frac{1}{4}p^2=\lambda$; тогда

$$\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^n}=\frac{1}{\lambda}\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^{n-1}}-\frac{1}{\lambda}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\lambda)^n}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^{n-1}}+\frac{1}{2\lambda(n-1)}\int t\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{(t^2+\lambda)^{n-1}}\right\}dt;$$

отсюда получаем искомый результат интегрированием по частям.

Формула такого типа называется *рекуррентной*. Она чрезвычайно полезна, когда n — целое положительное число. Тогда мы можем выразить $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ через $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}$ и, таким образом, вычислить этот интеграл для каждого значения n.]

(2) Показать, что если

$$I_{p,q}=\int x^p(1+x)^q\,dx,$$

то

$$(p+1)I_{p,q}=x^{p+1}(1+x)^q-qI_{p+1,q-1},$$

и вывести аналогичную формулу, связывающую $I_{p,q}$ с $I_{p-1,q+1}$. С помощью подстановки $x=-\frac{y}{1+y}$ показать также, что

$$I_{p,q}=(-1)^{p+1}\int y^p(1+y)^{-p-q-2}\,dy.$$

(3) Если

$$u_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n},$$

то

$$(2n-2)u_n-(2n-3)u_{n-1}=x(x^2+1)^{-(n-1)}.$$

(*Экз.* 1935 г.)

(4) Если

$$I_{m,n}=\int\frac{x^m\,dx}{(x^2+1)^n},$$

то

$$2(n-1)I_{m,n}=-x^{m-1}(x^2+1)^{-(n-1)}+(m-1)I_{m-2,n-1}.$$

(5) Если

$$I_n=\int x^n\cos\beta x\,dx \quad\text{и}\quad J_n=\int x^n\sin\beta x\,dx,$$

то

$$\beta I_n=x^n\sin\beta x-nJ_{n-1},\quad \beta J_n=-x^n\cos\beta x+nI_{n-1}.$$

(6) Если

$$I_n=\int\cos^n x\,dx \quad\text{и}\quad J_n=\int\sin^n x\,dx,$$

то

$$nI_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2},\quad nJ_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)J_{n-2},$$

(7) Если

$$I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx,$$

то

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = \operatorname{tg}^{n-1} x.$$

(8) Если

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x\, dx,$$

то

$$(m+n) I_{m,n} = -\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{m,n-2} =$$

$$= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}.$$

[Мы имеем

$$(m+1) I_{m,n} = -\int \sin^{n-1} x \frac{d}{dx}(\cos^{m+1} x)\, dx =$$

$$= -\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x\, dx =$$

$$= -\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + (n-1)(I_{m,n-2} - I_{m,n}),$$

что приводит к первой рекуррентной формуле.]

(9) Найти формулу, связывающую

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \sin nx\, dx$$

с $I_{m-2,n}$. (*Экз.* 1897 г.)

(10) Если

$$I_{m,n} = \int x^m \operatorname{cosec}^n x\, dx,$$

то

$$(n-1)(n-2) I_{m,n} = (n-2)^2 I_{m,n-2} + m(m-1) I_{m-2,n-2} -$$

$$- x^{m-1} \operatorname{cosec}^{n-1} x \{ m \sin x + (n-2) x \cos x \}.$$

(*Экз.* 1896 г.)

(11) Если

$$I_n = \int (a + b\cos x)^{-n}\, dx,$$

то

$$(n-1)(a^2-b^2) I_n = -b \sin x (a + b\cos x)^{-(n-1)} + (2n-3) a I_{n-1} - (n-2) I_{n-2}.$$

(12) Если

$$I_n = \int (a\cos^2 x + 2h \cos x \sin x + b \sin^2 x)^{-n}\, dx,$$

то

$$4n(n+1)(ab-h^2) I_{n+2} - 2n(2n+1)(a+b) I_{n+1} + 4n^2 I_n = -\frac{d^2 I_n}{dx^2}.$$

(*Экз.* 1898 г.)

(13) Если

$$I_{m,n} = \int x^m (\ln x)^n\, dx,$$

то

$$(m+1) I_{m,n} = x^{m+1} (\ln x)^n - n I_{m,n-1}.$$

56. Если n — положительное целое число, то

$$\int x^m (\ln x)^n\, dx=$$
$$= x^{m+1}\left\{\frac{(\ln x)^n}{m+1}-\frac{n(\ln x)^{n-1}}{(m+1)^2}+\frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{(m+1)^3}-\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}\right\}.$$

57. Площадь, ограниченная кривой, заданной уравнениями

$$x=\cos\varphi+\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi},\quad y=\sin\varphi-\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi},$$

где α — положительный острый угол, равна $\frac{\pi}{2}\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$.

(*Экз.* 1904 г.)

58. Проекция хорды окружности радиуса a на фиксированный диаметр имеет постоянную длину $2a\cos\beta$. Показать, что геометрическое место середин таких хорд состоит из двух петель и что площадь каждой петли равна $a^2(\beta-\cos\beta\sin\beta)$.

(*Экз.* 1903 г.)

59. Показать, что длина квадранта кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1 \quad \text{равна} \quad \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

(*Экз.* 1911 г.)

60. Точка A находится внутри окружности радиуса a на расстоянии b от центра окружности. Показать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из A на касательные к окружности, ограничивает площадь $\pi\left(a^2+\frac{1}{2}b^2\right)$.

(*Экз.* 1909 г.)

61. Доказать, что если

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

есть уравнение некоторого конического сечения, то

$$\int\frac{dx}{(lx+my+n)(hx+by+f)}=\alpha\ln\frac{PT}{PT'}+\beta,$$

где PT, PT' означают длины перпендикуляров, опущенных из точки P этого конического сечения с координатами x и y на касательные в концах хорды $lx+my+n=0$, а α и β — постоянные.

(*Экз.* 1902 г.)

62. Показать, что

$$\int\frac{ax^2+2bx+c}{(Ax^2+2Bx+C)^2}\,dx$$

является рациональной функцией от x в том и только том случае, когда одно из выражений $AC-B^2$ и $aC+cA-2bB$ равно нулю[1].)

---

[1]) См. книгу автора, цитированную на стр. 248.

63. Показать, что необходнмым и достаточным условием для того, чтобы

$$\int \frac{f(x)}{\{F(x)\}^2}\,dx,$$

где f и F — многочлены, причем F имеет только простые кории, был рациональной функцией от x, является делимость $f'F' - fF''$ на F.

(*Экз.* 1910 г.)

64. Показать, что

$$\int \frac{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}{(1 - e\cos x)^2}\,dx$$

является рациональиой функцией от $\cos x$ и $\sin x$ в том и только том случае, когда $\alpha e + \gamma = 0$; вычислить интеграл в этом случае.

(*Экз.* 1910 г.)

ГЛАВА VII

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ

150. Теоремы о среднем высших порядков. В п. 126 мы доказали, что если $f(x)$ непрерывна для $a \leqslant x \leqslant b$ и имеет производную в интервале $a < x < b$, то

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi),$$

где $a < \xi < b$, или что

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta_1 h), \tag{1}$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Наложим теперь на $f(x)$ дальнейшие ограничения. Мы предположим, что $f'(x)$ непрерывна для $a \leqslant x \leqslant b$ и что $f''(x)$ существует для $a < x < b$. Рассмотрим функцию

$$f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - \left(\frac{b - x}{b - a}\right)^2 \{f(b) - f(a) - (b - a) f'(a)\}.$$

Эта функция обращается в нуль при $x = a$ и при $x = b$, и ее производная равна

$$\frac{2(b - x)}{(b - a)^2} \{f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) - \frac{1}{2}(b - a)^2 f''(a)\};$$

это выражение должно, следовательно, обращаться в нуль при некотором значении x между a и b. Поэтому существует такое ξ между a и b, $\xi = a + \theta_2 (b - a)$, где $0 < \theta_2 < 1$, что

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 f''(\xi).$$

Если мы положим $b = a + h$, то получим равенство

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2} h^2 f''(a + \theta_2 h), \tag{2}$$

которое является выражением так называемой *теоремы о среднем второго порядка.*

Относительно $f'(x)$ мы предположили то же, что мы предполагали относительно $\varphi(x)$ в п. 126, т. е. непрерывность в замкнутом и дифференцируемость в открытом интервале (a, b). В частности, мы предположили существование $f'(a)$ и $f'(b)$, а это предположение, вообще говоря, содержит высказывания относительно значений $f(x)$ для значений x, лежащих вне интервала (a, b) слева от a и справа от b. В приложениях $f(x)$ может оказаться не определенной вне (a, b). В таких случаях под $f'(a)$, например, следует понимать

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Такое определение не зависит от значений x вне (a, b). Это замечание вполне аналогично тому, которое было сделано относительно непрерывности в конце п. 99.

Подобное обстоятельство возникает относительно высших производных и в следующей теореме.

По аналогии с (1) и (2) мы приходим к следующей теореме.

Теорема Тейлора или общая теорема о среднем значении. *Если $f^{(n-1)}(x)$ непрерывна для $a \leqslant x \leqslant b$ и $f^{(n)}(x)$ существует для $a < x < b$, то*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots +$$
$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где $a < \xi < b$, и если $b = a + h$, то

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2!}h^2 f''(a) + \ldots +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_n h),$$

где $0 < \theta_n < 1$.

Непрерывность $f^{(n-1)}(x)$ естественно влечет за собой непрерывность $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-2)}(x)$.

Доказательство проводится аналогично тому, как мы это делали в случаях $n = 1$ и $n = 2$. Рассмотрим функцию

$$F_n(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n F_n(a),$$

где

$$F_n(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

Эта функция обращается в нуль при $x = a$ и при $x = b$; ее производная равна

$$\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\left\{F_n(a) - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)\right\},$$

и между a и b должно существовать значение x, для которого это выражение обращается в нуль. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Примеры LV. 1. Предположим, что $f(x)$ — многочлен степени r. Тогда $f^{(n)}(x)$ тождественно равно нулю, если $n>r$, и теорема приводит к следующему алгебраическому тождеству:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^r}{r!}f^{(r)}(a).$$

2. Применяя теорему к функции $f(x)=\frac{1}{x}$ и предполагая, что x и $x+h$ положительны, мы получаем следующий результат:

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{x^n}+\frac{(-1)^n h^n}{(x+\theta_n h)^{n+1}}.$$

[Так как

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{x^n}+\frac{(-1)^n h^n}{x^n(x+h)},$$

то достаточно показать, что $x^n(x+h)$ может быть представлено в виде $(x+\theta_n h)^{n+1}$ или что $x^n(x+h)$ лежит между x^{n+1} и $(x+h)^{n+1}$].

3. Вывести формулу

$$\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\cos x+(-1)^n\frac{h^{2n}}{2n!}\sin(x+\theta_{2n}h),$$

соответствующую формулу для $\cos(x+h)$ и аналогичные формулы, содержащие степени h до h^{2n+1}.

4. Показать, что если m — положительное целое число и n — положительное целое число, не превосходящее m, то

$$(x+h)^m=x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}h+\ldots+\binom{m}{n-1}x^{m-n+1}h^{n+1}+\binom{m}{n}(x+\theta_n h)^{m-n}h^n.$$

Показать также, что если интервал $(x, x+h)$ не содержит точку $x=0$, то эта формула имеет место для всех рациональных значений m и всех положительных целочисленных значений n, и что даже если $x<0<x+h$ или $x+h<0<x$, то формула имеет место, если $m-n$ положительно.

5. **Формула**

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta_1 h)$$

не имеет места, если $f(x)=\frac{1}{x}$ и $x<0<x+h$. [Ибо

$$f(x+h)-f(x)>0$$

и

$$hf'(x+\theta_1 h)=-\frac{h}{(x+\theta_1 h)^2}<0.$$

Ясно, что в этом случае условия теоремы о среднем не выполнены.]

6. Если $x=-a$, $h=2a$, $f(x)=x^{1/3}$, то уравнение

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta_1 h)$$

удовлетворяется при $\theta_1=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{18}\sqrt{3}$. [Этот пример показывает, что утверждение теоремы может иметь место и в том случае, когда условия, при которых она была доказана, не выполняются].

7. Метод Ньютона приближенного вычисления корней уравнения. Пусть ξ является приближеным значением корня алгебраического уравнения $f(x)=0$, причем истинное значение корня равно $\xi+h$. Тогда

$$0=f(\xi+h)=f(\xi)+hf'(\xi)+\frac{1}{2}h^2f''(\xi+\theta_2 h),$$

так что

$$h=-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}-\frac{1}{2}h^2\frac{f''(\xi+\theta_2 h)}{f'(\xi)},$$

если $f'(\xi)\neq 0$.

Если корень — простой и h досгаточио мало, то существует такое положительное K, что $|f'(x)|>K$ для всех значений x, которые мы рассматриваем, и значение корня

$$\xi+h=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}+O(h^2)=\xi_1+O(h^2),$$

где ξ_1, следовательно, является уже лучшим приближением, чем ξ.

Повторяя это рассуждение для ξ_1 вместо ξ и т. д., мы получим ряд еще лучших приближеиий ξ_2, $\xi_3, \ldots$, ошибки которых равиы $O(h^4)$, $O(h^8), \ldots$.

8. Применить этот процесс к уравнению $x^2=2$, взяв в качестве первого приближения $\xi=\frac{3}{2}$. [Находим $\xi_1=\frac{17}{12}=1{,}417\ldots$, что является весьма хорошим приближением, иесмотря на большую неточность первого. Повторяя процесс, найдем $\xi_2=\frac{577}{408}=1{,}414215\ldots$, что дает результат, верный до пятого знака включительио.]

9. Рассматривая таким же образом уравнение $x^2-1-y=0$, где y мало, показать, что

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{4(2+y)}+O(y^4).$$

10. Показать, что кореиь уравнения из примера 7 равен

$$\xi-\frac{f}{f'}-\frac{f^2f''}{2f'^3}+O(|h|^3),$$

причем аргумеитом во всех функциях является ξ.

11. Уравнение $\sin x=\alpha x$, где α мало, имеет корень, почти равный π. Показать, что $(1-\alpha)\pi$ является лучшим приближением и что еще лучшим является $(1-\alpha+\alpha^2)\pi$.

[Метод, изложенный в примерах 7—10, не зависит от того обстоятельства, что $f(x)=0$ — алгебраическое уравнение; он применим и к трансцендентным уравнениям, если только f' и f'' непрерывны и $f'(\xi)\neq 0$.]

12. Показать, что если $f^{(n+1)}(x)$ иепрерывна, то предел при $h\to 0$ величии θ_n в теореме Тейлора равен $\frac{1}{n+1}$.

[Действительно, $f(x+h)$ равно как

$$f(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta_n h),$$

так и

$$f(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}h),$$

где θ_n и θ_{n+1} лежат между 0 и 1. Следовательно,

$$f^{(n)}(x+\theta_n h)=f^{(n)}(x)+\frac{hf^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}h)}{n+1},$$

Но по первой теореме о среднем, примененной к функции $f^{(n)}(x)$ с $\theta_n h$ вместо h, мы находим, что

$$f^{(n)}(x+\theta_n h)=f^{(n)}(x)+\theta_n h f^{(n+1)}(x+\theta\theta_n h),$$

где θ также лежит между 0 и 1. Следовательно,

$$\theta_n f^{(n+1)}(x+\theta\theta_n h)+\frac{f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}h)}{n+1},$$

откуда и следует утверждение, так как $f^{(n+1)}(x+\theta\theta_n h)$ и $f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}h)$ стремятся к пределу $f^{(n+1)}(x)$ при $h\to 0$.]

151. Другая форма теоремы Тейлора. Существует другая форма теоремы Тейлора, в которой предполагается меньше, чем в п. 150.

Предположим, что $f(x)$ имеет n производных $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ при $x=a$. Существование $f^{(\nu)}(x)$ в любой точке предполагает существование $f^{(\nu-1)}(x)$ в некотором интервале, содержащем эту точку, и ее непрерывность в этой точке; таким образом, первые $n-2$ производных непрерывны в некотором интервале, содержащем точку $x=a$, а $(n-1)$-ая производная непрерывна в точке $x=a$. Но мы не предполагаем существования n-ой производной ни в какой другой точке, кроме $x=a$.

Пусть сперва $h\geqslant 0$, и положим

$$F_n(h)=f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Тогда $F_n(h)$ и ее первые $n-1$ производных обращаются в нуль при $h=0$, а $F_n^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)$. Следовательно, если мы положим

$$G(h)=F_n(h)-\frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a)-\delta\},$$

где δ положительно, то

$$G(0)=0,\ G'(0)=0, \ldots,\ G^{(n-1)}(0)=0,\ G^{(n)}(0)=\delta>0.$$

Из последних двух соотношений и теоремы А п. 122 следует, что $G^{(n-1)}(h)$ возрастает в точке $h=0$ и положительна для малых положительных h.

Далее, $G^{(n-2)}(0)=0$ и $G^{(n-1)}(h)>0$ для малых положительных h; таким образом, по следствию 1 п. 122, $G^{(n-2)}(h)>0$ для малых положительных h[1]). Повторяя это рассуждение, мы последовательно найдем, что $G^{(n-3)}(h)$, $G^{(n-4)}(h)$, ... и, наконец, $G(h)$ положительны, т. е. что

$$F_n(h)>\frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a)-\delta\}$$

для малых положительных h.

[1]) Или $G^{(n-2)}(h)=G^{(n-2)}(h)-G^{(n-2)}(0)=hG^{(n-1)}(\theta h)>0$, по теореме о среднем.

Аналогично[1]) мы можем доказать, что

$$F_n(h) < \frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a) + \delta\}$$

для малых положительных h, причем в этих неравенствах δ обозначает произвольное положительное число. Отсюда следует, что

$$F_n(h) = \frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a) + \eta\},$$

где $\eta \to 0$ *при* $h \to 0$ справа.

Рассматривая аналогично случай отрицательных h, мы приходим к следующей теореме.

Если $f(x)$ имеет n производных при $x = a$, то

$$(1)\qquad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a) + \eta\},$$

где $\eta \to 0$ при $h \to 0$.

В обозначениях п. 98 мы можем вместо (1) написать

$$(2)\qquad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a) + o(h^n).$$

Эти формулы мы могли бы вывести и из теоремы п. 150, но только в предположении непрерывности $f^{(n)}(x)$ при $x = a$.

Примеры LVI. 1. Показать, что если

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + o(x^n)$$

при $x \to 0$, то $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

[Устремляя x к 0, мы видим, что $a_0 = b_0$. Деля на x и устремляя затем x к 0, найдем, что $a_1 = b_1$ и т. д.

Отсюда следует, что если $f(x)$ имеет n производных при $x = a$ и

$$f(a+h) = c_0 + c_1h + \ldots + c_nh^n + o(h^n),$$

то $c_0, c_1, \ldots$ имеют значения из (2).]

2. Доказать, что

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \to f'(a),$$

если $f'(a)$ существует.

3. Доказать, что

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \to f''(a),$$

если $f''(a)$ существует.

(*Экз.* 1925 г.)

4. Доказать, что

$$\frac{3\sin 2\theta}{2(2+\cos 2\theta)} = \theta + \frac{4}{45}\theta^5 + o(\theta^5)$$

для малых θ.

(*Экз.* 1935 г.)

---

[1]) Изменяя знак перед δ в определении $G(h)$.

5. Доказать, что если $\sin x = xy^2$ и x и $y-1$ малы, то

$$y = 1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4 + o(x^4),\quad x^2 = -12(y-1) + \frac{6}{5}(y-1)^2 + o\{(y-1)^2\}.$$

(*Экз.* 1934 г.)

152. Ряд Тейлора. Предположим, что $f(x)$ имеет производные всех порядков в интервале $(a-\eta,\ a+\eta)$, содержащем точку $x=a$. Тогда, если h по модулю меньше чем η, то

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \\ + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_n h),$$

где $0 < \theta_n < 1$ для всех n. Или если положить

$$S_n = \sum_0^{n-1} \frac{h^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(a),\qquad R_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_n h),$$

то мы имеем:

$$f(a+h) - S_n = R_n.$$

Предположим теперь еще, что $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$f(a+h) = \lim_{n\to\infty} S_n = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots .$$

Это разложение $f(a+h)$ известно под именем *ряда Тейлора*. При $a=0$ эта формула принимает вид

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \ldots,$$

что называется *рядом Маклорена*. Функция R_n называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Читатель должен остерегаться ошибочного мнения, что существование всех производных $f(x)$ является достаточным условием для справедливости разложения функции в ряд Тейлора. Существенным является поведение R_n.

(1) **Ряды для синуса и для косинуса.** Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда $f(x)$ имеет производные всех порядков для всех значений x. Кроме того, $|f^n(x)| < 1$ для всех значений x и n. Следовательно, в данном случае $|R_n| \leqslant \frac{h^n}{n!}$, что стремится к 0 при $n \to \infty$ (см. пример XXVII. 12), каково бы ни было значение h. Отсюда следует, что

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \ldots$$

для всех значений x и h. В частности

$$\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \ldots$$

для всех значений h. Аналогично можно доказать, что

$$\cos(x+h)=\cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \ldots$$

и

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \ldots .$$

(2) **Биномиальный ряд.** Пусть $f(x)=(1+x)^m$, где m — любое рациональное число, положительное или отрицательное. Тогда

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

и ряд Маклорена (с h, замененным на x) имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots .$$

Когда m — положительное целое число, этот ряд обрывается, и мы получаем известную биномиальную теорему с положительным целочисленным показателем. В общем случае

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta_n x) = \binom{m}{n}x^n(1+\theta_n x)^{m-n},$$

и для того чтобы показать, что ряд Маклорена действительно представляет $(1+x)^m$ в некоторой области значений x, когда m не является положительным целым числом, мы должны показать, что $R_n \to 0$ для каждого значения x из этой области. Это в действительности имеет место при $-1<x<1$. С помощью приведенного выше выражения для R_n можно показать, что разложение справедливо для $0 \leqslant x < 1$, так как для таких x

$$(1+\theta_n x)^{m-n} < 1,$$

если $n > m$ и $\binom{m}{n}x^n \to 0$ при $n \to \infty$ (пример, XXVII. 13). Но при $-1<x<0$ возникает затруднение, состоящее в том, что здесь $1+\theta_n x<1$ и $(1+\theta_n x)^{m-n}>1$, если $n>m$. Зная только, что $0<\theta_n<1$, мы не можем быть уверены в том, что $1+\theta_n x$ не является очень малым, а, следовательно, $(1+\theta_n x)^{m-n}$ очень большим.

Для того чтобы доказать биномиальное разложение с помощью теоремы Тейлора, нужно воспользоваться другим представлением остаточного члена R_n, которое мы рассмотрим ниже (п. 167).

153. Приложения теоремы Тейлора. А. Максимумы и минимумы. С помощью теоремы Тейлора может быть получена система признаков максимума и минимума более полная, чем рассмотренная в пп. 123 и 124, хотя эти результаты и не представляют большого практического интереса. В предположении что $\varphi(x)$ имеет производные первых двух порядков, мы установили следующие достаточные условия для того, чтобы $\varphi(x)$ имела максимум или минимум при $x=\xi$: *для максимума* $\varphi'(\xi)=0$, $\varphi''(\xi)<0$; *для минимума* $\varphi'(\xi)=0$, $\varphi''(\xi)>0$. Очевидно, что эти признаки неприменимы в том случае, когда и $\varphi'(\xi)$ и $\varphi''(\xi)$ равны нулю.

Допустим, что $\varphi(x)$ имеет n производных

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x),$$

из которых все, кроме последней, обращаются в нуль при $x=\xi$. Тогда, согласно (2) п. 151,

$$\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)=\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(\xi)+o(h^n),$$

и это выражение должно иметь в случае максимума или минимума постоянный знак для достаточно малых положительных или отрицательных h. Для этого, очевидно, требуется, чтобы n было четным; а если n — четное, то мы будем иметь максимум или минимум в зависимости от того, будет ли $\varphi^{(n)}(\xi)$ отрицательно или положительно.

Таким образом, мы получаем следующее предложение: *если $\varphi(\xi)$ является максимумом или минимумом, то низшая производная, не обращающаяся в нуль при $x=\xi$, должна быть четного порядка, причем если ее значение в этой точке отрицательно, то $\varphi(\xi)$ является максимумом, а если оно положительно, то $\varphi(\xi)$ является минимумом.*

Примеры. LVII. 1. Проверить справедливость теоремы для функции $\varphi(x)=(x-a)^m$, где m — положительное целое число и $\xi=a$.

2. Исследовать функцию $(x-a)^m(x-b)^n$, где m и n — положительные целые числа, на максимумы и минимумы в точках $x=a$ и $x=b$. Начертить все возможные виды графика функции $y=(x-a)^m(x-b)^n$.

3. Исследовать на максимум и минимум в точке $x=0$ функции $\sin x-x$,

$$\sin x-x+\frac{x^3}{3!},\quad \sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!},\ldots,\quad \cos x-1,\quad \cos x-1+\frac{x^2}{2!},$$

$$\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!},\ldots.$$

154. В. Вычисление некоторых пределов. Часто бывает необходимо вычислить предел отношения двух функций при стремлении аргумента к некоторому значению, при котором обе функции обращаются в нуль. Допустим, что этим значением аргумента x является 0. Для вычисления таких пределов существует несколько методов.

(а) Предположим, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы при $x=0$ и что $f(0)=\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)\neq 0$. Тогда

$$f(x)=xf'(0)+o(x),\quad \varphi(x)=x\varphi'(0)+o(x)$$

и, следовательно,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

Вообще, если функции имеют n производных в точке $x=0$ и первые $n-1$ производных каждой из этих функций обращаются в этой точке в нуль, а $\varphi^{(n)}(0)\neq 0$, то, по теореме п. 151,

$$f(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n),\quad \varphi(x)=\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)+o(x^n)$$

и
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to \frac{f^{(n)}(0)}{\varphi^{(n)}(0)}.$$

(b) Часто представляется, однако, более удобным применить теорему п. 128. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны для $0 \leqslant x \leqslant h$ и дифференцируемы для $0 < x \leqslant h$, $f(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi(h) \neq 0$ и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ не обращаются одновременно в нуль ни при одном значении x, то

$$\frac{f(h)}{\varphi(h)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \tag{1}$$

для некоторого ξ между 0 и h.

Допустим теперь, что

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \to l \tag{2}$$

при $x \to 0$ справа. Тогда существует интервал $(0, k)$, в котором $\varphi'(x)$ не обращается в нуль[1]). По теореме п. 129, следует, что $\varphi'(x)$ не меняет знака для $0 < x < k$, а отсюда получаем, по следствию 2 из п. 122, что $\varphi(x)$ не меняет знака для $0 < x < k$. Поэтому (1) имеет место для каждого положительного h, меньшего k, и

$$\frac{f(h)}{\varphi(h)} \to l.$$

Это значит, что

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{3}$$

если этот последний предел существует.

Существуют, конечно, аналогичные теоремы для $x \to -0$ или для $x \to 0$. Кроме того, приведенное рассуждение может быть повторено любое число раз. Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$$

для любого n, если только $f^{(\nu)}(0) = 0$ и $\varphi^{(\nu)}(0) = 0$ для $0 \leqslant \nu < n$ и предел в правой части существует[*]).

То же рассуждение показывает, что $\frac{f}{\varphi} \to +\infty$, если $\frac{f'}{\varphi'} \to +\infty$.

Если мы хотим вывести (3) из теоремы о среднем п. 126, то мы должны предположить, что $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны при $x = 0$ (во всяком случае при стремлении к 0 справа). Тогда

$$f(x) = xf'(\theta_1 x), \quad \varphi(x) = x\varphi'(\theta_2 x),$$

где θ_1 и θ_2 лежат между 0 и 1.

---

[1]) Ибо в противном случае левая часть соотношения (2) теряла бы смысл для бесконечного множества малых значений x.

[*]) Это предложение часто называется правилом Лопиталя. (*Прим. перев.*)

Так как $f'(\theta_1 x)\to f'(0)$ и $\varphi'(\theta_2 x)\to\varphi'(0)$, то утверждение доказано.

Преимущество метода (b) обнаруживается в приведенном ниже примере LVIII. 3. Если

$$f(x)=\operatorname{tg}x-x,\quad \varphi(x)=x-\sin x,$$

то

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,\ \varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0,\ \ \varphi'''(0)=2,\ \varphi'''(0)=1,$$

и, следовательно, искомый предел равен 2. Это рассуждение требует трех дифференцирований каждой функции. Но

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\sec^2 x\,(1+\cos x)\to 2,$$

и мы быстрее получаем результат методом (b).

Существует много видоизменений теорем настоящего пункта. Так, x может стремиться к a или к ∞ вместо 0 и f и φ могут стремиться обе к бесконечности вместо 0. Эти видоизменения обычно сводятся к рассмотренному случаю простыми преобразованиями.

Примеры LVIII. 1. Если $f=x^2\sin\frac{1}{x}$, $\varphi=x$, то $\frac{f}{\varphi}\to 0$. Здесь

$$\frac{f'}{\varphi'}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

а эта функция колеблется при $x\to 0$. Таким образом, $\frac{f}{\varphi}$ может стремиться к пределу и в том случае, когда $\frac{f'}{\varphi'}$ к пределу не стремится, т. е. наше условие является лишь достаточным, но не необходимым.

2. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-(n+1)\,x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

3. Найти пределы при $x\to 0$ следующих выражений:

$$\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x},\quad \frac{\operatorname{tg}nx-n\operatorname{tg}x}{n\sin x-\sin nx}.$$

(*Экз.* 1932 г.)

4. Показать, что

$$\frac{1-4\sin^2\frac{1}{6}\pi x}{1-x^2}\to\frac{1}{6}\pi\sqrt{3}$$

при $x\to 1$.

5. Найти

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{x^2+a^2}-x\right\}.$$

[Положить $x=\frac{1}{y}$.]

6. Доказать, что

$$\lim_{x\to n}(x-n)\operatorname{cosec}x\pi=\frac{(-1)^n}{\pi},$$

$$\lim_{x\to n}\frac{1}{x-n}\left\{\operatorname{cosec}x\pi-\frac{(-1)^n}{(x-n)\pi}\right\}=\frac{(-1)^n\pi}{6},$$

где n — любое целое число. Найти также соответствующие пределы при замене $\operatorname{cosec} x\pi$ на $\operatorname{ctg} x\pi$.

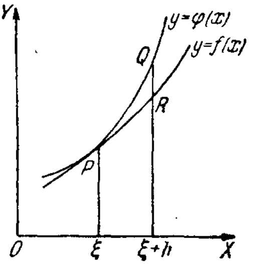
7. Найти пределы при $x \to 0$ следующих выражений:

$$\frac{1}{x^3}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} - \frac{x}{6}\right), \quad \frac{1}{x^3}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right).$$

8. Показать, что при $x \to 0$

$$\frac{\sin x \arcsin x - x^2}{x^6} \to \frac{1}{18}, \quad \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x - x^2}{x^6} \to \frac{2}{9}.$$

155. C. Касание плоских кривых. Две кривые называются *пересекающимися* в некоторой точке, если эта точка лежит на каждой из них. Они называются *соприкасающимися* в этой точке, если касательные к ним в этой точке совпадают.



Фиг. 42

Допустим, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные всех порядков при $x = \xi$, и рассмотрим кривые $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. В общем случае $f(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ не будут равны. В этом случае абсцисса $x = \xi$ не соответствует точке пересечения этих кривых. Если же $f(\xi) = \varphi(\xi)$, то кривые пересекаются в точке $x = \xi$, $y = f(\xi) = \varphi(\xi)$. Для того чтобы кривые касались друг друга в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы первые производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ имели одно и то же значение при $x = \xi$.

Касание кривых в этом случае может рассматриваться еще с другой точки зрения. На фиг. 42 проведены две кривые, касающиеся друг друга в точке P; отрезок QR равен

$$\varphi(\xi + h) - f(\xi + h),$$

а так как

$$\varphi(\xi) = f(\xi), \quad \varphi'(\xi) = f'(\xi),$$

то он равен

$$\frac{1}{2} h^2 \{\varphi''(\xi + \theta h) - f''(\xi + \theta h)\},$$

где θ лежит между 0 и 1. Следовательно,

$$\lim \frac{QR}{h^2} = \frac{1}{2}\{\varphi''(\xi) - f''(\xi)\}$$

при $h \to 0$. Другими словами, *если кривые касаются друг друга в точке с абсциссой ξ, то разность между их ординатами в точке с абсциссой $\xi + h$ — по крайней мере второго порядка малости относительно h.*

Очевидно, что порядок малости QR может рассматриваться как мера близости кривых в окрестности точки $x=\xi$. Нетрудно видеть, что если первые $n-1$ производных от f и φ имеют одинаковые значения при $x=\xi$, то порядок малости QR будет равен n, и что в этом случае

$$\lim \frac{QR}{h^n}=\frac{1}{n!}\{\varphi^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(\xi)\}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Касание n-го порядка. *Если* $f(\xi)=\varphi(\xi)$, $f'(\xi)=\varphi'(\xi)$, ..., $f^{(n)}(\xi)=\varphi^{(n)}(\xi)$, *но* $f^{(n+1)}(\xi)\neq\varphi^{(n+1)}(\xi)$, *то мы будем говорить, что кривые* $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ *имеют в точке с абсциссой* $x=\xi$ *касание n-го порядка.*

Таким образом определенное понятие касания n-го порядка зависит от выбора осей координат и неприменимо к тому случаю, когда касательная к кривым параллельна оси y. В этом случае мы можем рассматривать y как независимую, а x — как зависимую переменную; целесообразнее, однако, рассматривать x и y как функции некоторого параметра t. Хорошее изложение этого вопроса читатель найдет в монографии Фоулера: Fowler, *The elementary differential geometry of plane curves**).

Примеры LIX. 1. Пусть $\varphi(x)=ax+b$, так что графиком $y=\varphi(x)$ является прямая линия. Условия касания в точке, для которой $x=\xi$, имеют вид $f(\xi)=a\xi+b$, $f'(\xi)=a$. Если мы определим a и b так, чтобы эти условия выполнялись, то получим $a=f'(\xi)$, $b=f(\xi)-\xi f'(\xi)$. Таким образом, уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $x=\xi$ записывается в виде

$$y=xf'(\xi)+\{f(\xi)-\xi f'(\xi)\}$$

или $y-f(\xi)=(x-\xi)f'(\xi)$ (см. пример XXXIX. 5).

2. Условия касания первого порядка полностью определяют прямую. Для того чтобы касательная имела касание второго порядка, необходимо, чтобы $f''(\xi)=\varphi''(\xi)$, т. е. $f''(\xi)=0$. Мы будем называть точку, в которой касательная к кривой имеет с ней касание второго порядка, *точкой распрямления***).

3. Найти точки нулевой кривизны графиков функций

$$3x^4-6x^3+1,\quad \frac{2x}{1+x^2},\quad \sin x,\quad a\cos^2 x+b\sin^2 x,\quad \operatorname{tg} x,\quad \operatorname{arc\,tg} x.$$

4. Показать, что коническое сечение

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

не может иметь точек распрямления, если оно не вырождено.

[Здесь

$$ax+hy+g+(hx+by+f)y_1=0$$

и

$$a+2hy_1+by_1^2+(hx+by+f)y_2=0,$$

*) См. также Э. Гурса, *Курс математического анализа*, т. 1, гл. X, ГТТИ, 1933. *(Прим. перев.)*

**) Если $f'''(\xi)\neq 0$, то такая точка называется точкой перегиба. *(Прим. перев.)*

причем индексы обозначают дифференцирования по x. Таким образом в точке распрямления

$$a+2hy_1+by_1^2=0,$$

или

$$a(hx+by+f)^2-2h(ax+hy+g)(hx+by+f)+b(ax+hy+g)^2=0,$$

или

$$(ab-h^2)\{ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy\}+af^2-2fgh+bg^2=0.$$

Но это соотношение несовместно с уравнением конического сечения, за исключением того случая, когда

$$af^2-2fgh+bg^2=c(ab-h^2)$$

или

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0,$$

а это является условием распадения конического сечения на две прямые.]

5. Кривая

$$y=\frac{ax^2+2bx+c}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$$

имеет одну или три точки распрямления, в зависимости от того, имеет ли уравнение

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$$

действительные или комплексные корни.

[Уравнение кривой параллельным переносом осей координат может быть приведено к виду

$$\eta=\frac{\xi}{A\xi^2+2B\xi+C}=\frac{\xi}{A(\xi-p)(\xi-q)},$$

где p, q либо действительны, либо комплексно сопряжены. Условие для точки распрямления принимает вид

$$\xi^3-3pq\xi+pq(p+q)=0,$$

а это уравнение имеет один или три действительных корня, в зависимости от того, будет ли $\{pq(p+q)\}^2$ положительно или отрицательно, т. е. будут ли p и q действительными или комплексно сопряженными.]

6. Показать, что если кривая из предыдущего примера имеет три точки распрямления, то они лежат на одной прямой. [Уравнение $\xi^3-3pq\xi+$ $+pq(p+q)=0$ может быть приведено к виду

$$(\xi-p)(\xi-q)(\xi+p+q)+(p-q)^2\xi=0,$$

так что точки распрямления лежат на прямой

$$\xi+A(p-q)^2\eta+p+q=0$$

или

$$A\xi-4(AC-B^2)\eta=2B.]$$

7. Найти точки распрямления на кривой

$$54y=(x+5)^2(x^3-10)$$

и набросать примерный ход кривой в интервале $(-6, 3)$.

(*Экз.* 1936 г.)

[См. пример XLVI. 10.]

8. **Касание круга и кривой. Кривизна**[1]). Круг

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

будет иметь касание второго порядка с кривой $y=f(x)$ в точке (ξ, η), если y, y_1 и y_2 имеют при $x=\xi$ одинаковые значения для этих двух кривых.

Дифференцируя (1) дважды и полагая $x=\xi$, находим:

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=r^2,\ (\xi-a)+(\eta-b)\eta_1=0,\ 1+\eta_1^2+(\eta-b)\eta_2=0,$$

где η, η_1, η_2 означают $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $f''(\xi)$. Эти уравнения дают:

$$a=\xi-\frac{\eta_1(1+\eta_1^2)}{\eta_2},\quad b=\eta+\frac{1+\eta_1^2}{\eta_2},\quad r=\frac{(1+\eta_1^2)^{3/2}}{\eta_2}.$$

Круг, имеющий касание второго порядка с кривой в точке (ξ, η), называется *кругом кривизны*, а его радиус — *радиусом кривизны*. *Мерой кривизны* (или просто *кривизной*) называется величина, обратная радиусу кривизны. Таким образом, кривизна равна

$$\frac{\eta_2}{(1+\eta_1^2)^{3/2}}.$$

9. Проверить, что кривизна круга есть величина постоянная, равная единице, деленной на радиус круга; показать, что круг является единственной кривой постоянной кривизны*).

10. Найти центр и радиус кривизны в каждой точке конических сечений

$$y^2=4ax,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

11. Показать, что в общем случае существует единственное коническое сечение, имеющее касание четвертого порядка с кривой $y=f(x)$ в данной точке P.

12. Существует бесконечно много конических сечений, имеющих касание третьего порядка с данной кривой в данной точке P. Показать, что их центры лежат на прямой.

[Возьмем касательную и нормаль в данной точке к данной кривой за оси координат. Тогда уравнение конического сечения примет вид $2y=ax^2+2hxy+by^2$, и когда x мало́, одно из значений y может быть представлено в виде (см. гл. V, Разные примеры, 24)

$$y=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}ahx^3+o(x^3).$$

Это выражение должно совпадать со следующим:

$$y=\frac{1}{2}f''(0)\,x^2+\frac{1}{6}f'''(0)\,x^3+o(x^3),$$

отсюда $a=f''(0)$, $h=\dfrac{f'''(0)}{3f''(0)}$ (см. пример LVI. 1). Но центры лежат на прямой $ax+hy=0$.]

---

[1]) Значительно более полное изложение теории кривизны читатель найдет в книге Фоулера, цитированной на стр. 293. [См. также, например, П. К. Рашевский, *Курс дифференциальной геометрии*, гл. III, 1938, ГОНТИ. (*Прим. перев.*)]

*) Строго говоря, эти утверждения относятся только к полукругу, так как η_2 имеет разные знаки на верхней и нижней полуокружности; абсолютная величина кривизны постоянна для всего круга. (*Прим. перев.*)

13. Геометрическое место центров конических сечений, имеющих касание третьего порядка с эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$, представляет собой диаметр эллипса

$$\frac{x}{a\cos\alpha}+\frac{y}{b\sin\alpha}=1.$$

[Ибо сам эллипс является одним из таких конических сечений.]

156. Дифференцирование функций от нескольких переменных. До сих пор мы занимались исключительно функциями от одного переменного x, но ничто не мешает нам применить операцию дифференцирования к функциям от нескольких переменных x, y, ...

Допустим, следовательно, что $f(x, y)$ является функцией от двух [1]) действительных переменных x и y и что пределы

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h},\quad \lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}$$

существуют для всех рассматриваемых значений x и y, т. е. что $f(x, y)$ имеет производную $\frac{df}{dx}$ или $D_x f(x, y)$ по x и производную $\frac{df}{dy}$ или $D_y f(x, y)$ по y. Эти производные принято называть *частными производными* или *частными дифференциальными коэффициентами* функции f и записывать их в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},$$

или

$$f'_x(x, y),\quad f'_y(x, y),$$

или проще f'_x, f'_y, или f_x, f_y. Читатель не должен, однако, думать, что эти новые обозначения содержат какую-нибудь существенно новую идею; „частное дифференцирование по x“ является в точности такой же операцией, как и обычное дифференцирование, причем единственным новым обстоятельством является то, что в выражении функции f присутствует еще вторая переменная y, не зависящая от x.

Наши определения предполагают независимость x и y. Если x и y связаны некоторым соотношением, то y является функцией $\varphi(x)$ от x и

$$f(x, y)=f\{x, \varphi(x)\}$$

есть функция от одного переменного x; а если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то $f(x, y)$ есть функция от t.

---

[1]) Новые моменты, возникающие при рассмотрении функций от нескольких переменных, достаточно хорошо выявляются на примере двух независимых переменных. Мы не будем отдельно формулировать обобщения наших теорем на случай трех и большего числа переменных.

Примеры LX. 1. Доказать, что если $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, так что $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, то

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

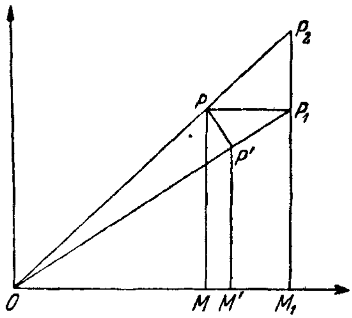
$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta.$$

2. Объяснить, почему

$$\frac{\partial r}{\partial x}\neq\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial r}}\quad\text{и}\quad\frac{\partial\theta}{\partial x}\neq\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\theta}}.$$

[Когда мы рассматривали функцию y от одного переменного x, из самих определений следовало, что $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dx}{dy}$ являются величинами обратными друг другу. Но это уже не имеет места, если мы имеем дело с функциями от двух переменных. Пусть P (фиг. 43) — точка (x, y) или (r, θ). Для нахождения $\frac{\partial r}{\partial x}$ мы должны дать x приращение $MM_1=\delta x$, сохраняя значение y неизменным. При этом точка P перейдет в положение P_1. Если мы отложим вдоль OP_1 отрезок $OP'=OP$, то приращением r будет $P'P_1=\delta r$, и

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\lim\frac{\delta r}{\delta x}.$$



Фиг. 43

Если же, с другой стороны, мы хотим вычислить $\frac{\partial x}{\partial r}$, причем x и y рассматриваются как функции от r и θ, то мы должны дать r приращение Δr, сохраняя значение θ неизменным. Допустим, что при этом P переходит в P_2, причем $PP_2=\Delta r$. Соответствующим приращением x будет $MM_1=\Delta x$, и

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\lim\frac{\Delta x}{\Delta r}.$$

Но $\Delta x=\delta x$ [1]), тогда как $\Delta r\neq\delta r$. Действительно, из чертежа видно, что

$$\lim\frac{\delta r}{\delta x}=\lim\frac{P'P_1}{PP_1}=\cos\theta,$$

тогда как

$$\lim\frac{\Delta r}{\Delta x}=\lim\frac{PP_2}{PP_1}=\sec\theta,$$

так что

$$\lim\frac{\delta r}{\Delta r}=\cos^2\theta.]$$

---

[1]) Конечно, равенство $\Delta x=\delta x$ имеет место благодаря специальному выбору Δr (а именно PP_2). Всякий другой выбор приращения Δr привел бы к значениям Δx, Δr, пропорциональным полученным в тексте.

3. Доказать, что если $z=f(ax+by)$, то

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}.$$

4. Найти X_x, $X_y, \ldots$, если $X+Y=x$, $Y=xy$. Выразить x и y как функции от X и Y, и найти x_X, $x_Y, \ldots$.

5. Найти $X_x, \ldots$, если $X+Y+Z=x$, $Y+Z=xy$, $Z=xyz$. Выразить x, y и z через X, Y и Z и найти $x_X, \ldots$.

[Не представляет труда распространить понятия предыдущего пункта на функции от любого числа переменных. Но читатель должен отдать себе ясный отчет в том, что понятие частной производной функции от нескольких переменных определено только в том случае, когда указаны *все* независимые переменные. Так, если $u=x+y+z$, причем x, y и z являются независимыми переменными, то $u_x=1$. Но если рассматривать u как функцию переменных x, $x+y=\eta$ и $x+y+z=\zeta$, то $u=\zeta$ и $u_x=0$.]

157. Дифференцирование функции от двух переменных. Имеется одна теорема, относящаяся к дифференцированию функций от одного переменного, которая играет исключительно важную роль, но зависит от понятия частной производной, рассмотренного в предыдущем пункте. Это — так называемая *теорема о полной производной*. Она дает правило для дифференцирования по t функции $f\{\varphi(t), \psi(t)\}$.

Допустим, в первую очередь, что $f(x, y)$ является функцией от двух переменных x и y и что f'_x, f'_y являются непрерывными функциями от x и y (см. п. 108) для всех рассматриваемых значений этих переменных. Теперь предположим, что изменения x и y ограничены тем, что точка (x, y) должна лежать на кривой

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

где φ и ψ являются функциями от t, обладающими непрерывными производными $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Тогда $f(x, y)$ приведется к функции от единственной переменной t, скажем $F(t)$. Задача состоит в нахождении $F'(t)$.

Допустим, что когда t изменяется от t до $t+\tau$, x и y изменяются до $x+\xi$ и $y+\eta$. Тогда, по определению,

$$\frac{dF(t)}{dt}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[f\{\varphi(t+\tau), \psi(t+\tau)\}-f\{\varphi(t), \psi(t)\}\right]=$$

$$=\lim\frac{1}{\tau}\{f(x+\xi, y+\eta)-f(x, y)\}=$$

$$=\lim\left[\frac{f(x+\xi, y+\eta)-f(x, y+\eta)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{\tau}+\frac{f(x, y+\eta)-f(x, y)}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\tau}\right].$$

Но, по теореме о среднем,

$$\frac{f(x+\xi, y+\eta)-f(x, y+\eta)}{\xi}=f'_x(x+\theta\xi, y+\eta),$$

$$\frac{f(x, y+\eta)-f(x, y)}{\eta}=f'_y(x, y+\theta'\eta),$$

где θ и θ' лежат между 0 и 1. Когда $\tau \to 0$, $\xi \to 0$ и $\eta \to 0$, причем

$$\frac{\xi}{\tau} \to \varphi'(t), \quad \frac{\eta}{\tau} \to \psi'(t).$$

Кроме того,

$$f'_x(x+\theta\xi,\ y+\eta) \to f'_x(x,\ y), \quad f'_y(x,\ y+\theta'\eta) \to f'_y(x,\ y).$$

Следовательно,

$$F'(t) = D_t f\{\varphi(t),\ \psi(t)\} = f'_x(x,\ y)\,\varphi'(t) + f'_y(x, y)\,\psi'(t),$$

где после дифференцирований по x и по y следует положить $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Этот результат может быть также записан в следующей форме:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Примеры LXI. 1. Пусть

$$\varphi(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \psi(t) = \frac{2t}{1+t^2},$$

так что геометрическим местом точек (x, y) является окружность $x^2+y^2 = 1$. Тогда

$$F'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} f'_x + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} f'_y,$$

причем в правой части, после дифференцирований, x и y нужно заменить, соответственно, выражениями $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Полезно проверить эту формулу в частных случаях. Допустим, например, что $f(x, y) = x^2+y^2$. Тогда $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$ и

$$F'(t) = 2x\varphi'(t) + 2y\psi'(t) = 0,$$

что действительно верно, так как $F(t) = 1$.

2. Проверить таким же образом теорему в следующих случаях:

(a) $x = t^m$, $y = 1 - t^m$, $f(x, y) = x + y$;

(b) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

3. Одним из наиболее важных случаев является тот, в котором $t = x$. Тогда мы находим:

$$D_x f\{x,\ \psi(x)\} = D_x f(x,\ y) + D_y f(x,\ y)\,\psi'(x),$$

где после дифференцирования вместо y надо подставить $\psi(x)$.

Обозначения $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ были введены в связи с рассматриваемым случаем; действительно, здесь под $\dfrac{df}{dx}$ можно было бы понимать *как* $D_x f\{x, \psi(x)\}$, *так и* $D_x f(x, y)$, где в первом из этих выражений y следует положить равным $\psi(x)$ *до*, а во втором — *после* дифференцирования. Пусть, например, $y = 1 - x$ и $f(x, y) = x + y$. Тогда $D_x f(x, 1-x) = D_x 1 = 0$, тогда как $D_x f(x, y) = 1$.

В первом из этих случаев производную можно обозначить через $\dfrac{df}{dx}$, а во втором ее обозначают через $\dfrac{\partial f}{\partial x}$; тогда теорема принимает вид

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx};$$

хотя и эти обозначения не безукоризненны, так как функции $f\{x, \psi(x)\}$ и $f(x, y)$, вид которых как функций от x совершенно различен, обозначаются в $\frac{df}{dx}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ одной и той же буквой f.

4. Если результатом исключения t из уравнений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ является $f(x, y)=0$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0.$$

5. Если x и y являются функциями от t, а r и θ — полярные координаты точки (x, y), то $r'=\frac{xx'+yy'}{r}$, $\theta'=\frac{xy'-yx'}{r^2}$, где штрихи обозначают дифференцирование по t.

158. Мы предполагали, что f'_x и f'_y являются непрерывными функциями от двух переменных x и y в смысле п. 108. Предположение одного их существования для всех x и y оказывается недостаточным.

Действительно, из одного существования f'_x и f'_y мы можем сделать очень мало выводов; мы даже не можем заключить, что f непрерывна. Рассмотрим, например, функцию из примера в п. 108, определенную уравнениями

$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

если $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $f=0$, если хотя бы один из аргументов равен нулю. Тогда

$$f'_x(x, y)=-\frac{2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x, y)=\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

во всех точках, кроме начала координат. Кроме того,

$$f'_x(0, 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,$$

и аналогично $f'_y(0, 0)=0$. Таким образом, f'_x и f'_y существуют для всех x, y; но (как мы видели в п. 108) f разрывна в начале координат.

Функция, определенная уравнениями

$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}(x+y),$$

если $x \neq 0$, $y \neq 0$, и $f=0$, если $x=0$ или $y=0$, непрерывна всюду, включая начало координат; для нее мы также находим, что

$$f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0.$$

Положим теперь $x=y=t$. Тогда $F(t)=f(t, t)=2t$ и $F'(0)=2$; но

$$f'_x\frac{dx}{dt}+f'_y\frac{dy}{dt}=0\cdot 1+0\cdot 1=0$$

при $t=0$, так что результат предыдущего пункта не имеет места.

В дальнейшем мы будем предполагать непрерывность всех встречающихся производных.

159. Теорема о среднем для функций от двух переменных. Многие из результатов последней главы следовали из теоремы о среднем:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

Это равенство может быть записано в виде

$$\delta y = f'(x + \theta\delta x)\,\delta x,$$

где $y = f(x)$. Предположим теперь, что $z = f(x, y)$ — функция от двух независимых переменных x и y, и дадим x и y приращения h, k или δx, δy. Поставим задачу найти выражение для соответствующего приращения z, а именно,

$$\delta z = f(x + h, y + k) - f(x, y),$$

через h, k и производные от z по x и y.

Пусть

$$f(x + ht, y + kt) = F(t).$$

Тогда

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = F(1) - F(0) = F'(\theta),$$

где $0 < \theta < 1$. Но, по теореме о полной производной (см. п. 157),

$$F'(t) = D_t f(x + ht, y + kt) = hf'_x(x + ht, y + kt) + \\ + kf'_y(x + ht, y + kt).$$

Следовательно,

$$\delta z = f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf'_x(x + \theta h, y + \theta k) + \\ + kf'_y(x + \theta h, y + \theta k),$$

что и является искомой формулой. Так как f'_x, f'_y — непрерывные функции от x и y, то

$$f'_x(x + \theta h, y + \theta k) = f'_x(x, y) + \varepsilon_{h,k},$$

$$f'_y(x + \theta h, y + \theta k) = f'_y(x, y) + \eta_{h,k},$$

где $\varepsilon_{h,k}$ и $\eta_{h,k}$ стремятся к нулю при h и k, стремящихся к нулю. Следовательно, теорема может быть записана и так:

$$\delta z = (f'_x + \varepsilon)\,\delta x + (f'_y + \eta)\,\delta y, \qquad (1)$$

где ε и η малы, если δx и δy малы.

Результат, содержащийся в (1), состоит в том, что соотношение

$$\delta z = f'_x\delta x + f'_y\delta y$$

приближенно верно, т. е. что разность между левой и правой частью этого равенства мала по сравнению с бо́льшим из чисел δx, δy[1]). Мы должны сказать „*бо́льшим из чисел* δx, δy", потому что одно из них может быть мало́ по сравнению с другим; возможно даже, что $\delta x = 0$ или $\delta y = 0$.

---

[1]) Или по сравнению с $|\delta x| + |\delta y|$ или $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$.

Если любое уравнение вида $\delta z = \lambda\delta x + \mu\delta y$ „приближенно верно“, то $\lambda = f'_x$, $\mu = f'_y$. Действительно,

$$\delta z - f'_x\delta x - f'_y\delta y = \varepsilon\delta x + \eta\delta y,\quad \delta z - \lambda\delta x - \mu\delta y = \varepsilon'\delta x + \eta'\delta y,$$

где ε, η, ε', η' стремятся к нулю, когда δx и δy стремятся к нулю; таким образом,

$$(\lambda - f'_x)\,\delta x + (\mu - f'_y)\,\delta y = \rho\delta x + \sigma\delta y,$$

где ρ и σ стремятся к нулю. Следовательно, если ζ — любое заданное положительное число, то мы можем подобрать такое ω, что

$$|(\lambda - f'_x)\,\delta x + (\mu - f'_y)\,\delta y| \leqslant \zeta(|\delta x| + |\delta y|)$$

для всех значений δx и δy, по модулю меньших чем ω. Полагая $\delta y = 0$, получим $|(\lambda - f'_x)\,\delta x| \leqslant \zeta|\delta x|$, или $|\lambda - f'_x| \leqslant \zeta$, что может иметь место для произвольного ζ только в том случае, когда $\lambda = f'_x$. Аналогично найдем, что $\mu = f'_y$.

Мы доказали, что (1) имеет место, если f'_x и f'_y непрерывны, но это условие не является необходимым. Допустим, например, что $\varphi(x, y)$ — любая непрерывная функция от x и y, и положим

$$z = f(x, y) = (x + y)\,\varphi(x, y).$$

Тогда

$$f'_x(0, 0) = \lim \frac{h\varphi(h, 0)}{h} = \varphi(0, 0)$$

и аналогично $f'_y(0, 0) = \varphi(0, 0)$; кроме того, очевидно, что

$$z = \{\varphi(0, 0) + \varepsilon\}\,x + \{\varphi(0, 0) + \eta\}\,y,$$

где ε и η стремятся к нулю при x и y, стремящихся к 0. Это соотношение эквивалентно (1) при $x = y = 0$. Но мы не предполагали, что $\varphi(x, y)$ дифференцируема по x или по y, и f'_x и f'_y могут не существовать ни в одной точке, кроме начала координат.

Соотношение (1) иногда берется в качестве определения „дифференцируемости функции от двух переменных“; $f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x, y), если

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = (A + \varepsilon)\,h + (B + \eta)\,k,$$

где A и B зависят только от x и y, и ε и η стремятся к нулю при h и k стремящихся к нулю; *дифференцируемость в области* означает дифференцируемость в каждой точке этой области. В данном случае f'_x и f'_y существуют и равны A и B, но они могут не быть непрерывными. Условия, накладываемые на f'_x и f'_y в этом определении, являются промежуточными между более слабыми условиями одного лишь *существования* f'_x и f'_y и более сильными условиями *непрерывности* f'_x и f'_y. Это определение дифференцируемости имеет много преимуществ, но для наших целей условие непрерывности частных производных является достаточно общим. См. W. H. Young, *The fundamental theorems of the differential calculus* (Cambridge Math. Tracts, No. 11), а также де ла Валле-Пуссен, *Курс анализа бесконечно малых*, т. 1, гл. III, ГТТИ, 1933.

160. Дифференциалы. В приложениях математического анализа, особенно к геометрии, как правило, оказывается чрезвычайно удобным иметь дело с уравнениями, содержащими не приращения δx, δy, δz функций x, y, z, а так называемые *дифференциалы* dx, dy, dz; в качестве уравнения, содержащего приращения, можно указать на соотношение (1) п. 159.

Вернемся к функции $y=f(x)$ одного переменного x. Если f дифференцируема, то

$$\delta y=\{f'(x)+\varepsilon\}\,\delta x, \tag{1}$$

где ε стремится к нулю вместе с δx. Уравнение

$$\delta y=f'(x)\,\delta x \tag{2}$$

является поэтому „приближенно“ верным.

До сих пор мы не придавали никакого самостоятельного значения символу dy, взятому в отдельности. Условимся теперь *определять* dy уравнением

$$dy=f'(x)\,\delta x. \tag{3}$$

Если мы выберем в качестве y функцию $y=x$, то получим, что

$$dx=\delta x, \tag{4}$$

так что

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{5}$$

Если мы разделим обе части уравнения (5) на dx, то получим:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x), \tag{6}$$

где $\frac{dy}{dx}$ уже не означает, как до сих пор, дифференциальный коэффициент y, а является отношением дифференциалов dy, dx. Символ $\frac{dy}{dx}$ приобретает, таким образом, двойной смысл; но это не вызывает никаких неудобств, так как (6) остается в силе при любом из двух смыслов левой части.

Перейдем теперь к соответствующим определениям, связанным с функцией z от двух независимых переменных x и y. Мы определяем дифференциал dz уравнением

$$dz=f'_x\delta x+f'_y\delta y. \tag{7}$$

Полагая последовательно $z=x$ и $z=y$, мы найдем, что

$$dx=\delta x,\quad dy=\delta y, \tag{8}$$

так что

$$dz=f'_x dx+f'_y\,dy, \tag{9}$$

что является точным уравнением, соответствующим приближенному уравнению (1) п. 159.

Одно свойство уравнения (9) заслуживает особого упоминания. В п. 157 мы видели, что если $z=f(x, y)$, причем x и y являются функциями некоторого переменного t, т. е. не независимы друг от друга, то и z является функцией только от t и

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Умножая это уравнение на dt и принимая во внимание, что

$$dx=\frac{dx}{dt}dt, \quad dy=\frac{dy}{dt}dt, \quad dz=\frac{dz}{dt}dt,$$

мы получаем:

$$dz=f'_x dx+f'_y dy,$$

что по виду совпадает с уравнением (9). Таким образом, ***формула, выражающая dz через dx и dy, одна и та же как в том случае, когда x и y независимы друг от друга, так и в том случае, когда они являются функциями от некоторой третьей переменной.*** Это замечание играет большую роль в приложениях.

Следует также отметить, что если z есть функция от двух независимых переменных x и y и

$$dz=\lambda dx+\mu dy,$$

то $\lambda=f'_x$, $\mu=f'_y$. Это сразу следует из п. 159.

Очевидно, что теоремы и определения последних трех пунктов могут быть легко обобщены на функции любого числа переменных. Дифференциальные обозначения обладают многими практическими преимуществами, в особенности в приложениях к геометрии.

Примеры LXII. 1. Обозначим площадь эллипса с полуосями a и b через A. Доказать, что

$$\frac{dA}{A}=\frac{da}{a}+\frac{db}{b}.$$

2. Выразить Δ, площадь треугольника ABC, через (1) a, B, C, (2) A b, c и (3) a, b, c и вывести формулы

$$\frac{d\Delta}{\Delta}=2\frac{da}{a}+\frac{cdB}{a\sin B}+\frac{bdC}{a\sin C}, \quad \frac{d\Delta}{\Delta}=\operatorname{ctg}AdA+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c},$$

$$d\Delta=R(\cos Ada+\cos Bdb+\cos Cdc),$$

где R обозначает радиус описанного круга.

3. Стороны треугольника изменяются таким образом, что его площадь остается постоянной, так что a может рассматриваться как функция от b и c. Доказать, что

$$\frac{\partial a}{\partial b}=-\frac{\cos B}{\cos A}, \quad \frac{\partial a}{\partial c}=-\frac{\cos C}{\cos A}.$$

[Это следует из уравнений

$$da=\frac{\partial a}{\partial b}db+\frac{\partial a}{\partial c}dc, \quad \cos Ada+\cos Bdb+\cos Cdc=0.]$$

4. Если a, b, c изменяются так, что R остается постоянным, то

$$\frac{da}{\cos A}+\frac{db}{\cos B}+\frac{dc}{\cos C}=0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial a}{\partial b}=-\frac{\cos A}{\cos B},\quad \frac{\partial a}{\partial c}=-\frac{\cos A}{\cos C}.$$

[Применить формулы $a=2R\sin A, \ldots$ и учесть, что R и $A+B+C$ постоянны.]

5. Если z является функцией от u, v, которые, в свою очередь, являются функциями от x и y, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

[Мы имеем:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,\ du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\ dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Подставить выражения для du и dv в первое уравнение *) и сравнить результат с уравнением

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.]$$

6. Если $ur\cos\theta=1$, $\operatorname{tg}\theta=v$ и $F(r,\theta)=G(u,v)$, то

$$rF_r=-uG_u,\quad F_\theta=uvG_u+(1+v^2)G_v.$$

(*Экз.* 1932 г.)

7. Пусть z — функция от x и y, и пусть X, Y, Z определены уравнениями

$$x=a_1X+b_1Y+c_1Z,\quad y=a_2X+b_2Y+c_2Z,\quad z=a_3X+b_3Y+c_3Z.$$

Тогда Z может быть выражена как функция от X и Y. Найти выражения Z_X и Z_Y через z_x и z_y.

[Обозначим эти дифференциальные коэффициенты через P, Q и p, q. Тогда $dz-p\,dx-q\,dy=0$ или

$$(c_1p+c_2q-c_3)\,dZ+(a_1p+a_2q-a_3)\,dX+(b_1p+b_2q-b_3)\,Y=0.$$

Сравнивая это уравнение с $dZ-PdX-QdY=0$, мы находим, что

$$P=-\frac{a_1p+a_2q-a_3}{c_1p+c_2q-c_3},\quad Q=-\frac{b_1p+b_2q-b_3}{c_1p+c_2q-c_3}.]$$

8. Если

$$(a_1x+b_1y+c_1z)\,p+(a_2x+b_2y+c_2z)\,q=a_3x+b_3y+c_3z,$$

то

$$(a_1X+b_1Y+c_1Z)\,P+(a_2X+b_2Y+c_2Z)\,Q=a_3X+b_3Y+c_3Z.$$

(*Экз.* 1899 г.)

9. **Дифференцирование неявных функций.** Предположим, что $f(x, y)$ и ее производные f'_x и f'_y непрерывны в окрестности некоторой точки (a, b) и что

$$f(a,b)=0,\quad f'_y(a,b)\neq 0.$$

---

* Инвариантность формы дифференциала, доказанная в настоящем пункте для того случая, когда u и v являются функциями одного переменного t, имеет место и в том случае, когда u и v являются функциями от двух переменных x и y. (*Прим. перев.*)

Тогда мы можем найти такую окрестность точки (a, b), в которой $f'_y(x, y)$ сохраняет знак. Допустим, например, что $f'_y(x, y)$ положительна вблизи (a, b). Тогда для любого значения x, достаточно близкого к a, функция $f(x, y)$ является строго возрастающей (в смысле п. 95) функцией от y для всех y, достаточно близких к b. Из теоремы п. 109 в этих условиях следует, что существует единственная непрерывная функция y от x, которая принимает значение b при $x = a$ и удовлетворяет уравнению $f(x, y) = 0$ для всех значений x, достаточно близких к a.

Если

$$f(x, y) = 0, \quad x = a + h, \quad y = b + k,$$

то

$$0 = f(x, y) - f(a, b) = (f'_a + \varepsilon) h + (f'_b + \eta) k\ ^{*)},$$

где ε и η стремятся к нулю при h и k стремящихся к 0. Таким образом,

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_a + \varepsilon}{f'_b + \eta} \to -\frac{f'_a}{f'_b},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_a}{f'_b}.$$

10. Уравнение касательной к кривой $f(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

11. Пусть в результате исключения u из уравнений $y = f(x, u)$ и $z = \varphi(x, u)$ мы имеем $z = F(x, y)$. Доказать, что

$$F_x = \frac{f_u \varphi_x - f_x \varphi_u}{f_u}, \quad F_y = \frac{\varphi_u}{f_u}.$$

(*Экз.* 1933 г.)

12. **Максимумы и минимумы.** Очевидные изменения в определениях п. 123 приводят нас к определению максимального и минимального значений функции от двух переменных. Ясно, что если $f(x, y)$ в точке (a, b) имеет максимальное значение, то функция $f(x, b)$ имеет максимум при $x = a$, так что f'_x должно обращаться в нуль в точке (a, b). Подобным же образом мы убеждаемся в том, что и f'_y обращается в нуль в этой точке. Таким образом,

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0,$$

или (что то же самое)

$$df = 0$$

являются *необходимыми* условиями максимума и минимума. Вопрос о нахождении *достаточных* условий более сложен, и мы на нем здесь останавливаться не будем.

13. Если y определено, как функция от x, уравнением $g(x, y) = 0$ и $f(x, y)$ имеет в некоторой точке максимум, то (в силу того, что формула для дифференциала — одна и та же, как в случае независимых переменных, так и в случае, когда переменные связаны между собой некоторым соотно-

---

*) $f'_a = f'_x(a, b)$, $f'_b = f'_y(a, b)$. (*Прим. перев.*)

щением) $df=0$ в точке максимума, тогда как $dg=0$ для всех x и y. Другими словами, $f'_x dx+f'_y dy=0$, если $g'_x dx+g'_y dy=0$, а, следовательно,

$$\frac{f'_x}{g'_x}=\frac{f'_y}{g'_y}. \tag{1}$$

Если g'_x или g'_y равно нулю, то уравнение (1) должно быть понято так, что стоящее в числителе соответствующей дроби f'_x или f'_y равно нулю.

Аналогично мы находим, что если z определено уравнением $g(x, y, z)=0$ и $f(x, y, z)$ имеет максимум в некоторой точке, то

$$\frac{f'_x}{g'_x}=\frac{f'_y}{g'_y}=\frac{f'_z}{g'_z}$$

(с оговоркой, подобной той, которая сделана в предыдущем случае).

14. Если α, β, γ положительны, A, B, C являются углами в некотором треугольнике и $\sin^\alpha A \sin^\beta B \sin^\gamma C$ имеет максимальное значение, то

$$\operatorname{tg}^2 A=\frac{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}{\beta\gamma}, \quad \operatorname{tg}^2 B=\frac{\beta(\alpha+\beta+\gamma)}{\gamma\alpha}, \quad \operatorname{tg}^2 C=\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta}.$$

(*Экз.* 1935 г.)

161. Определенные интегралы и площади. В п. 148 гл. VI мы приняли, что если $f(x)$ — непрерывная функция от x и P_1P — дуга графика $y=f(x)$, то области, ограниченной P_1P, ординатами P_1N_1 и PN и отрезком N_1N оси x, можно сопоставить некоторое число, называемое ее площадью. Ясно, что если $ON=x$ и x меняется, то эта площадь будет функцией от x, которую мы обозначим через $F(x)$.

Сделав такое предположение, мы в п. 148 доказали, что $F'(x)=f(x)$, и показали, как этот результат может быть применен к вычислению площадей некоторых областей, ограниченных кривыми линиями. Но мы должны еще доказать основную предпосылку, что величина $F(x)$ — площадь данной фигуры — действительно существует.

Мы знаем, что́ понимают под площадью *прямоугольника*, и что она измеряется произведением длин его сторон. Свойства треугольников, параллелограмов и многоугольников, доказанные Эвклидом, дают нам возможность определить и площадь этих фигур. Но ничто известное нам до сих пор не даст непосредственного определения площади фигуры, ограниченной кривыми линиями. Покажем теперь, как можно определить $F(x)$ так, чтобы мы могли доказать существование этого числа.

Мы предполагаем $f(x)$ непрерывной в замкнутом интервале (a, b) и разбиваем этот интервал на некоторое число подинтервалов точками деления $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, где

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Обозначим через δ_ν интервал $(x_\nu, x_{\nu+1})$ и через m_ν — точную нижнюю грань (см. п. 103) $f(x)$ в δ_ν и положим

$$s = m_0\delta_0 + m_1\delta_1 + \ldots + m_{n-1}\delta_{n-1} = \sum m_\nu \delta_\nu.$$

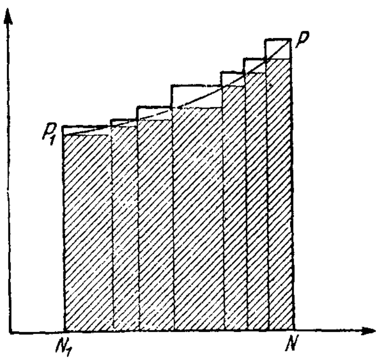
Ясно, что если M является точной верхней гранью $f(x)$ в (a, b), то $s \leqslant M(b-a)$. Совокупность значений s является поэтому ограниченной сверху (см. п. 103) и имеет точную верхнюю грань, которую мы обозначим через j. Ни одно значение s не превосходит j, но существуют значения s, превосходящие любое число, меньшее j.

Точно так же, если M_ν обозначает точную верхнюю грань $f(x)$ в δ_ν, то полагая

$$S = \sum M_\nu \delta_\nu,$$

мы найдем, что $S \geqslant m(b-a)$, где m является точной нижней гранью $f(x)$ в (a, b). Совокупность значений S ограничена, таким образом, снизу и имеет точную нижнюю грань, которую мы обозначим через J. Ни одно значение S не меньше J, но существуют значения S, меньшие любого числа, большего J.

Полезно уяснить себе геометрический смысл сумм s и S в том простом случае, когда $f(x)$ монотонно возрастает в (a, b). В этом случае $m_\nu = f(x_\nu)$ и $M_\nu = f(x_{\nu+1})$. Сумма s является суммой площадей прямоугольников, заштрихованных на фиг. 44, а S — площадью фигуры, обведенной жирной линией. В общем случае s и S также будут площадями фигур, состоящих из прямоугольников, причем s будет площадью такой фигуры, целиком содержащейся в криволинейной фигуре, площадь которой мы определяем, а S — площадью фигуры, содержащей эту последнюю.



Фиг. 44

Покажем теперь, что *ни одно значение s не может превосходить ни одного значения S*. Пусть s, S — суммы, соответствующие одному разбиению интервала, а s', S' — суммы, соответствующие другому разбиению. Нам надлежит показать, что $s \leqslant S'$ и $s' \leqslant S$.

Мы можем образовать третье разбиение интервала, взяв в качестве точек деления все точки, которые являются таковыми для s, S и для s', S'. Пусть $\mathbf{s}$, $\mathbf{S}$ обозначают суммы, соответствующие этому третьему разбиению. Тогда легко видеть, что

$$\mathbf{s} \geqslant s, \quad \mathbf{s} \geqslant s', \quad \mathbf{S} \leqslant S, \quad \mathbf{S} \leqslant S'. \tag{1}$$

Например, $\mathbf{s}$ отличается от s тем, что по крайней мере один интервал δ_ν, встречающийся в s, разделен на некоторое число меньших интервалов

$$\delta_{\nu,1}, \delta_{\nu,2}, \ldots, \delta_{\nu,p},$$

так что слагаемое $m_\nu\delta_\nu$ из s заменяется в $\mathbf{s}$ суммой

$$m_{\nu,1}\delta_{\nu,1}+m_{\nu,2}\delta_{\nu,2}+\ldots+m_{\nu,p}\delta_{\nu,p},$$

где $m_{\nu,1}$, $m_{\nu,2}$, ... обозначают точные нижние грани $f(x)$ в $\delta_{\nu,1}\delta_{\nu,2}$, ... Но очевидно, что $m_{\nu,1}\geqslant m_\nu$, $m_{\nu,2}\geqslant m_\nu$, ..., так что выписанная сумма не меньше $m_\nu\delta_\nu$. Следовательно, $\mathbf{s}\geqslant s$, и другие неравенства (1) могут быть установлены таким же образом. Но так как $\mathbf{s}\leqslant\mathbf{S}$, то мы имеем:

$$s\leqslant\mathbf{s}\leqslant\mathbf{S}\leqslant S',$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что $j\leqslant J$. Действительно, мы можем найти значение s, как угодно близкое к j, и значение S, как угодно близкое к J[1]), так что из $j>J$ следовало бы существование таких s и S, что $s>S$.

До сих пор мы не пользовались непрерывностью $f(x)$. Покажем теперь, что $j=J$ и что суммы s и S стремятся к пределу J, когда число точек деления x_ν неограниченно возрастает таким образом, что все интервалы δ_ν стремятся к нулю. Точнее: мы покажем, что *для любого заданного положительного числа* ε *можно найти такое* δ, *что*

$$0\leqslant J-s<\varepsilon,\quad 0\leqslant S-J<\varepsilon,$$

если $\delta_\nu<\delta$ *для всех значений* ν.

По теореме II п. 107, существует число δ такое, что

$$M_\nu-m_\nu<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

если только каждое δ_ν меньше δ. Следовательно,

$$S-s=\sum(M_\nu-m_\nu)\,\delta_\nu<\varepsilon.$$

Но

$$S-s=(S-J)+(J-j)+(j-s),$$

где все три слагаемых в правой части положительны (или равны нулю); следовательно, каждое из них меньше ε. А так как $J-j$ есть постоянная величина, то она должна быть равна нулю. Таким образом, $j=J$ и $0\leqslant j-s<\varepsilon$, $0\leqslant S-J<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Мы определяем *площадь* N_1NPP_1 как *общий предел* s *и* S, *т. е. принимаем за эту площадь число* J. Легко придать этому определению более общую форму. Рассмотрим сумму

$$\sigma=\sum f_\nu\delta_\nu,$$

где f_ν обозначает значение $f(x)$ в некоторой точке интервала δ_ν. Тогда очевидно, что f_ν лежит между m_ν и M_ν и, следовательно,

---

[1]) Эти значения s и S не будут, вообще говоря, соответствовать одному и тому же разбиению интервала.

σ стремится к пределу J, когда интервалы δ_ν стремятся к нулю. Поэтому мы можем определить площадь как предел сумм σ.

162. Определенный интеграл. Предположим, что $f(x)$ — непрерывная функция, так что область, ограниченная кривой $y=f(x)$, ординатами $x=a$ и $x=b$ и осью x, имеет определенную площадь. В п. 148 гл. VI, мы доказали, что если $F(x)$ является „интегралом" от $f(x)$, т. е. если

$$F'(x)=f(x),\quad F(x)=\int f(x)\,dx,$$

то площадь этой области равна $F(b)-F(a)$.

Так как не всегда возможно найти вид функции $F(x)$, удобно иметь формулу, представляющую площадь N_1NPP_1 и не содержащую в явном виде $F(x)$. Мы будем писать:

$$(N_1NPP_1)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Выражение в правой части этого равенства может рассматриваться с двух точек зрения. Можно рассматривать его как сокращенное обозначение для разности $F(b)-F(a)$, где $F(x)$ является некоторым интегралом от $f(x)$, независимо от того, известна ли явная формула для этой разности или нет, или же можно рассматривать этот символ как обозначающий площадь N_1NPP_1, определенную в п. 161.

Число

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *определенным интегралом*; a и b называются его *нижним и верхним пределами*; $f(x)$ называется *подинтегральной функцией* и, наконец, интервал (a, b) называется *интервалом* (или *областью*) *интегрирования*. Определенный интеграл зависит только от a и b и вида функции $f(x)$; он не является функцией от x. С другой стороны,

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

иногда называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$.

Различие между определенным и неопределенным интегралом не затрагивает существа этих понятий. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

является функцией от b и может рассматриваться как некоторый интеграл от функции $f(b)$. С другой стороны, неопределенный интеграл $F(x)$ всегда может быть выражен через определенный интеграл, так как

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Но когда мы рассматриваем „неопределенный интеграл", то обычно имеем в виду некоторое *соотношение между двумя функциями*, в силу которого одна из них является производной другой; рассматривая же „определенный интеграл", мы, как правило, не представляем себе его пределы изменяющимися.

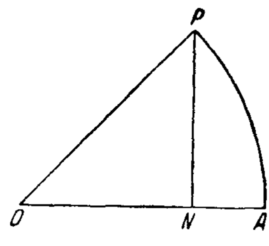
Следует отметить, что интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

имеет дифференциальный коэффициент $f(x)$ и поэтому заведомо является непрерывной функцией от x.

Так как функция $\frac{1}{x}$ непрерывна для всех положительных значений x, рассмотрения предыдущих пунктов содержат доказательство существования функции $\ln x$ (см. п. 131).

163. Площадь сектора круга. Круговые функции. Теория тригонометрических функций $\cos x$, $\sin x$ и т. д. в том виде, в каком она излагается в учебниках элементарной тригонометрии, основывается на одном недоказанном предположении. *Углом* называется конфигурация, состоящая из двух полупрямых OA, OP; не представляет труда перевести это „геометрическое" определение на язык анализа. Принимаемое предположение состоит в том, что *углы можно измерять*, т. е. что существует действительное число x, сопоставляемое этой конфигурации так же, как некоторое действительное число сопоставляется области в п. 148. Если это принять, то $\cos x$ и $\sin x$ могут быть определены обычным образом, и в дальнейшем развитии теории уже больше не встречается никаких принципиальных трудностей. Все затруднение содержится в вопросе: *что представляет собой x в $\cos x$ и $\sin x$?* Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны определить меру угла, и теперь мы в состоянии это сделать. Наиболее естественным было бы следующее определение: пусть AP будет дуга окружности с центром в O радиуса 1, так



Фиг. 45

что $OA = OP = 1$. Тогда x, мера угла, есть *длина дуги AP*. В основном это — тŏ определение, которое дается в учебниках, когда рассматривается „радианная мера". Для наших целей это определение имеет, однако, один существенный недостаток: дело в том, что мы не доказали существования длины дуги кривой, даже в том случае, когда эта кривая — окружность. Понятие длины дуги кривой может быть подвергнуто такому же точному математическому анализу, как и понятие площади; однако, соответствующие рассмотрения, хотя они и имеют тот же характер, что и рассмотрения предыдущих пунктов, значительно сложнее, так что провести их здесь не представляется возможным.

Мы должны поэтому основывать наше определение не на понятии длины, а на понятии *площади*. Мы определяем меру угла AOP как *удвоенную площадь сектора AOP единичного круга.*

Допустим, например, что OA лежит на оси x ($y = 0$) и что OP есть прямая $y = mx$, где $m > 0$. Площадь сектора является функцией от m, которую мы обозначим через $\varphi(m)$. Точка P имеет координаты $(\mu, m\mu)$, где

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \quad m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$$

и

$$\varphi(m) = \frac{1}{2} m\mu^2 + \int_{\mu}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \mu \sqrt{1-\mu^2} + \int_{\mu}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{1}{2} \sqrt{1-\mu^2} - \frac{\mu^2}{2\sqrt{1-\mu^2}} - \sqrt{1-\mu^2} = -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{dm} = \frac{d\varphi}{d\mu} \frac{d\mu}{dm} = \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2}} \frac{m}{(1+m^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1+m^2)}$$

и, таким образом,

$$\varphi(m) = \frac{1}{2} \int_0^m \frac{dt}{1+t^2}.$$

Аналитическим аналогом нашего определения является, следовательно, определение $\operatorname{arc\,tg} m$ уравнением

$$\operatorname{arc\,tg} m = \int_0^m \frac{dt}{1+t^2}.$$

Теория тригонометрических функций, исходящая из этого определения, изложена в гл. IX.

Примеры LXIII. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных. 1. Показать, что если $b > a \geqslant 0$ и $n > -1$, то

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

$$2.\ \int_a^b \cos mx\,dx = \frac{\sin mb - \sin ma}{m}; \quad \int_a^b \sin mx\,dx = \frac{\cos ma - \cos mb}{m}.$$

$$3.\ \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4}\pi.$$

[Здесь мы встречаемся с некоторым затруднением, связанным с тем, что $\operatorname{arc\,tg} x$ является многозначной функцией. Это затруднение можно устранить, если заметить, что в уравнении

$$\int_0^x \frac{dx}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} x$$

$\operatorname{arc\,tg} x$ должен обозначать угол, лежащий между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Действительно, интеграл обращается в нуль при $x=0$ и монотонно и непрерывно возрастает с возрастанием x. Таким образом, то же должно иметь место для $\operatorname{arc\,tg} x$, который, следовательно, стремится к $\frac{1}{2}\pi$ при $x \to \infty$. Таким же образом мы можем показать, что $\operatorname{arc\,tg} x \to -\frac{1}{2}\pi$ при $x \to -\infty$. Аналогично, в уравнении

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x,$$

где $-1 < x < 1$, $\arcsin x$ обозначает угол, лежащий между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Следовательно, если a и b по модулю меньше единицы, то

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a.]$$

4.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha + x^2} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha},$$

если $-\pi < \alpha < \pi$, за исключением того случая, когда $\alpha = 0$; в этом случае интеграл равен $\frac{1}{2}$, что является пределом $\frac{\alpha}{2\sin\alpha}$ при $\alpha \to 0$.

5.
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi; \quad \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2,$$

если $a > 0$.

6. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ равен 2, если $-1<\alpha<1$, и $\frac{2}{\alpha}$, если $|\alpha|>1$.

(*Экз.* 1933 г.)

7. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

если $a>|b|$.

[Вид неопределенного интеграла установлен в примерах LIII. 3 и 4. Если $|a|<|b|$, то подынтегральная функция обращается в бесконечность между 0 и π. Чему равен интеграл, когда a отрицательно и $-a>|b|$?]

8. $$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab},$$

если a и b положительны. Каково значеиие иитеграла, когда a и b имеют разные знаки или когда они оба отрицательны?

9. **Интегралы Фурье.** Доказать, что если m и n — положительные целые числа, то

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\, dx$$

всегда ранен нулю, и что

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int\limits_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx$$

также равны нулю, если $m \neq n$, а при $m=n$ каждый равен π.

10. Доказать, что интегралы $\int\limits_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$ и $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx$

равны нулю, если $m \neq n$, и каждый равен $\frac{1}{2}\pi$, если $m=n$; а также, что если $n-m$ нечетно, то

$$\int\limits_0^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = \frac{2n}{n^2-m^2},$$

если $n-m$ четно, то

$$\int\limits_0^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0.$$

11. Доказать, что $\int\limits_0^{\pi} \cos m\theta (\cos\theta)^n\, d\theta = 0,$

если m и n — положительные целые числа и $m>n$.

(*Экз.* 1928 г.)

12. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{4x^2+3}{8x^2+4x+5}\,dx, \quad \int_0^c \frac{x\,dx}{\sqrt{x+c}}, \quad \int_0^\pi \frac{dx}{5+3\cos x}, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x},$$

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\cos 2\alpha - \cos x} \left(0<\alpha<\frac{2}{3}\pi\right), \quad \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

(*Экз.* 1927, 1928, 1929, 1930, 1936 гг.)

164. Вычисление определенного интеграла как предела суммы. В небольшом числе случаев мы можем вычислить определенный интеграл непосредственно из его определения (см. пп. 161 и 162). Вообще говоря, вычисление производится гораздо проще с помощью неопределенного интеграла, но читателю полезно самостоятельно разобрать несколько примеров.

Примеры LXIV. 1. Вычислить

$$\int_a^b x\,dx$$

разбиением интервала (a, b) на n разных частей точками деления $a=x_0$ $x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ и вычислением предела

$$(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

при $n\to\infty$.

[Эта сумма равна

$$\frac{b-a}{n}\left[a+\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\left(a+2\,\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+\left\{a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right\}\right]=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\{1+2+\ldots+(n-1)\}\right]=(b-a)\left\{a+(b-a)\frac{n(n-1)}{2n^2}\right\},$$

что стремится к пределу $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ при $n\to\infty$. Проверить результат геометрическими рассмотрениями.]

2. Вычислить

$$\int_a^b x\,dx,$$

где $0<a<b$, разбиением интервала (a, b) на n частей точками деления $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n$, где $r^n=\frac{b}{a}$. Применить тот же метод к более общему интегралу

$$\int_a^b x^m\,dx.$$

3. Вычислить $\int\limits_a^b x^2\,dx$, $\int\limits_a^b \cos mx\,dx$ и $\int\limits_a^b \sin mx\,dx$ методом примера 1.

4. Доказать, что $n\sum\limits_{r=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+r^2}\to\frac{1}{4}\pi$ при $n\to\infty$.

[Это следует из того, что

$$\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2},$$

а эта сумма, по определению, стремится при $n\to\infty$ к пределу

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}.]$$

5. Доказать, что $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\sqrt{n^2-r^2}\to\frac{1}{4}\pi$.

[Этот предел ранен

$$\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.]$$

165. Общие свойства определенного интеграла. В определении определенного интеграла как предела суммы мы предполагали, что 1° f непрерывна и 2° $a<b$. Мы определяем его значение при $a>b$ равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx, \tag{1}$$

а при $a=b$ — равенством

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx=0. \tag{2}$$

Эти определения стаионятся теоремами, если мы определим интегралы с помощью функции $F(x)$; действительно,

$$F(b)-F(a)=-\{F(a)-F(b)\},\quad F(a)-F(a)=0.$$

Тогда мы имеем для любых a и b:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_b^c f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx; \tag{3}$$

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx; \tag{4}$$

$$\int_a^b \{f(x)+\varphi(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

Читателю рекомендуется провести формальные доказательства этих свойств, исходя (α) из определения интеграла с помощью функции $F(x)$ и (β) из определения как предела суммы.

Важную роль играют также следующие теоремы.

(6) *Если* $f(x) \geqslant 0$ *для* $a \leqslant x \leqslant b$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Мы должны только заметить, что сумма s из п. 156 не может быть отрицательной. Ниже будет, показано (разные примеры, 43, стр. 338), что значение интеграла не может быть нулем, если $f(x)$ не равна тождественно нулю; это может быть также выведено из первого следствия в п. 122.

(7) *Если* $H \leqslant f(x) \leqslant K$ *для* $a \leqslant x \leqslant b$, *то*

$$H(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant K(b-a).$$

Это сразу доказывается применением свойства (6) к функциям $f(x)-H$ и $K-f(x)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \tag{8}$$

где ξ *лежит между* a *и* b.

Это следует из свойства (7). Действительно, в качестве H мы можем взять наименьшее, а в качестве K — наибольшее значение $f(x)$ в (a, b). Тогда интеграл равен $\eta\,(b-a)$, где η лежит между H и K. Но так как $f(x)$ непрерывиа, то должно существовать такое ξ, что $f(\xi)=\eta$ (см. п. 101).

Если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то свойство (8) может быть записано в виде

$$F(b)-F(a) = (b-a)F'(\xi),$$

так что это свойство оказывается частным случаем теоремы о среднем из п. 126. Свойство (8) можно назвать *первой теоремой о среднем интегрального исчисления.*

(9) **Обобщенные теоремы о среднем для интегралов.** *Если* $\varphi(x)$ *положительна и* H *и* K *определены как в теореме* (7), *то*

$$H\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant K\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где ξ *лежит между* a и b.

Это сразу доказывается применением теоремы (6) к интегралам

$$\int_a^b \{f(x)-H\}\varphi(x)\,dx, \quad \int_a^b \{K-f(x)\}\,\varphi(x)\,dx.$$

(10) **Основная теорема интегрального исчисления.** *Функция*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

имеет производную, равную $f(x)$.

Это было уже доказано в п. 148, но представляется целесообразным сформулировать этот результат здесь в виде формальной теоремы. Из этой теоремы следует, как было уже отмечено в п. 162, что $F(x)$ является *непрерывной функцией от* x.

Примеры LXV. 1. Показать, исходя из определения определенного интеграла как предела суммы и свойств (1)—(5), что

1) $$\int_{-a}^{a} \varphi(x^2)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x^2)\,dx, \quad \int_{-a}^{a} x\varphi(x^2)\,dx = 0;$$

2) $$\int_0^{\pi/2} \varphi(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \varphi(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(\sin x)\,dx;$$

3) $$\int_0^{m\pi} \varphi(\cos^2 x)\,dx = m\int_0^{\pi} \varphi(\cos^2 x)\,dx,$$

где m — целое число. [Справедливость этих соотношений станет геометрически очевидной, если представить себе вид графиков подинтегральных функций.]

2. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\,d\theta = \pi,$$

где n — положительное целое число или нуль. Чему равен этот интеграл при отрицательных целочисленных n?

3. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

равен π или 0, в зависимости от того, является ли n числом нечетным или четиым. (*Экз.* 1933 г.)

4. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = n\pi$$

для всех положительиых целочисленных значений n.

(*Экз.* 1933 г.)

[В примере 2 применить тождестно

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx,$$

а в примере 3 — тождество

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x + \ldots,$$

где последнее слагаемое равно 1 или $2\cos x$. Для доказательства утверждения в примере 4 возвести последнее тождество в квадрат и применить результат примера LXIII. 10.]

5. Если

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

и k — положительное целое число, не превосходящее n, то

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = \pi a_0, \quad \int_0^{2\pi} \cos kx\,\varphi(x)\,dx = \pi a_k, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx\,\varphi(x)\,dx = \pi b_k;$$

если $k > n$, то значение каждого из последних двух интегралов равно нулю.

[Применить результат примера LXIII. 9.]

6. Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$ для $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx.$$

7. Доказать, что

$$0<\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n+1}x\,dx<\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\ 0<\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{n+1}x\,dx<\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx.$$

8 [1]). Если $n>1$, то

$$0{,}5<\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}<0{,}524.$$

[Первое неравенство следует из того, что $\sqrt{1-x^{2n}}<1$, а второе — из того, что $\sqrt{1-x^{2n}}\geqslant\sqrt{1-x^2}$.]

9. Доказать, что

$$\frac{1}{2}<\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}}<\frac{1}{6}\pi.$$

10. Доказать, что

$$0{,}573<\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{4-3x+x^3}}<0{,}595.$$

[Положить $x=1+u$, затем заменить $2+3u^2+u^3$ на $2+4u^2$ и на $2+3u^2$.]

11. Если α и φ — положительные острые углы, то

$$\varphi<\int\limits_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2 x}}<\frac{\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}};$$

если $\alpha=\varphi=\frac{1}{6}\pi$, то значение интеграла лежит между 0,523 и 0,541.

12. Доказать, что

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_a^b|f(x)|\,dx.$$

[Если σ обозначает сумму, рассмотренную в конце п. 161, а σ' — соответствующую сумму, образованную для функции $|f(x)|$, то $|\sigma|\leqslant\sigma'$.]

13. Если $|f(x)|\leqslant M$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right|\leqslant M\int\limits_a^b|\varphi(x)|\,dx.$$

166. Интегрирование по частям и подстановкой. Из п. 141 следует, что если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны, то

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-\int\limits_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

---

[1]) Примеры 8—11 заимствованы из книги Gibson, *Elementary treatise on the calculus*.

Эта формула известна как формула *интегрирования определенного интеграла по частям.*

Далее, мы знаем (см. п. 136), что если $F(t)$ — интеграл от $f(t)$, то

$$\int f\{\varphi(x)\}\varphi'(x)\,dx = F\{\varphi(x)\}.$$

Следовательно, если $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, то

$$\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) = F\{\varphi(b)\} - F\{\varphi(a)\} = \int_a^b f\{\varphi(x)\}\varphi'(x)\,dx,$$

что является формулой *преобразования определенного интеграла подстановкой.*

Эти формулы часто позволяют нам найти значение определенного интеграла без знания функции $F(x)$. Определенный интеграл является разностью двух частных значений $F(x)$, которая иногда может быть найдена каким-либо специальным приемом даже в тех случаях, когда сама функция $F(x)$ неизвестна.

Примеры LXVI. 1. Доказать, что

$$\int_a^b xf''(x)\,dx = \{bf'(b) - f(b)\} - \{af'(a) - f(a)\}.$$

2. Доказать, что вообще

$$\int_a^b x^m f^{(m+1)}(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где

$$F(x) = x^m f^{(m)}(x) - mx^{m-1}f^{(m-1)}(x) + m(m-1)x^{m-2}f^{(m-2)}(x) - \ldots + \\ + (-1)^m m!\,f(x).$$

3. Доказать, что

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \frac{1}{2}\pi - 1, \quad \int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}.$$

4. Доказать, что если a и b положительны, то

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x\cos x\sin x\,dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}.$$

[Проинтегрировать по частям и применить результат примера LXIII. 8.]

5. Вычислить с помощью подходящих подстановок

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}, \quad \int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}, \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}},$$

$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 x\,dx, \quad \int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{5+7\cos+\sin x},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x \cos^3 x\,dx.$$

(*Экз.* 1924, 1925, 1926, 1931 гг.)

6. Если

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dx,\ f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt, \ldots,\ f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\,dt,$$

то

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1}\,dt.$$

(*Экз.* 1933 г.)

[Повторно интегрировать по частям.]

7. Доказать интегрированием по частям, что если

$$u_{m,\,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx,$$

где m и n — положительные целые числа, то $(m+n+1)\,u_{m,\,n} = n u_{m,\,n-1}$, и вывести, что

$$u_{m,\,n} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

8. Доказать, что если

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\,dx,$$

то $u_n + u_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$. Вывести отсюда значение интеграла для всех положительных значений n.

[Положить $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)$ и интегрировать по частям.]

9. Доказать, что если

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx,$$

то $u_n = \dfrac{n-1}{n} u_{n-2}$. [Записать $\sin^n x$ в виде $\sin^{n-1} x \sin x$ и интегрировать по частям.]

10. Вывести из результата примера 9, что u_n равно

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots n} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\pi\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots n},$$

в зависимости от того, является ли n числом нечетным или четным.

(*Экз.* 1935 г.)

11. **Вторая теорема о среднем.** Если $f(x)$ является функцией от x с непрерывной производной, не меняющей знака в интервале от $x=a$ до $x=b$, то между a и b найдется такое число ξ, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

[Пусть

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt = \Phi(x).$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\Phi'(x)\,dx =$$

$$= f(b)\Phi(b) - \int_a^b f'(x)\Phi(x)\,dx = f(b)\Phi(b) - \Phi(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx,$$

по теореме (9) п. 165; следовательно,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\Phi(b) + \{f(a)-f(b)\}\,\Phi(\xi),$$

что равносильно утверждению теоремы.]

12. **Форма Боннэ второй теоремы о среднем.** Если $f'(x)$ непрерывна и не меняет знака, а $f(b)$ и $f(a)-f(b)$ имеют одинаковый знак, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^X \varphi(x)\,dx,$$

где X лежит между a и b. Действительно,

$$f(b)\Phi(b) + \{f(a)-f(b)\}\,\Phi(\xi) = \mu f(a),$$

где μ лежит между $\Phi(\xi)$ и $\Phi(b)$, и, следовательно, является значением $\Phi(x)$ для некоторого значения $x=X$. Важным случаем является тот, при котором $0 \leqslant f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$.

Доказать также, что если $f(a)$ и $f(b)-f(a)$ имеют одинаковый знак, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\int_X^b \varphi(x)\,dx,$$

где X лежит между a и b.

13. Доказать, что

$$\left|\int_X^{X'} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \frac{2}{X},$$

если $X' > X > 0$.

[Применить первую формулу из примера 12 и учесть, что интеграл от $\sin x$ по любому интервалу по модулю не превосходит 2.]

14. Вывести результаты примера LXV. 1 с помощью подстановки. [Например, в (3) разделим интервал интегрирования на m равных частей и сделаем подстановки $x=\pi+y$, $x=2\pi+y, \ldots$.]

15. Доказать, что

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F(a+b-x)\,dx.$$

16. Доказать, что

$$\int_0^{/2} \cos^m x \sin^m x\,dx = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx.$$

17. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} x\varphi(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} \varphi(\sin x)\,dx.$$

[Положить $x=\pi-y$.]

18. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\pi^2, \quad \int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,dx = \frac{3}{512}\pi^2.$$

(*Экз.* 1927 г.)

19. Показать с помощью подстановки $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$, что

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \frac{1}{8}\pi(b-a)^2.$$

20. Показать с помощью подстановки

$$(a+b\cos x)(a-b\cos y) = a^2-b^2,$$

что

$$\int_0^{\pi} (a+b\cos x)^{-n}\,dx = (a^2-b^2)^{-(n-1/2)} \int_0^{\pi} (a-b\cos y)^{n-1}\,dy,$$

если n — положительное целое число и $a > |b|$, и вычислить этот интеграл для $n=1, 2, 3$.

21. Если m и n — положительные целые числа, то

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx = (b-a)^{m+n+1}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

[Положить $x=(b-a)y+a$ и применить результат примера 7.]

167. Доказательство теоремы Тейлора интегрированием по частям. Можно применить метод интегрирования по частям для доказательства теоремы Тейлора.

Пусть $f(x)$ — функция, первые n производных которой непрерывны, и пусть

$$F_n(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Тогда

$$F_n'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$$

и, следовательно,

$$F_n(a) = F_n(b) - \int_a^b F_n'(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Если мы теперь будем писать $a+h$ вместо b, и преобразуем интеграл подстановкой $x = a + th$, то найдем

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n, \tag{1}$$

где

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+th)\,dt. \tag{2}$$

Если теперь p — любое положительное целое число, не превосходящее n, то, по теореме (9) п. 165, мы имеем:

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+th)\,dt = \int_0^1 (1-t)^{n-p} (1-t)^{p-1} f^{(n)}(a+th)\,dt =$$

$$= (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h) \int_0^1 (1-t)^{p-1}\,dt,$$

где $0 < \theta < 1$. Следовательно,

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h)\, h^n}{p\,(n-1)!}. \tag{3}$$

Если мы положим $p = n$, то получим формулу Лагранжа остаточного члена R_n (см. п. 152). Если же мы возьмем $p = 1$, то получим так называемую *форму Коши*, а именно,

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a+\theta h)\, h^n}{(n-1)!}. \tag{4}$$

Это доказательство теоремы Тейлора обладает тем преимуществом, что оно приводит к точной формуле (2) для R_n, которая не содержит неопределенного числа θ. Если его рассматривать просто как доказательство формулы Лагранжа для R_n, то оно дает менее общий результат, чем доказательство, приведенное в п. 150, так как мы предположили непрерывность $f^{(n)}(x)$. Рассуждение п. 150 может быть видоизменено так, чтобы оно приводило к формулам (3) и (4).

168. Применение остаточного члена в форме Коши к биномиальному ряду. Если $f(x)=(1+x)^m$, где m не является положительным целым числом, то остаточный член в форме Коши имеет вид

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\,\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^{n-m}}.$$

Но $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}$ меньше 1, если $-1<x<1$ (независимо от того, положительно x или отрицательно); $(1+\theta x)^{m-1}<(1+|x|)^{m-1}$, если $m>1$, и $(1+\theta x)^{m-1}<(1-|x|)^{m-1}$, если $m<1$. Следовательно,

$$|R_n|<|m|(1\pm|x|)^{m-1}\left|\binom{m-1}{n-1}\right||x|^n=\rho_n.$$

Но $\rho_n\to 0$ при $n\to\infty$, согласно результата примера XXVII. 13, и $R_n\to 0$. Справедливость биномиальной теоремы, таким образом, установлена для всех рациональных значений m и всех значений x между -1 и 1. Напомним, что применение формы Лагранжа наталкивалось на затруднения в связи с отрицательными значениями x (см. (2) п. 152).

169. Приближенные формулы для определенных интегралов. Правило Симпсона. Существует ряд приближенных формул для определенных интегралов, которые играют важную роль в вычислениях. Простейшей из них является следующая:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}. \qquad (1)$$

Здесь мы заменяем площадь P_1N_1NP (см. п. 148) площадью трапеции P_1N_1NP, и формула точна, когда $f(x)$ — линейная функция. Можно показать (см. пример LXVII. 2, стр. 328), что если $f(x)$ имеет производные $f'(x)$ и $f''(x)$, то ошибка в (1) равна

$$-\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi),$$

где ξ — некоторое значение x между a и b. При практических вычислениях мы должны, конечно, разбить интервал интегрирования на небольшие участки и применить эту формулу к каждому из них в отдельности.

Значительно лучшей формулой является

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\frac{1}{6}(b-a)\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \qquad (2)$$

Эта формула известна под названием *правила Симпсона.* Мы докажем, что если $f(x)$ имеет четыре производных $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ и $f^{IV}(x)$, то ошибка в (2) равна

$$-\frac{1}{2880}(b-a)^5f^{IV}(\xi)$$

для некоторого ξ между a и b. В частности, это показывает, что правило Симпсона дает точный результат для многочленов третьей и низших степеней.

Будем писать $c-h$, $c+h$ вместо a, b и рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\psi(t)-\left(\frac{t}{h}\right)^5\psi(h),$$

где

$$\psi(t)=\int\limits_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx-\frac{1}{3}t\left\{f(c+t)+4f(c)+f(c-t)\right\}.$$

Дифференцируя три раза, найдем, что

$$\varphi'(t)=\frac{2}{3}\left\{f(c+t)-2f(c)+f(c-t)\right\}-$$
$$-\frac{1}{3}t\left\{f'(c+t)-f'(c-t)\right\}-\frac{5t^4}{h^5}\psi(h),$$
$$\varphi''(t)=\frac{1}{3}\left\{f'(c+t)-f'(c-t)\right\}-$$
$$-\frac{1}{3}t\left\{f''(c+t)+f''(c-t)\right\}-\frac{20t^3}{h^5}\psi(h),$$
$$\varphi'''(t)=-\frac{1}{3}t\left\{f'''(c+t)-f'''(c-t)\right\}-\frac{60t^2}{h^5}\psi(h).$$

Следовательно, по теореме о среднем,

$$\varphi'''(t)=-\frac{2}{3}t^2\left\{f^{\mathrm{IV}}(\xi)+\frac{90}{h^5}\psi(h)\right\}, \tag{3}$$

где ξ лежит в интервале $(c-t,\ c+t)$.

Но так как $\varphi(0)=\varphi(h)=0$, то, по теореме Ролля, $\varphi'(t_1)=0$ для некоторого t_1, лежащего между 0 и h. Так как и $\varphi'(0)=0$, то $\varphi''(t_2)=0$ для некоторого t_2, лежащего между 0 и t_1, а следовательно, и подавно между 0 и h. Наконец, $\varphi''(0)=0$ и поэтому $\varphi'''(t_3)=0$ для некоторого t_3 между 0 и h. Из (3) теперь следует, что

$$f^{\mathrm{IV}}(\xi)=-\frac{90}{h^5}\psi(h)$$

для некоторого ξ между $c-t_3$ и $c+t_3$, т. е. во всяком случае между $c-h$ и $c+h$. Это равенство может быть записано в виде

$$\int\limits_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx-\frac{1}{3}h\left\{f(c+h)+4f(c)+f(c-h)\right\}=-\frac{h^5}{90}f^{\mathrm{IV}}(\xi)$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(c)\right\}-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{\mathrm{IV}}(\xi).$$

При практических вычислениях мы опять разбиваем интервал интегрирования на части и применяем правило Симпсона к каждой части.

Примеры LXVII. 1. Доказать, что если $f(x)$ дважды дифференцируема, то

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=h^2f''(\xi),$$

где ξ лежит $x-h$ и $x+h$.

(*Экз.* 1925 г.)

[Рассмотреть вспомогательиую функцию

$$\varphi(t)=f(x+t)-2f(x)+f(x-t)-\left(\frac{t}{h}\right)^2\{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\}.]$$

2. Доказать, что ошибка в формуле (1) настоящего пункта равна $-\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi)$, где $a<\xi<b$.

[Рассмотреть вспомогательные функции

$$\psi(t)=\int\limits_{c-t}^{c+t}f(x)\,dx-t\{f(c+t)+f(c-t)\},\quad \varphi(t)=\psi(t)-\left(\frac{t}{h}\right)^3\psi(h).]$$

3. Доказать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi),$$

где $a<\xi<b$.

4. Применить правило Симпсона к вычислению π по формуле

$$\frac{1}{4}\pi=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}.$$

[Результат равен 0,7833.... Если мы разложим интеграл на два — от 0 до $\frac{1}{2}$ и от $\frac{1}{2}$ до 1 и применим правило к каждому из них, то получим результат 0,7853916... . Точное значение равно 0,7853921 ... .]

5. Показать, что

$$8,9<\int\limits_3^5\sqrt{4+x^2}\,dx<9.$$

(*Экз.* 1903 г.)

6. Применить правило Симпсона с пятью ординатами к вычислению

$$\int\limits_1^2\sqrt{x-\frac{1}{x}}\,dx$$

с точностью до двух знаков. (*Экз.* 1934 г.)

7. Показать, что приближенное зиачение

$$\int\limits_0^4 x^3\sqrt{4x-x^2}\,dx$$

равио 0,88. (*Экз.* 1933 г.)

170. Интегралы от комплексных функций действительного переменного. До сих пор мы всегда предполагали, что подинтегральная функция в определенном интеграле действительна. Определим интеграл от комплексно-значной функции $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ действительного переменного x в пределах от a до b уравнениями

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \{\varphi(x)+i\psi(x)\}\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx+i\int_a^b \psi(x)\,dx;$$

очевидно, что свойства таких интегралов могут быть выведены из уже рассмотренных свойств действительных интегралов.

Одним из этих свойств мы в дальнейшем воспользуемся. Оно выражается неравенством [1])

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

Это неравенство может быть легко выведено из определений, данных в пп. 161 и 162. Если δ_ν обозначает то же, что и в п. 161, а φ_ν и ψ_ν — значения φ и ψ в некоторой точке δ_ν, и $f_\nu=\varphi_\nu+i\psi_\nu$, то

$$\int_a^b f\,dx=\int_a^b \varphi\,dx+i\int_a^b \psi\,dx=\lim\sum\varphi_\nu\delta_\nu+i\lim\sum\psi_\nu\delta_\nu=$$

$$=\lim\sum(\varphi_\nu+i\psi_\nu)\,\delta_\nu=\lim\sum f_\nu\delta_\nu$$

и, следовательно,

$$\left|\int_a^b f\,dx\right|=\left|\lim\sum f_\nu\delta_\nu\right|=\lim\left|\sum f_\nu\delta_\nu\right|,$$

тогда как

$$\int_a^b |f|\,dx=\lim\sum|f_\nu|\,\delta_\nu.$$

Утверждение теперь следует из неравенства

$$\left|\sum f_\nu\delta_\nu\right|\leqslant\sum|f_\nu|\,\delta_\nu.$$

Очевидно, что формулы (1) и (2) п. 167 остаются в силе, когда f является комплексно-значной функцией $\varphi+i\psi$.

---

[1]) Соответствующее неравенство для действительных интегралов было доказано в примере LXV. 12.

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ VII

1. Проверить выписанные члены следующих рядов Тейлора:

$$(1)\ \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots,$$

$$(2)\ \sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \ldots,$$

$$(3)\ x \operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \ldots,$$

$$(4)\ x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \ldots.$$

2. Показать, что если $f(x)$ и ее первые $n+2$ производных непрерывны, $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, и θ_n является значением θ в остаточном члене ряда Тейлора в форме Лагранжа для n членов, то

$$\theta_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2(n+1)^2(n+2)}\,\frac{f^{(n+2)}(0)}{f^{(n+1)}(0)}\,x + o(x).$$

[Следовать примеру, примененному в примере IV. 12.]

3. Вывести формулы

$$(1)\ \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\beta) \\ g(a) & g'(\beta) \end{vmatrix},$$

где β лежит между a и b, и

$$(2)\ \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\beta) & f''(\gamma) \\ g(a) & g'(\beta) & g''(\gamma) \\ h(a) & h'(\beta) & h''(\gamma) \end{vmatrix},$$

где β и γ лежат между наименьшим и наибольшим из чисел a, b, c.

[Для доказательства (2) рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix} - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix},$$

которая обращается в нуль при $x=a$, $x=b$ и $x=c$. Ее первая производная должна обратиться в нуль при двух различных значениях x, лежащих между наименьшим и наибольшим из чисел a, b и c (по теореме В п. 122); отсюда следует, что ее вторая производная обращается в нуль при некотором значении $x=\gamma$, удовлетворяющем тому же условию. Таким образом, мы получаем формулу

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f''(\gamma) \\ g(a) & g(b) & g''(\gamma) \\ h(a) & h(b) & h''(\gamma) \end{vmatrix}.$$

Доказательство теперь может быть легко доведено до конца.

4. Если $F(x)$ имеет непрерывные производные первых n порядков, из которых первые $n-1$ обращаются в нуль при $x=0$, а $A \leqslant F^{(n)}(x) \leqslant B$ для $0 \leqslant x \leqslant h$, то

$$A\frac{x^n}{n!} \leqslant F(x) \leqslant B\frac{x^n}{n!}$$

для $0 \leqslant x \leqslant h$. Применить этот результат к функции

$$f(x)-f(0)-xf'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$$

и вывести отсюда формулу Тейлора.

5. Если $\Delta_h\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(x+h)$, $\Delta_h^2\varphi(x)=\Delta_h\{\Delta_h\varphi(x)\}$ и т. д. и $\varphi(x)$ имеет производные первых n порядков, то

$$\Delta_h^n\varphi(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\varphi(x+rh)=(-h)^n\varphi^{(n)}(\xi),$$

где ξ лежит между x и $x+nh$. [Рассмотреть вспомогательную функцию

$$\psi(t)=\Delta_t^n\varphi(x)-\left(\frac{t}{h}\right)^n\Delta_h^n\varphi(x).$$

Пример LXVII. 1 по существу является частным случаем $n=2$.]

6. Вывести из примера 5, что

$$x^{n-m}\Delta_h^n x^m \to m(m-1)\ldots(m-n+1)h^n$$

при $x\to\infty$, где m — любое рациональное, а n — любое целое положительное число. В частности доказать, что

$$x\sqrt{x}\{\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\}\to-\frac{1}{4}.$$

7. Допустим, что $y=\varphi(x)$ имеет непрерывные производные первых четырех порядков и что $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, так что

$$y=\varphi(x)=x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4).$$

Доказать, что

$$x=\psi(y)=y-a_2y^2+(2a_2^2-a_3)y^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)y^4+o(y^4)$$

и что

$$\frac{\varphi(x)\psi(x)-x^2}{x^4}\to a_2^2$$

при $x\to 0$.

8. Координаты (ξ, η) центра кривизны кривой $x=f(t)$, $y=F(t)$ в точке (x, y) определяются из соотношений

$$-\frac{\xi-x}{y'}=\frac{\eta-y}{x'}=\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

а радиус кривизны равен

$$\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-x''y'},$$

где штрихи обозначают дифференцирования по t.

9. Координаты (ξ, η) центра кривизны кривой $27ay^2=4x^3$ в точке (x, y) определяются из уравнений

$$3a(\xi+x)+2x^2=0, \quad \eta=4y+\frac{9ay}{x}.$$

(*Экз.* 1899 г.)

10. Доказать, что круг кривизны в точке (x, y) будет иметь касание третьего порядка с кривой, если $(1+y_1^2)y_3 = 3y_1y_2^2$ в этой точке. Доказать также, что окружность является единственной кривой, которая обладает этим свойством в каждой своей точке, и что единственными точками конического сечения, в которых это имеет место, являются его вершины.

[См. гл. VI, Разные примеры, 13 (4).]

11. Коническим сечением, имеющим в начале координат касание наивысшего порядка с кривой

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots + kx^n,$$

является

$$a^3y = a^4x^2 + a^2bxy + (ac - b^2)y^2.$$

Вывести, что коническим сечением, имеющим в точке (ξ, η) касание наивысшего порядка с кривой $y = f(x)$, является

$$18\eta_2^3 T = 9\eta_2^4 (x-\xi)^2 + 6\eta_2^2\eta_3 (x-\xi) T + (3\eta_2\eta_4 - 4\eta_3^2) T^2,$$

где $T = (y-\eta) - \eta_1 (x-\xi)$.

(*Экз.* 1907 г.)

12. **Однородные функции** [1]. Если

$$u = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right),$$

то u не изменяется, не считая множителя λ^n, когда $x, y, z, \ldots$ все возрастают в отношении $\lambda : 1$. В этих условиях u называется *однородной функцией степени n относительно переменных $x, y, z, \ldots$*. Доказать, что для такой функции

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots = nu.$$

Этот результат называется *теоремой Эйлера* об однородных функциях.

13. Если u — однородная функция степени n, то $u_x, u_y, \ldots$ однородны степени $n-1$.

14. Пусть $f(x, y) = 0$ представляет собой некоторое соотношение между x и y (например, $x^n + y^n - x = 0$) и пусть $F(x, y, z) = 0$ будет это же соотношение, приведенное к однородному виду заменой единицы третьей переменной z (например, $x^n + y^n - xz^{n-1} = 0$). Показать, что уравнение касательной к кривой $f(x, y) = 0$ в точке (ξ, η) имеет вид

$$xF_\xi + yF_\eta + F_\zeta = 0,$$

где F_ξ, F_η, F_ζ означают F_x, F_y, F_z, в которые подставлены значения $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta = 1$.

15. **Зависимые и независимые функции. Якобианы или функциональные определители.** Допустим, что u и v являются функциями от x и y, связанными тождественным соотношением

$$\varphi(u, v) = 0. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x и y, мы получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

---

[1] В этом и следующих примерах мы предполагаем непрерывность всех встречающихся производных.

исключая отсюда производные от φ, найдем, что

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = 0, \tag{3}$$

где u_x, u_y, v_x, v_y обозначают производные от u и v по x и y. Равенство (3) является, таким образом, *необходимым* условием существования соотношения типа (1). Можно доказать, что это условие также *достаточно* (см., например, Э. Гурса, *Курс математического анализа*, т. I, гл. III).

Если u и v связаны соотношением (1), то они называются *зависимыми*; в противном случае говорят, что они *независимы*. Выражение J называется *якобианом* или *функциональным определителем* от u и v по x и y и обозначается так:

$$J = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}.$$

Аналогичные результаты имеют место для функций любого числа переменных. Так, три функции u, v, w от трех переменных x, y, z связаны соотношением $\varphi(u, v, w) = 0$ в том и только том случае, когда

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)}$$

равен нулю для всех значений x, y, z.

16. Показать, что выражение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

может быть представлено в виде произведения двух линейных функций от x, y, z тогда и только тогда, когда

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

[Записать условие того, что

$$px + qy + rz \quad \text{и} \quad p'x + q'y + r'z$$

связаны с данной функцией функциональным соотношением.]

17. Если u и v являются функциями от ξ и η, которые, в свою очередь, являются функциями от x и y, то

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (\xi, \eta)} \frac{\partial (\xi, \eta)}{\partial (x, y)}.$$

Обобщить этот результат на любое число переменных.

18. Обозначим через $f(x)$ функцию, производная которой равна $\frac{1}{x}$ и которая обращается в нуль при $x = 1$. Показать, что если $u = f(x) + f(y)$, $v = xy$, то

$$u_x v_y - u_y v_x = 0,$$

т. е. что u и v связаны функциональным соотношением. Полагая $y = 1$, показать, что это соотношение должно иметь вид

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

Подобным же образом доказать, что если производная от $f(x)$ есть $\frac{1}{1 + x^2}$ и $f(0) = 0$, то $f(x)$ должно удовлетворять уравнению

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

19. Доказать, что если

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

то

$$f(x)+f(y)=f\left\{\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right\}.$$

20. Показать, что если существует функциональное соотношение между

$$u=f(x)+f(y)+f(z),\quad v=f(y)f(z)+f(z)f(x)+f(x)f(y),$$
$$w=f(x)f(y)f(z),$$

то $f(x)$ должна быть постоянной.

[Условием существования функционального соотношения является равенство

$$f'(x)f'(y)f'(z)\{f(y)-f(z)\}\{f(z)-f(x)\}\{f(x)-f(y)\}=0.]$$

21. Если $f(y, z)$, $f(z, x)$ и $f(x, y)$ связаны функциональным соотношением, то $f(x, x)$ не зависит от x.

(*Экз.* 1909 г.)

22. Если $u=0$, $v=0$, $w=0$ — уравнения трех окружностей, записанные в однородной форме (как в примере 14), то уравнение

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}=0$$

представляет окружность, ортогональную к данным трем.

(*Экз.* 1900 г.)

23. Вычислить $\dfrac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(x, y)}$, если

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}=1.$$

(*Экз.* 1936 г.)

24. Если A, B, C — функции от x такие, что

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}$$

есть тождественный нуль, то существуют такие постоянные λ, μ, ν, что

$$\lambda A+\mu B+\nu C$$

тождественно равно нулю, и наоборот. [Обратное предложение почти очевидно. Для доказательства прямого утверждения положим $\alpha=BC'-B'C, \ldots$. Тогда $\alpha'=BC''-B''C, \ldots$, и из равенства нулю определителя следует, что $\beta\gamma'-\beta'\gamma=0, \ldots$; таким образом, отношения $\alpha:\beta:\gamma$ постоянны. Но $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$.]

25. Допустим, что переменные x, y, z связаны некоторым соотношением, в силу которого 1° z является функцией от x и y с производными z_x и z_y и 2° x является функцией от y и z с производными x_y и x_z. Доказать, что

$$x_y=-\frac{z_y}{z_x},\quad x_z=\frac{1}{z_x}.$$

[Мы имеем

$$dz=z_x\,dx+z_y\,dy,\quad dx=x_y\,dy+x_z\,dz.$$

Подставляя dx в первое из этих уравнений, получим:

$$dz = (z_x x_y + z_y)\, dy + z_x x_z\, dz,$$

что может иметь место только в том случае, когда

$$z_x x_y + z_y = 0, \quad z_x x_z = 1.]$$

26. Четыре переменных x, y, z, u связаны двумя соотношениями, в силу которых любые два из них могут быть выражены как функции остальных двух. Показать, что

$$x_y^z y_z^u + x_u^z u_z^y = 0, \quad y_z^u z_x^u x_y^u = -y_z^x z_x^y x_y^z = 1, \quad x_z^u z_x^y + y_z^u z_y^x = 1,$$

где y_z^u обозначает производную от y по z, когда y выражено как функция от z и u.

(*Экз.* 1897, 1928 гг.)

27. Переменные x, y, z связаны соотношением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

и $\varphi(x, y, z) = x^3y^2z$. Определить значение φ_x в точке (1, 1, 1), если независимыми переменными являются 1° x и y, 2° x и z; дать геометрическое толкование того факта, что в этих двух случаях получаются различные значения φ_x.

(*Экз.* 1936 г.)

28. Если $x^2 = vw$, $y^2 = wu$, $z^2 = uv$ и $f(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, то

$$xf_x + yf_y + zf_z = u\varphi_u + v\varphi_v + w\varphi_w.$$

(*Экз.* 1933 г.)

29. Найти $\varphi_y(0, 0)$, если

$$\varphi(x, y) = \frac{(x+y)^2 (x-y)}{x^2 + y^2},$$

когда x и y не равны одновременно нулю, и $\varphi(0, 0) = 0$; объяснить, почему соотношение $\varphi(x, y) = 0$ не определяет y как однозначную функцию от x в окрестности начала координат.

(*Экз.* 1928 г.)

30. Пусть $\varphi(u, v, x, y)$ однородна со степенью 2 относительно u и v; положим $\varphi_u = p$, $\varphi_v = q$. Пусть $\varphi(u, v, x, y)$, выраженная через p, q, x, y, есть $\psi(p, q, x, y)$. Доказать, что

$$\psi_p = u, \quad \psi_q = v, \quad \psi_x = -\varphi_x, \quad \psi_y = -\varphi_y.$$

(*Экз.* 1936 г.)

[По теореме Эйлера (пример 12), $u\varphi_u + v\varphi_v = 2\varphi$ или $pu + qv = 2\psi$, если u и v выражены через p, q, x, y. Следовательно,

$$u + pu_p + qv_p = 2\psi_p.$$

Но

$$\psi_p = \varphi_u u_p + \varphi_v v_p = pu_p + qv_p,$$

и значит $\psi_p = u$. Остальные результаты доказываются аналогично.]

31. Если $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, и $x_1 > x_0$, то

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(x_1 - x_0)\sqrt{ac - b^2}}{ax_1x_0 + b(x_1 + x_0) + c},$$

где значение арктангенса лежит между 0 и π [1]).

[1]) В связи с примерами 31, 33, 36, 38 см. Bromwich, *Messenger of Mathematics*, XXXV.

32. Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Для каких значений α этот интеграл является разрывной функцией от α?
(*Экз.* 1904 г.)

[Значение интеграла равно $\frac{1}{2}\pi$, если $2n\pi<\alpha<(2n+1)\pi$, и $-\frac{1}{2}\pi$, если $(2n-1)\pi<\alpha<2n\pi$, где n — любое целое число; при α кратном π интеграл равен 0.]

33. Если $ax^2+2bx+c>0$ для $x_0\leqslant x\leqslant x_1$,

$$f(x)=\sqrt{ax^2+2bx+c}$$

и

$$y=f(x),\quad y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\quad X=\frac{x_1-x_0}{y_1+y_0},$$

то

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{y}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{1+X\sqrt{a}}{1-X\sqrt{a}},$$

если a положительно, и

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{y}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\{X\sqrt{-a}\},$$

если a отрицательно, где значение арктангенса лежит между 0 и $\frac{1}{2}\pi$.

$\Big[$Подстановка $t=\dfrac{x-x_0}{y+y_0}$ приводит интеграл к виду $2\displaystyle\int_0^X \frac{dt}{1-at^2}$.$\Big]$

34. Доказать, что

$$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{4}\pi.$$

(*Экз.* 1913 г.)

35. Если $a>1$, то

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}\,dx=\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right).$$

36. Если $p>1$, $0<q<1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\{1+(p^2-1)x\}\{1-(1-q^2)x\}}}=\frac{2\omega}{(p+q)\sin\omega},$$

где ω обозначает положительный острый угол, косинус которого равен $\dfrac{1+pq}{p+q}$.

37. Если $a > b > 0$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{a - b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

(*Экз.* 1904 г.)

38. Доказать, что если $a > \sqrt{b^2 + c^2}$, то

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + c\sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{c},$$

где значение арктангенса лежит между 0 и π.

39. Доказать, что если $m \geqslant 1$ и

$$I_{m,\,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos nx\,dx, \quad J_{m,\,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin nx\,dx,$$

то

$$(m + n)\,I_{m,\,n} = \sin\frac{1}{2}n\pi - mJ_{m-1,\,n-1},$$

и выразить $I_{m,\,n}$ через $I_{m-2,\,n-2}$ при $m \geqslant 2$.

(*Экз.* 1933 г.)

40. Доказать интегрированием от 0 до $\frac{1}{2}\pi$ неравенств

$$\frac{1 - \sin^{2n-1}x}{2n - 1} > \frac{1 - \sin^{2n}x}{2n} > \frac{1 - \sin^{2n+1}x}{2n + 1}$$

с помощью результата примера LXVI. 10, что

$$p_{n-1}\left(1 + \frac{2n - 1}{2n}\,p_{n-1}\right) > \frac{4n}{\pi} > p_n\,(p_n - 1),$$

где

$$p_n = \frac{3\cdot 5\ldots(2n + 1)}{2\cdot 4\ldots 2n}.$$

(*Экз.* 1924 г.)

41. Найти рекуррентную формулу для

$$\int_0^x \sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

и вывести, что

$$1 = \cos x + \frac{1}{2}\cos x\sin^2 x + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n - 3)}{2\cdot 4\ldots(2n - 2)}\cos x \sin^{2n-2}x + r_n,$$

$$\alpha = \sin\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3\alpha}{3} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n - 3)}{2\cdot 4\ldots(2n - 2)}\,\frac{\sin^{2n-1}\alpha}{2n - 1} + R_n,$$

где

$$r_n = \frac{3\cdot 5\ldots(2n - 1)}{2\cdot 4\ldots(2n - 2)} \int_0^x \sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

и

$$R_n=\int_0^\alpha r_n\,dx=\frac{3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots(2n-2)}\int_0^\alpha(\alpha-x)\sin^{2n-1}x\,dx.$$

Доказать, что $x+\alpha\cos x\geqslant\alpha$, если $0\leqslant x\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\pi$, и вывести отсюда, что

$$R_n\leqslant\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\alpha\sin^{2n}\alpha.$$

(*Экз.* 1924 г.)

42. Доказать с помощью подстановки $\sqrt{1+x^4}=(1+x^2)\cos\varphi$ или иным путем, что

$$\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

(*Экз.* 1923 г.)

43. Если $f(x)$ непрерывна и не принимает отрицательных значений и

$$\int_a^b f(x)\,dx=0,$$

то $f(x)=0$ для всех значений x между a и b. [Если бы $f(x)$ принимала, например, при $x=\xi$, положительное значение k, то мы могли бы, в силу непрерывности $f(x)$, найти такой интервал $(\xi-\delta,\ \xi+\delta)$, в котором $f(x)>\frac{1}{2}k$; но тогда значение интеграла превосходило бы δk.]

44. **Неравенство Шварца.** Доказать, что

$$\left(\int_a^b\varphi\psi\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b\varphi^2dx\int_a^b\psi^2\,dx.$$

[Заметим, что

$$\int_a^b(\lambda\varphi+\mu\psi)^2\,dx=\lambda^2\int_a^b\varphi^2\,dx+2\lambda\mu\int_a^b\varphi\psi\,dx+\mu^2\int_a^b\psi^2\,dx$$

не может быть отрицательным. Это неравенство может быть также получено как предельный случай неравенства Коши (гл. I, Разные примеры, 10).]

45. Если

$$P_n(x)=\frac{1}{(\beta-\alpha)^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x-\alpha)(\beta-x)\}^n,$$

то $P_n(x)$ является многочленом степени n и обладает тем свойством, что

$$\int_\alpha^\beta P_n(x)\,\theta(x)\,dx=0,$$

где $\theta(x)$ — любой многочлен степени меньшей n.

[Проинтегрировать $m+1$ раз по частям, где m — степень $\theta(x)$, и учесть, что $\theta^{(m+1)}(x)=0$.]

46. Доказать, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0,$$

если $m \neq n$; при $m = n$ значение интеграла равно $\frac{\beta - \alpha}{2n + 1}$.

47. Если $Q_n(x)$ — многочлен степени n, обладающий тем свойством, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q_n(x)\, \theta(x)\, dx = 0$$

для любого многочлена $\theta(x)$ степени меньшей n, то $Q_n(x) = CP_n(x)$, где C — постоянная.

[Мы можем найти такое $\varkappa$, что $Q_n - \varkappa P_n$ будет иметь степень $n - 1$; тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q_n (Q_n - \varkappa P_n)\, dx = 0, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} P_n (Q_n - \varkappa P_n)\, dx = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (Q_n - \varkappa P_n)^2\, dx = 0.$$

Далее применить результат примера 43.]

48. Если $\varphi(x)$ — многочлен пятой степени, то

$$\int_{0}^{1} \varphi(x) dx = \frac{1}{18} \left\{ 5\varphi(\alpha) + 8\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + 5\varphi(\beta) \right\},$$

где α и β являются корнями уравнения $x^2 - x + \frac{1}{10} = 0$.

(*Экз.* 1909 г.)

ГЛАВА VIII

СХОДИМОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

171. В гл. IV мы разъяснили, что̀ понимается под *сходящимся, расходящимся* и *колеблющимся* бесконечным рядом, и проиллюстрировали наши определения на нескольких простых примерах, связанных, главным образом, с геометрической прогрессией

$$1+x+x^2+\ldots$$

и некоторыми другими аналогичными рядами. В настоящей главе мы подвергнем бесконечные ряды более систематическому рассмотрению и докажем ряд теорем, которые дадут нам возможность определить, сходятся ли простейшие ряды, обычно встречающиеся в анализе.

Мы будем применять обозначение

$$u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n=\sum_m^n u_\nu$$

и писать $\sum\limits_0^\infty u_n$, или просто $\sum u_n$, вместо

$$u_0+u_1+u_2+\ldots .\text{[1]}$$

172. Ряды с положительными членами. Теория сходимости рядов сравнительно проста, когда все члены ряда положительны [2].

[1] Несущественно, записываем ли мы ряд в виде $u_1+u_2+\ldots$ (как в гл. IV) или в виде $u_0+u_1+\ldots$ (как здесь). В настоящей главе мы будем дальше рассматривать ряды вида $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, а для этих рядов принятое здесь обозначение, очевидно, более удобно. Поэтому мы примем это обозначение в качестве основного. Но мы не будем применять его всегда, и будем иногда, когда это представляется более удобным, считать, что u_1 является первым членом ряда. Так, например, при рассмотрении ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ удобнее положить $u_n=\frac{1}{n}$, так что ряд начинается с u_1, чем $u_n=\frac{1}{n+1}$ (когда ряд начинается с u_0). Это замечание применимо, в частности, к примеру LXVIII. 4.

[2] Здесь и в дальнейшем „положительны“ означает „положительны или равны нулю“.

Мы сначала рассмотрим такие ряды, и не только потому, что их рассмотрение проще, но и потому, что исследование сходимости рядов с знакопеременными или комплексными членами часто приводится к аналогичным исследованиям рядов с положительными членами.

Когда мы исследуем вопрос о сходимости или расходимости бесконечного ряда, то можно пренебречь любым конечным числом его членов. Так, если ряд содержит только конечное число отрицательных или комплексных членов, то мы можем отбросить их и применить следующие далее теоремы к остающемуся ряду.

173. Напомним следующие основные теоремы о рядах с положительными членами, доказанные в п. 77.

A. *Ряд с положительными членами либо сходится, либо расходится к* ∞, *но не может колебаться.*

B. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы ряд* $\sum u_n$ *сходился, является существование такого числа* K, *что*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n < K$$

для всех значений n.

C. **Принцип сравнения.** *Если* $\sum u_n$ *сходится и* $v_n \leqslant u_n$ *для всех значений* n, *то* $\sum v_n$ *также сходится и* $\sum v_n \leqslant \sum u_n$. *Вообще, если* $v_n \leqslant K u_n$, *где* K — *постоянная, то* $\sum v_n$ *сходится и* $\sum v_n \leqslant K \sum u_n$. *Если же* $\sum u_n$ *расходится и* $v_n \geqslant K u_n$, *где* K *положительно, то* $\sum v_n$ *также расходится.*

Более того, для определения сходимости или расходимости $\sum v_n$ с помощью этих признаков достаточно знать, что они выполняются для *всех достаточно больших значений* n, т. е. для всех значений n, превосходящих некоторое определенное значение n_0. Но в этом случае неравенство $\sum v_n \leqslant K \sum u_n$, конечно, может и не иметь места.

Укажем особенно важный частный случай этой теоремы.

D. *Если* $\sum u_n$ *сходится (расходится) и* $\frac{u_n}{v_n}$ *стремится при* $n \to \infty$ *к пределу, отличному от нуля, то* $\sum v_n$ *также сходится (расходится).*

174. Первые приложения этих признаков. Наиболее важной теоремой о сходимости специальных рядов из числа доказанных до сих пор является теорема о сходимости $\sum r^n$ при $r < 1$ и расходимости этого ряда при $r \geqslant 1$ [1]). В теореме C естественно положить $u_n = r^n$. Тогда мы получим следующие результаты.

1. *Ряд* $\sum v_n$ *сходится, если* $v_n \leqslant K r^n$, *где* $r < 1$, *для всех достаточно больших значений* n.

---

[1]) В настоящей главе предполагается, что r положительно или равно нулю.

Когда $K=1$, это условие может быть записано в виде $v_n^{1/n}\leqslant r$. Мы получаем известный *признак Коши* сходимости рядов с положительными членами:

2. *Ряд* $\sum v_n$ *сходится, если* $v_n^{1/n}\leqslant r$, *где* $r<1$, *для всех достаточно больших значений* n.

С другой стороны, мы имеем:

3. *Ряд* $\sum v_n$ *расходится, если* $v_n^{1/n}\geqslant 1$ *для бесконечного числа значений* n.

Это очевидно, так как из $v_n^{1/n}\geqslant 1$ следует $v_n\geqslant 1$.

175. Признаки, основанные на отношениях соседних членов ряда. Существуют весьма полезные признаки, основанные на отношении $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ двух следующих друг за другом членов ряда. При рассмотрении этих признаков мы должны предположить, что все u_n и v_n *строго* положительны.

Допустим, что $u_n>0$, $v_n>0$ и что

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}\leqslant\frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{1}$$

для всех достаточно больших n, например, для $n\geqslant n_0$. Тогда

$$v_n=\frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}\,\frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}}\cdots\frac{v_n}{v_{n-1}}\,v_{n_0}\leqslant\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\,\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}\,v_{n_0}=$$

$$=\frac{v_{n_0}}{u_{n_0}}\,u_n,$$

так что $v_n\leqslant Ku_n$, где K не зависит от n. Аналогично,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}\geqslant\frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{2}$$

для $n\geqslant n_0$ влечет за собой $v_n\geqslant Ku_n$ с некоторым положительным K. Следовательно, мы имеем:

4. *Если* (1) *имеет место для всех достаточно больших значений* n *и* $\sum u_n$ *сходится, то* $\sum v_n$ *также сходится.*

5. *Если* (2) *имеет место для всех достаточно больших значений* n *и* $\sum u_n$ *расходится, то* $\sum v_n$ *также расходится.*

Полагая в теореме 4 $u_n=r^n$, находим:

6. *Ряд* $\sum v_n$ *сходится, если* $\frac{v_{n+1}}{v_n}\leqslant r$, *где* $r<1$, *для всех достаточно больших значений* n.

Этот признак известен под названием *признака Даламбера*. Соответствующий признак расходимости, состоящий в том, что $\sum v_n$ расходится, если $\frac{v_{n+1}}{v_n}\geqslant r$, где $r\geqslant 1$, для всех достаточно больших значений n, тривиален.

Мы увидим, что признак Даламбера теоретически слабее признака Коши в том смысле, что признак Коши всегда применим, когда применим признак Даламбера, но что часто признак Даламбера неприменим, когда применим признак Коши (см. ниже пример LXVIII. 9). Признаки, основанные на отношениях, неприменимы к таким „неправильным“ рядам, как, например, $0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{8}+\ldots$. Тем не менее признак Даламбера оказывается практически очень полезным, так как когда v_n имеет сложный вид, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ часто оказывается простым выражением, рассмотрение которого не представляет никаких трудностей.

Часто случается, что $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ или $v_n^{1/n}$ стремится к пределу, когда $n \to \infty$ [1]). Если этот предел меньше 1, то очевидно, что условия теорем 2 и 6 выполнены. Таким образом, мы имеем:

7. *Если $v^{1/n}$ или $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ стремится к пределу, меньшему единицы при $n \to \infty$, то $\sum v_n$ сходится.*

Почти очевидно, что если одно из этих выражений стремится к пределу, большему единицы, то $\sum v_n$ расходится. Доказательство этого предложения мы оставляем в качестве упражнения читателю. Но когда $v_n^{1/n}$ или $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ стремится к 1, то эти признаки не дают ответа на вопрос о сходимости ряда. Они неприменимы также и в том случае, когда выражение $v^{1/n}$ или $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ колеблется таким образом, что будучи всегда меньше 1, оно принимает значения как угодно близкие к 1; признаки, основанные на отношении $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, неприменимы и тогда, когда это отношение колеблется так, что оно иногда принимает значения меньшие, а иногда значения большие 1. Когда $v_n^{1/n}$ ведет себя таким образом, теорема 3 достаточна для доказательства расходимости ряда. Но уже ясно, что существует большое количество случаев, в которых необходимы более тонкие признаки.

Примеры LXVIII. 1. Применить признаки Коши и Даламбера (в их специальном виде, сформулированном в теореме 7) к рядам $\sum n^k r^n$, где k — положительное целое число.

[Здесь

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^k r \to r,$$

---

[1]) Ниже мы покажем (см. гл. IX, пример LXXXVII. 36), что из $v_n^{1/n} \to l$ следует, что $\frac{v_{n+1}}{v_n} \to l$. Что обратное предложение может не иметь места, видно из примера $v_n=1$ для нечетных n и $v_n=2$ для четных n.

и признак Даламбера показывает, что ряд сходится, если $r<1$, и расходится, если $r>1$. Признак не дает ответа, если $r=1$; но в этом случае ряд, очевидно, является расходящимся. Так как $n^{1/n}\to 1$ (см. пример XXVII. 11), признак Коши приводит к тому же результату.]

2. Рассмотреть ряд

$$\sum (An^k+Bn^{k-1}+\ldots+K)\,r^n.$$

[Мы можем предположить, что A положительно. Если мы коэффициент при r^n обозначим через $P(n)$, то $P(n)\sim An^k$, и, по теореме D п. 173, этот ряд ведет себя как $\sum n^k r^n$.]

3. Рассмотреть

$$\sum \frac{An^k+Bn^{k-1}+\ldots+K}{\alpha n^l+\beta n^{l-1}+\ldots+\varkappa}\,r^n\quad (A>0,\ \alpha \gtrless 0).$$

[Этот ряд ведет себя, как $\sum n^{k-l}r^n$. Случай, когда $r=1$, $k<l$, требует особого рассмотрения.]

4. Мы видели (см. гл. IV, Разные примеры, 25), что ряды

$$\sum \frac{1}{n(n+1)},\quad \sum \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$$

сходятся. Показать, что признаки Коши и Даламбера неприменимы к ним. [Действительно, $\lim u_n^{1/n}=\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.]

5. Показать, что ряд

$$\sum n^{-p}$$

где p — целое число, не меньшее 2, сходится.

[Так как $n(n+1)\ldots(n+p-1)\sim n^p$, то это следует из рассмотрения рядов, исследованных в примере 4. В п. 77 (7) мы доказали, что ряд расходится, если $p=1$, и он, очевидно, расходится при $p\leqslant 0$.]

6. Показать, что ряд из примера 3 сходится, если $r=1$, $l>k+1$, и расходится, если $r=1$, $l\leqslant k+1$.

7. Если m_n — положительное целое число и $m_{n+1}>m_n$, то ряд

$$\sum r^{m_n}$$

сходится при $r<1$ и расходится при $r\geqslant 1$. Например, ряд

$$1+r+r^4+r^9+\ldots$$

сходится при $r<1$ и расходится при $r\geqslant 1$.

8. Просуммировать ряд $1+2r+2r^4+\ldots$ с точностью до 24 знаков, если $r=0{,}1$, и с точностью до 2 знаков, если $r=0{,}9$.

[Если $r=0{,}1$, то первые пять членов дают сумму

$$1{,}2002000020000002,$$

причем ошибка равна

$$2r^{25}+2r^{36}+\ldots<2r^{25}+2r^{36}+2r^{47}+\ldots=\frac{2r^{25}}{1-r^{11}}<3\cdot 10^{-25}.$$

Если $r=0{,}9$, то первые 8 членов дают сумму $5{,}458\ldots$, а ошибка не превосходит

$$\frac{2r^{64}}{1-r^{17}}<0{,}003.]$$

9. Если $0<a<b<1$, то ряд

$$a+b+a^2+b^2+a^3+\ldots$$

сходится. Показать, что признак Коши применим к этому ряду, тогда как признак Даламбера неприменим.

[Действительно,

$$\frac{v_{2n+1}}{v_{2n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\to\infty,\qquad \frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+2}\cdot b\to 0.]$$

10. Ряды

$$\sum\frac{r^n}{n!}\quad\text{и}\quad\sum\frac{r^n}{n^n}$$

сходятся для всех r, а ряды

$$\sum n!r^n\quad\text{и}\quad\sum n^nr^n$$

сходятся ни для одного r, кроме $r=0$.

(*Экз.* 1935, 1936 гг.)

11. Ряды

$$\sum\left(\frac{nr}{n+1}\right)^n,\quad\sum\frac{\{(n+1)r\}^n}{n^{n+1}}$$

сходятся при $r<1$ и расходятся при $r\geqslant 1$.

(*Экз.* 1927, 1928 гг.)

[При $r=1$ применить результаты п. 73 и п. 77 (7).]

12. Если $\sum u_n$ ряд сходится, то сходятся и ряды

$$\sum u_n^2\quad\text{и}\quad\sum\frac{u_n}{1+u_n}.$$

13. Если ряд $\sum u_n^2$ сходится, то сходится и ряд

$$\sum\frac{u_n}{n}.$$

[Так как $\frac{2u_n}{n}\leqslant u_n^2+\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится.]

14. Показать, что

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$

и

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{15}{16}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right).$$

[Для доказательства первого результата заметим, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right),$$

по теоремам (8), (6) и (4) из п. 77.]

15. Доказать приведением к противоречию, что $\sum\frac{1}{n}$ расходится.

[Если бы ряд был сходящимся, то с помощью рассуждения, аналогичного примененному в примере 14, мы нашли бы, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$$

или что
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

а это содержит противоречие, так как каждый член первого ряда меньше соответствующего члена второго.]

176. Прежде чем перейти к дальнейшим исследованиям признаков сходимости и расходимости, мы докажем одну важную общую теорему о рядах с положительными членами.

Теорема Дирихле[1]. *Сумма ряда с положительными членами не зависит от порядка, в котором суммируются члены ряда.*

Теорема утверждает, что если мы имеем сходящийся ряд с положительными членами, скажем $u_0+u_1+u_2+\ldots$, и образуем любой другой ряд из тех же членов

$$v_0+v_1+v_2+\ldots,$$

беря их в каком-либо другом порядке, то этот второй ряд будет также сходиться, и его сумма будет равна сумме первого ряда. Конечно, ни один член первого ряда не должен быть пропущен во втором: каждое u должно встречаться среди v, и наоборот.

Доказательство чрезвычайно просто. Пусть s будет сумма ряда u. Тогда сумма любого числа членов, произвольно выбранных из этого ряда, не будет превосходить s. Но каждое v является одним из u, и поэтому сумма любого числа членов ряда v не больше s. Следовательно, $\sum v_n$ сходится и сумма t этого ряда не превосходит s. Но мы можем точно таким же образом показать, что $s \leqslant t$. Следовательно, $s=t$.

177. Умножение рядов с положительными членами. Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы Дирихле: *если $u_0+u_1+u_2+\ldots$ и $v_0+v_1+v_2+\ldots$ — два сходящихся ряда с положительными членами, причем s и t являются их суммами, то ряд*

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots$$

также сходится и имеет сумму st.

Запишем все возможные произведения вида u_mv_n в форме бесконечной таблицы

---

[1] Теорема эта была, повидимому, впервые ясно сформулирована Дирихле в 1837 г. Несомненно, что она была известна и более ранним авторам, в частности, Коши.

u_0v_0	u_1v_0	u_2v_0	u_3v_0	...
u_0v_1	u_1v_1	u_2v_1	u_3v_1	...
u_0v_2	u_1v_2	u_2v_2	u_3v_2	...
u_0v_3	u_1v_3	u_2v_3	u_3v_3	...
...	...	...	...	....

Из этих членов мы можем составить простые последовательности многими способами, и, в частности, следующими двумя.

(1) Начнем с единственного члена u_0v_0, для которого $m+n=0$; затем возьмем два члена u_1v_0, u_0v_1, для которых $m+n=1$; затем три члена u_2v_0, u_1v_1, u_0v_2, для которых $m+n=2$ и т. д. Тогда мы получим ряд

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots,$$

фигурирующий в теореме.

(2) Начнем с единственного числа u_0v_0, для которого оба индекса равны нулю; затем возьмем члены u_1v_0, u_1v_1, u_0v_1, для которых ни один индекс не превосходит 1, но по крайней мере один индекс равен 1; затем члены u_2v_0, u_2v_1, u_2v_2, u_1v_2, u_0v_2, для которых ни один индекс не превосходит 2, но по крайней мере один индекс равен 2 и т. д. Суммы этих групп членов равны соответственно

$$u_0v_0,\quad (u_0+u_1)(v_0+v_1)-u_0v_0,$$
$$(u_0+u_1+u_2)(v_0+v_1+v_2)-(u_0+u_1)(v_0+v_1),\ \ldots,$$

а сумма первых $n+1$ групп равна

$$(u_0+u_1+\ldots+u_n)(v_0+v_1+\ldots+v_n),$$

что стремится к st при $n\to\infty$. Когда мы образовываем сумму ряда таким способом, то сумма первой, первых двух, трех, ... групп содержит все члены в первом, втором, третьем, ... прямоугольнике приведенной выше таблицы.

Сумма ряда, образованного вторым способом, равна st. Но первый ряд (если отбросить скобки) является перестановкой второго и, по теореме Дирихле, он также сходится к сумме st. Теорема доказана.

Примеры LXIX. 1. Проверить, что если $r<1$, то

$$1+r^2+r+r^4+r^6+r^3+\ldots=1+r+r^3+r^2+r^5+r^7+\ldots=\frac{1}{1-r}.$$

2[1]). Если один из рядов $u_0+u_1+\ldots$, $v_0+v_1+\ldots$ расходится, то расходится и ряд

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots,$$

[1]) В примерах 2—4 имеются, конечно, в виду ряды с положительными членами.

за исключением того тривиального случая, когда каждый член другого ряда равен нулю.

3. Если ряды $u_0+u_1+\ldots$, $v_0+v_1+\ldots$, $w_0+w_1+\ldots$ сходятся к суммам r, s, t, то ряд $\Sigma\lambda_k$, где

$$\lambda_k=\Sigma\, u_m v_n w_p,$$

причем суммирование производится по всем системам значений m, n, p таким, что $m+n+p=k$, сходится к сумме rst.

4. Если ряды Σu_n и Σv_n сходятся к суммам s и t, то ряд Σw_n, где

$$w_n=\Sigma\, u_l v_m,$$

причем суммирование производится по всем парам значений l, m, для которых $lm=n$, сходится к сумме st.

178. Дальнейшие признаки сходимости и расходимости. Примеры, приведенные на стр. 343—6, показывают, что существуют простые и интересные типы рядов с положительными членами, к которым общие признаки пп. 174—5 неприменимы. Действительно, если мы рассматриваем какой-либо простой ряд, для которого $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к пределу при $n\to\infty$, то *признаки* пп. 174—5 *будут, вообще говоря, неприменимы, если этот предел равен* 1. Так, в примере LXVIII. 5 эти признаки оказались неприменимы, и мы должны были прибегнуть к специальным приемам рассмотрения, которые по существу заключались в применении для сравнения вместо геометрической прогрессии ряда из примера LXVIII. 4.

Это объясняется, между прочим, тем, что геометрическая прогрессия, сравнением с которой были получены признаки пп. 174—5, не только сходится, но сходится *очень быстро*. Признаки, полученные сравнением с ней, являются поэтому, вполне естественно, весьма грубыми. Часто требуются более тонкие признаки.

В примере XXVII. 7 мы доказали, что $n^k r^n\to 0$ при $n\to\infty$, если $r<1$, каково бы ни было значение k. Более того, в примере LXVIII. 1 мы доказали, что ряд $\Sigma n^k r^n$ сходится. Отсюда следует, что последовательность

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots,\ r^n,\ \ldots,$$

где $r<1$, убывает быстрее чем последовательность

$$1^{-k},\ 2^{-k},\ 3^{-k},\ \ldots,\ n^{-k},\ \ldots.$$

Это кажется на первый взгляд парадоксальным, если r не на много меньше 1, а k велико. Так, из последовательностей

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \ldots,\quad 1,\ \frac{1}{4\,096},\ \frac{1}{531\,441},\ \ldots,$$

общие члены которых соответственно суть $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ и n^{-12}, вторая кажется на первый взгляд убывающей гораздо быстрее первой. Но если мы возьмем достаточно далекие члены этих последовательностей, то мы убедимся в том, что члены первой последовательности будут гораздо меньше членов второй. Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}<\frac{1}{5},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{12}<\left(\frac{1}{5}\right)^3<\left(\frac{1}{10}\right)^2,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,000}<\left(\frac{1}{10}\right)^{166},$$

тогда как

$$1\,000^{-12} = 10^{-36},$$

так что тысячный член первой последовательности в 10^{130} раз меньше соответствующего члена второй последовательности. Таким образом, ряд

$$\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится гораздо быстрее, чем ряд

$$\sum n^{-12},$$

а этот ряд, в свою очередь, сходится гораздо быстрее, чем ряд

$$\sum n^{-2}\text{ [1]}.$$

Существуют два признака, а именно *интегральный признак Маклорена* (или Коши) и *признак сгущения Коши*, которые оказываются особенно полезными тогда, когда признаки из пп. 174—5 неприменимы. В упомянутых признаках Маклорена и Коши делается еще одно дополнительное предположение относительно u_n, а именно, что u_n монотонно убывает с возрастанием n. В наиболее важных случаях это условие выполняется.

Но прежде чем мы перейдем к этим двум признакам, мы докажем одну простую, но важную теорему, которую мы будем называть *теоремой Абеля*[2]. Она дает *необходимое* условие сходимости ряда с монотонно убывающими положительными членами.

179. Теорема Абеля (Прингсхейма). *Если* $\sum u_n$ *— сходящийся ряд с убывающими и положительными членами, то* $\lim nu_n = 0$.

Действительно,

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots \to 0,$$

и тем более

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n} \to 0,$$

а эта сумма не меньше nu_{2n}. Следовательно,

$$2nu_{2n} = 2(nu_{2n}) \to 0.$$

Кроме того,

$$(2n+1)\,u_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n}\,2nu_{2n} \to 0,$$

и, следовательно, $nu_n \to 0$.

Примеры LXX. 1. Применить теорему Абеля для доказательства расходимости рядов

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{an+b}.$$

$\left[\text{Здесь } nu_n \to 1 \text{ или } nu_n \to \dfrac{1}{a}.\right]$

---

[1] Пять членов достаточны, чтобы получить сумму ряда $\sum n^{-12}$ с точностью до 7 знаков, тогда как в случае ряда $\sum n^{-2}$ для такой же точности надо взять 10 000 000 членов. Большое количество числовых результатов этого типа читатель найдет в приложении (составленном Дж. Джексоном (J. Jackson) к монографии автора *Orders of infinity* (Cambridge math. tracts, No. 12).

[2] Эта теорема была найдена Абелем, но затем забыта. Впоследствии она была вновь найдена Прингсхеймом.

2. Показать, что утверждение теоремы Абеля может не иметь места, если не выполнено условие, что u_n убывает с возрастанием n.

[Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}+\ldots,$$

в котором $u=\frac{1}{n}$, если n — точный квадрат, и $u_n=\frac{1}{n^2}$ в противном случае, сходнтся, так как с помощью перестановки его членов он может быть представлен в виде

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right),$$

а каждый из этих рядов сходится. Но так как $nu_n=1$ для каждого n, которое является точным квадратом, то утверждение теоремы не имеет места.]

3. *Предложение, обратное теореме Абеля, неверно*, т. е. из того, что u_n убывает с возрастанием n и $\lim nu_n=0$, не следует, что ряд $\sum u_n$ сходится.

[Возьмем ряд $\sum\frac{1}{n}$ и умножим его первый член на 1, следующий на $\frac{1}{2}$, следующие два на $\frac{1}{3}$, следующие четыре на $\frac{1}{4}$, следующие восемь на $\frac{1}{5}$ и т. д. Группируя в скобках члены этого нового ряда, получим:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots,$$

а этот ряд расходится, так как его члены не меньше соответствующих членов следующего ряда:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\ldots,$$

который расходится. Но легко видеть, что члены ряда

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\ldots$$

удовлетворяют условию $nu_n\to 0$. Действительно, $nu_n=\frac{1}{\nu}$, когда

$$2^{\nu-2}<n\leqslant 2^{\nu-1},\text{ и } \nu\to\infty \text{ при } n\to\infty.]$$

180. Интегральный признак Маклорена (или Коши)[1]. Если u_n монотонно убывает с возрастанием n, то мы можем записать u_n в виде $\varphi(n)$ и предположить, что $\varphi(n)$ есть значение при $x=n$ некоторой непрерывной и монотонно убывающей функции $\varphi(x)$ от непрерывного переменного x. Тогда, если ν — любое положительное целое число, имеем:

$$\varphi(\nu-1)\geqslant\varphi(x)\geqslant\varphi(\nu)$$

для $\nu-1\leqslant x\leqslant\nu$. Пусть

$$v_\nu=\varphi(\nu-1)-\int\limits_{\nu-1}^{\nu}\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\nu-1}^{\nu}\{\varphi(\nu-1)-\varphi(x)\}\,dx,$$

[1]) Этот признак был найден Маклореном и затем вновь открыт Коши, которому он часто приписывается.

так что $$0 \leqslant v_\nu \leqslant \varphi(\nu-1) - \varphi(\nu).$$

Тогда $\sum v_\nu$ является рядом с положительными членами и

$$v_2 + v_3 + \ldots + v_n \leqslant \varphi(1) - \varphi(n) \leqslant \varphi(1).$$

Следовательно, $\sum v_\nu$ сходится, т. е. $v_2 + v_3 + \ldots + v_n$, или

$$\sum_1^{n-1} \varphi(\nu) - \int_1^n \varphi(x)\,dx$$

стремится к некоторому положительному пределу, не превосходящему $\varphi(1)$, когда $n \to \infty$.

Положим

$$\Phi(\xi) = \int_1^\xi \varphi(x)\,dx,$$

так что $\Phi(\xi)$ является непрерывной и монотонно возрастающей функцией от ξ. Тогда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} - \Phi(n)$$

стремится при $n \to \infty$ к некоторому положительному пределу, не превосходящему $\varphi(1)$. Следовательно, $\sum u_\nu$ сходится или расходится в зависимости от того, стремится ли $\Phi(n)$ при $n \to \infty$ к конечному пределу или нет. А так как $\Phi(n)$ монотонно возрастает, то $\sum u^\nu$ сходится или расходится, в зависимости от того, стремится ли $\Phi(\xi)$ при $\xi \to \infty$ к некоторому конечному пределу или к бесконечности. Таким образом, *если $\varphi(x)$ положительна и непрерывна для всех значений x, больших 1, и монотонно убывает при возрастании x, то ряд*

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots$$

сходится или расходится в зависимости от того, стремится ли

$$\Phi(\xi) = \int_1^\xi \varphi(x)\,dx$$

при $\xi \to \infty$ к некоторому пределу l или нет, причем в первом случае сумма ряда не превосходит $\varphi(1) + l$.

Сумма этого ряда должна быть в действительности меньше, чем $\varphi(1) + l$. В самом деле, из (6) п. 165 и гл. VII. Разные примеры, 43, следует, что $v_\nu < \varphi(\nu-1) - \varphi(\nu)$, за исключением того случая, когда $\varphi(x) = \varphi(\nu)$ во всем интервале $(\nu-1, \nu)$; но это не может иметь места для всех значений ν.

181. Ряд $\sum n^{-s}$. Самым важным приложением интегрального признака является исследование ряда

$$1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots,$$

где s — любое рациональное число. Мы уже видели (см. п. 77 и примеры LXVIII. 15 и LXX. 1), что при $s=1$ ряд расходится.

Если $s \leqslant 0$, то ряд, очевидно, расходится. Если $s > 0$, то u_n убывает с возрастанием n, и мы можем применить интегральный признак. В данном случае

$$\Phi(\xi)=\int_1^\xi \frac{dx}{x^s}=\frac{\xi^{1-s}-1}{1-s},$$

если $s \neq 1$. Если $s > 1$, то $\xi^{1-s} \to 0$ при $\xi \to \infty$ и

$$\Phi(\xi) \to \frac{1}{s-1}=l.$$

Если же $s < 1$, то $\xi^{1-s} \to \infty$ при $\xi \to \infty$, так что $\Phi(\xi) \to \infty$. Таким образом, *ряд* $\sum n^{-s}$ *сходится, если* $s > 1$, *и расходится, если* $s \leqslant 1$. *В случае его сходимости сумма ряда меньше* $\frac{s}{s-1}$.

Мы могли бы, конечно, доказать расходимость ряда для $s < 1$ его сравнением с расходящимся рядом $\sum n^{-1}$.

Интересно, однако, провести исследование ряда $\sum n^{-1}$ с помощью интегрального признака. В этом случае

$$\Phi(\xi)=\int_1^\xi \frac{dx}{x},$$

и легко видеть, что $\Phi(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Действительно, если $\xi > 2^n$, то

$$\Phi(\xi) > \int_1^{2n} \frac{dx}{x}=\int_1^2 \frac{dx}{x}+\int_2^4 \frac{dx}{x}+\ldots+\int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{dx}{x}.$$

Но полагая $x=2^r u$, найдем, что

$$\int_{2^r}^{2^{r+1}} \frac{dx}{x}=\int_1^2 \frac{du}{u},$$

и, таким образом,

$$\Phi(\xi) > n\int_1^2 \frac{du}{u},$$

откуда следует, что $\Phi(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$.

Примеры LXXI. 1. Рассуждением, аналогичным проведенному выше, и без интегрирования доказать, что

$$\Phi(\xi)=\int_1^\xi \frac{dx}{x^s},$$

где $s < 1$, стремится к бесконечности при $\xi \to \infty$.

2. Ряды

$$\sum n^{-2}, \quad \sum n^{-3/2}, \quad \sum n^{-11/10}$$

сходятся, и их суммы не превосходят соответственно 2, 3, 11. Ряды

$$\sum n^{-1/2}, \quad \sum n^{-10/11}$$

расходятся.

3. Ряд

$$\sum \frac{n^s}{n^t + a},$$

где $a > 0$, сходится, если $t > s + 1$, и расходится, если $t \leqslant s + 1$. [Сравнить с $\sum n^{s-t}$.]

4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum \frac{a_1 n^{s_1} + a_2 n^{s_2} + \ldots + a_k n^{s_k}}{b_1 n^{t_1} + b_2 n^{t_2} + \ldots + b_l n^{t_l}},$$

где все буквы обозначают положительные числа, и показатели s и t рациональны и приведены в убывающем порядке.

5. Доказать, что если $m > 0$, то

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots < \frac{m+1}{m^2}.$$

6. Доказать, что

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi.$$

7. Доказать, что

$$-\frac{1}{2}\pi < \sum_1^{\infty} \frac{a}{a^2+n^2} < \frac{1}{2}\pi.$$

(*Экз.* 1909 г.)

8. Доказать, что

$$2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1,$$

$$\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots < \frac{1}{2}(\pi + 1).$$

(*Экз.* 1911 г.)

9. Если $\varphi(n) \to l > 1$, то ряд

$$\sum n^{-\varphi(n)}$$

сходится. Если $\varphi(n) \to l < 1$, то ряд расходится.

10. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$ и $0 < s < 1$, то

$$\psi(n) = (a+b)^{-s} + (a+2b)^{-s} + \ldots + (a+nb)^{-s} - \frac{(a+nb)^{1-s}}{b(1-s)}$$

стремится к некоторому пределу A, когда $n \to \infty$. Доказать также, что $\psi(n) - \psi(n-1) = O(n^{-s-1})$, и вывести отсюда, что $\psi(n) = A + O(n^{-s})$.

(*Экз.* 1926 г.)

182. Признак сгущения Коши. Второй из упомянутых в п. 178 признаков гласит: *если* $u_n = \varphi(n)$ *является убывающей функцией от* n, *то ряд*

$$\sum \varphi(n)$$

сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum 2^n \varphi(2^n).$$

Мы можем доказать это с помощью рассуждения, которое уже однажды применялось при рассмотрении ряда $\sum n^{-1}$ (см. п. 77). В первую очередь, мы имеем:

$$\varphi(3) + \varphi(4) \geqslant 2\varphi(4),$$

$$\varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(7) + \varphi(8) \geqslant 4\varphi(8),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(2^n + 1) + \varphi(2^n + 2) + \ldots + \varphi(2^{n+1}) \geqslant 2^n \varphi(2^{n+1}).$$

Если $\sum 2^n \varphi(2^n)$ расходится, то расходятся и ряды

$$\sum 2^{n+1} \varphi(2^{n+1}), \quad \sum 2^n \varphi(2^{n+1}),$$

и полученные неравенства показывают, что $\sum \varphi(n)$ также расходится.

С другой стороны,

$$\varphi(2) + \varphi(3) \leqslant 2\varphi(2), \quad \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(7) \leqslant 4\varphi(4)$$

и т. д. А из этой системы неравенств следует, что если $\sum 2^n \varphi(2^n)$ сходится, то сходится и $\sum \varphi(n)$. Теорема доказана.

Для наших целей область применения этого признака практически совпадает с областью применения интегрального признака. Признак сгущения позволяет нам с такой же легкостью, как и интегральный признак, исследовать ряды $\sum n^{-s}$. Действительно, $\sum n^{-s}$ сходится или расходится в зависимости от сходимости или расходимости $\sum 2^n 2^{-ns}$, т. е. в зависимости от того, будет ли $s > 1$ или $\leqslant 1$.

Примеры LXXII. 1. Показать, что если a — любое положительное целое число, большее 1, то $\sum \varphi(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится $\sum a^n \varphi(a^n)$.

[Применить те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы, но группируя по a, a^2, a^3, ... членов.]

2. Если $\sum 2^n \varphi(2^n)$ сходится, то $\lim 2^n \varphi(2^n) = 0$. Вывести отсюда теорему Абеля из п. 179.

183. Дальнейшие признаки, основанные на отношениях. Если $u_n = n^{-s}$, то, по теореме Тейлора,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} = 1 - \frac{s}{n} + \frac{s(s-1)}{2n^2}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^{-s-2},$$

где $0 < \theta < 1$, и, таким образом,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{s}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Допустим теперь, что

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Если $a>1$, то мы можем выбрать s так, что $1<s<a$, и тогда

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

для достаточно больших n. Но Σu_n сходится, и, следовательно, по признаку 4 п. 175, будет сходиться также Σv_n. Аналогично, если $a<1$, то мы можем выбрать s так, что $a<s<1$, и доказать расходимость Σv_n сравнением с расходящимся рядом Σu_n. Отсюда следует, что *если v_n удовлетворяет условию* (1), *то Σv_n сходится, если $a>1$, и расходится, если $a<1$.* Случай $a=1$ мы должны отложить до следующей главы (пример XC. 5).

Мы можем таким же путем доказать, что если (1) имеет место при любом положительном a и $0<s<a$, то $v_n\leqslant Kn^{-s}$, и, следовательно, $v_n\to 0$.

Рассмотрим, в частности, так называемый „гипергеометрический" ряд

$$\sum v_n=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\ldots, \tag{2}$$

где α, β, γ — действительные числа, причем ни одно из них не равно ни нулю, ни целому отрицательному числу. Тогда для достаточно больших n члены этого ряда имеют постоянный знак и

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1-\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно, *ряд* (2) *сходится, если* $\gamma>\alpha+\beta$, *и расходится, если* $\gamma<\alpha+\beta$. *В частности, ряд*

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}+\ldots$$

сходится, если $m<0$, *и расходится, если* $m>0$. Кроме того, $v_n\to 0$, если $\gamma>\alpha+\beta-1$.

184. Несобственные интегралы. Интегральный признак (см. п. 180) показывает, что если $\varphi(x)$ — положительная и убывающая функция от x, то ряд $\Sigma\varphi(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, стремится ли $\Phi(x)$ — интеграл от $\varphi(x)$ — при $x\to\infty$ к конечному пределу или нет. Допустим, что $\Phi(x)$ стремится к конечному пределу при $x\to\infty$ и что

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x\varphi(t)\,dt=l.$$

Тогда мы будем говорить, что *интеграл*

$$\int_{1}^{\infty} \varphi(t)\, dt$$

сходится и имеет значение l, и будем называть этот интеграл *несобственным*.

До сих пор мы предполагали, что $\varphi(t)$ положительна и убывает. Но представляется естественным перенести наше определение и на другие случаи, причем предположение, что нижний предел равен 1, несущественно. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Если $\varphi(t)$ *является непрерывной функцией от* t *для* $t \geqslant a$ *и*

$$\lim_{x\to\infty} \int_{a}^{x} \varphi(t)\, dt = l,$$

то мы будем говорить, что несобственный интеграл

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(t)\, dt$$

сходится и имеет значение l.

С другой стороны, если

$$\int_{a}^{x} \varphi(t)\, dt \to \infty,$$

то мы будем говорить, что интеграл *расходится к* ∞, и аналогичное определение вводится для расходимости к $-\infty$. Наконец, если ни одно из этих предельных соотношений не имеет места, то мы будем говорить, что интеграл *колеблется, ограниченно* или *неограниченно*, при $x \to \infty$.

В связи с этими определениями отметим следующее.

1°. Если мы положим

$$\int_{a}^{x} \varphi(t)\, dt = \Phi(x),$$

то интеграл сходится, расходится или колеблется в зависимости от того, стремится ли $\Phi(x)$ при $x \to \infty$ к некоторому конечному пределу, к ∞ (или $-\infty$) или колеблется. Если $\Phi(x)$ стремится к пределу, который мы можем обозначить через $\Phi(\infty)$, то значение интеграла равно $\Phi(\infty)$. Вообще если $\Phi(x)$ — любой интеграл от $\varphi(x)$, то значение рассматриваемого несобственного интеграла равно $\Phi(\infty) - \Phi(a)$.

2°. В том случае, когда $\varphi(t)$ всегда положительна, ясно, что $\Phi(x)$ является возрастающей функцией от x. Следовательно, в этом случае интеграл может только либо сходиться, либо расходиться к ∞.

3°. Общий признак сходимости, соответствующий общему признаку из п. 96, гласит: *для сходимости интеграла* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx \right| < \delta$$

для $x_2 > x_1 \geqslant X(\delta)$.

4°. Читателя не должно смущать то обстоятельство, что термин *бесконечный интеграл* *) может обозначать вполне определенное число, как 2 или $\frac{1}{2}\pi$. Различие между бесконечным и конечным интегралом аналогично различию между бесконечным и конечным рядом. Однако никто не предполагает, что бесконечный ряд обязательно расходится.

5°. Интеграл

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

был определен в пп. 161—2 как *простой* предел, т. е. как предел некоторой конечной суммы. Несобственный интеграл является поэтому *пределом предела* или так называемым *повторным* пределом. Понятие несобственного интеграла существенно сложнее понятия обычного определенного интеграла, развитием которого оно является.

6°. Интегральный признак из п. 180 может быть теперь сформулирован так: *если* $\varphi(x)$ *положительна и монотонно убывает с возрастанием* x, *то бесконечный ряд* $\Sigma\varphi(n)$ *и несобственный интеграл*

$$\int_1^\infty \varphi(x)\,dx$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

7°. Читатель без труда сформулирует и докажет теоремы о несобственных интегралах, аналогичные теоремам (1)—(6) п. 77. Так, теореме (2) соответствует следующая теорема: *если*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится и $b > a$, *то*

$$\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

также сходится и

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^\infty \varphi(x)\,dx.$$

*) „Бесконечный интеграл“ является точным переводом английского термина и означает несобственный интеграл; обычный интеграл автор обозначает термином „конечный интеграл“. Смысл замечания 4° становится понятным только в связи с английской терминологией. *(Прим. перев.)*

185. Случай положительной $\varphi(x)$. Естественно рассмотреть те общие теоремы о сходимости или расходимости несобственного интеграла (1) из п. 184, которые соответствуют теоремам A — D п. 173. Что теорема A имеет место и для интегралов, мы уже видели в п. 184, 2°. Теореме B соответствует следующее предложение: *необходимым и достаточным условием сходимости интеграла* (1) *является существование такой постоянной* K, *что*

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt < K$$

для всех значений x, *бо́льших* a. Аналогично, в соответствии с C, мы имеем: *если*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится и $\psi(x) \leqslant K\varphi(x)$ *для всех значений* x, *бо́льших* a, *то*

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx$$

также сходится и

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx \leqslant K \int_a^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Формулировку соответствующего признака расходимости мы оставляем читателю.

Отметим, что признак Даламбера (см. п. 175), существенно зависящий от понятия следующих друг за другом членов, не имеет аналога для интегралов; аналог признака Коши практически не играет большой роли и, во всяком случае, может быть сформулирован только после того, как мы подробнее изучим (в гл. IX) функцию $\varphi(x) = r^x$. Наиболее важные специальные признаки получаются сравнением с интегралом

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \quad (a > 0),$$

сходимость и расходимость которого мы уже исследовали в п. 181. Эти признаки состоят в следующем: *если* $\varphi(x) < Kx^{-s}$, *где* $s > 1$, *для всех* $x \geqslant a$, *то*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится; если же $\varphi(x) > Kx^{-s}$, где $K > 0$ и $s \leqslant 1$, для $x \geqslant a$, то интеграл расходится. В частности, если

$$\lim x^s \varphi(x) = l,$$

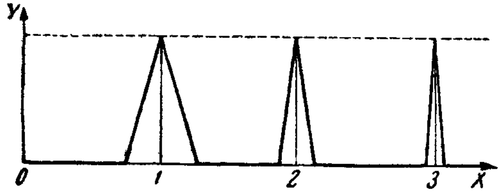
где $l > 0$, то интеграл сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $s > 1$ или $\leqslant 1$.

Имеется одно основное свойство сходящихся бесконечных рядов, аналог которого для несобственных интегралов неверен. Если $\sum \varphi(n)$ сходится, то $\varphi(n) \to 0$; но *не* всегда верно, даже если $\varphi(x)$ положительна, что если

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится, то $\varphi(x) \to 0$.

Рассмотрим, например, функцию $\varphi(x)$, график которой изображен на фиг. 46. Здесь ордината всех максимумов в точках $x = 1, 2, 3, \ldots$ равна единице, а основание n-го треугольника равно $\frac{2}{(n+1)^2}$. Площадь такого



Фиг. 46

треугольника равна $\frac{1}{(n+1)^2}$, и очевидно, что для любого значения

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx < \sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^2},$$

так что $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$ сходится. Но $\varphi(x)$ не стремится к нулю.

Примеры LXXIII. 1. Интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\alpha x^r + \beta x^{r-1} + \ldots + \lambda}{Ax^s + Bx^{s-1} + \ldots + L}\,dx,$$

где α и A положительны, а a больше наибольшего корня знаменателя (в случае, если знаменатель вообще имеет действительные корни), сходится, если $s > r + 1$, и расходится, если $s \leqslant r + 1$.

2. Установить, какие из следующих интегралов сходятся:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x^{4/3}}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{c^2+x^2}, \quad \int_a^\infty \frac{x\,dx}{c^2+x^2}, \quad \int_a^\infty \frac{x^2\,dx}{c^2+x^2}, \quad \int_a^\infty \frac{x^2\,dx}{\alpha + 2\beta x^2 + \gamma x^4}.$$

В первых двух интегралах предполагается, что $a > 0$, а в последнем, — что a больше наибольшего корня знаменателя (если он вообще имеет действительные корни).

3. Интегралы
$$\int_a^{\xi} \cos x\,dx, \int_a^{\xi} \cos(\alpha x+\beta)dx$$
ограниченно колеблются при $\xi\to\infty$.

4. Интегралы
$$\int_a^{\xi} x\cos x\,dx, \int_a^{\xi} x^n\cos(\alpha x+\beta)dx,$$
где n — положительное целое число, неограниченно колеблются при $\xi\to\infty$.

5. **Интегралы от $-\infty$.** Если
$$\int_{\xi}^{a} \varphi(x)\,dx$$
стремится к пределу l при $\xi\to-\infty$, то мы говорим, что
$$\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx$$
сходится и равен l. Такие интегралы обладают всеми свойствами интегралов, рассмотренных в предыдущих пунктах, и читатель без труда сам сформулирует эти свойства.

6. **Интегралы от $-\infty$ до $+\infty$.** Если оба интеграла
$$\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx, \int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$$
сходятся и имеют, соответственно, значения k и l, то мы говорим, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$
сходится и имеет значение $k+l$.

7. Доказать, что
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\pi.$$

8. Доказать, что
$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x^2)\,dx=2\int_0^{\infty}\varphi(x^2)\,dx,$$
если интеграл в правой части сходится.

9. Доказать, что если
$$\int_0^{\infty} x\varphi(x^2)\,dx$$
сходится, то
$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x^2)\,dx=0.$$

10. **Аналог теоремы Абеля из п. 179.** *Если $\varphi(x)$ положительна и монотонно убывает и*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится, то $x\varphi(x) \to 0$. Доказать это (a) с помощью теоремы Абеля и интегрального признака и (b) непосредственно рассуждениями, подобными проведенным в п. 179.

11. Если $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ и $x_n \to \infty$, то из сходимости

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

следует сходимость $\sum u_n$, где

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x)\,dx.$$

Если $\varphi(x)$ положительна, то обратное предложение тоже имеет место.

[В общем случае обратное предложение может не иметь места; это видно из примера $\varphi(x) = \cos x$, $x_n = n\pi$.]

186. Распространение на несобственные интегралы правил замены переменного и интегрирования по частям. Правила преобразования определенного интеграла, рассмотренные в п. 166, могут быть распространены и на несобственные интегралы.

(1) **Преобразование подстановкой.** Предположим, что

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

сходится. Предположим, далее, что для любого значения ξ, большего a, мы имеем, как в п. 166[1]):

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx = \int_b^\tau \varphi\{f(t)\}\,f'(t)\,dt, \tag{2}$$

где $a = f(b)$, $\xi = f(\tau)$. Предположим, наконец, что соотношение $x = f(t)$ таково, что $x \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда, устремляя τ, а следовательно, и ξ к бесконечности, мы заключаем из (2), что интеграл

$$\int_b^\infty \varphi\{f(t)\}\,f'(t)\,dt \tag{3}$$

сходится и равен интегралу (1).

[1]) Мы поменяли местами f и φ.

С другой стороны, может случиться, что $\xi \to \infty$, когда $\tau \to -\infty$ или когда $\tau \to c$. В первом случае мы получаем:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \lim_{\tau \to -\infty} \int_b^\tau \varphi\{f(t)\} f'(t)\,dt =$$

$$= -\lim_{\tau \to -\infty} \int_\tau^b \varphi\{f(t)\} f'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^b \varphi\{f(t)\} f'(t)\,dt,$$

а во втором случае

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \lim_{\tau \to c} \int_b^\tau \varphi\{f(t)\} f'(t)\,dt. \tag{4}$$

К этому равенству мы еще вернемся в п. 188.

Соответствующие результаты для интегралов от $-\infty$ до a и от $-\infty$ до ∞ читатель сможет сформулировать сам.

Примеры LXXIV. 1. Показать с помощью подстановки $x = t^\alpha$, что если $s > 1$ и $\alpha > 0$, то

$$\int_1^\infty x^{-s}\,dx = \alpha \int_1^\infty t^{\alpha(1-s)-1}\,dt,$$

и проверить результат непосредственным вычислением каждого интеграла.

2. Если

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится, то он равен либо

$$\alpha \int_{(a-\beta)/\alpha}^\infty \varphi(\alpha t + \beta)\,dt,$$

либо

$$-\alpha \int_{-\infty}^{(a-\beta)/\alpha} \varphi(\alpha t + \beta)\,dt$$

в зависимости от того, положительно α или отрицательно.

3. Если $\varphi(x)$ — положительная и монотонно убывающая функция от x и α и β — любые положительные числа, то из сходимости одного из рядов $\sum \varphi(n)$, $\sum \varphi(\alpha n + \beta)$ следует сходимость другого.

[Подстановка $x = \alpha t + \beta$ сразу показывает, что интегралы

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx, \quad \int_{(a-\beta)/\alpha}^\infty \varphi(\alpha t + \beta)\,dt$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся. Теперь применить интегральный признак.

4. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}.$$

[Положить $x = t^2$.]

5. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1/2}},$$

где n — положительное целое число.

(*Экз.* 1929, 1935 гг.)

[Подстановка $x = \operatorname{ctg} \theta$ приводит к интегралам

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}\theta \, d\theta \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\theta \, d\theta.$$

Теперь применить результат примера LXVI. 10.]

6. Если $\varphi(x) \to h$ при $x \to \infty$ и $\varphi(x) \to k$ при $x \to -\infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x-a) - \varphi(x-b)\}\, dx = -(a-b)(h-k).$$

[Действительно,

$$\int_{-\xi'}^{\xi} \{\varphi(x-a) - \varphi(x-b)\}\, dx = \int_{-\xi'}^{\xi} \varphi(x-a)\, dx - \int_{-\xi'}^{\xi} \varphi(x-b)\, dx =$$

$$= \int_{-\xi'-a}^{\xi-a} \varphi(t)\, dt - \int_{-\xi'-b}^{\xi-b} \varphi(t)\, dt = \int_{-\xi'-a}^{-\xi'-b} \varphi(t)\, dt - \int_{\xi-a}^{\xi-b} \varphi(t)\, dt.$$

Первый из интегралов в правой части может быть представлен в виде

$$(a-b)k + \int_{-\xi'-a}^{-\xi'-b} \rho\, dt,$$

где $\rho \to 0$ при $\xi' \to \infty$ и абсолютная величина последнего интеграла не превосходит $|a-b|\varkappa$, где $\varkappa$ обозначает наибольшее значение ρ в интервале $(-\xi'-a, \; -\xi'-b)$. Следовательно,

$$\int_{-\xi'-a}^{-\xi'-b} \varphi(t)\, dt \to (a-b)k.$$

Аналогично вычисляется предел второго интеграла.]

(2) **Интегрирование по частям.** Формула интегрирования по частям (см. п. 166) имеет вид

$$\int_a^{\xi} f(x)\varphi'(x)\, dx = f(\xi)\varphi(\xi) - f(a)\varphi(a) - \int_a^{\xi} f'(x)\varphi(x)\, dx.$$

Предположим теперь, что $\xi \to \infty$. Тогда если любые два из трех членов этого равенства, зависящих от ξ, стремятся к пределам, то стремится к пределу и третий, и мы получаем соотношение

$$\int_a^\infty f(x)\varphi'(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty} f(\xi)\varphi(\xi) - f(a)\varphi(a) - \int_a^\infty f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Аналогичные формулы имеют, конечно, место и для интегралов от $-\infty$ до ∞.

Примеры LXXV. 1. Показать, что

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Если m и $n-1$ — положительные целые числа и

$$I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(1+x)^{m+n}},$$

то $(m+n-1)I_{m,n} = m\,I_{m-1,n}$. Вывести отсюда, что

$$I_{m,n} = \frac{m!\,(n-2)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Доказать, что

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi.$$

[Полагая $x = t^2$, мы получим:

$$2\int_1^\infty \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = -\int_1^\infty t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt.$$

Дальше интегрировать по частям.]

4. Доказать интегрированием по частям, что если u_n обозначает первый интеграл из примера LXXIV. 5, и $n > 1$, то

$$(2n-2)\,u_n = (2n-3)\,u_{n-1};$$

вычислить отсюда u_n. (*Экз.* 1935 г.)

[Заметить, что

$$u_{n-1} - u_n = \int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\int_0^\infty x\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right\}dx.]$$

187. Другие типы несобственных интегралов. В определении определенного интеграла в гл. VII мы предполагали, что (1) интервал интегрирования конечен и (2) подинтегральная функция непрерывна.

Однако можно распространить понятие „определенного интеграла" на многие случаи, в которых эти условия не выполняются. Например, несобственные интегралы, рассмотренные в предыдущих пунктах, отличаются от определенных интегралов гл. VII тем, что интервал интегрирования бесконечен. Теперь мы предположим, что не выполняется условие (2). Наиболее важным случаем является тот, в котором $\varphi(x)$ непрерывна в интервале интегрирования (a, A), за исключением конечного числа значений x, скажем $x=\xi_1, \xi_2, \ldots$, причем $\varphi(x) \to \infty$ или $\varphi(x) \to -\infty$ при стремлении x справа или слева к каждому из этих значений.

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда интервал (a, A) содержит только *одну* такую точку ξ. Если таких точек более одной, то мы можем разбить интервал (a, A) на конечное число интервалов, каждый из которых содержит только одну такую точку; определив значение интеграла по каждому из этих частичных интервалов, мы можем определить интеграл по всему интервалу как сумму интегралов по частичным интервалам. Далее, мы можем предположить, что точка разрыва ξ совпадает с одним из концов интервала (a, A), так как если ξ лежит между a и A, то мы можем определить

$$\int_a^A \varphi(x)\, dx$$

как

$$\int_a^\xi \varphi(x)\, dx + \int_\xi^A \varphi(x)\, dx,$$

после того, как каждый из этих интегралов определен. Мы можем, таким образом, принять, что $\xi = a$; совершенно очевидно, как нужно изменить наши определения в том случае, когда $\xi = A$.

Предположим, стало быть, что $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, A), за исключением точки $x=a$, причем $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$ справа. Типичным примером такой функции является

$$\varphi(x) = (x-a)^{-s},$$

где $s > 0$; или, в частности, если $a=0$, $\varphi(x) = x^{-s}$. Посмотрим, как можно определить

$$\int_0^A \frac{dx}{x^s}, \tag{1}$$

когда $s > 0$.

Интеграл

$$\int_{1/A}^\infty y^{s-2}\, dy$$

сходится, если $s < 1$ (см. п. 185) и означает

$$\lim_{\eta\to\infty} \int_{1/A}^\eta y^{s-2}\, dy.$$

Но подстановка $y=\frac{1}{x}$ показывает, что

$$\int_{1/A}^{\eta} y^{s-2}\,dy=\int_{1/\eta}^{A} x^{-s}\,dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{1/\eta}^{A} x^{-s}\,dx$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{A} x^{-s}\,dx$$

существует, если $s<1$; значение интеграла (1) естественно определить как значение этого предела. Аналогичные рассмотрения приводят нас к определению

$$\int_{a}^{A} (x-a)^{-s}\,dx$$

с помощью равенства

$$\int_{a}^{A} (x-a)^{-s}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{A} (x-a)^{-s}\,dx.$$

Таким образом, мы приходим к следующему общему определению: *если интеграл*

$$\int_{a+\varepsilon}^{A} \varphi(x)\,dx$$

стремится к пределу l *при* $\varepsilon\to+0$, *то мы будем говорить, что интеграл*

$$\int_{a}^{A} \varphi(x)\,dx$$

сходится и имеет значение l.

Аналогично, если $\varphi(x)\to\infty$ при x стремящемся к верхнему пределу A, то мы определяем

$$\int_{a}^{A} \varphi(x)\,dx$$

как

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{A-\varepsilon} \varphi(x)\,dx,$$

и тогда, как мы уже видели, можно распространить наши определения на тот случай, когда интервал (a, A) содержит любое конечное число точек бесконечности функции $\varphi(x)$.

Интеграл от функции, стремящейся к ∞ или $-\infty$ при стремлений x к некоторому значению или значениям в интервале интегрирования, называется *несобственным интегралом второго рода*; несобственный интеграл *первого рода* — это интеграл по бесконечному интервалу, рассмотренный в п. 184 и сл. Почти все замечания $1^\circ - 7^\circ$ в конце п. 184 применимы и к несобственным интегралам второго рода.

Сформулированные нами определения относились к функциям, стремящимся к бесконечности при частных значениях x, но эти определения применимы и к разрывам других типов. Так, если $f(x) = -1$ для $-1 \leqslant x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ для $0 < x \leqslant 1$,
то

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

означает

$$\lim_{\eta \to +0} \int_{-1}^{-\eta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to +0} (-1 + \eta) + \lim_{\varepsilon \to +0} (1 - \varepsilon) = 0.$$

Определение может быть также применено в том случае, когда $f(x)$ имеет колебательные разрывы, например, когда $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

188. Мы можем теперь записать равенство (4) п. 186 в виде

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{b}^{c} \varphi\{f(t)\}\,f'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Интеграл в правой части определен как предел при $\tau \to c$ соответствующего интеграла по интервалу (b, τ), т. е. как несобственный интеграл второго рода, и если $\varphi\{f(t)\}\,f'(t)$ обращается в бесконечность при $t = c$, то интеграл — существенно несобственный. Допустим, например, что $\varphi(x) = (1 + x)^{-m}$, где $1 < m < 2$, $a = 0$, и что $f(t) = \frac{t}{1-t}$. Тогда $b = 0$, $c = 1$, и (1) превращается в

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^m} = \int_{0}^{1} (1-t)^{m-2}\,dt, \qquad (2)$$

причем интеграл в правой части — несобственный второго рода.

С другой стороны, может случиться, что $\varphi\{f(t)\}\,f'(t)$ непрерывна при $t = c$. В этом случае

$$\int_{b}^{c} \varphi\{f(t)\}\,f'(t)\,dt$$

является обычным интегралом и

$$\lim_{\tau \to c} \int_b^\tau \varphi\{f(t)\} f'(t)\,dt = \int_b^c \varphi\{f(t)\} f'(t)\,dt,$$

по следствию из теоремы (10), п. 165. Подстановка $x = f(t)$ преобразует тогда несобственный интеграл в обычный определенный интеграл. Такой случай имеет место при $m \geqslant 2$ в только что рассмотренном примере.

Примеры LXXVI. 1. Если $\varphi(x)$ непрерывна во всех точках интервала интегрирования, кроме $x = a$, причем $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то для того чтобы

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx$$

был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная K, что

$$\int_{a+\varepsilon}^A \varphi(x)\,dx < K$$

для всех положительных значений ε.

Ясно, что мы можем найти такое число A' между a и A, что $\varphi(x)$ положительна в интервале (a, A'). Если $\varphi(x)$ положительна во всем интервале (a, A), то мы можем в качестве A' взять просто A. Но

$$\int_{a-\varepsilon}^A \varphi(x)\,dx = \int_{a-\varepsilon}^{A'} \varphi(x)\,dx + \int_{A'}^A \varphi(x)\,dx.$$

Первый интеграл в правой части этого равенства возрастает с убыванием ε, и поэтому либо стремится к некоторому пределу, либо неограниченно возрастает; справедливость нашего утверждения теперь очевидна.

Если условие не выполняется, то

$$\int_{a-\varepsilon}^A \varphi(x)\,dx \to \infty.$$

Тогда мы будем говорить, что

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx$$

расходится к ∞. Ясно, что если $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a+0$, то сходимость и расходимость к ∞ являются единственными возможностями для интеграла. Аналогично разбирается случай, в котором $\varphi(x) \to -\infty$.

2. Доказать, что

$$\int_a^A (x-a)^{-s}\,dx = \frac{(A-a)^{1-s}}{1-s},$$

если $s < 1$; интеграл расходится, если $s \geqslant 1$.

3. Если $\varphi(x)$ непрерывна для $a < x \leqslant A$ и

$$0 \leqslant \varphi(x) < K(x-a)^{-s},$$

где $s < 1$, то

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx$$

сходится; если же $\varphi(x) > K(x-a)^{-s}$, где $s \geqslant 1$, то интеграл расходится. [Этот результат является частным случаем общего принципа сравнения, аналогичного принципу, сформулированному в п. 185.]

4. Исследовать на сходимость интегралы

$$\int_a^A \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(A-x)}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{(A-x)\sqrt[3]{x-a}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{(A-x)\sqrt[3]{A-x}},$$

$$\int_a^A \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{\sqrt[3]{A^3-x^3}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{x^2-a^2}, \quad \int_a^A \frac{dx}{A^3-x^3}.$$

5. Интегралы

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad \int_{a-1}^{a+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-a}}$$

сходятся и равны нулю.

6. Интеграл

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

сходится. [Подинтегральная функция стремится к бесконечности при x, стремящемся к каждому из пределов.]

7. Интеграл

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin x)^s}$$

сходится в том и только том случае, когда $s < 1$.

8. Показать, что интеграл

$$\int_0^h \frac{\sin x}{x^p}\,dx,$$

где $h > 0$, сходится, если $p < 2$. Доказать также, что если $0 < p < 2$, то интегралы

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \quad \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \quad \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \ldots$$

имеют чередующиеся знаки и убывают по абсолютной величине.

[Преобразовать интеграл от $k\pi$ до $(k+1)\pi$ с помощью подстановки $x = k\pi + y$.]

9. Показать, что

$$\int_0^h \frac{\sin x}{x^p}\,dx,$$

где $0 < p < 2$, достигает своего наибольшего значения при $h = \pi$.

(*Экз.* 1911 г.)

10. $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x)^l (\sin x)^m\,dx$ сходится в том и только том случае, когда $l > -1$, $m > -1$.

11. Такой интеграл как

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x},$$

где $s < 1$, не подходит ни под одно из наших предыдущих определений, так как интервал интегрирования бесконечен и подинтегральная функция стремится к ∞ при $x \to +0$. Естественно определить этот интеграл как сумму интегралов

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x},$$

в предположении, что оба эти интеграла сходятся.

Первый из этих интегралов сходится, если $s > 0$. Второй сходится, если $s < 1$. Таким образом, интеграл от 0 до ∞ сходится в том и только том случае, когда $0 < s < 1$.

12. Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x^t}\,dx$$

сходится в том и только том случае, когда $0 < s < t$.

13. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1} - x^{t-1}}{1-x}\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда $0 < s < 1$, $0 < t < 1$.

[Следует отметить, что подинтегральная функция не определена при $x = 1$. Но

$$\frac{x^{s-1} - x^{t-1}}{1-x} \to t - s$$

при $x \to 1$ справа и слева, так что подинтегральная функция становится непрерывной функцией от x, если мы припишем ей значение $t - s$ при $x = 1$.

Часто случается, что подинтегральная функция имеет разрыв просто в силу того, что она не определена в некоторой точке интервала интегрирования, причем этот разрыв может быть устранен соответствующим доопределением ее в этой точке. В таких случаях обычно предполагается, что она, таким образом, сделана непрерывной. Так, интегралы

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin mx}{x}\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin mx}{\sin x}\,dx$$

являются обычными определенными интегралами, если подинтегральным функциям приписать при $x=0$ значение m.]

14. **Замена переменного и интегрирование по частям.** Формулы преобразования интегралов подстановкой и интегрированием по частям могут быть, конечно, распространены и на несобственные интегралы второго рода. Читателю рекомендуется самому сформулировать соответствующие общие теоремы (см. п. 186).

15. Доказать интегрированием по частям, что если $s>0$, $t>1$, то

$$\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx = \frac{t-1}{s}\int_0^1 x^s(1-x)^{t-2}\,dx.$$

16. Если $s>0$, то

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \int_1^\infty \frac{t^{-s}}{1+t}\,dt.$$

[Положить $x=\frac{1}{t}$.]

17. Если $0<s<1$, то

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}+x^{-s}}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{t^{-s}}{1+t}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt.$$

18. Если $a+b>0$, то

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}.$$

(*Экз.* 1909 г.)

[Положить $x-b=t^2$.]

19. Если

$$I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx,$$

где $n>0$, то $(2n+1)I_n = 2na^2 I_{n-1}$.

(*Экз.* 1934 г.)

[Заметим, что

$$I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^n \frac{d}{dx}x\,dx = 2n\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{n-1}\,dx = 2n(a^2 I_{n-1}-I_n).$$

Этот результат может быть использован для вычисления I_n, когда n — положительное целое число. Подстановка $x=a\cos\theta$ приводит I_n к интегралу из примера LXVI. 10.]

20. Показать с помощью подстановки $x=\frac{t}{1-t}$, что если l и m оба положительны, то

$$\int_0^\infty \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}}\,dx = \int_0^1 t^{l-1}(1-t)^{m-1}\,dt.$$

21. Показать с помощью подстановки $x=\frac{pt}{p+1-t}$, что если l, m и p положительны, то

$$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\frac{dx}{(x+p)^{l+m}}=\frac{1}{(1+p)^l p^m}\int_0^1 t^{l-1}(1-t)^{m-1}\,dt.$$

22. Доказать, что

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\pi, \qquad \int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\frac{1}{2}\pi(a+b),$$

1° с помощью подстановки $x=a+(b-a)t^2$, 2° с помощью подстановки $\frac{b-x}{x-a}=t$ и 3° с помощью подстановки $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$.

23. Доказать, что если p и q положительны и

$$f(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

то

$$f(p+1, q)+f(p, q+1)=f(p, q), \quad qf(p+1, q)=pf(p, q+1).$$

Выразить $f(p+1, q)$ и $f(p, q+1)$ через $f(p, q)$ и доказать, что

$$f(p, n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n-1)},$$

где n — положительное целое число.

(*Экз.* 1926 г.)

24. Вывести формулы

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2} f(\sin\theta)\,d\theta,$$

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int_0^{\pi/2} f(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)\,d\theta.$$

25. Доказать, что

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(*Экз.* 1930 г.)

26. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)\sqrt{x(1-x)}}=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

(*Экз.* 1912 г.)

[Положить $x=\sin^2\theta$ и применить результат примера LXIII. 7.]

189. Замена переменных иногда требует некоторой осторожности. Допустим, например, что

$$J = \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\, dx.$$

Непосредственным вычислением мы находим, что $J = 48$. Сделаем теперь подстаиовку

$$y = x^2 - 6x + 13,$$

которая дает $x = 3 \pm \sqrt{y-4}$. Так как при $x = 1$, $y = 8$, и при $x = 7$, $y = 20$, мы как будто приходим к результату

$$J = \int_8^{20} y \frac{dx}{dy}\, dy = \pm \frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{y\, dy}{\sqrt{y-4}}.$$

Неопределенный интеграл равен

$$\frac{1}{3}(y-4)^{3/2} + 4(y-4)^{1/2},$$

и мы получаем значения, из которых ни одно не соответствует действительности.

Для того чтобы понять, почему мы получили неправильный результат, рассмотрим внимательнее соотношение между x и y. Функция $y = x^2 - 6x + 13$ имеет минимум при $x = 3$, который равен 4. Когда x возрастает от 1 до 3, y убывает от 8 до 4, и $\frac{dx}{dy}$ отрицательна, так что

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y-4}}.$$

Когда x возрастает от 3 до 7, y возрастает от 4 до 20, и следует взять другой знак. Таким образом,

$$J = \int_1^7 y\, dx = \int_8^4 \left\{-\frac{y}{2\sqrt{y-4}}\right\} dy + \int_4^{20} \frac{y}{2\sqrt{y-4}}\, dy,$$

и легко убедиться в том, что эта формула ведет к правильному результату.

Аналогично, если мы преобразуем интеграл

$$\int_0^\pi dx = \pi$$

с помощью подстановки $x = \arcsin y$, мы должны учесть, что производная $\frac{dx}{dy}$ равна $(1-y^2)^{-1/2}$ или $-(1-y^2)^{-1/2}$, в зависимости от того, будет ли $0 \leqslant x < \frac{1}{2}\pi$ или $\frac{1}{2}\pi < x \leqslant \pi$.

Пример. Проверить результаты преобразования интегралов

$$\int_0^1 \left(4x^2 - x + \frac{1}{16}\right) dx, \qquad \int_0^\pi \cos^2 x\, dx$$

с помощью подстановок $4x^2 - x + \frac{1}{16} = y$ и соответственно $x = \arcsin y$.

190. Ряды, содержащие положительные и отрицательные члены. Наше определение суммы бесконечного ряда и значения несобственного интеграла как первого, так и второго рода, применимы к рядам, члены которых могут иметь любой знак, и к интегралам от функций, меняющих знак в интервале интегрирования. Но те специальные признаки сходимости или расходимости, которые мы установили в первой части настоящей главы, и примеры, которыми мы их иллюстрировали, относились почти исключительно к рядам только с положительными или только с отрицательными членами и к интегралам от функций, не меняющих знака в интервале интегрирования.

При рассмотрении рядов мы всегда предполагали, иногда оговаривая это, а иногда только подразумевая, что любые условия, налагаемые на u_n, могут не выполняться для конечного числа членов; требуется только, чтобы такое условие (например, что члены положительны) выполнялось начиная с некоторого члена. Аналогично в случае несобственного интеграла предполагалось, что условие выполняется для всех значений x, бо́льших некоторого значения x_0, или для всех значений x из некоторого интервала $(a, a+\delta)$, содержащего значение a, вблизи которого подинтегральная функция неограниченно возрастает (или убывает). Так, например, наши признаки применимы к таким рядам, как

$$\sum \frac{n^2-10}{n^4},$$

так как $n^2-10>0$ при $n \geqslant 4$, и к таким интегралам как

$$\int_1^\infty \frac{3x-7}{(x+1)^3}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

так как $3x-7>0$ для $x>\frac{7}{3}$ и $1-2x>0$ для $0<x<\frac{1}{2}$.

Но если перемены знака u_n *продолжаются, как бы велико ни было* n, т. е. если и положительных и отрицательных членов бесконечно много, как, например, в ряде $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, или если $\varphi(x)$ меняет знак неограниченное число раз при $x \to \infty$, как, например, в интеграле

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}\,dx,$$

или при $x \to a$, где a является точкой разрыва $\varphi(x)$, как, например, в интеграле

$$\int_a^A \sin\left(\frac{1}{x-a}\right)\frac{dx}{x-a},$$

то вопрос о сходимости и расходимости становится более сложным. Это объясняется тем, что помимо сходимости и расходимости, мы теперь должны учитывать еще возможность колебания.

191. Абсолютно сходящиеся ряды. Рассмотрим, стало быть, ряд $\sum u_n$, в котором каждый член может быть либо положительным, либо отрицательным.

Положим

$$|u_n| = \alpha_n,$$

так что $\alpha_n = u_n$, если u_n положительно, и $\alpha_n = -u_n$, если u_n отрицательно. Пусть, далее, $v_n = u_n$, если u_n положительно, и $v_n = 0$, если u_n отрицательно, и $w_n = -u_n$, если u_n отрицательно, и $w_n = 0$, если u_n положительно. Другими словами, положим либо $v_n = \alpha_n$, $w_n = 0$, либо $v_n = 0$, $w_n = \alpha_n$ в зависимости от того, положительно ли u_n или отрицательно. Тогда очевидно, что v_n и w_n всегда положительны и что

$$u_n = v_n - w_n, \quad \alpha_n = v_n + w_n.$$

Если, например, мы имеем дело с рядом

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \ldots,$$

то $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ и $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, причем $v_n = \frac{1}{n^2}$ или $v_n = 0$ в зависимости от того, нечетно n или четно, а $w_n = \frac{1}{n^2}$ или $w_n = 0$ — в зависимости от того, четно n или нечетно.

Мы должны теперь различать два случая.

А. Допустим, что ряд $\sum \alpha_n$ сходится. Это, например, имеет место для только что рассмотренного ряда, где

$$\sum \alpha_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots .$$

Тогда оба ряда $\sum v_n$ и $\sum w_n$ сходятся, так как (см. пример XXX. 18) любой ряд, состоящий из части членов сходящегося ряда с положительными членами, сам сходится. Следовательно, по теореме (6) п. 77, $\sum u_n$ или $\sum (v_n - w_n)$ сходится и имеет сумму, равную $\sum v_n - \sum w_n$.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если $\sum \alpha_n$ или $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ называется* **абсолютно сходящимся.**

Мы уже доказали, кроме того, следующее предложение: *если ряд $\sum u_n$ сходится абсолютно, то он сходится и вообще; ряды, составленные по отдельности из его положительных и его отрицательных членов, также сходятся, и сумма самого ряда равна сумме его положительных членов плюс сумма его отрицательных членов.*

Читатель не должен думать, что утверждение „абсолютно сходящийся ряд сходится“ является тавтологией. Когда мы говорим, что $\sum u_n$ „сходится абсолютно“, мы непосредственно *ничего не утверждаем* относительно сходимости $\sum u_n$; мы утверждаем сходимость другого ряда, а именно, $\sum |u_n|$, и совсем не очевидно, что это исключает возможность колебания ряда $\sum u_n$.

Примеры LXXVII. 1. Применить „общий признак сходимости“ (п. 84, теорема 2) к доказательству того, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

[Если $\sum |u_n|$ сходится, то для любого заданного положительного числа δ мы можем найти такое n_0, что

$$|u_{n_1+1}|+|u_{n_1+2}|+\ldots+|u_{n_2}|<\delta$$

если

$$n_2>n_1\geqslant n_0.$$

Тем более

$$|u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\ldots+u_{n_2}|<\delta,$$

и, следовательно, $\sum u_n$ сходится.]

2. Если $\sum a_n$ — сходящийся ряд с положительными членами и $|b_n|\leqslant Ka_n$, то $\sum b_n$ сходится абсолютно.

3. Если $\sum a_n$ — сходящийся ряд с положительными членами, то ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно для каждого значения x, для которого $-1\leqslant x\leqslant 1$.

4. Если $\sum a_n$ — сходящийся ряд с положительными членами, то ряды $\sum a_n \cos n\theta$, $\sum a_n \sin n\theta$ абсолютно сходятся для всех значений θ. [Примерами могут служить ряды

$$\sum r^n \cos n\theta, \quad \sum r^n \sin n\theta$$

из п. 88.]

5. Любой ряд, состоящий из части членов абсолютно сходящегося ряда, сам сходится абсолютно. [Так как ряд из модулей его членов является частью ряда из модулей членов исходного ряда.]

6. Доказать, что если $\sum |u_n|$ сходится, то

$$|\sum u_n|\leqslant \sum |u_n|,$$

и что знак равенства возможен только в том случае, когда все члены имеют один и тот же знак.

192. Обобщение теоремы Дирихле на абсолютно сходящиеся ряды. Теорема Дирихле (см. п. 176) показывает, что члены ряда, если они все положительны, могут быть переставлены любым образом, причем сумма ряда при этом остается неизменной. Легко видеть, что абсолютно сходящиеся ряды обладают тем же свойством. Действительно, пусть $\sum u_n$ в результате некоторой перестановки переходит в $\sum u'_n$, и пусть α'_n, v'_n, w'_n образованы из u'_n так же, как α_n, v_n, w_n образованы из u_n. Тогда $\sum \alpha'_n$ сходится, так как этот ряд является перестановкой ряда $\sum \alpha_n$; сходятся также ряды $\sum v'_n$, $\sum w'_n$, являющиеся перестановками рядов $\sum v_n$, $\sum w_n$. По теореме Дирихле мы имеем: $\sum v'_n=\sum v_n$ и $\sum w'_n=\sum w_n$. Следовательно,

$$\sum u'_n=\sum v'_n-\sum w'_n=\sum v_n-\sum w_n=\sum u_n.$$

193. Условно сходящиеся ряды *). В. Теперь мы должны рассмотреть вторую возможность, заключающуюся в том, что ряд $\sum \alpha_n$, составленный из модулей, расходится к ∞.

---

*) Такие ряды называются также неабсолютно сходящимися. (*Прим. перев.*)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $\sum u_n$ *сходится, но* $\sum |u_n|$ *расходится, то исходный ряд называется* **условно сходящимся.**

В первую очередь, заметим, что если $\sum u_n$ сходится условно, то ряды $\sum v_n$, $\sum w_n$ из п. 191 должны оба расходиться к ∞. Они не могут быть оба сходящимися, так как это повлекло бы за собой сходимость $\sum (v_n + w_n)$ или $\sum a_n$. А если бы один из них, скажем, $\sum w_n$, сходился, а другой, $\sum v_n$, расходился, то из равенства

$$\sum_0^N u_n = \sum_0^N v_n - \sum_0^N w_n \tag{1}$$

при $N \to \infty$ следовало бы, что $\sum u_n$ расходится, что противоречит предположенной сходимости $\sum u_n$.

Следовательно, оба ряда $\sum v_n$ и $\sum w_n$ расходятся. Из предшествующего равенства (1) ясно, что сумма условно сходящегося ряда является пределом разности двух функций, каждая из которых стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Ясно также, что условно сходящийся ряд уже не обладает тем свойством рядов с положительными членами (см. пример XXX. 18) и всех абсолютно сходящихся рядов (см. пример LXXVII. 5), что любой ряд, составленный из части его членов, будет сходящимся. Представляется также весьма вероятным, что условно сходящиеся ряды не обладают свойством, составляющим утверждение теоремы Дирихле; во всяком случае доказательство, приведенное в п. 192, здесь совершенно непригодно, так как оно существенным образом использует сходимость $\sum v_n$ и $\sum w_n$. Вскоре мы увидим, что наше предположение действительно правильно, т. е. что теорема Дирихле не может быть распространена на условно сходящиеся ряды.

194. Признаки сходимости условно сходящихся рядов. Нельзя ожидать, что мы сможем найти столь же простые и общие признаки условной сходимости, как признаки, установленные в п. 173 и сл. Формулировка признаков сходимости оказывается, естественно, более трудной, если сходимость ряда имеет место, как это показывает равенство (1) п. 193, по существу, за счет взаимного сокращения положительных и отрицательных членов ряда. В первую очередь, *не существует признаков условной сходимости, основанных на сравнении рядов.*

В самом деле, допустим, что мы хотим вывести сходимость ряда $\sum v_n$ из сходимости ряда $\sum u_n$. Мы должны сравнивать

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n \text{ и } u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Если бы каждое u и каждое v было положительно и (а) каждое v было меньше соответствующего u, то мы сразу заключили бы, что

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n < u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

т. е. что $\sum v_n$ сходится. Если бы только u были положительны и (b) каждое v *по модулю* было бы меньше соответствующего u, то мы заключили бы, что

$$|v_0|+|v_1|+\ldots+|v_n|<u_0+u_1+\ldots+u_n,$$

т. е. что $\sum v_n$ абсолютно сходится. Но в общем случае, когда и u и v имеют произвольные знаки, мы можем из (b) только заключить, что

$$|v_0|+|v_1|+\ldots+|v_n|<|u_0|+|u_1|+\ldots+|u_n|.$$

Это соотношение дало бы нам возможность заключить абсолютную сходимость $\sum v_n$ из абсолютной сходимости $\sum u_n$; но если известно, что $\sum u_n$ сходится только условно, то мы вообще не можем сделать никакого заключения.

Пример. Дальше мы увидим, что ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ сходится. Но ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ расходится, хотя каждый его член меньше абсолютной величины соответствующего члена первого ряда.

Поэтому вполне естественно, что те признаки, которые мы сможем получить, будут иметь значительно более частный характер, чем признаки, приведенные в первой части настоящей главы.

195. Знакочередующиеся ряды. Простейшими условно сходящимися рядами являются так называемые *знакочередующиеся ряды*, т. е. ряды, члены которых поочередно положительны и отрицательны. Условия сходимости этого весьма важного типа рядов содержатся в следующей теореме.

Если $\varphi(n)$ — положительная функция от n, **монотонно** *стремящаяся к нулю при $n\to\infty$, то ряд*

$$\varphi(0)-\varphi(1)+\varphi(2)-\ldots$$

сходится, и его сумма заключена между $\varphi(0)$ и $\varphi(0)-\varphi(1)$ *).

Будем писать $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ вместо $\varphi(0), \varphi(1), \ldots$ и положим

$$s_n=\varphi_0-\varphi_1+\varphi_2-\ldots+(-1)^n\varphi_n.$$

Тогда

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1}\geqslant 0,\quad s_{2n}-s_{2n-2}=-(\varphi_{2n-1}-\varphi_{2n})\leqslant 0.$$

Следовательно, $s_0, s_2, s_4, \ldots, s_{2n}, \ldots$ образуют убывающую последовательность, которая поэтому стремится либо к некоторому конечному пределу, либо к $-\infty$, а $s_1, s_3, \ldots, s_{2n+1}, \ldots$ образуют возрастающую последовательность, стремящуюся либо к некоторому конечному пределу, либо к ∞. Но

$$\lim(s_{2n+1}-s_{2n})=\lim(-1)^{2n+1}\varphi_{2n+1}=0,$$

*) Эта теорема иногда называется теоремой Лейбница о знакочередующихся рядах. *(Прим. перев.)*

откуда следует, что обе последовательности должны стремиться к конечным пределам и что эти пределы должны быть равны. Это значит, что последовательность

$$s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$$

стремится к конечному пределу. Так как $s_0 = \varphi_0$, $s_1 = \varphi_0 - \varphi_1$, то ясно, что этот предел заключен между φ_0 и $\varphi_0 - \varphi_1$.

Примеры LXXVIII. 1. Ряды

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots,$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+a}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+a}}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{a}}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n} + \sqrt{a})^2},$$

где $a > 0$, сходятся условно.

2. Ряд

$$\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^s},$$

где $a > 0$, сходится абсолютно, если $s > 1$, сходится условно, если $0 < s \leqslant 1$ и колеблется, если $s \leqslant 0$.

3. Сумма ряда из п. 195 заключена между s_n и s_{n+1} для всех значений n. Ошибка, допускаемая при замене суммы всего ряда суммой его первых n членов, по абсолютной величине не превосходит модуля $(n+1)$-го члена, ряда.

4. Рассмотрим ряд

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

который мы предполагаем начинающимся с члена, соответствующего $n = 2$ (во избежание осложнений, связанных с определением первых членов). Этот ряд может быть записан в виде

$$\sum \left[\left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right]$$

или

$$\sum \left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \right\} = \sum (\psi_n - \chi_n).$$

Ряд $\sum \psi_n$ сходится, но ряд $\sum \chi_n$ расходится, так как все его члены положительны и $\lim n\chi_n = 1$. Следовательно, исходный ряд также расходится, хотя он и имеет вид $\varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 - \ldots$, где $\varphi_n \to 0$. Этот пример показывает, что условие *монотонного* стремления φ_n к нулю существенно для справедливости теоремы. Читатель легко проверит, что

$$\sqrt{2n+1} - 1 < \sqrt{2n} + 1,$$

так что это условие в данном случае не выполняется.

5. Если условия теоремы из п. 195 выполняются, за исключением того, что φ_n монотонно стремится к некоторому положительному пределу l, то ряд $\sum (-1)^n \varphi_n$ ограниченно колеблется.

6. Ряд

$$\sum (-1)^n \frac{a(a+1)\ldots(a+n+1)}{b(b+1)\ldots(b+n+1)},$$

где ни a, ни b не равны ии 0, ни отрицательному целому числу, сходится в том и только в том случае, когда $a < b$.

(*Экз.* 1927 г.)

[Обозначим этот ряд через $\sum(-1)^n \varphi_n$ и предположим сначала, что a и b положительны. Если $a \geqslant b$, то $\varphi_{n+1} \geqslant \varphi_n$, и φ_n не стремится к нулю. Если $a < b$, то $\varphi_{n+1} < \varphi_n$, и $\varphi_n \to 0$ (см. п. 183), так что условия теоремы выполнены.

В общем случае мы можем найти такое N, что $a' = a + N$ и $b' = b + N$ оба положительны; тогда φ_n будет отличаться только постоянным множителем от ψ_{n-N}, где

$$\psi_n = \frac{a'(a'+1)\ldots(a'+n+1)}{b'(b'+1)\ldots(b'+n+1)}.\Big]$$

7. Изменение суммы условно сходящегося ряда перестановкой его членов. Пусть s будет сумма ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

и s_{2n} — сумма его первых $2n$ членов, так что $\lim s_{2n} = s$. Переставим ряд следующим образом:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots, \tag{1}$$

где за двумя положительными членами следует один отрицательный. Если через t_{3n} обозначить сумму первых $3n$ членов этого нового ряда, то

$$t_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} =$$
$$= s_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}.$$

Но

$$\lim\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \ldots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right] = 0,$$

так как сумма членов, заключенных в скобки, меньше $\frac{n}{(2n+1)(2n+2)}$; кроме того,

$$\lim\left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2}\lim\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x},$$

по пп. 161 и 164. Следовательно,

$$\lim t_{3n} = s + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x},$$

и, таким образом, сумма ряда (1) равна не s, а правой части последнего равенства. Ниже мы приведем значения сумм обоих рядов (см. п. 220, пример XC. 7, и гл. IX, Разные примеры, 19).

Можно даже доказать, что условно сходящийся ряд может быть так переставлен, чтобы он сходился к любой заданной сумме или расходился к ∞ или к $-\infty$. По поводу доказательства этого предложения мы отсылаем читателя к книге Бромвича: Bromwich, *Infinite series*, 2nd edition, стр. 74.

8. Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

расходится к ∞.

[Здесь

$$t_{3n}=s_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>s_{2n}+\frac{n}{\sqrt{4n-1}},$$

где $s_{2n}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n}}$, что стремится к пределу при $n\to\infty$.]

196. Признаки сходимости Абеля и Дирихле. Приведем более общий признак, содержащий признак из п. 195 как частный случай.

Признак Дирихле. *Если* φ_n *удовлетворяет тем же условиям, что и в* п. 195, *а* $\sum a_n$ *является любым рядом, который сходится или ограниченно колеблется, то ряд*

$$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\ldots$$

сходится.

Читатель легко проверит тождество

$$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\ldots+a_n\varphi_n=$$
$$=s_0(\varphi_0-\varphi_1)+s_1(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots+s_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)+s_n\varphi_n,$$

где $s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$. Но ряд

$$(\varphi_0-\varphi_1)+(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots$$

сходится, так как сумма его первых n членов равна $\varphi_0-\varphi_n$, а $\lim\varphi_n=0$, причем все его члены положительны. Кроме того, поскольку ряд $\sum a_n$ сходится или ограниченно колеблется, мы можем найти такую постоянную K, что $|s_\nu|<K$ для всех значений ν. Следовательно, ряд

$$\sum s_\nu(\varphi_\nu-\varphi_{\nu+1})$$

сходится абсолютно и

$$s_0(\varphi_0-\varphi_1)+s_1(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots+s_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)$$

стремится к конечному пределу при $n\to\infty$. Наконец, φ_n, а значит и $s_n\varphi_n$, стремится к пределу 0; поэтому

$$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\ldots+a_n\varphi_n$$

стремится к конечному пределу, т. е. ряд $\sum a_\nu\varphi_\nu$ сходится.

Признак Абеля. Существует еще один признак, принадлежащий Абелю, который хотя и применяется реже, чем признак Дирихле, но в некоторых случаях оказывается весьма полезным.

Допустим, что φ_n является, как в признаке Дирихле, положительной и убывающей функцией от n, но что ее предел при $n\to\infty$ не есть обязательно нуль. Таким образом, мы предполагаем меньше относительно φ_n, но зато должны предположить больше относительно $\sum a_n$, а именно, что этот ряд *сходится*. Тогда мы имеем следующую теорему: *если* φ_n — *положительная и убывающая функция от* n *и ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $\sum a_n\varphi_n$ *также сходится.*

Пусть $\varphi_n\to l$ при $n\to\infty$, так что $\lim(\varphi_n-l)=0$. Следовательно, по признаку Дирихле, $\sum a_n(\varphi_n-l)$ сходится; а так как $\sum a_n$ сходится, то мы заключаем, что сходится и $\sum a_n\varphi_n$.

Эта теорема может быть сформулирована и следующим образом: *сходящийся ряд остается сходящимся, если мы умножим его члены на соответствующие члены любой положительной убывающей последовательности.*

Примеры LXXIX. 1. Признаки Дирихле и Абеля могут быть доказаны также с помощью общего признака сходимости (см. п. 84.) Предположим, например, что выполняются условия признака Абеля. Мы имеем следующее тождество:

$$a_m\varphi_m + a_{m+1}\varphi_{m+1} + \ldots + a_n\varphi_n = s_{m,m}(\varphi_m - \varphi_{m+1}) + s_{m,m+1}(\varphi_{m+1} - \varphi_{m+2}) + \\ + \ldots + s_{m,n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + s_{m,n}\varphi_n, \qquad (1)$$

где

$$s_{m,\nu} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_\nu.$$

Левая часть тождества (1) заключена поэтому между $h\varphi_m$ и $H\varphi_m$, где h и H обозначают наименьшее и наибольшее из чисел $s_{m,m}, s_{m,m+1}, \ldots, s_{m,n}$. Но для любого данного положительного δ мы можем найти такое m_0, что $|s_{m,\nu}| < \delta$ для $m \geqslant m_0$, и, следовательно,

$$|a_m\varphi_m + a_{m+1}\varphi_{m+1} + \ldots + a_n\varphi_n| < \delta\varphi_m \leqslant \delta\varphi_1,$$

если $n > m \geqslant m_0$. Таким образом, ряд $\sum a_n\varphi_n$ сходится.

2. Ряды $\sum \cos n\theta$ и $\sum \sin n\theta$ ограниченно колеблются, если θ не кратно π. Действительно, если мы обозначим через s_n и t_n суммы первых n членов этих рядов и положим $z = \operatorname{Cis}\theta$, так что $|z| = 1$ и $z \neq 1$, то найдем, что

$$|s_n + it_n| = \left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1 + |z|^n}{|1 - z|} \leqslant \frac{2}{|1 - z|},$$

так что $|s_n|$ и $|t_n|$ не превосходят $\dfrac{2}{|1 - z|}$. То что эти ряды не являются сходящимися, следует из того, что их n-ые члены не стремятся к нулю (см. пример XXIV. 7).

Ряд синусов сходится к нулю, если θ кратно π. Ряд косинусов ограниченно колеблется, если θ — нечетное кратное π, и расходится, если θ — четное кратное π.

Отсюда следует, что *если φ_n — положительная функция от n, которая монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряды*

$$\sum \varphi_n \cos n\theta, \ \sum \varphi_n \sin n\theta$$

сходятся, за исключением, быть может, первого ряда, если θ кратно 2π. В этом случае первый ряд сводится к ряду $\sum \varphi_n$, который может сходиться или расходиться при θ кратном π, второй ряд тождественно обращается в нуль. Если $\sum\varphi_n$ сходится, то оба ряда сходятся абсолютно (см. пример LXXVII. 4) для всех значений θ. Поэтому особенно интересным является тот случай, когда $\sum \varphi_n$ расходится. В этом случае рассматриваемые ряды сходятся условно, а не абсолютно, как будет доказано ниже в примере 6. Если мы положим $\theta = \pi$ в первом из этих рядов, то мы вновь получим результат п. 195, так как $\cos n\pi = (-1)^n$.

3. Ряды $\sum n^{-s}\cos n\theta$, $\sum n^{-s}\sin n\theta$ сходятся, если $s > 0$, за исключением первого ряда в том случае, когда θ кратно 2π и $0 < s \leqslant 1$.

4. Ряды из примера 3 являются в общем случае абсолютно сходящимися при $s > 1$, условно сходящимися при $0 < s \leqslant 1$ и колеблющимися при $s \leqslant 0$ (ограниченно при $s = 0$ и неограниченно при $s < 0$). Указать возможные исключения.

5. Если $\sum a_n n^{-s}$ сходится или ограниченно колеблется, то $\sum a_n n^{-t}$ сходится при $t > s$.

6. Если φ_n является положительной функцией от n, которая монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, и $\sum \varphi_n$ расходится, то ряды $\sum \varphi_n \cos n\theta$, $\sum \varphi_n \sin n\theta$ *не будут абсолютно сходящимися,* за исключением ряда синусов при θ кратном π. [Действительно, предположим, что $\sum \varphi_n |\cos n\theta|$ сходится. Так как $\cos^2 n\theta \leqslant |\cos n\theta|$, то отсюда следует, что

$$\sum \varphi_n \cos^2 n\theta \text{ или } \frac{1}{2}\sum \varphi_n (1+\cos 2n\theta)$$

сходится. Но это невозможно, так как $\sum \varphi_n$ расходится, а $\sum \varphi_n \cos 2n\theta$ сходится, по признаку Дирихле, если θ не кратно π; если же θ кратно π, то расходимость $\sum \varphi_n |\cos n\theta|$ очевидна. Читателю рекомендуется провести соответствующее доказательство для ряда синусов, отметив то место, в котором оно не проходит при θ кратном π.]

197. Ряды с комплексными членами. До сих пор мы ограничивались рассмотрением рядов, все члены которых действительны. Рассмотрим теперь ряд

$$\sum u_n = \sum (v_n + iw_n),$$

где v_n и w_n действительны. Изучение таких рядов не представляет никаких новых трудностей. Ряд $\sum u_n$ сходится в том и только том случае, когда сходится каждый из рядов

$$\sum v_n, \ \sum w_n.$$

Однако один класс таких рядов заслуживает специального рассмотрения. Дадим следующее определение, которое является очевидным обобщением определения из п. 191.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд $\sum u_n$, где $u_n = v_n + iw_n$, называется* **абсолютно сходящимся**, *если абсолютно сходятся ряды $\sum v_n$ и $\sum w_n$.*

ТЕОРЕМА. *Необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости $\sum u_n$ является сходимость $\sum |u_n|$ или*

$$\sum \sqrt{v_n^2 + w_n^2}.$$

Действительно, если $\sum u_n$ сходится абсолютно, то оба ряда $\sum |v_n|$ и $\sum |w_n|$ сходятся, а следовательно, сходится и

$$\sum \left\{ |v_n| + |w_n| \right\}.$$

Но

$$|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \leqslant |v_n| + |w_n|,$$

и, следовательно, $\sum |u_n|$ сходится. С другой стороны,

$$|v_n| \leqslant \sqrt{v_n^2 + w_n^2}, \quad |w_n| \leqslant \sqrt{v_n^2 + w_n^2},$$

так что $\sum |v_n|$ и $\sum |w_n|$ сходятся, если сходится $\sum |u_n|$.

Ясно, что *абсолютно сходящийся ряд является сходящимся*, так как его действительная и мнимая части по отдельности сходятся. Теорема Дирихле (см. пп. 176, 192) может быть также сразу обобщена на абсолютно сходящиеся комплексные ряды, в силу ее справедливости для рядов $\sum v_n$, $\sum w_n$.

Сходимость абсолютно сходящегося ряда можно также вывести непосредственно из общего признака сходимости (ср. пример LXXVII. 1). Это мы оставляем читателю в качестве упражнения.

198. Степенные ряды. Одной из наиболее важных частей теории обычных функций элементарного анализа (таких как синус, косинус, логарифмическая и показательная функции) является их разложение в ряды вида $\sum a_n x^n$. Такой ряд называется *степенным рядом* относительно x. Мы уже встречались с несколькими разложениями в ряды такого вида в связи с рядами Тейлора и Маклорена (см. п. 152). Однако там мы рассматривали только действительное переменное x. Здесь мы рассмотрим некоторые общие свойства степенных рядов относительно z, где z — комплексное переменное.

A. *Степенной ряд $\sum a_n z^n$ может сходиться для всех значений z или только для значений из некоторой области, или ни для одного значения z, кроме $z=0$.*

Достаточно привести по одному примеру для каждого случая.

1. *Ряд $\sum \frac{z^n}{n!}$ сходится для всех значений z.* Действительно, полагая $u_n=\frac{z^n}{n!}$, найдем, что

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|z|}{n+1}\to 0,$$

каково бы ни было значение z. Следовательно, по признаку Даламбера, $\sum|u_n|$ сходится для всех зиачеиий z и исходный ряд абсолютно сходится для всех значений z. Дальше мы увидим, что если степенной ряд сходится, то он будет, *вообще говоря*, абсолютно сходящимся.

2. *Ряд $\sum n! z^n$ не сходится ни для одного значения z, кроме $z=0$.* Это следует из того, что

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=(n+1)|z|,$$

где $u_n=n!z^n$ стремится к ∞ при $n\to\infty$, если только $z\neq 0$. Следовательно (см. примеры XXVII. 1, 2, 5), модуль n-го члена ряда стремится к ∞ при $n\to\infty$. Таким образом, ряд ие может сходиться ни при одном значении z, кроме 0. Ясно также, что любой степенной ряд сходится при $z=0$.

3. *Ряд $\sum z^n$ сходится для всех z, для которых $|z|<1$, и расходится для всех z, для которых $|z|\geqslant 1$.* Это было доказано в п. 88. Таким образом, мы имеем примеры для каждого из трех возможных случаев.

199. B. *Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится для некоторого значения z, скажем $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, то он сходится абсолютно для всех значений z, для которых $|z|<r_1$.*

Действительно, так как $\sum a_n z_1^n$ сходится, то $\lim a_n z_1^n=0$, и, следовательно, мы можем найти такое число K, что $|a_n z_1^n|<K$ для всех значений n. Но если $|z|=r<r_1$, то

$$|a_n z^n|=|a_n z_1^n|\left(\frac{r}{r_1}\right)^n<K\left(\frac{r}{r_1}\right)^n,$$

и утверждение вытекает из сравнения со сходящейся геометрической прогрессией $\sum \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$.

Другими словами, *если ряд сходится в точке P, то он абсолютно сходится во всех точках, расположенных к началу координат ближе, чем P.*

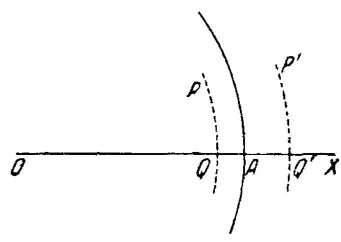
Пример. Показать, что утверждение остается в силе даже в том случае, когда ряд ограниченно колеблется при $z = z_1$. [Если $s_n = a_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_n z_1^n$, то существует такое K, что $|s_n| < K$ для всех значений n. Но

$$|a_n z_1^n| = |s_n - s_{n-1}| \leqslant |s_n| + |s_{n-1}| < 2K,$$

и доказательство заканчивается как в основном случае.]

200. Область сходимости степенного ряда. Круг сходимости. Пусть $z = r$ — любая точка на положительной действительной полуоси. Если степенной ряд сходится при $z = r$, то он сходится абсолютно во всех точках внутри круга $|z| = r$. В частности, он сходится для всех положительных действительных значений z, меньших r.

Разобьем теперь все точки r положительной действительной полуоси на два класса, а именно, на класс значений, при которых ряд сходится, и на класс значений, при которых ряд расходится. Первый из этих классов всегда содержит по крайней мере одну точку $z = 0$. Второй класс может и не существовать, так как ряд может сходиться для всех значений z. Предположим, однако, что этот второй класс существует и что первый класс содержит другие точки, кроме $z = 0$. Тогда ясно, что каждая точка первого класса расположена левее каждой точки второго класса. Следовательно, существует точка, скажем точка $z = R$, которая разделяет эти два класса; сама эта точка может принадлежать к любому из них. *Тогда ряд абсолютно сходится во всех точках внутри круга* $|z| < R$.



Фиг. 47

Допустим, что этот круг пересекает OX в точке A (фиг. 47) и что P — некоторая точка внутри него. Мы можем провести круг с центром в O радиуса, меньшего R, содержащий точку P; пусть этот круг пересекает OX в точке Q. Тогда ряд сходится в точке Q и, следовательно, по теореме B, сходится абсолютно в точке P.

С другой стороны, ряд не может сходиться ни в какой точке P' *вне* круга радиуса R. Ибо если бы он сходился в точке P', то он сходился бы абсолютно во всех точках, расположенных к O ближе, чем P'. Но это невозможно, так как ряд не сходится ни в одной точке между A и Q'.

До сих пор мы исключали случаи, в которых степенной ряд (1) не сходится ни в какой точке положительной действительной полуоси (кроме $z=0$) и (2) всюду абсолютно сходится. Таким образом, мы получаем следующий результат: *степенной ряд может либо*

(1) *сходиться при $z=0$, но не сходиться ни при каком другом значении z, либо*

(2) *сходиться абсолютно для всех значений z, либо*

(3) *сходиться абсолютно для всех значений z внутри некоторого круга радиуса R, но не сходиться ни для какого значения z вне этого круга.*

В случае (3) круг радиуса R называется *кругом сходимости*, а его радиус R — *радиусом сходимости* степенного ряда.

Следует заметить, что этот общий результат не содержит никакого утверждения относительно поведения степенного ряда на круге сходимости. Приведенные ниже примеры показывают, что здесь действительно могут иметь место самые разнообразные случаи.

Примеры LXXX. 1. Ряд $1+az+a^2z^2+\dots$, где $a>0$, имеет радиус сходимости, равный $\frac{1}{a}$. Он не сходится ни в одной точке на круге сходимости, причем он расходится в точке $z=\frac{1}{a}$ и ограниченно колеблется во всех остальных точках окружности.

2. Ряд $\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\dots$ имеет радиус сходимости 1; он сходится абсолютно во всех точках круга сходимости.

3. Вообще, если

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\to\lambda$$

или $|a_n|^{1/n}\to\lambda$ при $n\to\infty$, то ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ имеет радиус сходимости $\frac{1}{\lambda}$. В первом случае

$$\lim\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_nz^n|}=\lambda|z|,$$

что больше или меньше 1 в зависимости от того, будет ли $|z|$ больше или меньше $\frac{1}{\lambda}$, так что мы можем примеиить признак Даламбера (см. п. 175, 6). Во втором случае мы можем аналогично применить признак Коши (см. п. 174, 2).

4. **Логарифмический ряд.** Ряд

$$z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\dots$$

называется *логарифмическим* (обоснование этого читатель узнает ниже). Из результата примера 3 следует, что его радиус сходимости равен 1.

Когда z находится на круге сходимости, мы можем положить $z = \cos\theta + i\sin\theta$, и ряд примет вид

$$\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - \ldots + i\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \ldots\right).$$

Действительная и мнимая части обе сходятся, хотя и неабсолютно, если θ не равно нечетному кратному π (см. примеры LXXIX. 3, 4, в которых θ нужно заменить на $\theta + \pi$). Если θ равно нечетному кратному π, то $z = -1$ и ряд $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots$ расходится к $-\infty$. Таким образом, логарифмический ряд сходится во всех точках круга сходимости, кроме точки $z = -1$.

5. **Биномиальный ряд.** Рассмотрим ряд

$$1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \ldots.$$

Если m — положительное целое число, то ряд обрывается. В общем случае

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|m-n|}{n+1} \to 1,$$

так что его радиус сходимости равен 1. Мы не будем рассматривать здесь вопрос о его сходимости на круге, так как этот вопрос представляет некоторые трудности [1].

201. Однозначность степенного ряда. Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится для некоторых значений z, отличных от $z = 0$, и $f(z)$ обозначает его сумму, то

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + o(z^m)$$

при $z \to 0$ для каждого m. Действительно, если μ — любое положительное число, меньшее радиуса сходимости ряда, то $|a_n|\mu^n < K$, где K не зависит от n (см. п. 199); следовательно, если $|z| < \mu$, то

$$\left|f(z) - \sum_0^m a_\nu z^\nu\right| \leqslant |a_{m+1}||z|^{m+1} + |a_{m+2}||z|^{m+2} + \ldots <$$

$$< K\left(\frac{|z|}{\mu}\right)^{m+1}\left(1 + \frac{|z|}{\mu} + \frac{|z|^2}{\mu^2} + \ldots\right) = \frac{K|z|^{m+1}}{\mu^m(\mu - |z|)},$$

что равно $O(|z|^{m+1})$, и тем более $o(|z|^m)$. В частности, это имеет место и для действительных положительных z.

Из результата примера LVI. 1 теперь следует, что если

$$\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$$

для всех значений z по модулю меньших μ, то $a_n = b_n$ для всех n. *Одна и та же функция не может быть представлена двумя разными степенными рядами.*

---

[1]) Случаи $z = 1$ и $z = -1$ рассмотрены в п. 222. Полное рассмотрение читатель найдет в книгах: Bromwich, *Infinite series*, 2nd edition, стр. 287 и сл., Hobson, *Plane trigonometry*, 5th edition, стр. 268 и сл.

202. Умножение рядов. В п. 177 мы видели, что если $\sum u_n$ и $\sum v_n$ — два сходящихся ряда с положительными членами, то

$$\sum u_n \sum v_n = \sum w_n,$$

где

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0.$$

Мы можем теперь распространить этот результат на все случаи, в которых $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся *абсолютно*. Для этого нужно только заметить, что наше доказательство является простым приложением теоремы Дирихле, которая была уже обобщена нами на все абсолютно сходящиеся ряды.

Примеры LXXXI. 1. Если $|z|$ меньше радиуса сходимости каждого из рядов $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$, то произведение этих двух рядов равно $\sum c_n z^n$, где

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

2. Если радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ равен R и сумма ряда при $|z| < R$ обозначена через $f(z)$, то для всех z, для которых $|z|$ меньше R и меньше 1,

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum s_n z^n,$$

где

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

3. Возведя в квадрат ряд для $\frac{1}{1-z}$, доказать, что

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots,$$

если $|z| < 1$.

4. Аналогично доказать, что $\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + \ldots$, где общим членом является $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)z^n$.

5. **Биномиальная теорема для отрицательного целочисленного показателя.** Если $|z| < 1$ и m — положительное целое число, то

$$\frac{1}{(1-z)^m} = 1 + mz + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} z^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n} z^n + \ldots.$$

[Предположим справедливость теоремы для всех показателей вплоть до m. Тогда, по примеру 2,

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum s_n z^n,$$

где

$$s_n = 1 + m + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

что легко доказывается методом индукции (независимо от того, целочисленно m или нет).]

6. Доказать умножением рядов, что если

$$f(m, z) = 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \ldots$$

и $|z| < 1$, то $f(m, z) f(m', z) = f(m + m', z)$.

[На этом равенстве основывается доказательство Эйлера биномиальной теоремы. Коэффициент при z^n в произведении равен

$$\binom{m'}{n} + \binom{m}{1}\binom{m'}{n-1} + \binom{m}{2}\binom{m'}{n-2} + \ldots + \binom{m}{n-1}\binom{m'}{1} + \binom{m}{n},$$

что является многочленом относительно m и m'. Когда m и m' — положительные целые числа, этот многочлен должен привестись к $\binom{m+m'}{k}$ (в силу биномиальной теоремы для положительного целочисленного показателя). Но если два таких многочлена равны друг другу при всех положительных целочисленных m и m', то они должны быть тождественны.]

7. Если $f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$, то $f(z) f(z') = f(z + z')$.

[Ряд для $f(z)$ абсолютно сходится при всех значениях z; легко видеть, что если

$$u_n = \frac{z_n}{n!}, \quad v_n = \frac{z'^n}{n!},$$

то

$$w_n = \frac{(z + z')^n}{n!}. \ ]$$

8. Если

$$C(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \quad S(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

то

$$C(z + z') = C(z) C(z') - S(z) S(z'), \quad S(z + z') = S(z) C(z') + S(z') C(z)$$

и

$$\{C(z)\}^2 + \{S(z)\}^2 = 1.$$

9. Случай, когда теорема об умножении рядов не имеет места. Эта теорема не всегда имеет место, если $\sum u_n$ и $\sum v_n$ не являются абсолютно сходящимися. В этом можно убедиться, рассматривая ряды, для которых

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Тогда

$$w_n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(r+1)(n+1-r)}}.$$

Но $\sqrt{(r+1)(n+1-r)} \leqslant \frac{1}{2}(n+2)$ и, следовательно,

$$|w_n| > \frac{2n+2}{n+2},$$

что стремится к 2, так что ряд $\sum w_n$ заведомо не сходится.

203. Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы. Для интегралов существует теория, аналогичная развитой для рядов в п. 191 и сл.

Несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Мы можем определить $g(x)$ и $h(x)$ с помощью равенств

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad |f(x)| = g(x) + h(x).$$

Тогда $g(x)$ равна $f(x)$, если $f(x)$ положительна, и равна 0, если $f(x)$ отрицательна, а $h(x)$ равна 0, если $f(x)$ положительна, и равна $f(x)$, если $f(x)$ отрицательна, так что $g(x)$ и $h(x)$ соответствуют v_n и w_n п. 191. Ясно, что $g(x) \geqslant 0$, $h(x) \geqslant 0$ и что $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны, если $f(x)$ непрерывна.

Далее, так же как в пп. 191 и 193, следует, что интегралы

$$\int_a^\infty g(x)\,dx, \quad \int_a^\infty h(x)\,dx$$

оба сходятся, если интеграл (2) сходится, и что они оба расходятся, если (1) сходится, но (2) расходится. Таким образом, *абсолютно сходящийся интеграл является сходящимся.*

Очевидно также, что если $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

сходится, то интеграл (1) сходится абсолютно.

Если (1) сходится, но (2) не сходится, то говорят, что интеграл (1) *сходится условно* *). В настоящей книге мы не будем часто встречаться с условно сходящимися интегралами; однако, имеется один особенно важный тип таких интегралов, который мы сейчас рассмотрим.

Допустим, что $\varphi'(x)$ непрерывна, $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi'(x) \leqslant 0$ и что $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда $|\varphi'(x)| = -\varphi'(x)$ и

$$\int_a^\infty |\varphi'(x)|\,dx = -\int_a^\infty \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{X\to\infty} \int_a^X \varphi'(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \{\varphi(a) - \varphi(X)\} = \varphi(a),$$

так что $\int_a^\infty \varphi'(x)\,dx$ абсолютно сходится.

*) Или неабсолютно. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_a^\infty \varphi(x) \cos tx\, dx, \tag{3}$$

где t предполагается положительным. Имеем:

$$\int_a^X \varphi(x) \cos tx\, dx = \frac{1}{t}\int_a^X \varphi(x) \frac{d}{dx} \sin tx\, dx =$$

$$= \frac{\sin tX}{t}\varphi(X) - \frac{\sin ta}{t}\varphi(a) - \frac{1}{t}\int_a^X \varphi'(x) \sin tx\, dx. \tag{4}$$

Первый член стремится к 0 при $X \to \infty$. Далее, $|\sin tx| \leqslant 1$, так что $|\varphi'(x) \sin tx| \leqslant |\varphi'(x)|$; следовательно,

$$\int_a^\infty \varphi'(x) \sin tx\, dx$$

сходится абсолютно, а значит сходится и вообще, т. е. последний интеграл в равенстве (4) стремится к некоторому пределу при $X \to \infty$. Отсюда следует, что и интеграл в левой части равенства (4) стремится к некоторому пределу, так что интеграл (3) сходится. Аналогично сходится и

$$\int_a^\infty \varphi(x) \sin tx\, dx.$$

Наиболее важным случаем является тот, в котором $a > 0$ и $\varphi(x) = x^{-s}$, где $s > 0$. Соответствующие интегралы сходятся абсолютно, если $s > 1$, и сходятся условно, если $0 < s \leqslant 1$.

Примеры LXXXII. 1. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x^s} dx$$

сходится, если $0 < s < 2$, и абсолютно сходится, если $0 < s < 1$.

[Рассмотреть отдельно интегралы от 0 до 1 и от 1 до ∞.]

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{x^{3/2}} \sin x\, dx$ сходится.

(*Экз.* 1930 г.)

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x^s} dx$ сходится, и притом абсолютно, если $1 < s < 3$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^s} dx$ сходится, если $0 < s < 4$, и абсолютно сходится,

если $1 < s < 4$. (*Экз.* 1934 г.)

5. $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} \sin x^{1-\beta}\, dx$ сходится, если α заключено между β и $2-\beta$.

(*Экз.* 1936 г.)

[Положить $x^{1-\beta}=y$ и рассмотреть по отдельности случаи $\beta<1$ и $\beta>1$.]

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛ. VIII

1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum n^k \{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\},$$

где k — действительное число. (*Экз.* 1890 г.)

2. Показать, что

$$\sum n^r \Delta^k (n^s),$$

где

$$\Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \quad \Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n)$$

и т. д., сходится в тех и только тех случаях, когда $k > r+s+1$ или когда s является положительным целым числом, меньшим k (в этом последнем случае каждый член ряда равен нулю).

[Результат примера 6, Разные примеры к гл. VII, показывает, что в общем случае $\Delta^k(n^s)$ имеет порядок n^{s-k}.]

3. Показать, что

$$\sum_1^\infty \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} = \frac{5}{36}.$$

(*Экз.* 1912 г.)

[Разложить общий член ряда на простейшие дроби.]

4. Если $\sum a_n$ является расходящимся рядом с положительными членами и

$$a_{n-1} > \frac{a_n}{1+a_n}, \quad b_n = \frac{a_n}{1+na_n},$$

то $\sum b_n$ расходится. (*Экз.* 1931 г.)

[Легко проверить, что $b_{n-1} > b_n$. Следовательно, сходимость ряда $\sum b_n$ повлекла бы за собой стремление nb_n к нулю, а значит, и стремление na_n к нулю. Это дало бы $b_n \sim a_n$, что приводит к противоречию.]

5. Показать, что ряд

$$1-\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+z}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+z}+\dots$$

сходится, если z не равно отрицательному целому числу.

6. Исследовать на сходимость или расходимость следующие ряды:

$$\sum \sin\frac{a}{n}, \quad \sum \frac{1}{n}\sin\frac{a}{n}, \quad \sum (-1)^n \sin\frac{a}{n}, \quad \sum\left(1-\cos\frac{a}{n}\right),$$

$$\sum (-1)^n n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right),$$

где a — действительное число.

7. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin(n\theta+\alpha)}{n},$$

где θ и α действительны. (*Экз.* 1899 г.)

8. Доказать, что ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots,$$

в котором следующие друг за другом члены с одинаковым знаком образуют группы в 1, 2, 3, 4, ... члена, сходится, но что соответствующий ряд, в котором группы содержат по 1, 2, 4, 8, ... членов, ограниченно колеблется.

(*Экз.* 1908 г.)

9. Если $u_1, u_2, u_3, \ldots$ образуют убывающую последовательность положительных членов, стремящихся к нулю, то ряды

$$u_1-\frac{1}{2}(u_1+u_2)+\frac{1}{3}(u_1+u_2+u_3)-\ldots,$$

$$u_1-\frac{1}{3}(u_1+u_3)+\frac{1}{5}(u_1+u_3+u_5)-\ldots$$

сходятся.

[Ибо если

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}=v_n,$$

то $v_1, v_2, v_3, \ldots$ также образуют убывающую последовательность с пределом нуль (гл. IV, Разные примеры, 8, 16). Это показывает, что первый ряд сходится. Доказательство сходимости второго ряда предоставляется читателю. В частности, ряды

$$1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\ldots$$

сходятся.]

10. Если $u_0+u_1+u_2+\ldots$ — расходящийся ряд с положительными убывающими членами, то

$$\frac{u_0+u_2+\ldots+u_{2n}}{u_1+u_3+\ldots+u_{2n+1}}\to 1.$$

11. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+0}\alpha\sum_{1}^{\infty}n^{-1-\alpha}=1.$$

[Из п. 180 следует, что

$$0<1^{-1-\alpha}+2^{-1-\alpha}+\ldots+(n-1)^{-1-\alpha}-\int_1^n x^{-1-\alpha}\,dx\leqslant 1,$$

и отсюда легко вывести, что $\sum n^{-1-\alpha}$ заключена между $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{\alpha+1}{\alpha}$.]

12. Найти сумму ряда $\sum_{1}^{\infty} u_n$, где

$$u_n = \frac{x^n - x^{-n-1}}{(x^n + x^{-n})(x^{n+1} + x^{-n-1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x^n + x^{-n}} - \frac{1}{x^{n+1} + x^{-n-1}}\right)$$

для всех действительных значений x, для которых этот ряд сходится.

(*Экз.* 1901 г.)

[Если $|x| \neq 1$, то ряд имеет сумму

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Если $x=1$, то $u_n=0$ и сумма равна 0. Если $x=-1$, то $u_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}$ и ряд ограниченно колеблется.]

13. Просуммировать ряды

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \frac{4z^4}{1+z^4} + \ldots, \quad \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^4}{1-z^8} + \ldots$$

(в которых все показатели являются степенями 2) для тех значений z, для которых они сходятся.

[Первый ряд сходится только для z по модулю меньших 1, и его сумма равна $\frac{z}{1-z}$. Второй ряд сходится к сумме $\frac{z}{1-z}$, если $|z| < 1$, и к сумме $\frac{1}{1-z}$, если $|z| > 1$.]

14. Если $|a_n| \leqslant 1$ для всех значений n, то уравнение

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = 0$$

не может иметь корня, модуль которого был бы меньше $\frac{1}{2}$; единственным случаем, в котором оно может иметь корень по модулю равный $\frac{1}{2}$, является тот, когда $a_n = -\operatorname{Cis}(n\theta)$ [в этом случае корень равен $\frac{1}{2}\operatorname{Cis}(-\theta)$].

15. **Рекуррентные ряды.** Степенной ряд $\sum a_n z^n$ называется *рекуррентным рядом*, если его коэффициенты удовлетворяют соотношению вида

$$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k} = 0, \tag{1}$$

где $n \geqslant k$ и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ не зависят от n. Любой рекуррентный ряд является разложением дробно-рациональной функции от z. Для доказательства заметим, в первую очередь, что такой ряд заведомо сходится для значений z с достаточно малым модулем. Действительно, из (1) следует, что $|a_n| \leqslant G\alpha_n$, где α_n является модулем наибольшего по абсолютной величине из предшествующих коэффициентов, а $G = |p_1| + |p_2| + \ldots + |p_k|$. Отсюда следует, что $|a_n| < KG^n$, где K не зависит от n. Таким образом, рекуррентный ряд во всяком случае сходится для всех значений z по модулю меньших $\frac{1}{G}$.

Но если мы умножим ряд $f(z) = \sum a_n z^n$ на $p_1 z, p_2 z^2, \ldots, p_k z^k$ и сложим результаты, то получим новый ряд, в котором все коэффициенты после $(k-1)$-го обращаются в нуль, в силу соотношения (1). Таким образом,

$$(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_k z^k) f(z) = P_0 + P_1 z + \ldots + P_{k-1} z^{k-1},$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ — постоянные. Многочлен

$$1+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_kz^k$$

называется *производящим многочленом* рекуррентного ряда*).

Из известных результатов, относящихся к разложению дробно-рациональных функций на сумму многочлена и простейших дробей вида $\frac{A}{(z-\alpha)^p}$ и из биномиальной теоремы для отрицательного целочисленного показателя следует, что любая дробно-рациональная функция, знаменатель которой не делится на z, может быть разложена в степенной ряд, сходящийся для всех значений z с достаточно малым модулем, а именно, для $|z|<\rho$, где ρ является наименьшим модулем корней знаменателя (см. гл. IV, Разные примеры, 26 и сл.). Обращая приведенные выше рассуждения, мы видим, что этот ряд будет рекуррентиым. Таким образом, *для того чтобы степенной ряд был рекуррентным, необходимо и достаточно, чтобы он являлся разложением дробно-рациональной функции с знаменателем, не делящимся на z.*

16. **Решение разностных уравнеиий.** Соотношение вида (1) из примера 15 называется *линейным разностным уравнением относительно a_n с постоянными коэффициентами.* Метод решения таких уравнений достаточно разъяснить на примере. Допустим, что мы имеем уравнение

$$a_n-a_{n-1}-8a_{n-2}+12a_{n-3}=0.$$

Рассмотрим рекуррентный степеной ряд $\sum a_nz^n$. Как в примере 15, мы найдем, что его сумма равна

$$\frac{a_0+(a_1-a_0)z+(a_2-a_1-8a_0)z^2}{1-z-8z^2+12z^3}=\frac{A_1}{1-2z}+\frac{A_2}{(1-2z)^2}+\frac{B}{1+3z},$$

где A_1, A_2 и B — величины, легко выражаемые через a_0, a_1 и a_2. Разлагая по отдельности каждую дробь в степенной ряд, мы найдем, что коэффициентом при z^n является

$$a_n=2^n\{A_1+(n+1)A_2\}+(-3)^nB.$$

Значения A_1, A_2, B зависят от первых трех коэффициентов a_0, a_1, a_2, которые, конечно, могут быть выбраны произвольно.

17. Решением разностного уравнения

$$u_n-2\cos\theta u_{n-1}+u_{n-2}=0$$

является $u_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta$, где A и B — произвольные постоянные.

18. Если u_n — многочлен степени k относительно n, то $\sum u_nz^n$ является рекуррентным рядом, производящий многочлен которого равен $(1-z)^{k+1}$.

(*Экз.* 1904 г.)

19. Разложить в степенной ряд по возрастающим степеням z функцию

$$\frac{9}{(z-1)(z+2)^2}.$$

(*Экз.* 1913 г.)

20. При игре в монету игроку засчитывается одно очко, если выпадает орел, и два очка, если выпадает решка. Игра ведется до тех пор, пока счет не превзойдет n. Показать, что вероятность получить в точности n очков равна $\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$.

(*Экз.* 1898 г.)

---

*) The *Scale of relation* of the series.

[Если эту вероятность обозначить через p_n, то

$$p_n = \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n-2});$$

кроме того, $p_0 = 1$, $p_1 = \frac{1}{2}$.]

21. Доказать, что

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \ldots + \frac{1}{a+n} = \binom{n}{1}\frac{1}{a+1} - \binom{n}{2}\frac{1!}{(a+1)(a+2)} + \ldots,$$

где n — положительное целое число и a не равно ни одному из чисел -1, -2, ..., $-n$.

[Это следует из разложения каждого слагаемого в правой части на простейшие дроби. Когда $a > -1$, результат может быть очень легко получен из равенства

$$\int\limits_0^1 x^a \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \int\limits_0^1 (1-x)^a \{1-(1-x)^n\}\frac{dx}{x}$$

разложением $\frac{1-x^n}{1-x}$ и $1-(1-x)^n$ по степеням x и почленным интегрированием. Результат является алгебраическим тождеством, и поэтому должен иметь место для всех значений a, кроме -1, -2, ..., $-n$.]

22. Доказать перемножением рядов, что

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n \cdot n!} = \sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

[Коэффициент при z^n оказывается равным

$$\frac{1}{n!}\left\{\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \ldots\right\}.$$

Далее применить результат примера 21, полагая $a = 0$.]

23. Исследовать, насколько это возможно, имеющимися в нашем распоряжении средствами сходимость ряда

$$\sum \frac{2n!}{n!\,n!} z^n$$

для действительных и комплексных z.

(*Экз.* 1924 г.)

24. Если $A_n \to A$ и $B_n \to B$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{1}{n}(A_1B_n + A_2B_{n-1} + \ldots + A_nB_1) \to AB.$$

[Пусть $A_n = A + \varepsilon_n$. Тогда рассматриваемое выражение примет вид

$$A\frac{B_1 + B_2 + \ldots + B_n}{n} + \frac{\varepsilon_1 B_n + \varepsilon_2 B_{n-1} + \ldots + \varepsilon_n B_1}{n}.$$

Первое слагаемое стремится к AB (см. гл. IV, Разные примеры, 16). Абсолютная величина второго меньше

$$\frac{\beta}{n}(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_n|),$$

где β — любое число, превосходящее наибольшее значение $|B_\nu|$; это выражение стремится к нулю.]

25. Доказать, что если

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$$

и

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \quad C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n,$$

то

$$C_n = a_1B_n + a_2B_{n-1} + \ldots + a_nB_1 = b_1A_n + b_2A_{n-1} + \ldots + b_nA_1$$

и

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = A_1B_n + A_2B_{n-1} + \ldots A_nB_1.$$

Доказать, что если ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходятся и имеют соответственно суммы A и B, так что $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то

$$\frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{n} \to AB.$$

Вывести отсюда, что если $\sum c_n$ сходится, то сумма этого ряда равна AB. Этот результат известен как *теорема Абеля об умножении рядов.* Мы уже видели, что можно умножать ряды указанным образом, если оба ряда абсолютно сходятся; теорема Абеля показывает, что результат остается в силе и в том случае, когда один или оба ряда не являются абсолютно сходящимися, но полученный ряд сходится.

26. Если

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$b_n = a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_na_0, \quad B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n,$$

то 1° $\sum a_n$ сходится к сумме A, 2° $A_n = A + O(n^{-1/2})$, 3° b_n ограниченно колеблется, 4° $B_n = a_0A_n + a_1A_{n-1} + \ldots + a_nA_0$ и 5° B_n ограниченно колеблется.

(*Экз.* 1933 г.)

27. Доказать, что

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \ldots.$$

[Применить результат примера 9 для доказательства сходимости рядов.]

28. Доказать, что если $m > -1$, $p > 0$, $n > 0$ и

$$U_{m,n} = \int_0^1 x^m (1 - x^p)^n dx,$$

то $(m + np + 1)U_{m,n} = np\, U_{m,n-1}$. Вывести, что

$$\int_0^1 x^{-1/4}(1 - x^{1/2})^{5/2}\, dx = \frac{5}{16}\int_0^1 x^{-1/4}(1 - x^{1/2})^{1/2}\, dx,$$

и вычислить эти интегралы подходящей подстановкой.

(*Экз.* 1932 г.)

29. Доказать, что

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3a^4}, \qquad \int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{7}{9}.$$

(*Экз.* 1932 г.)

30. Вывести следующие формулы:

$$\int_0^\infty F\{\sqrt{x^2+1}+x\}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{y^2}\right) F(y)\, dy,$$

$$\int_0^\infty F\{\sqrt{x^2+1}-x\}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+\frac{1}{y^2}\right) F(y)\, dy.$$

В частности, доказать, что если $n>1$, то

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1}+x)^n} = \int_0^\infty (\sqrt{x^2+1}-x)^n\, dx = \frac{n}{n^2-1}.$$

[В этом и последующих примерах предполагается, что рассматриваемые интегралы понимаются в смысле, определенном в п. 184 и сл.]

31. Показать, что если $2y = ax - \frac{b}{x}$, где a и b положительны, то y монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞, когда x возрастает от 0 до ∞. Отсюда вывести, что

$$\int_0^\infty f\left\{\frac{1}{2}\left(ax-\frac{b}{x}\right)\right\} dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^\infty f(y)\left\{1+\frac{y}{\sqrt{y^2+ab}}\right\} dy.$$

Если $f(y)$ — четная функция, то это выражение равно

$$\frac{2}{a}\int_0^\infty f(y)\, dy.$$

32. Показать, что если $2y = ax + \frac{b}{x}$, где a и b положительны, то любому значению y, большему $\sqrt{ab}$, соответствуют два значения x. Обозначая большее из них через x_1, а меньшее — через x_2, показать, что когда y возрастает от $\sqrt{ab}$ до ∞, то x_1 возрастает от $\sqrt{\frac{b}{a}}$ до ∞, а x_2 убывает от $\sqrt{\frac{b}{a}}$ до 0. Отсюда вывести, что

$$\int_{\sqrt{b/a}}^\infty f(y)\, dx_1 = \frac{1}{a}\int_{\sqrt{ab}}^\infty f(y)\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2-ab}}+1\right\} dy,$$

$$\int_0^{\sqrt{b/a}} f(y)\, dx_2 = \frac{1}{a}\int_{\sqrt{ab}}^\infty f(y)\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2-ab}}-1\right\} dy$$

и что

$$\int_0^\infty f\left\{\frac{1}{2}\left(ax+\frac{b}{x}\right)\right\}dx=\frac{2}{a}\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{yf(y)}{\sqrt{y^2-ab}}\,dy=\frac{2}{a}\int_0^\infty f\{\sqrt{z^2+ab}\}\,dz.$$

33. Доказать формулу:

$$\int_0^\pi f\left(\sec\frac{1}{2}x+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int_0^\pi f(\operatorname{cosec} x)\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

34. Если a и b положительны, то

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{2ab(a+b)},\quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{2(a+b)}.$$

Вывести также, что если α, β и γ положительны и $\beta^2 \geqslant \alpha\gamma$, то

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha x^4+2\beta x^2+\gamma}=\frac{\pi}{2\sqrt{2\gamma A}},\quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{\alpha x^4+2\beta x^2+\gamma}=\frac{\pi}{2\sqrt{2\alpha A}},$$

где $A=\beta+\sqrt{\alpha\gamma}$. Вывести последний результат также из формулы примера 31, полагая $f(y)=\dfrac{1}{c^2+y^2}$.

[Последние два результата остаются в силе и при $\beta^2<\alpha\gamma$, но в этом случае их доказательство несколько сложнее.]

35. Доказать, что если b положительно, то

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^2+b^2x^2}=\frac{\pi}{2b},\quad \int_0^\infty \frac{x^4dx}{\{(x^2-a^2)^2+b^2x^2\}^2}=\frac{\pi}{4b^3}.$$

36. Если $\varphi'(x)$ непрерывна для $x>1$, то

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\varphi(n)=[x]\,\varphi(x)-\int_1^x [t]\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.

(*Экз.* 1932 г.)

37. Если $\varphi''(x)=O(x^{-\alpha})$, где $\alpha>1$, для больших x, то

$$\int_n^{n+1}\left\{\varphi(x)-\varphi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}dx=O(n^{-\alpha})$$

и

$$\sum_1^n \varphi\left(m+\frac{1}{2}\right)=\int_1^{n+1}\varphi(x)\,dx+C+O(n^{1-\alpha}),$$

где C не зависит от n.

(*Экз.* 1923 г.)

[Заметить, что

$$\int_{n}^{n+1}\left\{\varphi(x)-\varphi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}dx=$$

$$=\int_{0}^{1/2}\left\{\varphi\left(n+\frac{1}{2}+t\right)+\varphi\left(n+\frac{1}{2}-t\right)-2\varphi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}dt.]$$

38. Если

$$J_m=\int_{0}^{x}\sin^m\theta\sin a(x-\theta)\,d\theta$$

и m — целое число, не меньшее 2, то

$$m(m-1)J_{m-2}=a\sin^m x+(m^2-a^2)J_m.$$

Вывести, что

$$\cos ax=1-\frac{a^2}{2!}\sin^2 x-\frac{a^2(2^2-a^2)}{4!}\sin^4 x-\frac{a^2(2^2-a^2)(4^2-a^2)}{6!}\sin^6 x-\ldots.$$

(*Экз.* 1923 г.)

39. Доказать, что если

$$u_n=\int_{0}^{\pi/2}\sin 2nx\operatorname{ctg}x\,dx,\quad v_n=\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx,$$

то $u_n=\frac{1}{2}\pi$ и

$$v_n\to\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=v,$$

причем (что можно вывести интегрированием по частям или иным путем) $u_n-v_n\to 0$, так что $v=\frac{1}{2}\pi$. (*Экз.* 1924 г.)

40. Если a положительно, $f(x)$ непрерывна, за исключением начала координат,

$$\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{a}f(x)\,dx$$

существует и

$$g(x)=\int_{x}^{a}\frac{f(t)}{t}\,dt,$$

то

$$\int_{0}^{a}g(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

(*Экз.* 1934 г.)

ГЛАВА IX

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

204. Количество существенно различных типов функций, с которыми мы встречались в предыдущих главах, невелико; наиболее важными из них являются многочлены, дробно-рациональные функции, алгебраические функции, явные и неявные, и тригонометрические функции, прямые и обратные.

Постепенное расширение математического познания сопровождалось введением в анализ одного класса функций за другим. Эти новые функции как правило вводились потому, что решение той или иной задачи, которая привлекала к себе внимание математиков, с помощью известных до того времени функций оказывалось невозможным. Этот процесс можно сравнить с введением иррациональных и комплексных чисел, которые впервые были введены в связи с тем, что некоторые алгебраические уравнения не могли быть решены с помощью ранее известных классов чисел. Одним из наиболее богатых источников новых функций явилась задача интегрирования. Делались попытки интегрировать некоторые функции $f(x)$ в терминах уже известных функций. Эти попытки не увенчались успехом, и после ряда таких неудачных попыток возникла идея, что эта задача может быть принципиально неразрешимой. Иногда удавалось доказать, что это действительно так, но как правило строгие доказательства таких фактов находились лишь гораздо позже. Вообще же случалось так, что математики признавали невозможность выражения некоторых интегралов через известные функции, как только они убеждались в неудаче попыток найти такие выражения. Тогда вводилась новая функция $F(x)$, *определяемая* тем свойством, что $F'(x) = f(x)$. Исходя из этого определения исследовались свойства $F(x)$, и оказывалось, что $F(x)$ обладает свойствами, которыми не может обладать никакая конечная комбинация ранее известных функций. Таким образом устанавливалась справедливость первоначального предположения о невозможности требовавшегося выражения этой функции. Один такой случай встретился нам на страницах этой книги, когда в гл. VI мы определили функцию $\ln x$ с помощью равенства

$$\ln x = \int \frac{dx}{x}.$$

Рассмотрим, какие у нас были основания предполагать, что $\ln x$ действительно является новой функцией. Мы уже видели (см. пример XLII. 4), что эта функция не может быть дробно-рациональной, так как производной дробно-рациональной функции всегда является дробно-рациональная функция, знаменатель которой содержит только кратные множители. Вопрос о том, не может ли эта функция быть алгебраической или тригонометрической, более сложен. Но легко убедиться на ряде попыток, что дифференцированием мы никогда не можем освободиться от алгебраических иррациональностей. Например, результатом дифференцирования $\sqrt{1+x}$ любое число раз всегда является произведение $\sqrt{1+x}$ на дробно-рациональную функцию, и аналогичное положение имеет место во всех случаях. Если же мы дифференцируем функцию, содержащую $\sin x$ или $\cos x$, то одна из этих функций всегда остается в результате.

Таким образом, хотя мы и не получаем строгого доказательства того, что $\ln x$ является новой функцией (мы на это и не претендуем[1]), но мы имеем разумные основания быть в этом уверенными. Поэтому будем рассматривать ее именно как таковую, и найдем, что ее свойства сильно отличаются от свойств любой функции, с которой мы встречались до сих пор.

205. Определение $\ln x$. Мы определяем $\ln x$, логарифм натуральный от x[*], равенством

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Мы должны предположить, что x положительно, так как (см. пример LXXVI. 2) интеграл теряет смысл, если интервал интегрирования содержит точку $x=0$. В качестве нижнего предела мы могли бы выбрать число, отличное от 1; но 1 является наиболее удобным нижним пределом. При таком определении $\ln 1 = 0$.

Рассмотрим теперь, как ведет себя $\ln x$, когда x изменяется от 0 до ∞. Из определения сразу следует, что $\ln x$ является непрерывной функцией от x, монотонно возрастающей при возрастании x и имеющей производную

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x};$$

из п. 181 следует, что $\ln x$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$.

Если x положительно, но меньше 1, то $\ln x$ отрицателен. Действительно,

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t} < 0.$$

[1] Такое доказательство читатель найдет в книге автора, цитированной на стр. 248.

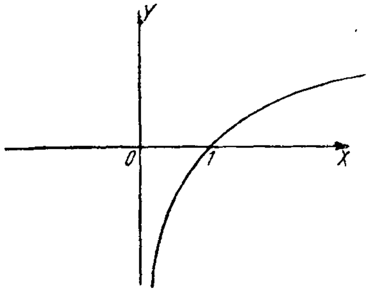
[*] Автор называет эту функцию просто логарифмом от x и обозначает ее через $\log x$. Ниже в тексте вводятся „обыкновенные“ логарифмы, и в том числе логарифмы десятичные, которые автор обозначает через $\log_a x$ и $\log_{10} x$; эти последние мы обозначаем через $\lg x$. (*Прим. перев.*)

Более того, если мы в интеграле произведем замену переменного подстановкой $t=\frac{1}{u}$, то найдем, что

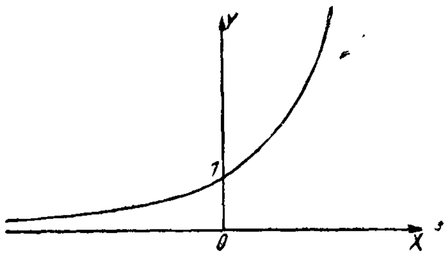
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_1^{1/x} \frac{du}{u} = -\ln\frac{1}{x}.$$

Таким образом, $\ln x$ монотонно стремится к $-\infty$, когда x убывает от 1 до 0.

Общий вид графика логарифмической функции показан на фиг. 48. Так как производная от $\ln x$ равна $\frac{1}{x}$, то наклон кривой очень незначителен при больших x и очень крут при малых x.



Фиг. 48



Фиг. 49

Примеры LXXXIII. 1. Доказать, исходя из определения, что

(a) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0)$, (b) $x < -\ln(1-x) < \frac{x}{1-x} \quad (0<x<1)$.

[Для доказательства (a) заметим, что

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{dt}{t}$$

и что подинтегральная функция заключена между 1 и $\frac{1}{1+x}$.]

2. Доказать неравенства

(1) $x-\frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) \quad (x>0)$,

(2) $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1 \quad (x>1)$,

(3) $4(x-1)-2\ln x < 2x\ln x < x^2-1 \quad (x>1)$,

(4) $0 < \frac{1}{x} - \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{2x^2} \quad (x>0)$,

(5) $$\frac{2}{2x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{2x+1}{2x(x+1)}\quad (x>0).$$

(*Экз.* 1931, 1933, 1936 гг.)

3. Доказать, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

[Применить результат примера 1.]

206. Функциональное уравнение для $\ln x$. *Функция $\ln x$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:*

$$f(xy)=f(x)+f(y). \tag{1}$$

Действительно, подстановка $t=yu$ показывает, что

$$\ln xy=\int_1^{xy}\frac{dt}{t}=\int_{1/y}^{x}\frac{du}{u}=\int_1^x\frac{du}{u}-\int_1^{1/y}\frac{du}{u}=$$

$$=\ln x-\ln\frac{1}{y}=\ln x+\ln y.$$

Примеры LXXXIV. 1. Можно показать, что не существует решения уравнения (1), которое являлось бы дифференцируемой функцией, существенно отличной от $\ln x$. Действительно, если мы продифференцируем функциональное уравнение сначала по x, а потом по y, то получим два уравнения

$$yf'(xy)=f'(x),\quad xf'(xy)=f'(y),$$

исключая из которых $f'(xy)$, найдем, что

$$xf'(x)=yf'(y).$$

Но так как это соотношение должно иметь место для любой пары значений x и y, то должно быть $xf'(x)=C$, или $f'(x)=\frac{C}{x}$, где C — постоянная. Следовательно,

$$f(x)=\int\frac{C}{x}\,dx+C'=C\ln x+C',$$

и подстановка в (1) показывает, что $C'=0$. Таким образом, не существует решения, существенно отличного от $\ln x$, если не считать тривиального решения $f(x)=0$, получающегося при $C=0$.

2. Показать таким же образом, что не существует решения уравнения

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

являющегося дифференцируемой функцией и существенно отличного от $\operatorname{arc\,tg} x$.

3. Доказать, что если $m+1>0$, то $\binom{m}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.

[Если m — целое число, то $u_n=\binom{m}{n}=0$ для $n>m$, и утверждение очевидно. Мы можем поэтому предположить, что $p<m<p+1$, где p — целое число, не меньшее -1. В этом случае

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}=\frac{m-\nu}{\nu+1}$$

отрицательно для $\nu \geqslant p+1$ и меньше единицы по абсолютной величине; следовательно, знаки u_ν чередуются и $|u_\nu|$ монотонно убывает. Кроме того,

$$\ln\frac{|u_{\nu+1}|}{|u_\nu|}=\ln\frac{\nu-m}{\nu+1}=\ln\left(1-\frac{m+1}{\nu+1}\right)<-\frac{m+1}{\nu+1},$$

так что

$$\ln|u_{n+1}|-\ln|u_{p+1}|<-(m+1)\sum_{\nu=p+1}^{n}\frac{1}{\nu+1}\to-\infty$$

при $n\to\infty$. Следовательно, $u_{n+1}\to 0$.

Если $m=-1$, то $u_n=(-1)^n$. Если $m+1<0$, то $|u_n|$ возрастает при возрастании n. Доказать, что $|u_n|\to\infty$.]

207. Характер стремления $\ln x$ к бесконечности при возрастании x. В п. 98 мы определили функции первого, второго третьего,... порядков роста для больших x. Говорят, что функция $f(x)$ имеет порядок роста k, если $\frac{f(x)}{x^k}$ при $x\to\infty$ стремится к пределу, отличному от нуля.

Легко найти целый ряд функций, которые стремятся к бесконечности при $x\to\infty$ все медленнее и медленнее. Таким рядом функций является, например, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$, ... Мы можем, вообще, приписать функции x^α, где α — любое положительное рациональное число, порядок роста α при $x\to\infty$. Мы можем также предположить α как угодно малым, например, меньшим 0,0000001. Можно подумать, что придавая α все возможные значения, мы исчерпаем все возможные порядки роста $f(x)$. Во всяком случае можно было бы предполагать, что как бы медленно $f(x)$ ни стремилась к бесконечности с возрастанием x, мы всегда можем подобрать настолько малое значение α, что x^α будет стремиться к бесконечности еще медленнее; и, аналогично, что как бы быстро $f(x)$ ни стремилось к бесконечности с возрастанием x, всегда можно подобрать настолько большое значение α, что x^α будет стремиться к бесконечности еще быстрее.

Поведение $\ln x$ опровергает все такие предположения. *Логарифм от x стремится к бесконечности при возрастании x, но стремится медленнее, чем любая положительная, целочисленная или рациональная степень x.* Другими словами, $\ln x\to\infty$, но

$$\frac{\ln x}{x^\alpha}\to 0$$

при любом положительном рациональном α.

208. Доказательство того, что $x^{-\alpha}\ln x \to 0$ при $x\to\infty$. Пусть β — любое положительное рациональное число. Тогда, $t^{-1} < t^{\beta-1}$ для $t>1$ и, следовательно,

$$\ln x = \int\limits_1^x \frac{dt}{t} < \int\limits_1^x \frac{dt}{t^{1-\beta}},$$

так что

$$\ln x < \frac{x^\beta - 1}{\beta} < \frac{x^\beta}{\beta}$$

для $x>1$. Если теперь α положительно, то мы можем выбрать меньшее положительное β, и тогда

$$0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{x^{\beta-\alpha}}{\beta}.$$

Но $x^{\beta-\alpha}\to 0$ при $x\to\infty$ (так как $\beta<\alpha$), и поэтому

$$x^{-\alpha}\ln x \to 0.$$

209. Поведение $\ln x$ при $x\to +0$. Так как

$$x^{-\alpha}\ln x = -y^\alpha \ln y,$$

если $x=\frac{1}{y}$, то из теоремы, доказанной в предыдущем пункте, следует, что

$$\lim_{y\to+0} y^\alpha \ln y = -\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}\ln x = 0.$$

Таким образом, $\ln x$ стремится к $-\infty$ и $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ к ∞ при x стремящемся к нулю справа, но $\ln\frac{1}{x}$ стремится к ∞ медленнее, чем любая положительная, целочисленная или рациональная, степень x.

210. Шкалы порядков роста. Логарифмическая шкала. Рассмотрим еще раз ряд функций

$$x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ \ldots,\ \sqrt[n]{x},\ \ldots .$$

Эти функции обладают тем свойством, что если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — любые две из них, то $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, и $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится к нулю или к бесконечности в зависимости от того, расположена ли $f(x)$ справа или слева $\varphi(x)$ в этом ряду. Мы можем теперь продолжить этот ряд, приписывая к нему новые функции справа от уже имеющихся. Начнем с $\ln x$, который стремится к бесконечности медленнее, чем любая из уже написанных функций. Тогда $\sqrt{\ln x}$ стремится к ∞ еще медленнее, чем $\ln x$, $\sqrt[3]{\ln x}$ — еще медленнее чем $\sqrt{\ln x}$ и т. д. Таким образом, мы получаем ряд

$$x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ \ldots,\ \sqrt[n]{x},\ \ldots,\ \ln x,\ \sqrt{\ln x},\ \ldots,\ \sqrt[3]{\ln x},\ \ldots,\ \sqrt[n]{\ln x},\ \ldots,$$

состоящий из двух бесконечных последовательностей, расположенных одна за другой. Мы можем продолжить этот ряд еще дальше, если введем в рассмотрение функцию $\ln\ln x$, логарифм от $\ln x$. Так как $x^{-\alpha}\ln x \to 0$ для всех положительных значений α, то полагая $x = \ln y$, найдем, что

$$(\ln y)^{-\alpha}\ln\ln y = x^{-\alpha}\ln x \to 0.$$

Таким образом, $\ln\ln y$ стремится к ∞ с возрастанием y, но медленнее чем любая степень $\ln y$. Поэтому мы можем продолжить наш ряд следующим образом:

$$x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ldots,\ \ln x,\ \sqrt{\ln x},\ \sqrt[3]{\ln x},\ldots,$$
$$\ln\ln x,\ \sqrt{\ln\ln x},\ \sqrt[3]{\ln\ln x},\ldots,$$

и очевидно, что вводя функции $\ln\ln\ln x$, $\ln\ln\ln\ln x$ и т. д., мы можем продолжить этот ряд как угодно далеко. Полагая $x = \frac{1}{y}$, мы получим аналогичную шкалу порядков роста для функций от y стремящихся к бесконечности при y стремящемся к нулю справа[1]).

Примеры LXXXV. 1. Между любыми двумя членами ряда $f(x)$ и $F(x)$ мы можем вставить новый член $\varphi(x)$ так, что $\varphi(x)$ стремится к ∞ медленнее $f(x)$ и быстрее $F(x)$.

[Так, между $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$ мы можем вставить $x^{5/12}$, между $\sqrt{\ln x}$ и $\sqrt[3]{\ln x}$ мы можем вставить $(\ln x)^{5/12}$. Вообще, $\varphi(x) = \sqrt{f(x)F(x)}$ удовлетворяет требуемым условиям.]

2. Найти функцию, которая стремится к ∞ медленнее чем $\sqrt{x}$, но быстрее чем x^{α}, где α — любое рациональное число меньшее $\frac{1}{2}$.

[Такой функцией является, например, $x^{1/2}(\ln x)^{-\beta}$, где β — любое положительное рациональное число.]

3. Найти функцию, которая стремится к ∞ медленнее чем $\sqrt{x}$, но быстрее чем $\sqrt{x}(\ln x)^{-\alpha}$, где α — любое положительное рациональное число.

[Такой функцией является, например, $\sqrt{x}(\ln\ln x)^{-1}$. Эти примеры показывают, что свойство неполноты присуще логарифмической шкале *).]

4. Как ведет себя функция

$$f(x) = \frac{x^{\alpha}(\ln x)^{\alpha'}(\ln\ln x)^{\alpha''}}{x^{\beta}(\ln x)^{\beta'}(\ln\ln x)^{\beta''}}$$

при стремлении x к ∞?

[Если $\alpha \neq \beta$, то в

$$f(x) = x^{\alpha-\beta}(\ln x)^{\alpha'-\beta'}(\ln\ln x)^{\alpha''-\beta''}$$

доминирует множитель $x^{\alpha-\beta}$. Если $\alpha = \beta$, то степень x исчезает, и в $f(x)$ доминирует множитель $(\ln x)^{\alpha'-\beta'}$, если $\alpha' \neq \beta'$, а если же $\alpha' = \beta'$, то в этом случае доминирует множитель $(\ln\ln x)^{\alpha''-\beta''}$. Таким образом, $f(x) \to \infty$, если $\alpha > \beta$, или если $\alpha = \beta$, $\alpha' > \beta'$, или если $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, $\alpha'' > \beta''$, и $f(x) \to 0$, если $\alpha < \beta$, или если $\alpha = \beta$, $\alpha' < \beta'$, или если $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, $\alpha'' < \beta''$.]

---

[1]) Более полные сведения о „шкалах порядков роста“ читатель найдет в монографии автора, цитированной на стр. 349.

*) Т. е. что неполнота логарифмической шкалы не может быть устранена добавлением какого бы то ни было числа функций. (*Прим. перев.*)

5. Записать функции

$$\frac{x}{\sqrt{\ln x}},\quad \frac{x\sqrt{\ln x}}{\ln\ln x},\quad \frac{x\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}},\quad \frac{x\ln\ln\ln x}{\sqrt{\ln\ln x}}$$

по порядку их роста для больших x.

6. Доказать, что

$$\ln(x+1)=\ln x+O\left(\frac{1}{x}\right),\quad \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\ln\ln\frac{x+1}{x-1}=-\ln x+\ln 2+O\left(\frac{1}{x}\right),\quad \ln(x\ln x)\sim\ln x$$

для больших x.

7. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}(\ln x)^{\alpha}=\frac{\alpha}{x(\ln x)^{1-\alpha}},\quad \frac{d}{dx}(\ln\ln x)^{\alpha}=\frac{\alpha}{x\ln x(\ln\ln x)^{1-\alpha}},\ \ldots,$$

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x,\quad \int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\ln\ln\ln x,\ \ldots\ .$$

8. Доказать, что кривая $y=x^m(\ln x)^n$, где x положительно и m и n — целые числа, бо́льшие 1, имеет по крайней мере две точки распрямления и может иметь большее число таких точек. Набросать вид кривой при нечетном m.

(*Экз.* 1927 г.)

211. Число e. Мы сейчас введем в рассмотрение некоторое число, которое обычно обозначается буквой e и которое принадлежит (как, например, и число π) к основным постоянным анализа.

Мы определяем *e как число, логарифм натуральный которого равен* 1*). Другими словами, e определяется уравнением

$$1=\int_1^e\frac{dt}{t}.$$

Так как $\ln x$ является строго возрастающей функцией от x (см. п. 95), то он может принять значение 1 только один раз. Следовательно, наше определение однозначно.

Так как $\ln xy=\ln x+\ln y$ и, следовательно,

$$\ln x^2=2\ln x,\ \ln x^3=3\ln x,\ \ldots,\ \ln x^n=n\ln x,$$

где n — любое положительное целое число, то

$$\ln e^n=n\ln e=n.$$

Далее, если p и q — любые положительные целые числа и $e^{p/q}$ обозначает положительный корень степени q из e^p, то мы имеем

$$p=\ln e^p=\ln(e^{p/q})^q=q\ln e^{p/q},$$

так что

$$\ln e^{p/q}=\frac{p}{q}.$$

*) Натуральные логарифмы обычно определяются, как логарифмы при основании e. Здесь же число e определяется через натуральный логарифм, причем сам натуральный логарифм был определен через интеграл (см. п. 205). (*Прим. перев.*)

Таким образом, если y имеет любое положительное рациональное значение и e^y обозначает положительную y-ю степень от e, то мы имеем

$$\ln e^y = y \tag{1}$$

и $\ln e^{-y} = -\ln e^y = -y$. Следовательно, равенство (1) справедливо при всех положительных и отрицательных рациональных значениях y. Другими словами, соотношения

$$y = \ln x, \quad x = e^y \tag{2}$$

являются следствиями одно другого, если y рационально, и под e^y понимается его положительное значение. Пока мы не даем никакого определения степени e^y при иррациональных значениях показателя, так что функция e^y определена только для рациональных значений y.

Пример. Доказать, что $2 < e < 3$. [В первую очередь ясно, что

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} < 1,$$

так что $2 < e$. Кроме того,

$$\int_1^3 \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{du}{2-u} + \int_0^1 \frac{du}{2+u} = 4 \int_0^1 \frac{du}{4-u^2} > 1$$

так что $e < 3$.]

212. Показательная функция. Определим теперь *показательную функцию* e^y для всех действительных значений y как функцию, обратную логарифмической. Иначе говоря, мы полагаем

$$x = e^y,$$

если $y = \ln x$.

Мы видели, что когда x изменяется от 0 до ∞, $\ln x$ строго возрастает от $-\infty$ до ∞. Таким образом, каждому положительному значению x соответствует только одно значение y, и наоборот. Кроме того, y является непрерывной функцией от x, и из п. 110 следует, что и x является непрерывной функцией от y.

Легко дать непосредственное доказательство непрерывности показательной функции. Действительно, если $x = e^y$ и $x + \xi = e^{y+\eta}$, то

$$\eta = \int_x^{x+\xi} \frac{dt}{t}.$$

Следовательно, $|\eta|$ больше $\dfrac{\xi}{x+\xi}$, если $\xi > 0$, и больше $\dfrac{|\xi|}{x}$, если $\xi < 0$; поэтому когда η мало, ξ также должно быть мало.

Таким образом, e^y является положительной непрерывной функцией от y, которая монотонно возрастает от 0 до ∞, когда y возрастает от $-\infty$ до ∞. Кроме того, в соответствии с элементарными определениями, e^y является y-ой степенью числа e при рациональных значениях y. В частности, $e^y=1$ при $y=0$. Общий вид графика функции e^y изображен на фиг. 49 (см. стр. 403).

213. Основные свойства показательной функции. (1) Если $x=e^y$, так что $y=\ln x$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}, \quad \frac{dx}{dy}=x=e^y.$$

Таким образом, *производная показательной функции равна самой функции.* Вообще,

$$\frac{d}{dy}e^{ay}=ae^{ay}.$$

(2) *Показательная функция удовлетворяет функциональному уравнению*

$$f(y+z)=f(y)f(z).$$

Для рациональных y и z это следует из обычного правила показателей. Если y или z, или оба они, иррациональны, то мы можем выбрать две последовательности рациональных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ таких, что $\lim y_n=y$ и $\lim z_n=z$. Тогда в силу непрерывности показательной функции мы будем иметь, что

$$e^y\cdot e^z=\lim e^{y_n}\cdot\lim e^{z_n}=\lim e^{y_n+z_n}=e^{y+z}.$$

В частности, $e^y\cdot e^{-y}=e^0=1$, или $e^{-y}=\frac{1}{e^y}$.

Мы можем также вывести это функциональное уравнение из функционального уравнения для $\ln x$. Ибо если $y_1=\ln x_1$, $y_2=\ln x_2$, так что $x_1=e^{y_1}$, $x_2=e^{y_2}$, то $y_1+y_2=\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1x_2$, и

$$e^{y_1+y_2}=e^{\ln x_1x_2}=x_1x_2=e^{y_1}\cdot e^{y_2}.$$

(3) *Функция e^y стремится к бесконечности с возрастанием y быстрее любой степени y, т. е.*

$$\lim\frac{y^\alpha}{e^y}=\lim y^\alpha e^{-y}=0$$

при $y\to\infty$ для всех сколь угодно больших значений α.

Мы видели, что $x^{-\beta}\ln x\to 0$ при $x\to\infty$ при любом положительном α.

Полагая

$$\alpha=\frac{1}{\beta},$$

мы видим, что

$$x^{-1}(\ln x)^\alpha\to 0$$

при любом α. Утверждение доказывается подстановкой $x=e^y$. Ясно также, что $e^{\gamma y}$ стремится к ∞, если $\gamma>0$, и стремится к 0, если $\gamma<0$, причем в обоих случаях быстрее, чем любая степень y.

Из этого результата следует, что мы можем построить „шкалу порядков роста", подобную построенной в п. 210, но простирающуюся в другом направлении, т. е. шкалу функций, которые возрастают к ∞ при $x \to \infty$ все быстрее и быстрее [1]). Этой шкалой является последовательность функций

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ e^x,\ e^{2x},\ \ldots,\ e^{x^2},\ \ldots, e^{x^3},\ \ldots,\ e^{e^x},\ \ldots,$$

где, конечно, под $e^{x^2}, \ldots, e^{e^x}, \ldots$ следует понимать $e^{(x^2)}, \ldots, e^{(e^x)}, \ldots$.

Читателю рекомендуется перенести замечания, сделанные в п. 210 и примерах LXXXV относительно „логарифмической шкалы", на эту „показательную шкалу". Обе шкалы могут быть, конечно, объединены в одну (если изменить порядок в одной из них). Этой шкалой является следующая:

$$\ldots,\ \ln\ln x,\ \ldots,\ \ln x,\ \ldots,\ x,\ \ldots,\ e^x,\ \ldots,\ e^{e^x},\ \ldots.$$

Примеры LXXXVI. 1. Если $D_y x = ax$, то $x = Ke^{ay}$, где K — постоянная.

2. Не существует решения уравнения $f(y+z) = f(y)f(z)$, существенно отличного от показательной функции.

[Мы предполагаем, что $f(y)$ дифференцируема. Тогда, дифференцируя уравнение по y и по z, мы получим:

$$f'(y+z) = f'(y)f(z), \quad f'(y+z) = f(y)f'(z).$$

Отсюда находим, что

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

и, следовательно, каждое из этих отношений постоянно. Таким образом, если $x = f(y)$, то $D_y x = ax$, где a постоянно, и $x = Ke^{ay}$ (см. пример 1).]

3. Доказать, что

$$\frac{e^{ay}-1}{y} \to a$$

при $y \to 0$.

[Применяя теорему о среднем, мы находим, что

$$e^{ay} - 1 = aye^{a\eta},$$

где $0 < |\eta| < |y|$.]

4. Доказать, что $e^x - 1 - x$, $e^{-x} - 1 + x$ и $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (1+x)e^{-x}$ — положительные и монотонно возрастающие функции при $x > 0$.

(*Экз.* 1924 г.)

5. Доказать, что

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^n e^{-\sqrt{x}}) \to 0$$

при $x \to \infty$ для всех целочисленных m и n. (*Экз.* 1936 г.)

214. Общая показательная функция a^x.

Функция a^x была определена только для рациональных значений x, кроме того частного

---

[1]) Показательная функция была введена обращением соотношения $y = \ln x$ в $x = e^y$, и потому мы при рассмотрении ее свойств до сих пор обозначали через y независимую, а через x — зависимую переменную. Мы переходим теперь к более обычному обозначению независимой переменной через x, за исключением тех случаев, когда приходится рассматривать одновременно пару соотношений вида $y = \ln x$, $x = e^y$ или когда для этого имеются некоторые другие особые причины.

случая, когда $a=e$. Рассмотрим теперь тот случай, когда a — любое положительное число. Пусть x является положительным рациональным числом $\frac{p}{q}$. Тогда положительное значение y степени $a^{p/q}$ определяется соотношением $y^q=a^p$. Отсюда следует, что

$$q\ln y=p\ln a, \quad \ln y=\frac{p}{q}\ln a=x\ln a,$$

и, таким образом,

$$y=e^{x\ln a}.$$

Это равенство мы возьмем в качестве *определения* a^x при иррациональном x. Так, например, $10^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln 10}$. Следует заметить, что когда x иррационально, a^x определено только для положительных значений a и само положительно, и что $\ln a^x=x\ln a$. Приведем наиболее важные свойства функции a^x.

(1) Каково бы ни было значение a,

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y} \quad \text{и} \quad (a^x)^y=a^{xy}.$$

Другими словами, правила показателей имеют место как для рациональных, так и для иррациональных значений показателей. В самом деле, мы имеем, во-первых,

$$a^x\cdot a^y=e^{x\ln a}\cdot e^{y\ln a}=e^{(x+y)\ln a}=a^{x+y},$$

и, во-вторых,

$$(a^x)^y=e^{y\ln a^x}=e^{xy\ln a}=a^{xy}.$$

(2) Если $a>1$, то $a^x=e^{x\ln a}=e^{\alpha x}$, где α положительно. График функции a^x в этом случае подобен графику e^x, и a^x при $x\to\infty$ стремится к ∞ быстрее любой степени x.

Если $a<1$, то $a^x=e^{x\ln a}=e^{-\beta x}$, где β положительно. В этом случае график функции a^x подобен зеркальному отображению графика e^x относительно оси y, и a^x стремится при $x\to\infty$ к 0 быстрее любой степени $\frac{1}{x}$.

(3) a^x является дифференцируемой функцией от x и

$$D_xa^x=D_xe^{x\ln a}=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

(4) a^x является дифференцируемой функцией также и от a, причем

$$D_aa^x=D_ae^{x\ln a}=e^{x\ln a}\frac{x}{a}=xa^{x-1}.$$

(5) Из свойства (3) следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

так как левая часть есть значение D_xa^x при $x=0$. Этот результат эквивалентен результату примера LXXXVI. 3.

В предыдущих главах было сформулировано большое число утверждений, относящихся к функции a^x, при том ограничении, что x рационально. Определение и теоремы, приведенные в настоящем пункте, позволяют нам теперь снять это ограничение.

215. Представление e^x в виде предела. В п. 73 гл. IV мы доказали, что функция $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ стремится к некоторому пределу, который мы обозначили через e. Покажем теперь, что этот предел действительно является числом e, рассмотренным в предыдущих пунктах. Мы докажем, однако, более общий результат, а именно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}=e^x. \tag{1}$$

Этот результат чрезвычайно важен, и мы наметим два доказательства.

(1) Так как

$$\frac{d}{dt}\ln(1+xt)=\frac{x}{1+xt},$$

то

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+xh)}{h}=x.$$

Если мы положим $h=\frac{1}{\xi}$, то найдем, что

$$\lim \xi\ln\left(1+\frac{x}{\xi}\right)=x$$

при $\xi\to\infty$ или $\xi\to-\infty$. Из непрерывности показательной функции следует, что

$$\left(1+\frac{x}{\xi}\right)^{\xi}=e^{\xi\ln(1+x/\xi)}\to e^x$$

при $\xi\to\infty$ или $\xi\to-\infty$, т. е. что

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(1+\frac{x}{\xi}\right)^{\xi}=\lim_{\xi\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\xi}\right)^{\xi}=e^x. \tag{2}$$

Если мы предположим, что $\xi\to\infty$ или что $\xi\to-\infty$, пробегая только целочисленные значения, то получим результат, выраженный соотношением (1).

(2) Если n — любое положительное целое число и $x>1$, то мы имеем

$$\int_1^x\frac{dt}{t^{1+1/n}}<\int_1^x\frac{dt}{t}<\int_1^x\frac{dt}{t^{1-1/n}}$$

или

$$n\left(1-x^{-1/n}\right)<\ln x<n\left(x^{1/n}-1\right). \tag{3}$$

Положим $y = \ln x$, $x = e^y$. Тогда из (3) после простых преобразований следует, что

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n < e^y < \left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n} \tag{4}$$

Если $0 < n\xi < 1$, то, по неравенствам (4) п. 74,

$$1-(1-\xi)^n < n\{1-(1-\xi)\} = n\xi$$

и, следовательно,

$$(1-\xi)^{-n} < (1-n\xi)^{-1}. \tag{5}$$

В частности, (5) имеет место, если $\xi = \frac{y^2}{n^2}$ и $n > y^2$. Отсюда мы находим, что

$$\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n} - \left(1+\frac{y}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{y}{n}\right)^n \left\{\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^{-n} - 1\right\} < e^y \left\{\left(1-\frac{y^2}{n}\right)^{-1} - 1\right\} = \frac{y^2 e^y}{n-y^2},$$

а это выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Равенство (1) следует теперь из неравенств (4).

Предоставляем читателю 1° произвести соответствующие изменения в доказательстве для случая $0 < x < 1$ и 2° вывести результат для отрицательных x.

216. Представление $\ln x$ в виде предела. Мы можем также доказать, что

$$\lim n(1-x^{-1/n}) = \lim n(x^{1/n}-1) = \ln x.$$

Действительно,

$$n(x^{1/n}-1) - n(1-x^{-1/n}) = n(x^{1/n}-1)(1-x^{-1/n}),$$

что стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $n(x^{1/n}-1)$ стремится к некоторому конечному пределу (см. п. 75), а $x^{-1/n}$ стремится к 1 (см. пример XXVII. 10). Утверждение следует из неравенств (3) п. 215.

Примеры LXXXVII. 1. Доказать, полагая в неравенствах (4) п. 215 $y = 1$ и $n = 6$, что $2{,}5 < e < 3{,}0$.

2. Если $n\xi_n \to l$ при $n \to \infty$, то

$$(1+\xi_n)^n \to e^l.$$

[Записывая $n \ln(1+\xi_n)$ в виде

$$l\left(\frac{n\xi_n}{l}\right)\frac{\ln(1+\xi_n)}{\xi_n},$$

и применяя результат примера LXXXIII. 3, мы видим, что $n\ln(1+\xi_n) \to l$.]

3. Если $n\xi_n \to \infty$, то $(1+\xi_n)^n \to \infty$, а если $1+\xi_n > 0$ и $n\xi_n \to -\infty$, то $(1+\xi_n)^n \to 0$.

4. Вывести из соотношения (1) п. 215 теорему о том, что e^y стремится к ∞ быстрее любой степени y.

217. Обыкновенные логарифмы. Читатель, вероятно, знаком с понятием логарифма и его применением к вычислениям. Известно, что в элементарной алгебре $\log_a x$ — логарифм x при основании a, определяется уравнениями

$$x = a^y, \quad y = \log_a x.$$

Это определение применимо, конечно, только в том случае, когда y рационально.

Натуральные логарифмы являются, следовательно, логарифмами при основании e. Для вычислений применяются логарифмы при основании 10. Если

$$y = \ln x = \log_e x, \qquad z = \log x = \log_{10} x,$$

то $x = e^y$, а также $x = 10^z = e^{z \ln 10}$, так что

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Легко перейти от одной системы логарифмов к другой, если известно значение $\ln 10$ [1]).

В задачу настоящей книги не входит подробное рассмотрение практических приложений логарифмов. Если читатель незнаком с ними, то он должен обратиться к учебникам алгебры и тригонометрии.

Примеры LXXXVIII. 1. Показать, что

$$D_x e^{ax} \cos bx = re^{ax} \cos(bx + \theta), \quad D_x e^{ax} \sin bx = re^{ax} \sin(bx + \theta),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$. Отсюда вывести выражения для n-ых производных функций $e^{ax} \cos bx$ и $e^{ax} \sin bx$ и, в частности, показать, что

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{ax} \sin bx = (a \sec\theta)^n e^{ax} \sin(bx + n\theta).$$

(*Экз.* 1932 г.)

2. Если y_n есть n-ая производная от $e^{ax} \sin bx$, то

$$y_{n+1} - 2ay_n + (a^2 + b^2) y_{n-1} = 0.$$

(*Экз.* 1932 г.)

3. Если y_n есть n-ая производная от $x^2 e^x$, то

$$y_n = \frac{1}{2} n(n-1) y_2 - n(n-2) y_1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) y.$$

(*Экз.* 1934 г.)

4. Начертить кривую $y = e^{-ax} \sin bx$, где a и b положительны. Показать, что y имеет бесконечно много максимумов, значения которых образуют геометрическую прогрессию и которые лежат на кривой

$$y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-ax}.$$

(*Экз.* 1912, 1935 гг.)

---

[1]) $\ln 10 = 2{,}302\ldots$, обратное значение равно $0{,}434\ldots$.

5. **Интегралы, содержащие показательную функцию.** Доказать, что

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\,e^{ax},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}.$$

[Обозначая эти интегралы через I и J и интегрируя по частям, находим, что

$$aI = e^{ax}\cos bx + bJ, \quad aJ = e^{ax}\sin bx - bI,$$

и решаем эти уравнения относительно I и J.]

6. Доказать, что если $a > 0$, то

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

7. Если

$$I_n = \int e^{ax}x^n dx,$$

то

$$aI_n = e^{ax}x^n - nI_{n-1}.$$

[Интегрировать по частям. Отсюда следует, что I_n можно вычислить для всех положительных целочисленных значений n.]

8. Доказать, что если n — положительное целое число, то

$$\int_0^x e^{-t}t^n dt = n!\,e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}\right)$$

и

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!.$$

(*Экз.* 1935 г.)

9. Доказать, что

$$\int_0^x e^t t^n dt = (-1)^{n-1}\,n!\,e^x\left\{e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\right\},$$

и вывести отсюда, что если $x > 0$, то e^{-x} больше или меньше суммы первых $n+1$ членов ряда $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots$ в зависимости от того, нечетно ли n или четно.

(*Экз.* 1934 г.)

10. Если

$$u_n = \int_0^x e^{-t}t^n dt,$$

то

$$u_n - (n+x)\,u_{n-1} + (n-1)\,xu_{n-2} = 0.$$

(*Экз.* 1930 г.)

11. Выразить

$$I_m = \int_0^\infty x^m e^{-x} \cos x\,dx \quad \text{и} \quad J_m = \int_0^\infty x^m e^{-x} \sin x\,dx$$

через I_{m-1} и J_{m-1} и показать, что

$$I_m - mI_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) I_{m-2} = 0,$$

если m — целое число, большее 1. Определить I_m, полагая в последнем соотношении $I_m = m!\, u_m$.

(*Экз.* 1936 г.).

12. Показать, как можно найти интеграл от любой дробно-рациональной функции от e^x.

[Положить $x = \ln u$; тогда $e^x = u$, $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{u}$, и интеграл преобразуется в интеграл от дробно-рациональной функции от u.]

13. Показать, как можно проинтегрировать любую функцию вида

$$P(x,\ e^{ax},\ e^{bx}, \ldots,\ \cos lx,\ \cos mx, \ldots,\ \sin lx,\ \sin mx, \ldots),$$

где P означает многочлен.

14. Доказать, что

$$\int_a^\infty e^{-\lambda x} R(x)\,dx,$$

где $\lambda > 0$ и a больше наибольшего корня знаменателя $R(x)$, сходится.

[Это следует из того, что $e^{\lambda x}$ стремится к бесконечности быстрее любой степени x.]

15. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2 + \mu x}\,dx$$

где $\lambda > 0$, сходится при любых значениях μ и что то же самое имеет место для

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2 + \mu x} x^n\,dx,$$

где n — любое положительное целое число.

16. Нарисовать графики функций

$$e^{x^2},\ e^{-x^2},\ xe^x,\ xe^{-x},\ xe^{x^2},\ xe^{-x^2},\ x\ln x,$$

найти максимумы и минимумы этих функций и точки распрямления на соответствующих кривых.

17. Показать, что уравнение $e^{ax} = bx$, где a и b положительны, имеет два действительных корня, если $b > ae$, один действительный корень, если $b = ae$, и ни одного действительного корня, если $b < ae$.

[Касательная к кривой $y = e^{ax}$ в точке $(\xi,\ e^{a\xi})$ имеет уравнение

$$y - e^{a\xi} = ae^{a\xi}(x - \xi).$$

Она проходит через начало координат, если $a\xi = 1$, так что прямая $y = aex$ касается кривой в точке $\left(\dfrac{1}{a},\ e\right)$. Утверждение теперь становится очевидным, если мы проведем прямую $y=bx$. Читателю предлагается рассмотреть случаи, когда a или b, или оба они, отрицательны.]

18. Показать, что уравнение $e^x=1+x$ не имеет действительных корней, кроме $x=0$, и что $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2$ имеет три действительных корня.

19. Доказать, что $\frac{x^5}{e^x-1}$ имеет два стационарных значения, одно в начале координат, а другое в точке, для которой x приближенно равно $5(1-e^{-5})$.

(*Экз.* 1932 г.)

20. **Гиперболические функции.** Гиперболические функции $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$[1],... определяются соотношениями

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad \operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),$$

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth}=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{sch}=\frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{csch}=\frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Нарисовать графики этих функций.

21. Вывести формулы

$$\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, \quad \operatorname{sch}^2 x+\operatorname{th}^2 x=1, \quad \operatorname{cth}^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1,$$

$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y.$$

22. Проверить, что эти формулы могут быть выведены из соответствующих формул для $\cos x$ и $\sin x$, если писать $\operatorname{ch} x$ вместо $\cos x$ и $i\operatorname{sh} x$ вместо $\sin x$.

[Отсюда следует, что аналогичный результат имеет место для всех формул, содержащих $\cos nx$ и $\sin nx$, которые могут быть выведены из соответствующих элементарных свойств $\cos x$ и $\sin x$. Причина этой аналогии выяснится в гл. X.]

23. Выразить $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ через (a) $\operatorname{ch} 2x$, (b) $\operatorname{sh} 2x$. Исследовать те случаи, в которых возможны разные знаки.

(*Экз.* 1908 г.)

24. Доказать, что

$$D_x \operatorname{ch} x=\operatorname{sh} x, \quad D_x \operatorname{sh} x=\operatorname{ch} x,$$

$$D_x \operatorname{th} x=\operatorname{sch}^2 x, \quad D_x \operatorname{cth} x=-\operatorname{csch}^2 x,$$

$$D_x \operatorname{sch} x=-\operatorname{sch} x\operatorname{th} x, \quad D_x \operatorname{csch} x=-\operatorname{csch} x\operatorname{cth} x,$$

$$D_x \ln\operatorname{ch} x=\operatorname{th} x, \quad D_x \ln|\operatorname{sh} x|=\operatorname{cth} x,$$

$$D_x \operatorname{arc\,tg} e^x=\frac{1}{2}\operatorname{sch} x, \quad D_x \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|=\operatorname{csch} x.$$

[Все эти формулы могут быть, конечно, преобразованы в формулы интегрального исчисления.]

25. Доказать, что $\operatorname{ch} x\geqslant 1$ и что $-1<\operatorname{th} x<1$.

---

[1]) „Косинус и синус гиперболические"; по поводу объяснения этого наименования см. Hobson, *Trigonometry*, ch. XVI (а также, например, В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, 9-е изд., т. 1, стр. 362. — *Прим. перев.*)

26. Доказать, что если $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, y положительно, и $\cos x \operatorname{ch} y = 1$, то

$$y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x), \quad D_x y = \sec x, \quad D_y x = \operatorname{sch} y.$$

27. **Обратные гиперболические функции.** Положим

$$s = \operatorname{sh} x, \quad t = \operatorname{th} x, \quad c = \operatorname{ch} x,$$

и допустим, что x возрастает, пробегая все действительные значения.

1°. Функция s возрастает монотонно и принимает один раз каждое действительное значение. Уравнение $\operatorname{sh} x = s$ имеет единственное решение

$$x = \ln(s + \sqrt{s^2+1}),$$

которое мы обозначаем через $\operatorname{arsh} s$ *).

2°. Функция t монотонно возрастает с возрастанием x и стремится пределам 1 и -1, когда $x \to \infty$ и $x \to -\infty$. Уравнение $\operatorname{th} x = t$ имеет единственное решение

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t},$$

которое мы обозначаем через $\operatorname{arth} t$.

3°. Функция c — четная и принимает значения, большие 1, если $x \neq 0$. Она монотонно возрастает, когда x положительно, и стремится к ∞ при $x \to \infty$. Уравнение $\operatorname{ch} x = c$ имеет два решения

$$x = \ln(c + \sqrt{c^2-1}), \quad x = \ln(c - \sqrt{c^2-1}),$$

которые равны по абсолютной величине, но обратны по знаку. Первое из этих решений мы обозначаем через $\operatorname{arch} c$; $\operatorname{arch} c = 0$ для $c = 1$.

Таким образом, $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x$ являются однозначными функциями, обратными $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{th} x$, тогда как $\operatorname{arch} x$ является одним из двух значений функции, обратной $\operatorname{ch} x$. Проверить, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arsh} \frac{x}{a}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arch} \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arth} \frac{x}{a},$$

если во второй формуле $a > 0$, $x > a$, а в третьей $-a < x < a$. Эти формулы дают нам возможность записать многие формулы из гл. VI в другом виде.

28. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = 2\ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) \quad (a < b < x),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)}} = -2\ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) \quad (x < a < b),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \quad (a < x < b).$$

---

*) „Арэасинус гиперболический“ s — площадь, синус гиперболический которой равен s (area — площадь). См. цитированное в предыдущей сноске место в курсе В. И. Смирнова. (*Прим. перев.*)

29. Решить уравнение $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$, где $c > 0$, и показать, что оно не имеет действительных корней, если $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, а что в случае $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ оно имеет два, один или ни одного действительного корня в зависимости от того, будут ли $a + b$ и $a - b$ оба положительны или одно из них положительно, а другое отрицательно, или оба отрицательны. Рассмотреть случай, когда $b^2 + c^2 - a^2 = 0$.

30. Решить систему уравнений

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = a, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = b.$$

31. $x^{1/x} \to 1$ при $x \to \infty$.

[Действительно,

$$x^{1/x} = e^{\ln x/x}$$

и $\frac{1}{x} \ln x \to 0$. См. пример XXVII. 11.]

Показать также, что функция $x^{1/x}$ имеет минимум при $x = e$ и нарисовать ее график для положительных значений x.

32. $x^x \to 1$ при $x \to +0$.

33. Если $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ при $n \to \infty$, где $l > 0$, то

$$\sqrt[n]{u_n} \to l.$$

[Так как

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n \to \ln l,$$

то

$$\ln u_n \sim n \ln l.$$

См. гл. IV, Разные примеры, 17.]

34. $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$, когда $n \to \infty$.

[Положить $u_n = n^{-n} n!$ в примере 33.]

35. $\sqrt[n]{\frac{2n!}{n!\,n!}} \to 4$.

36. Исследовать приближенное решение уравнения

$$e^x = x^{1\,000\,000}.$$

[Из общих соображений на графике легко установить, что уравнение имеет два положительных корня, один немного больший 1, а другой весьма большой[1]), и один отрицательный корень, немного больший -1. Грубое определение величины большого положительного корня можно провести так. Если $e^x = x^{1\,000\,000}$, то

$$x = 10^6 \ln x, \quad \ln x \cong 13{,}82 + \ln \ln x, \quad \ln \ln x \cong 2{,}63 + \ln\left(1 + \frac{\ln \ln x}{13{,}82}\right),$$

так как 13,82 и 2,63 являются приближенными значениями $\ln 10^6$ и соответственно $\ln \ln 10^6$. Из этих равенств легко видеть, что отношения $\ln x : 13{,}82$ и $\ln \ln x : 2{,}63$ не на много отличаются от 1 и что

$$x \cong 10^6 (13{,}82 + \ln \ln x) \cong 10^6 (13{,}82 + 2{,}63) = 16\,450\,000$$

[1]) Утверждение „весьма большой" не следует здесь, конечно, понимать в смысле, разъясненном в гл. IV. Оно означает просто „гораздо больший, чем корни уравнений, обычно встречающихся в элементарной математике". Аналогично следует понимать выражение „немного больший".

дает неплохое приближениое значеиие корня, причем ошибку можно грубо оценить в $10^6(\ln\ln x - 2{,}63)$, или в $\frac{10^6 \ln\ln x}{13{,}82}$, или в $\frac{10^6 \cdot 2{,}63}{13{,}82}$, что меньше 200 000. Эти приближения, конечно, весьма грубы, но достаточны для того, чтобы дать представлеиие о порядке величины корня.

Рассмотреть аналогично уравнения

$$e^x = 1\,000\,000\, x^{1\,000\,000}, \quad e^{x^2} = x^{1\,000\,000\,000}.]$$

218. Логарифмические признаки сходимости рядов и интегралов. В гл. VIII (см. пп. 181, 185) мы показали, что

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \quad (a > 0)$$

сходятся, если $s > 1$, и расходятся, если $s \leqslant 1$. Так, $\sum n^{-1}$ расходится, но $\sum n^{-1-\alpha}$ сходится при любом положительном α.

Однако в п. 210 мы видели, что с помощью логарифмической функции можно построить функции, которые стремятся к нулю быстрее чем n^{-1}, но медленнее чем $n^{-1-\alpha}$. Примером такой функции может служить $n^{-1}(\ln n)^{-1}$, и вопрос о сходимости ряда

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

не может быть решен методом сравнения с любым рядом вида $\sum n^{-s}$.

То же самое относится и к таким рядам как

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad \sum \frac{\ln\ln n}{n(\ln n)^2}.$$

Важно найти признаки, которые позволили бы нам определить, сходятся такие ряды или нет. Такие признаки могут быть легко выведены из интегрального признака п. 180.

Действительно, так как

$$D_x(\ln x)^{1-s} = \frac{1-s}{x(\ln x)^s}, \quad D_x \ln\ln x = \frac{1}{x\ln x},$$

то мы имеем

$$\int_a^\xi \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \frac{(\ln\xi)^{1-s} - (\ln a)^{1-s}}{1-s}, \quad \int_a^\xi \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln\xi - \ln\ln a,$$

если $a > 1$. Первый интеграл стремится к пределу

$$\frac{(\ln a)^{1-s}}{s-1}$$

при $\xi \to \infty$, если $s > 1$, и к ∞, если $s < 1$. Второй интеграл стремится к ∞. Следовательно, *бесконечный ряд*

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$$

и несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s},$$

где n_0 *и* a *больше* 1, *сходятся, если* $s > 1$, *и расходятся, если* $s \leqslant 1$.

Отсюда следует, что $\sum \varphi(n)$ сходится, если

$$\varphi(n) = O\left\{\frac{1}{n(\ln n)^s}\right\},$$

где $s > 1$, для достаточно больших n, и расходится, если $\varphi(n) > 0$ и

$$\frac{1}{\varphi(n)} = O(n \ln n).$$

Формулировку соответствующего результата для интегралов мы оставляем читателю.

Примеры LXXXIX. 1. Ряды

$$\sum \frac{(\ln n)^p}{n^{1+s}}, \quad \sum \frac{(\ln n)^p (\ln\ln n)^q}{n^{1+s}}, \quad \sum \frac{(\ln\ln n)^p}{n(\ln n)^{1+s}},$$

где $s > 0$, сходятся для всех значений p и q, а ряды

$$\sum \frac{1}{n^{1-s}(\ln n)^p}, \quad \sum \frac{1}{n^{1-s}(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}, \quad \sum \frac{1}{n(\ln n)^{1-s}(\ln\ln n)^p}$$

расходятся. Действительно, $(\ln n)^p = O(n^\delta)$ при сколь угодно большом p сколь угодно малом положительном δ и $(\ln\ln n)^p = O\{(\ln n)^\delta\}$. Множители, содержащие $\ln n$ и $\ln\ln n$ в первых двух суммах каждой группы, и множитель, содержащий $\ln\ln n$ в третьих суммах каждой группы, не влияют на сходимость ряда.

2. Сходимость или расходимость таких рядов, как

$$\sum \frac{1}{n \ln n \ln\ln n}, \quad \sum \frac{\ln\ln\ln n}{n \ln n \sqrt{\ln\ln n}},$$

не может быть определена с помощью теоремы настоящего пункта, так как в каждом случае функции, стоящие под знаком суммы, стремятся к нулю быстрее чем $n^{-1}(\ln n)^{-1}$, но медленнее чем $n^{-1}(\ln n)^{-1-\alpha}$ при любом положительном α. Исходя из соотношений

$$\frac{d}{dx}(\ln_k x)^{1-s} = \frac{1-s}{x \ln x \ln_2 x \ldots \ln_{k-1} x (\ln_k x)^s},$$

$$\frac{d}{dx}\ln_{k+1} x = \frac{1}{x \ln x \ln_2 x \ldots \ln_{k-1} x \ln_k x},$$

где $\ln_2 x = \ln\ln x$, $\ln_3 x = \ln\ln\ln x, \ldots$, можно доказать следующую теорему *бесконечный ряд*

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln_2 n \ldots \ln_{k-1} n (\ln_k n)^s}$$

и несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln_2 x \ldots \ln_{k-1} x (\ln_k x)^s}$$

сходятся, если $s > 1$, *и расходятся, если* $s \leqslant 1$, *где* n_0 *и* a *обозначают числа настолько большие, что* $\ln_k n$ *и* $\ln_k x$ *положительны при* $n \geqslant n_0$ *или* $x \geqslant a$. Такие значения n_0 и a возрастают очень быстро при возрастании k: так, $\ln x > 0$ для $x > 1$, $\ln_2 x > 0$ для $x > e$, $\ln_3 x > 0$ для $x > e^e$ и т. д., и легко видеть, что $e^e > 10$, $e^{e^e} > e^{10} > 20\,000$, $e^{e^{e^e}} > e^{20\,000} > 10^{8\,000}$.

Читателю следует обратить внимание на ту исключительную быстроту, с которой высшие показательные функции

$$e^{e^x}, \quad e^{e^{e^x}}$$

возрастают с возрастанием x. Это же замечание применимо, конечно, и к таким функциям, как

$$a^{a^x}, \quad a^{a^{a^x}},$$

где a — любое число, большее 1. Подсчитано, что 9^{9^9} имеет примерно 369 693 100 цифр, тогда как $10^{10^{10}}$ имеет, конечно, 10 000 000 001 цифру. Наоборот, скорость возрастания высших логарифмических функций чрезвычайно мала. Так, для того чтобы

$$\ln\ln\ln\ln x > 1,$$

мы должны взять x равным числу, имеющему свыше 8 000 цифр[1]).

Число протонов во вселенной оценивается в 10^{80}, а число возможных шахматных партий — в $10^{10^{50}}$.

3. Доказать, что интеграл

$$\int_0^a \frac{1}{x}\left\{\ln \frac{1}{x}\right\}^s dx,$$

где $0 < a < 1$, сходится, если $s < -1$, и расходится, если $s \geqslant -1$.

[Рассмотреть поведение

$$\int_\varepsilon^a \frac{1}{x}\left\{\ln \frac{1}{x}\right\}^s dx$$

при $\varepsilon \to +0$. Этот результат может быть уточнен введением высших логарифмических множителей.]

---

[1]) См. сноску на стр. 349.

4. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left\{\ln\frac{1}{x}\right\}^s dx$$

расходится для всех значений s.

[Результат последнего примера показывает, что $s < -1$ является необходимым условием сходимости в нижнем пределе; но $\left\{\ln\frac{1}{x}\right\}^s$ стремится к ∞ как $(1-x)^s$ при $x \to 1-0$, если s отрицательно, и, следовательно, интеграл расходится в верхнем пределе, если $s < -1$.]

5. Для сходимости интеграла

$$\int_0^1 x^{a-1}\left\{\ln\frac{1}{x}\right\}^s dx$$

необходимо и достаточно, чтобы $a > 0$ и $s > -1$.

6. Исследовать на сходимость

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{(1+x)^b\{1+(\ln x)^2\}}.$$

(*Экз.* 1934 г.)

Примеры XC. 1. Постоянная Эйлера. Показать, что

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

стремится к некоторому пределу γ при $n \to \infty$, причем $0 < \gamma \leqslant 1$.

[Это сразу следует из п. 180. Значение предела γ равно $0{,}577\ldots$; γ называется *постоянной Эйлера*.]

2. Если a и b положительны, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \ldots + \frac{1}{a+(n-1)b} - \frac{1}{b}\ln(a+nb)$$

стремится к пределу при $n \to \infty$.

3. Если $0 < s < 1$, то

$$\varphi(n) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots + (n-1)^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}.$$

стремится к пределу при $n \to \infty$.

4. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} + \ldots$$

расходится. [Сравнить общий член ряда с $(n\ln n)^{-1}$.]

5. *Случай* $a = 1$ *в* п. 183. Когда $a = 1$ в уравнении (1) п. 183, мы полагаем $u_n = (n\ln n)^{-1}$, причем $\sum u_n$ расходится. Так как

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{1}{\ln n}\left\{\ln n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = 1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно, $\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$ для больших n, и $\sum v_n$ расходится.

6. Доказать, вообще, что если $\sum u_n$ — ряд с положительными членами и

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

то $\sum \frac{u_n}{s_{n-1}}$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится ли или расходится ряд $\sum u_n$.

[Если $\sum u_n$ сходится, то s_{n-1} стремится к положительному пределу l и $\sum \frac{u_n}{s_{n-1}}$ сходится. Если $\sum u_n$ расходится, то $s_{n-1} \to \infty$ и

$$\frac{u_n}{s_{n-1}} > \ln\left(1 + \frac{u_n}{s_{n-1}}\right) = \ln \frac{s_n}{s_{n-1}}$$

(см. пример LXXXIII. 1); теперь очевидно, что

$$\ln \frac{s_2}{s_1} + \ln \frac{s_3}{s_2} + \ldots + \ln \frac{s_n}{s_{n-1}} = \ln \frac{s_n}{s_1}$$

стремится к бесконечности при $n \to \infty$.]

7. Найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots .$$

[Мы имеем:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \ln(2n+1) + \gamma + o(1),$$

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln(n+1) + \gamma + o(1),$$

по результату примера 1, где γ — постоянная Эйлера. Вычитая и устремляя n к ∞, мы видим, что сумма данного ряда равна $\ln 2$. См. также п. 220.]

8. Доказать, что если $C \neq \gamma$, то ряд

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln n - C\right)$$

ограничено колеблется, и что он сходится при $C = \gamma$.

219. Ряды, связанные с показательной и логарифмической функциями. Разложение e^x в ряд Тейлора. Так как все производные показательной функции равны самой функции, то мы имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x},$$

где $0 < \theta < 1$. Но $\frac{x^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$, каково бы ни было значение n (см. пример XXVII. 12); кроме того, $e^{\theta x} < e^x$. Следовательно, устремляя n к ∞, мы получаем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \quad (1)$$

Ряд в правой части этого равенства называется *экспоненциальным рядом*. В частности, мы имеем

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\right)^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{3}$$

Это соотношение называется *экспоненциальной теоремой* *). Мы имеем также

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + (x \ln a) + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \ldots \tag{4}$$

для всех положительных значений a.

Читатель заметит, что экспоненциальный ряд обладает тем свойством, что он остается неизменным при почленном дифференцировании и что ни один другой степенной ряд этим свойством не обладает. Дальнейшие замечания по этому поводу читатель найдет в Приложении II.

Степенной ряд для e^x настолько важен, что его стоит исследовать еще другим методом, не зависящим от теоремы Тейлора. Пусть

$$E_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

и предположим, что $x > 0$. Тогда

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(\frac{x}{n}\right)^n,$$

что меньше $E_n(x)$, если $n > 1$. Если же $n > x$, то, по биномиальной теореме для отрицательного целочисленного показателя, мы находим, что

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots > E_n(x).$$

Таким образом,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < E_n(x) < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Но (см. п. 215) крайние члены этих неравенств стремятся к e^x при $n \to \infty$ и, следовательно, $E_n(x)$ также стремится к e^x. Соотношение (1) доказано, когда x положительно. Что оно справедливо и для отрицательных x, следует из функционального уравнения $f(x)f(y) = f(x+y)$, которому удовлетворяет экспоненциальный ряд (см. пример LXXXI. 7).

Примеры XCI. 1. Показать, что

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

2. Если x положительно, то наибольшим членом экспоненциального ряда является $([x]+1)$-ый, если x не равно целому числу. В этом последнем случае x-ый и $(x+1)$-ый члены равны.

*) В русской литературе этот термин не принят. (*Прим. перев.*)

3. Показать, что

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

[Ибо $\frac{n^n}{n!}$ является одним из членов ряда для e^n.]

4. Доказать, что

$$e^n = \frac{n^n}{n!}(2 + S_1 + S_2),$$

где

$$S_1 = \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{(1+\nu)(1+2\nu)} + \ldots, \quad S_2 = (1-\nu) + (1-\nu)(1-2\nu) + \ldots$$

и $\nu = \frac{1}{n}$. Вывести, что $n!$ заключено между

$$2\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{и} \quad 2(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

5. Применить экспоненциальный ряд к доказательству того, что e^x стремится к бесконечности быстрее любой степени x.

[Использовать неравенство $e^x > \frac{x^n}{n!}$.]

6. Показать, что e иррационально.

[Если бы $e = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, то мы имели бы

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \ldots$$

или, умножая на $q!$,

$$q!\left(\frac{p}{q} - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots,$$

а это равенство содержит противоречие, так как его левая часть является целым числом, а правая часть меньше

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots = \frac{1}{q}.]$$

7. Просуммировать ряд

$$\sum_0^\infty P_r(n)\frac{x^n}{n!},$$

где $P_r(n)$ — многочлен степени r относительно n.

[Мы можем представить $P_r(n)$ в виде

$$A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + \ldots + A_r n(n-1)\ldots(n-r+1),$$

и тогда найдем, что

$$\sum_0^\infty P_r(n)\frac{x^n}{n!} = A_0\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} + A_1\sum_1^\infty \frac{x^n}{(n-1)!} + \ldots + A_r\sum_r^\infty \frac{x^n}{(n-r)!} =$$

$$= (A_0 + A_1 x + \ldots + A_r x^r)e^x.]$$

8. Показать, что

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n = (x + 3x^2 + x^3) e^x, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} x^n = (x + 7x^2 + 6x^3 + x^4) e^x$$

и что если $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, то

$$\sum_{1}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4} (4x + 14x^2 + 8x^3 + x^4) e^x.$$

В частности, при $x = -2$ сумма этого ряда равна 0.

(*Экз.* 1904 г.)

9. Доказать, что

$$\sum \frac{n}{n!} = e, \quad \sum \frac{n^2}{n!} = 2e, \quad \sum \frac{n^3}{n!} = 5e$$

и что $\sum \frac{n^k}{n!}$, где k — любое положительное целое число, равна положительному целому числу, умноженному на e.

10. Доказать, что

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(n-1) x^n}{(n+2)\, n!} = x^{-2} \left\{ (x^2 - 3x + 3) e^x + \frac{1}{2} x^2 - 3 \right\}.$$

[Умножить числитель и знаменатель на $n+1$ и дальше рассуждать, как в примере 7.]

11. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - ae^{-x} - be^{-2x} - ce^{-3x}}{1 - ae^{x} - be^{2x} - ce^{3x}}$$

в следующих трех случаях: 1° $a = 3$, $b = -5$, $c = 4$, 2° $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$, 3° $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$.

(*Экз.* 1923 г.)

12. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x},$$

если a, b, c и d положительны и $c \neq d$.

(*Экз.* 1934 г.)

13. Вывести экспоненциальный ряд из результата примера LXXXVIII. 9.

14. Если

$$X_0 = e^x, \quad X_1 = e^x - 1, \quad X_2 = e^x - 1 - x, \quad X_3 = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}, \ldots,$$

то производная от X_ν равна $X_{\nu-1}$. Вывести, что если $t > 0$, то

$$X_1(t) = \int_0^t X_0 dx < te^t, \quad X_2(t) = \int_0^t X_1 dx < \int_0^t xe^x dx < e^t \int_0^t x\, dx = \frac{t^2}{2!} e^t$$

и, вообще, $X_\nu(t) < \frac{t^\nu}{\nu!} e^t$. Получить отсюда экспоненциальный ряд.

15. Показать, что разложение по степеням p положительного корня уравнения $x^{2+p}=a^2$ начинается с членов

$$a\left\{1-\frac{1}{2}p\ln a+\frac{1}{8}p^2\ln a(2+\ln a)\right\}.$$

(*Экз.* 1909 г.)

220. Логарифмический ряд. Другим очень важным разложением по степеням x является степенной ряд для $\ln(1+x)$. Так как

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

а $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots$, если t по модулю меньше 1, то естественно ожидать[1]), что $\ln(1+x)$ при $-1<x<1$ будет равен ряду, который получается почленным интегрированием ряда

$$1-t+t^2-\ldots$$

в пределах от $t=0$ до $t=x$, т. е. ряду

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots.$$

Это действительно так. В самом деле,

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots+(-1)^{m-1}t^{m-1}+\frac{(-1)^m t^m}{1+t}$$

и, следовательно, если $x>-1$,

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+(-1)^m R_m,$$

где

$$R_m=\int_0^x \frac{t^m}{1+t}\,dt.$$

Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то

$$0\leqslant R_m\leqslant \int_0^x t^m dt=\frac{x^{m+1}}{m+1}\leqslant\frac{1}{m+1}\to 0$$

при $m\to\infty$. Если $-1<x<0$ и $x=-\xi$, так что $0<\xi<1$, то

$$R_m=(-1)^{m-1}\int_0^\xi \frac{u^m}{1-u}\,du$$

---

[1]) Дальнейшие замечания по этому поводу читатель найдет в Приложении II.

и

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{1-\xi}\int_0^{\xi} u^m du = \frac{\xi^{m+1}}{(m+1)(1-\xi)} \to 0,$$

так что и в этом случае $R_m \to 0$. Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots,$$

если $-1 < x \leqslant 1$. Если x лежит вне этих пределов, то ряд расходится. Если $x = 1$, то мы находим, что

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots .$$

Этот результат был уже доказан иным способом (см. пример XC. 7).

221. Ряд для арктангенса. Подобным же образом легко доказать, что

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \ldots)\, dt =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots,$$

если $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Доказательство этого результата даже несколько проще, так как $\operatorname{arc\,tg} x$ является нечетной функцией от x, и вследствие этого достаточно рассматривать положительные значения x. Отличие от предыдущего случая заключается еще и в том, что этот ряд сходится как при $x = 1$, так и при $x = -1$. Проведение доказательства мы оставляем читателю. Значение $\operatorname{arc\,tg} x$, представляемое этим рядом, заключено, конечно, между $-\frac{1}{4}\pi$ и $\frac{1}{4}\pi\,(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ и совпадает с тем, которое, как мы видели в гл. VII (см. пример LXIII. 3), представляется интегралом. Если $x = 1$, то мы получаем формулу

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots .$$

Примеры XCII. 1. Если $-1 \leqslant x < 1$, то

$$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots .$$

2. Если $-1 < x < 1$, то

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots .$$

3. Доказать, что если x положительно, то

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots .$$

(*Экз.* 1911 г.)

4. Вывести ряды для $\ln(1+x)$ и для $\operatorname{arc\,tg} x$ с помощью теоремы Тейлора.

[При исследовании остаточного члена в форме Лагранжа мы встречаемся здесь с затруднением, когда x отрицательно; следует применить форму Коши, а именно,

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}$$

(см. соответствующее исследование для биномиального ряда, п. 152 (2) и п. 168).

В случае второго ряда мы имеем:

$$D_x^n \operatorname{arc\,tg} x = D_x^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{\sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

(см. пример XLV. 15), и оценка остаточного члена проходит без затруднений, так как он по модулю, очевидно, не превосходит $\frac{1}{n}$ [1].]

5. Доказать, что значение $\ln 2$ заключено между суммой первых $2n$ и суммой первых $2n+1$ членов ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$.

(*Экз.* 1930 г.)

6. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}.$$

(*Экз.* 1934 г.)

7. Если $y>0$, то

$$\ln y = 2\left\{\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\ldots\right\}.$$

[Использовать тождество

$$y = \frac{1+\dfrac{y-1}{y+1}}{1-\dfrac{y-1}{y+1}}.$$

Этот ряд может быть применен для вычисления $\ln 2$; для этой цели ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ практически бесполезен в силу чрезвычайной медленности его сходимости. Положить $y=2$ и вычислить $\ln 2$ с точностью до трех знаков.]

8. Вычислить $\ln 10$ с точностью до трех знаков из формулы

$$\ln 10 = 3\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right).$$

9. Доказать, что

$$\ln\frac{x+1}{x} = 2\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\frac{1}{5(2x+1)^5}+\ldots\right\},$$

---

[1] Формула для $D_x^n \operatorname{arc\,tg} x$ теряет смысл при $x=0$, так как $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ тогда не определен. Однако легко видеть (см. пример XLV. 15), что в этом случае под $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ следует понимать $\frac{1}{2}\pi$.

если $x>0$, и что

$$\ln\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}=2\left\{\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5+\ldots\right\},$$

если $x>2$. Если известно, что $\ln 2=0{,}6931471\ldots$ и $\ln 3=1{,}0986123\ldots$, то полагая во второй формуле $x=10$, показать, что $\ln 11=2{,}397895\ldots$.

(*Экз.* 1912 г.)

10. Показать, что если $\ln 2$, $\ln 5$ и $\ln 11$ известны, то формула

$$\ln 13=3\ln 11+\ln 5-9\ln 2$$

дает значение $\ln 13$ с ошибкой примерно равной 0,00015.

(*Экз.* 1910 г.)

11. Показать, что

$$\frac{1}{2}\ln 2=7a+5b+3c,\quad \frac{1}{2}\ln 3=11a+8b+5c,\quad \frac{1}{2}\ln 5=16a+12b+7c,$$

где $a=\operatorname{arth}\frac{1}{31}$, $b=\operatorname{arth}\frac{1}{49}$ и $c=\operatorname{arth}\frac{1}{161}$.

[Эти формулы позволяют очень быстро найти $\ln 2$, $\ln 3$ и $\ln 5$ с любой степенью точности.]

12. Показать, что

$$\frac{1}{4}\pi=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239},$$

и вычислить π с точностью до шести знаков.

13. Разложить $\ln\{1-\ln(1-x)\}$ в степенной ряд до x^2 включительно; вывести соответствующее разложение для $\ln\{1+\ln(1+x)\}$ заменой x на $\frac{x}{1+x}$.

(*Экз.* 1923 г.)

14. Показать, что разложение функции

$$(1+x)^{1+x}$$

по степеням x начинается с членов

$$1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3.$$

(*Экз.* 1910 г.)

15. Показать, что для больших значений x имеет место следующее приближенное равенство

$$\log e-\sqrt{x(x+1)}\log\frac{1+x}{x}\cong\frac{\log e}{24x^2}.$$

Применить эту формулу при $x=10$ для приближенного нахождения $\log e$ и оценить точность результата.

(*Экз.* 1910 г.)

16. Если

$$2x=\ln\frac{y-1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{y-1}{2}\right)^n$$

и $1<y\leqslant 3$, то $y=-\operatorname{cth}x$. Найти аналогичное разложение для $2x$, справедливое при $-3\leqslant y<-1$.

(*Экз.* 1927 г.)

17. Используя логарифмический ряд и равенства

$$\log 2{,}3758 = 0{,}3758099\ldots, \quad \log e = 0{,}4343\ldots,$$

показать, что корень уравнения $x = 100\log x$ приблизительно равен 237,58121.

(*Экз.* 1910 г.)

18. Разложить функции $\ln\cos x$ и $\ln\sin x - \ln x$ в ряды по степеням x до x^4, и проверить, что с точностью до этого порядка

$$\ln\sin x = \ln x - \frac{1}{45}\ln\cos x + \frac{64}{45}\ln\cos\frac{1}{2}x.$$

(*Экз.* 1908 г.)

19. Показать, что

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^4} = x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots,$$

если $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Вывести, что

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}.$$

(*Экз.* 1896 г.)

[Рассуждать, как в п. 221, и использовать результат примера XLVIII. 8. Таким же образом просуммировать ряд $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \ldots$.]

20. Доказать, что если вообще a и b — положительные целые числа, то

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \ldots = \int\limits_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt,$$

так что сумма этого ряда может быть найдена. Вычислить таким образом суммы рядов $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \ldots$ и $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \ldots$.

222. Биномиальный ряд. Мы уже исследовали (см. п. 168) биномиальную теорему

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots$$

в предположениях, что $-1 < x < 1$ и что m рационально. Когда m иррационально, мы имеем

$$(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)},$$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^m = \frac{m}{1+x}e^{m\ln(1+x)} = m(1+x)^{m-1},$$

так что правило дифференцирования $(1+x)^m$ остается тем же и доказательство теоремы, данное в п. 168, сохраняет силу. Остается рассмотреть случаи $x=1$ и $x=-1$.

(1) Когда $x=1$, ряд принимает вид

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \ldots.$$

Если $m+1 \leqslant 0$, то общий член не стремится к нулю (см. пример LXXXIV. 3). Если $m+1>0$, то u_n имеет для достаточно больших n чередующиеся знаки и монотонно убывает к нулю, так что ряд сходится.

Для определения суммы ряда положим $f(x)=(1+x)^m$, и будем писать 0 вместо a и 1 вместо h в равенстве (1) п. 167. Тогда мы получим

$$2^m=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}\int\limits_0^1(1-t)^{n-1}(1+t)^{m-n}dt.$$

Этот интеграл меньше $\frac{1}{n}$ для больших n (так как $m<n$ и $1+t\geqslant 1$). Следовательно,

$$|R_n|\leqslant|u_n|\to 0.$$

Таким образом, *биномиальный ряд сходится при* $x=1$ *в том и только в том случае, когда* $m>-1$, *и его сумма равна* 2^m.

(2) Когда $x=-1$, мы можем просуммировать первые $n+1$ членов ряда. Если $m=0$, то сумма равна 1. В других случаях, если мы положим $x=-1$ и $m=-\mu$, она равна

$$1+\mu+\ldots+\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}{n!}=$$

$$=\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}{n!}=(-1)^n\binom{m-1}{n}$$

(см. пример LXXXI. 5). Это выражение стремится к 0, когда $m>0$, и не стремится ни к какому пределу, когда $m<0$ (см. пример LXXXIV. 3). Следовательно, *ряд сходится при* $x=-1$ *в том и только в том случае, когда* $m\geqslant 0$, *и его сумма равна* 1, *если* $m=0$, *и равна* 0, *если* $m>0$.

Примеры XCIII. 1. Доказать, что если $-1<x<1$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots.$$

2. **Приближение квадратических и других иррациональностей.** Пусть $\sqrt{M}$ является квадратической иррациональностью, значение которой требуется найти. Пусть N^2 — ближайший к M квадрат целого числа, и пусть $M=N^2+x$, или $M=N^2-x$, где x положительно. Так как x не превосходит N, то $\frac{x}{N^2}$ сравнительно мало и $\sqrt{M}=N\sqrt{1\pm\frac{x}{N^2}}$ может быть представлено в виде ряда

$$N\left\{1\pm\frac{1}{2}\left(\frac{x}{N^2}\right)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{N^2}\right)^2\pm\ldots\right\},$$

который будет, во всяком случае, довольно быстро сходиться. Так, например,

$$\sqrt{67}=\sqrt{64+3}=8\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{64}\right)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{3}{64}\right)^2+\ldots\right\}.$$

Проверить, что ошибка значения $8\frac{3}{16}$ (суммы первых двух членов ряда) меньше $\frac{3^2}{64^2}$, т. е. меньше 0,003, и что это значение больше истинного.

3. Если x мало по сравнению с N^2, то

$$\sqrt{N^2+x}=N+\frac{x}{4N}+\frac{Nx}{2(2N^2+x)}$$

с ошибкой порядка $\frac{x^4}{N^7}$. Применить эту формулу к приближенному определению $\sqrt{997}$.

4. Если M отличается от N^3 меньше, чем на 1% каждого из этих чисел, то $\sqrt[3]{M}$ отличается от

$$\frac{2}{3}N+\frac{1}{3}MN^{-2}$$

меньше чем на $\frac{N}{90\,000}$. (*Экз.* 1882 г.)

5. Если $M=N^4+x$ и x мало по сравнению с N, то хорошим приближением $\sqrt[4]{M}$ является

$$\frac{51}{56}N+\frac{5}{56}\frac{M}{N^3}+\frac{27Nx}{14(7M+5N^4)}$$

Показать, что если $N=10$, $x=1$, то это приближение точно до 16 знаков (*Экз.* 1886 г.)

6. Показать, как можно найти сумму ряда

$$\sum_0^\infty P_r(n)\binom{m}{n}x^n,$$

где $P_r(n)$ — многочлен степени r относительно n.

[Представить $P_r(n)$ в виде

$$A_0+A_1n+A_2n(n-1)+\ldots,$$

как в примере XCI. 7.]

223. Другой способ развития теории показательной и логарифмической функций. Мы наметим теперь в общих чертах другой метод исследования свойств функций e^x и $\ln x$, по своей логической структуре совершенно отличный от изложенного на предыдущих страницах. Этот метод исходит из экспоненциального ряда

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots.$$

Мы знаем, что этот ряд сходится для всех значений x, и можем поэтому определить функцию $\exp x$ равенством

$$\exp x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots. \qquad (1)$$

Далее, как в примере LXXXI. 7, мы докажем, что

$$\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y). \tag{2}$$

Кроме того,

$$\frac{\exp h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots = 1 + \rho(h),$$

где $\rho(h)$ по модулю меньше чем

$$\left|\frac{1}{2}h\right| + \left|\frac{1}{2}h\right|^2 + \left|\frac{1}{2}h\right|^3 + \ldots = \frac{\left|\frac{1}{2}h\right|}{1 - \left|\frac{1}{2}h\right|},$$

и, таким образом, $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \exp x \, \frac{\exp h - 1}{h} \to \exp x$$

при $h \to 0$, или

$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x. \tag{3}$$

В частности, мы доказали, что $\exp x$ — непрерывная функция.

Здесь мы можем продолжать рассуждения разными способами. Полагая $y = \exp x$ и замечая, что $\exp 0 = 1$, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad x = \int\limits_1^y \frac{dt}{t},$$

и если мы определим логарифмическую функцию как функцию обратную показательной, то мы приходим к исходному пункту наших рассмотрений в начале главы.

Но мы можем рассуждать и иначе. Из уравнения (2) следует, что если n — положительное целое число, то

$$(\exp x)^n = \exp nx, \quad (\exp 1)^n = \exp n.$$

Если x — положительное рациональное число $\frac{m}{n}$, то

$$\left(\exp \frac{m}{n}\right)^n = \exp m = (\exp 1)^m$$

и, следовательно, $\exp \frac{m}{n}$ равен положительному значению $(\exp 1)^{m/n}$. Этот результат может быть распространен на отрицательные рациональные значения x при помощи равенства

$$\exp x \exp(-x) = 1,$$

и таким образом мы находим, что для всех рациональных значений x

$$\exp x = (\exp 1)^x = e^x,$$

где

$$e = \exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots .$$

Наконец, мы определяем e^x при иррациональном x как $\exp x$. Логарифм тогда определяется как обратная функция.

Пример. Исследовать аналогичным образом биномиальный ряд

$$1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots=f(m,\ x),$$

где $-1<x<1$, исходя из уравнения

$$f(m,\ x)\,f(m',\ x)=f(m+m',\ x)$$

(см. пример LXXXI. 6).

224. Аналитическая теория тригонометрических функций. Мы возвращаемся теперь к вопросу, который уже вкратце рассматривался в п. 163.

На протяжении всей книги мы считали, что читатель знаком с элементами тригонометрии, и свободно пользовались в иллюстративных целях тригонометрическими или „круговыми“ функциями $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, ... Однако в п. 163 мы уже имели случай отметить, что основания тригонометрии не совсем так просты, как может показаться читателю, впервые знакомящемуся с ними, и что обычное изложение теории базируется на некоторых предположениях, требующих внимательного анализа.

Имеются по крайней мере четыре очевидных метода, с помощью которых можно построить аналитическую теорию тригонометрических функций.

1°. *Геометрический метод.* Наиболее естественным является тот метод, при котором мы возможно более точно следуем за изложением обычных учебников, переводя применяемый в них геометрический язык на язык анализа. Мы обсуждали этот вопрос в п. 163 и пришли к заключению, что встречаемся здесь только с одной серьезной трудностью. Мы должны либо показать, что любой дуге окружности можно поставить в соответствие некоторое число, называемое ее *длиной*, либо показать, что любому сектору круга можно поставить в соответствие некоторое число, называемое его *площадью*. Выполнения любого из этих требований достаточно, чтобы строго обосновать всю тригонометрию. Обычно идут по первому из этих двух путей и основывают тригонометрию на понятии длины. Но гл. VII содержит строгое рассмотрение площадей, а не длин, и поэтому мы естественно предпочли второй путь.

2°. *Метод бесконечных рядов.* Второй метод, применяемый во многих курсах анализа, состоит в том, что тригонометрические функции определяются, как и показательная функция в п. 223, с помощью бесконечных рядов. Мы определяем $\cos x$ и $\sin x$ равенствами

$$(1)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.$$

Эти ряды абсолютно сходятся для всех действительных значений x, и могут быть перемножены как ряды в п. 223. Таким образом, мы получаем формулу

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

и другие теоремы сложения тригонометрии. Свойство периодичности представляет несколько бо́льшие трудности. Мы можем вывести из (1), что функция $\cos x$, положительная для малых значений x, меняет знак один раз в интервале $(0,2)$, скажем при $x=\xi$; определим число π соотношением $\frac{1}{2}\pi=\xi$. Тогда легко доказать, что $\sin\frac{1}{2}\pi=1$, $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$. Равенства

$$\cos(x+\pi)=-\cos x, \quad \sin(x+\pi)=-\sin x$$

следуют тогда из формул сложения. Подробное изложение теории, исходящей из этих определений, читатель найдет в книге Уиттекера и Ватсона, *Курс современного анализа*, т. I, Приложение А.

Эта теория вполне удовлетворительна, но она более естественна в том случае, когда мы рассматриваем $\cos z$ и $\sin z$ как функции от комплексного переменного z, чем здесь, где мы рассматриваем только действительные переменные и функции.

3°. *Определение синуса с помощью бесконечного произведения.* Третий метод заключается в определении $\sin x$ равенством

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots.$$

Этот метод имеет много преимуществ, но требует, естественно, знания теории бесконечных произведений.

4°. *Определение обратных функций с помощью интегралов.* Имеется еще четвертый метод, которому здесь должно быть отдано предпочтение, так как он во многом повторяет наше изложение теории логарифмической функции в первой части настоящей главы. Мы начинаем с определения $\operatorname{arc\,tg} x$ равенством

$$y=y(x)=\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}. \tag{1}$$

Это уравнение однозначно определяет значение y, соответствующего каждому действительному значению x. Так как подинтегральная функция — четная, то y является нечетной функцией от x. Далее, так как y непрерывна и строго возрастает, то, по п. 110, существует обратная функция $x=x(y)$, также непрерывная и строго возрастающая. Мы полагаем

$$x=x(y)=\operatorname{tg} y. \tag{2}$$

Если мы определим π уравнением

$$\frac{1}{2}\pi=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}, \tag{3}$$

то $x(y)$ определена для $-\frac{1}{2}\pi<y<\frac{1}{2}\pi$.

Теперь мы полагаем

$$(4)\qquad \cos y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

где имеется в виду положительное значение корня. Таким образом, $\cos y$ и $\sin y$ определены для $-\frac{1}{2}\pi<y<\frac{1}{2}\pi$. Когда $y\to\frac{\pi}{2}$, $x\to\infty$, и, следовательно, $\cos y\to 0$ и $\sin y\to 1$. Мы определяем $\cos\frac{1}{2}\pi$ и $\sin\frac{1}{2}\pi$ равенствами

$$(5)\qquad \cos\frac{1}{2}\pi=0,\ \sin\frac{1}{2}\pi=1.$$

Тогда $\cos y$ и $\sin y$ определены для $-\frac{1}{2}\pi<y\leqslant\frac{1}{2}\pi$, а $\operatorname{tg} y$ — для $-\frac{1}{2}\pi<y<\frac{1}{2}\pi$.

Наконец, мы определяем $\operatorname{tg} y$, $\cos y$ и $\sin y$ для значений y вне интервала $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right)$ с помощью уравнений

$$(6)\qquad \operatorname{tg}(y+\pi)=\operatorname{tg} y,\ \cos(y+\pi)=-\cos y,\ \sin(y+\pi)=-\sin y,$$

которые последовательно распространяют наши определения на интервалы $\left(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\right)$, ..., $\left(-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$, ... Функция $\operatorname{tg} y$ тогда определена для всех значений y, кроме $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, где k — целое число. Эти значения определением не охватываются; но $\operatorname{tg} y$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, когда y стремится к одному из этих значений, соответственно, слева или справа. С другой стороны, $\cos y$ и $\sin y$ определены и непрерывны для всех значений y.

Таким образом, $\operatorname{tg} y\to+\infty$ при $y\to\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-0$. При замене -0 на $+0$ знак меняется на обратный.

Чтобы убедиться в том, что $\cos y$ непрерывна при $y=\frac{1}{2}\pi$, заметим, что, во-первых, $\cos\frac{1}{2}\pi=0$, по определению, во-вторых, что, по (4), $\cos y\to 0$ при $y\to\frac{1}{2}\pi-0$, в-третьих, что $\cos y\to 0$ при $y\to-\frac{1}{2}\pi+0$ (также по (4)), а, следовательно, по (6), и при $y\to\frac{1}{2}\pi+0$.

Мы начали с определения $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{tg} y$ и затем определили $\cos y$ и $\sin y$ через $\operatorname{tg} y$. Мы могли бы выбрать $\arcsin x$ и $\sin y$ в качестве наших основных функций. В этом случае мы должны были бы определить $\arcsin x$ в интервале $(-1,\ 1)$ равенством

$$y=y(x)=\arcsin x=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

где берется положительное значеине корня; $\sin y$ — как обратную функцию; π — с помощью равенства

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

а $\cos y$ и $\operatorname{tg} y$ — соотношениями

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1).$$

Избранный нами путь несколько более удобен.

225. Мы теперь сформулировали все необходимые определения, а именно, те, которые выражаются уравнениями, снабженными номерами в п. 224. Дальнейшее развитие теории зависит от формул сложения.

Заметим, в первую очередь, что

$$(1+x^2)(1+y^2) = (1-xy)^2 + (x+y)^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = \frac{(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy}{(1-xy)^2+(x+y)^2} =$$
$$= \frac{(1-xy)\,d(x+y) - (x+y)\,d(1-xy)}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{dz}{1+z^2},$$

где

$$z = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Это приводит к соотношению

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} z,$$

но так как эти функции многозначны, то необходимо более внимательное рассмотрение.

Положим

$$t = \frac{x_1+u}{1-x_1u}, \quad u = \frac{t-x_1}{1+x_1t},$$

так что

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{1-x_1u} + \frac{x_1(x_1+u)}{(1-x_1u)^2} = \frac{1+x_1^2}{(1-x_1u)^2} > 0.$$

Таким образом, t и u изменяются в одном направлении. Когда t возрастает от $-\infty$ до $-\frac{1}{x_1}$, u возрастает от $\frac{1}{x_1}$ до ∞, а когда t возрастает от $-\frac{1}{x_1}$ до ∞, u возрастает от $-\infty$ до $\frac{1}{x_1}$. Кроме того, $u=0$, когда $t=x_1$, и $u=-x_1$, когда $t=0$[1]).

[1]) Читателю следует начертить график каждого переменного как функции другого.

Предположим теперь, что x_2 имеет такое значение, что интервал $(-x_1, x_2)$ значений u не содержит точку $u=\frac{1}{x_1}$, в которой t обращается в бесконечность. Если $x_1>0$, то x_2 должно быть меньше $\frac{1}{x_1}$, а если $x_1<0$, то x_2 должно быть больше $\frac{1}{x_1}$. В этих условиях t монотонно возрастает или убывает от 0 до

$$x=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2},$$

когда u возрастает или убывает от $-x_1$ до x_2. Так как

$$\frac{1}{1+t^2}=\frac{(1-x_1u)^2}{(1+x_1^2)(1+u^2)},$$

то мы имеем

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_{-x_1}^{x_2}\frac{du}{1+u^2}=$$

$$=\int_0^{x_2}\frac{du}{1+u^2}+\int_{-x_1}^{0}\frac{du}{1+u^2}=\int_0^{x_2}\frac{du}{1+u^2}+\int_0^{x_1}\frac{du}{1+u^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x_1+\operatorname{arc\,tg} x_2.$$

Если мы теперь положим

$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\quad y_1=\operatorname{arc\,tg} x_1,\quad y_2=\operatorname{arc\,tg} x_2,$$

то мы имеем $y=y_1+y_2$ и

$$\operatorname{tg}(y_1+y_2)=x=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\frac{\operatorname{tg} y_1+\operatorname{tg} y_2}{1-\operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2}, \tag{1}$$

что и является формулой сложения для тангенса.

Эта формула пока доказана только при некоторых ограничениях на значения переменных, а именно, в предположении, что $x_2<\frac{1}{x_1}$, если $x_1>0$, и $x_2>\frac{1}{x_1}$, если $x_1<0$. Когда $x_1>0$ и $x_2\to\frac{1}{x_1}$ слева, то $x\to+\infty$ и $y\to\frac{1}{2}\pi$, а когда $x_1<0$ и $x_2\to\frac{1}{x_1}$ справа, то $x\to-\infty$ и $y\to-\frac{1}{2}\pi$. Наши ограничения сводятся, таким образом, к тому, что y_1, y_2 *и* y_1+y_2 *должны лежать в интервале* $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

Эти ограничения, однако, не нужны.

Ограничение на y_1+y_2 возникло из нашего предположения, что интервал $(-x_1, x_2)$ не содержит $\frac{1}{x_1}$. Допустим, что это условие нарушено, например, предположим для определенности, что $x_1>0$

и $x_2 > \frac{1}{x_1}$. Тогда, при u возрастающем от $-x_2$ до x_1, t возрастает от 0 до ∞, затем меняет знак и возрастает от $-\infty$ до x. Таким образом, мы имеем

$$\int_{-x_1}^{x_2} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \pi + \operatorname{arc\,tg} x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2 - \pi,$$

и, по (6),

$$\operatorname{tg}(y_1 + y_2) = \operatorname{tg}(y_1 + y_2 - \pi) = \operatorname{tg} y =$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \frac{\operatorname{tg} y_1 + \operatorname{tg} y_2}{1 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2}$$

Аналогично мы можем поступить в случае $x_1 < 0$. Следовательно, (1) имеет место, если только y_1 и y_2 лежат в интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

Наконец, так как каждая часть уравнения (1) является, по (6), периодической функцией от y_1 или от y_2, то (1) справедливо без всяких ограничений, за исключением того, что ни y_1, ни y_2, ни $y_1 + y_2$ не должно быть нечетным кратным $\frac{1}{2}\pi$, так как в этих случаях (1) теряет смысл.

226. Из соотношений (1) п. 225 и (4) п. 224 мы заключаем, что

$$\cos^2(y_1 + y_2) = \frac{(1 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2)^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 y_1)(1 + \operatorname{tg}^2 y_2)} =$$

$$= (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)^2$$

и

$$\cos(y_1 + y_2) = \pm(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2).$$

Для определения знака положим $y_2 = 0$. Уравнение сводится к следующему: $\cos y_1 = \pm \cos y_1$, так что при $y_2 = 0$ следует брать положительный знак. Так как обе части меняют знак, когда y_2 увеличивается на π, то формула имеет место с положительным знаком для всех y_2, кратных π. Далее, обе части уравнения являются непрерывными функциями от y_2, так что перемена знака может произойти только в том случае, когда обе части обращаются в нуль, т. е. при значениях $\ldots, -\frac{1}{2}\pi - y_1, \frac{1}{2}\pi - y_1, \frac{3}{2}\pi - y_1, \ldots$, каждое из которых является единственным в любом интервале длины π. Так как мы видели, что в каждом таком интервале существует значение y_2, для которого знак положителен, то он должен быть всегда положительным. Следовательно,

(2) $$\cos(y_1+y_2)=\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2,$$

и соответствующая формула для $\sin(y_1+y_2)$ доказывается аналогично.

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛ. IX[1])

1. Дано, что $\log e \cong 0{,}4343$ и известно, что 2^{10} и 3^{21} почти равны степеням 10; вычислить $\log 2$ и $\log 3$ с точностью до четырех знаков.

(*Экз.* 1905 г.)

2. Показать, что $\log n$ не может быть рациональным числом, если n — любое положительное целое число, не являющееся степенью 10.

[Если n не делится на 10 и $\log n = \frac{p}{q}$, то мы имеем $10^p = n^q$, что невозможно, так как 10^p кончается нулем, а n^q этим свойством заведомо не обладает. Если же $n = 10^a N$, где N не делится на 10, то $\log N$, а, следовательно, и

$$\log n = a + \log N$$

не может быть рациональным.]

3. Для каких значений x функции $\ln x$, $\ln\ln x$, $\ln\ln\ln x$, ... (a) равны нулю, (b) равны 1, (c) не определены? Рассмотреть тот же вопрос для функций lx, llx, $lllx$, ..., где $lx = \ln|x|$.

4. Показать, что выражение

$$\ln x - \binom{n}{1}\ln(x+1) + \binom{n}{2}\ln(x+2) - \ldots + (-1)^n \ln(x+n)$$

отрицательно и монотонно возрастает к 0, когда x возрастает от 0 до ∞.

[Производная этой функции равна

$$\sum_{1}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{1}{x+r} = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

в чем легко убедиться разложением правой части на простейшие дроби. Это выражение положительно, а сама функция стремится к 0 при $x \to \infty$, так как $\ln(x+r) = \ln x + o(1)$ и

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0.]$$

5. Доказать, что

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\ln x}{x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right).$$

(*Экз.* 1909 г.)

6. Если $x > -1$, то $x^2 > (1+x)\{\ln(1+x)\}^2$.

(*Экз.* 1906 г.)

[Положить $1+x=e^{\xi}$ и использовать неравенство $\operatorname{sh}\xi > \xi$ для $\xi > 0$.]

7. Показать, что

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ и } \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)}$$

монотонно убывают, когда x возрастает от 0 до ∞.

---

[1]) Некоторые из этих примеров взяты из книги Bromwich, *Infinite series*.

8. Показать, что когда x возрастает от -1 до ∞, функция

$$(1+x)^{-1/x}$$

принимает один и только один раз каждое значение между 0 и 1.

(*Экз.* 1910 г.)

9. Показать, что

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\to\frac{1}{2}$$

при $x\to 0$.

10. Показать, что

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

монотонно убывает от 1 до 0, когда x возрастает от -1 до ∞.

[Функция не определена при $x=0$, но если мы припишем ей при $x=0$ значение $\frac{1}{2}$, то она становится непрерывной при $x=0$. Применить результат примера 6 для доказательства того, что производная отрицательна.]

11. Доказать, что

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\sin x\operatorname{tg}x-\ln\sec x$$

положительна и возрастает для $0<x<\frac{1}{2}\pi$ и что $\psi(x)=O(x^6)$ для малых x.

(*Экз.* 1930 г.)

12. Если

$$\varphi(x)=\frac{3\int\limits_0^x(1+\sec t)\ln\sec t\,dt}{\ln\sec x\,\{x+\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)\}},$$

то 1° $\varphi(x)$ — четная функция, 2° для малых x имеет место приближенное равенство $\varphi(x)\cong 1+\frac{1}{420}x^4$ и 3° $\varphi(x)\to\frac{3}{2}$, когда $x\to\frac{1}{2}\pi$ слева.

(*Экз.* 1930 г.)

13. Показать, что $e^x>Mx^N$, где M и N — большие положительные числа, если x больше чем $2\ln M$ и $16N^2$.

[Легко доказать, что $\ln x<2\sqrt{x}$; таким образом, приведенное неравенство заведомо выполняется, если

$$x>\ln M+2N\sqrt{x},$$

и поэтому выполняется, если $\frac{1}{2}x>\ln M$, $\frac{1}{2}x>2N\sqrt{x}$.]

14. Показать, что последовательность

$$a_1=e,\quad a_2=e^{e^2},\quad a_3=e^{e^{e^3}},\ \ldots$$

стремится к бесконечности быстрее любого члена показательной шкалы.

[Пусть $e_1(x)=e^x$, $e_2(x)=e^{e_1(x)}$ и т. д. Тогда, если $e_k(x)$ — любой член показательной шкалы, $a_n>e_k(n)$ при $n>k$.]

15. Если p и q — положительные целые числа, то

$$\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+\ldots+\frac{1}{qn}\to\ln\frac{q}{p}$$

при $n\to\infty$. [См. пример LXXVIII. 7.]

16. Доказать, что если x положительно, то

$$n\ln\left\{\frac{1}{2}(1+x^{1/n})\right\}\to-\frac{1}{2}\ln x$$

при $n\to\infty$.

[Мы имеем

$$n\ln\left\{\frac{1}{2}(1+x^{1/n})\right\}=n\ln\left\{1-\frac{1}{2}(1-x^{1/n})\right\}=\frac{1}{2}n(1-x^{1/n})\frac{\ln(1-u)}{u},$$

где $u=\frac{1}{2}(1-x^{1/n})$. Теперь использовать результаты п. 216 и примера LXXXIII. 3.]

17. Доказать, что если a и b положительны, то

$$\left\{\frac{1}{2}(a^{1/n}+b^{1/n})\right\}^n\to\sqrt{ab}.$$

[Прологарифмировать и применить результат примера 16.]

18. Показать, что

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma+o(1),$$

где γ — постоянная Эйлера (примера XC. 1).

19. Показать, что

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2,$$

где в левой частн два положительных члена чередуются с одним отрицательным, а сам ряд является перестановкой ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$.

[Сумма первых $3n$ членов равна

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma+o(1)-\frac{1}{2}\{\ln n+\gamma+o(1)\}.]$$

20. Доказать, что

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu(36\nu^2-1)}=-3+3\Sigma_{3n+1}-\Sigma_n-S_n,$$

где $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $\Sigma_n=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$. Вывести, что сумма соответствующего бесконечного ряда равна

$$-3+\frac{3}{2}\ln 3+2\ln 2.$$

(*Экз.* 1905 г.)

21. Доказать, что суммы рядов

$$\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^2-1}, \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$$

равны, соответственно, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$.

22. Исследовать сходимость рядов

$$\sum\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n, \quad \sum(\ln n)^{-x\ln n}, \quad \sum\left(\ln 2-\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{\nu}\right)^x.$$

(*Экз.* 1935 г.)

23. Исследовать сходимость ряда

$$\sum n^{-a}e^{-b\sqrt{n}+cni}$$

для всех действительных значений a, b, c.

(*Экз.* 1925 г.)

24. Ряд $\sum u_n$ переставлен следующим образом:

$$u_1+u_2+u_4+u_3+u_5+u_7+u_9+u_6+u_8+\ldots+u_{20}+u_{11}+\ldots$$

(один член с нечетным номером, два члена с четными номерами, затем четыре члена с нечетными номерами, восемь членов с четными и т. д.). Исследовать, сходится ли переставленный ряд в случае, когда

$$(1)\ u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad (2)\ u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)}.$$

(*Экз.* 1930 г.)

25. Доказать, что $n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$ стремится к 0 или к ∞ в зависимости от того, является ли a числом меньшим или большим e.

26. Доказать, что если $u_n=n!\,e^n n^{-n-1/2}$, то

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Вывести, что если a фиксировано, а s — целое число, ближайшее к $a\sqrt{n}$, то

$$\frac{\binom{2n}{n+s}}{\binom{2n}{n}}\to e^{-a^2}.$$

(*Экз.* 1928 г.)

27. Если $u_n>0$ и

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то $u_n\sim Kn^{-a}$, где K — постоянная.

[Действительно,

$$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{a}{n}+\rho_n,$$

где $\rho_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Следовательно,

$$\ln\frac{u_n}{u_1} = -a\sum_1^{n-1}\frac{1}{\nu} + \sum_1^{n-1}\rho_\nu = -a(\ln n + \gamma) + H + o(1),$$

где $H = \sum \rho_\nu$.]

28. Доказать, что

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n)} \sim Kn^{a-b},$$

где K — постоянная.

[Применить результат примера 27.]

29. Доказать, что, в обозначениях примера XC.6, $\sum\frac{u_n}{s_n}$ сходится и расходится одновременно с $\sum u_n$.

[В случае сходимости доказательства совпадают. Если $\sum u_n$ расходится и $u_n < s_{n-1}$, начиная с некоторого значения n, то $s_n < 2s_{n-1}$, и расходимость $\sum\frac{u_n}{s_n}$ следует из расходимости $\sum\frac{u_n}{s_{n-1}}$. Если же $u_n \geqslant s_{n-1}$ для бесконечного числа значений n, что может иметь место в случае быстро расходящегося ряда, то $\frac{u_n}{s_n} \geqslant \frac{1}{2}$ для всех таких значений n.]

30. Доказать, что если $x > -1$, то

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \\ + \frac{2!}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} + \ldots.$$

(*Экз.* 1908 г.)

[Разность между $\frac{1}{(x+1)^2}$ и суммой первых n членов ряда равна

$$\frac{1}{(x+1)^2}\,\frac{n!}{(x+2)(x+3)\ldots(x+n+1)}.\text{]}$$

31. Найти предел при $x \to \infty$ выражения

$$\left(\frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r}{b_0 + b_1x + \ldots + b_rx^r}\right)^{\lambda_0+\lambda_1x},$$

исследуя все возможные случаи, которые могут представиться.

(*Экз.* 1886 г.)

32. Общим решением уравнения $f(xy) = f(x)f(y)$, где f — дифференцируемая функция, является x^a при постоянном a. Общим решением уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

является $\operatorname{ch} ax$ или $\cos ax$ в зависимости от того, положительно ли $f''(0)$ или отрицательно.

[При доказательстве второго результата следует предположить, что f имеет производные первых трех порядков. Тогда

$$2f(x) + y^2f''(x) + o(y^2) = 2f(x)\left\{f(0) + yf'(0) + \frac{1}{2}y^2f''(0) + o(y^2)\right\},$$

и, следовательно, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ и $f''(x) = f''(0)f(x)$.]

33. Уравнение $e^x = ax + b$ имеет один действительный корень, если $a < 0$ или $a = 0$, $b > 0$. Если $a > 0$, то оно имеет два действительных корня в случае, когда $a \ln a > b - a$, и ни одного действительного корня, когда $a \ln a < b - a$.

34. На основании графических рассмотрений показать, что уравнение

$$e^x = ax^2 + 2bx + c$$

имеет один, два или три действительных корня, если $a > 0$, и ни одного, один или два, если $a < 0$. Показать, как можно установить, какой из этих случаев имеет место.

35. Доказать, что уравнение $a^2 e^x = x^2$ имеет три действительных корня, если $a^2 < \frac{4}{e^2}$, и что для малых a меньший положительный корень равен

$$a + \frac{1}{2} a^2 + \frac{3}{8} a^3 + \ldots .$$

(*Экз.* 1931 г.)

36. Найти уравнение для тех значений x, при которых

$$y = Ae^{-x^2} + Be^{-(x-c)^2}$$

имеет стационарное значение, и доказать, что значение y, соответствующее такому значению $x = x_1$, равно

$$\frac{Ac}{c - x_1} e^{-x_1^2}.$$

Показать также, что если A, B и c положительны, то искомое уравнение имеет в точности два корня, один больший c, а другой отрицательный, и что они дают соответственно минимум и максимум y.

(*Экз.* 1923 г.)

37. Начертить кривую

$$y = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$$

и показать, что точка $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ является центром симметрии кривой и что когда x возрастает, принимая все действительные значения, y монотонно возрастает от 0 до 1. Вывести, что уравнение

$$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \alpha$$

не имеет действительных корней, если α не удовлетворяет условию $0 < \alpha < 1$. При условии же $0 < \alpha < 1$ это уравнение имеет один действительный корень, знак которого совпадает со знаком $\alpha - \frac{1}{2}$.

[Действительно,

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \left\{ \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) - \ln e^{1/2 x} \right\} = \frac{1}{x} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x}$$

является очевидно, нечетной функцией от x. Далее,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{1}{2} x \operatorname{cth} \frac{1}{2} x - 1 - \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \right\}.$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, стремится к нулю при $x \to 0$, а его производная равна

$$\frac{1}{x}\left\{1-\left(\frac{\frac{1}{2}x}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}x}\right)^2\right\},$$

что имеет знак, совпадающий со знаком x. Следовательно, $\frac{dy}{dx}$ положительно для всех значений x.]

38. Нарисовать кривую

$$y=e^{1/x}\sqrt{x^2+2x}$$

и показать, что уравнение

$$e^{1/x}\sqrt{x^2+2x}=\alpha$$

не имеет действительных корней, если α отрицательно, имеет один отрицательный корень, если

$$0<\alpha<a=e^{1/\sqrt{2}}\sqrt{2+2\sqrt{2}},$$

и два положительных корня и один отрицательный, если $\alpha>a$.

39. Показать, что уравнение

$$f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0$$

имеет один действительный корень, если n нечетно, и не имеет ни одного действительного корня, если n четно.

[Допустим, что это доказано для $n=1, 2, \ldots, 2k$. Тогда уравнение $f_{2k+1}(x)=0$ имеет по крайней мере один действительный корень, так как его степень нечетна; оно не может иметь более одного корня, так как если бы оно имело не менее двух корней, то $f'_{2k+1}(x)$, или $f_{2k}(x)$, должно было бы по крайней мере один раз обратиться в нуль. Следовательно, $f_{2k+1}(x)$ обращается в нуль один и только один раз, и поэтому уравнение $f_{2k+2}(x)=0$ не может иметь более двух корней. Если бы оно имело два корня, скажем α и β, то $f'_{2k+2}(x)$, или $f_{2k+1}(x)$, должно было бы по крайней мере один раз обратиться в нуль между α и β, скажем, в некоторой точке γ; но

$$f_{2k+2}(\gamma)=f_{2k+1}(\gamma)+\frac{\gamma^{2k+2}}{(2k+2)!}>0$$

и $f_{2k+2}(x)$ положительно также и для больших x (положительных и отрицательных), что, очевидно, содержит противоречие, легко распознаваемое на чертеже. Следовательно, $f_{2k+2}(x)$ не имеет действительных корней.]

40. Доказать, что если a и b положительны и приблизительно равны, то имеет место следующее приближенное равенство:

$$\ln\frac{a}{b}\cong\frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

причем ошибка примерно равна $\frac{(a-b)^3}{6a^3}$.

[Использовать логарифмический ряд. Эта формула имеет также исторический интерес, так как она применялась Непером для вычисления логарифмов.]

41. Доказать перемножением рядов, что если $-1 < x < 1$, то

$$\frac{1}{2}\{\ln(1+x)\}^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^3 + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4 - \ldots,$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)x^4 + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x^6 - \ldots.$$

42. Первыми $n+2$ членами в разложении

$$\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

в степенной ряд являются

$$x - \frac{x^{n+1}}{n!}\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{x}{1!(n+2)} + \frac{x^2}{2!(n+3)} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!(2n+1)}\right\}.$$

(*Экз.* 1899 г.)

43. Показать, что разложение

$$\exp\left\{-x-\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{x^n}{n}\right\}$$

в степенной ряд начинается с членов

$$1 - x + \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{s=1}^{n} \frac{x^{n+s+1}}{(n+s)(n+s+1)}.$$

(*Экз.* 1909 г.)

44. Применить тождество

$$\ln(1-x^3) = \ln(1-x) + \ln(1+x+x^2)$$

для доказательства того, что

$$\sum_{{}^1/_2 k \leq n \leq k} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(k-n)!(2n-k)!}$$

равно $\frac{1}{k}$, если k не кратно 3, и равно $-\frac{2}{k}$, если k кратно 3.

(*Экз.* 1932 г.)

45. Доказать, что если x мало, а y обозначает положительное значение

$$(1+x+x^2)^{1/x^2},$$

то

$$y = e^{1/x + {}^1/_2}\left\{1 - \frac{2}{3}x + O(x^2)\right\}.$$

Найти пределы y и $\frac{dy}{dx}$ при $x \to 0$ справа и слева и нарисовать график y вблизи точки $x=0$.

(*Экз.* 1924 г.)

46. Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b},$$

если $a > b > 0$.

47. Доказать, что если α, β и γ положительны и $\beta^2 > \alpha\gamma$, то

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} \ln \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\sqrt{\alpha\gamma}},$$

и вычислить интеграл при условии, что $\alpha > 0$ и $\alpha\gamma > \beta^2$.

48. Доказать, что если $a > -1$, то

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-1}} = \int_0^\infty \frac{dt}{\operatorname{ch} t + a} = 2\int_1^\infty \frac{du}{u^2 + 2au + 1},$$

и показать, что значение интеграла равно

$$\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

если $-1 < a < 1$, и равно

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}},$$

если $a > 1$. Рассмотреть случай $a = 1$.

49. Если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, то

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)(1 - 2\beta x + \beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}.$$

50. Доказать, что если $a > b > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{a \operatorname{ch}\theta + b \operatorname{sh}\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

51. Доказать, что

$$\int_0^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6},$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^n}\, dx = \frac{1}{(n-1)^2} \, (n > 1), \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\{x + \sqrt{x^2+1}\}^n} = \frac{n}{n^2 - 1} \, (n > 1),$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 - x^2}} = 2\sqrt{3}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)} = \frac{1}{4}(1 - \ln 2),$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + e^x)(1 + e^{-x})} = 1.$$

(*Экз.* 1913, 1928, 1932, 1933, 1934 гг.)

52. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0,$$

и вывести, что если $a > 0$, то

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln a.$$

[Применить подстановки $x = \frac{1}{t}$ и $x = au$].

53. Доказать, что

$$\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = \pi a,$$

если $a > 0$.

[Интегрировать по частям.]

54. Доказать, что

$$\lim_{t\to 1-0} (1-t)^{1/2}(t + t^4 + t^9 + t^{16} + \ldots) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

(*Экз.* 1932 г.)

[Из п. 180 следует, что

$$\int_h^{(n+1)h} e^{-x^2}\,dx < h\sum_{\nu=1}^{n} e^{-\nu^2h^2} < \int_0^{nh} e^{-x^2}\,dx.$$

Положить $t = e^{-h^2}$ и устремить n к ∞.]

ГЛАВА X

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ, ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

227. Функции комплексного переменного. В гл. III мы определили комплексное переменное[1])

$$z = x + iy$$

и рассмотрели ряд простых свойств некоторых классов выражений, содержащих z, как, например, многочленов $P(z)$. Естественно называть такие выражения *функциями* от z, и мы действительно уже называли отношение $\frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены, „дробно-рациональной функцией". Однако мы еще не дали общего определения того, что называется функцией от z.

Естественно было бы определить функцию от z таким же образом, как мы определяли функцию от действительного переменного x, т. е. говорить, что Z является функцией от z, если существует некоторое соотношение между z и Z, в силу которого то или иное значение, или те или иные значения Z соответствуют некоторым или всем значениям z. Но более внимательное рассмотрение этого определения показывает, что оно непригодно. Действительно, если z дано, то даны x и y, и наоборот, если x и y даны, то дано и z; задать значение z — это то же самое, что задать пару значений переменных x и y. Таким образом, по предлагаемому определению, „функция от z" является просто *комплексно-значной функцией*

$$f(x, y) + ig(x, y)$$

от двух действительных переменных x и y. Например,

$$x - iy, \quad xy, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{am} z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

являются такими „функциями от z". Это определение, хотя оно и является вполне допустимым, бесполезно, так как оно фактически не определяет никакого нового понятия.

---

[1]) В настоящей главе иногда удобнее писать $x + iy$ вместо $x + yi$.

Поэтому представляется более удобным применять выражение „функция комплексного переменного z" в более узком смысле, или, другими словами, выбрать из общего класса комплексно-значных функций от двух действительных переменных x и y некоторый специальный класс и применять это выражение только к функциям этого класса. Разъяснение того, как этот специальный класс определяется, и каковы характеристические свойства функций, входящих в него, вывело бы нас далеко за рамки настоящей книги. Поэтому мы не будем приводить здесь никаких общих определений, а ограничимся только изучением некоторых специальных функций, каждая из которых будет определена непосредственно.

228. Мы уже определили *многочлены* относительно z (см. п. 39), *дробно-рациональные функции* от z (см. п. 46) и *корни* из z (см. п. 47). Не представляет никакого труда распространить на комплексное переменное определения *алгебраических функций*, явных и неявных, которые мы сформулировали в случае действительного переменного x (см. п. 26—27). Во всех этих случаях мы будем называть комплексное число z *аргументом* рассматриваемой функции $f(z)$. Задача, которую мы ставим себе в этой главе, состоит в том, чтобы дать определения и установить основные свойства логарифмической, показательной и тригонометрических или круговых функций от z. Эти функции были до сих пор определены только для действительных значений z, а логарифмическая функция даже только для положительных значений.

Начнем с логарифмической функции. Естественно попытаться определить ее с помощью некоторого обобщения определения

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0);$$

для этого необходимо вкратце рассмотреть некоторые обобщения понятия интеграла.

229. Действительные и комплексные криволинейные интегралы. Пусть AB является дугой C некоторой кривой, определенной уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где φ и ψ — функции от t, имеющие непрерывные производные φ' и ψ'. Предположим, что когда t изменяется от t_0 до t_1, точка (x, y) движется вдоль кривой в одном и том же направлении от A к B.

Тогда мы определяем *криволинейный интеграл*

$$\int_C \{g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy\}, \tag{1}$$

где g и h — непрерывные функции от x и y, как обычный определенный интеграл, получаемый в результате формальных подстановок $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, т. е. как

$$\int_{t_0}^{t_1} \{g(\varphi, \psi)\varphi' + h(\varphi, \psi)\psi'\}\, dt.$$

Дугу C мы называем *путем интегрирования*.

Допустим теперь, что

$$z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$$

и что z описывает дугу C на диаграмме Аргана, когда t изменяется от t_0 до t_1. Допустим, далее, что

$$f(z) = u + iv$$

является многочленом относительно z или дробно-рациональной функцией от z. Тогда мы определяем

$$\int_C f(z)\, dz \tag{2}$$

как

$$\int_C (u + iv)(dx + idy),$$

что, в свою очередь, определяется как

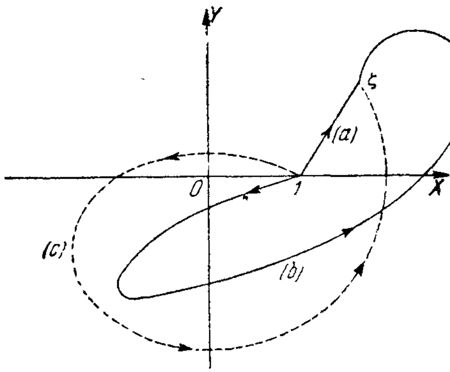
$$\int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy).$$

230. Определение $\operatorname{Ln}\zeta$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ — любое комплексное число, отличное от нуля. Мы определяем $\operatorname{Ln}\zeta$, общий логарифм (натуральный) от ζ, равенством

$$\operatorname{Ln}\zeta = \int_C \frac{dz}{z},$$

где C — кривая, соединяющая точку 1 с точкой ζ и не проходящая через начало координат. Так (фиг. 50), пути (a), (b), (c) являются такими путями, которые имеются в виду в определении. Значение $\operatorname{Ln}\zeta$, таким образом, определено, если выбран путь интегрирования. Но пока неясно, как значение $\operatorname{Ln}\zeta$ зависит от выбранного пути. Допустим, например, что ζ действительно и положительно, скажем равно ξ. Тогда одним из возможных путей интегрирования является отрезок прямой между 1 и ξ, который мы можем задать уравнениями $x=t$, $y=0$. В этом случае, при этом частном выборе пути,

$$\operatorname{Ln}\xi = \int_1^{\xi} \frac{dt}{t},$$



Фиг. 50

так что $\operatorname{Ln}\xi$ равен $\ln\xi$, логарифму натуральному от ξ, определенному в предыдущей главе. Таким образом, одним из значений $\operatorname{Ln}\xi$, когда ξ действительно и положительно, во всяком случае является $\ln\xi$. Но в этом случае, как и в общем случае, путь интегрирования может быть выбран бесконечным числом различных способов. Ничто не указывает на то, что *каждое* значение $\operatorname{Ln}\xi$ равно $\ln\xi$, и мы увидим, что это в действительности не имеет места. Поэтому мы и применяем обозначение $\operatorname{Ln}\zeta$, $\operatorname{Ln}\xi$ вместо $\ln\zeta$, $\ln\xi$*). Функция $\operatorname{Ln}\xi$ может оказаться многозначной, причем $\ln\xi$ может быть лишь одним из ее значений. В общем случае, по крайней мере в свете того, что мы пока знаем, могут представиться три возможности, а именно:

(1) мы можем всегда получать одно и то же значение $\operatorname{Ln}\zeta$, независимо от того пути, по которому мы интегрируем от 1 до ζ,

(2) мы можем получать различные значения для различных путей,

(3) мы можем иметь некоторое число различных значений, каждому из которых соответствует целый класс путей.

Из нашего определения никак не следует, какой из этих трех случаев действительно имеет место.

231. Значения $\operatorname{Ln}\zeta$. Пусть ρ и φ будут полярными координатами точки $z=\zeta$, так что

$$\zeta=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Предположим пока, что $-\pi<\varphi<\pi$, тогда как ρ может иметь любое положительное значение. Таким образом, ζ может иметь любое значение, отличное от нуля и действительного отрицательного числа.

Координаты (x, y) любой точки на пути C являются функциями от t и полярные координаты r и θ также являются функциями от t. Далее,

$$\operatorname{Ln}\zeta=\int\limits_C\frac{dz}{z}=\int\limits_C\frac{dx+i\,dy}{x+iy}=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{1}{x+iy}\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt,$$

*) Автор применяет во всей книге обозначения log вместо ln, что также широко принято. Соответственно этому он пишет Log вместо Ln. (*Прим. перев.*)

в силу определений п. 229. Но $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, и

$$\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = \left(\cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + i\left(\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) =$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)\left(\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\theta}{dt}\right),$$

так что

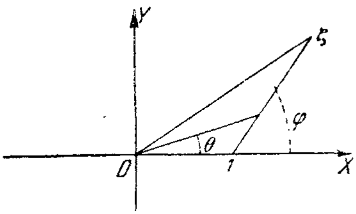
$$\operatorname{Ln}\zeta = \int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\,dt + i\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\theta}{dt}\,dt = [\ln r] + i\,[\theta],$$

где $[\ln r]$ означает разность значений $\ln r$ в точках, соответствующих $t = t_1$ и $t = t_0$, и $[\theta]$ имеет аналогичный смысл.

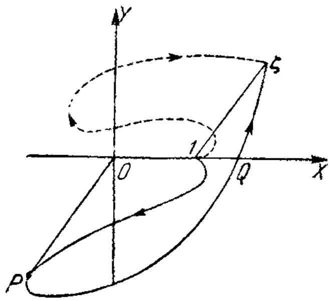
Ясно, что

$$[\ln r] = \ln\rho - \ln 1 = \ln\rho,$$

но значение $[\theta]$ требует более внимательного рассмотрения. Предположим сперва, что путь интегрирования является прямолинейным отрезком от 1 до ζ. Исходным значением θ является амплитуда 1 или, точнее, одна из амплитуд 1, т. е. $2k\pi$, где k — любое целое



Фиг. 51



Фаг. 52

число. Допустим, что исходное значение θ равно $2k\pi$. Из фиг. 51 ясно, что с изменением t значение θ возрастает от $2k\pi$ до $2k\pi + \varphi$. Таким образом,

$$[\theta] = (2k\pi + \varphi) - 2k\pi = \varphi$$

и, следовательно, когда путем интегрирования является прямолинейный отрезок,

$$\operatorname{Ln}\zeta = \ln\rho + i\varphi.$$

Это частное значение $\operatorname{Ln}\zeta$ мы будем называть *главным значением*. Когда ζ — действительное положительное число, $\zeta = \rho$ и $\varphi = 0$, так что главным значением $\operatorname{Ln}\zeta$ является обычный натуральный логарифм от ζ, $\ln\zeta$. Поэтому целесообразно и в общем случае обозначать главное значение $\operatorname{Ln}\zeta$ через $\ln\zeta$. Таким образом,

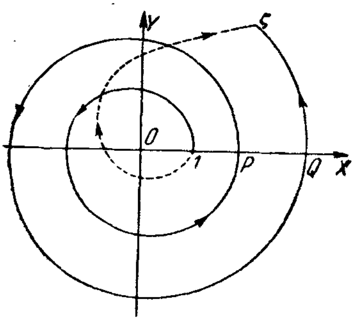
$$\ln\zeta = \ln\rho + i\varphi,$$

и главное значение характеризуется тем, что его мнимая часть заключена между $-\pi$ и π.

Далее рассмотрим любой путь, обладающий тем свойством, что область, заключенная между ним и прямолинейным отрезком от 1 до ζ, не содержит начала координат; два таких пути показаны на фиг. 52. Легко видеть, что вдоль такого пути $[\theta]$ попрежнему равно φ. Например, вдоль пути, показанного на фигуре непрерывной линией, θ, в исходной точке равное $2k\pi$, сначала убывает до значения

$$2k\pi - XOP,$$

а затем возрастает опять, принимая вновь значение $2k\pi$ в точке Q, до $2k\pi+\varphi$. В случае пути, обозначенного пунктиром, прямолинейный отрезок и кривая ограничивают две области, ни одна из которых не содержит начала координат; этот случай, хотя и несколько сложнее, но вполне аналогичен предыдущему. Таким образом, *если путь интегрирования таков, что замкнутая кривая, образованная им и прямолинейным отрезком от 1 до ζ, не содержит внутри себя начало координат, то*



Фаг. 53

$$\operatorname{Ln}\zeta = \ln\zeta = \ln\rho + i\varphi.$$

С другой стороны, очень легко построить пути интегрирования, для которых $[\theta]$ не равно φ. Рассмотрим, например, кривую, изображенную на фиг. 53 непрерывной линией. Если исходное значение θ равно $2k\pi$, то оно увеличится на 2π, когда мы придем в точку P, и на 4π, когда мы придем в точку Q; конечным значением θ будет $2k\pi+4\pi+\varphi$, так что $[\theta]=4\pi+\varphi$ и

$$\operatorname{Ln}\zeta = \ln\rho + i(4\pi+\varphi).$$

В этом случае путь интегрирования дважды обходит начало координат в положительном направлении. Если бы мы выбрали путь, обходящий k раз начало координат, то аналогично нашли бы, что $[\theta]=2k\pi+\varphi$ и

$$\operatorname{Ln}\zeta = \ln\rho + i(2k\pi+\varphi).$$

Здесь k положительно. Если путь обходит начало координат в отрицательном направлении (как, например, путь, изображенный на фиг. 53 пунктирной линией), то мы получили бы аналогичный ряд значений, для которых k отрицательно. Так как $|\zeta|=\rho$ и углы $2k\pi+\varphi$ являются разными значениями $\operatorname{am}\zeta$, то мы заключаем, что каждое значение $\ln|\zeta|+i\,\mathrm{am}\,\zeta$ является значением $\mathrm{Ln}\,\zeta$; из предшествующего рассмотрения ясно также, что любое значение $\mathrm{Ln}\,\zeta$ имеет этот вид.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: *общее значение* $\mathrm{Ln}\,\zeta$ *равно*

$$\ln|\zeta|+i\,\mathrm{am}\,\zeta=\ln\rho+i(2k\pi+\varphi),$$

где k — любое целое число. Значение k определяется путем интегрирования. Если этот путь является прямолинейным отрезком, то $k=0$ и

$$\mathrm{Ln}\,\zeta=\ln\zeta=\ln\rho+i\varphi.$$

Мы обозначили через ζ аргумент функции $\mathrm{Ln}\,\zeta$, и через ξ, η и ρ, φ — координаты точки ζ. Обозначения z, x, y, r, θ применялись нами для произвольной точки пути интегрирования и ее координат. Однако теперь нет оснований отказываться от более естественных обозначений, в которых z является аргументом функции $\mathrm{Ln}\,z$, и в дальнейшем мы возвращаемся к этим обозначениям.

Примеры XCIV. 1. В предыдущих рассмотрениях мы предполагали, что $-\pi<\theta<\pi$, так что мы исключили *действительные отрицательные* значения z. В этом случае прямолинейный отрезок от 1 до z проходит через начало координат, и поэтому недопустим как путь интегрирования. И $-\pi$ и π являются значениями $\mathrm{am}\,z$, а θ равно одному из них; кроме того, $r=-z$. Значениями $\mathrm{Ln}\,z$ являются попрежнему значения $\ln|z|+i\,\mathrm{am}\,z$, а именно,

$$\ln(-z)+(2k+1)\pi i,$$

где k — целое число. Значения

$$\ln(-z)+\pi i \text{ и } \ln(-z)-\pi i$$

соответствуют путям от 1 до z, лежащим полностью над и полностью под действительной осью. Каждое из них может быть взято в качестве главного значения $\mathrm{Ln}\,z$, смотря по тому, какое представляется более удобным. Мы выберем в качестве главного значения $\ln(-z)+\pi i$, что соответствует первому пути.

2. Действительные и мнимые части любого значения $\mathrm{Ln}\,z$ являются непрерывными функциями от x и y, если только x и y не равны одновременно нулю.

3. **Функциональное уравнение для** $\mathrm{Ln}\,z$. Функция $\mathrm{Ln}\,z$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{Ln}\,z_1z_2=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2 \tag{1}$$

в том смысле, что каждое значение одной из его частей является одним из значений другой части. Это сразу следует из результата настоящего пункта, если мы положим

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

Однако уравнение

$$\ln z_1z_2=\ln z_1+\ln z_2 \tag{2}$$

не всегда выполняется. Если, например,

$$z_1=z_2=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi,$$

то $\ln z_1 = \ln z_2 = \frac{2}{3}\pi i$, и $\ln z_1 + \ln z_2 = \frac{4}{3}\pi i$, что является одним из значений $\operatorname{Ln} z_1 z_2$, но не является главным значением. Действительно,

$$\ln z_1 z_2 = -\frac{2}{3}\pi i.$$

Уравнения такого типа как (1), в которых каждое значение одной из частей является одним из значений другой, мы будем называть *полными* или *полностью верными*.

4. Уравнение $\operatorname{Ln} z^m = m \operatorname{Ln} z$, где m — целое число, не полностью верно, так как хотя каждое значение правой части является одним из значений левой части, но обратное неверно.

5. Уравнение $\operatorname{Ln}\frac{1}{z} = -\operatorname{Ln} z$ полностью верно. Верно также и то, что $\ln\frac{1}{z} = -\ln z$, за исключением того случая, когда z — действительное отрицательное число.

6. Уравнение

$$\ln\frac{z-a}{z-b} = \ln(z-a) - \ln(z-b)$$

верно, если z лежит вне области, ограниченной отрезком прямой, соединяющим точки $z=a$ и $z=b$, и полупрямыми, исходящими из этих точек параллельно действительной оси в отрицательном направлении.

7. Уравнение

$$\ln\frac{a-z}{b-z} = \ln\left(1-\frac{a}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{b}{z}\right)$$

верно, если z лежит вне треугольника с вершинами в точках 0, a, b.

8. Нарисовать график функции $\operatorname{Im}(\operatorname{Ln} x)$ от действительного переменного x.

[График состоит из положительных полупрямых $y = 2k\pi$ и отрицательных полупрямых $y = (2k+1)\pi$.]

9. Функция $f(x)$ от действительного переменного x, определенная равенством

$$\pi f(x) = p\pi + (q-p)\operatorname{Im}(\ln x),$$

равна p, когда x положительно, и равна q, когда x отрицательно.

10. Функция $f(x)$, определенная равенством

$$\pi f(x) = p\pi + (q-p)\operatorname{Im}\{\ln(x-1)\} + (r-q)\operatorname{Im}(\ln x),$$

равна p, когда $x > 1$, равна q, когда $0 < x < 1$, и равна r, когда $x < 0$.

11. Для каких значений z 1° $\ln z$ и 2° любое значение $\operatorname{Ln} z$ (a) действительно и (b) чисто мнимо?

12. Если $z = x + iy$, то

$$\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z = \ln R + i(\Theta + 2k'\pi),$$

где

$$R^2 = (\ln r)^2 + (\theta + 2k\pi)^2$$

и Θ является наименьшим положительным углом, определенным уравнениями

$$\cos\Theta = \frac{\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + (\theta + 2k\pi)^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\theta + 2k\pi}{\sqrt{(\ln r)^2 + (\theta + 2k\pi)^2}}.$$

Наметить бесконечное множество значений $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(1+i\sqrt{3})$, и указать, какие из них являются значениями $\ln\operatorname{Ln}(1+i\sqrt{3})$ и какие — значениями $\operatorname{Ln}\ln(1+i\sqrt{3})$.

232. Показательная функция. В гл. IX мы определили функцию e^y от действительного переменного y как функцию, обратную функции $y=\ln x$. Естественно, что мы должны теперь определить функцию комплексного переменного z, которая является обратной функции $\operatorname{Ln} z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если какое-либо значение* $\operatorname{Ln} z$ *равно* ζ, *то мы называем* z *экспоненциалом от* ζ*) *и пишем*

$$z=\exp\zeta.$$

Таким образом, $z=\exp\zeta$, если $\zeta=\operatorname{Ln} z$. Мы знаем, что любому данному значению z соответствует бесконечно много различных значений ζ. На первый взгляд нельзя сразу отбросить возможность того, что каждому данному значению ζ соответствует бесконечно много значений z, или, иначе говоря, что $\exp\zeta$ является бесконечнозначной функцией от ζ. Однако, как видно из следующей теоремы, это не так.

ТЕОРЕМА. *Показательная функция* $\exp\zeta$ *является однозначной функцией от* ζ.

Действительно, пусть

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

и оба эти числа являются значениями $\exp\zeta$. Тогда

$$\zeta=\operatorname{Ln} z_1=\operatorname{Ln} z_2$$

и, следовательно,

$$\ln r_1+i(\theta_1+2m\pi)=\ln r_2+i(\theta_2+2n\pi),$$

где m и n — целые числа. Отсюда следует, что

$$\ln r_1=\ln r_2,\quad \theta_1+2m\pi=\theta_2+2n\pi,$$

т. е. $r_1=r_2$ и разность $\theta_1-\theta_2$ кратна 2π. Это означает, что $z_1=z_2$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если* ζ *— действительное число, то*

$$\exp\zeta=e^{\zeta},$$

т. е. равен действительной показательной функции от ζ, *определенной в гл. IX.*

Это следует из того, что если $z=e^{\zeta}$, то $\ln z=\zeta$, т. е. одно из значений $\operatorname{Ln} z$ есть ζ. Следовательно $z=\exp\zeta$.

---

*) Или показательной функцией. *(Прим. перев.)*

233. Значение $\exp\zeta$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ и

$$z = \exp\zeta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Тогда

$$\xi + i\eta = \operatorname{Ln} z = \ln r + i(\theta + 2m\pi),$$

где m — целое число. Следовательно, $\xi = \ln r$, $\eta = \theta + 2m\pi$, или

$$r = e^{\xi}, \quad \theta = \eta - 2m\pi$$

и, соответственно,

$$\exp(\xi + i\eta) = e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta).$$

Если $\eta = 0$, то $\exp\xi = e^{\xi}$, как мы уже видели в п. 232. Очевидно, что действительная и мнимая части $\exp(\xi + i\eta)$ являются непрерывными функциями от ξ и η для всех значений ξ и η.

234. Функциональное уравнение для $\exp\zeta$. Пусть

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2.$$

Тогда

$$\exp\zeta_1 \cdot \exp\zeta_2 = e^{\xi_1}(\cos\eta_1 + i\sin\eta_1) \cdot e^{\xi_2}(\cos\eta_2 + i\sin\eta_2) =$$
$$= e^{\xi_1+\xi_2}\{\cos(\eta_1 + \eta_2) + i\sin(\eta_1 + \eta_2)\} = \exp(\zeta_1 + \zeta_2).$$

Показательная функция удовлетворяет, таким образом, функциональному уравнению $f(\zeta_1 + \zeta_2) = f(\zeta_1)f(\zeta_2)$. В случае действительных значений ζ_1 и ζ_2 мы это уже доказали раньше (см. п. 213).

235. Общая показательная функция a^{ζ}. Так как $\exp\zeta = e^{\zeta}$, когда ζ действительно, то казалось бы естественным применять то же обозначение и в случае комплексного ζ и совершенно отказаться от обозначения $\exp\zeta$. Однако мы так не поступим, потому что в дальнейшем припишем символу e^{ζ} некоторый более общий смысл. Мы увидим, что e^{ζ} представляет бесконечно-значную функцию, одним из значений которой является $\exp\zeta$.

Мы уже определили a^{ζ} в значительном числе случаев. Этот символ определяется в элементарной алгебре в тех случаях, когда a — действительное положительное число и ζ рационально, или когда a — действительное отрицательное число и ζ — рациональное число с нечетным знаменателем. По определениям элементарной алгебры, a^{ζ} может иметь не более двух значений. В гл. III мы распространили наши определения на тот случай, когда a — любое действительное или комплексное число, а ζ — любое рациональное число $\frac{p}{q}$; наконец, в гл. IX мы дали новое определение с помощью равенства

$$a^{\zeta} = e^{\zeta \ln a},$$

которое применимо для всех действительных ζ и всех действительных и положительных a.

Итак, мы тем или иным образом приписали определенные значения таким выражениям, как

$$3^{1/2}, \quad (-1)^{1/3}, \quad \left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)^{-1/2}, \quad (3{,}5)^{1+\sqrt{2}},$$

но мы еще не имеем определений, в силу которых можно было бы приписать определенные значения

$$(1+i)^{\sqrt{2}}, \quad 2^i, \quad (3+2i)^{2+3i}.$$

Мы дадим теперь общее определение a^ζ, которое применимо ко всем значениям a и ζ как действительным, так и комплексным, за единственным исключением $a=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция a^ζ определяется соотношением*

$$a^\zeta = \exp(\zeta \operatorname{Ln} a),$$

где $\operatorname{Ln} a$ *обозначает любое значение логарифма a.*

Мы должны убедиться в том, что это определение не противоречит нашим предыдущим определениям и содержит их все как частные случаи.

(1) Если a положительно и ζ — действительное число, то одно из значений $\zeta \operatorname{Ln} a$, а именно, $\zeta \ln a$, действительно, и $\exp(\zeta \ln a) = e^{\zeta \ln a}$, что совпадает с определением в гл. IX. Как мы там видели, определение из гл. IX не противоречит определениям, даваемым в элементарной алгебре. Следовательно, и наше новое определение также не противоречит им.

(2) Если $a = e^\tau(\cos\psi + i\sin\psi)$, то

$$\operatorname{Ln} a = \tau + i(\psi + 2m\pi),$$

$$\exp\left(\frac{p}{q}\operatorname{Ln} a\right) = e^{p\tau/q}\operatorname{Cis}\left\{\frac{p}{q}(\psi + 2m\pi)\right\},$$

где m — любое целое число. Легко видеть, что когда m принимает всевозможные целочисленные значения, это выражение принимает q и только q различных значений, которые как раз являются значениями $a^{p/q}$, найденными в п. 48. Таким образом, наше определение не противоречит и определению из гл. III.

236. Общее значение a^ζ. Пусть

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad a = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi),$$

где $-\pi < \psi \leqslant \pi$, так что, в обозначениях п. 235, $\sigma = e^\tau$ или $\tau = \ln\sigma$. Тогда

$$\zeta \operatorname{Ln} a = (\xi + i\eta)\{\ln\sigma + i(\psi + 2m\pi)\} = L + iM,$$

где

$$L = \xi\ln\sigma - \eta(\psi + 2m\pi), \qquad M = \eta\ln\sigma + \xi(\psi + 2m\pi),$$

и

$$a^\zeta = \exp(\zeta \operatorname{Ln} a) = e^L(\cos M + i\sin M).$$

Таким образом, общим значением a^ζ является

$$e^{\xi \ln \sigma - \eta(\psi + 2m\pi)}[\cos\{\eta \ln \sigma + \xi(\psi + 2m\pi)\} + \\ + i \sin\{\eta \ln \sigma + \xi(\psi + 2m\pi)\}].$$

В общем случае a^ζ — бесконечно-значная функция. Действительно,

$$|a^\zeta| = e^{\xi \ln \sigma - \eta(\psi + 2m\pi)}$$

имеет различные значения для каждого значения m, если $\eta \neq 0$. Если же $\eta = 0$, то модули всех различных значений a^ζ равны между собой. Но любые два значения будут все же отличаться друг от друга, если их амплитуды не равны или их разность не кратна 2π. Для того чтобы два таких значения совпадали, нужно чтобы $\xi(\psi + 2m\pi)$ и $\xi(\psi + 2n\pi)$, где m и n — целые числа, $m \neq n$, отличались друг от друга на кратное 2π. Но если

$$\xi(\psi + 2m\pi) - \xi(\psi + 2n\pi) = 2k\pi,$$

то $\xi = \dfrac{k}{m - n}$ должно быть рациональным. Мы видим, что a^ζ *бесконечно-значно, если* ζ *не является действительным рациональным числом.* С другой стороны, мы действительно видели, что при ζ действительном и рациональном a^ζ имеет только конечное число значений.

Главным значением $a^\zeta = \exp(\zeta \operatorname{Ln} a)$ является то, которое получается при главном значении $\operatorname{Ln} a$, т. е. при $m = 0$ в общей формуле. Таким образом, главное значение a^ζ равно

$$e^{\xi \ln \sigma - \eta\psi}\{\cos(\eta \ln \sigma + \xi\psi) + i \sin(\eta \ln \sigma + \xi\psi)\}.$$

Следующие два частных случая представляют особый интерес. Если a действительно и положительно и ζ действительно, то $\sigma = a$, $\psi = 0$, $\xi = \zeta$, $\eta = 0$, и главное значение a^ζ равно $e^{\zeta \ln a}$, что совпадает со значением, определенным в гл. IX. Если $|a| = 1$ и ζ действительно, то $\sigma = 1$, $\xi = \zeta$, $\eta = 0$, и главное значение $(\cos\psi + i \sin\psi)^\zeta$ равно $\cos\zeta\psi + i \sin\zeta\psi$. Это является дальнейшим обобщением теоремы Муавра (см. пп. 45, 49).

Примеры XCV. 1. Найти все значения i^i.

[По определению,

$$i^i = \exp(i \operatorname{Ln} i).$$

Но

$$i = \cos\frac{1}{2}\pi + i \sin\frac{1}{2}\pi, \qquad \operatorname{Ln} i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

где k — любое целое число. Следовательно,

$$i^i = \exp\left\{-\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} = e^{-(2k + 1/2)\pi}.$$

Таким образом, все значения i^i действительны и положительны.]

2. Все значения a^ζ лежат на диаграмме Аргана в вершинах ломаной, вписанной в логарифмическую спираль, последовательные звенья которой

образуют друг с другом равные углы, причем форма спирали не зависит от a.

(*Экз.* 1899 г.)

[Если
$$a^{\zeta}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$
то мы имеем
$$r=e^{\xi\ln\sigma-\eta(\psi+2m\pi)},\quad \theta=\eta\ln\sigma+\xi(\psi+2m\pi),$$
и все эти точки лежат на спирали
$$r=\sigma^{\xi^2+\eta^2/\xi}\,e^{-\eta\theta/\xi}.]$$

3. **Функция** e^{ζ}. Если мы положим $a=e$ в общей формуле, так что $\ln\sigma=1$, $\psi=0$, то получим
$$e^{\zeta}=e^{\xi-2m\pi\eta}\{\cos(\eta+2m\pi\xi)+i\sin(\eta+2m\pi\xi)\}.$$

Главным значением e^{ζ} является $e^{\xi}(\cos\eta+i\sin\eta)$, что равно $\exp\zeta$ (см. п. 233). В частности, если ζ действительно, то $\eta=0$, и общее значение будет равно
$$e^{\zeta}(\cos 2m\pi\zeta+i\sin 2m\pi\zeta),$$
а главное значение будет e^{ζ}, где e^{ζ} обозначает положительное значение экспоненциала, определенное в гл. IX.

4. Показать, что
$$\operatorname{Ln} e^{\zeta}=(1+2m\pi i)\zeta+2n\pi i,$$
где m и n — произвольные целые числа, и что в общем случае $\operatorname{Ln} a^{\zeta}$ имеет ∞^2 значений*).

5. Уравнение
$$\frac{1}{a^{\zeta}}=a^{-\zeta}$$
полностью верно (см. пример XCIV. 3); оно выполняется также и для главных значений.

6. Уравнение
$$a^{\zeta}\cdot b^{\zeta}=(ab)^{\zeta}$$
полностью верно, но для главных значений оно может не иметь места.

7. Уравнение
$$a^{\zeta}\cdot a^{\zeta'}=a^{\zeta+\zeta'}$$
не является полным, но для главных значений оно имеет место.

[Каждое значение правой части является одним из значений левой части, но общее значение $a^{\zeta}\cdot a^{\zeta'}$, а именно,
$$\exp\{\zeta(\ln a+2m\pi i)+\zeta'(\ln a+2n\pi i)\},$$
как правило не является значением $a^{\zeta+\zeta'}$, если $m\neq n$.]

8. Каковы соответствующие результаты для уравнений
$$\operatorname{Ln} a^{\zeta}=\zeta\operatorname{Ln} a,\quad (a^{\zeta})^{\zeta'}=(a^{\zeta'})^{\zeta}=a^{\zeta\zeta'}?$$

9. Для того чтобы все значения a^{ζ} были действительными, необходимо и достаточно, чтобы
$$2\xi \text{ и } \frac{1}{\pi}(\eta\ln|a|+\xi\operatorname{am}a),$$

*) Т. е. что эти значения зависят от двух параметров, принимающих каждый бесконечное число (целочисленных) значений. (*Прим. перев.*)

где am a обозначает любое значение амплитуды, были оба целочисленны. Каковы соответствующие условия для того, чтобы все значения имели модуль, равный 1?

10. Общим значением $|x^i+x^{-i}|$, где $x>0$, является

$$e^{-(m-n)\pi}\sqrt{2\{\operatorname{ch} 2(m+n)\pi+\cos(2\ln x)\}}.$$

11. Найти ошибку в следующем рассуждении: так как

$$e^{2m\pi i}=e^{2n\pi i}=1,$$

где m и n — любые целые числа, то возводя каждую часть этого равенства в степень i, найдем, что

$$e^{-2m\pi}=e^{-2n\pi}.$$

12. При каких условиях некоторые из значений x^x, где x — действительное число, будут действительными?

[Если $x>0$, то

$$x^x=\exp(x\operatorname{Ln} x)=\exp(x\ln x)\operatorname{Cis} 2m\pi x,$$

где первый множитель действителен. Главное значение, для которого $m=0$, всегда действительно.

Когда x — рациональное число вида $\frac{p}{2q+1}$ или когда x иррационально, то другого действительного значения нет. Но если x — рациональное число вида $\frac{p}{2q}$, то имеется еще одно действительное значение, а именно, $-\exp(x\ln x)$, соответствующее $m=q$.

Если $x=-\xi<0$, то

$$x^x=\exp\{-\xi\operatorname{Ln}(-\xi)\}=\exp(-\xi\ln\xi)\operatorname{Cis}\{-(2m+1)\pi\xi\}.$$

Единственным случаем, в котором это выражение может иметь действительное значение, является $\xi=\frac{p}{2q+1}$; в этом случае при $m=q$ мы получаем действительное значение

$$\exp(-\xi\ln\xi)\operatorname{Cis}(-p\pi)=(-1)^p\xi^{-\xi}.$$

Эти результаты иллюстрируются следующими примерами:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2/3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}},$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1/3}=-\sqrt[3]{3}.]$$

13. **Логарифмы при любом основании.** Мы можем определить $\xi=\operatorname{Log}_a z$ двумя способами. Мы можем, во-первых, положить $\zeta=\operatorname{Log}_a z$, если *главное значение* a^ζ равно z, или мы можем, во-вторых, положить $\zeta=\operatorname{Log}_a z$, если *некоторое* значение a^ζ равно z.

Так, если $a=e$, то, по первому определению, $\zeta=\operatorname{Log}_e z$, если главное значение e^ζ равно z, т. е. если $\exp\zeta=z$; таким образом, $\operatorname{Log}_e z$ совпадает с $\operatorname{Ln} z$. Но, по второму определению, $\zeta=\operatorname{Log}_e z$, если

$$e^\zeta=\exp(\zeta\operatorname{Ln} e)=z,\quad \zeta\operatorname{Ln} e=\operatorname{Ln} z$$

или $\zeta = \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} e}$, причем логарифмы могут иметь любые значения. Следовательно,

$$\zeta = \operatorname{Log}_e z = \frac{\ln|z| + (\operatorname{am} z + 2m\pi)i}{1 + 2n\pi i},$$

так что ζ является многозначной функцией от z с ∞^2 значениями. По этому определению мы имеем, вообще,

$$\operatorname{Log}_a z = \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} a}.$$

14.

$$\operatorname{Log}_e 1 = \frac{2m\pi i}{1 + 2n\pi i}, \quad \operatorname{Log}_e(-1) = \frac{(2m+1)\pi i}{1 + 2n\pi i},$$

где m и n — любые целые числа.

237. Выражения синуса и косинуса через показательную функцию. Из формулы

$$\exp(\xi + i\eta) = \exp\xi(\cos\eta + i\sin\eta)$$

мы можем вывести много важных следствий. Полагая $\xi = 0$, мы получаем $\exp(i\eta) = \cos\eta + i\sin\eta$; заменяя здесь η на $-\eta$, получаем также $\exp(-i\eta) = \cos\eta - i\sin\eta$. Следовательно,

$$\cos\eta = \frac{1}{2}\{\exp(i\eta) + \exp(-i\eta)\},$$

$$\sin\eta = -\frac{1}{2}i\{\exp(i\eta) - \exp(-i\eta)\}.$$

Соответствующие выражения через $\exp(i\eta)$ мы можем получить, конечно, и для других тригонометрических функций от η.

238. Определение $\sin\zeta$ и $\cos\zeta$ для всех значений ζ. В предыдущем пункте мы видели, что если ζ действительно, то

$$\cos\zeta = \frac{1}{2}\{\exp(i\zeta) + \exp(-i\zeta)\}, \tag{1a}$$

$$\sin\zeta = -\frac{1}{2}i\{\exp(i\zeta) - \exp(-i\zeta)\}. \tag{1b}$$

Левые части этих равенств определены, в силу известных геометрических определений элементарной тригонометрии, только для действительных значений ζ. Но правые части были определены для всех значений ζ, действительных или комплексных. Таким образом, мы, естественно, приходим к *определениям* $\cos\zeta$ и $\sin\zeta$ для всех значений ζ с помощью формул (1). В силу результатов п. 237, эти определения совпадают для действительных значений ζ с известными элементарными определениями.

Определив, таким образом, $\cos\zeta$ и $\sin\zeta$, мы определяем другие тригонометрические функции соотношениями

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}, \quad \operatorname{ctg}\zeta = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta}, \quad \sec\zeta = \frac{1}{\cos\zeta}, \quad \operatorname{cosec}\zeta = \frac{1}{\sin\zeta}. \tag{2}$$

Ясно, что $\cos\zeta$ и $\sec\zeta$ являются четными функциями от ζ, а $\sin\zeta$, $\operatorname{tg}\zeta$, $\operatorname{ctg}\zeta$ и $\operatorname{cosec}\zeta$ — нечетными функциями. Далее, если $\exp(i\zeta)=t$, то мы имеем

$$\cos\zeta=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\qquad \sin\zeta=-\frac{1}{2}i\left(t-\frac{1}{t}\right),$$

$$\cos^2\zeta+\sin^2\zeta=\frac{1}{4}\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2\right\}=1. \tag{3}$$

Более того, мы можем выразить тригонометрические функции от $\zeta+\zeta'$ через тригонометрические функции от ζ и ζ' с помощью тех же самых формул, которые имеют место в элементарной тригонометрии. Действительно, если $\exp(i\zeta)=t$, $\exp(i\zeta')=t'$, то мы имеем

$$\cos(\zeta+\zeta')=\frac{1}{2}\left(tt'+\frac{1}{tt'}\right)=\frac{1}{4}\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t'+\frac{1}{t'}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t'-\frac{1}{t'}\right)\right\}=\cos\zeta\cos\zeta'-\sin\zeta\sin\zeta', \tag{4}$$

и аналогично мы можем доказать, что

$$\sin(\zeta+\zeta')=\sin\zeta\cos\zeta'+\cos\zeta\sin\zeta'. \tag{5}$$

В частности,

$$\cos\left(\zeta+\frac{1}{2}\pi\right)=-\sin\zeta,\qquad \sin\left(\zeta+\frac{1}{2}\pi\right)=\cos\zeta. \tag{6}$$

Все общеизвестные формулы элементарной тригонометрии являются алгебраическими следствиями уравнений (2) — (6), и, следовательно, все эти формулы имеют место и для обобщенных тригонометрических функций, определенных в этом пункте.

239. Обобщенные гиперболические функции. В примере LXXXVIII. 20 мы определили $\operatorname{ch}\zeta$ и $\operatorname{sh}\zeta$ для действительных значений ζ уравнениями

$$\operatorname{ch}\zeta=\frac{1}{2}\left(\exp\zeta+\exp(-\zeta)\right),\quad \operatorname{sh}\zeta=\frac{1}{2}\left(\exp\zeta-\exp(-\zeta)\right). \tag{1}$$

Мы можем теперь распространить это определение на комплексные значения переменного, т. е. мы можем условиться считать уравнения (1) определяющими $\operatorname{ch}\zeta$ и $\operatorname{sh}\zeta$ для всех значений ζ, как действительных, так и комплексных. Читатель легко проверит, что

$$\cos i\zeta=\operatorname{ch}\zeta,\ \sin i\zeta=i\operatorname{sh}\zeta,\ \operatorname{ch}i\zeta=\cos\zeta,\ \operatorname{sh}i\zeta=i\sin\zeta.$$

Мы видели, что любая элементарная тригонометрическая формула как, например, $\cos 2\zeta=\cos^2\zeta-\sin^2\zeta$, остается в силе и в том случае, когда для ζ допускаются комплексные значения. Следовательно, она остается в силе, если мы заменим в ней $\cos\zeta$ на $\cos i\zeta$, $\sin\zeta$ на $\sin i\zeta$ и $\cos 2\zeta$ на $\cos 2i\zeta$, т. е. если мы заменим $\cos\zeta$ на $\operatorname{ch}\zeta$, $\sin\zeta$ на $i\operatorname{sh}\zeta$ и $\cos 2\zeta$ на $\operatorname{ch}2\zeta$. Таким образом,

$$\operatorname{ch}2\zeta=\operatorname{ch}^2\zeta+\operatorname{sh}^2\zeta.$$

Аналогичное преобразование применимо к любому тригонометрическому тождеству. Это объясняет то соответствие, которое было отмечено нами в примере LXXXVIII. 22 между формулами для гиперболических и для обыкновенных тригонометрических функций.

240. Формулы для $\cos(\xi+i\eta)$, $\sin(\xi+i\eta)$ **и т. д.** Из формул сложения следует, что

$$\cos(\xi+i\eta)=\cos\xi\cos i\eta-\sin\xi\sin i\eta=\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta-i\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta,$$
$$\sin(\xi+i\eta)=\sin\xi\cos i\eta+\cos\xi\sin i\eta=\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta+i\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta.$$

Эти формулы имеют место для всех значений ξ и η. Интересным случаем является тот, в котором ξ и η действительны. В этом случае они дают выражения для действительной и мнимой частей косинуса и синуса от комплексного аргумента.

Примеры XCVI. 1. Определить значения ζ, для которых $\cos\zeta$ и $\sin\zeta$ 1° действительны, 2° чисто мнимы.

[Например, $\cos\zeta$ действителен, когда $\eta=0$ или когда ξ кратно π.]

2.
$$|\cos(\xi+i\eta)|=\sqrt{\cos^2\xi+\mathrm{sh}^2\eta}=\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\eta+\cos 2\xi)},$$
$$|\sin(\xi+i\eta)|=\sqrt{\sin^2\xi+\mathrm{sh}^2\eta}=\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\eta-\cos 2\xi)}.$$

[Использовать, например, равенство

$$|\cos(\xi+i\eta)|=\sqrt{\cos(\xi+i\eta)\cos(\xi-i\eta)}.]$$

3.
$$\mathrm{tg}(\xi+i\eta)=\frac{\sin 2\xi+i\,\mathrm{sh}\,2\eta}{\mathrm{ch}\,2\eta+\cos 2\xi},\quad \mathrm{ctg}(\xi+i\eta)=\frac{\sin 2\xi-i\,\mathrm{sh}\,2\eta}{\mathrm{ch}\,2\eta-\cos 2\xi}.$$

[Например,
$$\mathrm{tg}(\xi+i\eta)=\frac{\sin(\xi+i\eta)\cos(\xi-i\eta)}{\cos(\xi+i\eta)\cos(\xi-i\eta)}=\frac{\sin 2\xi+\sin 2i\eta}{\cos 2\xi+\cos 2i\eta},$$
что приводит к указанному результату.]

4.
$$\sec(\xi+i\eta)=\frac{\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta+i\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta}{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\eta+\cos 2\xi)},$$
$$\mathrm{cosec}(\xi+i\eta)=\frac{\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta-i\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta}{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\eta-\cos 2\xi)}.$$

5. Если $|\cos(\xi+i\eta)|=1$, то $\sin^2\xi=\mathrm{sh}^2\eta$, а если $|\sin(\xi+i\eta)|=1$, то $\cos^2\xi=\mathrm{sh}^2\eta$.

6. Если $|\cos(\xi+i\eta)|=1$, то

$$\sin\{\mathrm{am}\cos(\xi+i\eta)\}=\pm\sin^2\xi=\pm\mathrm{sh}^2\eta.$$

7. Доказать, что $\mathrm{Ln}\cos(\xi+i\eta)=A+iB$, где

$$A=\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\eta+\cos 2\xi)\right\},$$

и B — любой угол, для которого

$$\frac{\cos B}{\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta}=-\frac{\sin B}{\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\eta+\cos 2\xi)}}.$$

Найти аналогичную формулу для $\mathrm{Ln}\sin(\xi+i\eta)$.

8. **Решение уравнения** $\cos\zeta=\alpha$, **где** α — **действительное число.** Полагая $\zeta=\xi+i\eta$ и приравнивая действительные и мнимые части, мы получим:

$$\cos\xi\operatorname{ch}\eta=\alpha,\quad \sin\xi\operatorname{sh}\eta=0.$$

Отсюда следует, что либо $\eta=0$, либо ξ кратно π. Если (1) $\eta=0$, то $\cos\xi=\alpha$, что возможно только в том случае, когда $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$. Это предположение приводит к решению

$$\zeta=2k\pi\pm\arccos\alpha,$$

где $\arccos\alpha$ заключено между 0 и $\frac{1}{2}\pi$. Если (2) $\xi=m\pi$, то $\operatorname{ch}\eta=(-1)^m\alpha$, так что либо $\alpha\geqslant 1$ и m — четное число, либо $\alpha\leqslant -1$ и m нечетно. Если $\alpha=\pm 1$, то $\eta=0$, и мы возвращаемся к первому случаю. Если $|\alpha|>1$, то $\operatorname{ch}\eta=|\alpha|$, и мы приходим к решениям

$$\zeta=2k\pi\pm i\ln\{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\}\ (\alpha>1),$$
$$\zeta=(2k+1)\pi\pm i\ln\{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\}\ (\alpha<-1).$$

Например, общим решением уравнения $\cos\zeta=-\frac{5}{3}$ является

$$\zeta=(2k+1)\pi\pm i\ln 3.$$

Решить аналогично уравнение $\sin\zeta=\alpha$.

9. **Решение уравнения** $\cos\zeta=\alpha+i\beta$, **где** $\beta\neq 0$. Мы можем предположить, что $\beta>0$, так как решение в случае $\beta<0$ может быть получено простым изменением знака при i. В данном случае

$$\cos\xi\operatorname{ch}\eta=\alpha,\quad \sin\xi\operatorname{sh}\eta=-\beta \tag{1}$$

и

$$\frac{\alpha^2}{\operatorname{ch}^2\eta}+\frac{\beta^2}{\operatorname{sh}^2\eta}=1.$$

Если мы положим $\operatorname{ch}^2\eta=x$, то найдем, что

$$x^2-(1+\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2=0$$

или $x=(A_1\pm A_2)^2$, где

$$A_1=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2},\quad A_2=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}.$$

Допустим, что $\alpha>0$. Тогда $A_1>A_2>0$ и $\operatorname{ch}\eta=A_1\pm A_2$. Далее,

$$\cos\xi=\frac{\alpha}{\operatorname{ch}\eta}=A_1\mp A_2,$$

а так как $\operatorname{ch}\eta>\cos\xi$, то мы должны положить

$$\operatorname{ch}\eta=A_1+A_2,\quad \cos\xi=A_1-A_2.$$

Общими решениями этих уравнений являются

$$\xi=2k\pi\pm\arccos M,\qquad \eta=\pm\ln\{L+\sqrt{L^2-1}\}, \tag{2}$$

где $L=A_1+A_2$, $M=A_1-A_2$, и $\arccos M$ заключен между 0 и $\frac{1}{2}\pi$.

Таким образом, полученные значения η и ξ являются, однако, не только решениями уравнений (1), но и уравнений

$$\cos\xi\operatorname{ch}\eta=\alpha,\ \sin\xi\operatorname{sh}\eta=\beta, \tag{3}$$

так как мы использовали второе из уравнений (1) после возведения его в квадрат. Для того чтобы отделить эти две системы решений друг от друга, заметим, что знак $\sin\xi$ совпадает со знаком, выбранным в первом из уравнений (2), а знак $\operatorname{sh}\eta$ — со знаком, выбранным во втором из этих уравнений. Так как $\beta > 0$, то эти знаки должны быть противоположными. Таким образом, искомым общим решением является

$$\zeta = 2k\pi \pm [\arccos M - i\ln\{L + \sqrt{L^2-1}\}].$$

Разобрать аналогично случаи, в которых $\alpha < 0$ и $\alpha = 0$.

10. Если $\beta = 0$, то

$$L = \frac{1}{2}|\alpha+1| + \frac{1}{2}|\alpha-1| \text{ и } M = \frac{1}{2}|\alpha+1| - \frac{1}{2}|\alpha-1|.$$

Проверить, что эти результаты совпадают с результатами примера 8.

11. Показать, что если α и β положительны, то общим решением уравнения $\sin\zeta = \alpha + i\beta$ является

$$\zeta = k\pi + (-1)^k [\arcsin M + i\ln\{L + \sqrt{L^2-1}\}],$$

где $\arcsin M$ заключен между 0 и $\frac{1}{2}\pi$. Найти решение в остальных случаях.

12. Решить уравнение $\operatorname{tg}\zeta = \alpha$, где α — действительное число. [Все корни этого уравнения действительны.]

13. Показать, что общим решением уравнения $\operatorname{tg}\zeta = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, является

$$\zeta = k\pi + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}i\ln\frac{\alpha^2+(1+\beta)^2}{\alpha^2+(1-\beta)^2},$$

где θ — наименьший по абсолютной величине угол, для которого

$$\cos\theta = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2}}, \quad \sin\theta = \frac{2\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2}}.$$

14. Доказать, что

$$|\exp\exp(\xi + i\eta)| = \exp(\exp\xi\cos\eta),$$
$$\operatorname{Re}\{\cos\cos(\xi + i\eta)\} = \cos(\cos\xi\operatorname{ch}\eta)\operatorname{ch}(\sin\xi\operatorname{sh}\eta),$$
$$\operatorname{Im}\{\sin\sin(\xi + i\eta)\} = \cos(\sin\xi\operatorname{ch}\eta)\operatorname{sh}(\cos\xi\operatorname{sh}\eta).$$

15. Доказать, что $|\exp\zeta|$ стремится к ∞, когда ζ стремится к бесконечности вдоль любого луча, исходящего из начала координат и образующего с действительной осью угол, меньший $\frac{1}{2}\pi$, и стремится к 0, когда ζ стремится к бесконечности вдоль такого же луча, но образующего с действительной осью угол, заключенный между $\frac{1}{2}\pi$ и π.

16. Доказать, что $|\cos\zeta|$ и $|\sin\zeta|$ стремятся к ∞, когда ζ стремится к бесконечности вдоль любого луча, исходящего из начала координат и не совпадающего ни с одной из действительных полуосей.

17. Доказать, что $\operatorname{tg}\zeta$ стремится к $-i$ или к i, когда ζ стремится к бесконечности вдоль любого из лучей, указанных в примере 16, причем пределом будет $-i$, если этот луч проходит над действительной осью, и i, если он проходит под действительной осью.

241. Связь между логарифмической и обратными тригонометрическими функциями. В гл. VI мы видели, что интеграл от дробно-рациональной или алгебраической функции $\varphi(x, \alpha, \beta, \ldots)$, где $\alpha, \beta, \ldots$ — постоянные часто принимает различные формы, в зависимости от значений $\alpha, \beta, \ldots$; иногда он выражается через логарифмы, а иногда — через обратные тригонометрические функции. Так, например,

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}, \tag{1}$$

если $a > 0$, но

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{-a}}{x+\sqrt{-a}} \right|, \tag{2}$$

если $a < 0$. Эти формулы указывают на то, что должна существовать какая то функциональная зависимость между логарифмической и обратными тригонометрическими функциями. Что такая зависимость действительно существует, можно видеть из того, что, как мы уже видели, тригонометрические функции от ζ выражаются через $\exp i\zeta$ и что логарифм является функцией обратной показательной функции.

Рассмотрим внимательнее соотношение

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{x-\alpha}{x+\alpha},$$

которое имеет место, если α действительно и $\frac{x-\alpha}{x+\alpha}$ положительно. Если бы мы могли в этом уравнении заменить α на $i\alpha$, то пришли бы к формуле

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{2i} \ln \frac{x-i\alpha}{x+i\alpha} + C, \tag{3}$$

где C — постоянная, и поскольку мы уже определили логарифм от комплексного числа, то возникает вопрос, справедливо ли это соотношение или нет.

По предыдущему (см. п. 231),

$$\operatorname{Ln}(x \pm i\alpha) = \frac{1}{2} \ln(x^2+\alpha^2) \pm i(\varphi + 2k\pi),$$

где k — целое число и φ — наименьший по абсолютной величине угол, для которого

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{x-i\alpha}{x+i\alpha} = -\varphi - l\pi,$$

где l — целое число, а это последнее выражение действительно отличается от любого значения $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\alpha}$ только на постоянное слагаемое.

Основной формулой, связывающей логарифмическую и обратные тригонометрические функции, является следующая:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+ix}{1-ix}, \tag{4}$$

где x действительно. Эту формулу легче всего проверить, полагая в ней $x = \operatorname{tg} y$, причем правая часть сведется к выражению

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{\cos y + i \sin y}{\cos y - i \sin y} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}(\exp 2iy) = y + k\pi,$$

где k — любое целое число. Таким образом, уравнение (4) „полностью“ верно (см. пример XCIV. 3). Читателю предлагается также проверить формулы

$$\arc\cos x = -i\,\mathrm{Ln}\,(x \pm i\sqrt{1-x^2}),\quad \arcsin x = -i\,\mathrm{Ln}\,(ix \pm \sqrt{1-x^2}), \tag{5}$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Каждая из этих формул также „полностью" верна.

Пример. Решая относительно y уравнение

$$\cos u = x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right),$$

где $y = \exp(iu)$, мы получим:

$$y = x \pm i\sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом,

$$u = -i\,\mathrm{Ln}\,y = -i\,\mathrm{Ln}\,(x \pm i\sqrt{1-x^2}),$$

что эквивалентно первому из уравнений (5). Получить так же уравнение (4) и второе уравнение (5).

242. Степенной ряд для $\exp z$[1]. В п. 219 мы видели, что если z действительно, то

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots . \tag{1}$$

В п. 198 мы также видели, что ряд в правой части остается сходящимся (и даже абсолютно), когда z — комплексное число. Естественно предположить, что уравнение (1) также остается в силе, и мы теперь докажем, что это действительно так.

Пусть сумма ряда (1) обозначена через $F(z)$. Так как ряд абсолютно сходится, то непосредственным перемножением (как в примере LXXXI. 7) мы убедимся, что $F(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(z+h) = F(z)\,F(h), \tag{2}$$

и, в частности, что

$$F(x+iy) = F(x)\,F(iy).$$

Но

$$F(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = e^x,$$

и

$$F(iy) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) = \cos y + i\sin y.$$

Следовательно,

$$F(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = \exp z,$$

если $z = x + iy$.

Имеется еще другое доказательство, которое представляет интерес, в силу того, что оно не использует степенные ряды для $\cos y$ и $\sin y$.

Если $F(iy) = f(y)$, то $f(y+k) = f(y)f(k)$ и

$$\frac{f(y+k)-f(y)}{k} = f(y)\,\frac{f(k)-1}{k} =$$

$$= if(y)\left\{1 + \frac{ik}{2!} + \frac{(ik)^2}{3!} + \ldots\right\} = if(y)(1+\rho),$$

---

[1]) Теперь удобнее обозначать аргумент показательной функции через z, а не через ζ.

где

$$|\rho| \leqslant \frac{|k|}{2!} + \frac{|k|^2}{3!} + \ldots \leqslant (e-2)|k|$$

для малых k, так что ρ стремится к 0 при $k \to 0$. Следовательно, $f(y)$ дифференцируема и

$$f'(y) = if(y).$$

Отсюда следует, что

$$g(y) = f(y)(\cos y - i \sin y)$$

дифференцируема[1]). Далее,

$$g'(y) = if(y)(\cos y - i \sin y) - f(y)(\sin y + i \cos y) = 0,$$

так что $g(y)$ постоянна. Следовательно,

$$g(y) = g(0) = 1$$

и

$$f(y) = \frac{1}{\cos y - i \sin y} = \frac{\cos y + i \sin y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \cos y + i \sin y.$$

Наконец,

$$F(iy) = f(y) = \cos y + i \sin y$$

и

$$F(x+iy) = F(x) F(iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

243. Степенные ряды для $\cos z$ **и** $\sin z$. Из результатов предыдущего пункта и уравнений (1) п. 238 следует, что

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

для всех значений z.

Примеры XCVII. 1. Доказать, что

$$|\cos z| \leqslant \operatorname{ch} |z|, \quad |\sin z| \leqslant \operatorname{sh} |z|.$$

2. Доказать, что если $|z| < 1$, то $|\cos z| < 2$ и $|\sin z| < \frac{6}{5} |z|$.

3. Так как $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, то

$$(2z) - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \ldots = 2\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots\right).$$

Доказать перемножением рядов в правой части (см. п. 202) и сравнением коэффициентов (см. п. 201), что

$$\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1} = 2^{2n}.$$

---

[1]) Следующее в тексте рассуждение содержало в предыдущих изданиях одну любопытную ошибку. Приведенное здесь окончание доказательства предложено Лявом (Love).

Проверить результат с помощью биномиальной теоремы. Вывести аналогичные тождества из уравнений

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cos 2z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z.$$

4. Показать, что

$$\exp\{(1+i)z\} = \sum_0^\infty 2^{n/2} \exp\left(\frac{1}{4} n\pi i\right)\frac{z^n}{n!}.$$

5. Разложить $\cos z \operatorname{ch} z$ по степеням z.

[Мы имеем

$$\cos z \operatorname{ch} z - i \sin z \operatorname{sh} z = \cos(1+i)z = \frac{1}{2}[\exp\{(1+i)z\} + \exp\{-(1+i)z\}] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^\infty 2^{n/2}\{1+(-1)^n\}\exp\left(\frac{1}{4}n\pi i\right)\frac{z^n}{n!},$$

и аналогично

$$\cos z \operatorname{ch} z + i \sin z \operatorname{sh} z = \cos(1-i)z =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^\infty 2^{n/2}\{1+(-1)^n\}\exp\left(-\frac{1}{4}n\pi i\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Следовательно,

$$\cos z \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\sum_0^\infty 2^{n/2}\{1+(-1)^n\}\cos\frac{1}{4}n\pi\frac{z^n}{n!} = 1 - \frac{2^2 z^4}{4!} + \frac{2^4 z^8}{8!} - \ldots .]$$

6. Разложить $\sin^2 z$ и $\sin^3 z$ по степеням z.

[Применить формулы

$$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z), \quad \sin^3 z = \frac{1}{4}(3\sin z - \sin 3z).$$

Ясно, что этот метод применим и к разложениям $\cos^n z$ и $\sin^n z$, где n — любое целое число.]

7. Просуммировать ряд

$$C = 1 + \frac{\cos z}{1!} + \frac{\cos 2z}{2!} + \frac{\cos 3z}{3!} + \ldots, \quad S = \frac{\sin z}{1!} + \frac{\sin 2z}{2!} + \frac{\sin 3z}{3!} + \ldots .$$

[Здесь

$$C + iS = 1 + \frac{\exp(iz)}{1!} + \frac{\exp(2iz)}{2!} + \ldots =$$

$$= \exp\{\exp(iz)\} = \exp(\cos z)\{\cos(\sin z) + i\sin(\sin z)\},$$

и аналогично

$$C - iS = \exp\{\exp(-iz)\} = \exp(\cos z)\{\cos(\sin z) - i\sin(\sin z)\}.$$

Следовательно,

$$C = \exp(\cos z)\cos(\sin z), \quad S = \exp(\cos z)\sin(\sin z).]$$

8. Просуммировать ряды

$$1 + \frac{a\cos z}{1!} + \frac{a^2\cos 2z}{2!} + \ldots, \quad \frac{a\sin z}{1!} + \frac{a^2\sin 2z}{2!} + \ldots .$$

9. Просуммировать ряды

$$1-\frac{\cos 2z}{2!}+\frac{\cos 4z}{4!}-\ldots, \quad \frac{\cos z}{1!}-\frac{\cos 3z}{3!}+\ldots.$$

10. Показать, что

$$1+\frac{\cos 4z}{4!}+\frac{\cos 8z}{8!}+\ldots=\frac{1}{2}\{\cos(\cos z)\operatorname{ch}(\sin z)+\cos(\sin z)\operatorname{ch}(\cos z)\}.$$

11. Показать, что разложения $\cos(x+h)$ и $\sin(x+h)$ по степеням h, найденные в (I) п. 152, имеют место для всех x и h как действительных, так и комплексных.

244. Логарифмический ряд. В п. 220 мы нашли, что

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\ldots, \tag{1}$$

где z действительно и по модулю меньше 1. Ряд в правой части сходится, и даже абсолютно, когда z имеет любое комплексное значение, по модулю меньшее 1. Естественно ожидать, что уравнение (1) остается в силе для всех таких комплексных значений z. Что это действительно так, может быть доказано с помощью рассуждения, аналогичного приведенному в п. 220. Мы докажем даже больше, а именно, что (1) имеет место для всех значений z, для которых $|z|\leqslant 1$, за единственным исключением $z=-1$.

Читатель вспомнит, что $\ln(1+z)$ является главным значением $\operatorname{Ln}(1+z)$ и что

$$\ln(1+z)=\int_C \frac{du}{u},$$

где C — прямолинейный отрезок, соединяющий точки 1 и $1+z$ в плоскости комплексного переменного u. Мы можем предположить, что z не является действительным числом, так как формула (1) была уже доказана для действительных значений z.

Если мы положим

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\zeta r,$$

так что $|r|\leqslant 1$, и

$$u=1+\zeta t,$$

то u описывает путь C, когда t возрастает от 0 до r. Кроме того,

$$\int_C \frac{du}{u}=\int_0^r \frac{\zeta dt}{1+\zeta t}=$$

$$=\int_0^r\left\{\zeta-\zeta^2 t+\zeta^3 t^2-\ldots+(-1)^{m-1}\zeta^m t^{m-1}+\frac{(-1)^m\zeta^{m+1}t^m}{1+\zeta t}\right\}dt=$$

$$=\zeta r-\frac{(\zeta r)^2}{2}+\frac{(\zeta r)^3}{3}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{(\zeta r)^m}{m}+R_m=$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{z^m}{m}+R_m, \tag{2}$$

где

$$R_m = (-1)^m \zeta^{m+1} \int_0^r \frac{t^m dt}{1+\zeta t}. \tag{3}$$

Из неравенства (1) п. 170 следует, что

$$|R_m| \leqslant \int_0^r \frac{t^m dt}{|1+\zeta t|}. \tag{4}$$

Но $|1+\zeta t|$ или $|u|$ никогда не меньше ω — длины перпендикуляра, опущенного из 0 на прямую C[1]). Следовательно,

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{\omega} \int_0^r t^m dt = \frac{r^{m+1}}{(m+1)\omega} \leqslant \frac{1}{(m+1)\omega},$$

и, таким образом, $R_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из (2) теперь следует, что

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \ldots . \tag{5}$$

В процессе доказательства мы показали, что ряд сходится; однако, это было доказано раньше (см. пример LXXX. 4). В действительности ряд сходится абсолютно при $|z| < 1$ и условно при $|z| = 1$.

Заменяя z на $-z$, мы получаем

$$\ln\frac{1}{1-z} = -\ln(1-z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \ldots \tag{6}$$

для $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$.

245. Далее,

$$\ln(1+z) = \ln\{(1+r\cos\theta) + ir\sin\theta\} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+2r\cos\theta + r^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}.$$

Здесь следует взять то значение арктангенса, которое заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. В самом деле, так как $1+z$ является вектором, представляемым отрезком от -1 до z, то главное значение $\operatorname{am}(1+z)$ всегда заключено между этими пределами, когда z лежит внутри круга $|z| = 1$[2]).

---

[1]) Так как z не лежит на действительной оси, то продолжение C не проходит через O. Читателю рекомендуется нарисовать фигуру, иллюстрирующую рассуждение в тексте.

[2]) См. предыдущую сноску.

Так как $z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$, то, приравнивая действительные и мнимые части в уравнении (5) п. 244, мы получаем

$$\frac{1}{2}\ln(1+2r\cos\theta+r^2) = r\cos\theta - \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + \frac{1}{3}r^3\cos 3\theta - \ldots,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta} = r\sin\theta - \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta + \frac{1}{3}r^3\sin 3\theta - \ldots.$$

При $0 \leqslant r \leqslant 1$ эти уравнения имеют место для всех значений θ, за исключением того случая, когда $r=1$ и θ равно нечетному кратному π. Нетрудно видеть, что они также имеют место при $-1 \leqslant r \leqslant 0$, за исключением того случая, когда $r=-1$ и θ равно четному кратному π.

Особенно интересным является тот случай, когда $r=1$. В этом случае мы имеем

$$\ln(1+z) = \ln(1+\operatorname{Cis}\theta) = \frac{1}{2}\ln(2+2\cos\theta) + i\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(4\cos^2\frac{1}{2}\theta\right) + \frac{1}{2}i\theta,$$

если $-\pi < \theta < \pi$, и, следовательно,

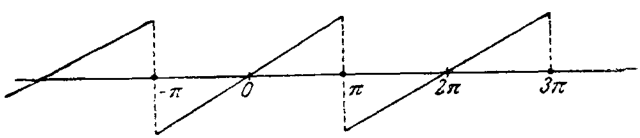
$$\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - \ldots = \frac{1}{2}\ln\left(4\cos^2\frac{1}{2}\theta\right),$$

$$\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \ldots = \frac{1}{2}\theta.$$

Для других значений θ суммы этих рядов легко находятся в силу того, что они являются периодическими функциями от θ с периодом 2π. Так, сумма ряда косинусов равна

$$\frac{1}{2}\ln\left(4\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$

для всех значений θ, кроме нечетных кратных π (для этих значений ряд расходится), а сумма ряда синусов равна $\frac{1}{2}(\theta - 2k\pi)$,



Фиг. 54

если $(2k-1)\pi < \theta < (2k+1)\pi$, и равна 0, если θ равно нечетному кратному π. График функции, представленной рядом синусов, изображен на фиг. 54. Эта функция разрывна при $\theta = (2k+1)\pi$.

Если мы в (5) заменим iz на $-iz$ и вычтем полученное соотношение из исходного, то мы найдем, что

$$\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\ldots.$$

Если z действительно и по модулю меньше 1, то, в силу результатов п. 241, мы приходим к формуле

$$\operatorname{arc\,tg} z=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\ldots,$$

уже доказанной другим способом в п. 221.

Примеры XCVIII. 1. Доказать, что в любом треугольнике, в котором $a>b$,

$$\ln c=\ln a-\frac{b}{a}\cos C-\frac{b^2}{2a^2}\cos 2C-\ldots.$$

(*Экз.* 1915 г.)

[Применить формулу

$$\ln c=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2-2ab\cos C).]$$

2. Доказать что, если $-1<r<1$ и $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$, то

$$r\sin 2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin 4\theta+\frac{1}{3}r^3\sin 6\theta-\ldots=\theta-\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{1-r}{1+r}\operatorname{tg}\theta\right\},$$

причем значение арктангенса заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Определить сумму ряда для других значений θ.

3. Доказать, рассматривая разложения $\ln(1+iz)$ и $\ln(1-iz)$ по степеням z, что если $-1<r<1$, то

$$r\sin\theta+\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta-\frac{1}{3}r^3\sin 3\theta-\frac{1}{4}r^4\cos 4\theta+\ldots=\frac{1}{2}\ln(1+2r\sin\theta+r^2),$$

$$r\cos\theta+\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta-\frac{1}{3}r^3\cos 3\theta-\frac{1}{4}r^4\sin 4\theta+\ldots=\operatorname{arc\,tg}\frac{r\cos\theta}{1-r\sin\theta},$$

$$r\sin\theta-\frac{1}{3}r^3\sin 3\theta+\ldots=\frac{1}{4}\ln\frac{1+2r\sin\theta+r^2}{1-2r\sin\theta+r^2},$$

$$r\cos\theta-\frac{1}{3}r^3\cos 3\theta+\ldots=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\cos\theta}{1-r^2},$$

где значения арктангенсов заключены между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$.

4. Доказать, что

$$\cos\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos 3\theta\cos^3\theta-\ldots=\frac{1}{2}\ln(1+3\cos^2\theta),$$

$$\sin\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta\sin^3\theta-\ldots=\operatorname{arc\,ctg}(1+\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}^2\theta).$$

где значение арккотангенса заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Найти аналогичные выражения для сумм рядов

$$\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\sin^2\theta+\ldots,\quad \sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos^2\theta+\ldots.$$

246. Некоторые приложения логарифмического ряда. Пусть z — любое комплексное число, а h — действительное число, достаточно малое для того, чтобы $|hz|<1$. Тогда

$$\ln(1+hz)=hz-\frac{1}{2}(hz)^2+\frac{1}{3}(hz)^3-\ldots,$$

и, следовательно,

$$\frac{\ln(1+hz)}{h}=z+\varphi(h, z),$$

где

$$\varphi(h, z)=-\frac{1}{2}hz^2+\frac{1}{3}h^2z^3-\frac{1}{4}h^3z^4+\ldots,$$

$$|\varphi(h, z)|\leqslant|hz^2|(1+|hz|+|h^2z^2|+\ldots)=\frac{|hz^2|}{1-|hz|},$$

так что $\varphi(h, z)\to 0$ при $h\to 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+hz)}{h}=z. \tag{1}$$

Если мы, в частности, положим $h=\frac{1}{n}$, где n — положительное целое число, то найдем, что

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)=z,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}=\exp z. \tag{2}$$

Это соотношение является обобщением результата, доказанного в п. 215 для действительных значений z.

Из равенства (1) мы можем вывести некоторые другие результаты, которые понадобятся нам в п. 247. Если t и h действительны и h достаточно мало, то

$$\frac{\ln(1+tz+hz)-\ln(1+tz)}{h}=\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{hz}{1+tz}\right),$$

что стремится к пределу $\frac{z}{1+tz}$ при $h\to 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left\{\ln(1+tz)\right\}=\frac{z}{1+tz}. \tag{3}$$

Нам потребуется также формула для производной от $(1+tz)^m$ по t, где m — любое действительное или комплексное число. Заметим сначала, что если $\varphi(t)=\psi(t)+i\chi(t)$ — комплексно-значная функция от t, действительная и мнимая части $\psi(t)$ и $\chi(t)$ которой дифференцируемы, то

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp\varphi) &= \frac{d}{dt}\left\{(\cos\chi+i\sin\chi)\exp\psi\right\}=\\ &=\{(\cos\chi+i\sin\chi)\psi'+(-\sin\chi+i\cos\chi)\chi'\}\exp\psi=\\ &=(\psi'+i\chi')(\cos\chi+i\sin\chi)\exp\psi=\\ &=(\psi'+i\chi')\exp(\psi+i\chi)=\varphi'\exp\varphi,\end{aligned}$$

так что правило дифференцирования $\exp\varphi$ остается тем же, что и в случае действительного φ. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(1+tz\right)^m &= \frac{d}{dt}\exp\left\{m\ln(1+tz)\right\}=\\ &=\frac{mz}{1+tz}\exp\left\{m\ln(1+tz)\right\}=mz(1+tz)^{m-1}.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь под $(1+tz)^m$ и $(1+tz)^{m-1}$ подразумеваются их главные значения.

247. Общая форма биномиальной теоремы. Мы уже доказали (см. п. 222), что сумма ряда

$$1+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+\ldots$$

равна $(1+z)^m=\exp\{m\ln(1+z)\}$ для всех действительных значений m и всех действительных значений z между -1 и 1. Если a_n обозначает коэффициент при z^n, то

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|m-n|}{n+1}\to 1,$$

независимо от того, действительно m или комплексно. Следовательно (см. пример LXXX. 3), ряд сходится для всех z по модулю меньших 1, и мы докажем теперь, что его сумма попрежнему равна $\exp\{m\ln(1+z)\}$, т. е. главному значению $(1+z)^m$.

Из п. 246 следует, что если t действительно, то

$$\frac{d}{dt}(1+tz)^m=mz(1+tz)^{m-1},$$

где z и m могут иметь любые действительные или комплексные значения, и в правой и в левой части имеются в виду главные значения. Следовательно, если $\varphi(t)=(1+tz)^m$, то мы имеем:

$$\varphi^{(n)}(t)=m(m-1)\ldots(m-n+1)z^n(1+tz)^{m-n}.$$

Эта формула справедлива и при $t=0$, так что

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}=\binom{m}{n}z^n.$$

Из соотношений (1) и (2) п. 167 следует (если мы вспомним замечание, сделанное в конце п. 170), что

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt.$$

Положим

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad m=\mu+i\nu,$$

и найдем верхнюю грань для R_n.

С одной стороны, мы имеем

$$|1+tz|<2,$$

а с другой стороны

$$|1+tz|=\sqrt{1+2tr\cos\theta+t^2r^2}\geqslant 1-tr\geqslant 1-r,$$

причем $-\pi\leqslant \operatorname{am}(1+tz)\leqslant\pi$. Далее,

$$|(1+tz)^{m-1}|=\exp\{(\mu-1)\ln|1+tz|-\nu\operatorname{am}(1+tz)\}=$$
$$=|1+tz|^{\mu-1}e^{-\nu\operatorname{am}(1+tz)}.$$

Первый множитель в этом выражении не превосходит $2^{\mu-1}$, если $\mu\geqslant 1$, или $(1-r)^{\mu-1}$, если $\mu<1$, а второй не превосходит $e^{\pi|\nu|}$. Следовательно, $|(1+tz)^{m-1}|$ имеет верхнюю грань K, не зависящую от t (и от n); таким образом,

$$|R_n|=\frac{|m(m-1)\ldots(m-n+1)|}{(n-1)!}|z|^n\times$$
$$\times\left|\int_0^1(1+tz)^{m-1}\left(\frac{1-t}{1+tz}\right)^{n-1}dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\frac{|m(m-1)\ldots(m-n+1)|}{(n-1)!}r^n\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-tr}\right)^{n-1}dt.$$

Наконец, $1-tr>1-t$, так что

$$|R_n|<K\frac{|m(m-1)\ldots(m-n+1)|}{(n-1)!}r^n=\rho_n.$$

Но

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\frac{|m-n|}{n}r\to r,$$

и, следовательно (см. пример XXVII. 6), $\rho_n \to 0$. Отсюда следует, что $R_n \to 0$, и мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Сумма биномиального ряда*

$$1+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+\ldots$$

равна $\exp\{m\ln(1+z)\}$, *где под логарифмом следует понимать его главное значение, для всех значений m как действительных, так и комплексных, и для всех значений z, для которых* $|z|<1$[1]).

Примеры XCIX. Предположим, что m действительно. Тогда, так как

$$\ln(1+z)=\frac{1}{2}\ln(1+2r\cos\theta+r^2)+i\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta},$$

мы получаем

$$\sum_0^\infty \binom{m}{n} z^n=\exp\left\{\frac{1}{2}m\ln(1+2r\cos\theta+r^2)\right\}\operatorname{Cis}\left\{m\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right\}=$$

$$=(1+2r\cos\theta+r^2)^{m/2}\operatorname{Cis}\left\{m\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right\},$$

где значения всех арктангенсов заключены между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. В частности, если мы положим $\theta=\frac{1}{2}\pi$, $z=ir$ и приравняем действительные и мнимые части, то мы найдем, что

$$1-\binom{m}{2}r^2+\binom{m}{4}r^4-\ldots=(1+r^2)^{m/2}\cos(m\operatorname{arc\,tg} r),$$

$$\binom{m}{1}r-\binom{m}{3}r^3+\binom{m}{5}r^5-\ldots=(1+r^2)^{m/2}\sin(m\operatorname{arc\,tg} r).$$

2. Доказать, что если $0\leqslant r<1$, то

$$1-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}r^2+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}r^4-\ldots=\sqrt{\frac{\sqrt{1+r^2}+1}{2(1+r^2)}},$$

$$\frac{1}{2}r-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}r^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}r^5-\ldots=\sqrt{\frac{\sqrt{1+r^2}-1}{2(1+r^2)}}.$$

[Положить $m=-\frac{1}{2}$ в последней формуле из примера 1.]

---

[1]) Более полное рассмотрение биномиального ряда, включая и более трудный случай, в котором $|z|=1$, читатель найдет в книге Bromwich, *Infinite series* (2-nd edition), стр. 287 и сл.

3. Доказать, что если $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$, то

$$\cos m\theta = \cos^m\theta\left\{1 - \binom{m}{2}\operatorname{tg}^2\theta + \binom{m}{4}\operatorname{tg}^4\theta - \ldots\right\},$$

$$\sin m\theta = \cos^m\theta\left\{\binom{m}{1}\operatorname{tg}\theta - \binom{m}{3}\operatorname{tg}^3\theta + \ldots\right\}$$

для всех действительных значений m.

[Эти результаты сразу следуют из уравнений

$$\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos^m\theta\,(1 + i\operatorname{tg}\theta)^m.]$$

4. Мы доказали (см. пример LXXXI. 6) непосредственным перемножением рядов, что

$$f(m, z) = \sum \binom{m}{n} z^n,$$

где $|z| < 1$, удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(m, z)\, f(m', z) = f(m + m', z).$$

Методом, аналогичным использованному в п. 223, и не опираясь на общий результат, приведенный на стр. 483, доказать, что если m действительно и рационально, то

$$f(m, z) = \exp\{m\ln(1 + z)\}.$$

5. Если z и μ действительны и $-1 < z < 1$, то

$$\sum \binom{i\mu}{n} z^n = \cos\{\mu\ln(1 + z)\} + i\sin\{\mu\ln(1 + z)\}.$$

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛ. X

1. Показать, что действительная часть $i^{\ln(1-i)}$ равна

$$e^{(4k+1)\pi^2/8}\cos\left\{\frac{1}{4}(4k+1)\pi\ln 2\right\},$$

где k — любое целое число.

2. Если $a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$, где a, b и c действительны и $c^2 > a^2 + b^2$, то

$$\theta = m\pi + \alpha \pm i\ln\frac{|c| + \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где m — любое нечетное или любое четное целое число, в зависимости от того, положительно ли c или отрицательно, а α — угол, косинус которого равен $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а синус которого равен $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. Доказать, что если $z = re^{i\theta}$ и $r < 1$, то мнимая часть

$$\ln(1 + iz) - \ln(1 - iz)$$

(где имеются в виду главные значения логарифмов) равна тому значению

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\cos\theta}{1 - r^2},$$

которое заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. (*Экз.* 1916 г.)

4. Показать, что если x действительно и $A = a + ib$, то

$$\frac{d}{dx}\exp Ax = A\exp Ax, \quad \int \exp Ax\,dx = \frac{1}{A}\exp Ax.$$

Вывести результаты примера LXXXVIII. 5.

5. Показать, что если $a > 0$, то

$$\int\limits_0^\infty \exp\{-(a+ib)\,x\}\,dx = \frac{1}{a+ib},$$

и вывести результаты примера LXXXVIII. 6.

6. Дан эллипс

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Пусть $f(x, y)$ обозначает члены высшей размерности в уравнении некоторой алгебраической кривой. Назовем эксцентрическим углом пересечения эллипса и этой кривой угол α, для которого

$$f(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha) + \ldots = 0.$$

Тогда сумма эксцентрических углов отличается на кратное 2π от

$$-i\,\{\ln f(a,\ ib) - \ln f(a, -ib)\}.$$

[Для эксцентрических углов

$$f\left\{\frac{1}{2}\,a\left(u + \frac{1}{u}\right),\ -\frac{1}{2}\,ib\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\} + \ldots = 0,$$

где $u = \exp i\alpha$, и $\sum\alpha$ равна одному из значений $-i\,\mathrm{Ln}\,P$, где P равно произведению корней этого уравнения.]

7. Определить число и приблизительное положение корней уравнения $\operatorname{tg} z = az$, где a действительно.

[Мы уже знаем (см. пример XVII. 4), что это уравнение имеет бесконечно много действительных корней. Пусть теперь $z = x + iy$. Приравняем действительные и мнимые части. Тогда мы найдем, что

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} = ax, \quad \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} = ay.$$

Если ни x, ни y не равно нулю, то отсюда следует, что

$$\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{2y},$$

но это невозможно, так как выражение в левой части по модулю меньше 1, а выражение в правой части по модулю больше 1. Следовательно, либо $x = 0$, либо $y = 0$. Если $y = 0$, то мы получаем известные уже действительные корни уравнения. Если $x = 0$, то $\operatorname{th} y = ay$. Легко видеть, что это уравнение не имеет действительных корней, кроме 0, если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 1$, и что оно имеет два действительных корня, отличных от нуля, если $0 < a < 1$. Таким образом, существуют два чисто мнимых корня, если $0 < a < 1$. В противном случае все корни действительны.]

8. Уравнение $\operatorname{tg} z = az + b$, где a и b действительны и $b \neq 0$, не имеет комплексных корней, если $a \leqslant 0$. Если $a > 0$, то действительные части всех комплексных корней по абсолютному значению больше $\left|\frac{b}{2a}\right|$.

9. Уравнение $\operatorname{tg} z = \frac{a}{z}$, где a действительно, не имеет комплексных корней, но имеет два чисто мнимых корня, если $a < 0$.

10. Уравнение $\operatorname{tg} z = a \operatorname{th} cz$, где a и c действительны, имеет бесконечно много действительных и чисто мнимых корней, но не имеет комплексных корней.

11. Показать, что если x действительно, то

$$e^{ax}\cos bx = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left\{a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \ldots\right\},$$

где скобки содержат $\frac{1}{2}(n+1)$ или $\frac{1}{2}(n+2)$ членов. Найти аналогичный ряд для $e^{ax}\sin bx$.

12. Если $n\varphi(z, n) \to z$ при $n \to \infty$, то

$$\{1 + \varphi(z, n)\}^n \to \exp z.$$

13. Если $\varphi(t)$ — комплексно-значная функция действительного переменного t, то

$$\frac{d}{dt}\ln\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

[Использовать формулы

$$\varphi = \psi + i\chi,\quad \ln\varphi = \frac{1}{2}\ln(\psi^2 + \chi^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi}{\psi}.]$$

14. **Отображения.** В гл. III (см. примеры XXI. 21 и сл., Разные примеры, 22 и сл.) мы рассмотрели некоторые простые примеры геометрических соотношений между фигурами в плоскостях комплексных переменных z и Z, связанных соотношением $z = f(Z)$. Рассмотрим теперь несколько случаев, в которых это соотношение содержит логарифмическую, показательную или тригонометрические функции.

Предположим сначала, что

$$z = \exp\frac{\pi Z}{a},\quad Z = \frac{a}{\pi}\operatorname{Ln} z,$$

где a положительно. Каждому значению Z соответствует только одно значение z, но каждому значению z соответствует бесконечно много значений Z. Если x, y, r, θ — координаты z, а X, Y, R, Θ — координаты Z, то мы имеем следующие соотношения:

$$x = e^{\pi X/a}\cos\frac{\pi Y}{a},\quad y = e^{\pi X/a}\sin\frac{\pi Y}{a},$$

$$X = \frac{a}{\pi}\ln r,\qquad Y = \frac{a\theta}{\pi} + 2ka,$$

где k — любое целое число. Если мы предположим, что $-\pi < \theta \leqslant \pi$ и что $\operatorname{Ln} z$ принимает главное значение $\ln z$, то $k = 0$, и Z должно лежать в полосе, параллельной оси OX и простирающейся на расстояние a с каждой стороны от нее, причем каждой точке этой полосы соответствует одна точка плоскости z и каждой точке плоскости z соответствует одна точка полосы. Выбирая значение $\operatorname{Ln} z$, отличное от главного, мы получим аналогичное соотношение между плоскостью z и другой полосой ширины $2a$ в плоскости Z.

Прямым в плоскости Z, для которых X или Y постоянны, соответствуют окружности и лучи, для которых r или θ постоянны. Каждому лучу соответствует вся прямая, параллельная OX, но окружности, для которой z постоянно, соответствует только часть длины $2a$ прямой, параллельной OY. Для того чтобы Z описало всю такую прямую, z должно неограниченное число раз описывать окружность в одном и том же направлении.

15. Показать, что прямой линии в плоскости Z соответствует логарифмическая спираль в плоскости z.

16. Рассмотреть аналогично отображение $z = c \operatorname{ch} \frac{\pi Z}{a}$ и, в частности, показать, что всей плоскости z соответствует любая из бесконечного числа полос в плоскости Z, параллельных OX и имеющих ширину $2a$. Показать также, что прямой $X = X_0$ соответствует эллипс

$$\left(\frac{x}{c \operatorname{ch} \frac{\pi X_0}{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \operatorname{sh} \frac{\pi X_0}{a}}\right)^2 = 1$$

и что эти эллипсы образуют для разных значений X_0 софокусную систему; кроме того, показать, что прямым $Y = Y_0$ соответствует система гипербол, софокусная этим эллипсам. Проследить движение z, когда Z описывает всю прямую $X = X_0$ или $Y = Y_0$. Как движется Z, когда z описывает вырожденный эллипс и вырожденную гиперболу, состоящие из отрезка оси между фокусами и два дополнительных к нему отрезка?

17. Проверить, что результаты примера 16 согласуются с результатами примера 14 и примера 26 из Разных примеров к гл. III.

[Отображение

$$z = c \operatorname{ch} \frac{\pi Z}{a}$$

может рассматриваться как состоящее из отображений

$$z = cz_1, \quad z_1 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right), \quad z_2 = \exp \frac{\pi Z}{a}.]$$

18. Рассмотреть аналогично отображение $z = c \operatorname{th} \frac{\pi Z}{a}$ и показать, что прямым $X = X_0$ соответствует пучок соосных окружностей

$$\left\{x - c \operatorname{cth} \frac{2\pi X_0}{a}\right\}^2 + y^2 = c^2 \operatorname{csch}^2 \frac{2\pi X_0}{a},$$

а прямым $Y = Y_0$ — ортогональный пучок соосных окружностей.

19. **Стереографическая проекция и проекция Меркатора.** Точки единичной сферы, центр которой расположен в начале координат, проектируются из южного полюса (координатами которого являются $0, 0, -1$) на касательную плоскость к сфере в северном полюсе O. Координаты точки на сфере обозначим через ξ, η, ζ, а декартовы координаты в касательной плоскости выберем так, чтобы оси OX и OY были параллельны осям ξ и η. Показать, что координатами проекции точки ξ, η, ζ являются

$$x = \frac{2\xi}{1+\zeta}, \quad y = \frac{2\eta}{1+\zeta},$$

и что $x + iy = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \operatorname{Cis} \varphi$, где φ — долгота (измеряемая от плоскости $\eta = 0$), а θ — широта точки, измеряемая от северного полюса.

Эта проекция дает карту сферы, называемую *стереографической проекцией*. Если мы введем новое комплексное переменное

$$Z = X + iY = -i \ln \frac{1}{2} z = -i \ln \frac{1}{2}(x + iy),$$

так что $X=\varphi$, $Y=\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta$, то получим другую карту в плоскости Z, называемую обычно *проекцией Меркатора*. На этой карте параллели широты и меридианы представляются прямыми линиями, параллельными осям X и, соответственно, Y.

20. Рассмотреть отображение

$$z=\operatorname{Ln}\frac{Z-a}{Z-b}$$

и показать, что прямые линии $x=\text{const.}$, и $y=\text{const.}$, соответствуют двум ортогональным связкам окружностей в плоскости Z.

21. Рассмотреть отображение

$$z=\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{Z-a}+\sqrt{Z-b}}{\sqrt{b-a}}$$

и показать, что прямые $x=\text{const.}$ и $y=\text{const.}$ соответствуют системам софокусных эллипсов и гипербол с фокусами, расположенными в точках $Z=a$ и $Z=b$.

[Мы имеем

$$\sqrt{Z-a}+\sqrt{Z-b}=\sqrt{b-a}\exp(x+iy),$$
$$\sqrt{Z-a}-\sqrt{Z-b}=\sqrt{b-a}\exp(-x-iy),$$

а отсюда можно вывести, что

$$|Z-a|+|Z-b|=|b-a|\operatorname{ch}2x,\quad |Z-a|-|Z-b|=|b-a|\cos 2y.]$$

22. **Отображение** $z=Z^i$. Если $z=Z^i$, где под мнимыми степенями понимаются их главные значения, то мы имеем

$$\exp(\ln r+i\theta)=z=\exp(i\ln Z)=\exp(i\ln R-\Theta),$$

так что $\ln r=-\Theta$, $\theta=\ln R+2k\pi$, где k — целое число. Так как все значения k дают одну и ту же точку z, то мы можем предложить $k=0$; в этом случае

$$\ln r=-\Theta,\ \theta=\ln R. \tag{1}$$

Вся плоскость Z покрывается, когда R пробегает все положительные значения, а Θ — все значения от $-\pi$ до π; тогда r изменяется в пределах от $\exp(-\pi)$ до $\exp\pi$, а θ пробегает все действительные значения. Таким образом, вся плоскость Z соответствует кольцу, ограниченному окружностями $r=\exp(-\pi)$, $r=\exp\pi$, но это кольцо покрывается бесконечно много раз. Но если θ изменяется только в пределах от $-\pi$ до π, так что кольцо покрывается только один раз, то R может изменяться только от $\exp(-\pi)$ до $\exp\pi$, так что изменение Z ограничено кольцом, во всех отношениях подобным тому, в котором изменяется z. В каждом из этих колец следует, кроме того, представить себе барьер вдоль отрезка отрицательной действительной оси, который точка z (или Z) не должна переходить, так как ее амплитуда не должна выходить за пределы $-\pi$ и π.

Таким образом, мы получаем соответствие между двумя кольцами, которое задается уравнениями

$$z=Z^i,\ Z=z^{-i},$$

где имеются в виду главные значения степеней. Окружностям в одной плоскости с центром в начале соответствуют в другой плоскости прямые, проходящие через начало.

23. Проследить движение z, когда Z, исходя из точки $\exp\pi$, движется вдоль большей окружности в положительном направлении к точке $-\exp\pi$, затем вдоль барьера, затем в отрицательном направлении вдоль малой

окружности, обратно вдоль барьера и, наконец, вдоль оставшейся половины большой окружности к исходному положению.

24. Если $z = Z^i$, причем допускается любое значение степени, и Z движется вдоль логарифмической спирали с полюсом в начале, то z также движется вдоль логарифмической спирали с полюсом в начале.

25. Как ведет себя $Z = z^{ai}$, где a — действительное число, когда z приближается к началу координат вдоль действительной оси?

[Точка Z описывает неограниченное число раз окружность с центром в начале (причем эта окружность — единичная, если z^{ai} имеет главное значение), так что и действительная и мнимая части Z ограниченно колеблются.]

26. Показать, что областью сходимости рядов вида

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{nai},$$

где a действительно, является угол, т. е. область, определенная неравенствами $\theta_0 < \operatorname{am} z < \theta_1$.

[Этот угол может свестись к одной прямой или покрыть всю плоскость.]

27. **Линии уровня.** Если $f(z)$ — функция комплексного переменного z, то кривые, вдоль которых $|f(z)|$ постоянен, называются *линиями уровня* $f(z)$. Нарисовать линии уровня следующих функций:

$z - a$ (*концентрические окружности*),

$(z - a)(z - b)$ (*овалы Кассини*),

$\dfrac{z-a}{z-b}$ (*связка окружностей*)

$\exp z$ (*прямые*).

28. Набросать вид линий уровня функции $(z - a)(z - b)(z - c)$.

29. Набросать вид линий уровня функций 1) $z \exp z$, 2) $\sin z$.

[См. фиг. 55, на которой изображены линии уровня функции $\sin z$. Кривые, отмеченные номерами I — VIII, соответствуют значениям*) $k = 0{,}35$; $0{,}50$; $0{,}71$; $1{,}00$; $1{,}41$; $2{,}00$; $2{,}83$; $4{,}00$.]

30. Набросать вид линий уровня функции $\exp z - c$, где c — действительная постоянная.

[На фиг. 56 изображены линии уровня функции $\exp z - 1$, причем кривые I — VII соответствуют значениям k, для которых $\ln k = -1{,}00$; $-0{,}20$; $-0{,}05$; $0{,}00$; $0{,}05$; $0{,}20$; $1{,}00$.]

31. Линии уровня функции $\sin z - c$, где c — положительная постоянная, изображены на фиг. 57 и 58.

[Характер кривых зависит от того, будет ли $c < 1$ или > 1. На фиг. 57 мы взяли $c = 0{,}5$ и кривые I — VIII соответствуют значениям $k = 0{,}29$; $0{,}37$; $0{,}50$; $0{,}87$; $1{,}50$; $2{,}60$; $4{,}50$; $7{,}79$. На фиг. 58 $c = 2$ и кривые I — VII соответствуют значениям $k = 0{,}58$; $1{,}00$; $1{,}73$; $3{,}00$; $5{,}20$; $9{,}00$; $15{,}59$. Для $c = 1$ кривые имеют тот же вид, что и на фиг. 55, за исключением того, что начало координат сдвинуто и масштаб изменен.]

32. Доказать, что если $0 < \theta < \pi$, то

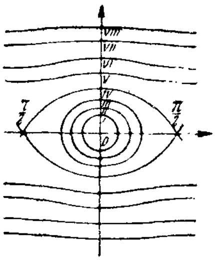
$$\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta + \ldots = \frac{1}{4}\ln \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\theta,$$

$$\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \ldots = \frac{1}{4}\pi,$$

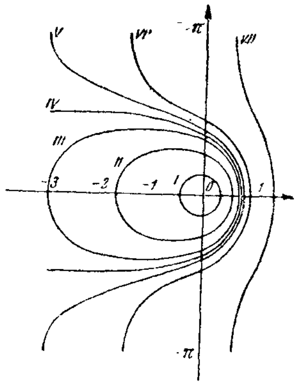
и определить суммы этих рядов для всех других значений θ, для которых они сходятся.

---

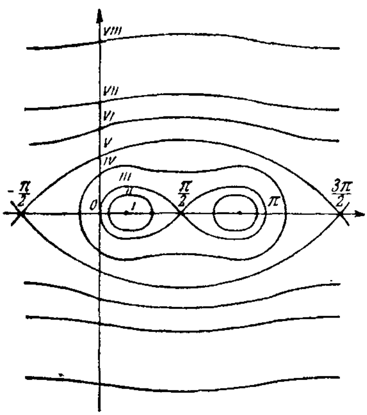
*) $k = |f(z)|$. (*Прим. перев.*)



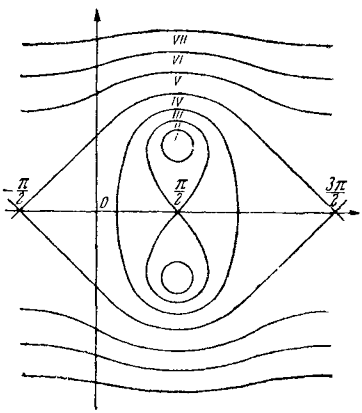
Фиг. 55



Фиг. 56



Фиг. 57



Фиг. 58

[Использовать равенство

$$z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\ldots=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

где $z=\cos\theta+i\sin\theta$. Когда θ увеличивается на π, то сумма каждого из этих рядов меняет свой знак. Мы заключаем, что первая формула имеет место для всех значений θ, кроме значений, кратных π (для которых ряд расходится), тогда как сумма второго ряда равна $\frac{1}{4}\pi$, если

$$2k\pi<\theta<(2k+1)\pi,$$

$-\frac{1}{4}\pi$, если

$$(2k+1)\pi<\theta<(2k+2)\pi,$$

0, если θ кратно π.]

33. Доказать, что

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi} + \left[\frac{\theta}{2\pi}\right]\right)$$

для всех действительных θ. (*Экз.* 1932 г.)

34. Доказать, что если $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, то

$$\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \ldots = \frac{1}{4}\pi,$$

$$\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta - \ldots = \frac{1}{4}\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)^2,$$

и определить суммы этих рядов для всех других значений θ, для которых они сходятся.

35. Доказать, что

$$\cos\theta\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\theta\cos 2\alpha + \frac{1}{3}\cos 3\theta\cos 3\alpha + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left\{4(\cos\theta - \cos\alpha)^2\right\},$$

если ни $\theta - \alpha$, ни $\theta + \alpha$ не кратны 2π.

36. Доказать, что если ни a, ни b не являются действительными числами, то

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = -\frac{\ln(-a) - \ln(-b)}{a-b},$$

где имеются в виду главные значения логарифмов. Проверить результат в том случае, когда $a = ci$, $b = -ci$, где c положительно. Рассмотреть также случаи, когда a и b, или оба эти числа, действительны и отрицательны.

37. Доказать, что если α и β действительны и $\beta > 0$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - (\alpha + i\beta)^2} = \frac{\pi i}{2(\alpha + i\beta)}.$$

Чему равен этот интеграл, если $\beta < 0$?

38. Доказать, что если мнимые части корней уравнения

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

имеют обратные знаки, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{\pi i}{\sqrt{B^2 - AC}},$$

где знак $\sqrt{B^2 - AC}$ должен быть выбран так, чтобы действительная часть

$$\frac{\sqrt{B^2 - AB}}{Ai}$$

была положительна.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Неравенства Гёльдера и Минковского

Три неравенства играют особенно важную роль в анализе. Это — теорема о средием арифметическом и среднем геометрическом и неравенствах Гёльдера и Минковского. Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом нужна в несколько более общей форме, чем та, которая приведена на стр. 39; неравенства Гёльдера и Минковского могут быть тогда выведены из нее.

В дальиейшем все буквы обозначают строго положительные числа. Так же как иа стр. 39[1]), мы можем доказать, что

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > (a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}, \tag{1}$$

если не все a равны между собой (в этом случае оба средних равны). Если мы предположим, что числа a распадаются на m групп, равных между собой, причем p_1 из них равны a_1, p_2 равны a_2 и т. д., так что

$$p_1+p_2+\ldots+p_m=n,$$

то неравенство (1) принимает вид

$$q_1a_1+q_2a_2+\ldots+q_ma_m > a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_m^{q_m}, \tag{2}$$

где

$$q_\nu=\frac{p_\nu}{p_1+p_2+\ldots+p_m}, \tag{3}$$

так что

$$q_1+q_2+\ldots+q_m=1. \tag{4}$$

Здесь неравенство также обращается в равенство, когда все a равны друг другу.

Обратно, если q_1, $q_2, \ldots, q_m$ — любые положительные рациональные числа с суммой равной 1, то мы можем привести их к общему знаменателю и записать в форме (3), и тогда (2) сведется к частному случаю неравенства (1).

Докажем теперь, что неравенство (2) имеет место (если не все a равны) для любых действительных q с суммой, равной 1. Иначе говоря, мы отбросим условие, что *q рациональны.* Мы будем называть эту теорему „общей теоремой о средних" и ссылаться на нее как на теорему G_m, или просто G. Доказательство не зависит от предыдущих рассмотрений.

---

[1]) В действвтельности мы этого не доказали, но наши рассуждения требуют лишь небольших изменений. Эти измеиения незачем приводить здесь во всех подробностях, так как (1) содержится в (2), а мы даем независимое доказательство (2).

Мы можем свести доказательство к доказательству частного случая G_2. Действительно, допустим, что $m > 2$ и что G_k доказано для $k = 2, 3, \ldots, m-1$. Пусть

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{m-1} = q,$$

так что

$$q + q_m = 1,$$

и положим

$$q'_1 = \frac{q_1}{q}, \ldots, q'_{m-1} = \frac{q_{m-1}}{q},$$

так что

$$q'_1 + q'_2 + \ldots + q'_{m-1} = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_1^{q_1} \ldots a_{m-1}^{q_{m-1}} a_m^{q_m} &= \left(a_1^{q'_1} \ldots a_{m-1}^{q'_{m-1}}\right)^q a_m^{q_m} \leqslant \\ &\leqslant q\left(a_1^{q'_1} \ldots a_{m-1}^{q'_{m-1}}\right) + q_m a_m \leqslant \\ &\leqslant q(q'_1 a_1 + \ldots + q'_{m-1} a_{m-1}) + q_m a_m = \\ &= q_1 a_1 + q_2 a_2 + \ldots + q_m a_m, \end{aligned}$$

по G_2 и G_{m-1}. Во второй строке имеет место знак неравенства, если

$$a_1^{q'_1} \ldots a_{m-1}^{q'_{m-1}} \neq a_m,$$

а в третьей, если не все $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ равны. Следовательно, по крайней мере в одном ме те должен стоять знак неравенства, если не все $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ равны. Следовательно, G_k имеет место для $k = m$, и поэтому справедливо для всех k.

Остается доказать G_2. Изменяя обозначения, мы можем записать G_2 в виде неравенства

$$a^\alpha b^{1-\alpha} < \alpha a + (1-\alpha) b \quad (0 < \alpha < 1) \tag{5}$$

(если $a \neq b$). Не ограничивая общности, мы можем, очевидно, предположить, что $b > a$. Тогда (5) может быть записано в виде

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} < (1-\alpha)(b-a) a^{-\alpha}. \tag{6}$$

Но, по теореме о среднем значении (см. стр. 238),

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1-\alpha)(b-a)\xi^{-\alpha},$$

где $a < \xi < b$, а это дает (6), так как $-\alpha < 0$ и, следовательно, $\xi^{-\alpha} < a^{-\alpha}$. Таким образом, G_2 и общая теорема о средних доказаны.

Мы можем записать и общее неравенство G_m в форме, аналогичной (5), а именно,

$$a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda < \alpha a + \beta b + \ldots + \lambda l, \tag{7}$$

где $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$.

У читателя может возникнуть следующий вопрос: не можем ли мы вывести общую теорему предельным переходом из ее частного случая, в котором q рациональны? Мы можем аппроксимировать каждое q_ν последовательностью рациональных чисел $q_\nu^{(r)}$ таким образом, что

$$q_1^{(r)} + q_2^{(r)} + \ldots + q_m^{(r)} = 1$$

для каждого r и что $q_\nu^{(r)} \to q_\nu$ при $r \to \infty$ для каждого ν. Тогда

$$q_1^{(r)}a_1 + q_2^{(r)}a_2 + \ldots + q_m^{(r)}a_m > a_1^{q_1^{(r)}} a_2^{q_2^{(r)}} \ldots a_m^{q_m^{(r)}} \tag{8}$$

для каждого r, и обе части неравенства (8) стремятся к соответствующим частям неравенства (2) при $r \to \infty$.

Это рассуждение было бы достаточным, если бы мы удовлетворились доказательством неравенства (2) в менее строгой форме, в которой знак „$>$" заменен на „$\geqslant$". В самом деле, при $r \to \infty$ знак „$>$" вырождается в „$\geqslant$": из $x^{(r)} \to x, y^{(r)} \to y$ и $x^{(r)} > y^{(r)}$ следует только, что $x \geqslant y$, и нельзя утверждать, что всегда $x > y$. Это затруднение может быть обойдено с помощью одного искусственного приема (см. *Неравенства*, стр. 31), но мы предпочитаем здесь более прямое доказательство.

Неравенство (6) является одним из доказанных в п. 74, с ограничением, что α рационально. Рекомендуем читателю показать, что все неравенства п. 74 справедливы для всех, а не только для рациональных, показателей. Этого, очевидно, нельзя было сделать в п. 74, так как x^α не было определено для иррациональных α до п. 214.

Существует еще одна интересная трактовка неравенства G_2. Так как

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

то функция $\ln x$ *вогнута*, т. е. ее график имеет всюду отрицательную кривизну, и все хорды кривой $y = \ln x$ лежат под ней. Если P — точка $(a, \ln a)$, а Q — точка $(b, \ln b)$, то точка R, которая делит PQ так, что

$$\alpha \cdot PR = (1-\alpha) RQ,$$

имеет абсциссу $\alpha a + (1-\alpha)b$ и ординату $\alpha \ln a + (1-\alpha)\ln b$. Следовательно,

$$\alpha \ln a + (1-\alpha)\ln b < \ln\{\alpha a + (1-\alpha)b\},$$

что и является неравенством (5).

Неравенство Гёльдера (H)

Если $k > 1$ *и* $k' = \dfrac{k}{k-1}$, *так что* $k' > 1$ и

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1, \tag{9}$$

и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — *две последовательности положительных чисел, то*

$$\sum_{m=1}^{n} a_m b_m \leqslant \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^k\right)^{1/k} \left(\sum_{m=1}^{n} b_m^{k'}\right)^{1/k'}, \tag{10}$$

***причем знак равенства имеет место в том и только том случае, когда последовательности** (a) **и** (b) **пропорциональны, т. е. когда** $\dfrac{a_m}{b_m}$ **не зависит от** m.*

Это неравенство является следствием неравенства (5). Так как каждая часть неравенства (10) однородна (со степенью 1) относительно a и относительно b, то мы можем, не ограничивая общности, предположить, что

$$\sum a = 1, \quad \sum b = 1. \tag{11}$$

Если мы, кроме того, будем писать α вместо $\frac{1}{k}$ и β вместо $\frac{1}{k'}$, так что $\alpha+\beta=1$, и заменим a и b на a^α и b^β, то (10) превратится в

$$\sum a^\alpha b^\beta \leqslant \left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^\beta. \qquad (12)$$

Но, по неравенству (5),

$$\sum a^\alpha b^\beta \leqslant \sum (\alpha a + \beta b) = \alpha + \beta = 1 = \left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^\beta.$$

Равенство имеет место в том и только том случае, когда $a_m = b_m$ для всех m, а, значит, если мы отбросим условия (11), когда $\frac{a_m}{b_m}$ не зависит от m.

Вообще, имеет место следующее неравенство:

$$\sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda < \left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^\beta \dots \left(\sum l\right)^\lambda, \qquad (13)$$

если

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = 1 \qquad (14)$$

и последовательности (a), $(b), \dots, (l)$ не пропорциональны. Это может быть выведено из (7) так же, как мы вывели (12) из (5), или же индукцией непосредственно из (12).

Неравенство Минковского (M)

Если $k>1$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — две последовательности положительных чисел, то

$$\left\{\sum_{m=1}^{n} (a_m + b_m)^k\right\}^{1/k} \leqslant \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^k\right)^{1/k} \left(\sum_{m=1}^{n} b_m^k\right)^{1/k} \qquad (15)$$

Равенство** имеет место в том и только том случае, когда (a) и (b) **пропорциональны.

Это неравенство может быть выведено из (10). Положим

$$S = \left\{\sum_{m=1}^{n} (a_m + b_m)^k\right\}^{1/k} = \{\Sigma (a+b)^k\}^{1/k}$$

(опуская индексы). Тогда

$$S^k = \sum a(a+b)^{k-1} + \sum b(a+b)^{k-1}.$$

Применяя неравенство (10) к каждому члену в правой части и замечая, что $(k-1)k' = k$, мы получим:

$$S^k \leqslant \left(\sum a^k\right)^{1/k} \left\{\sum (a+b)^k\right\}^{1/k'} + \left(\sum b^k\right)\}^{1/k} \left\{\sum (a+b)^k\right\}^{1/k'} =$$

$$= \{ (\sum a^k)^{1/k} + (\sum b^k)^{1/k} \} S^{k/k'},$$

и (15) следует отсюда делением на $S^{k/k'}$. Равенство имеет место в том и только том случае, когда (a) и (b) пропорциональны $(a+b)$, т. е. когда (a) и (b) пропорциональны.

Имеет также место весьма полезное обратное неравенство. Допустим, что $a+b=1$. Тогда $a<1$, $b<1$ и, следовательно (так как $k>1$), $a^k<a$, $b^k<b$, т. е.

$$a^k + b^k < a + b = 1 = (a+b)^k. \qquad (16)$$

Так как обе части окончательного неравенства однородны (со степенью k), то это неравенство справедливо и без того ограничения, что $a+b=1$. Отсюда следует, что

$$\sum (a+b)^k > \sum a^k + \sum b^k. \tag{17}$$

Равенство здесь не может иметь места, если (как мы все время предполагаем) все a и b строго положительны.

Разные замечания по поводу неравенств

Когда $k=2$, $k'=2$ и (H) сводится к

$$(\sum ab)^2 < \sum a^2 \sum b^2,$$

т. е. к неравенству Коши (стр. 39). Если мы предположим, что $k=2$ и $n=3$ в (M), и возьмем в качестве (a) и (b) x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, то неравенство Минковского принимает вид

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2} < \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Это неравенство выражает, что длина одной стороны треугольника, вершины которого находятся в точках $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1) и $(-x_2, -y_2, -z_2)$, меньше суммы длин двух других сторон. Неравенство превращается в равенство, когда x_1, y_1, z_1 пропорциональны x_2, y_2, z_2, т. е. когда треугольник вырождается в отрезок прямой. В общем случае (M) является обобщением „неравенства треугольника" на пространство n измерений, в котором расстояние между двумя точками P_1 и P_2 определено как

$$(|x_1-x_2|^k+|y_1-y_2|^k+|z_1-z_2|^k+\ldots)^{1/k}.$$

Неравенство (7) на стр. 39 является следствием из (H), так как

$$(\sum a)^k = (\sum a \cdot 1)^k < \sum a^k (\sum 1)^{k/k'} = n^{k-1} \sum a^k.$$

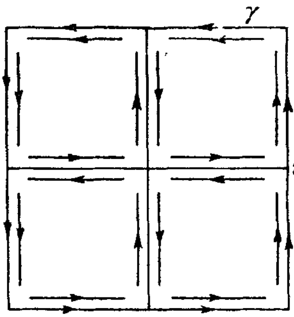
Но неравенство (6) на стр. 39 не может быть выведено ни из одного из неравенств, приведенных здесь; оно в действительности является частным случаем неравенства другого типа, а именно, неравенства Чебышева (см. *Неравенства*, стр. 59).

Когда k рационально, (H) и (M) являются *алгебраическими* теоремами и представляется желательным, чтобы их доказательства были также алгебраическими, т. е. чтобы они не использовали никаких предельных переходов. Такие доказательства читатель найдет в гл. II *Неравенств* (где рассматривается также большое число аналогов и обобщений этих теорем). Если k иррационально, то x^k не является алгебраической функцией, и тогда вопрос о чисто алгебраическом доказательстве отпадает. В настоящей книге, например, x^k было определено как $\exp(k \ln x)$, и поэтому естественно, что доказательства должны опираться на теорию логарифмической и показательной функций, и использовать методы дифференциального исчисления.

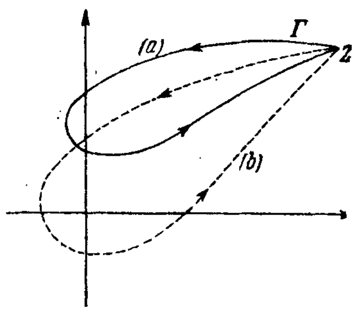
ПРИЛОЖЕНИЕ II

Доказательство того, что каждое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один корень

Теорема о том, что „всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один корень", обычно называется „основной теоремой алгебры", но она по существу скорее принадлежит к анализу, так как ее нельзя доказать, не применяя где-нибудь понятия непрерывности. Представляется целесообразным привести здесь два из наиболее известных доказательств этой теоремы.



Фиг. A



Фиг. B

(A) Первое из них является естественным развитием идей, изложенных в гл. III и X. Пусть

$$Z = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

— многочлен относительно z с действительными или комплексными коэффициентами. Мы можем предположить, что $a_0 \neq 0$.

Предположим, что z описывает замкнутый путь γ в плоскости z; фактически γ всегда будет квадратом, стороны которого параллельны осям, пробегаемым в положительном направлении. Тогда Z описывает замкнутый путь Γ в плоскости Z. Мы можем предположить, что Γ не проходит через начало координат, так как в противном случае справедливость теоремы была бы очевидной.

Каждому значению Z соответствует бесконечно много значений $\operatorname{am} Z$, отличающихся друг от друга на кратные 2π, и каждое из этих значений непрерывно изменяется, когда Z описывает Γ[1]. Выберем какое-нибудь

[1] В этом месте нам нужно предположение о том, что Γ не проходит через начало.

определенное значение $\operatorname{am} Z$ (скажем, значение, для которого $-\pi < \operatorname{am} Z \leqslant \pi$), соответствующее исходному значению Z, и проследим его изменение вдоль Г. Таким образом, мы определили значение $\operatorname{am} Z$ (которое мы и будем обозначать через $\operatorname{am} Z$), соответствующее каждому Z на Г.

Когда Z возвращается к исходному положению, $\operatorname{am} Z$ может также возвратиться к исходному значению или может отличаться от него на кратное 2π. Так, если Г не содержит начало, как путь (a) на фиг. В, то $\operatorname{am} Z$ остается без изменений; но если Г один раз обходит начало в положительном направлении, как путь (b), то $\operatorname{am} Z$ увеличивается на 2π. Обозначим изменение $\operatorname{am} Z$, когда z описывает γ, через $\Delta(\gamma)$.

Допустим сначала, что γ является квадратом S со стороной $2R$, состоящим из отрезков прямых $x = \pm R$, $y = \pm R$. Тогда $|z| \geqslant R$ на S. Мы можем выбрать R настолько большим, что

$$\frac{|a_1|}{|a_0|R} + \frac{|a_2|}{|a_0|R^2} + \ldots + \frac{|a_n|}{|a_0|R^n} < \frac{1}{2},$$

и тогда

$$Z = a_0 z^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 z^n}\right) = a_0 z^n (1 + \eta),$$

где $|\eta| < \frac{1}{2}$ для всех точек S. Амплитуда $1 + \eta$, очевидно, останется без изменений, когда z опишет S, а амплитуда z^n увеличится на $2n\pi$. Следовательно, амплитуда Z увеличится на $2n\pi$, так что $\Delta(S) = 2n\pi$. Все, что нам в действительности нужно знать — это то, что $\Delta(S) \neq 0$.

Разобьем квадрат S осями координат на четыре равных квадрата $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, $S_1^{(3)}$, $S_1^{(4)}$ со стороной R. Мы можем взять любой из них в качестве γ и предположить опять, что соответствующий путь Г не проходит через начало координат. Тогда

$$\Delta(S) = \Delta(S_1^{(1)}) + \Delta(S_1^{(2)}) + \Delta(S_1^{(3)}) + \Delta(S_1^{(4)}). \tag{1}$$

В самом деле, когда точка z описывает по очереди каждый из квадратов $S_1^{(1)}, \ldots$ (см. фиг. A), то она один раз опишет каждую сторону S; что же касается сторон l меньших квадратов, которые не являются частями сторон S, то она опишет каждую такую сторону l два раза в разных направлениях, и слагаемые в сумме (1), соответствующие таким сторонам, взаимно уничтожатся. Так как $\Delta(S) \neq 0$, то по крайней мере одно из $\Delta(S_1^{(1)}), \ldots$ отлично от нуля. Первый из таких квадратов обозначим через S_1. Тогда $\Delta(S_1) \neq 0$.

Разобьем теперь S_1 на четыре равных квадрата прямыми, параллельными осям, и повторим наше рассуждение, в результате чего мы найдем квадрат S_2 со стороной $\frac{1}{2}R$, для которого $\Delta(S_2) \neq 0$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность квадратов $S, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ со сторонами $2R, R, \frac{1}{2}R, \ldots, 2^{-n+1}R, \ldots$, из которых каждый лежит внутри предыдущего, таких, что $\Delta(S_n) \neq 0$ для каждого n.

Если юго-западной и северо-восточной вершинами S_n являются точки (x_n, y_n) и (x_n', y_n'), так что

$$x_n' - x_n = y_n' - y_n = 2^{-n+1}R,$$

то (x_n) и (y_n) являются возрастающими последовательностями, а (x_n') и (y_n') — убывающими; x_n и x_n' стремятся к общему пределу x_0, а y_n и y_n' стремятся к общему пределу y_0. Точка (x_0, y_0) или P лежит внутри или на границе каждого S_n[1]). Если дано любое положительное число δ, то мы можем выбрать n так, что расстояние любой точки S_n от точки P будет меньше δ. Следовательно, P обладает тем свойством, что как бы мало ни было δ, найдется такой квадрат S_n, содержащий P, что все его точки находятся от P на расстоянии, меньшем δ, и что для него $\Delta(S_n) \neq 0$.

Мы можем теперь доказать, что

$$f(z_0) = f(x_0 + iy_0) = 0.$$

В самом деле, допустим, что $f(z_0) = c$, где $|c| = \rho > 0$. Так как $f(x_0 + iy_0)$ является непрерывной функцией от x_0 и y_0, то мы можем выбрать n настолько большим, что

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{1}{2}\rho$$

во всех точках S_n. Тогда

$$Z = f(z) = c + \sigma = c(1 + \eta),$$

где $|\sigma| < \frac{1}{2}\rho$, $|\eta| < \frac{1}{2}$ во всех точках S_n. Отсюда следует, что $\operatorname{am} Z$ не меняется, когда z описывает S_n, и мы приходим к противоречию. Следовательно, $f(z_0) = 0$[2]).

(B) Наше второе доказательство использует обобщения результатов пп. 103 и сл. на функции нескольких переменных.

Как и в п. 103, мы определяем верхнюю и нижнюю грани функции $F(x, y)$ в области D, ограниченной квадратом типа S. Мы можем доказать (в основном так же, как в последней части п. 105[3]), что непрерывная функция достигает своих точных верхней и нижней граней во всякой такой области D.

Пусть

$$F(x, y) = |f(x + iy)| = |f(z)| = |Z|.$$

Тогда $F(x, y)$ непрерывна и неотрицательна; таким образом, она имеет неотрицательную точную нижнюю грань m в D, которая достигается в некоторой точке z_0 из D. Легко видеть, что если R достаточно велико, то z_0 лежит внутри D[4]).

Допустим, что $m > 0$. Если мы положим $z = z_0 + \zeta$ и разложим $f(z)$ по степеням ζ, то получим:

$$f(z) = f(z_0) + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots + A_n\zeta^n,$$

---

[1]) В предшествующих рассуждениях пока ничто не указывало на то, что эта точка не может лежать на границе S, хотя ниже мы увидим, что это действительно не может иметь места.

[2]) Таким образом, в частности, z_0 не может лежать на S, так как Z велико во всех точках S.

[3]) Первое доказательство п. 105 использует сечение Дедекинда и не имеет аналога в двух измерениях.

[4]) В самом деле, допустим (выражая явно зависимость S, D, m_0 и z_0 от R), что $m_0(R)$ и $z_0(R)$ соответствуют $S(R)$ и $D(R)$. Тогда $z_0(R)$ могло бы (насколько это видно из определения) лежать на $S(R)$. Но если R_1 дано, то мы можем выбрать R_2 так, что $|Z|$ превосходит $\frac{1}{2}|a_0|R_2^n$, а, значит, заведомо и $m(R_1)$, во всех точках на и вне $S(R_2)$. Тогда $z_0(R)$ лежит внутри $S(R_2)$, а, значит, заведомо и внутри $S(R)$ для $R \geqslant R_2$. В действительности $m(R)$ и $z_0(R)$, начиная с некоторого R, не зависят от R.

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от ζ. Пусть A_k будет первым из этих коэффициентов, который отличен от нуля, и положим

$$f(z_0)=me^{i\mu}, \quad A_k=ae^{i\alpha}, \quad \zeta=\rho e^{i\varphi}.$$

Мы можем предположить, что ρ настолько мало, что $a\rho^k<m$ и

$$|A_{k+1}\zeta^{k+1}+\ldots+A_n\zeta^n|<\frac{1}{2}a\rho^k.$$

Тогда

$$f(z)=me^{i\mu}+a\rho^k e^{i(\alpha+k\varphi)}+g,$$

где $|g|<\frac{1}{2}a\rho^k$. Выберем φ так, что

$$\alpha+k\varphi=\mu+\pi; \tag{2}$$

тогда

$$f(z)=e^{i\mu}\left\{m-a\rho^k+ge^{-i\mu}\right\},$$

$$|f(z)|=|m-a\rho^k+ge^{-i\mu}|\leqslant m-a\rho^k+|g|<m-\frac{1}{2}a\rho^k<m,$$

что противоречит определению m. Таким образом, m должно быть равно 0, т. е. $f(z_0)=0$.

Когда мы выбираем φ так, чтобы выполнялось (2), мы фактически решаем уравнение

$$\zeta^k=-\rho^k e^{i(\mu-\alpha)}.$$

Другими словами, мы используем тот факт, что уравнение специального вида

$$z^n-c=0 \tag{3}$$

всегда имеет корень, т. е. что „основная теорема" справедлива для двучленных уравнений. Мы уже знаем, конечно, что уравнение (3) имеет в действительности n корней (см. п. 48 и наши дальнейшие строгие рассмотрения тригонометрических и показательной функций).

С логической точки зрения интересно, однако, найти доказательство теоремы, не зависящее от теории тригонометрических функций. Наше рассуждение дает такое доказательство, если известно, что теорема верна для уравнений вида (3), и Литтльвуд (J. E. Littlewood, *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16) показал, как можно закончить доказательство, применяя „метод нижней грани" к функции

$$f(z)=z^n-c, \tag{4}$$

где $c=a+ib\neq 0$.

Мы знаем (см. пример XXI. 14), что любое квадратное уравнение и, в частности, уравнение $z^2=c$, имеет корни. Эти корни равны

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{+a^2 b^2}-a)},$$

причем знаки следует брать одинаковыми, если $b>0$, и разными, если $b<0$. Следовательно, если $n=2^\nu N$, где N — нечетное число, то мы можем, решив ν квадратных уравнений, свести решение уравнения (3) к решению уравнения $z^N-d=0$. Поэтому мы можем предположить, что *n нечетно*.

Теперь мы рассуждаем как выше, но применительно к специальной функции (4). Имеются две возможности: либо $z_0\neq 0$, либо $z_0=0$. Если $z_0\neq 0$, то

$$f(z_0+\zeta)=f(z_0)+nz_0^{n-1}\zeta+\ldots=f(z_0)+A_1\zeta+\ldots,$$

где $A_1 \neq 0$, так что $k=1$. Окончание доказательства тогда зависит только от решения *линейного* уравнения. Если же $z_0=0$, то

$$f(z)=f(\zeta)=\zeta^n-c.$$

Если мы придадим ζ четыре значения $\pm\rho$, $\pm i\rho$, где ρ мало, то (так как n нечетно) $f(\zeta)$ принимает четыре значения

$$-c \pm \delta^n, \ -c \pm i\delta^n.$$

Другими словами, если P является точкой $f(z_0)$ или $-c$, на диаграмме Аргана, то четыре точки, представляющие $f(z)$ в этих четырех случаях, получаются из P небольшими смещениями в четырех возможных направлениях, параллельных осям. По крайней мере одно из них переносит P ближе к началу[1]), и если ζ имеет соответствующее значение, то $|f(z)|<|f(z_0)|$. Таким образом, мы получаем противоречие, требуемое для завершения доказательства. Основные идеи доказательства могут быть найдены у Коши (Cauchy, *Exercices de mathématiques*, t. 4, стр. 65—128), хотя и в менее четкой форме. Это доказательство приведено также в гл. II книги Todhunter, *Theory of equations*.

Из большого числа известных доказательств „основной теоремы" наиболее удовлетворительным с алгебраической точки зрения является, вероятно, так называемое „второе доказательство Гаусса" (в одной из его упрощенных форм, принадлежащих позднейшим авторам). См. Gauss, *Werke*, vol. III, стр. 33—56 или Perron, *Algebra*, vol. I, стр. 258—266. Эти доказательства, однако, значительно длиннее.

ПРИМЕРЫ К ПРИЛОЖЕНИЮ II

1. Показать, что число корней уравнения $f(z)=0$, лежащих внутри замкнутого контура, не проходящего ни через один корень, равно изменению

$$\frac{1}{2\pi i}\ln f(z),$$

когда z описывает контур.

2. Показать, что если R — любое число, удовлетворяющее условию

$$\frac{|a_1|}{R}+\frac{|a_2|}{R^2}+\ldots+\frac{|a_n|}{R^n}<1,$$

то все корни уравнения

$$z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

по модулю меньше R. В частности, показать, что все корни уравнения $z^5-13z-7=0$ по модулю меньше $2\frac{1}{67}$.

3. Определить число корней уравнения

$$z^{2p}+az+b=0,$$

где a и b действительны и p нечетно, имеющих положительные и отрицательные действительные части. Показать, что если $a>0$, $b>0$, то числа эти равны $p-1$ и $p+1$; если $a<0$, $b>0$, то они равны $p+1$ и $p-1$; а если $b<0$, то они равны p и p. Рассмотреть частные случаи $a=0$ или $b=0$. Проверить результаты для $p=1$.

[Проследить изменение $\operatorname{am}(z^{2p}+az+b)$, когда z описывает контур, образованный большим полукругом радиуса R с центром в начале и его диаметром, лежащим на мнимой оси.]

---

[1]) Оставляя ординату неизменной и уменьшая абсолютную величину абсциссы, или наоборот.

4. Рассмотреть аналогично уравнения

$$z^{4q}+az+b=0,\ z^{4q-1}+az+b=0,\ z^{4q+1}+az+b=0.$$

5. Показать, что если α и β действительны, то числа корней уравнения

$$z^{2n}+\alpha^2 z^{2n-1}+\beta^2=0,$$

имеющих положнтельную и отрнцательную действительную часть, равны $n-1$ и $n+1$ или n и n в завиcнмости от того, нечетно ли n или четно. (*Экз.* 1891 г.)

6. Точки z_1, z_2, z_3 образуют треугольннк в комплексной плоскости, причем внутренность треугольника лежит слева от стороны, идущей от z_1 к z_2. Показать, что если z движется вдоль прямой, соединяющей точкн $z=z_1$ и $z=z_2$, от некоторой точкн вблизн z_1 к некоторой точке вблизи z_2, то изменение

$$\operatorname{am}\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}\right)$$

почтн равно π.

7. Контур, содержащий три точки $z=z_1$, $z=z_2$, $z=z_3$, определен частями сторон треугольника, образованного z_1, z_2, z_3 н внешнимн по отношенню к треугольнику частями трех малых окружностей с центрами в этих же точках. Показать, что когда z опнсывает этот контур, то изменение

$$\operatorname{am}\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}\right)$$

равно -2π.

8. Показать, что любой замкнутый овал, окружающий все корни кубического уравнения $f(z)=0$, окружает также н оба корня производного уравнения $f'(z)=0$.

[Использовать тождество

$$f'(z)=f(z)\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}\right),$$

где z_1, z_2, z_3 — корнн уравнення $f(z)=0$, и результат примера 7.]

9. Показать, что корни уравнения $f'(z)=0$ являются фокусами эллипса, который касается сторон треугольннка (z_1, z_2, z_3) в их серединах.

[См. Чезаро, *Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисление бесконечно малых.*]

10. Распространить результат примера 8 на уравнения любой степени.

11. Еслн $f(z)$ н $\varphi(z)$ — два многочлена относительно z, γ — контур, не проходящий ни через однн корень $f(z)$, и $|\varphi(z)|<|f(z)|$ во всех точках γ, то уравнения

$$f(z)=0,\ f(z)+\varphi(z)=0,$$

имеют внутри γ одно и то же число корней.

12. Показать, что уравнення

$$e^z=az,\ e^z=az^2,\ e^z=az^3,$$

где $a>e$, имеют, соответственно, однн положительный корень, один положительный н один отрнцательный корень, один положительный н два комплексных корня внутри круга $|z|=1$.

(*Экз.* 1910 г.)

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Замечание о задачах, содержащих двойной предельный переход

В гл. IX и X мы встретились с некоторыми частными случаями одной общей задачи, играющей очень важную роль в анализе.

В п. 220 мы доказали, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots,$$

где $-1 < x \leqslant 1$, путем интегрирования уравнения

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots$$

в пределах от 0 до x. Мы доказали фактически следующее равенство:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2 dt - \ldots,$$

т. е. что *интеграл от суммы бесконечного ряда*

$$1 - t + t^2 - \ldots$$

в пределах от 0 до x равен сумме интегралов от его членов, взятых в тех же пределах. Другими словами, это означает, что операции суммирования от 0 до ∞ и интегрирования от 0 до x *перестановочны* в применении к функции $(-1)^n t^n$, т. е. что порядок, в котором они производятся, не играет роли.

Далее, в п. 223 мы доказали, что производная показательной функции

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

сама равна $\exp x$ или что

$$D_x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) = D_x 1 + D_x \frac{x}{1!} + D_x \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

т. е. что *производная суммы ряда равна сумме производных его членов*, или что операции суммирования от 0 до ∞ и дифференцирования по x перестановочны в применении к $\frac{x^n}{n!}$.

Между прочим, мы в том же пункте доказали, что $\exp x$ является непрерывной функцией от x, т. е. иначе говоря, что

$$\lim_{x\to\xi}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) = 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots =$$

$$= \lim_{x\to\xi} 1 + \lim_{x\to\xi}\frac{x}{1!} + \lim_{x\to\xi}\frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

или что предел суммы ряда равен сумме пределов его членов, или что сумма ряда непрерывна при $x=\xi$, или что операции суммирования от 0 до ∞ и перехода к пределу при $x\to\xi$ перестановочны в применении к $\frac{x^n}{n!}$.

В каждом из этих случаев мы давали специальное доказательство справедливости результата. Мы не доказали никакой общей теоремы, из которой справедливость любого из этих результатов следовала бы сразу. В примере XXXVII. 1 мы видели, что сумма конечного числа непрерывных членов сама непрерывна, а в п. 114 — что производная суммы конечного числа членов равна сумме их производных. В п. 165 мы установили соответствующую теорему для определенных интегралов. Таким образом, мы доказали, что в некоторых условиях операции, символически обозначаемые

$$\lim_{x\to\xi} \ldots,\ D_x \ldots,\ \int_a^b \ldots dx,$$

перестановочны с операцией суммирования конечного числа членов. Естественно предположить, что в некоторых условиях, которые можно точно сформулировать, эти операции будут перестановочны также и с операцией суммирования бесконечного числа членов. Естественно предполагать, что это будет так; но большего мы пока ничего сказать не можем.

Несколько дальнейших примеров перестановочных и неперестановочных операций помогут нам разъяснить этот вопрос.

(1) Умножение на 2 и умножение на 3 всегда перестановочны, так как

$$2\times 3\times x=3\times 2\times x$$

для всех значений x.

(2) Операция образования действительной части z никогда не перестановочна с умножением на i, если $z\neq 0$; в самом деле,

$$i\times \mathbf{Re}\,(x+iy)=ix,\quad \mathbf{Re}\,\{i\times(x+iy)\}=-y.$$

(3) Операции перехода к пределу при x или y стремящихся к нулю в применении к функции $f(x, y)$ могут быть как перестановочными, так и неперестановочными. Так,

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}(x+y)\}=\lim_{x\to 0}x=0,\quad \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0}(x+y)\}=\lim_{y\to 0}y=0,$$

тогда как

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

(4) Операции

$$\sum_1^{\infty}\ldots,\ \lim_{x\to 1}\ldots$$

могут быть как перестановочными, так и неперестановочными. Так если $x\to 1$ слева, то

$$\lim_{x\to 1}\left\{\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right\}=\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2,$$

$$\sum_1^{\infty}\left\{\lim_{x\to 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right\}=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2;$$

но, с другой стороны,

$$\lim_{x\to 1}\left\{\sum_{1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{(1-x)+(x-x^2)+\ldots\right\}=\lim_{x\to 1} 1=1,$$

$$\sum_{1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to 1}(x^{n-1}-x^n)\right\}=\sum_{1}^{\infty}(1-1)=0+0+\ldots=0.$$

Эти примеры показывают, что имеются три возможности в связи с перестановочностью двух данных операций, а именно: (1) операции могут быть всегда перестановочными, (2) они могут никогда не быть перестановочными, за исключением отдельных, очень частных случаев, и (3) они могут быть перестановочными в большинстве случаев, обычно встречающихся в анализе.

Действительно важным случаем (как показывают примеры, цитированные нами из гл. IX) является тот, в котором каждая операция содержит переход к пределу (как, например, операции дифференцирования или суммирования бесконечного ряда); такие операции мы будем называть *предельными*. Вопрос о том, являются ли две данные предельные операции перестановочными или нет, принадлежит к числу наиболее важных в математике. Но попытка ответить на этот вопрос в форме некоторых общих теорем вывела бы нас далеко за пределы этой книги.

Мы можем, однако, заметить, что характер ответа на поставленный общий вопрос можно предугадать из приведенных выше примеров. Если L и L' — две предельные операции, то величины $LL'z$ и $L'Lz$ не будут, *вообще говоря*, равны друг другу, если понимать слова „вообще говоря" в строгом смысле. Мы всегда сможем подобрать такое z, что $LL'z$ и $L'Lz$ будут отличны друг от друга. Но в общем случае они будут равны, если мы придадим словам „общий случай" более „практический" смысл и будем понимать их как означающие „в подавляющем большинстве встречающихся на практике случаев". В математической практике результат, полученный в предположении, что две предельные операции перестановочны, рассматривается как *вероятно* верный; во всяком случае, он дает ценное указание относительно характера решения рассматриваемой задачи. Но таким образом полученный результат, если он не следует из какой-либо общей теоремы или не подтверждается специальным исследованием данного вопроса (как мы это, например, сделали в п. 220), должен рассматриваться только как предполагаемый и не может рассматриваться как доказанный.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Бесконечное в анализе и в геометрии

Некоторые, хотя и не все, системы аналитической геометрии содержат „бесконечные" элементы, бесконечно удаленную прямую, круговые точки в бесконечности и т. п. Цель настоящей краткой заметки состоит в том, чтобы показать, что эти понятия никоим образом не зависят от аналитической теории пределов.

В дисциплине, которую можно назвать „обычной декартовой геометрией", *точка* является *парой действительных чисел* (x, y), *прямая* — классом точек, удовлетворяющих линейному соотношению $ax+by+c=0$, в котором a и b не равны одновременно нулю. Здесь нет бесконечных элементов, две прямые могут не иметь ни одной общей точки.

В системе действительной однородной геометрии точка является *классом троек действительных чисел* (x, y, z), не равных одновременно нулю, причем две тройки относятся к одному классу, если их элементы пропорциональны. Прямая является классом точек, которые удовлетворяют линейному соотношению $ax+by+cz=0$, где a, b, c не равны одновременно нулю. В некоторых системах каждая точка или прямая совершенно равноправна другой точке или прямой. В других системах некоторые „специальные" точки и прямые рассматриваются как каким-то образом отличные от других, и в соответствующей теории особый акцент делается на отношении этих специальных элементов к другим. Так, в дисциплине, которую можно назвать „действительной однородной декартовой геометрией", специальными являются те точки, для которых $z=0$, а единственной специальной прямой является $z=0$. Эта специальная прямая называется „бесконечно удаленной".

Настоящая книга не является монографией по геометрии, и здесь не место подробно останавливаться на этом вопросе. Важным является следующее обстоятельство. Бесконечное в анализе является „предельным", а не „актуальным" бесконечным. Символ „∞" рассматривался на протяжении всей книги как „неполный символ", т. е. символ, которому не приписывается какое-либо самостоятельное значение, хотя некоторым фразам, содержащим его, приписывается определенный смысл. Но *бесконечное в геометрии является актуальным, а не предельным бесконечным*. „Бесконечно удаленная прямая" — это прямая точно в таком же смысле, в каком всякая другая прямая есть прямая.

Можно установить соотношение между „однородной" и „обычной" декартовой геометрией, при котором каждый элемент первой системы, *за исключением специальных элементов*, имеет соответствующий ему элемент во второй системе. Например, прямой

$$ax+by+cz=0$$

соответствует прямая

$$ax+by+c=0.$$

Каждая точка первой прямой имеет соответствующую ей точку на второй, за исключением одной точки, а именно, той, для которой $z=0$. Когда (x, y, z) пробегает первую прямую таким образом, что эта точка стремится к специальной точке, для которой $z=0$, то соответствующая точка на второй прямой меняет свое положение так, что ее расстояние от начала координат стремится к бесконечности. Это соотношение важно с исторической точки зрения, так как оно является источником нашей терминологии в данном вопросе; оно часто также оказывается полезным для иллюстративных целей. Однако оно является не более как иллюстрацией, и никакое рациональное разъяснение геометрической бесконечности не может быть основано на нем. Недостаточно ясное понимание этих вопросов, столь часто встречающееся у студентов, происходит от того, что в распространенных учебниках аналитической геометрии эта иллюстрация иногда принимается за реальность.

Читателям, заинтересованным в соотношениях между анализом и геометрией, можно рекомендовать следующие книги:

Д. Гильберт, *Основания геометрии*, ГТТИ, М.—Л., 1948.

C. W. O'Hara and D. R. Ward, *An introduction to projective geometry*, Oxford, 1937;

G. de B. Robinson, *The foundations of geometry*, Toronto, 1940;

O. Veblen and J. W. Young, *Projective geometry*, vol. 1, New York, 1910,
и статью автора „What is geometry?“, *Mathematical Gazette*, vol. 15, 1925, стр. 309—316.

СОДЕРЖАНИЕ

(В конце содержания каждой главы мелким шрифтом приведен перечень некоторых вопросов, рассмотренных в примерах)

ГЛАВА I
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

ГЛАВА II
ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГЛАВА III

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ГЛАВА IV

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО АРГУМЕНТА

ГЛАВА V

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО ПЕРЕМЕННОГО. НЕПРЕРЫВНЫЕ И РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА VI

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

ГЛАВА VII

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Редакторы *Т. В. Солнцева* и *Я. И. Хургин*
Техн. редакторы *Б. И. Корнилов* и *А. Н. Никифорова*
Корректор *Б. Ерусалимский*

Подписано к печати 9/XII 1948 г. А-09614. Печ. л. 32. Уч.-изд. л. 36,6; 60×92 1/16. Цена 35 р. 65 к.
Изд. № 1/37. Заказ № 1480.

2-я типография „Печатный Двор" им. А. М. Горького треста „Полиграфкнига" ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.